6 - A equação do calor em coordenadas cartesianas

A equação da condução do calor é,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \nabla^2 u\,. \tag{1}$$

Substituindo $u(\mathbf{r}, t) = F(\mathbf{r})T(t)$,

$$\begin{aligned} FT' &= \kappa T \nabla^2 F\,, \\ \frac{T'}{T} &= \kappa \frac{\nabla^2 F}{F} = -\lambda^2\,. \end{aligned}$$

Obtemos assim a equação para T,

$$T' + \lambda^2 T = 0\,, \tag{2}$$

com solução,

$$T(t) = Ce^{-\lambda^2 t}\,. \tag{3}$$

A equação para F fica,

$$\nabla^2 F + k^2 F = 0\,, \tag{4}$$

com,

$$k^2 = \frac{\lambda^2}{\kappa}\,. \tag{5}$$

1 Considerando $u(x, t)$

Em uma dimensão, em coordenadas cartesianas, a equação do calor fica,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \tag{6}$$

Substituímos,

$$u(x, t) = T(t)X(x)\,, \tag{7}$$

obtendo,

$$T'X = \kappa T X''\,,$$
$$\frac{T'}{T} = \kappa \frac{X''}{X} = -\lambda^2\,,$$

em que λ é uma constante. A equação para T fica,

$$T' + \lambda^2 T = 0\,, \tag{8}$$

e a função T é,

$$T(t) = Ce^{-\lambda^2 t}\,. \tag{9}$$

A equação para X é,

$$X'' + \omega^2 X = 0\,, \tag{10}$$

com $\omega^2 = \lambda^2/\kappa$. A função X é assim,

$$X(x) = A \operatorname{sen}\, \omega x + B \cos \omega x\,. \tag{11}$$

A solução geral é portanto, usando o princípio de superposição,

$$u(x,t) = \sum_{i=1} (A_i \operatorname{sen}\, \omega_i x + B_i \cos \omega_i x) e^{-\lambda_i^2 t}\,. \tag{12}$$

Se $\lambda = 0$ a solução é,

$$T = \text{constante}\,, \quad X(x) = Ax + B\,, \tag{13}$$

logo,

$$u(x,t) = Ax + B\,. \tag{14}$$

Vemos que esse caso corresponde ao caso estacionário.

2 Problemas

1. Encontrar a solução contínua na região fechada (Tijonov [12], p. 227; Churchill [13], p. 104, probl. 1),

$$0 \le x \le L\,, \quad 0 \le t \le T\,,$$

da equação do calor homogênea,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,$$
$$0 < x < L\,, \;\; 0 < t \leq T\,,$$

que satisfaz a condição inicial,

$$u(x,0) = \varphi(x)\,, \;\; 0 \leq x \leq L\,,$$

e as condições de contorno homogêneas,

$$u(0,t) = u(L,t) = 0\,, \;\; 0 \leq t \leq T\,.$$

A solução é,

$$u(x,t) = A_0 x + B_0 + \sum_{i=1} (A_i \, sen \; \omega_i x + B_i \cos \omega_i x) e^{-\lambda_i^2 t}\,,$$

com $\omega_i^2 = \lambda_i^2/\kappa$. *As condições de contorno e inicial nos dão as equações,*

$$\begin{aligned}
u(x,0) &= A_0 x + B_0 + \sum_{i=1} (A_i \, sen \; \omega_i x + B_i \cos \omega_i x) = \varphi(x)\,, \\
u(0,t) &= B_0 + \sum_{i=1} B_i e^{-\lambda_i^2 t} = 0\,, \\
u(L,t) &= A_0 L + B_0 + \sum_{i=1} (A_i \, sen \; \omega_i L + B_i \cos \omega_i L) e^{-\lambda_i^2 t} = 0\,.
\end{aligned}$$

Satisfazemos as condições acima escolhendo,

$$B_i = 0\,, \;\; i = 0, 1, 2, \ldots$$
$$A_0 = 0\,,$$
$$\omega_i = i\pi/L\,, \;\; i = 1, 2, \ldots$$

Com isso temos,

$$\lambda_i^2 = \kappa \omega_i^2 = \kappa (i\pi/L)^2\,.$$

A condição para φ *fica então,*

$$\sum_{i=1} A_i \, sen \; (i\pi x/L) = \varphi(x)\,.$$

Uma série de Fourier de senos para uma função f *é,*

$$f(x) = \sum_{j=1} b_j \, sen\, (j\pi x/L) \,,$$

$$b_j = \frac{2}{L} \int_0^L f(x')\, sen\, (j\pi x'/L)\, dx' \,.$$

Comparando com a série para φ obtemos,

$$A_i = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x')\, sen\, (i\pi x'/L)\, dx' \,,$$

$$\varphi(x) = \frac{2}{L} \sum_{i=1} sen\, (i\pi x/L) \int_0^L \varphi(x')\, sen\, (i\pi x'/L)\, dx' \,.$$

A solução u é então,

$$u(x,t) = \frac{2}{L} \sum_{i=1} sen\, (i\pi x/L) e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t} \int_0^L \varphi(x')\, sen\, (i\pi x'/L)\, dx' \,.$$

Se $\varphi = 0$, a solução é identicamente nula.

Vamos verificar que a solução acima satisfaz de fato a equação do calor. Temos,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{2}{L} \sum_{i=1} \kappa \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 sen\, (i\pi x/L) e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t} \int_0^L \varphi(x')\, sen\, (i\pi x'/L)\, dx' \,, \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{2}{L} \sum_{i=1} \frac{i\pi}{L} \cos(i\pi x/L) e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t} \int_0^L \varphi(x')\, sen\, (i\pi x'/L)\, dx' \,, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\frac{2}{L} \sum_{i=1} \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 sen\, (i\pi x/L) e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t} \int_0^L \varphi(x')\, sen\, (i\pi x'/L)\, dx' \,.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \,,$$

como deve ser.

Podemos escrever a solução de outra forma. Fazemos,

$$u(x,t) = \int_0^L G(x, x'; t) \varphi(x')\, dx' \,,$$

com a função de Green definida por,

$$G(x,x';t)=\frac{2}{L}\sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2t}\, sen\,(i\pi x/L)\, sen\,(i\pi x'/L)\,.$$

2. Considere o problema anterior com $\varphi(x)=u_0$ =constante. Notemos que nesse caso temos condições iniciais descontínuas (Tijonov [12], p. 234; Churchill [13], p. 104, probl. 2).

Fazendo $\varphi(x)=u_0$ no problema anterior, a solução fica,

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{2}{L}\sum_{i=1} sen\,(i\pi x/L)e^{-\kappa(i\pi/L)^2t}\int_0^L \varphi(x')\, sen\,(i\pi x'/L)\, dx'\,,\\
u(x,t) &= \frac{2}{L}\sum_{i=1} sen\,(i\pi x/L)e^{-\kappa(i\pi/L)^2t}\int_0^L u_0\, sen\,(i\pi x'/L)\, dx'\,,\\
u(x,t) &= \frac{2u_0}{L}\sum_{i=1} sen\,(i\pi x/L)e^{-\kappa(i\pi/L)^2t}\int_0^L sen\,(i\pi x'/L)\, dx'\,.
\end{aligned}$$

Usando a integral,

$$\int_0^a sen\,(i\pi\xi/a)d\xi=\begin{cases}\dfrac{2a}{i\pi}\,, & i\ \acute{\imath}mpar\,,\\ 0\,, & i\ par\,,\end{cases}$$

obtemos,

$$u(x,t)=\frac{2u_0}{L}\sum_{i=1} sen\,[(2i-1)\pi x/L]e^{-(2i-1)^2\pi^2\kappa t/L^2}\frac{2L}{(2i-1)\pi}\,,$$

ou,

$$u(x,t)=\frac{4u_0}{\pi}\sum_{i=1}\frac{sen\,[(2i-1)\pi x/L]}{2i-1}e^{-(2i-1)^2\pi^2\kappa t/L^2}\,.$$

3. Considere uma barra em $0<x<\pi$, com condições de contorno homogêneas e condição inicial $\varphi(x)=\operatorname{sen}x$. Calcule $u(x,t)$ (Churchill [13], p. 104, probl. 3).

A solução é,

$$u(x,t)=A_0x+B_0+\sum_{i=1}(A_i\, sen\,\omega_i x+B_i\cos\omega_i x)e^{-\lambda_i^2t}\,,$$

com $\omega_i^2 = \lambda_i^2/\kappa$. *As condições de contorno e inicial nos dão as equações,*

$$\begin{aligned} u(x,0) &= A_0 x + B_0 + \sum_{i=1} (A_i \, sen \, \omega_i x + B_i \cos \omega_i x) = \, sen \, x \, , \\ u(0,t) &= B_0 + \sum_{i=1} B_i e^{-\lambda_i^2 t} = 0 \, , \\ u(\pi,t) &= A_0 \pi + B_0 + \sum_{i=1} (A_i \, sen \, \omega_i \pi + B_i \cos \omega_i \pi) e^{-\lambda_i^2 t} = 0 \, . \end{aligned}$$

Satisfazemos as condições acima escolhendo,

$$\begin{aligned} &B_i = 0 \, , \quad i = 0, 1, 2, \ldots \\ &A_0 = 0 \, , \\ &\omega_i = i \, , \quad i = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Com isso a condição inicial fica,

$$u(x,0) = \sum_{i=1} A_i \, sen \, \omega_i x = \, sen \, x \, ,$$

o que nos dá,

$$A_1 = 1 \, , \quad A_i = 0 \, , \quad i = 2, 3, \ldots$$

A solução é então,

$$u(x,t) = A_1 \, sen \, (\omega_1 x) \, e^{-\lambda_1^2 t} = \, sen \, x \, e^{-\kappa t} \, ,$$

pois $\lambda_1^2 = \kappa \omega_1^2 = \kappa$.

4. Considere uma barra em $0 < x < L$ com condições de contorno homogêneas e condição inicial descontínua, (Churchill [13], p. 104, probl. 4, com $B = 0$),

$$u(x,0) = \begin{cases} A \, , & 0 < x < L/2 \, , \\ B \, , & L/2 < x < L \, . \end{cases}$$

A solução é,

$$u(x,t) = A_0 x + B_0 + \sum_{i=1} (A_i \, sen \, \omega_i x + B_i \cos \omega_i x) e^{-\lambda_i^2 t} \, ,$$

com $\omega_i^2 = \lambda_i^2/\kappa$. *As condições de contorno e inicial nos dão as equações,*

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= A_0 x + B_0 + \sum_{i=1} (A_i \, sen \, \omega_i x + B_i \cos \omega_i x) = \begin{cases} A\,, & 0 < x < L/2\,, \\ B\,, & L/2 < x < L\,. \end{cases} \quad , \\
u(0,t) &= B_0 + \sum_{i=1} B_i e^{-\lambda_i^2 t} = 0\,, \\
u(L,t) &= A_0 L + B_0 + \sum_{i=1} (A_i \, sen \, \omega_i L + B_i \cos \omega_i L) e^{-\lambda_i^2 t} = 0\,.
\end{aligned}
$$

Satisfazemos as condições acima escolhendo,

$$
\begin{aligned}
& B_i = 0\,, \quad i = 0, 1, 2, \ldots \\
& A_0 = 0\,, \\
& \omega_i = i\pi/L\,, \quad i = 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

A condição inicial fica assim,

$$
u(x,0) = \sum_{i=1} A_i \, sen \, (i\pi x/L) = \begin{cases} A\,, & 0 < x < L/2\,, \\ B\,, & L/2 < x < L\,. \end{cases} \quad .
$$

Multiplicando por $sen \, (j\pi x/L)$ *e integrando em* x*,*

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=1} A_i \int_0^L sen \, (i\pi x/L) \, sen \, (j\pi x/L) dx = \\
& = A \int_0^{L/2} sen \, (j\pi x/L) dx + B \int_{L/2}^L sen \, (j\pi x/L) dx\,.
\end{aligned}
$$

Usando os resultados,

$$
\int_0^L sen \, (i\pi x/L) \; sen \, (j\pi x/L) \, dx = \begin{cases} 0\,, & i \neq j\,, \\ L/2\,, & i = j\,. \end{cases}
$$

$$
\int_0^{L/2} sen \, (j\pi x/L) dx = \frac{1 - \cos(j\pi/2)}{j\pi/L}\,,
$$

$$
\int_{L/2}^L sen \, (j\pi x/L) dx = \frac{\cos(j\pi/2) - \cos(j\pi)}{j\pi/L}\,,
$$

obtemos,

$$A_j \frac{L}{2} = A \frac{1 - \cos(j\pi/2)}{j\pi/L} + B \frac{\cos(j\pi/2) - \cos(j\pi)}{j\pi/L} \,.$$

Os coeficientes A_j são portanto,

$$A_j = 2A \frac{1 - \cos(j\pi/2)}{j\pi} + 2B \frac{\cos(j\pi/2) - \cos(j\pi)}{j\pi} \,.$$

Usando $2\,sen^2 x = 1 - \cos 2x$ no primeiro termo do lado direito,

$$A_j = 2A \frac{2\,sen^2(j\pi/4)}{j\pi} + 2B \frac{\cos(j\pi/2) - \cos(j\pi)}{j\pi} \,.$$

A solução é portanto,

$$u(x,t) = \sum_{i=1} \left[4A \frac{sen^2(i\pi/4)}{i\pi} + 2B \frac{\cos(i\pi/2) - \cos(i\pi)}{i\pi} \right] \; sen\;(i\pi x/L) e^{-i^2\pi^2\kappa t/L^2} \,,$$

5. Duas barras de ferro de 20 cm, uma a temperatura 100ºC e a outra a temperatura 0ºC, são colocadas em contato, e as faces externas são mantidas a 0ºC. Sendo $\kappa = 0,15$ (unidades CGS), calcule a temperatura 10 min após as barras terem sido colocadas em contato, na face comum e em pontos a 10 cm dela (37ºC, 33ºC, 19ºC; Churchill [13], p. 105, probl. 5).

Usando o resultado do problema anterior obtemos, com $A = 100$, $B = 0$,

$$\begin{aligned}
u(10, 600) &= 25,838 + 6,9097 + 0,10146 + \ldots \cong 32,849^o C \,, \\
u(20, 600) &= 36,541 + \ldots \cong 36,541^o C \,, \\
u(30, 600) &= 25,838 - 6,9097 + 0,10146 + \ldots \cong 19,03^o C \,.
\end{aligned}$$

Escrevemos apenas os termos significativos, os restantes são desprezíveis.

6. Se as barras do problema anterior são de concreto, com $\kappa = 0,005$ (unidades CGS), em quanto tempo teremos as mesmas temperaturas nos mesmos pontos? (Churchill [13], p. 105, probl. 6).

Usando $\kappa = 0,005$ (unidades CGS), teremos as mesmas temperaturas nos mesmos pontos se o produto κt for o mesmo. Assim,

$$\kappa_1 t_1 = \kappa_2 t_2 \,,$$

logo,

$$t_2 = \frac{\kappa_1 t_1}{\kappa_2} = \frac{0,15 \times 600}{0,005} = 18000\,s = 300\,min = 5\,h \,.$$

7. Encontrar a solução da equação do calor homogênea (Tijonov [12], p. 245),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,$$

no intervalo $(0, L)$, que satisfaz a condição inicial,

$$u(x,0) = \varphi(x)\,, \quad 0 \leq x \leq L\,,$$

e as condições de contorno não-homogêneas constantes,

$$u(0,t) = u_1\,, \quad u(L,t) = u_2\,.$$

Escrevemos a solução como uma soma da solução para o caso estacionário e da solução dependente do tempo. Fazemos a solução estacionária satisfazer as condições de contorno não homogêneas,

$$u(x,t) = v(x,t) + u_1 + \frac{x}{L}(u_2 - u_1)\,.$$

As condições de contorno e inicial nos dão,

$$\begin{aligned}
&u(x,0) = v(x,0) + u_1 + \frac{x}{L}(u_2 - u_1) = \varphi(x)\,,\\
&u(0,t) = v(0,t) + u_1 = u_1\,,\\
&u(L,t) = v(L,t) + u_2 = u_2\,.
\end{aligned}$$

As condições para v ficam,

$$\begin{aligned}
&v(x,0) = \varphi(x) - u_1 - \frac{x}{L}(u_2 - u_1)\,,\\
&v(0,t) = 0\,,\\
&v(L,t) = 0\,.
\end{aligned}$$

A solução para v é dada no problema 1,

$$\begin{aligned}
v(x,t) \;&=\; \frac{2}{L}\sum_{i=1} sen\ (i\pi x/L) e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t} \times\\
&\times \int_0^L \left[\varphi(x') - u_1 - \frac{x'}{L}(u_2 - u_1)\right] sen\ (i\pi x'/L)\, dx'\,.
\end{aligned}$$

A solução u é então,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_1 + \frac{x}{L}(u_2 - u_1) + v(x,t)\,, \\ &= u_1 + \frac{x}{L}(u_2 - u_1) + \frac{2}{L}\sum_{i=1} sen\ (i\pi x/L) e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t} \times \\ &\quad \times \int_0^L \left[\varphi(x') - u_1 - \frac{x'}{L}(u_2 - u_1)\right] sen\ (i\pi x'/L)\, dx'\,. \end{aligned}$$

Calculando as duas últimas integrais obtemos (ver apêndice),

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_1 + \frac{x}{L}(u_2 - u_1) + \\ &\quad + \frac{2}{L}\sum_{i=1} sen\ (i\pi x/L) e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t} \int_0^L \varphi(x')\, sen\ (i\pi x'/L)\, dx' \\ &\quad - \frac{4u_1}{\pi}\sum_{i=1} \frac{sen\ [(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} e^{-\kappa[(2i-1)\pi/L]^2 t} \\ &\quad - \frac{2(u_2 - u_1)}{\pi}\sum_{i=1} sen\ (i\pi x/L) e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t} \frac{(-1)^{i-1}}{i}\,. \end{aligned}$$

Vamos verificar se a função acima é a solução correta. As condições de contorno e inicial nos dão,

$$\begin{aligned} u(0,t) &= u_1\,, \\ u(L,t) &= u_2\,, \\ u(x,0) &= u_1 + \frac{x}{L}(u_2 - u_1) + \\ &\quad + \frac{2}{L}\sum_{i=1} sen\ (i\pi x/L) \int_0^L \varphi(x')\, sen\ (i\pi x'/L)\, dx' \\ &\quad - \frac{4u_1}{\pi}\sum_{i=1} \frac{sen\ [(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} \\ &\quad - \frac{2(u_2 - u_1)}{\pi}\sum_{i=1} sen\ (i\pi x/L) \frac{(-1)^{i-1}}{i}\,. \end{aligned}$$

A expansão de φ em séries de Fourier de senos é,

$$\varphi(x) = \frac{2}{L}\sum_{i=1} sen\ (i\pi x/L) \int_0^L \varphi(x')\, sen\ (i\pi x'/L)\, dx'\,.$$

Usando a expansão acima e as séries de Fourier,

$$x = \frac{2L}{\pi} \sum_{i=1} \frac{sen\,(i\pi x/L)}{i} (-1)^{i+1} \,,$$
$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{i=1} \frac{sen\,[(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} \,,$$

a condição inicial fica,

$$\begin{aligned} u(x,0) &= u_1 + \frac{x}{L}(u_2 - u_1) + \\ &\quad +\varphi(x) \\ &\quad -u_1 \\ &\quad -(u_2 - u_1)\frac{x}{L} \,, \\ &= \varphi(x) \,, \end{aligned}$$

como esperado. Calculando agora as derivadas de u, verificamos que,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \,,$$

que é a equação do calor homogênea.

Podemos escrever a solução em termos da função de Green definida no problema 1,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_1 + \frac{x}{L}(u_2 - u_1) + v(x,t) \,, \\ &= u_1 + \frac{x}{L}(u_2 - u_1) \\ &\quad + \int_0^L G(x,x';t) \left[\varphi(x') - u_1 - \frac{x'}{L}(u_2 - u_1) \right] dx' \,, \end{aligned}$$

com,

$$G(x,x';t) = \frac{2}{L} \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t} \, sen\,(i\pi x/L) \, sen\,(i\pi x'/L) \,.$$

Se $\varphi = 0$,

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= u_1 + \frac{x}{L}(u_2 - u_1) + \\
&\quad - \frac{4u_1}{\pi} \sum_{i=1} \frac{sen\ [(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} e^{-\kappa[(2i-1)\pi/L]^2 t} \\
&\quad - \frac{2(u_2-u_1)}{\pi} \sum_{i=1} sen\ (i\pi x/L) e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t} \frac{(-1)^{i-1}}{i}\,.
\end{aligned}
$$

8. Considere o problema anterior com $L = \pi$, $u_1 = 0$, $u_2 = A$ (Churchill [13], p. 108).

Usando o resultado do problema anterior obtemos,

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{x}{\pi}A + \frac{2}{\pi} \sum_{i=1} sen\ (ix) e^{-\kappa i^2 t} \times \\
&\quad \times \int_0^\pi \left[\varphi(x') - \frac{x'}{\pi}A \right] sen\ (ix')\, dx'\,, \\
&= \frac{x}{\pi}A + \\
&\quad + \frac{2}{\pi} \sum_{i=1} sen\ (ix) e^{-\kappa i^2 t} \int_0^\pi \varphi(x')\, sen\ (ix')\, dx' \\
&\quad + \frac{2A}{\pi} \sum_{i=1} sen\ (ix) e^{-\kappa i^2 t} \frac{(-1)^i}{i}\,.
\end{aligned}
$$

9. Consideremos agora a equação do calor não-homogênea (Tijonov [12], p. 241),

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\,,
$$

no segmento,

$$
0 < x < l\,, \quad t > 0\,,
$$

com a condição inicial,

$$
u(x,0) = 0\,, \quad 0 \le x \le l\,,
$$

e as condições de contorno homogêneas,

$$
u(0,t) = 0\,, \quad u(l,t) = 0\,, \quad t \ge 0\,.
$$

Expandimos u e f em séries de Fourier de senos,

$$u(x,t) = \sum_{i=1} u_i(t)\, sen\ (i\pi x/L)\,,$$
$$f(x,t) = \sum_{i=1} f_i(t)\, sen\ (i\pi x/L)\,.$$

Temos,

$$u_i(t) = \frac{2}{L}\int_0^L u(x',t)\, sen\ (i\pi x'/L) dx'\,,$$
$$f_i(t) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x',t)\, sen\ (i\pi x'/L) dx'\,.$$

Substituindo na equação diferencial temos,

$$\sum_{i=1} \dot{u}_i(t)\, sen\ (i\pi x/L) =$$
$$= -\kappa \sum_{i=1} (i\pi/L)^2 u_i(t)\, sen\ (i\pi x/L) + \sum_{i=1} f_i(t)\, sen\ (i\pi x/L)\,.$$

Da relação acima obtemos uma equação diferencial linear, de primeira ordem, não homogênea, para $u_i(t)$,

$$\dot{u}_i(t) + \kappa (i\pi/L)^2 u_i(t) = f_i(t)\,.$$

A solução dessa equação é (cap. 22),

$$u_i(t) = e^{-\kappa (i\pi/L)^2 t} \int_0^t f_i(t') e^{\kappa (i\pi/L)^2 t'} dt'\,,$$

ou,

$$u_i(t) = \int_0^t f_i(t') e^{-\kappa (i\pi/L)^2 (t-t')} dt'\,.$$

Notemos que $u_i(0) = 0$, logo $u(x,0) = 0$, como deve ser. A solução u é então,

$$u(x,t) = \sum_{i=1}\ sen\ (i\pi x/L) \int_0^t f_i(t') e^{-\kappa (i\pi/L)^2 (t-t')} dt'\,.$$

Substituindo $f_i(t')$,

$$u(x,t) = \sum_{i=1} \mathit{sen}\;(i\pi x/L) \int_0^t e^{-\kappa(i\pi/L)^2(t-t')} \frac{2}{L} \int_0^L f(x',t')\; \mathit{sen}\;(i\pi x'/L) dx' dt' \,.$$

Escrevemos a solução na forma,

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^L G(x,x',t-t') f(x',t') dx' dt' \,,$$

com a função de Green definida por,

$$G(x,x',t-t') = \frac{2}{L} \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2(t-t')}\; \mathit{sen}\;(i\pi x/L)\; \mathit{sen}\;(i\pi x'/L) \,.$$

Lembremos que a solução mais geral da equação do calor não homogênea é a solução acima, mais uma solução da equação do calor homogênea. Como temos $\varphi = 0$ agora, a solução homogênea é identicamente nula.

Vamos verificar a solução acima. As condições de contorno e inicial nos dão,

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0 \,, \\ u(L,t) &= 0 \,, \\ u(x,0) &= 0 \,, \end{aligned}$$

como esperado. Calculando agora as derivadas de u,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \\ &= -\kappa \sum_{i=1} (i\pi/L)^2\; \mathit{sen}\;(i\pi x/L) \int_0^t e^{-\kappa(i\pi/L)^2(t-t')} \frac{2}{L} \int_0^L f(x',t')\; \mathit{sen}\;(i\pi x'/L) dx' dt' \\ &+ \sum_{i=1} \mathit{sen}\;(i\pi x/L) \frac{2}{L} \int_0^L f(x',t)\; \mathit{sen}\;(i\pi x'/L) dx' \\ &+ \kappa \sum_{i=1} (i\pi/L)^2\; \mathit{sen}\;(i\pi x/L) \int_0^t e^{-\kappa(i\pi/L)^2(t-t')} \frac{2}{L} \int_0^L f(x',t')\; \mathit{sen}\;(i\pi x'/L) dx' dt' \,, \\ &= \sum_{i=1} \mathit{sen}\;(i\pi x/L) \frac{2}{L} \int_0^L f(x',t)\; \mathit{sen}\;(i\pi x'/L) dx' \,, \\ &= f(x,t) \,. \end{aligned}$$

A última expressão é a expansão de $f(x,t)$.

10. Considere o problema anterior, isto é, a equação do calor não homogênea, com condição inicial não nula, $u(x,0) = \varphi(x)$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\,,$$

no segmento,

$$0 < x < l\,,\ \ t > 0\,,$$

com a condição inicial,

$$u(x,0) = \varphi(x)\,,\ \ 0 \le x \le l\,,$$

e as condições de contorno homogêneas,

$$u(0,t) = 0\,,\ \ u(l,t) = 0\,,\ \ t \ge 0\,.$$

Expandimos u e f em séries de Fourier de senos,

$$u(x,t) = \sum_{i=1} u_i(t)\, sen\,(i\pi x/L)\,,$$
$$f(x,t) = \sum_{i=1} f_i(t)\, sen\,(i\pi x/L)\,.$$

Temos,

$$u_i(t) = \frac{2}{L}\int_0^L u(x',t)\, sen\,(i\pi x'/L)dx'\,,$$
$$f_i(t) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x',t)\, sen\,(i\pi x'/L)dx'\,.$$

A condição inicial nos dá,

$$u(x,0) = \sum_{i=1} u_i(0)\, sen\,(i\pi x/L) = \varphi(x)\,,$$

com,

$$u_i(0) = \frac{2}{L}\int_0^L u(x',0)\, sen\,(i\pi x'/L)dx' = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x')\, sen\,(i\pi x'/L)dx'\,.$$

A expansão para φ é então,

$$\varphi(x) = \sum_{i=1} sen\ (i\pi x/L) \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x')\, sen\ (i\pi x'/L) dx' \,,$$

e para u e f temos,

$$u(x,t) = \sum_{i=1} sen\ (i\pi x/L) \frac{2}{L} \int_0^L u(x',t)\, sen\ (i\pi x'/L) dx' \,,$$

$$f(x,t) = \sum_{i=1} sen\ (i\pi x/L) \frac{2}{L} \int_0^L f(x',t)\, sen\ (i\pi x'/L) dx' \,.$$

Substituindo as séries para u e f (com os coeficientes $u_i(t)$, $f_i(t)$ explicitamente) na equação diferencial temos,

$$\sum_{i=1} \dot{u}_i(t)\, sen\ (i\pi x/L) =$$

$$= -\kappa \sum_{i=1} (i\pi/L)^2 u_i(t)\, sen\ (i\pi x/L) + \sum_{i=1} f_i(t)\, sen\ (i\pi x/L) \,.$$

Da relação acima obtemos uma equação diferencial linear, de primeira ordem, não homogênea, para $u_i(t)$,

$$\dot{u}_i(t) + \kappa (i\pi/L)^2 u_i(t) = f_i(t) \,,$$

como no problema anterior. Agora, no entanto, temos $u_i(0) \neq 0$. A solução dessa equação é

$$u_i(t) = \exp\left[-\kappa (i\pi/L)^2 \int^t dt'\right] \left\{ \int^t \exp\left[\kappa (i\pi/L)^2 \int^s dt'\right] f_i(s) ds + c_i \right\} \,,$$

ou,

$$u_i(t) = \exp\left[-\kappa (i\pi/L)^2 t\right] \left\{ \int^t \exp\left[\kappa (i\pi/L)^2 s\right] f_i(s) ds + c_i \right\} \,.$$

A condição inicial nos dá,

$$\begin{aligned} u_i(0) &= \int^{t=0} \exp\left[\kappa (i\pi/L)^2 s\right] f_i(s) ds + c_i \,, \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x')\, sen\ (i\pi x'/L) dx' \,, \end{aligned}$$

logo,

$$
\begin{aligned}
c_i &= -\int^{t=0} \exp\left[\kappa(i\pi/L)^2 s\right] f_i(s)ds \\
&\quad +\frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x')\,sen\,(i\pi x'/L)dx'\,.
\end{aligned}
$$

Obtemos então,

$$
\begin{aligned}
u_i(t) &= \exp\left[-\kappa(i\pi/L)^2 t\right]\left\{\int^t \exp\left[\kappa(i\pi/L)^2 s\right] f_i(s)ds\right. \\
&\quad -\int^{t=0} \exp\left[\kappa(i\pi/L)^2 s\right] f_i(s)ds \\
&\quad \left.+\frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x')\,sen\,(i\pi x'/L)dx'\right\}\,, \\
&= \exp\left[-\kappa(i\pi/L)^2 t\right]\left\{\int_0^t \exp\left[\kappa(i\pi/L)^2 s\right] f_i(s)ds\right. \\
&\quad \left.+\frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x')\,sen\,(i\pi x'/L)dx'\right\}\,.
\end{aligned}
$$

A solução u é então,

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{i=1} u_i(t)\,sen\,(i\pi x/L)\,, \\
&= \sum_{i=1} \exp\left[-\kappa(i\pi/L)^2 t\right]\left\{\int_0^t \exp\left[\kappa(i\pi/L)^2 s\right] f_i(s)ds\right. \\
&\quad \left.+\frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x')\,sen\,(i\pi x'/L)dx'\right\}\,sen\,(i\pi x/L)\,.
\end{aligned}
$$

Substituindo $f_i(s)$*,*

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{i=1} \exp\left[-\kappa(i\pi/L)^2 t\right]\times \\
&\quad \times\left\{\int_0^t \exp\left[\kappa(i\pi/L)^2 t'\right]\frac{2}{L}\int_0^L f(x',t')\,sen\,(i\pi x'/L)dx'dt'\right. \\
&\quad \left.+\frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x')\,sen\,(i\pi x'/L)dx'\right\}\,sen\,(i\pi x/L)\,,
\end{aligned}
$$

em que trocamos s por t'. Vamos verificar que a função acima é de fato solução da equação diferencial dada. Temos,

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0\,, \\ u(L,t) &= 0\,, \\ u(x,0) &= \frac{2}{L}\sum_{i=1} sen\;(i\pi x/L)\int_0^L \varphi(x')\, sen\;(i\pi x'/L)dx'\,, \\ &= \varphi(x)\,, \end{aligned}$$

como esperado. A última relação é a expansão de $\varphi(x)$. As condições de contorno e inicial são portanto satisfeitas. Calculando as derivadas de u obtemos,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \\
&= -\kappa\sum_{i=1}(i\pi/L)^2 \exp\left[-\kappa(i\pi/L)^2 t\right] \times \\
&\times\left\{\int_0^t \exp\left[\kappa(i\pi/L)^2 t'\right]\frac{2}{L}\int_0^L f(x',t')\,sen\,(i\pi x'/L)dx'dt'\right. \\
&\left.+\frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x')\,sen\,(i\pi x'/L)dx'\right\}\,sen\,(i\pi x/L) \\
&+\sum_{i=1}\exp\left[-\kappa(i\pi/L)^2 t\right]\times \\
&\times\left\{\exp\left[\kappa(i\pi/L)^2 t\right]\frac{2}{L}\int_0^L f(x',t)\,sen\,(i\pi x'/L)dx'\right\}\,sen\,(i\pi x/L) \\
&+\kappa\sum_{i=1}(i\pi/L)^2\exp\left[-\kappa(i\pi/L)^2 t\right]\times \\
&\times\left\{\int_0^t \exp\left[\kappa(i\pi/L)^2 t'\right]\frac{2}{L}\int_0^L f(x',t')\,sen\,(i\pi x'/L)dx'dt'\right. \\
&\left.+\frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x')\,sen\,(i\pi x'/L)dx'\right\}\,sen\,(i\pi x/L)\,, \\
= \;&\sum_{i=1}\exp\left[-\kappa(i\pi/L)^2 t\right]\times \\
&\times\left\{\exp\left[\kappa(i\pi/L)^2 t\right]\frac{2}{L}\int_0^L f(x',t)\,sen\,(i\pi x'/L)dx'\right\}\,sen\,(i\pi x/L)\,, \\
= \;&\sum_{i=1}\left\{\frac{2}{L}\int_0^L f(x',t)\,sen\,(i\pi x'/L)dx'\right\}\,sen\,(i\pi x/L)\,, \\
= \;& f(x,t)\,,
\end{aligned}
$$

como esperado. A última relação é a expansão em série de $f(x,t)$.

Escrevemos a solução na forma,

$$
\begin{aligned}
u(x,t) \;=\; &\sum_{i=1}\exp\left[-\kappa(i\pi/L)^2 t\right]\times \\
&\times\left\{\int_0^t \exp\left[\kappa(i\pi/L)^2 t'\right]\frac{2}{L}\int_0^L f(x',t')\,sen\,(i\pi x'/L)dx'dt'\right. \\
&\left.+\int_0^t \exp\left[\kappa(i\pi/L)^2 t'\right]\delta(t')\frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x')\,sen\,(i\pi x'/L)dx'dt'\right\}\times \\
&\times\,sen\,(i\pi x/L)\,,
\end{aligned}
$$

ou,

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^L G(x,x',t-t')[f(x',t') + \delta(t')\varphi(x')]dx'dt' \,,$$

com a função de Green definida como no problema anterior,

$$G(x,x',t-t') = \frac{2}{L}\sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2(t-t')} \, sen \, (i\pi x'/L) \, sen \, (i\pi x/L) \,.$$

11. A função $u(x,t)$ está determinada na região fechada (Tijonov [12], p. 218),

$$0 \leq x \leq L \,, \quad t_0 \leq t \leq T \,,$$

e satisfaz a equação do calor na região aberta,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \,,$$

$$0 < x < L \,, \quad t_0 < t \,.$$

As condições inicial e de fronteira são,

$$\begin{aligned} u(x,t_0) &= \varphi(x) \,, \\ u(0,t) &= \mu_1(t) \,, \\ u(L,t) &= \mu_2(t) \,, \end{aligned}$$

que satisfazem as condições de conjunção,

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \mu_1(t_0) = u(0,t_0) \,, \\ \varphi(L) &= \mu_2(t_0) = u(L,t_0) \,. \end{aligned}$$

Escrevemos a solução como,

$$u(x,t) = U(x,t) + v(x,t) \,,$$

com (Tijonov [12], p. 120),

$$U(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{L}[\mu_2(t) - \mu_1(t)] \,.$$

A função U satisfaz as condições (fazendo $t_0 = 0$),

$$
\begin{aligned}
&U(x,0) = \mu_1(0) + \frac{x}{L}[\mu_2(0) - \mu_1(0)]\,,\\
&U(0,t) = \mu_1(t)\,,\\
&U(L,t) = \mu_2(t)\,.
\end{aligned}
$$

As condições de contorno para u ficam,

$$
\begin{aligned}
&u(x,0) = \mu_1(0) + \frac{x}{L}[\mu_2(0) - \mu_1(0)] + v(x,0) = \varphi(x)\,,\\
&u(0,t) = \mu_1(t) + v(0,t) = \mu_1(t)\,,\\
&u(L,t) = \mu_2(t) + v(L,t) = \mu_2(t)\,.
\end{aligned}
$$

Portanto, para v temos,

$$
\begin{aligned}
&v(x,0) = \varphi(x) - \mu_1(0) - \frac{x}{L}[\mu_2(0) - \mu_1(0)]\,,\\
&v(0,t) = 0\,,\\
&v(L,t) = 0\,.
\end{aligned}
$$

Temos assim condições de contorno homogêneas para v. A equação diferencial fica,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,\\
&\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \kappa\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\,,\\
&\frac{\partial v}{\partial t} + \mu_1'(t) + \frac{x}{L}[\mu_2'(t) - \mu_1'(t)] = \kappa\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,.
\end{aligned}
$$

Obtemos então a equação para v,

$$
\frac{\partial v}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\mu_1'(t) - \frac{x}{L}[\mu_2'(t) - \mu_1'(t)]\,,
$$

que é a equação do calor não-homogênea, com condições de contorno homogêneas. Usando o resultado do problema anterior temos,

$$
\begin{aligned}
v(x,t) \;&=\; \int_0^t\int_0^L G(x,x',t-t')\,\{f(x',t')\\
&+\delta(t')\left[\varphi(x') - \mu_1(0) - \frac{x'}{L}[\mu_2(0) - \mu_1(0)]\right]\right\}dx'dt'\,,
\end{aligned}
$$

com a função de Green definida por,

$$G(x,x',t-t') = \frac{2}{L}\sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2(t-t')}\, sen\,(i\pi x/L)\, sen\,(i\pi x'/L)\,,$$

e f dada por,

$$f(x,t) = -\mu_1'(t) - \frac{x}{L}[\mu_2'(t) - \mu_1'(t)]\,.$$

A solução u é portanto,

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= U(x,t) + v(x,t)\,,\\
&= \mu_1(t) + \frac{x}{L}[\mu_2(t) - \mu_1(t)]\\
&\quad + \int_0^t \int_0^L G(x,x',t-t')\left\{-\mu_1'(t') - \frac{x'}{L}[\mu_2'(t') - \mu_1'(t')]\right.\\
&\quad \left. + \delta(t')\left[\varphi(x') - \mu_1(0) - \frac{x'}{L}[\mu_2(0) - \mu_1(0)]\right]\right\} dx'dt'\,,\\
&= \mu_1(t) + \frac{x}{L}[\mu_2(t) - \mu_1(t)]\\
&\quad + \int_0^t \int_0^L \frac{2}{L}\sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2(t-t')}\, sen\,(i\pi x/L)\, sen\,(i\pi x'/L)\times\\
&\quad \times\left\{-\mu_1'(t') - \frac{x'}{L}[\mu_2'(t') - \mu_1'(t')]\right.\\
&\quad \left. + \delta(t')\left[\varphi(x') - \mu_1(0) - \frac{x'}{L}[\mu_2(0) - \mu_1(0)]\right]\right\} dx'dt'\,.
\end{aligned}$$

Podemos calcular algumas das integrais acima. Obtemos,

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \mu_1(t) + \frac{x}{L}[\mu_2(t) - \mu_1(t)] \\
&\quad - \frac{4}{\pi}\sum_{i=1} \frac{sen\ [(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} \int_0^t e^{-\kappa[(2i-1)\pi/L]^2(t-t')}\mu_1'(t')dt' \\
&\quad - \frac{2}{\pi}\sum_{i=1} \frac{sen\ (i\pi x/L)}{i}(-1)^{i+1} \int_0^t e^{-\kappa(i\pi/L)^2(t-t')}[\mu_2'(t') - \mu_1'(t')]dt' \\
&\quad + \frac{2}{L}\sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t}\, sen\ (i\pi x/L) \int_0^L \varphi(x')\, sen\ (i\pi x'/L)dx' \\
&\quad - \frac{4}{\pi}\mu_1(0)\sum_{i=1} \frac{sen\ [(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} e^{-\kappa[(2i-1)\pi/L]^2 t} \\
&\quad - \frac{2}{\pi}[\mu_2(0) - \mu_1(0)]\sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t} \frac{sen\ (i\pi x/L)}{i}(-1)^{i+1}\,.
\end{aligned}
$$

Vamos verificar que a solução acima está correta. Temos,

$$
\begin{aligned}
u(0,t) &= \mu_1(t)\,, \\
u(L,t) &= \mu_2(t)\,, \\
u(x,0) &= \mu_1(0) + \frac{x}{L}[\mu_2(0) - \mu_1(0)] \\
&\quad + \frac{2}{L}\sum_{i=1} sen\ (i\pi x/L) \int_0^L \varphi(x')\, sen\ (i\pi x'/L)dx' \\
&\quad - \frac{4}{\pi}\mu_1(0)\sum_{i=1} \frac{sen\ [(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} \\
&\quad - \frac{2}{\pi}[\mu_2(0) - \mu_1(0)]\sum_{i=1} \frac{sen\ (i\pi x/L)}{i}(-1)^{i+1}\,.
\end{aligned}
$$

As condições em $x = 0$ e $x = L$ são satisfeitas. Para a condição inicial usamos os resultados,

$$
\begin{aligned}
&\varphi(x) = \frac{2}{L}\sum_{i=1} sen\,(i\pi x/L) \int_0^L \varphi(x')\, sen\ (i\pi x'/L)dx'\,, \\
&x = \frac{2L}{\pi}\sum_{i=1} \frac{sen\,(i\pi x/L)}{i}(-1)^{i+1}\,, \\
&1 = \frac{4}{\pi}\sum_{i=1} \frac{sen\,[(2i-1)\pi x/L]}{2i-1}\,.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \mu_1(0) + \frac{x}{L}[\mu_2(0) - \mu_1(0)] \\ &\quad +\varphi(x) - \mu_1(0) - \frac{x}{L}[\mu_2(0) - \mu_1(0)]\,, \\ &= \varphi(x)\,, \end{aligned}$$

como esperado. Vamos verificar agora que u de fato satisfaz a equação do calor homogênea. Calculando as derivadas obtemos, após alguns cancelamentos,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu_1'(t) + \frac{x}{L}[\mu_2'(t) - \mu_1'(t)] \\ &-\frac{4}{\pi}\sum_{i=1} \frac{sen\,[(2i-1)\pi x/L]}{2i-1}\mu_1'(t) \\ &-\frac{2}{\pi}\sum_{i=1} \frac{sen\,(i\pi x/L)}{i}(-1)^{i+1}[\mu_2'(t) - \mu_1'(t)]\,. \end{aligned}$$

Substituindo as séries acima,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \mu_1'(t) + \frac{x}{L}[\mu_2'(t) - \mu_1'(t)] \\ &\quad -\mu_1'(t) \\ &\quad -\frac{x}{L}[\mu_2'(t) - \mu_1'(t)] = 0\,, \end{aligned}$$

como deve ser.

12. Considere a equação do calor não homogênea,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\,,$$

no intervalo,

$$0 < x < l\,, \quad t > 0\,,$$

com a condição inicial,

$$u(x,0) = \varphi(x)\,, \quad 0 \le x \le l\,,$$

e as condições de contorno não homogêneas constantes,

$$u(0,t) = u_1\,, \quad u(l,t) = u_2\,, \quad t \geq 0\,.$$

Como no problema anterior, escrevemos a solução na forma,

$$u(x,t) = U(x,t) + v(x,t)\,,$$

com,

$$U(x,t) = U(x) = u_1 + \frac{x}{L}(u_2 - u_1)\,.$$

Notemos que U não depende do tempo. A função U satisfaz as condições,

$$\begin{aligned}
&U(x,0) = u_1 + \frac{x}{L}(u_2 - u_1)\,,\\
&U(0,t) = u_1\,,\\
&U(L,t) = u_2\,.
\end{aligned}$$

As condições de contorno para u ficam,

$$\begin{aligned}
&u(x,0) = u_1 + \frac{x}{L}(u_2 - u_1) + v(x,0) = \varphi(x)\,,\\
&u(0,t) = u_1 + v(0,t) = u_1\,,\\
&u(L,t) = u_2 + v(L,t) = u_2\,.
\end{aligned}$$

Portanto, para v temos,

$$\begin{aligned}
&v(x,0) = \varphi(x) - u_1 - \frac{x}{L}(u_2 - u_1)\,,\\
&v(0,t) = 0\,,\\
&v(L,t) = 0\,.
\end{aligned}$$

Temos assim condições de contorno homogêneas para v. A equação diferencial fica,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\,,\\
&\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \kappa\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t)\,,\\
&\frac{\partial v}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x,t)\,.
\end{aligned}$$

Obtemos então a equação do calor não homogênea para v, com condições de contorno homogêneas. A solução é (problema 10),

$$
\begin{aligned}
v(x,t) &= \sum_{i=1} \exp\left[-\kappa(i\pi/L)^2 t\right] \times \\
&\times \left\{ \int_0^t \exp\left[\kappa(i\pi/L)^2 t'\right] \frac{2}{L} \int_0^L f(x',t')\, sen\, (i\pi x'/L) dx' dt' \right. \\
&\left. + \frac{2}{L} \int_0^L \left[\varphi(x') - u_1 - \frac{x'}{L}(u_2 - u_1)\right] sen\, (i\pi x'/L) dx' \right\} sen\, (i\pi x/L)\,.
\end{aligned}
$$

A solução u é portanto,

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= U(x,t) + v(x,t)\,, \\
&= u_1 + \frac{x}{L}[u_2 - u_1] \\
&+ \sum_{i=1} \exp\left[-\kappa(i\pi/L)^2 t\right] \times \\
&\times \left\{ \int_0^t \exp\left[\kappa(i\pi/L)^2 t'\right] \frac{2}{L} \int_0^L f(x',t')\, sen\, (i\pi x'/L) dx' dt' \right. \\
&\left. + \frac{2}{L} \int_0^L \left[\varphi(x') - u_1 - \frac{x'}{L}(u_2 - u_1)\right] sen\, (i\pi x'/L) dx' \right\} sen\, (i\pi x/L)\,.
\end{aligned}
$$

Vamos verificar que a solução acima está correta. As condições de contorno são,

$$
\begin{aligned}
u(0,t) &= u_1\,, \\
u(L,t) &= u_2\,,
\end{aligned}
$$

como esperado. A condição inicial nos dá,

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= u_1 + \frac{x}{L}[u_2 - u_1] \\
&+ \sum_{i=1} sen\, (i\pi x/L) \times \\
&\times \left\{ \frac{2}{L} \int_0^L \left[\varphi(x') - u_1 - \frac{x'}{L}(u_2 - u_1)\right] sen\, (i\pi x'/L) dx' \right\}\,.
\end{aligned}
$$

Calculando as duas últimas integrais,

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= u_1 + \frac{x}{L}[u_2 - u_1] \\
&+ \frac{2}{L}\sum_{i=1} sen\,(i\pi x/L)\int_0^L \varphi(x')\, sen\,(i\pi x'/L)\,dx' \\
&- \frac{4}{\pi}u_1 \sum_{i=1} \frac{sen\,[(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} \\
&- \frac{2}{\pi}[u_2 - u_1]\sum_{i=1} \frac{sen\,(i\pi x/L)}{i}(-1)^{i+1}\,.
\end{aligned}
$$

Substituindo as séries acima,

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= u_1 + \frac{x}{L}[u_2 - u_1] \\
&+ \frac{2}{L}\sum_{i=1} sen\,(i\pi x/L)\int_0^L \varphi(x')\, sen\,(i\pi x'/L)\,dx' \\
&- u_1 \\
&- \frac{x}{L}(u_2 - u_1)\,.
\end{aligned}
$$

A segunda linha é a expansão de $\varphi(x)$, logo,

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= u_1 + \frac{x}{L}(u_2 - u_1) \\
&+ \varphi(x) \\
&- u_1 \\
&- \frac{x}{L}(u_2 - u_1) = \varphi(x)\,,
\end{aligned}
$$

como esperado.

Vamos verificar agora que u satisfaz a equação diferencial dada. Calculando as derivadas de u temos,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \\
&= -\kappa \sum_{i=1} (i\pi/L)^2 \exp\left[-\kappa (i\pi/L)^2 t\right] \times \\
&\times \left\{ \int_0^t \exp\left[\kappa (i\pi/L)^2 t'\right] \frac{2}{L} \int_0^L f(x',t')\, sen\ (i\pi x'/L) dx' dt' \right. \\
&\left. + \frac{2}{L} \int_0^L \left[\varphi(x') - u_1 - \frac{x'}{L}(u_2 - u_1)\right] sen\ (i\pi x'/L) dx' \right\} sen\ (i\pi x/L) \\
&+ \sum_{i=1} \exp\left[-\kappa (i\pi/L)^2 t\right] \times \\
&\times \left\{ \exp\left[\kappa (i\pi/L)^2 t\right] \frac{2}{L} \int_0^L f(x',t)\, sen\ (i\pi x'/L) dx' \right\} sen\ (i\pi x/L) \\
&- \kappa \sum_{i=1} (i\pi/L)^2 \exp\left[-\kappa (i\pi/L)^2 t\right] \times \\
&\times \left\{ \int_0^t \exp\left[\kappa (i\pi/L)^2 t'\right] \frac{2}{L} \int_0^L f(x',t')\, sen\ (i\pi x'/L) dx' dt' \right. \\
&\left. + \frac{2}{L} \int_0^L \left[\varphi(x') - u_1 - \frac{x'}{L}(u_2 - u_1)\right] sen\ (i\pi x'/L) dx' \right\} sen\ (i\pi x/L)\,, \\
&= \sum_{i=1} \exp\left[-\kappa (i\pi/L)^2 t\right] \times \\
&\times \left\{ \exp\left[\kappa (i\pi/L)^2 t\right] \frac{2}{L} \int_0^L f(x',t)\, sen\ (i\pi x'/L) dx' \right\} sen\ (i\pi x/L)\,, \\
&= \frac{2}{L} \sum_{i=1} sen\ (i\pi x/L) \int_0^L f(x',t)\, sen\ (i\pi x'/L) dx'\,.
\end{aligned}
$$

A expressão acima é a expansão de $f(x,t)$, logo,

$$
\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)\,,
$$

como esperado.

Podemos reescrever u calculando explicitamente as duas últimas integrais na expressão para u. Obtemos,

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= u_1 + \frac{x}{L}(u_2 - u_1) \\
&+ \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t}\, sen\ (i\pi x/L) \times \\
&\times \int_0^t e^{\kappa(i\pi/L)^2 t'} \frac{2}{L} \int_0^L f(x',t')\, sen\ (i\pi x'/L) dx' dt' \\
&+ \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t}\, sen\ (i\pi x/L) \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x')\, sen\ (i\pi x'/L) dx' \\
&- \frac{4}{\pi} u_1 \sum_{i=1} e^{-\kappa[(2i-1)\pi/L]^2 t} \frac{sen\ [(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} \\
&- \frac{2}{\pi}(u_2 - u_1) \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t} \frac{sen\ (i\pi x/L)}{i} (-1)^{i+1} \,.
\end{aligned}
$$

Vamos verificar que a forma acima está correta. Temos,

$$
\begin{aligned}
u(0,t) = u_1 \,, \\
u(L,t) = u_2 \,,
\end{aligned}
$$

como esperado. A condição inicial é,

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= u_1 + \frac{x}{L}(u_2 - u_1) \\
&+ \sum_{i=1} sen\ (i\pi x/L) \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x')\, sen\ (i\pi x'/L) dx' \\
&- \frac{4}{\pi} u_1 \sum_{i=1} \frac{sen\ [(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} \\
&- \frac{2}{\pi}(u_2 - u_1) \sum_{i=1} \frac{sen\ (i\pi x/L)}{i} (-1)^{i+1} \,.
\end{aligned}
$$

Substituindo as duas últimas séries acima,

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= u_1 + \frac{x}{L}(u_2 - u_1) \\
&+ \sum_{i=1} sen\ (i\pi x/L) \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x')\, sen\ (i\pi x'/L) dx' \\
&- u_1 \\
&- \frac{x}{L}(u_2 - u_1) \,.
\end{aligned}
$$

A segunda linha é a expansão em série de $\varphi(x)$, logo,

$$u(x,0) = \varphi(x)\,,$$

como esperado. Vamos verificar agora se u satisfaz a equação diferencial dada. Calculando as derivadas de u,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \\
&= -\kappa\sum_{i=1}(i\pi/L)^2 e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t}\,sen\,(i\pi x/L)\,\times \\
&\times\int_0^t e^{\kappa(i\pi/L)^2 t'}\frac{2}{L}\int_0^L f(x',t')\,sen\,(i\pi x'/L)dx'dt' \\
&+\sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t}\,sen\,(i\pi x/L)\,\times \\
&\times e^{\kappa(i\pi/L)^2 t}\frac{2}{L}\int_0^L f(x',t)\,sen\,(i\pi x'/L)dx' \\
&-\kappa\sum_{i=1}(i\pi/L)^2 e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t}\,sen\,(i\pi x/L)\frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x')\,sen\,(i\pi x'/L)dx' \\
&-\kappa\frac{4}{\pi}u_1\sum_{i=1}[(2i-1)\pi/L]^2 e^{-\kappa[(2i-1)\pi/L]^2 t}\frac{sen\,[(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} \\
&-\kappa\frac{2}{\pi}(u_2-u_1)\sum_{i=1}(i\pi/L)^2 e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t}\frac{sen\,(i\pi x/L)}{i}(-1)^{i+1} \\
&+\kappa\sum_{i=1}(i\pi/L)^2 e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t}\,sen\,(i\pi x/L)\,\times \\
&\times\int_0^t e^{\kappa(i\pi/L)^2 t'}\frac{2}{L}\int_0^L f(x',t')\,sen\,(i\pi x'/L)dx'dt' \\
&+\kappa\sum_{i=1}(i\pi/L)^2 e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t}\,sen\,(i\pi x/L)\frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x')\,sen\,(i\pi x'/L)dx' \\
&+\kappa\frac{4}{\pi}u_1\sum_{i=1}[(2i-1)\pi/L]^2 e^{-\kappa[(2i-1)\pi/L]^2 t}\frac{sen\,[(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} \\
&+\kappa\frac{2}{\pi}(u_2-u_1)\sum_{i=1}(i\pi/L)^2 e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t}\frac{sen\,(i\pi x/L)}{i}(-1)^{i+1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t}\, sen\;(i\pi x/L) \times \\
&\times e^{\kappa(i\pi/L)^2 t} \frac{2}{L} \int_0^L f(x', t)\, sen\;(i\pi x'/L) dx'\,, \\
&= \frac{2}{L} \sum_{i=1} sen\;(i\pi x/L) \int_0^L f(x', t)\, sen\;(i\pi x'/L) dx'\,, \\
&= f(x, t)\,.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t)\,,$$

como deve ser.

Em termos de função de Green temos,

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= u_1 + \frac{x}{L}[u_2 - u_1] \\
&\quad + \sum_{i=1} \exp\left[-\kappa(i\pi/L)^2 t\right] \; sen \; (i\pi x/L) \times \\
&\quad \times \left\{ \int_0^t \exp\left[\kappa(i\pi/L)^2 t'\right] \frac{2}{L} \int_0^L f(x',t') \, sen \; (i\pi x'/L) dx' dt' \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{L} \int_0^L \left[\varphi(x') - u_1 - \frac{x'}{L}(u_2 - u_1)\right] \; sen \; (i\pi x'/L) dx' \right\} , \\
&= u_1 + \frac{x}{L}[u_2 - u_1] \\
&\quad + \sum_{i=1} \exp\left[-\kappa(i\pi/L)^2 t\right] \; sen \; (i\pi x/L) \times \\
&\quad \times \left\{ \int_0^t \exp\left[\kappa(i\pi/L)^2 t'\right] \frac{2}{L} \int_0^L f(x',t') \, sen \; (i\pi x'/L) dx' dt' \right. \\
&\quad + \int_0^t \exp\left[\kappa(i\pi/L)^2 t'\right] \delta(t') \frac{2}{L} \int_0^L \left[\varphi(x') - u_1 - \frac{x'}{L}(u_2 - u_1)\right] \\
&\quad \left. sen \; (i\pi x'/L) dx' dt' \right\} , \\
&= u_1 + \frac{x}{L}[u_2 - u_1] \\
&\quad + \sum_{i=1} \; sen \; (i\pi x/L) \times \\
&\quad \times \int_0^t \exp\left[-\kappa(i\pi/L)^2 (t - t')\right] \frac{2}{L} \int_0^L \left\{ f(x',t') \right. \\
&\quad \left. + \delta(t') \left[\varphi(x') - u_1 - \frac{x'}{L}(u_2 - u_1)\right] \right\} \; sen \; (i\pi x'/L) dx' dt' ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= u_1 + \frac{x}{L}[u_2 - u_1] \\
&\quad + \int_0^t \int_0^L \frac{2}{L} \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2(t-t')}\, sen\,(i\pi x/L)\, sen\,(i\pi x'/L) \times \\
&\quad \times \left\{ f(x',t') + \delta(t') \left[\varphi(x') - u_1 - \frac{x'}{L}(u_2 - u_1) \right] \right\} dx'dt' \,, \\
&= u_1 + \frac{x}{L}[u_2 - u_1] \\
&\quad + \int_0^t \int_0^L G(x,x';t-t') \times \\
&\quad \times \left\{ f(x',t') + \delta(t') \left[\varphi(x') - u_1 - \frac{x'}{L}(u_2 - u_1) \right] \right\} dx'dt' \,,
\end{aligned}
$$

com a função de Green,

$$
G(x,x';t-t') = \frac{2}{L} \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2(t-t')}\, sen\,(i\pi x/L)\, sen\,(i\pi x'/L)\,.
$$

13. Considere o problema anterior com condição inicial nula, isto é, a equação do calor não homogênea com condições de contorno constantes e $\varphi(x) = 0$,

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\,,
$$

no intervalo,

$$
0 < x < L\,, \quad t > 0\,,
$$

com a condição inicial,

$$
u(x,0) = 0\,, \quad 0 \le x \le L\,,
$$

e as condições de contorno não homogêneas constantes,

$$
u(0,t) = u_1\,, \quad u(L,t) = u_2\,, \quad t \ge 0\,.
$$

Fazendo $\varphi = 0$ no problema anterior temos,

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= u_1 + \frac{x}{L}[u_2 - u_1] \\
&+ \sum_{i=1} \exp\left[-\kappa(i\pi/L)^2 t\right] \times \\
&\times \left\{ \int_0^t \exp\left[\kappa(i\pi/L)^2 t'\right] \frac{2}{L} \int_0^L f(x',t')\, sen\ (i\pi x'/L) dx' dt' \right. \\
&\left. + \frac{2}{L} \int_0^L \left[-u_1 - \frac{x'}{L}(u_2 - u_1) \right] sen\ (i\pi x'/L) dx' \right\} sen\ (i\pi x/L)\,.
\end{aligned}
$$

Usando a expressão explícita, mas menos compacta, temos,

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= u_1 + \frac{x}{L}(u_2 - u_1) \\
&+ \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t}\, sen\ (i\pi x/L) \times \\
&\times \int_0^t e^{\kappa(i\pi/L)^2 t'} \frac{2}{L} \int_0^L f(x',t')\, sen\ (i\pi x'/L) dx' dt' \\
&- \frac{4}{\pi} u_1 \sum_{i=1} e^{-\kappa[(2i-1)\pi/L]^2 t} \frac{sen\ [(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} \\
&- \frac{2}{\pi}(u_2 - u_1) \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t} \frac{sen\ (i\pi x/L)}{i} (-1)^{i+1}\,.
\end{aligned}
$$

14. Considere a equação do calor não homogênea (Tijonov [12], p. 227),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\,,$$

no intervalo,

$$0 < x < L\,,\ \ t > 0\,,$$

com a condição inicial,

$$u(x,0) = \varphi(x)\,,\ \ 0 \le x \le L\,,$$

e as condições de contorno não homogêneas,

$$u(0,t) = \mu_1(t)\,,\ \ u(L,t) = \mu_2(t)\,,\ \ t \ge 0\,.$$

Escrevemos a solução como,

$$u(x,t) = U(x,t) + v(x,t)\,,$$

com,

$$U(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{L}[\mu_2(t) - \mu_1(t)]\,,$$

analogamente ao problema 11. A função U satisfaz as condições,

$$\begin{aligned}
&U(x,0) = \mu_1(0) + \frac{x}{L}[\mu_2(0) - \mu_1(0)]\,,\\
&U(0,t) = \mu_1(t)\,,\\
&U(L,t) = \mu_2(t)\,.
\end{aligned}$$

As condições de contorno para u ficam,

$$\begin{aligned}
&u(x,0) = \mu_1(0) + \frac{x}{L}[\mu_2(0) - \mu_1(0)] + v(x,0) = \varphi(x)\,,\\
&u(0,t) = \mu_1(t) + v(0,t) = \mu_1(t)\,,\\
&u(L,t) = \mu_2(t) + v(L,t) = \mu_2(t)\,.
\end{aligned}$$

Portanto, para v temos,

$$\begin{aligned}
&v(x,0) = \varphi(x) - \mu_1(0) - \frac{x}{L}[\mu_2(0) - \mu_1(0)]\,,\\
&v(0,t) = 0\,,\\
&v(L,t) = 0\,.
\end{aligned}$$

Temos assim condições de contorno homogêneas para v. A equação diferencial fica,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\,,\\
&\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \kappa\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t)\,,\\
&\frac{\partial v}{\partial t} + \mu_1'(t) + \frac{x}{L}[\mu_2'(t) - \mu_1'(t)] = \kappa\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x,t)\,.
\end{aligned}$$

Obtemos então a equação para v,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x,t) - \mu_1'(t) - \frac{x}{L}[\mu_2'(t) - \mu_1'(t)]\,,$$

que é a equação do calor não-homogênea, com condições de contorno homogêneas e condição inicial não nula. Usando o resultado do problema 10 temos,

$$\begin{aligned}
v(x,t) &= \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t}\, sen\ (i\pi x/L) \times \\
&\times \left\{ \int_0^t e^{\kappa(i\pi/L)^2 t'} \frac{2}{L} \int_0^L \left[f(x',t') - \mu_1'(t') - \frac{x'}{L}[\mu_2'(t') - \mu_1'(t')] \right] \times \right. \\
&\times\ sen\ (i\pi x'/L) dx' dt' \\
&\left. + \frac{2}{L} \int_0^L \left[\varphi(x') - \mu_1(0) - \frac{x'}{L}[\mu_2(0) - \mu_1(0)] \right] sen\ (i\pi x'/L) dx' \right\} .
\end{aligned}$$

A solução u é portanto,

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= U(x,t) + v(x,t)\,, \\
&= \mu_1(t) + \frac{x}{L}[\mu_2(t) - \mu_1(t)] \\
&\quad + \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t}\, sen\ (i\pi x/L) \times \\
&\times \left\{ \int_0^t e^{\kappa(i\pi/L)^2 t'} \frac{2}{L} \int_0^L \left[f(x',t') - \mu_1'(t') - \frac{x'}{L}[\mu_2'(t') - \mu_1'(t')] \right] \times \right. \\
&\times\ sen\ (i\pi x'/L) dx' dt' \\
&\left. + \frac{2}{L} \int_0^L \left[\varphi(x') - \mu_1(0) - \frac{x'}{L}[\mu_2(0) - \mu_1(0)] \right] sen\ (i\pi x'/L) dx' \right\} .
\end{aligned}$$

Vamos verificar que a solução acima está correta. As condições de contorno nos dão,

$$\begin{aligned}
u(0,t) = \mu_1(t)\,, \\
u(L,t) = \mu_2(t)\,,
\end{aligned}$$

como esperado. A condição inicial nos dá,

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= \mu_1(0) + \frac{x}{L}[\mu_2(0) - \mu_1(0)] \\
&\quad + \sum_{i=1} sen\ (i\pi x/L) \times \\
&\quad \times \frac{2}{L}\int_0^L \left[\varphi(x') - \mu_1(0) - \frac{x'}{L}[\mu_2(0) - \mu_1(0)]\right] sen\ (i\pi x'/L) dx'\,, \\
&= \mu_1(0) + \frac{x}{L}[\mu_2(0) - \mu_1(0)] \\
&\quad + \sum_{i=1} sen\ (i\pi x/L) \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x')\, sen\ (i\pi x'/L) dx' \\
&\quad - \sum_{i=1} sen\ (i\pi x/L) \frac{2}{L}\mu_1(0) \int_0^L sen\ (i\pi x'/L) dx' \\
&\quad - \sum_{i=1} sen\ (i\pi x/L) \frac{2}{L^2}[\mu_2(0) - \mu_1(0)] \int_0^L x'\, sen\ (i\pi x'/L) dx'\,.
\end{aligned}
$$

A segunda linha é a expansão de $\varphi(x)$. Calculando as duas últimas integrais vem,

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= \mu_1(0) + \frac{x}{L}[\mu_2(0) - \mu_1(0)] \\
&\quad +\varphi(x) \\
&\quad -\sum_{i=1} sen\ [(2i-1)\pi x/L]\frac{2}{L}\mu_1(0)\frac{2L}{(2i-1)\pi} \\
&\quad -\sum_{i=1} sen\ (i\pi x/L)\frac{2}{L^2}[\mu_2(0) - \mu_1(0)]\frac{L^2}{i\pi}(-1)^{i+1}\,, \\
&= \mu_1(0) + \frac{x}{L}[\mu_2(0) - \mu_1(0)] \\
&\quad +\varphi(x) \\
&\quad -\frac{4}{\pi}\mu_1(0)\sum_{i=1}\frac{sen\ [(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} \\
&\quad -\frac{2}{\pi}[\mu_2(0) - \mu_1(0)]\sum_{i=1}\frac{sen\ (i\pi x/L)}{i}(-1)^{i+1}\,, \\
&= \mu_1(0) + \frac{x}{L}[\mu_2(0) - \mu_1(0)] \\
&\quad +\varphi(x) \\
&\quad -\mu_1(0) \\
&\quad -\frac{x}{L}[\mu_2(0) - \mu_1(0)] = \varphi(x)\,,
\end{aligned}
$$

como esperado. Vamos verificar agora que u satisfaz a equação diferencial dada. Calculando as derivadas de u,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \\
&= \mu_1'(t) + \frac{x}{L}[\mu_2'(t) - \mu_1'(t)] \\
&-\kappa\sum_{i=1}(i\pi/L)^2 e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t}\, sen\ (i\pi x/L) \times \\
&\times\left\{\int_0^t e^{\kappa(i\pi/L)^2 t'}\frac{2}{L}\int_0^L \left[f(x',t') - \mu_1'(t') - \frac{x'}{L}[\mu_2'(t') - \mu_1'(t')]\right] \times\right. \\
&\times\ sen\ (i\pi x'/L) dx' dt' \\
&\left.+\frac{2}{L}\int_0^L \left[\varphi(x') - \mu_1(0) - \frac{x'}{L}[\mu_2(0) - \mu_1(0)]\right] sen\ (i\pi x'/L) dx'\right\} \\
&+\sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t}\, sen\ (i\pi x/L) \times \\
&\times e^{\kappa(i\pi/L)^2 t}\frac{2}{L}\int_0^L \left[f(x',t) - \mu_1'(t) - \frac{x'}{L}[\mu_2'(t) - \mu_1'(t)]\right] sen\ (i\pi x'/L) dx' \\
&+\kappa(i\pi/L)^2\sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t}\, sen\ (i\pi x/L) \times \\
&\times\left\{\int_0^t e^{\kappa(i\pi/L)^2 t'}\frac{2}{L}\int_0^L \left[f(x',t') - \mu_1'(t') - \frac{x'}{L}[\mu_2'(t') - \mu_1'(t')]\right] \times\right. \\
&\times\ sen\ (i\pi x'/L) dx' dt' \\
&\left.+\frac{2}{L}\int_0^L \left[\varphi(x') - \mu_1(0) - \frac{x'}{L}[\mu_2(0) - \mu_1(0)]\right] sen\ (i\pi x'/L) dx'\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \mu_1'(t) + \frac{x}{L}[\mu_2'(t) - \mu_1'(t)] \\
&+ \sum_{i=1} \mathit{sen}\ (i\pi x/L) \times \\
&\times \frac{2}{L}\int_0^L \left[f(x',t) - \mu_1'(t) - \frac{x'}{L}[\mu_2'(t) - \mu_1'(t)] \right] \mathit{sen}\ (i\pi x'/L) dx' \, , \\
&= \mu_1'(t) + \frac{x}{L}[\mu_2'(t) - \mu_1'(t)] \\
&+ \sum_{i=1} \mathit{sen}\ (i\pi x/L) \frac{2}{L}\int_0^L f(x',t)\, \mathit{sen}\ (i\pi x'/L) dx' \\
&- \mu_1'(t) \sum_{i=1} \mathit{sen}\ (i\pi x/L) \frac{2}{L}\int_0^L \mathit{sen}\ (i\pi x'/L) dx' \\
&- [\mu_2'(t) - \mu_1'(t)] \frac{1}{L} \sum_{i=1} \mathit{sen}\ (i\pi x/L) \frac{2}{L}\int_0^L x'\, \mathit{sen}\ (i\pi x'/L) dx' \, .
\end{aligned}
$$

A segunda linha é a expansão de $f(x,t)$. Calculando as duas últimas integrais,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \\
&= \mu_1'(t) + \frac{x}{L}[\mu_2'(t) - \mu_1'(t)] \\
&+ f(x,t) \\
&- \mu_1'(t) \sum_{i=1} sen\,[(2i-1)\pi x/L] \frac{2}{L} \frac{2L}{(2i-1)\pi} \\
&- [\mu_2'(t) - \mu_1'(t)] \frac{1}{L} \sum_{i=1} sen\,(i\pi x/L) \frac{2}{L} \frac{L^2}{i\pi} (-1)^{i+1}\,, \\
&= \mu_1'(t) + \frac{x}{L}[\mu_2'(t) - \mu_1'(t)] \\
&+ f(x,t) \\
&- \mu_1'(t) \frac{4}{\pi} \sum_{i=1} \frac{sen\,[(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} \\
&- [\mu_2'(t) - \mu_1'(t)] \frac{2}{\pi} \sum_{i=1} \frac{sen\,(i\pi x/L)}{i} (-1)^{i+1}\,, \\
&= \mu_1'(t) + \frac{x}{L}[\mu_2'(t) - \mu_1'(t)] \\
&+ f(x,t) \\
&- \mu_1'(t) \\
&- [\mu_2'(t) - \mu_1'(t)] \frac{x}{L} = f(x,t)\,,
\end{aligned}
$$

como esperado. Usamos os resultados,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2}{L} \sum_{i=1} sen\,(i\pi x/L) \int_0^L f(x')\, sen\,(i\pi x'/L) dx'\,, \\
x &= \frac{2L}{\pi} \sum_{i=1} \frac{sen\,(i\pi x/L)}{i} (-1)^{i+1}\,, \\
1 &= \frac{4}{\pi} \sum_{i=1} \frac{sen\,[(2i-1)\pi x/L]}{2i-1}\,.
\end{aligned}
$$

Em termos de função de Green temos,

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \mu_1(t) + \frac{x}{L}[\mu_2(t) - \mu_1(t)] \\
&\quad + \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t}\, sen\ (i\pi x/L) \times \\
&\quad \times \left\{ \int_0^t e^{\kappa(i\pi/L)^2 t'} \frac{2}{L} \int_0^L \left[f(x',t') - \mu_1'(t') - \frac{x'}{L}[\mu_2'(t') - \mu_1'(t')] \right] \times \right. \\
&\quad \times\ sen\ (i\pi x'/L) dx' dt' \\
&\quad \left. + \frac{2}{L} \int_0^L \left[\varphi(x') - \mu_1(0) - \frac{x'}{L}[\mu_2(0) - \mu_1(0)] \right] sen\ (i\pi x'/L) dx' \right\}, \\
&= \mu_1(t) + \frac{x}{L}[\mu_2(t) - \mu_1(t)] \\
&\quad + \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t}\, sen\ (i\pi x/L) \times \\
&\quad \times \left\{ \int_0^t e^{\kappa(i\pi/L)^2 t'} \frac{2}{L} \int_0^L \left[f(x',t') - \mu_1'(t') - \frac{x'}{L}[\mu_2'(t') - \mu_1'(t')] \right] \times \right. \\
&\quad \times\ sen\ (i\pi x'/L) dx' dt' \\
&\quad + \int_0^t e^{\kappa(i\pi/L)^2 t'} \delta(t') \frac{2}{L} \int_0^L \left[\varphi(x') - \mu_1(0) - \frac{x'}{L}[\mu_2(0) - \mu_1(0)] \right] \times \\
&\quad \times sen\ (i\pi x'/L) dx' dt' \}, \\
&= \mu_1(t) + \frac{x}{L}[\mu_2(t) - \mu_1(t)] \\
&\quad + \int_0^t \int_0^L \frac{2}{L} \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 (t-t')}\, sen\ (i\pi x/L)\, sen\ (i\pi x'/L) \times \\
&\quad \times \left\{ \left[f(x',t') - \mu_1'(t') - \frac{x'}{L}[\mu_2'(t') - \mu_1'(t')] \right] \times \right. \\
&\quad \left. + \delta(t') \left[\varphi(x') - \mu_1(0) - \frac{x'}{L}[\mu_2(0) - \mu_1(0)] \right] \right\} dx' dt', \\
&= \mu_1(t) + \frac{x}{L}[\mu_2(t) - \mu_1(t)] \\
&\quad + \int_0^t \int_0^L G(x,x',t-t') \times \\
&\quad \times \left\{ \left[f(x',t') - \mu_1'(t') - \frac{x'}{L}[\mu_2'(t') - \mu_1'(t')] \right] \times \right. \\
&\quad \left. + \delta(t') \left[\varphi(x') - \mu_1(0) - \frac{x'}{L}[\mu_2(0) - \mu_1(0)] \right] \right\} dx' dt',
\end{aligned}
$$

com a função de Green,

$$G(x,x',t-t') = \frac{2}{L}\sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2(t-t')}\, sen\,(i\pi x/L)\, sen\,(i\pi x'/L)\,.$$

Vamos escrever a solução de forma um pouco mais simples. Usando (ver apêndice),

$$\int_0^L sen\,(i\pi x/L)dx = \begin{cases} \dfrac{2L}{i\pi}\,, & i\ \text{ímpar}, \\ 0\,, & i\ \text{par}, \end{cases}$$
$$\int_0^L x\, sen\,(i\pi x/L)dx = \frac{L^2}{i\pi}(-1)^{i+1}\,,$$

obtemos,

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \mu_1(t) + \frac{x}{L}[\mu_2(t)-\mu_1(t)] \\
&+ \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t}\, sen\,(i\pi x/L)\,\times \\
&\times \left\{ \int_0^t e^{\kappa(i\pi/L)^2 t'} \frac{2}{L}\int_0^L \left[f(x',t') - \mu_1'(t') - \frac{x'}{L}[\mu_2'(t') - \mu_1'(t')]\right] \times \right. \\
&\times\ sen\,(i\pi x'/L)dx'dt' \\
&\left. + \frac{2}{L}\int_0^L \left[\varphi(x') - \mu_1(0) - \frac{x'}{L}[\mu_2(0)-\mu_1(0)]\right] sen\,(i\pi x'/L)dx' \right\}\,, \\
&= \mu_1(t) + \frac{x}{L}[\mu_2(t)-\mu_1(t)] \\
&+ \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t}\, sen\,(i\pi x/L)\,\times \\
&\times \left\{ \int_0^t e^{\kappa(i\pi/L)^2 t'} \frac{2}{L}\int_0^L \left[f(x',t') - \mu_1'(t') - \frac{x'}{L}[\mu_2'(t') - \mu_1'(t')]\right] \times \right. \\
&\times\ sen\,(i\pi x'/L)dx'dt' \\
&+ \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x')\, sen\,(i\pi x'/L)dx' \\
&- \mu_1(0)\frac{2}{L}\int_0^L sen\,(i\pi x'/L)dx' \\
&\left. - \frac{1}{L}[\mu_2(0)-\mu_1(0)]\frac{2}{L}\int_0^L x'\, sen\,(i\pi x'/L)dx' \right\}\,,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \mu_1(t) + \frac{x}{L}[\mu_2(t) - \mu_1(t)] \\
&\quad + \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t}\, sen\ (i\pi x/L) \times \\
&\quad \times \int_0^t e^{\kappa(i\pi/L)^2 t'} \frac{2}{L} \int_0^L \left[f(x',t') - \mu_1'(t') - \frac{x'}{L}[\mu_2'(t') - \mu_1'(t')] \right] \times \\
&\quad \times sen\ (i\pi x'/L) dx' dt' \\
&\quad + \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t}\, sen\ (i\pi x/L) \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x')\, sen\ (i\pi x'/L) dx' \\
&\quad - \sum_{i=1} e^{-\kappa[(2i-1)\pi/L]^2 t}\, sen\ [(2i-1)\pi x/L] \mu_1(0) \frac{2}{L} \frac{2L}{(2i-1)\pi} \\
&\quad - \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t}\, sen\ (i\pi x/L) \frac{1}{L}[\mu_2(0) - \mu_1(0)] \frac{2}{L} \frac{L^2}{i\pi} (-1)^{i+1}\,, \\
&= \mu_1(t) + \frac{x}{L}[\mu_2(t) - \mu_1(t)] \\
&\quad + \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t}\, sen\ (i\pi x/L) \times \\
&\quad \times \int_0^t e^{\kappa(i\pi/L)^2 t'} \frac{2}{L} \int_0^L \left[f(x',t') - \mu_1'(t') - \frac{x'}{L}[\mu_2'(t') - \mu_1'(t')] \right] \times \\
&\quad \times sen\ (i\pi x'/L) dx' dt' \\
&\quad + \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t}\, sen\ (i\pi x/L) \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x')\, sen\ (i\pi x'/L) dx' \\
&\quad - \frac{4}{\pi} \mu_1(0) \sum_{i=1} e^{-\kappa[(2i-1)\pi/L]^2 t} \frac{sen\ [(2i-1)\pi x/L]}{(2i-1)} \\
&\quad - \frac{2}{\pi}[\mu_2(0) - \mu_1(0)] \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t} \frac{sen\ (i\pi x/L)}{i} (-1)^{i+1}\,.
\end{aligned}
$$

15.Considere o problema 7 com $\varphi = u_0$ constante. isto é, resolva a equação do calor homogênea,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,$$

no intervalo $(0, L)$, com a condição inicial constante,

$$u(x,0) = u_0\,, \quad 0 \le x \le L\,,$$

e as condições de contorno não-homogêneas constantes,

$$u(0,t) = u_1\,, \quad u(L,t) = u_2\,.$$

Usando o resultado do problema 7,

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= u_1 + \frac{x}{L}(u_2 - u_1) + \\
&+ \frac{2}{L}\sum_{i=1} sen\,(i\pi x/L) e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t} u_0 \int_0^L sen\,(i\pi x'/L)\,dx' \\
&- \frac{4u_1}{\pi}\sum_{i=1}\frac{sen\,[(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} e^{-\kappa[(2i-1)\pi/L]^2 t} \\
&- \frac{2(u_2 - u_1)}{\pi}\sum_{i=1} sen\,(i\pi x/L) e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t}\frac{(-1)^{i-1}}{i}\,.
\end{aligned}$$

Calculando a integral na segunda linha (ver apêndice),

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= u_1 + \frac{x}{L}(u_2 - u_1) + \\
&+ \frac{4}{\pi}(u_0 - u_1)\sum_{i=1}\frac{sen\,[(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} e^{-\kappa[(2i-1)\pi/L]^2 t} \\
&- \frac{2(u_2 - u_1)}{\pi}\sum_{i=1} sen\,(i\pi x/L) e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t}\frac{(-1)^{i-1}}{i}\,.
\end{aligned}$$

Podemos verificar que a função acima satisfaz a equação diferencial e as condições de contorno. Para a condição inicial temos,

$$\begin{aligned}
u(x,0) &= u_1 + \frac{x}{L}(u_2 - u_1) + \\
&+ \frac{4}{\pi}(u_0 - u_1)\sum_{i=1}\frac{sen\,[(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} \\
&- \frac{2(u_2 - u_1)}{\pi}\sum_{i=1} sen\,(i\pi x/L)\frac{(-1)^{i-1}}{i}\,.
\end{aligned}$$

Substituindo as séries acima (ver apêndice),

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= u_1 + \frac{x}{L}(u_2 - u_1) + \\
&\quad +(u_0 - u_1) \\
&\quad -\frac{(u_2 - u_1)}{L}x\,, \\
&= u_0\,,
\end{aligned}
$$

como esperado.

16. Considere o problema 10 com $\varphi = u_0$ constante, isto é,

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\,,
$$

no segmento,

$$
0 < x < L\,, \;\; t > 0\,,
$$

com a condição inicial,

$$
u(x,0) = u_0\,, \;\; 0 \leq x \leq L\,,
$$

e as condições de contorno homogêneas,

$$
u(0,t) = 0\,, \;\; u(L,t) = 0\,, \;\; t \geq 0\,.
$$

Usando o resultado do problema 10, temos,

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t} \times \\
&\quad \times \left\{ \int_0^t e^{\kappa(i\pi/L)^2 t'} \frac{2}{L} \int_0^L f(x',t')\, sen\ (i\pi x'/L) dx' dt' \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{L} u_0 \int_0^L sen\ (i\pi x'/L) dx' \right\} sen\ (i\pi x/L)\,.
\end{aligned}
$$

Substituindo a última integral (ver apêndice),

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t}\, sen\ (i\pi x/L) \times \\
&\quad \times \int_0^t e^{\kappa(i\pi/L)^2 t'} \frac{2}{L} \int_0^L f(x',t')\, sen\ (i\pi x'/L) dx' dt' \\
&\quad + \frac{4}{\pi} u_0 \sum_{i=1} e^{-\kappa[(2i-1)\pi/L]^2 t} \frac{sen\ [(2i-1)\pi x/L]}{2i-1}\,.
\end{aligned}
$$

Vemos que a solução acima satisfaz as condições de contorno. A condição inicial nos dá,

$$u(x,0) = \frac{4}{\pi} u_0 \sum_{i=1} \frac{sen\ [(2i-1)\pi x/L]}{2i-1}\,.$$

Substituindo a série acima (ver apêndice),

$$u(x,0) = u_0\,,$$

como esperado. Calculando agora as derivadas de u *temos,*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \\
&= -\kappa\sum_{i=1}(i\pi/L)^2 e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t}\, sen\ (i\pi x/L)\times \\
&\times\int_0^t e^{\kappa(i\pi/L)^2 t'}\frac{2}{L}\int_0^L f(x',t')\, sen\ (i\pi x'/L)dx'dt' \\
&+\sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t}\, sen\ (i\pi x/L)\times \\
&\times e^{\kappa(i\pi/L)^2 t}\frac{2}{L}\int_0^L f(x',t)\, sen\ (i\pi x'/L)dx' \\
&-\kappa\frac{4}{\pi}u_0\sum_{i=1}[(2i-1)\pi/L]^2 e^{-\kappa[(2i-1)\pi/L]^2 t}\frac{sen\ [(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} \\
&+\kappa\sum_{i=1}(i\pi/L)^2 e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t}\, sen\ (i\pi x/L)\times \\
&\times\int_0^t e^{\kappa(i\pi/L)^2 t'}\frac{2}{L}\int_0^L f(x',t')\, sen\ (i\pi x'/L)dx'dt' \\
&+\kappa\frac{4}{\pi}u_0\sum_{i=1}[(2i-1)\pi/L]^2 e^{-\kappa[(2i-1)\pi/L]^2 t}\frac{sen\ [(2i-1)\pi x/L]}{2i-1}\,, \\
&= \sum_{i=1} sen\ (i\pi x/L)\frac{2}{L}\int_0^L f(x',t)\, sen\ (i\pi x'/L)dx'\,.
\end{aligned}$$

A expressão acima é a expansão de f*, logo,*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)\,,$$

como esperado.

17. Consideremos o problema 11 com $\varphi = u_0$ constante, isto é, a equação do calor na região aberta,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,$$

no intervalo,

$$0 \leq x \leq L\,, \;\; t_0 \leq t \leq T\,,$$

$$0 < x < L\,, \;\; t_0 < t\,.$$

As condições inicial e de fronteira são,

$$\begin{aligned} u(x,t_0) &= u_0\,, \\ u(0,t) &= \mu_1(t)\,, \\ u(L,t) &= \mu_2(t)\,. \end{aligned}$$

Usando o resultado do problema 11 temos,

$$\begin{aligned} u(x,t) \;\; = \;\; & \mu_1(t) + \frac{x}{L}[\mu_2(t) - \mu_1(t)] \\ & -\frac{4}{\pi}\sum_{i=1} \frac{sen\;[(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} \int_0^t e^{-\kappa[(2i-1)\pi/L]^2(t-t')} \mu_1'(t')dt' \\ & -\frac{2}{\pi}\sum_{i=1} \frac{sen\;(i\pi x/L)}{i}(-1)^{i+1} \int_0^t e^{-\kappa(i\pi/L)^2(t-t')}[\mu_2'(t') - \mu_1'(t')]dt' \\ & +\frac{2}{L}\sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t}\, sen\;(i\pi x/L) u_0 \int_0^L \, sen\;(i\pi x'/L)dx' \\ & -\frac{4}{\pi}\mu_1(0)\sum_{i=1} \frac{sen\;[(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} e^{-\kappa[(2i-1)\pi/L]^2 t} \\ & -\frac{2}{\pi}[\mu_2(0) - \mu_1(0)]\sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t} \frac{sen\;(i\pi x/L)}{i}(-1)^{i+1}\,. \end{aligned}$$

Calculando a integral na quarta linha (ver apêndice),

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \mu_1(t) + \frac{x}{L}[\mu_2(t) - \mu_1(t)] \\
&-\frac{4}{\pi}\sum_{i=1} \frac{sen\ [(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} \int_0^t e^{-\kappa[(2i-1)\pi/L]^2(t-t')}\mu_1'(t')dt' \\
&-\frac{2}{\pi}\sum_{i=1} \frac{sen\ (i\pi x/L)}{i}(-1)^{i+1} \int_0^t e^{-\kappa(i\pi/L)^2(t-t')}[\mu_2'(t') - \mu_1'(t')]dt' \\
&+\frac{4}{\pi}u_0 \sum_{i=1} e^{-\kappa[(2i-1)\pi/L]^2 t} \frac{sen\ [(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} \\
&-\frac{4}{\pi}\mu_1(0) \sum_{i=1} \frac{sen\ [(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} e^{-\kappa[(2i-1)\pi/L]^2 t} \\
&-\frac{2}{\pi}[\mu_2(0) - \mu_1(0)] \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t} \frac{sen\ (i\pi x/L)}{i}(-1)^{i+1} \,.
\end{aligned}
$$

Vamos verificar a solução acima. As condições de contorno e inicial nos dão,

$$
\begin{aligned}
u(0,t) &= \mu_1(t)\,, \\
u(L,t) &= \mu_2(t)\,, \\
u(x,0) &= \mu_1(0) + \frac{x}{L}[\mu_2(0) - \mu_1(0)] \\
&+\frac{4}{\pi}u_0 \sum_{i=1} \frac{sen\ [(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} \\
&-\frac{4}{\pi}\mu_1(0) \sum_{i=1} \frac{sen\ [(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} \\
&-\frac{2}{\pi}[\mu_2(0) - \mu_1(0)] \sum_{i=1} \frac{sen\ (i\pi x/L)}{i}(-1)^{i+1} \,.
\end{aligned}
$$

Substituindo as séries acima (ver apêndice),

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= \mu_1(0) + \frac{x}{L}[\mu_2(0) - \mu_1(0)] \\
&+u_0 \\
&-\mu_1(0) \\
&-\frac{x}{L}[\mu_2(0) - \mu_1(0)]\,, \\
&= u_0\,,
\end{aligned}
$$

como esperado. Vamos verificar agora que u satisfaz a equação diferencial. Temos,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \\
&= \mu_1'(t) + \frac{x}{L}[\mu_2'(t) - \mu_1'(t)] \\
&+\kappa \frac{4}{\pi} \sum_{i=1} [(2i-1)\pi/L]^2 \frac{sen\ [(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} \int_0^t e^{-\kappa[(2i-1)\pi/L]^2(t-t')} \mu_1'(t') dt' \\
&-\frac{4}{\pi} \sum_{i=1} \frac{sen\ [(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} \mu_1'(t) \\
&+\kappa \frac{2}{\pi} \sum_{i=1} (i\pi/L)^2 \frac{sen\ (i\pi x/L)}{i} (-1)^{i+1} \int_0^t e^{(t-t')} [\mu_2'(t') - \mu_1'(t')] dt' \\
&-\frac{2}{\pi} \sum_{i=1} \frac{sen\ (i\pi x/L)}{i} (-1)^{i+1} [\mu_2'(t) - \mu_1'(t)] \\
&-\kappa \frac{4}{\pi} u_0 \sum_{i=1} [(2i-1)\pi/L]^2 e^{-\kappa[(2i-1)\pi/L]^2 t} \frac{sen\ [(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} \\
&+\kappa \frac{4}{\pi} \mu_1(0) \sum_{i=1} [(2i-1)\pi/L]^2 \frac{sen\ [(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} e^{-\kappa[(2i-1)\pi/L]^2 t} \\
&+\kappa \frac{2}{\pi} [\mu_2(0) - \mu_1(0)] \sum_{i=1} (i\pi/L)^2 e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t} \frac{sen\ (i\pi x/L)}{i} (-1)^{i+1} \\
&-\kappa \frac{4}{\pi} \sum_{i=1} [(2i-1)\pi/L]^2 \frac{sen\ [(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} \int_0^t e^{-\kappa[(2i-1)\pi/L]^2(t-t')} \mu_1'(t') dt' \\
&-\kappa \frac{2}{\pi} \sum_{i=1} (i\pi/L)^2 \frac{sen\ (i\pi x/L)}{i} (-1)^{i+1} \int_0^t e^{-\kappa(i\pi/L)^2(t-t')} [\mu_2'(t') - \mu_1'(t')] dt' \\
&+\kappa \frac{4}{\pi} u_0 \sum_{i=1} [(2i-1)\pi/L]^2 e^{-\kappa[(2i-1)\pi/L]^2 t} \frac{sen\ [(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} \\
&-\kappa \frac{4}{\pi} \mu_1(0) \sum_{i=1} [(2i-1)\pi/L]^2 \frac{sen\ [(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} e^{-\kappa[(2i-1)\pi/L]^2 t} \\
&-\kappa \frac{2}{\pi} [\mu_2(0) - \mu_1(0)] \sum_{i=1} (i\pi/L)^2 e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t} \frac{sen\ (i\pi x/L)}{i} (-1)^{i+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \mu_1'(t) + \frac{x}{L}[\mu_2'(t) - \mu_1'(t)] \\
&- \frac{4}{\pi}\sum_{i=1} \frac{sen\ [(2i-1)\pi x/L]}{2i-1}\mu_1'(t) \\
&- \frac{2}{\pi}\sum_{i=1} \frac{sen\ (i\pi x/L)}{i}(-1)^{i+1}[\mu_2'(t) - \mu_1'(t)]\,.
\end{aligned}
$$

Substituindo as séries acima (ver apêndice),

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \\
&= \mu_1'(t) + \frac{x}{L}[\mu_2'(t) - \mu_1'(t)] \\
&- \mu_1'(t) \\
&- \frac{x}{L}[\mu_2'(t) - \mu_1'(t)] = 0\,,
\end{aligned}
$$

como esperado.

18. Considere o problema 12 com $\varphi = u_0$ constante, isto é, a equação do calor não homogênea,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\,,$$

no intervalo,

$$0 < x < L\,,\quad t > 0\,,$$

com a condição inicial,

$$u(x,0) = u_0\,,\quad 0 \le x \le L\,,$$

e as condições de contorno não homogêneas constantes,

$$u(0,t) = u_1\,,\quad u(l,t) = u_2\,,\quad t \ge 0\,.$$

Usando o resultado do problema 12,

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= u_1 + \frac{x}{L}(u_2-u_1) \\
&+ \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t}\, sen\ (i\pi x/L) \times \\
&\times \int_0^t e^{\kappa(i\pi/L)^2 t'} \frac{2}{L}\int_0^L f(x',t')\, sen\ (i\pi x'/L) dx' dt' \\
&+ \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t}\, sen\ (i\pi x/L) \frac{2}{L} u_0 \int_0^L sen\ (i\pi x'/L) dx' \\
&- \frac{4}{\pi} u_1 \sum_{i=1} e^{-\kappa[(2i-1)\pi/L]^2 t} \frac{sen\ [(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} \\
&- \frac{2}{\pi}(u_2-u_1) \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t} \frac{sen\ (i\pi x/L)}{i}(-1)^{i+1}\,.
\end{aligned}
$$

Calculando a integral na quarta linha (ver apêndice),

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= u_1 + \frac{x}{L}(u_2-u_1) \\
&+ \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t}\, sen\ (i\pi x/L) \times \\
&\times \int_0^t e^{\kappa(i\pi/L)^2 t'} \frac{2}{L}\int_0^L f(x',t')\, sen\ (i\pi x'/L) dx' dt' \\
&+ \frac{4}{\pi} u_0 \sum_{i=1} e^{-\kappa[(2i-1)\pi/L]^2 t} \frac{sen\ [(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} \\
&- \frac{4}{\pi} u_1 \sum_{i=1} e^{-\kappa[(2i-1)\pi/L]^2 t} \frac{sen\ [(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} \\
&- \frac{2}{\pi}(u_2-u_1) \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t} \frac{sen\ (i\pi x/L)}{i}(-1)^{i+1}\,.
\end{aligned}
$$

Vamos verificar a solução acima. As condições de contorno e inicial nos dão,

$$
\begin{aligned}
u(0,t) &= u_1\,,\\
u(L,t) &= u_2\,,\\
u(x,0) &= u_1 + \frac{x}{L}(u_2-u_1)\\
&\quad + \frac{4}{\pi}u_0 \sum_{i=1} \frac{sen\;[(2i-1)\pi x/L]}{2i-1}\\
&\quad - \frac{4}{\pi}u_1 \sum_{i=1} \frac{sen\;[(2i-1)\pi x/L]}{2i-1}\\
&\quad - \frac{2}{\pi}(u_2-u_1) \sum_{i=1} \frac{sen\;(i\pi x/L)}{i}(-1)^{i+1}\,.
\end{aligned}
$$

Substituindo as séries acima (ver apêndice),

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= u_1 + \frac{x}{L}(u_2-u_1)\\
&\quad + u_0\\
&\quad - u_1\\
&\quad - \frac{x}{L}(u_2-u_1) = u_0\,,
\end{aligned}
$$

como esperado. Verificando agora a equação diferencial temos,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \\
&= -\kappa \sum_{i=1} (i\pi/L)^2 e^{-\kappa (i\pi/L)^2 t} \, sen \, (i\pi x/L) \times \\
&\times \int_0^t e^{\kappa (i\pi/L)^2 t'} \frac{2}{L} \int_0^L f(x',t') \, sen \, (i\pi x'/L) dx' dt' \\
&+ \sum_{i=1} e^{-\kappa (i\pi/L)^2 t} \, sen \, (i\pi x/L) \times \\
&\times e^{\kappa (i\pi/L)^2 t} \frac{2}{L} \int_0^L f(x',t) \, sen \, (i\pi x'/L) dx' \\
&-\kappa \frac{4}{\pi} u_0 \sum_{i=1} [(2i-1)\pi/L]^2 e^{-\kappa [(2i-1)\pi/L]^2 t} \frac{sen \, [(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} \\
&+\kappa \frac{4}{\pi} u_1 \sum_{i=1} [(2i-1)\pi/L]^2 e^{-\kappa [(2i-1)\pi/L]^2 t} \frac{sen \, [(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} \\
&+\kappa \frac{2}{\pi} (u_2 - u_1) \sum_{i=1} (i\pi/L)^2 e^{t} \frac{sen \, (i\pi x/L)}{i} (-1)^{i+1} \\
&+\kappa \sum_{i=1} (i\pi/L)^2 e^{-\kappa (i\pi/L)^2 t} \, sen \, (i\pi x/L) \times \\
&\times \int_0^t e^{\kappa (i\pi/L)^2 t'} \frac{2}{L} \int_0^L f(x',t') \, sen \, (i\pi x'/L) dx' dt' \\
&+\kappa \frac{4}{\pi} u_0 \sum_{i=1} [(2i-1)\pi/L]^2 e^{-\kappa [(2i-1)\pi/L]^2 t} \frac{sen \, [(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} \\
&-\kappa \frac{4}{\pi} u_1 \sum_{i=1} [(2i-1)\pi/L]^2 e^{-\kappa [(2i-1)\pi/L]^2 t} \frac{sen \, [(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} \\
&-\kappa \frac{2}{\pi} (u_2 - u_1) \sum_{i=1} (i\pi/L)^2 e^{-\kappa (i\pi/L)^2 t} \frac{sen \, (i\pi x/L)}{i} (-1)^{i+1} \, , \\
&= \sum_{i=1} e^{-\kappa (i\pi/L)^2 t} \, sen \, (i\pi x/L) e^{\kappa (i\pi/L)^2 t} \frac{2}{L} \int_0^L f(x',t) \, sen \, (i\pi x'/L) dx' \, , \\
&= \sum_{i=1} sen \, (i\pi x/L) \frac{2}{L} \int_0^L f(x',t) \, sen \, (i\pi x'/L) dx' \, , \\
&= f(x,t) \, ,
\end{aligned}
$$

como esperado.

19. Considere o problema 14 com $\varphi = u_0$ constante, isto é, a equação do

calor não homogênea,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\,,$$

no intervalo,

$$0 < x < L\,,\;\; t > 0\,,$$

com a condição inicial,

$$u(x,0) = u_0\,,\;\; 0 \leq x \leq L\,,$$

e as condições de contorno não homogêneas,

$$u(0,t) = \mu_1(t)\,,\;\; u(L,t) = \mu_2(t)\,,\;\; t \geq 0\,.$$

Do problema 14 temos,

$$\begin{aligned}
u(x,t) \;\;=\;\; & \mu_1(t) + \frac{x}{L}[\mu_2(t) - \mu_1(t)] \\
& + \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t}\, sen\ (i\pi x/L) \times \\
& \times \int_0^t e^{\kappa(i\pi/L)^2 t'} \frac{2}{L} \int_0^L \left[f(x',t') - \mu_1'(t') - \frac{x'}{L}[\mu_2'(t') - \mu_1'(t')] \right] \times \\
& \times\, sen\ (i\pi x'/L) dx' dt' \\
& + \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t}\, sen\ (i\pi x/L) \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x')\, sen\ (i\pi x'/L) dx' \\
& - \frac{4}{\pi}\mu_1(0) \sum_{i=1} e^{-\kappa[(2i-1)\pi/L]^2 t} \frac{sen\ [(2i-1)\pi x/L]}{(2i-1)} \\
& - \frac{2}{\pi}[\mu_2(0) - \mu_1(0)] \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t} \frac{sen\ (i\pi x/L)}{i} (-1)^{i+1}\,.
\end{aligned}$$

Substituindo $\varphi(x) = u_0 =$*constante,*

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \mu_1(t) + \frac{x}{L}[\mu_2(t) - \mu_1(t)] \\
&\quad + \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t} \, sen \, (i\pi x/L) \times \\
&\quad \times \int_0^t e^{\kappa(i\pi/L)^2 t'} \frac{2}{L} \int_0^L \left[f(x',t') - \mu_1'(t') - \frac{x'}{L}[\mu_2'(t') - \mu_1'(t')] \right] \times \\
&\quad \times sen \, (i\pi x'/L) dx' dt' \\
&\quad + \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t} \, sen \, (i\pi x/L) \frac{2}{L} u_0 \int_0^L sen \, (i\pi x'/L) dx' \\
&\quad - \frac{4}{\pi} \mu_1(0) \sum_{i=1} e^{-\kappa[(2i-1)\pi/L]^2 t} \frac{sen \, [(2i-1)\pi x/L]}{(2i-1)} \\
&\quad - \frac{2}{\pi}[\mu_2(0) - \mu_1(0)] \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t} \frac{sen \, (i\pi x/L)}{i} (-1)^{i+1} \, , \\
&= \mu_1(t) + \frac{x}{L}[\mu_2(t) - \mu_1(t)] \\
&\quad + \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t} \, sen \, (i\pi x/L) \times \\
&\quad \times \int_0^t e^{\kappa(i\pi/L)^2 t'} \frac{2}{L} \int_0^L \left[f(x',t') - \mu_1'(t') - \frac{x'}{L}[\mu_2'(t') - \mu_1'(t')] \right] \times \\
&\quad \times sen \, (i\pi x'/L) dx' dt' \\
&\quad + \frac{4}{\pi}[u_0 - \mu_1(0)] \sum_{i=1} e^{-\kappa[(2i-1)\pi/L]^2 t} \frac{sen \, [(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} \\
&\quad - \frac{2}{\pi}[\mu_2(0) - \mu_1(0)] \sum_{i=1} e^{-\kappa(i\pi/L)^2 t} \frac{sen \, (i\pi x/L)}{i} (-1)^{i+1} \, .
\end{aligned}
$$

20. Resolva a equação do calor,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \, ,$$

no intervalo,

$$0 < x < L \, , \quad t > 0 \, ,$$

com as condições de contorno homogêneas (barra isolada em $x = 0$),

$$u_x(0,t) = u(L,t) = 0 \, ,$$

e a condição inicial,

$$u(x,0) = \varphi(x)\,.$$

A solução é,

$$u(x,t) = A_0 x + B_0 + \sum_{i=1} (A_i\, sen\ \omega_i x + B_i \cos \omega_i x) e^{-\lambda_i^2 t}\,,$$

com $\omega_i^2 = \lambda_i^2/\kappa$. *As condições de contorno e inicial nos dão as equações,*

$$\begin{aligned}
u_x(0,t) &= A_0 + \sum_{i=1} \omega_i A_i e^{-\lambda_i^2 t} = 0\,,\\
u(L,t) &= A_0 L + B_0 + \sum_{i=1} (A_i\, sen\ \omega_i L + B_i \cos \omega_i L) e^{-\lambda_i^2 t} = 0\,,\\
u(x,0) &= A_0 x + B_0 + \sum_{i=1} (A_i\, sen\ \omega_i x + B_i \cos \omega_i x) = \varphi(x)\,.
\end{aligned}$$

Satisfazemos as condições acima escolhendo,

$$\begin{aligned}
&A_i = 0\,, \quad i = 0, 1, 2, \ldots\\
&B_0 = 0\,,\\
&\omega_i = (2i-1)\frac{\pi}{2L}\,, \quad i = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

Com isso temos,

$$\lambda_i^2 = \kappa \omega_i^2 = \kappa (2i-1)^2 \frac{\pi^2}{4L^2}\,.$$

A condição para φ *fica então,*

$$\sum_{i=1} B_i \cos[(2i-1)\pi x/2L] = \varphi(x)\,.$$

Multiplicando a expressão acima por $\cos[(2j-1)\pi x/2L]$ *e integrando em* x *(ver apêndice),*

$$\sum_{i=1} B_i \int_0^L \cos[(2i-1)\pi x/2L]\cos[(2j-1)\pi x/2L]dx =$$
$$= \int_0^L \varphi(x)\cos[(2j-1)\pi x/2L]dx\,,$$
$$B_j\frac{L}{2} = \int_0^L \varphi(x)\cos[(2j-1)\pi x/2L]dx\,,$$
$$B_j = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\cos[(2j-1)\pi x/2L]dx\,.$$

A expansão para φ é então,

$$\varphi(x) = \sum_{i=1} \cos[(2i-1)\pi x/2L]\frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x')\cos[(2i-1)\pi x'/2L]dx'\,.$$

A solução é portanto,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{i=1} e^{-\kappa(2i-1)^2\pi^2 t/4L^2}\cos[(2i-1)\pi x/2L]\times \\ &\times\frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x')\cos[(2i-1)\pi x'/2L]dx'\,. \end{aligned}$$

Podemos escrever a solução de outra forma. Fazemos,

$$u(x,t) = \int_0^L G(x,x';t)\varphi(x')\,dx'\,,$$

com a função de Green definida por,

$$\begin{aligned} G(x,x';t) &= \sum_{i=1} e^{-\kappa(2i-1)^2\pi^2 t/4L^2}\cos[(2i-1)\pi x/2L]\times \\ &\times\frac{2}{L}\cos[(2i-1)\pi x'/2L]\,. \end{aligned}$$

21. Considere o problema anterior com $\varphi = u_0$ constante, isto é,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,$$

no intervalo,

$$0 < x < L\,, \quad t > 0\,,$$

com as condições de contorno homogêneas (barra isolada em $x = 0$),

$$u_x(0,t) = u(L,t) = 0\,,$$

e a condição inicial,

$$u(x,0) = u_0\,.$$

22. Considere a equação do calor,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,$$

no intervalo,

$$0 < x < L\,, \quad t > 0\,,$$

com as condições de contorno homogêneas (barra isolada em $x = L$),

$$u(0,t) = u_x(L,t) = 0\,,$$

e a condição inicial,

$$u(x,0) = \varphi(x)\,.$$

23. Considere o problema anterior com $\varphi = u_0$ constante, isto é,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,$$

no intervalo,

$$0 < x < L\,, \quad t > 0\,,$$

com as condições de contorno homogêneas (barra isolada em $x = L$),

$$u(0,t) = u_x(L,t) = 0\,,$$

e a condição inicial,

$$u(x,0) = u_0\,.$$

24. Considere a equação do calor,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,$$

no intervalo,

$$0 < x < L\,, \quad t > 0\,,$$

com as condições de contorno homogêneas (barra isolada em $x = 0$ e $x = L$),

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0\,,$$

e a condição inicial,

$$u(x,0) = \varphi(x)\,.$$

25. Considere o problema anterior com $\varphi = u_0$ constante, isto é,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,$$

no intervalo,

$$0 < x < L\,, \quad t > 0\,,$$

com as condições de contorno homogêneas (barra isolada em $x = 0$ e $x = L$),

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0\,,$$

e a condição inicial,

$$u(x,0) = u_0\,.$$

26. Resolva a equação do calor não homogênea,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\,,$$

no intervalo,

$$0 < x < L\,, \quad t > 0\,,$$

com as condições de contorno homogêneas (barra isolada em $x = 0$),

$$u_x(0,t) = u(L,t) = 0\,,$$

e a condição inicial,

$$u(x,0) = \varphi(x)\,.$$

27. Considere o problema anterior com $\varphi = u_0$ constante, isto é,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\,,$$

no intervalo,

$$0 < x < L\,, \quad t > 0\,,$$

com as condições de contorno homogêneas (barra isolada em $x = 0$),

$$u_x(0,t) = u(L,t) = 0\,,$$

e a condição inicial,

$$u(x,0) = u_0\,.$$

28. Considere a equação do calor,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\,,$$

no intervalo,

$$0 < x < L\,, \quad t > 0\,,$$

com as condições de contorno homogêneas (barra isolada em $x = L$),

$$u(0,t) = u_x(L,t) = 0\,,$$

e a condição inicial,

$$u(x,0) = \varphi(x)\,.$$

29. Considere o problema anterior com $\varphi = u_0$ constante, isto é,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\,,$$

no intervalo,

$$0 < x < L\,, \quad t > 0\,,$$

com as condições de contorno homogêneas (barra isolada em $x = L$),

$$u(0,t) = u_x(L,t) = 0\,,$$

e a condição inicial,

$$u(x,0) = u_0\,.$$

30. Considere a equação do calor,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\,,$$

no intervalo,

$$0 < x < L\,, \quad t > 0\,,$$

com as condições de contorno homogêneas (barra isolada em $x = 0$ e $x = L$),

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0\,,$$

e a condição inicial,

$$u(x,0) = \varphi(x)\,.$$

31. Considere o problema anterior com $\varphi = u_0$ constante, isto é,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\,,$$

no intervalo,

$$0 < x < L\,, \quad t > 0\,,$$

com as condições de contorno homogêneas (barra isolada em $x = 0$ e $x = L$),

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0\,,$$

e a condição inicial,

$$u(x,0) = u_0\,.$$

32. Considere a equação diferencial,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha^2 u\,,$$

no intervalo $0 < x < L$, $t > 0$, com condições de contorno homogêneas,

$$u(0,t) = u(L,t) = 0\,,$$

e condição inicial,

$$u(x,0) = \varphi(x)\,.$$

33. Considere o problema anterior com $\varphi = u_0$ constante.

34. Considere o problema 32 com $u(0,t) = u_1$, $u(L,t) = u_2$.

35. Considere o problema anterior com $\varphi = u_0$ constante.

36. Considere o problema 32 com $u(0,t) = \mu_1(t)$, $u(L,t) = \mu_2(t)$.

37. Considere o problema anterior com $\varphi = u_0$ constante.

38. Considere os problemas 32-37 com $-\alpha^2$ em lugar de $+\alpha^2$.

39. Uma barra de comprimento L possui a superfície isolada, incluindo as extremidades. A temperatura inicial é $u(x,0) = f(x)$. Calcule $u(x,t)$ (Spiegel [7], probl. 2.27).

40. Uma barra de comprimento L com superfície isolada e extremidades em $x = 0$ e $x = L$, possui temperatura inicial $f(x)$ ($u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$). Calcule $u(x,t)$ (Churchill [13] p. 111).

41. Resolva o problema (Spiegel [7], probl. 2.51; Churchill [13], p. 109),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,$$

com,

$$0 < x < \pi\,, \quad t > 0\,, \quad u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0\,, \quad u(x,0) = f(x)\,.$$

42. Resolva o problema (Spiegel [7], probl. 1.12),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,$$

com,

$$0 < x < \pi\,, \quad t > 0\,, \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0\,, \quad u(x,0) = \operatorname{sen} 2x\,.$$

Mostre que se $u(x,0) = \operatorname{sen} x$ a solução é $u(x,t) = e^{-\kappa t} \operatorname{sen} x$ (Churchill [13], p. 104).

43. Resolva o problema (Spiegel [7], probl. 1.23),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,$$

com,

$$\begin{aligned}
&0 < x < 3\,, \quad t > 0\,, \quad u(0,t) = u(3,t) = 0\,, \\
&u(x,0) = 5 \operatorname{sen} 4\pi x - 3 \operatorname{sen} 8\pi x + 2 \operatorname{sen} 10\pi x\,, \quad |u(x,t)| < M\,.
\end{aligned}$$

44. Resolva o problema (Spiegel [7], probl. 1.25),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,$$

com,

$$0 < x < 3\,,\ \ t > 0\,,\ \ u(0,t) = u(3,t) = 0\,,\ \ u(x,0) = f(x)\,,\ \ |u(x,t)| < M\,.$$

45. Resolva a equação (Spiegel [7], probl. 1.43(c)),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,\ \ 0 \le x \le \pi\,,$$

com,

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0\,,\ \ u(x,0) = 2\,\mathrm{sen}\ 3x - 4\,\mathrm{sen}\ 5x\,.$$

46. Resolva a equação (Spiegel [7], probl. 1.43(d)),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,\ \ 0 \le x \le 2\,,$$

com,

$$u_x(0,t) = u(2,t) = 0\,,\ \ u(x,0) = 8\cos(3\pi x/4) - 6\cos(9\pi x/4)\,.$$

47. Resolva a equação (Spiegel [7], probl. 1.43(g)),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,\ \ 0 \le x \le 4\,,$$

com,

$$u(0,t) = u(4,t) = 0\,,\ \ u(x,0) = 6\,\mathrm{sen}\ (\pi x/2) + 3\,\mathrm{sen}\ (\pi x)\,.$$

48. Resolva o problema (Spiegel [7], probl. 1.45),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2u\,,$$

com,

$$\begin{aligned}
&0 < x < 3\,,\ \ t > 0\,,\\
&u(0,t) = u(3,t) = 0\,,\\
&u(x,0) = 2\,\mathrm{sen}\,\pi x - \,\mathrm{sen}\,4\pi x\,,\\
&|u(x,t)| < M\,.
\end{aligned}$$

49. Considere o problema 3 com as condições $u_x(0,t) = 0$, $u(3,t) = 0$, $u(x,0) = f(x)$, expandindo $f(x)$ em uma série de cosenos (Spiegel [7], probl. 1.47).

50. Considere o problema 2 com temperatura inicial 25℃(Spiegel [7], probl. 2.25).

51. Resolva o problema (Spiegel [7], probl. 2.26),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,$$

com,

$$0 < x < 3\,, \quad t > 0\,, \quad u(0,t) = 10\,, \quad u(3,t) = 40\,, \quad u(x,0) = 25\,, \quad |u(x,t)| < M\,.$$

52. Resolva o problema (Spiegel [7], probl. 2.50),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,$$

com,

$$0 < x < 4\,, \quad t > 0\,, \quad u(0,t) = u(4,t) = 0\,, \quad u(x,0) = 25x\,.$$

53. Resolva o problema anterior com $u(0,t) = u_1$, $u(L,t) = u_2$, $u(x,0) = 0$ (Spiegel [7] probl. 2.63).

54. Resolva o problema 14 com $u(0,t) = u_1$, $u(L,t) = u_2$, $u(x,0) = h(x)$ (Spiegel [7], probl. 2.64). Considere o caso particular $u_1 = u_2 = 0$ (Tijonov [12], p.524).

55. Resolva o problema (Spiegel [7], probl. 2.69 com $u_1 = u_2 = 0$),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta e^{-\gamma x}\,,$$

com,

$$0 < x < L\,, \quad t > 0\,, \quad u(0,t) = u_1\,, \quad u(L,t) = u_2\,, \quad u(x,0) = f(x)\,, \quad |u(x,t)| < M\,.$$

56. Resolva o problema anterior com $\beta e^{-\gamma x}$ substituído por $u_0 \operatorname{sen} \alpha x$ (Spiegel [7], probl. 2.70).

57. Uma barra condutora com extremidades em $x = 0$ e $x = L$ possui temperatura zero em $x = 0$, e em $x = L$ irradia em um meio a temperatura zero. A superfície é isolada e a temperatura inicial é $f(x)$. Calcule $u(x,t)$ (Spiegel [7], probl. 3.13).

58. Mostre que o problema de valores de contorno,

$$
\begin{aligned}
&g(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[K(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + h(x)u\,, \quad 0 < x < L\,, \quad t > 0\,,\\
&u(t,0) = u(t,L) = 0\,, \quad u(0,x) = f(x)\,, \quad |u(t,x)| < M\,,
\end{aligned}
$$

é um problema de Sturm-Lioville. Calcule $u(t,x)$ (Spiegel [7], probl. 3.14).

59. Considere o problema 18 com condições de contorno $u_x(t,0) = h_1 u(t,0)$, $u_x(t,L) = h_2 u(t,L)$ (Spiegel [7], probl. 3.37).

60. Resolva o problema de valores de contorno (Spiegel [7], probl. 3.40),

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad 0 < x < L\,, \quad t > 0\,,\\
&u(0,t) = u_x(L,t) = 0\,, \quad u(x,0) = f(x)\,, \quad |u(x,t)| < M\,.
\end{aligned}
$$

61. Resolva o problema de valores de contorno (Spiegel [7], probl. 3.43),

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad 0 < x < L\,, \quad t > 0\,,\\
&u_x(0,t) = hu(0,t)\,, \quad u_x(L,t) = -hu(L,t)\,, \quad u(x,0) = f(x)\,.
\end{aligned}
$$

62. Mostre que a equação (Tijonov [12], p. 220),

$$
\frac{\partial v}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial v}{\partial x} + \gamma v\,,
$$

se reduz à equação do calor,

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,
$$

após a transformação de variáveis,

$$
v = e^{\mu x + \lambda t}u\,, \quad \mu = -\frac{\beta}{2\kappa}\,, \quad \lambda = \gamma - \frac{\beta^2}{4\kappa}\,.
$$

63. Uma barra semi-infinita ($x \geq 0$) com superfície isolada possui temperatura inicial $u(x,0) = f(x)$. Uma temperatura $u(0,t) = g(t)$ é aplicada na extremidade $x = 0$ e mantida. Calcule $u(x,t)$.

64. Considere o problema anterior com $u(0,t) = g(t) = 0$ (Spiegel [7], problemas 5.16 e 5.17).

65. Considere o problema 27 com $u(x,0) = f(x) = u_0$ constante (Spiegel [7], probl. 5.18).

66. Use a transformada de Fourier para resolver o problema de valores de contorno (Spiegel [7], probl. 5.22; Tijonov [12], p. 248),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad u(x,0) = f(x)\,, \quad |u(x,t)| < M\,,$$

com $-\infty < x < \infty$, $t > 0$.

67. Uma barra infinita com superfície isolada possui temperatura inicial dada por,

$$f(x) = \begin{cases} u_0\,, & |x| < a\,, \\ 0\,, & |x| > a\,. \end{cases}$$

Calcule $u(x,t)$ (Spiegel [7], probl. 5.42).

68. Um sólido semi-infinito ($x > 0$) possui temperatura inicial dada por $f(x) = u_0 e^{-bx^2}$. Se a face em $x = 0$ é isolada, calcule $u(x,t)$ (Spiegel [7], probl. 5.43).

69. Considere o problema anterior com $u(0,t) = u_1$, $u(L,t) = u_2$, $u(x,0) = 0$.

70. Considere o problema 33 com $u(0,t) = u_1$, $u(L,t) = u_2$, $u(x,0) = h(x)$.

71. Considere o problema 33 com $u(0,t) = u(L,t) = 0$, $u(x,0) = h(x)$ (Tijonov [12], p. 524).

72. Se as barras do problema anterior são de concreto com $\kappa = 0,005$ (unidades CGS), quanto tempo após o contato as temperaturas nos mesmos pontos serão as mesmas? (5 h; Churchill [13], p. 105).

73. Calcule a temperatura $u(x,t)$ em uma barra com temperatura inicial $\varphi(x)$, e as faces em $x = 0$ e $x = \pi$ termicamente isoladas (Churchill [13], p. 109),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad 0 < x < \pi\,,$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0\,, \quad u(x,0) = \varphi(x)\,.$$

74. Considere agora o problema com a face em $x = 0$ a temperatura zero, a face em $x = \pi$ isolada, e temperatura inicial $\varphi(x)$ (Churchill [13], p. 109).

75. Suponhamos um fio radiante com diâmetro pequeno o suficiente para que a temperatura em qualquer seção reta seja constante. A superfície lateral é exposta a temperatura zero, e ganha ou perde calor de acordo com a lei de Newton (Churchill [13], p. 110),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu\,, \;\; 0 < x < \pi\,.$$

(a) Calcule u se as condições de contorno são,

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0\,, \;\; u(x,0) = \varphi(x)\,.$$

(b) Calcule u se as condições de contorno são,

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0\,, \;\; u(x,0) = \varphi(x)\,.$$

76. Considere uma barra com a face em $x = 0$ a temperatura zero, a face em $x = L$ isolada, e temperatura inicial $\varphi(x)$. Calcule $u(x,t)$ (Churchill [13], p. 111).

77. Considere o problema 25 com $0 < x < \pi$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $u(x,0) = f(x)$. Considere o caso particular $f(x) = \alpha x(\pi - x)/2\kappa$ (Churchill [13], p. 111).

78. Considere o problema anterior com a extremidade $x = \pi$ isolada.

79. Um fio irradia calor para a vizinhança a temperatura zero. Em $x = 0$ temos $u = 0$, e em $x = \pi$ temos $u = A$. A temperatura inicial é zero. Calcule $u(x,t)$ (Churchill [13], p. 112).

80. Uma barra possui a face em $x = 0$ a temperatura zero, e a face em $x = \pi$ apresenta fluxo de calor constante, $u_x(\pi,t) = A$. Calcule u se a temperatura inicial é zero (Churchill [13], p. 112).

81. Resolva o problema de valores de contorno (Spiegel [7] probl. 3.39),

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \;\; 0 < x < L\,, \;\; t > 0\,,\\ &u_x(0,t) = -h_1[u(0,t) - u_0]\,, \;\; u_x(L,t) = -h_2[u(L,t) - u_0]\,, \;\; u(x,0) = \varphi(x)\,.\end{aligned}$$

82. Resolva o problema de valores de contorno,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \;\; 0 < x < L\,, \;\; t > 0\,,\\ &u_x(0,t) = \mu_1(t)\,, \;\; u_x(L,t) = \mu_2(t)\,, \;\; u(x,0) = \varphi(x)\,.\end{aligned}$$

83. Resolva o problema de valores de contorno,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \;\; 0 < x < L\,, \;\; t > 0\,,\\ &u(0,t) = \mu_1(t)\,, \;\; u_x(L,t) = \mu_2(t)\,, \;\; u(x,0) = \varphi(x)\,.\end{aligned}$$

84. Resolva o problema de valores de contorno,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad 0 < x < L\,, \quad t > 0\,,$$
$$u_x(0,t) = \mu_1(t)\,, \quad u(L,t) = \mu_2(t)\,, \quad u(x,0) = \varphi(x)\,.$$

85. Resolva o problema de valores de contorno,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\,, \quad 0 < x < L\,, \quad t > 0\,,$$
$$u_x(0,t) = \mu_1(t)\,, \quad u_x(L,t) = \mu_2(t)\,, \quad u(x,0) = \varphi(x)\,.$$

86. Resolva o problema de valores de contorno,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\,, \quad 0 < x < L\,, \quad t > 0\,,$$
$$u(0,t) = \mu_1(t)\,, \quad u_x(L,t) = \mu_2(t)\,, \quad u(x,0) = \varphi(x)\,.$$

87. Resolva o problema de valores de contorno,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\,, \quad 0 < x < L\,, \quad t > 0\,,$$
$$u_x(0,t) = \mu_1(t)\,, \quad u(L,t) = \mu_2(t)\,, \quad u(x,0) = \varphi(x)\,.$$

88. Resolva o problema de valores de contorno (Spiegel [7] probl. 1.27 com $\mu_1(t) = T_1$, $\mu_2(t) = T_2$),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta(u - u_0)\,, \quad 0 < x < L\,, \quad t > 0\,,$$
$$u(0,t) = \mu_1(t)\,, \quad u(L,t) = \mu_2(t)\,, \quad u(x,0) = \varphi(x)\,.$$

89. Resolva o problema anterior se (Spiegel [7] probl. 1.28), as extremidades em $x = 0$ e $x = L$ são isoladas, isto é,

$$u_x(0,t) = 0\,, \quad u_x(L,t) = 0\,;$$

90. Calcule a temperatura $u(x,t)$ em uma barra se,

(a) as extremidades em $x = 0$ e $x = L$ irradiam para o meio de acordo com a lei de Newton do resfriamento, isto é,

$$u_x(0,t) = B[u(0,t) - u_0]\,, \;\; u_x(L,t) = -B[u(L,t) - u_0]\,.$$

(b) as extremidades em $x = 0$ e $x = L$ irradiam para o meio de acordo com a lei de Newton do resfriamento, isto é (Tijonov [12], p. 214),

$$u_x(0,t) = B[u(0,t) - \theta(t)]\,, \;\; u_x(L,t) = -B[u(L,t) - \theta(t)]\,.$$

(c) as extremidades em $x = 0$ e $x = L$ irradiam para o meio de acordo com a lei de Stefan-Boltzmann, isto é (Tijonov [12], p. 217),

$$u_x(0,t) = \sigma[u^4(0,t) - \theta^4(0,t)]\,, \;\; u_x(L,t) = \sigma[u^4(L,t) - \theta^4(L,t)]\,.$$

3 Considerando $u(x,y,t)$

A equação da condução do calor em duas dimensões, em coordenadas cartesianas, é,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\,. \tag{15}$$

Substituímos,

$$u(x,y,t) = T(t)X(x)Y(y)\,, \tag{16}$$

obtendo,

$$\begin{aligned} T'XY &= \kappa(TX''Y + TXY'')\,, \\ \frac{T'}{T} &= \kappa\frac{X''}{X} + \kappa\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2\,, \end{aligned}$$

em que λ é uma constante. A equação para T fica,

$$T' + \lambda^2 T = 0\,, \tag{17}$$

e a função T é,

$$T(t) = Ce^{-\lambda^2 t}\,. \tag{18}$$

Considerando a função X temos,

$$\kappa \frac{X''}{X} + \kappa \frac{Y''}{Y} = -\lambda^2\,,$$
$$\frac{X''}{X} = -\frac{\lambda^2}{\kappa} - \frac{Y''}{Y} = -\omega^2\,,$$

logo,

$$X'' + \omega^2 X = 0\,. \tag{19}$$

A função X é assim,

$$X(x) = A \,\mathrm{sen}\; \omega x + B \cos \omega x\,. \tag{20}$$

Para Y temos a equação,

$$-\frac{\lambda^2}{\kappa} - \frac{Y''}{Y} = -\omega^2\,, \tag{21}$$

ou,

$$Y'' + \left(\frac{\lambda^2}{\kappa} - \omega^2\right) Y = 0\,. \tag{22}$$

A função Y é,

$$Y(y) = D \,\mathrm{sen}\; \alpha y + E \cos \alpha y\,, \quad \alpha^2 = \frac{\lambda^2}{\kappa} - \omega^2 > 0\,,$$
$$Y(y) = F \,\mathrm{senh}\; \alpha y + G \cosh \alpha y\,, \quad \alpha^2 = \omega^2 - \frac{\lambda^2}{\kappa} > 0\,. \tag{23}$$

A solução geral é portanto, usando o princípio de superposição,

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \sum_{ij} e^{-\lambda_i^2 t} (A \,\mathrm{sen}\; \omega_j x + B \cos \omega_j x) \times \\ &\quad \times (D \,\mathrm{sen}\; \alpha_{ij} y + E \cos \alpha_{ij} y)\,, \qquad (24) \\ &\quad \alpha_{ij}^2 = \frac{\lambda_i^2}{\kappa} - \omega_j^2 > 0\,, \\ u(x,y,t) &= \sum_{ij} e^{-\lambda_i^2 t} (A \,\mathrm{sen}\; \omega_j x + B \cos \omega_j x) \times \\ &\quad \times (D \,\mathrm{senh}\; \alpha_{ij} y + E \cosh \alpha_{ij} y)\,, \qquad (25) \\ &\quad \alpha_{ij}^2 = \omega_j^2 - \frac{\lambda_i^2}{\kappa} > 0\,. \end{aligned}$$

Podemos escrever a solução de outra forma. Escrevemos,

$$\frac{X''}{X} = -\frac{\lambda^2}{\kappa} - \frac{Y''}{Y} = +\omega^2\,, \tag{26}$$

A equação para X fica agora,

$$X'' - \omega^2 X = 0\,, \tag{27}$$

com solução,

$$X(x) = A\,\text{senh}\;\omega x + B\cosh\omega x\,. \tag{28}$$

A equação para Y fica,

$$-\frac{\lambda^2}{\kappa} - \frac{Y''}{Y} = +\omega^2\,, \tag{29}$$

ou,

$$\frac{Y''}{Y} = -\omega^2 - \frac{\lambda^2}{\kappa}\,. \tag{30}$$

A função Y é então,

$$\begin{aligned} Y(y) &= D\,\text{sen}\;\alpha y + E\cos\alpha y\,, \\ \alpha^2 &= \omega^2 + \frac{\lambda^2}{\kappa}\,. \end{aligned} \tag{31}$$

A solução é assim,

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \sum_{ij} e^{-\lambda_i^2 t}(A\,\text{senh}\;\omega_j x + B\cosh\omega_j x)\times \\ &\quad \times(D\,\text{sen}\;\alpha_{ij} y + E\cos\alpha_{ij} y)\,, \qquad (32) \\ &\quad \alpha_{ij}^2 = \frac{\lambda_i^2}{\kappa} + \omega_j^2 > 0\,, \end{aligned}$$

(33)

4 Problemas

1. Uma placa retangular de lados a e b possui faces isoladas com lados a 0º. Se a temperatura inicial é $f(x,y)$, calcule $u(x,y,t)$ (Spiegel [7], probl. 2.29, com $a = b = 1$).

2. Suponha que a placa do problema anterior possua a face em $y = b$ na temperatura u_1. Calcule $u(x, y, t)$ (Spiegel [7], probl. 2.30, com $a = b = 1$, para o caso estacionário).

3. Suponha que a placa do problema 1 possua a face em $y = b$ na temperatura $f(x)$. Calcule $u(x, y, t)$ (Spiegel [7], probl. 2.56, com $a = b = 1$, para o caso estacionário).

4. Suponha agora que a placa do problema 1 possua as faces nas temperaturas u_1, u_2, u_3, u_4. Calcule $u(x, y, t)$ (Spiegel [7], probl. 2.31, com $a = b = 1$, para o caso estacionário).

5. Suponha agora que a placa do problema 1 possua as faces nas temperaturas $f(x)$ em $y = 0$, $g(x)$ em $y = b$, $h(y)$ em $x = 0$, $v(y)$ em $x = a$. Calcule $u(x, y, t)$ (Spiegel [7], probl. 2.57, com $a = b = 1$, para o caso estacionário).

6. Uma placa semi-infinita de largura a possui dois lados paralelos mantidos a temperatura 0, e o lado em $y = 0$ a temperatura constante u_0. Calcule $u(x, y, t)$ (Spiegel [7], probl. 2.58, para o caso estacionário).

7. Considere o problema anterior com os três lados a temperaturas u_0 em $y = 0$, u_1 em $x = 0$ e u_2 em $x = a$.

8. Considere o problema 6 com os três lados a temperaturas $f(x)$ em $y = 0$, $g(y)$ em $x = 0$ e $h(y)$ em $x = a$.

9. Resolva o problema de valores de contorno,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) , \quad 0 < x < a \, , \quad 0 < y < b \, , \quad t > 0 \, , \\
&u(0, y, t) = \mu_1(y, t) \, , \quad u(a, y, t) = \mu_2(y, t) \, , \\
&u(x, 0, t) = \nu_1(x, t) \, , \quad u(x, b, t) = \nu_2(x, t) \, , \\
&u(x, y, 0) = \varphi(x) \, .
\end{aligned}
$$

10. Resolva o problema 9 com a condição em $y = 0$ dada por,

$$u_x(x, 0, t) = \nu_1(x, t) \, .$$

11. Resolva o problema 9 com a condição em $y = 0$ dada por,

$$u_x(x, 0, t) = -h_1[u(x, 0, t) - u_0] \, .$$

12. Resolva o problema,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y) \, ,$$

com,

$$
\begin{aligned}
&0 < x < a\,, \quad 0 < y < b\,, \quad t > 0\,, \\
&u(0,y,t) = \mu_1(y,t)\,, \quad u(a,y,t) = \mu_2(y,t)\,, \\
&u(x,0,t) = \nu_1(x,t)\,, \quad u(x,b,t) = \nu_2(x,t)\,, \\
&u(x,y,0) = \varphi(x)\,.
\end{aligned}
$$

13. Resolva o problema 12 com $f = +\alpha^2$.
14. Resolva o problema 12 com $f = -\alpha^2$.
15. Resolva o problema,

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \alpha^2 u + f(x,y)\,,
$$

com α constante e as condições do problema 12.

16. Resolva o problema 15 com $-\alpha^2$ em lugar de $+\alpha^2$.
17. Uma placa infinita no plano xy possui temperatura inicial $f(x,y)$. Calcule $u(x,y,t)$.
18. Uma placa infinita de largura a no plano xy possui dois lados paralelos mantidos a temperatura 0, em $x = 0$, e o lado em $x = a$ a temperatura constante u_1. Calcule $u(x,y,t)$.
19. Considere o problema anterior com a temperatura u_0 em $x = 0$ e u_1 em $x = a$.
20. Considere o problema 18 com a temperaturas $f(y)$ em $x = 0$ e $g(y)$ em $x = a$.
21. Considere o problema 12 com f também dependendo do tempo.
22. Considere o problema 15 com f também dependendo do tempo.

5 Considerando $u(x,y,z,t)$

A equação da condução do calor em duas dimensões, em coordenadas cartesianas, é,

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\,. \tag{34}
$$

Substituímos,

$$
u(x,y,z,t) = T(t)X(x)Y(y)Z(z)\,, \tag{35}
$$

obtendo,

$$\begin{aligned}
&T'XYZ = \kappa(TX''YZ + TXY''Z + TXYZ'')\,,\\
&\frac{T'}{T} = \kappa\frac{X''}{X} + \kappa\frac{Y''}{Y} + \kappa\frac{Z''}{Z} = -\lambda^2\,,
\end{aligned}$$

em que λ é uma constante. A equação para T fica, como antes,

$$T' + \lambda^2 T = 0\,, \tag{36}$$

e a função T é,

$$T(t) = Ce^{-\lambda^2 t}\,. \tag{37}$$

Considerando a função X temos,

$$\begin{aligned}
&\kappa\frac{X''}{X} + \kappa\frac{Y''}{Y} + \kappa\frac{Z''}{Z} = -\lambda^2\,,\\
&\frac{X''}{X} = -\frac{\lambda^2}{\kappa} - \frac{Y''}{Y} - \frac{Z''}{Z} = -\omega^2\,,
\end{aligned}$$

logo,

$$X'' + \omega^2 X = 0\,. \tag{38}$$

A função X é assim,

$$X(x) = A\,\mathrm{sen}\;\omega x + B\cos\omega x\,. \tag{39}$$

Para Y temos a equação,

$$-\frac{\lambda^2}{\kappa} - \frac{Y''}{Y} - \frac{Z''}{Z} = -\omega^2\,, \tag{40}$$

ou,

$$\frac{Y''}{Y} = -\frac{\lambda^2}{\kappa} + \omega^2 - \frac{Z''}{Z} = -\alpha^2\,. \tag{41}$$

Portanto,

$$Y'' + \alpha^2 Y = 0\,. \tag{42}$$

A função Y é então,

$$Y(y) = D\,\mathrm{sen}\;\alpha y + E\cos\alpha y\,. \tag{43}$$

A equação para Z é,

$$-\frac{\lambda^2}{\kappa} + \omega^2 - \frac{Z''}{Z} = -\alpha^2 \,, \tag{44}$$

ou,

$$\frac{Z''}{Z} = \omega^2 + \alpha^2 - \frac{\lambda^2}{\kappa} \,. \tag{45}$$

A função Z é assim,

$$\begin{aligned}
Z(z) &= F\,\text{sen}\;\beta z + G\cos\beta z \,, & (46)\\
&\omega^2 + \alpha^2 - \frac{\lambda^2}{\kappa} = -\beta^2 < 0 \,, \\
Z(z) &= F\,\text{senh}\;\beta z + G\cosh\beta z \,, & (47)\\
&\omega^2 + \alpha^2 - \frac{\lambda^2}{\kappa} = \beta^2 > 0 \,. & (48)
\end{aligned}$$

A solução geral é portanto, usando o princípio de superposição,

$$\begin{aligned}
u(x,y,t) &= \sum_{ijk} e^{-\lambda_i^2 t}(A\,\text{sen}\;\omega_j x + B\cos\omega_j x) \times \\
&\quad \times (D\,\text{sen}\;\alpha_k y + E\cos\alpha_k y) \times \\
&\quad \times (F\,\text{sen}\;\beta_{ijk} z + G\cos\beta_{ijk} z) \,, & (49)\\
&\quad \omega_j^2 + \alpha_k^2 - \frac{\lambda_i^2}{\kappa} = -\beta_{ijk}^2 < 0 \,, \\
u(x,y,t) &= \sum_{ijk} e^{-\lambda_i^2 t}(A\,\text{sen}\;\omega_j x + B\cos\omega_j x) \times \\
&\quad \times (D\,\text{sen}\;\alpha_k y + E\cos\alpha_k y) \times \\
&\quad \times (F\,\text{senh}\;\beta_{ijk} z + G\cosh\beta_{ijk} z) \,, & (50)\\
&\quad \omega_j^2 + \alpha_k^2 - \frac{\lambda_i^2}{\kappa} = \beta_{ijk}^2 > 0 \,. & (51)
\end{aligned}$$

Se escrevemos a equação para Y como,

$$Y'' - \alpha^2 Y = 0 \,, \tag{52}$$

temos,

$$Y(y) = D\,\text{senh}\;\alpha y + E\cosh\alpha y \,. \tag{53}$$

Nesse caso a equação para Z é,

$$-\frac{\lambda^2}{\kappa}+\omega^2-\frac{Z''}{Z}=+\alpha^2\,, \tag{54}$$

ou,

$$\frac{Z''}{Z}=\omega^2-\frac{\lambda^2}{\kappa}-\alpha^2\,. \tag{55}$$

A função Z é então,

$$\begin{aligned}
Z(z) &= F\,\mathrm{sen}\;\beta z+G\cos\beta z\,, && (56)\\
&\quad\;\omega^2-\frac{\lambda^2}{\kappa}-\alpha^2=-\beta^2<0\,, \\
Z(z) &= F\,\mathrm{senh}\;\beta z+G\cosh\beta z\,, && (57)\\
&\quad\;\omega^2-\frac{\lambda^2}{\kappa}-\alpha^2=\beta^2>0\,.
\end{aligned}$$

A solução é portanto,

$$\begin{aligned}
u(x,y,z,t) &= \sum_{ijk} e^{-\lambda_i^2 t}(A\,\mathrm{sen}\;\omega_j x+B\cos\omega_j x)\times \\
&\quad\times(D\,\mathrm{senh}\;\alpha_k y+E\cosh\alpha_k y)\times \\
&\quad\times(F\,\mathrm{sen}\;\beta_{ijk}z+G\cos\beta_{ijk}z)\,, && (58)\\
&\quad\;\omega_j^2-\frac{\lambda_i^2}{\kappa}-\alpha_k^2=-\beta_{ijk}^2<0\,, \\
u(x,y,z,t) &= \sum_{ijk} e^{-\lambda_i^2 t}(A\,\mathrm{sen}\;\omega_j x+B\cos\omega_j x)\times \\
&\quad\times(D\,\mathrm{senh}\;\alpha_k y+E\cosh\alpha_k y)\times \\
&\quad\times(F\,\mathrm{senh}\;\beta_{ijk}z+G\cosh\beta_{ijk}z)\,, && (59)\\
&\quad\;\omega_j^2-\frac{\lambda_i^2}{\kappa}-\alpha^2=\beta_{ijk}^2>0\,.
\end{aligned}$$

Podemos escrever a solução ainda de outra forma. Escrevemos,

$$\frac{X''}{X}=-\frac{\lambda^2}{\kappa}-\frac{Y''}{Y}-\frac{Z''}{Z}=+\omega^2\,, \tag{60}$$

ou,

$$X''-\omega^2X=0\,. \tag{61}$$

A função X é assim,

$$X(x) = A \,\mathrm{senh}\, \omega x + B \cosh \omega x \,. \tag{62}$$

Para Y temos,

$$-\frac{\lambda^2}{\kappa} - \frac{Y''}{Y} - \frac{Z''}{Z} = +\omega^2 \,, \tag{63}$$

ou,

$$\frac{Y''}{Y} = -\omega^2 - \frac{\lambda^2}{\kappa} - \frac{Z''}{Z} = -\alpha^2 \,. \tag{64}$$

A equação para Y é então,

$$Y'' + \alpha^2 Y = 0 \,, \tag{65}$$

com solução,

$$Y(y) = D \,\mathrm{sen}\; \alpha y + E \cos \alpha y \,. \tag{66}$$

Para Z temos,

$$-\omega^2 - \frac{\lambda^2}{\kappa} - \frac{Z''}{Z} = -\alpha^2 \,, \tag{67}$$

ou,

$$\frac{Z''}{Z} = -\frac{\lambda^2}{\kappa} - \omega^2 + \alpha^2 \,. \tag{68}$$

A função Z é assim,

$$
\begin{aligned}
Z(z) &= F \,\mathrm{senh}\; \beta z + G \cosh \beta z \,, && (69)\\
& -\frac{\lambda^2}{\kappa} - \omega^2 + \alpha^2 = +\beta^2 > 0 \,, \\
Z(z) &= F \,\mathrm{sen}\; \beta z + G \cos \beta z \,, && (70)\\
& -\frac{\lambda^2}{\kappa} - \omega^2 + \alpha^2 = -\beta^2 < 0 \,. && (71)
\end{aligned}
$$

A solução é portanto,

$$
\begin{aligned}
u(x,y,z,t) &= \sum_{ijk} e^{-\lambda_i^2 t}(A\,\mathrm{senh}\,\omega_j x + B\cosh\omega_j x)\times \\
&\quad \times(D\,\mathrm{sen}\;\alpha_k y + E\cos\alpha_k y)\times \\
&\quad \times(F\,\mathrm{senh}\;\beta_{ijk} z + G\cosh\beta_{ijk} z)\,, \qquad (72)\\
&\quad -\frac{\lambda_i^2}{\kappa} - \omega_j^2 + \alpha_k^2 = +\beta_{ijk}^2 > 0\,, \\
u(x,y,z,t) &= \sum_{ijk} e^{-\lambda_i^2 t}(A\,\mathrm{senh}\,\omega_j x + B\cosh\omega_j x)\times \\
&\quad \times(D\,\mathrm{sen}\;\alpha_k y + E\cos\alpha_k y)\times \\
&\quad \times(F\,\mathrm{sen}\;\beta_{ijk} z + G\cos\beta_{ijk} z)\,, \qquad (73)\\
&\quad -\frac{\lambda_i^2}{\kappa} - \omega_j^2 + \alpha_k^2 = -\beta_{ijk}^2 < 0\,.
\end{aligned}
$$

Se a equação para Y é,

$$
Y'' - \alpha^2 Y = 0\,, \tag{74}
$$

a solução Y fica,

$$
Y(y) = D\,\mathrm{senh}\;\alpha y + E\cosh\alpha y\,. \tag{75}
$$

Nesse caso a equação para Z é,

$$
-\omega^2 - \frac{\lambda^2}{\kappa} - \frac{Z''}{Z} = +\alpha^2\,, \tag{76}
$$

ou,

$$
\frac{Z''}{Z} = -\alpha^2 - \omega^2 - \frac{\lambda^2}{\kappa}\,. \tag{77}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
Z(z) &= F\,\mathrm{sen}\;\beta z + G\cos\beta z\,, \qquad (78)\\
&\quad \alpha^2 + \omega^2 + \frac{\lambda^2}{\kappa} = \beta^2 > 0\,.
\end{aligned}
$$

A solução é então,

$$
\begin{aligned}
u(x,y,z,t) &= \sum_{ijk} e^{-\lambda_i^2 t}(A \,\mathrm{senh}\, \omega_j x + B \cosh \omega_j x) \times \\
&\quad \times (D \,\mathrm{senh}\; \alpha_k y + E \cosh \alpha_k y) \times \\
&\quad \times (F \,\mathrm{sen}\; \beta_{ijk} z + G \cos \beta_{ijk} z)\,, \\
&\quad \alpha_k^2 + \omega_j^2 + \frac{\lambda_i^2}{\kappa} = \beta_{ijk}^2 > 0\,.
\end{aligned}
\tag{79}
$$

6 Problemas

1. Considere um paralelepípedo retangular de arestas a, b, c com arestas sobre os eixos coordenados e um dos vértices na origem. A face em $z = 0$ está na temperatura $f(x, y)$. Calcule $u(x, y, z, t)$. A temperatura inicial é $h(x, y, z)$ (Spiegel [7], 2.74 com $a = b = c = 1$; probl. 2.75 para o caso estacionário; 2.72 com $a = b = c = 1$, para o caso estacionário). Considere o caso particular com f e h constantes.

2. Considere o problema anterior com temperaturas especificadas nas outras faces também (Spiegel [7], probl. 2.73, com $a = b = c = 1$, para o caso estacionário). Considere o caso particular com temperaturas constantes nas faces.

3. Resolva o problema,

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),
$$

com,

$$
\begin{aligned}
&0 < x < a\,,\;\; 0 < y < b\,,\;\; 0 < z < c\,,\;\; t > 0\,, \\
&u(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z)\,, \\
&u(0,y,z,t) = \mu_1(y,z,t)\,,\;\; u(a,y,z,t) = \mu_2(y,z,t)\,, \\
&u(x,0,z,t) = \nu_1(x,z,t)\,,\;\; u(x,b,z,t) = \nu_2(x,z,t)\,, \\
&u(x,y,0,t) = \eta_1(x,y,t)\,,\;\; u(x,y,c,t) = \eta_2(x,y,t)\,.
\end{aligned}
$$

4. Resolva o problema 3 com a condição em $x = 0$ dada por,

$$
u_x(0,y,z,t) = \mu_1(y,z,t)
$$

5. Resolva o problema 3 com a condição em $x = 0$ dada por,

$$
u_x(0,y,z,t) = -h_1[u(0,y,z,t) - u_0]\,.
$$

6. Resolva o problema,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z) \,,$$

com as condições do problema 3.

7. Considere o problema 6 com $f = +\alpha^2$ constante.

8. Considere o problema 6 com $f = -\alpha^2$ constante.

9. Resolva o problema,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \alpha^2 u \,,$$

com α constante e as condições do problema 3.

10. Resolva o problema 9 com $-\alpha^2$ em lugar de $+\alpha^2$.

11. Resolva o problema,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \alpha^2 u + f(x, y, z) \,,$$

com as condições do problema 3 e α constante.

12. Considere o problema anterior com $-\alpha^2$ em lugar de $+\alpha^2$.

13. Considere o problema 6 com f dependendo do tempo.

14. Considere o problema 11 com f dependendo do tempo.

15. Resolva o problema (Tijonov [12], p. 513),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \,,$$

com,

$$\begin{aligned} & -\infty < x, y, z < +\infty \,, \quad t > 0 \,, \\ & u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z) \,. \end{aligned}$$

7 Apêndice

1. Série de Fourier

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}[a_m \cos(m\pi x/L) + b_m \,\text{sen}\,(m\pi x/L)]\,, \\
\frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx\,, \\
a_m &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(m\pi x/L)\,dx\,, \\
b_m &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\text{sen}\,(m\pi x/L)\,dx\,, \quad m = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

2. Série de Fourier de senos

$$
f(z) = \sum_{j=1} b_j \,\text{sen}\,(j\pi z/L)\,,
$$

$$
b_j = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\text{sen}\,(j\pi x/L)\,dx\,.
$$

3. Série de Fourier de cosenos

$$
f(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1} a_j \cos(j\pi z/L)\,,
$$

$$
a_j = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(j\pi x/L)\,dx\,.
$$

4. Série de Fourier dupla

$$
f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}\,\text{sen}\,\frac{m\pi x}{L_1}\,\text{sen}\,\frac{n\pi y}{L_2}\,,
$$

$$
B_{mn} = \frac{4}{L_1 L_2}\int_0^{L_1}\int_0^{L_2} f(x,y)\,\text{sen}\,\frac{m\pi x}{L_1}\,\text{sen}\,\frac{n\pi y}{L_2}dxdy\,.
$$

5. Série de Fourier tripla

$$
f(x,y,z) = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{lmn}\,\text{sen}\,\frac{l\pi x}{L_1}\,\text{sen}\,\frac{m\pi y}{L_2}\,\text{sen}\,\frac{n\pi z}{L_3}\,,
$$

$$
B_{lmn} = \frac{8}{L_1 L_2 L_3}\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}\int_0^{L_3} f(x,y,z)\,\text{sen}\,\frac{l\pi x}{L_1}\,\text{sen}\,\frac{m\pi y}{L_2}\,\text{sen}\,\frac{n\pi z}{L_3}dxdydz\,.
$$

6.

$$\int_0^a \text{sen}\,(i\pi\xi/a)d\xi = \begin{cases} \dfrac{2a}{i\pi}\,, & i\,\text{ímpar}\,, \\ 0\,, & i\,\text{par}\,. \end{cases}$$

7.

$$\int \cos ax\, \cos bx\, dx = \frac{1}{2}\frac{sen\,(a+b)x}{a+b} + \frac{1}{2}\frac{sen\,(a-b)x}{a-b}\,,$$

$$\begin{aligned} \int_{-L}^{L} \cos(i\pi x/L)\, \cos(j\pi x/L)\, dx &= \frac{1}{2}\frac{sen\,[(i+j)\pi x/L]}{(i+j)\pi/L} + \frac{1}{2}\frac{sen\,[(i-j)\pi x/L]}{(i-j)\pi/L}\Bigg|_{-L}^{L}\,, \\ &= \begin{cases} 0\,, & i \neq j\,, \\ L\,, & i = j\,, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{0}^{L} \cos(i\pi x/L)\, \cos(j\pi x/L)\, dx &= \frac{1}{2}\frac{sen\,[(i+j)\pi x/L]}{(i+j)\pi/L} + \frac{1}{2}\frac{sen\,[(i-j)\pi x/L]}{(i-j)\pi/L}\Bigg|_{0}^{L}\,, \\ &= \begin{cases} 0\,, & i \neq j\,, \\ L/2\,, & i = j\,. \end{cases} \end{aligned}$$

8.

$$\int \text{sen}\ ax\ \text{sen}\ bx\, dx = \frac{1}{2}\frac{sen\,(a-b)x}{a-b} - \frac{1}{2}\frac{sen\,(a+b)x}{a+b}\,,$$

$$\begin{aligned} \int_{-L}^{L} \text{sen}\ (i\pi x/L)\ \text{sen}\ (j\pi x/L)\, dx &= \frac{1}{2}\frac{sen\,[(i-j)\pi x/L]}{(i-j)\pi/L} - \frac{1}{2}\frac{sen\,[(i+j)\pi x/L]}{(i+j)\pi/L}\Bigg|_{-L}^{L}\,, \\ &= \begin{cases} 0\,, & i \neq j\,, \\ L\,, & i = j\,, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{0}^{L} \text{sen}\ (i\pi x/L)\ \text{sen}\ (j\pi x/L)\, dx &= \frac{1}{2}\frac{sen\,[(i-j)\pi x/L]}{(i-j)\pi/L} - \frac{1}{2}\frac{sen\,[(i+j)\pi x/L]}{(i+j)\pi/L}\Bigg|_{0}^{L}\,, \\ &= \begin{cases} 0\,, & i \neq j\,, \\ L/2\,, & i = j\,. \end{cases} \end{aligned}$$

9.

$$\int \text{sen } ax \cos bx \, dx = -\frac{1}{2}\frac{\cos(a+b)x}{a+b} - \frac{1}{2}\frac{\cos(a-b)x}{a-b} \,.$$

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^{L} \text{sen } (i\pi x/L) \cos(j\pi x/L) \, dx &= -\frac{1}{2}\frac{\cos[(i+j)\pi x/L]}{(i+j)\pi/L} - \frac{1}{2}\frac{\cos[(i-j)\pi x/L]}{(i-j)\pi/L}\bigg|_{-L}^{L} \,, \\
&= 0 \,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{L} \text{sen } (i\pi x/L) \cos(j\pi x/L) \, dx &= -\frac{1}{2}\frac{\cos[(i+j)\pi x/L]}{(i+j)\pi/L} - \frac{1}{2}\frac{\cos[(i-j)\pi x/L]}{(i-j)\pi/L}\bigg|_{0}^{L} \,, \\
&= \begin{cases} \dfrac{1-(-1)^{i+j}}{2(i+j)\pi/L} + \dfrac{1-(-1)^{i+j}}{2(i-j)\pi/L} \,, & i \neq j \,, \\ 0 \,, \quad i = j \,. \end{cases}
\end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{L} x \, \text{sen } (i\pi x/L) \, dx &= \begin{cases} +\dfrac{L^2}{i\pi} \,, & i \text{ ímpar} \,, \\ -\dfrac{L^2}{i\pi} \,, & i \text{ par} \,, \end{cases} \\
&= \frac{L^2}{i\pi}(-1)^{i+1} \,,
\end{aligned}$$

$$\int x \, \text{sen } ax \, dx = \frac{\text{sen } ax}{a^2} - \frac{x \cos ax}{a} \,.$$

11.

$$x = \frac{2L}{\pi} \sum_{i=1} \frac{\text{sen } (i\pi x/L)}{i} (-1)^{i+1} \,, \quad 0 < x < L \,.$$

12.

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{i=1} \frac{\text{sen } [(2i-1)\pi x/L]}{2i-1} \,, \quad 0 < x < L \,.$$

8 Bibliografia

[1] A. Sommerfeld, *Partial Differential Equations in Physics*, Academic Press, New York and London (1964s).

[2] R. K. Wangsness, *Electromagnetic Fields*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York (1986).

[3] Jackson, J.D., *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, New York (1962).

[4] Stratton, J. A., *Electromagnetic Theory*, 1st ed., McGraw-Hill, New York (1941).

[5] I. S. Gradshteyn, I. M. Rytzhik, *Table of Integral, Series, and Products*, 5th ed., Academic Press, San Diego (1994).

[6] M. R. Spiegel, S. Lipschutz, J. Liu, *Schaum's Outline of Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York (2009).

[7] M. R. Spiegel, *Schaum's Outline of Fourier Analysis with Applications to Boundary Value Problems*, McGraw-Hill, New York (1974).

[8] M. R. Spiegel, *Schaum's Outline of Advanced Mathematics for Engineers and Scientists*, McGraw-Hill, New York (1971).

[9] Arfken, G. B., Weber, H. J., *Mathematical Methods for Physicists*, 6th. ed., Elsevier Academic Press, Amsterdam (2005).

[10] Morse, P. M., Feshbach, H., *Methods of Theoretical Physics*, vols. I e II, McGraw-Hill, New York (1953).

[11] Mathews, J., Walker, R. L., *Mathematical Methods of Physics*, 2nd. ed., Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Redwood City (1969).

[12] Tijonov, A. N., Samarsky, A. A., *Ecuaciones de la Fisica Matematica*, Mir, Moscou (1972).

[13] Churchill, R. V., *Fourier Series and Boundary Values*, McGraw-Hill, New York and London (1941).