Escalas, Gráficos, Funções

1 Gráficos

Normalmente um conjunto de valores teóricos ou mesmo as medidas feitas em experimentos são colocados em gráficos. Assim podemos ter uma ideia do comportamento das grandezas observadas. Um gráfico pode evidenciar uma relação entre grandezas, que às vezes é difícil estabelecer apenas inspecionando uma tabela. Para construirmos um gráfico precisamos primeiro definir dois ou mais eixos para representar as grandezas, e estabelecer uma escala nos eixos.

Um dos gráficos mais comuns é o que mostra uma escala linear entre as grandezas nos eixos. Por exemplo, a tabela 1 mostra duas grandezas, e a figura 1 mostra o gráfico com os eixos em escala linear. Há uma distância constante entre os valores nos eixos.

x	0	2	4	6	8
y	5	7,5	10	12,5	15

Tabela 1.

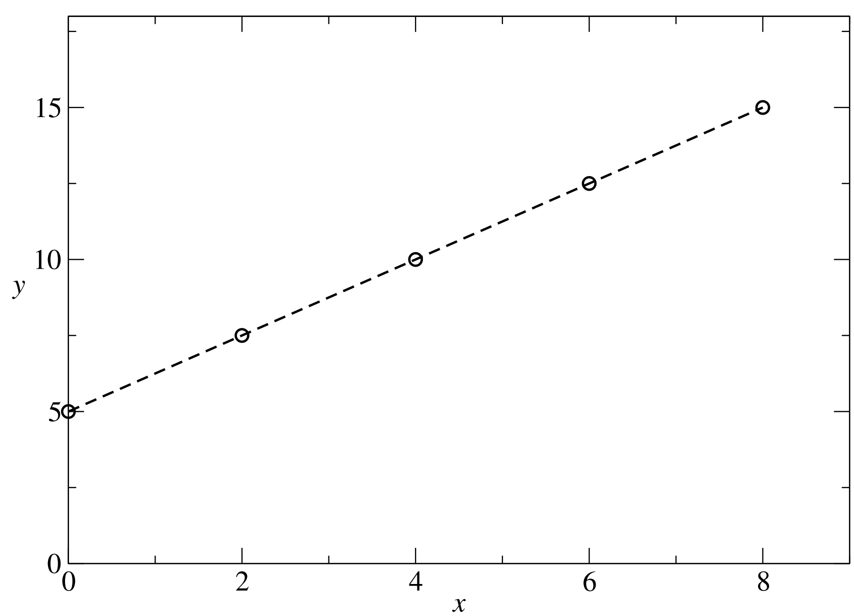

Fig. 1. Gráfico mostrando os dados da tabela 1, com os eixos em escala linear.

Notemos que a denominação escala linear se refere aos valores nos eixos, não se referindo ao comportamento das grandezas representadas. Essa relação pode ser qualquer. Na tabela 1 temos duas variáveis que são representadas por uma reta, mas essa relação pode ser qualquer. A equação que representa os dados da tabela 1 é,

$$y(x) = 5 + 1,25x\,,$$

que é a equação de uma reta. A equação geral de uma reta é,

$$y = a + bx\,,$$

em que a é a intersecção com o eixo vertical e b é a inclinação da reta. Para os dados da tabela 1 temos $a = 5$ e,

$$b = \frac{15-5}{8-0} = 1,25\,.$$

A tabela 2 mostra duas variáveis relacionadas por uma relação não-linear, e a figura 2 mostra o gráfico correspondente com os eixos em uma escala linear.

x	0	1	2	3	4	5
y	1	2	5	10	17	26

Tabela 2.

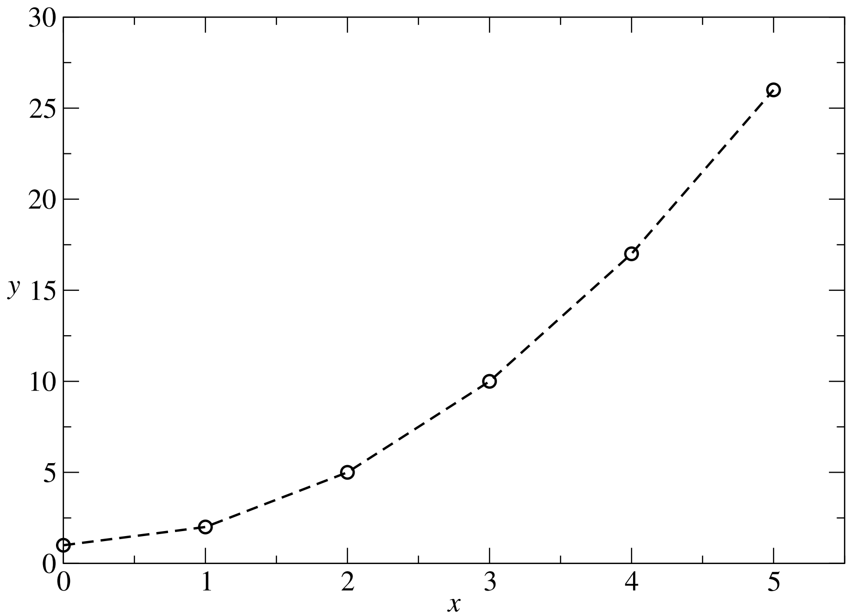

Fig. 2. Gráfico mostrando os dados da tabela 2, com os eixos em escala linear.

A equação que representa os dados da tabela 2 é,

$$y(x) = 1 + x^2\,,$$

que é a equação de uma parábola.

Nem sempre é óbvio descobrir a relação entre as variáveis em um gráfico. No caso de uma tabela experimental, por exemplo, a partir do gráfico podemos descobrir a equação da curva que melhor reproduz os dados. É o que chamamos de ajuste numérico. Esse assunto é uma área importante em matemática, e veremos aqui apenas alguns exemplos simples de gráficos.

Exemplo. A tabela 3 mostra a velocidade em função do tempo para uma certa partícula em movimento uniformemente variado (aceleração constante).

$t(s)$	2	4	6	8	10	12
$v(m/s)$	9	13	17	21	25	29

Tabela 3.

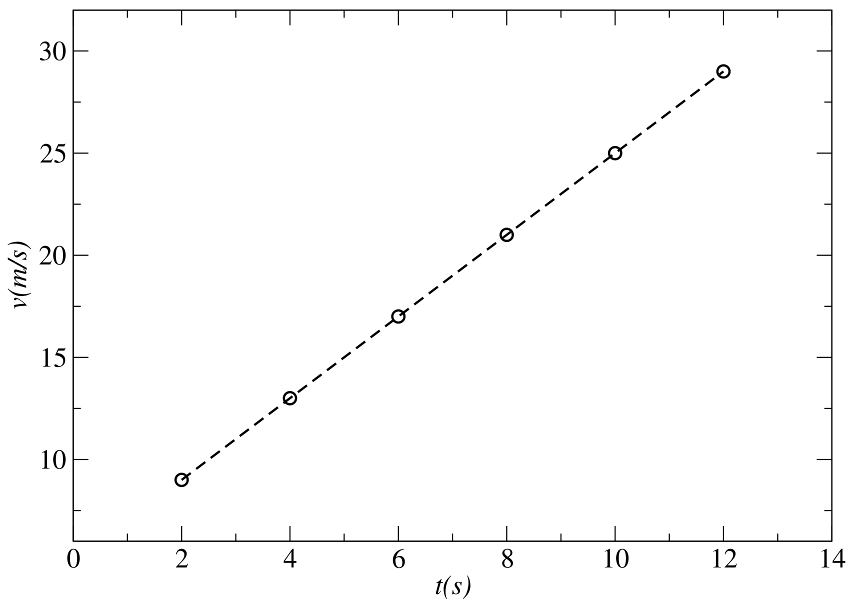

Fig. 3. Gráfico mostrando os dados da tabela 3, com os eixos em escala linear.

A figura 3 mostra o gráfico correspondente, representando uma reta. Podemos ver que a intersecção é $a = 5$ m/s, e a inclinação é,

$$b = \frac{29 - 9}{12 - 2} = 2\, m/s^2 \,.$$

Notemos que nesse caso as grandezas possuem unidades, bem como a e b. A equação da reta no gráfico da figura 3, correspondente aos dados da tabela 3, é,

$$v(t) = 5 + 2t \,,$$

em que usamos o sistema internacional de unidades.

Às vezes é mais conveniente utilizarmos uma relação não-linear para os eixos em um gráfico. Uma das escolhas mais comuns nesse caso é a escala logarítmica de base dez. Embora possamos em princípio utilizar qualquer base, a base dez é a mais utilizada. A tabela 4 mostra um exemplo de duas variáveis em que a relação entre elas, além de não ser linear, torna mais conveniente a representação em um gráfico utilizando uma escala não-linear para os eixos.

x	0	1	2	3	4	5
y	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5
$\log y$	0	1	2	3	4	5

Tabela 4.

A figura 4 mostra os dados da tabela 4 em um gráfico com escala linear nos eixos, e a figura 5 mostra os mesmos dados com escala logarítmica de base dez para o eixo vertical.

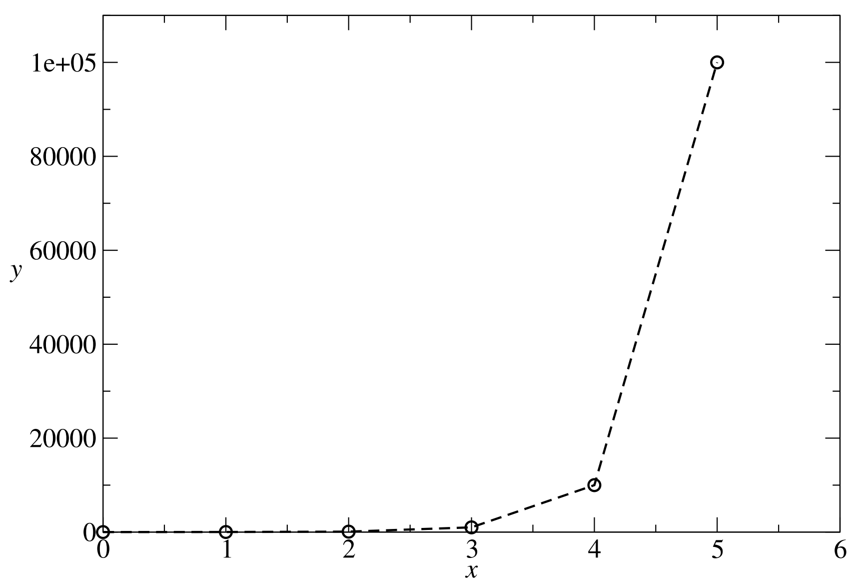

Fig. 4. Gráfico mostrando os dados da tabela 4, com os eixos em escala linear.

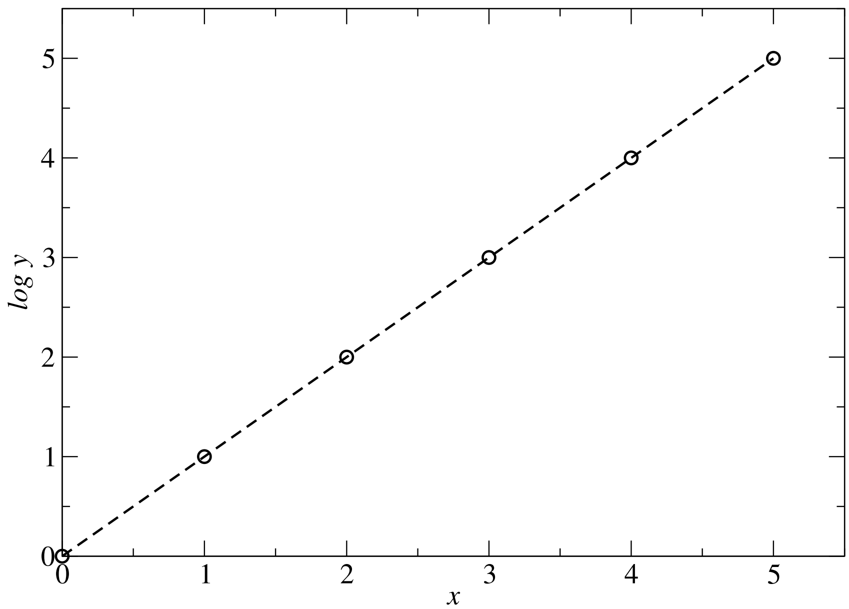

Fig. 5. Gráfico mostrando os dados da tabela 4, com o eixo x em escala linear e o eixo y em escala logarítmica.

Frequentemente ocorre que duas grandezas se relacionam por uma relação de potência, na forma,

$$y = ax^m ,$$

em que m é um número qualquer. Se $m = 1$, por exemplo, temos uma relação linear, e se $m = 2$ temos a equação de uma parábola. Muitas vezes encontramos experimentalmente valores quaisquer para m.

A equação acima pode ser convenientemente escrita em uma forma linear, tomando o logaritmo dos dois lados da equação. Escolhendo a base dez temos,

$$\log y = \log a + m \log x ,$$

que é a equação de uma reta, se a variável independente é $\log x$ e a variável dependente é $\log y$. A intersecção é $\log a$ e a inclinação é m, o expoente da relação de potência entre as variáveis.

Exemplo. A *taxa metabólica* R de um animal com massa M indica a quantidade de energia que o organismo utiliza por unidade de tempo. A tabela 5 mostra dados para cinco animais diferentes.

M(kg)	0,7	2	3	15	80
R(kcal/h)	2,5	5,4	$7,3$	$24,3$	$85,5$
$\log M$	-0,15	0,301	0,477	1,18	1,90
$\log R$	0,4	0,73	0,86	1,39	1,93

Tabela 5.

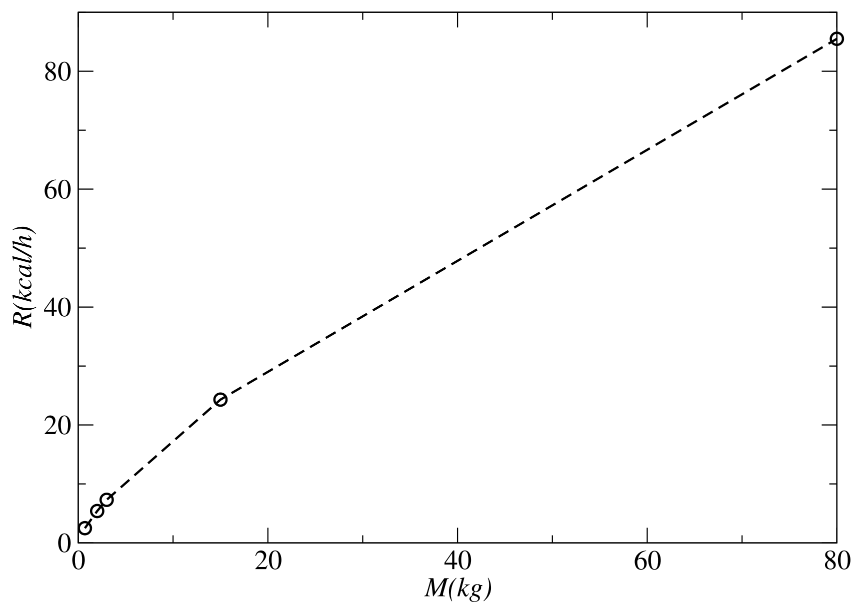

Fig. 6. Gráfico mostrando os dados da tabela 5, com os eixos em escala linear.

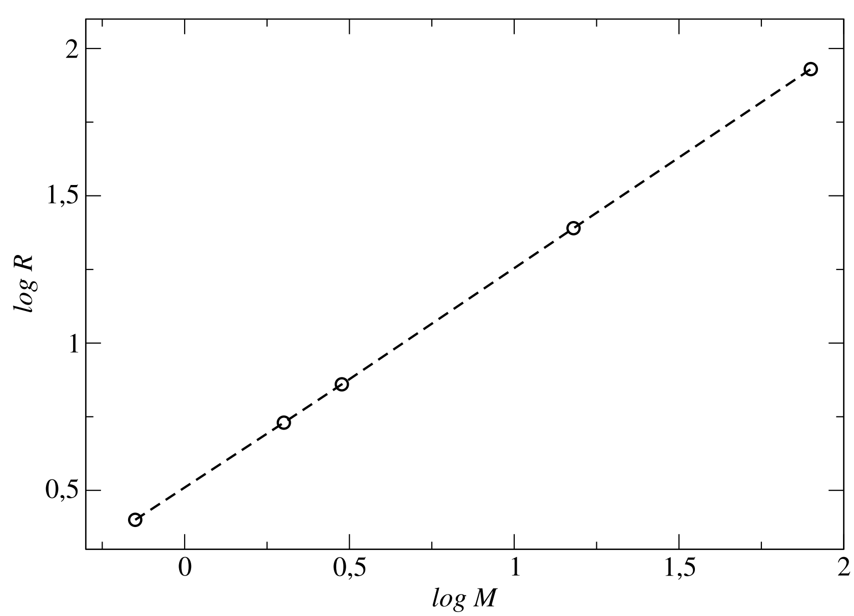

Fig. 7. Gráfico mostrando os dados da tabela 5, com os eixos em escala logarítmica.

A figura 6 mostra o gráfico de $R(M)$ em eixos com escala linear, e a figura 7 mostra os mesmos dados em escala logarítmica. Esse último mostra uma relação linear, logo podemos escrever,

$$\log R = \log k + m \log M\,.$$

Fazendo uma ajuste linear (esse processo se chama regressão linear) para os pontos no gráfico obtemos $\log k = 0,50741$ e $m = 0,74783 \cong 0,75 = 3/4$, logo a relação de potência entre R e M é,

$$R = kM^m\,.$$

Outra função comum é a *função exponencial*, representada por uma relação do tipo $y = kb^x$, em que k e b são constantes. A constante b pode ser qualquer, mas um caso comum é $b = e = 2,718\ldots$, a base dos logaritmos naturais. Nesse caso podemos escrever,

$$y = ke^{ax}\,,$$

com k e a constantes. Se $a > 0$ temos um *crescimento exponencial*, e se $a < 0$ temos um *decaimento exponencial*.

Exemplo. Um organismo unicelular se reproduz por *divisão binária* a uma taxa constante. Se temos inicialmente *duas bactérias* e cada uma se divide em *duas* a cada 20 minutos, temos o resultado mostrado na tabela 6. Denotamos por N o número de bactérias em um dado instante.

t(min)	0	20	40	60	80
N	2	4	8	16	32
$\ln N$	0,693	1,386	2,079	2,773	3,466

Tabela 6.

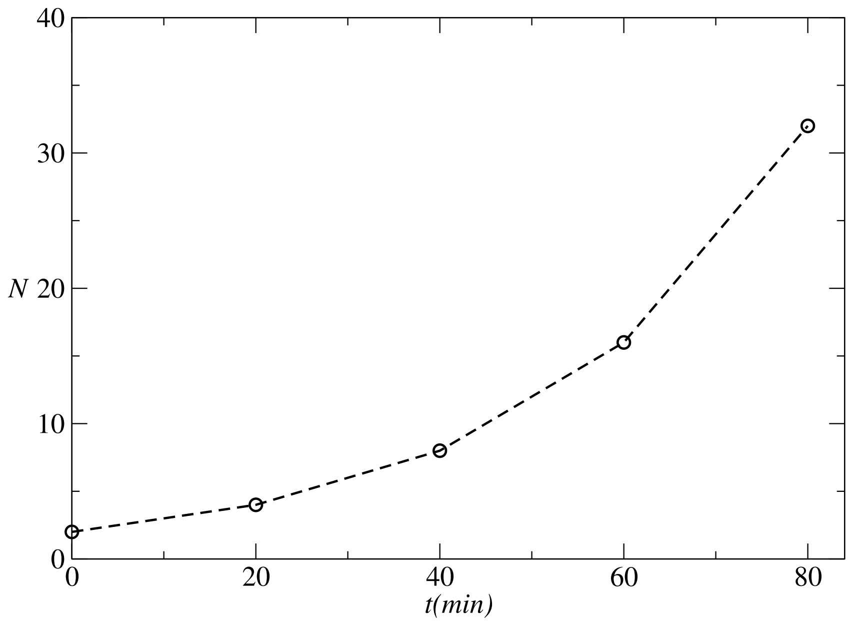

Fig. 8. Gráfico mostrando os dados da tabela 6, com os eixos em escala linear.

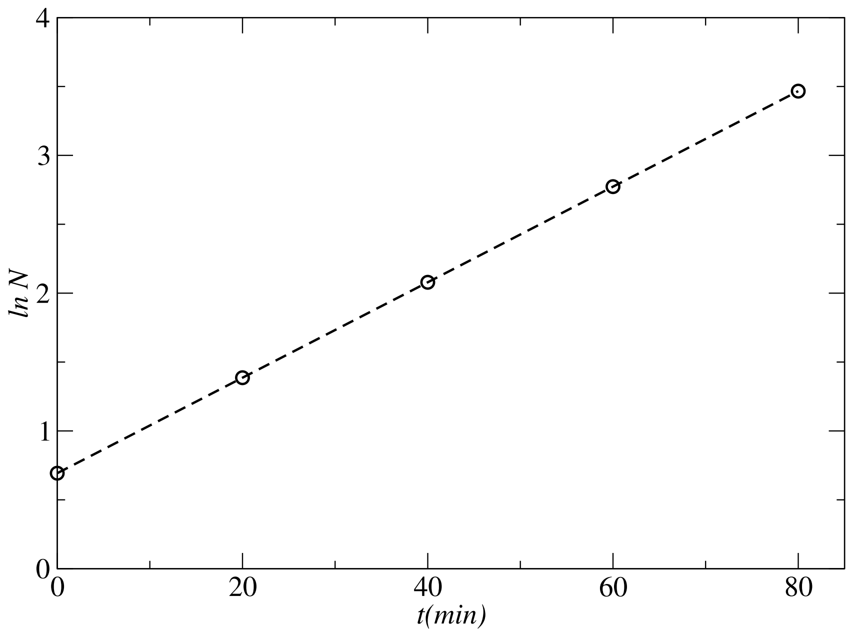

Fig. 9. Gráfico mostrando os dados da tabela 6, com o eixo x em escala linear e o eixo y em escala logarítmica.

A figura 8 mostra $N(t)$, com os eixos em escala linear, e a figura 9 mostra um gráfico *mono-log*, em que um dos eixos apenas é em escala logarítmica.

Representando N por uma função exponencial escrevemos,

$$N(t) = ke^{at} \, ,$$

logo,

$$\ln N = \ln k + at\,.$$

Fazendo o ajuste numérico obtemos $\ln k = 0,693$ e $a = 0,034665$, logo a função que representa os dados na tabela 6 é,

$$\ln N = 0,693 + (0,034665)t\,.$$

Exemplo. Considere uma substância que contém átomos radioativos de tecnécio (^{99}Tc). A atividade relativa A dessa amostra foi medida a cada duas horas, e foram encontrados os valores na tabela 7.

t(h)	0	2	4	6	8	10	12
A	1	0,79	0,63	0,50	0,40	0,32	0,25
$\ln A$	0	-0,24	-0,46	-0,69	-0,92	-1,14	-1,39

Tabela 7.

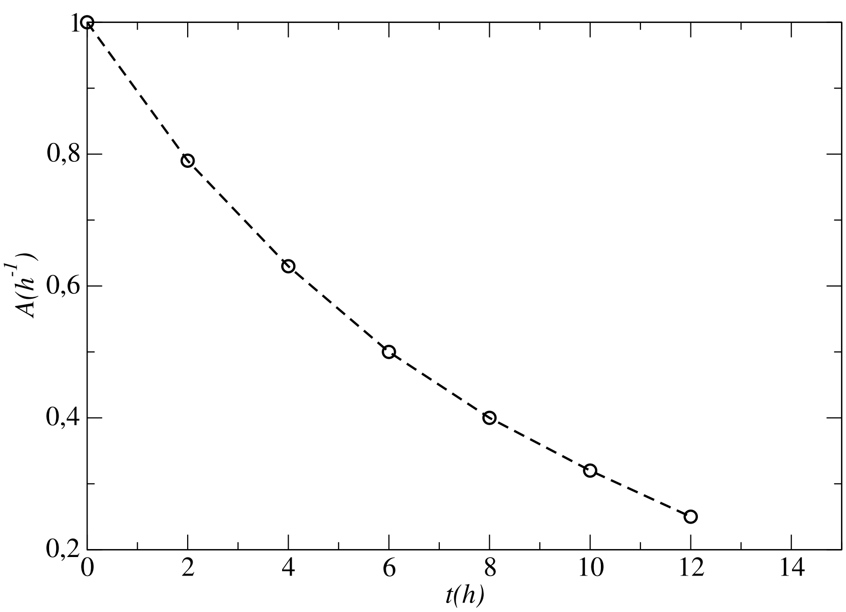

Fig. 10. Gráfico mostrando os dados da tabela 7, com os eixos em escala linear.

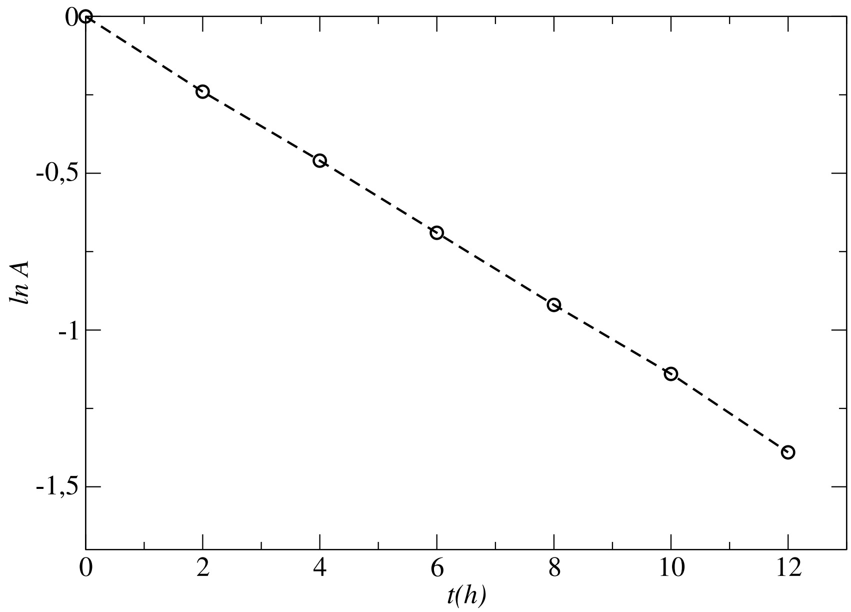

Fig. 11. Gráfico mostrando os dados da tabela 7, com o eixo x em escala linear e o eixo y em escala logarítmica.

A figura 10 mostra $A(t)$ em um gráfico com eixos em escala linear, em que vemos um decaimento exponencial. logo a relação entre essas grandezas será $A(t) = ke^{at}$, com $a < 0$.

A figura 11 mostra o gráfico em escala mono-log, em que obtemos uma reta. Escrevemos a equação da reta como,

$$\ln A = \ln k + at\,.$$

Calculando a inclinação da reta temos,

$$a = \frac{-1,39 - 0}{12 - 0} = -0,115\,,$$

enquanto $\ln k = 0$ e $k = 1$. Logo,

$$A(t) = e^{-0,115t}\,.$$

Essa é a relação funcional entre A e t.

A *atividade* A de uma amostra radioativa é a taxa com que os núcleos dos átomos da amostra *decaem*. Se em um dado instante t a mostra possui N

átomos com núcleos que podem decair, a atividade é dada por,

$$A(t) = -\frac{dN}{dt}\,,$$

em que A é expressa em desintegrações por unidade de tempo. Vemos nesse exemplo que a atividade segue uma lei de *decaimento exponencial*,

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}\,,$$

em que λ é a *constante de decaimento radioativo* dos átomos da amostra, e A_0 é a atividade em $t = 0$.

A *meia-vida* $T_{1/2}$ é o tempo necessário para que a atividade caia pela metade, ou seja,

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\lambda T_{1/2}}\,,$$

logo, tomando o logaritmo natural dos dois lados,

$$-\ln 2 = -\lambda T_{1/2}\,.$$

A meia-vida é então,

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}\,.$$

Nesse exemplo temos $\lambda = 0,116/\text{h}$ e $T_{1/2} = 5,98$ h $\cong 6$ h para a meia-vida do tecnécio.

A *vida média* T_m é o tempo médio que um núcleo sobrevive antes de decair, e é dado portanto por,

$$T_m = \frac{1}{\lambda}\,.$$

Para o tecnécio temos $T_m = 8,69\,h \cong 8,7\,h = 8h42min$. Notemos que $\lambda T_{1/2} = \ln 2$ e $\lambda T_m = 1$.

2 Escalas em biologia

As diversas características dos organismos vivos estão relacionadas com seu tamanho. Para estudar a relação entre a função biológica dos organismos e seu tamanho utilizamos o conceito de *escala*.

As propriedades biológicas de um organismo dependem do seu comprimento, área superficial, volume e massa. Para um organismo complexo, em geral existe um *comprimento característico*, ao qual são associados o tamanho, volume e massa. Como as funções de um organismo estão relacionadas com o comprimento característico? Vamos ver alguns exemplos.

Crescimento de um célula. Consideremos um célula de forma esférica. Sua área depende de duas dimensões ($\sim r^2$), e seu volume depende de três dimensões ($\sim r^3$). A sobrevivência da célula exige uma harmonia entre o crescimento superficial e do volume. O fluxo de nutrientes, água, O_2 e CO_2 ocorre pela superfície, enquanto a capacidade metabólica da célula é proporcional ao seu volume. Definimos as dimesões críticas como $r_<$ e $r_>$, respectivamente os raios mínimo e máximo para que a célula sobreviva. Uma célula com raio r colapsará se,

– $r < r_<$, pois seu metabolismo não será suficiente para dar conta do influxo de nutrientes por sua superfície;

– $r > r_>$, pois o fluxo de nutrientes por sua superfície não acompanhará sua capacidade metabólica.

Resistência em organismos de tamanhos diferentes. A aplicação mais comum do conceito de escala relaciona-se com a capacidade de um animal suportar seu próprio peso e suportar pesos externos. Assim, a capacidade de um osso de suportar uma compressão ou tensão é proporcional à área da sua seção transversal, ou seja, $\sim l^2$, em que l é o comprimento característico do organismo correspondente. Dessa forma, um animal duas vezes maior do que outro poderá suportar uma carga quatro vezes maior. A massa suportada pelos membros de um ser vivo é proporcional ao seu volume, ou seja, $\sim l^3$. Um animal três vezes maior do que outro pode ter massa até 27 vezes maior.

A regra de Kleiber. Os animais e as plantas crescem até atingir um tamanho máximo. Há uma relação entre a massa de um animal e a energia calorífica irradiada, devida ao seu metabolismo, conhecida como *regra de Kleiber*. O princípio matemático é a *escala de um quarto de potência*. Segundo essa regra, a taxa de emissão de energia calorífica R se relaciona com a massa do animal por,

$$R = kM^m \, ,$$

com $m = 3/4 = 0,75$. Tomando o logaritmo decimal dos dois lados dessa equação,

$$\log R = \log k + m \log M \, .$$

A figura 7 mostra o gráfico dessa relação em escala logarítmica dos eixos. A inclinação da reta é $m = 0,75$.

Um outro exemplo do conceito de escala envolve a relação entre a altura h que uma árvore pode atingir e o diâmetro d do tronco. Consideremos um cilindro de altura h com diâmetro d e massa M. A relação obtida para a altura crítica de um cilindro é,

$$h_c = k[Y/\rho]^{1/3} d^{2/3} \, ,$$

e, que ρ é a densidade, Y é um parâmetro relacionado com a elasticidade do material, e k é uma constante de ordem um. Podemos portanto afirma que a altura crítica de um cilindro é proporcional ao seu diâmetro elevado à potência 2/3.

Exemplo. O crescimento de um caule de uma determinada planta é caracterizado pelo parâmetro $\lambda = h/d$. A tabela 8 mostra o valor de $\lambda_{\text{máx}}$ para algumas plantas.

	h(m)	$\lambda_{\text{máx}}$
centeio	1,5	500
bambu	25-40	60
palmeira	30-40	60
pinheiro	70	42
eucalipto	130	28

Tabela 8.

A figura 12 mostra o gráfico para os dados da tabela 9, em escala logarítmica.

h(m)	d(m)	λ
1,5	0,003	500
3,0	0,008	375
9,0	0,04	225
18	0,12	150
36	0,35	102
72	1,0	72
144	2,8	52
288	8,0	36

Tabela 9.

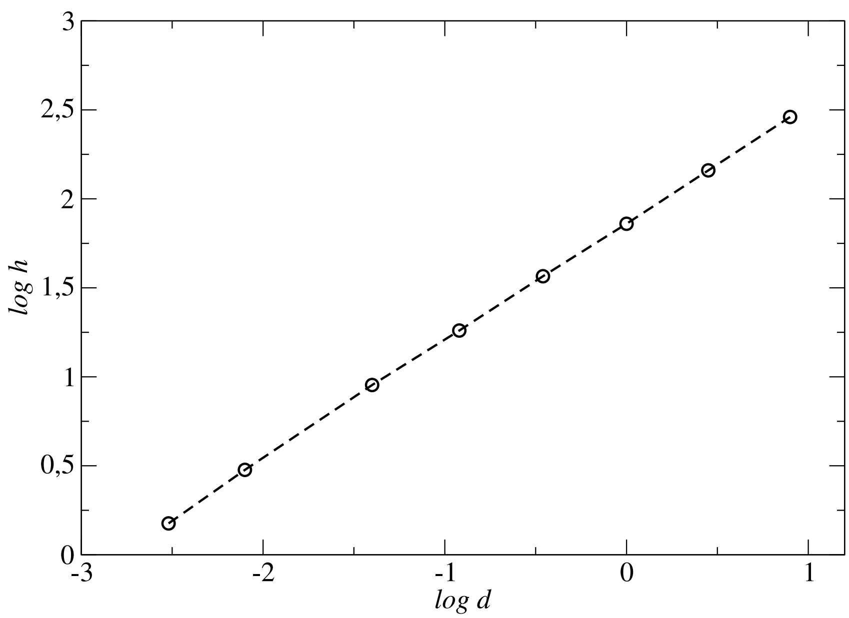

Fig. 12. Gráfico mostrando os dados da tabela 9, com os eixos em escala logarítmica.

Fazendo o ajuste numérico obtemos a equação da reta,

$$\log h = \log c + k \log d \, ,$$

correspondente à equação,

$$h = cd^k \, ,$$

com $\log c = 1,866$ e $k = 0,66352 \cong 2/3$.

3 Problemas

1. Foi observado o crescimento de duas plantas durante 4 semanas. A altura em cm de cada planta é mostrada na tabela abaixo. (a) Construa um gráfico para esses dados, como na figura 13. (b) Faça o ajuste linear para esses dados e mostre que as equações correspondentes são

$$h_1 = -0,4 + 15,2\,t\,,$$
$$h_2 = 0,8 + 27,4\,t\,.$$

Essas funções correspondem às retas na figura 1. (c) Calcule a taxa de crescimento dh/dt de cada planta.

t	h_1	h_2
0	0	0
1	15	28
2	28	58
3	47	82
4	60	110

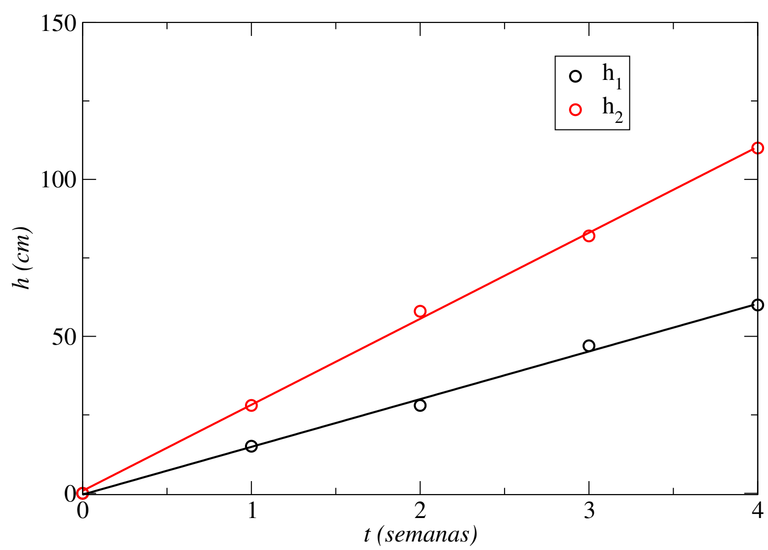

Fig. 13. Problema 1.

2. A tabela abaixo mostra a massa molecular M e o raio r de algumas moléculas. Também temos os logaritmos decimais. (a) Faça um gráfico de r em função de M (figura 14). (b) Faça um gráfico de $log\, r$ em função de $log\, M$ (figura 15). Faça o ajuste linear para esses dados e mostre que a equação correspondente é

$$log\, r = -0,25 + 0,36\, log\, M\,.$$

Essa função corresponde à reta na figura 3. (c) Calcule o raio para as seguintes moléculas: catalase (M=250000); H_2O (M=18); O_2 (M=32).

Molécula	M(Da)	r(Å)	$log\, M$	$log\, r$
Glicose	180	3,9	2,26	0,59
Sacarose	390	4,8	2,59	0,68
Rafinose	580	5,6	2,76	0,75
Inulina	5000	12,5	3,70	1,10
Ribonuclease	13500	18	4,13	1,25
Lactoglobulina	35000	27	4,54	1,43
Hemoglobina	68000	31	4,83	1,49

Com a relação acima obtemos:

Catalase: $r = 51,88$ *Å.*

H_2O*:* $r = 1,62$ *Å.*

O_2: $r = 2$ Å.

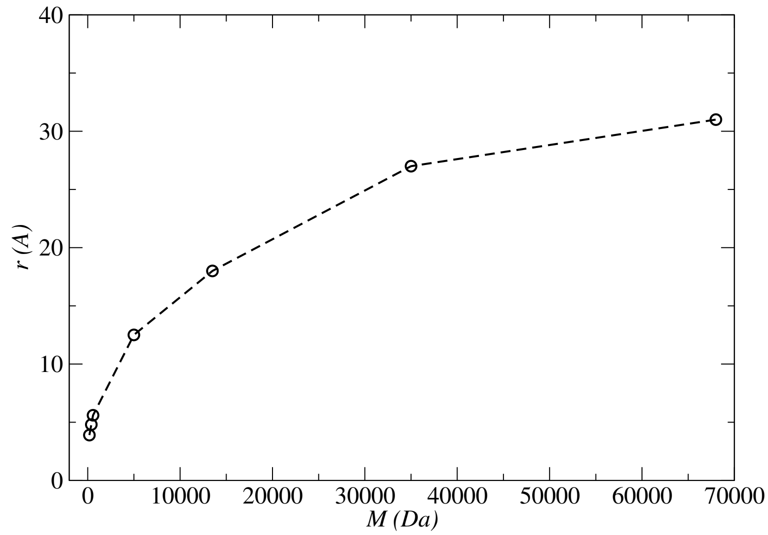

Fig. 14. Problema 2.

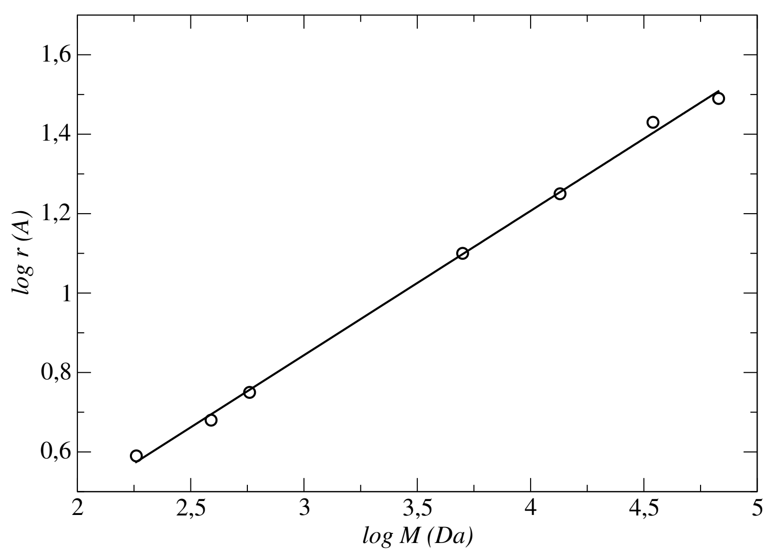

Fig. 15. Problema 2.

3. Uma fonte de ouro radioativo ^{198}Au tem inicialmente 10^8 átomos. Após 2,7 dias, a fonte terá 5×10^7 átomos radioativos; após 5,4 dias, ela terá 25×10^6 átomos; após 8,1 dias, terá $12,5 \times 10^6$ átomos, e assim por diante. (a) Faça um gráfico desses dados. (b) Determine a *meia-vida* desse elemento (2,7 dias).

Construindo uma tabela com os dados acima temos:

t	N
0	10^8
2,7	5×10^7
5,4	25×10^6
8,1	$12,5 \times 10^6$

Vemos que a cada 2,7 dias o número de átomos radioativos na amostra cai pela metade. Por definição esse tempo é a meia-vida $T_{1/2}$, logo $T_{1/2} = 2,7$ dias.

4. Uma dose D de um certo medicamento aumenta a concentração plasmática de 0 para C_0. Depois disso a concentração C apresenta um *decaimento exponencial*, dado por $C(t) = C_0 e^{-a\,t}$. Em um certo instante τ, que dose do medicamento deve ser aplicada para elevar sua concentração plasmática novamente para C_0? ($(1 - e^{-a\,\tau})D$).

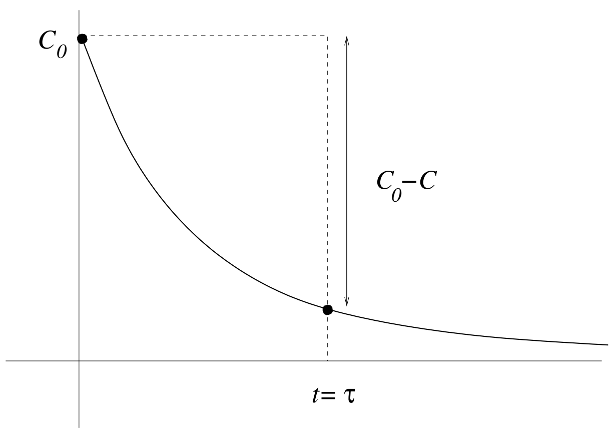

Fig. 16. Problema 4.

No instante 0 a concentração é C_0, e a dose necessária é D. No instante τ a concentração é $C_0 - C$. Para aumentarmos a concentração até C_0 precisamos de uma fração de medicamento dada por (fig. 16)

$$\frac{C_0 - C}{C_0} D = \frac{C_0 - C_0 e^{-a\,\tau}}{C_0} D = (1 - e^{-a\,\tau}) D\,.$$

5. Uma célula esférica de raio R divide-se em duas células de raio r. (a) Calcule o fator de escala ($1/2^{1/3} \cong 0,79$). (b) Calcule a razão entre a área da célula filha e da célula original ($1/2^{2/3} \cong 0,63$). (c) Calcule a razão entre o volume da célula filha e da célula original ($1/2$).

O volume total antes e depois da divisão é o mesmo, logo,

$$\frac{4\pi}{3}R^3 = 2\frac{4\pi}{3}r^3\,,$$

de onde temos

$$r = \frac{R}{2^{1/3}}\,.$$

O fator de escala é então

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{2^{1/3}} \cong 0,79\,.$$

A razão entre as áreas é (A_i é a área de uma célula filha)

$$\frac{A_i}{A} = \frac{4\pi r^2}{4\pi R^2} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{1}{2^{2/3}} \cong 0,63\,,$$

e a razão entre os volumes é

$$\frac{V_i}{V} = \frac{4\pi r^3/3}{4\pi R^3/3} = \left(\frac{r}{R}\right)^3 = \frac{1}{2}\,.$$

6. Compare a força muscular de duas pessoas, uma com altura $h_1 = 1,5$ m e a outra com altura $h_2 = 1,8$ m ($F_1 \cong 0,7F_2$).

A força muscular depende da área transversal dos músculos, logo varia com o quadrado de alguma dimensão linear. Assim,

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{h_1^2}{h_2^2} = 0,69 \cong 0,7\,.$$

7. Uma pessoa tem altura 1,6 m e massa 55 kg. Qual é aproximadamente a massa de uma pessoa de altura 1,7 m? (66 kg).

Como a massa varia com o volume, temos $m \sim l^3$, em que l é algum comprimento característico. Assim,

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{l_2^3}{l_1^3} \cong 1,2\,.$$

A massa m_2 é então $m_2 = 1,2m_1 = 66$ kg.

8. Em mamíferos, o produto do volume do coração vezes sua frequência cardíaca é proporcional à taxa metabólica. Se o fator de escala entre dois mamíferos é $L = l_2/l_1$, qual é a relação entre as frequências cardíacas? ($L^{-0,75}$).

Sendo o volume do coração V, a frequência cardíaca N, e a taxa metabólica R, temos

$$V\,N \sim R\,,$$

logo,

$$\frac{V_1\,N_1}{V_2\,N_2} = \frac{R_1}{R_2} = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^a\,,$$

com $a = 0,75$. Portanto,

$$\frac{l_1^3\,N_1}{l_2^3\,N_2} = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^{3a}\,,$$

de onde temos

$$\frac{N_2}{N_1} = \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^{3a-3} = L^{-0,75}\,,$$

com $L = l_2/l_1$.

9. Uma árvore de altura 100 m possui parâmetro $\lambda = 15$. Qual é o valor do seu diâmetro? (6,7 m).

Como $\lambda = h/d$, vem

$$d = \frac{h}{\lambda} = 6,67\,m\,.$$