5 - A equação de Laplace em coordenadas esféricas

A equação de Laplace, $\nabla^2 u = 0$, em coordenadas esféricas, é,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\text{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0\,, \tag{1}$$

com $u = u(r, \theta, \varphi)$.

1 Considerando $u = u(r)$

Nesse caso temos,

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right)=0\,, \tag{2}$$

ou,

$$r^2 u' = A\,, \tag{3}$$

em que A é uma constante. Integrando mais uma vez,

$$u(r) = -\frac{A}{r} + B\,. \tag{4}$$

Se queremos uma solução finita em $r = 0$, então $A = 0$. Se a solução é finita também em $r \to \infty$, temos $B = 0$, e a solução é identicamente nula.

Se podemos incluir a divergência em $r = 0$, como no caso de cargas puntiformes em eletrostática, temos $A \neq 0$.

2 Problemas

1-Consideremos uma esfera de raio a. Calcule o potencial interior e exterior se $u(a) = v_0$ (Churchill [12], probl. 9.1).

Temos no interior $A = 0$, para não termos a divergência em $r = 0$, e no exterior $B = 0$ para termos uma solução finita, assim,

$$u(r) = \begin{cases} B\,, & r < a\,, \\ -\dfrac{A}{r}\,, & r > a\,. \end{cases}$$

Em $r = a$,

$$u(a) = v_0 = B = -\frac{A}{a}\,,$$

portanto a solução é,

$$u(r) = \begin{cases} v_0\,, & r < a\,, \\ v_0 \dfrac{a}{r}\,, & r > a\,. \end{cases}$$

Se $v_0 = 0$ a solução é identicamente nula.

2-Considere o intervalo $a \leq r \leq b$ com as condições de contorno (Spiegel [7], probl. 7.71),

$$u(a) = u_a\,, \quad u(b) = u_b\,.$$

Temos,

$$-\frac{A}{a} + B = u_a\,, \quad -\frac{A}{b} + B = u_b\,.$$

Das equações acima obtemos,

$$A = \frac{(u_b - u_a)ab}{b-a}\,,$$
$$B = \frac{bu_b - au_a}{b-a}\,,$$

e a solução fica,

$$u(r) = -\frac{(u_b - u_a)ab}{b-a}\frac{1}{r} + \frac{bu_b - au_a}{b-a}\,.$$

Se u_a e u_b são nulos, a solução é identicamente nula, e se $u_a = u_b$ a solução é constante.

3-Considere uma casca esférica com raios a e $2a$, com temperaturas 0 e u_0 respectivamente (Spiegel [7], probl. 7.50).

Temos agora,

$$A = 2au_0\,,$$
$$B = 2u_0\,,$$

logo a solução fica,

$$u(r) = 2u_0 \left(1 - \frac{a}{r}\right) . \tag{5}$$

4. Encontre a solução $u(r)$ para as equações:
(a)
$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{du}{dr}\right) = -f(r) \, ;$$
(b)
$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{du}{dr}\right) = +\alpha^2 \, ;$$
com α constante,
(c)
$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{du}{dr}\right) = -\alpha^2 \, ;$$
com α constante,
(d)
$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{du}{dr}\right) = +\alpha^2 u \, ;$$
com α constante,
(e)
$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{du}{dr}\right) = -\alpha^2 u \, ;$$
com α constante e,

$$0 \le r \le a \, ,$$
$$u(a) = u_a \, .$$

(a) Escrevemos a solução da forma usual como,

$$u(r) = u_h(r) + u_p(r) \, ,$$

com u_h satisfazendo a equação homogênea com condições de contorno não-homogêneas (problema 1 em $r \le a$), e u_p satisfazendo a equação não-homogênea com condições de contorno homogêneas. Reescrevemos a equação diferencial,

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{du_p}{dr}\right) = -f(r) \, ,$$
$$\frac{1}{r^2}\left(2ru_p' + r^2 u_p''\right) = -f(r) \, ,$$
$$r^2 u_p'' + 2ru_p' = -r^2 f(r) \, .$$

Obtemos assim uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, não-homogênea, na forma,

$$x^2y''(x) + 2xy'(x) - y(x)k(k+1) = -x^2g(x)\,.$$

A solução da equação acima pode ser escrita, como vimos, como a soma da solução da equação homogênea e uma solução particular da equação não-homogênea,

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)\,.$$

Vimos que a equação,

$$x^2y'' + (2l+1)xy' + (\alpha^2x^{2r} + \beta^2)y = 0\,,$$

em que l, α, r, β são constantes, possui solução,

$$y = x^{-l}[c_1J_{\kappa/r}(\alpha x^r/r) + c_2Y_{\kappa/r}(\alpha x^r/r)]\,,$$

e $\kappa = \sqrt{l^2 - \beta^2}$. Se $\alpha = 0$ temos a equação de Euler ou equação de Cauchy, com solução,

$$y = x^{-l}(c_3x^{\kappa} + c_4x^{-\kappa})\,.$$

Em particular, se $\alpha = 0$ e $l = 1/2$ a equação fica,

$$x^2y'' + 2xy' + \beta^2y = 0\,,$$

que é a nossa equação homogênea com $\beta^2 = -k(k+1) = 0$, logo $k = 0$. A solução da equação acima é assim,

$$y = x^{-1/2}(c_3x^{\kappa} + c_4x^{-\kappa})\,,$$

com $\kappa = \sqrt{(1/4)} = 1/2$. Logo, renomeando as constantes,

$$y_h(x) = c_1 + c_2x^{-1}\,.$$

A solução particular é (capítulo 22),

$$y_p(x) = y_1(x)\int_{x_0}^{x}\frac{y_2(x')g(x')}{\Delta(x')}dx' - y_2(x)\int_{x_0}^{x}\frac{y_1(x')g(x')}{\Delta(x')}dx'\,,$$

com $\Delta = y_1y_2' - y_1'y_2$ e $y_1 = 1$, $y_2 = x^{-1}$. Calculando Δ explicitamente,

$$\Delta = y_1y_2' - y_1'y_2 = -x^{-2}\,,$$

logo,

$$y_p(x) \;=\; -\int_{x_0}^{x} x' g(x') dx' + x^{-1} \int_{x_0}^{x} x'^2 g(x') dx' \,.$$

A solução u_p *é então,*

$$u_p(r) = -\int_{r_0}^{r} r' f(r') dr' + r^{-1} \int_{r_0}^{r} r'^2 f(r') dr' \,.$$

Consideremos o caso particular em que $f = f_0$ *constante. Temos,*

$$\begin{aligned} u_p(r) &= -\int_{r_0}^{r} r' f(r') dr' + r^{-1} \int_{r_0}^{r} r'^2 f(r') dr' \,, \\ &= -f_0 \int_{r_0}^{r} r' dr' + r^{-1} f_0 \int_{r_0}^{r} r'^2 dr' \,, \\ &= -f_0 \left[\frac{r'^2}{2} \right]_{r_0}^{r} + r^{-1} f_0 \left[\frac{r'^3}{3} \right]_{r_0}^{r} \,, \\ &= -\frac{f_0}{2}(r^2 - r_0^2) + \frac{f_0}{3r}(r^3 - r_0^2) \,. \end{aligned}$$

Vamos verificar que u_p *satisfaz a equação diferencial. Calculando as derivadas de* u_p*,*

$$\begin{aligned} &u_p'(r) = -f_0 r - \frac{f_0}{3r^2}(r^3 - r_0^2) + f_0 r = -\frac{f_0}{3r^2}(r^3 - r_0^2) \,, \\ &u_p''(r) = \frac{2f_0}{3r^3}(r^3 - r_0^2) - f_0 \,. \end{aligned}$$

Substituindo na equação diferencial,

$$\begin{aligned} &r^2 u_p'' + 2r u_p' = -r^2 f(r) \,, \\ &r^2 \left[\frac{2f_0}{3r^3}(r^3 - r_0^2) - f_0 \right] + 2r \left[-\frac{f_0}{3r^2}(r^3 - r_0^2) \right] = -r^2 f_0 \,, \\ &\frac{2f_0}{3r}(r^3 - r_0^2) - r^2 f_0 - \frac{2f_0}{3r}(r^3 - r_0^2) = -r^2 f_0 \,, \\ &-r^2 f_0 = -r^2 f_0 \,, \end{aligned}$$

como deve ser.

5. Encontre a solução $u(r)$ para as equações:

(a)

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = -f(r)\,;$$

(b)

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = +\alpha^2\,;$$

com α constante,

(c)

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = -\alpha^2\,;$$

com α constante,

(d)

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = +\alpha^2 u\,;$$

com α constante,

(e)

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = -\alpha^2 u\,;$$

com α constante e,

$$\begin{aligned} & a \leq r \leq b\,, \\ & u(a) = u_a\,, \quad u(b) = u_b\,. \end{aligned}$$

6. Considere a equação,

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = -f(r)\,.$$

Calcule $f(r)$ para as soluções abaixo:

(a)

$$u(r) = \frac{Ae^{-\kappa r}}{r}\,;$$

(b)

$$u(r) = \frac{e^{-\kappa r}}{r}(a + br)\,;$$

(c)

$$u(r) = \frac{e^{-\kappa r}}{r}(a + br + cr^2)\,;$$

(d)

$$u(r) = e^{-\kappa r}(a + br + cr^2)\,.$$

7. Usando o resultado do problema 3(a), encontre a solução particular $u_p(r)$ para a equação,

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = -f(r)\,,$$

com condições de contorno homogêneas em $0 \le r \le a$, nos seguintes casos:

(a)

$$f(r) = \frac{Ae^{-\kappa r}}{r}\,;$$

(b)

$$f(r) = \frac{e^{-\kappa r}}{r}(a + br)\,;$$

(c)

$$f(r) = \frac{e^{-\kappa r}}{r}(a + br + cr^2)\,;$$

(d)

$$f(r) = e^{-\kappa r}(a + br + cr^2)\,.$$

3 Considerando $u = u(r, \theta)$

Substituindo,

$$u = R(r)\Theta(\theta)\,, \tag{6}$$

em (1), obtemos,

$$r^2\frac{R''}{R} + 2r\frac{R'}{R} + \frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\theta}\frac{\Theta'}{\Theta} + \frac{\Theta''}{\Theta} = 0\,,$$

ou,

$$r^2\frac{R''}{R} + 2r\frac{R'}{R} = -\frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\theta}\frac{\Theta'}{\Theta} - \frac{\Theta''}{\Theta} = -\lambda^2\,.$$

A equação para R é, assim,

$$r^2R'' + 2rR' + \lambda^2R = 0\,, \tag{7}$$

e para Θ,

$$\mathrm{sen}\theta\Theta'' + \cos\theta\Theta' - \lambda^2\mathrm{sen}\theta\Theta = 0\,. \tag{8}$$

A equação para R, (7), é a equação de Euler ou Cauchy. Fazendo $R = r^p$, obtemos,

$$p^2 + p + \lambda^2 = 0\,. \tag{9}$$

A solução da equação acima é,

$$p = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\lambda^2}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda^2}\,. \tag{10}$$

Assim, a solução de (7) é,

$$R(r) = Ar^{p_1} + Br^{p_2}\,,$$

com

$$p_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda^2}\,,$$
$$p_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda^2}\,.$$

Podemos escrever a solução acima de forma mais simples, notando que,

$$p_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda^2} = -\frac{1}{2} - \left(p_1 + \frac{1}{2}\right) = -1 - p_1\,.$$

Assim, fazendo $p_1 = n$, temos $p_2 = -n - 1$, a solução de (7) é,

$$R(r) = Ar^n + \frac{B}{r^{n+1}}\,. \tag{11}$$

A constante λ^2 em termos de n é,

$$p_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda^2} = n\,,$$

ou,

$$\frac{1}{4} - \lambda^2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 = n^2 + n + \frac{1}{4}\,.$$

Temos portanto,

$$\lambda^2 = -n(n+1)\,. \tag{12}$$

Consideremos agora a equação para $\Theta(\theta)$, eq.(8). Usando a relação acima essa equação fica,

$$\text{sen}\theta\Theta'' + \cos\theta\Theta' + n(n+1)\text{sen}\theta\Theta = 0\,. \tag{13}$$

Fazendo $\xi = \cos\theta$ temos,

$$\begin{aligned}
\frac{d\Theta}{d\theta} &= \frac{d\xi}{d\theta}\frac{d\Theta}{d\xi} = -\text{sen}\theta\frac{d\Theta}{d\xi} = -\sqrt{1-\cos^2\theta}\frac{d\Theta}{d\xi} = -\sqrt{1-\xi^2}\frac{d\Theta}{d\xi}\,, \\
\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} &= \frac{d\xi}{d\theta}\frac{d}{d\xi}\left(-\sqrt{1-\xi^2}\frac{d\Theta}{d\xi}\right) = -\text{sen}\theta\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{d\Theta}{d\xi} - \sqrt{1-\xi^2}\frac{d^2\Theta}{d\xi^2}\right)\,, \\
\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} &= -\xi\frac{d\Theta}{d\xi} + (1-\xi^2)\frac{d^2\Theta}{d\xi^2}\,.
\end{aligned}$$

A equação para Θ fica então,

$$(1-\xi^2)\frac{d^2\Theta}{d\xi^2} - 2\xi\frac{d\Theta}{d\xi} + n(n+1)\Theta = 0\,. \tag{14}$$

A equação acima é a *equação diferencial de Legendre* para $\Theta(\theta)$, ou, em termos de $y(x)$,

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0\,, \tag{15}$$

com $-1 \leq x \leq +1$. A solução são os *polinômios de Legendre* $P_n(x)$, e as *funções de Legendre do segundo tipo* $Q_n(x)$.

A solução geral de $\nabla^2 u = 0$, considerando $u = u(r,\theta)$, é então,

$$u = \left(A_1 r^n + \frac{B_1}{r^{n+1}}\right)\left[A_2 P_n(\xi) + B_2 Q_n(\xi)\right]\,, \tag{16}$$

com $\xi = \cos\theta$. Consideramos n inteiro não negativo, que nos dará os principais casos para alguns sistemas físicos mais comuns. Como a equação de Laplace é linear e homogênea, o princípio da superposição é obedecido, e podemos escrever a solução mais geral como uma soma de termos como em (16),

$$u = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_{1n} r^n + \frac{B_{1n}}{r^{n+1}}\right)\left[A_{2n} P_n(\xi) + B_{2n} Q_n(\xi)\right]\,. \tag{17}$$

As constantes são determinadas pelas condições de contorno. Como a aplicação mais comum que encontraremos é em situações físicas, em geral teremos a condição de continuidade de u, que representará na maioria dos casos um potencial ou outra função contínua. Também continuamos tendo u finita em $r = 0$ e $u \to 0$ em $r \to \infty$.

4 Problemas

1-Considerando o intervalo $0 \le r \le \infty$, encontre a solução $u(r,\theta)$ com a condição de contorno,

$$u(a,\theta) = f(\theta)\,.$$

(a) Escrevendo a solução finita temos,

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta)\,, \quad r < a\,, \\ u(r,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta)\,, \quad r > a\,. \end{aligned}$$

A condição de contorno nos dá,

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{a^{n+1}} P_n(\cos\theta)\,,$$

portanto,

$$A_n a^n = \frac{B_n}{a^{n+1}}\,.$$

A equação para $f(\theta)$ é uma série de polinômios de Legendre, logo,

$$A_n = \frac{2n+1}{2a^n} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta\,.$$

Portanto a solução é,

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta) \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta\,, \quad r < a\,, \\ u(r,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta) \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta\,, \quad r > a\,. \end{aligned}$$

Se $f = 0$ a solução é identicamente nula.

(b) Consideremos o caso particular $f(\theta) = v_0(1 + 3\cos\theta)$ (Spiegel [7], probl. 7.48). Temos,

$$f(\theta) = \sum_k C_k P_k(\cos\theta) = v_0(1 + 3\cos\theta) = C_0 + C_1 \cos\theta\,,$$

com os outros coeficientes C_k nulos. Logo, $C_k = A_k a^k$ e temos,

$$A_0 = C_0 = v_0\,, \;\; A_1 = \frac{C_1}{a} = \frac{3v_0}{a}\,.$$

A solução é então,

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= v_0 + 3v_0\frac{r}{a}\cos\theta\,, \;\; r < a\,, \\ u(r,\theta) &= v_0\frac{a}{r} + 3v_0\frac{a^2}{r^2}\cos\theta\,, \;\; r > a\,. \end{aligned}$$

Se $v_0 = 0$ a solução é identicamente nula.

(c) Consideremos agora o caso $f(\theta) = v_0 sen^2\theta$ (Spiegel [7], probl. 7.49). Temos,

$$f(\theta) = v_0 sen^2\theta = C_0 + \frac{C_2}{2}(3\cos^2\theta - 1) = C_0 + C_2 - \frac{3}{2}C_2 sen^2\theta\,,$$

logo,

$$C_0 = -C_2 = \frac{2}{3}v_0\,, \;\; C_2 = -\frac{2}{3}v_0\,.$$

A solução é portanto,

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \frac{2}{3}v_0\left(1 - \frac{r^2}{a^2}P_2(\cos\theta)\right)\,, \;\; r < a\,, \\ u(r,\theta) &= \frac{2}{3}v_0\frac{a}{r}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}P_2(\cos\theta)\right)\,, \;\; r > a\,. \end{aligned}$$

Se $v_0 = 0$ a solução é identicamente nula.

(d) Consideremos agora o caso em que $f(\theta) = c\cos\theta$ (Churchill [12], probl. 9.3). Temos $A_1 = c/a$, $B_1 = ca^2$, e temos,

$$u(r,\theta) = \begin{cases} c\dfrac{r}{a}\cos\theta\,, \;\; r < a\,, \\ c\dfrac{a^2}{r^2}\cos\theta\,, \;\; r > a\,. \end{cases}$$

Se $c = 0$ a solução é identicamente nula.

(e) Se $f = f_0$ constante temos,

$$
\begin{aligned}
u(r,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{a^n} P_n(\cos\theta) \frac{2n+1}{2} f_0 \int_0^{\pi} P_n(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta\,, \quad r < a\,, \\
u(r,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta) \frac{2n+1}{2} f_0 \int_0^{\pi} P_n(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta\,, \quad r > a\,.
\end{aligned}
$$

As integrais acima se anulam para $n \neq 0$, e se $n = 0$ temos,

$$
\int_0^{\pi} P_0(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta = 2\,,
$$

logo,

$$
u(r,\theta) = u(r) = \begin{cases} f_0\,, & r < a\,, \\ f_0 \dfrac{a}{r}\,, & r > a\,, \end{cases}
$$

que é a solução esfericamente simétrica, dependente apenas de r. Se $f_0 = 0$ a solução é identicamente nula.

2-Considerando o intervalo $a \leq r \leq b$, encontre a solução $u(r,\theta)$ com as condições de contorno,

$$
\begin{aligned}
u(a,\theta) &= f(\theta)\,, \\
u(b,\theta) &= g(\theta)\,.
\end{aligned}
$$

(a) Escrevemos a solução como, em $a \leq r \leq b$, como,

$$
u = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta)\,,
$$

e as condições de contorno,

$$
\begin{aligned}
u(a,\theta) = f(\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n a^n + \frac{B_n}{a^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta)\,, \\
u(b,\theta) = g(\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n b^n + \frac{B_n}{b^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta)\,.
\end{aligned}
$$

Os coeficientes das expansões de f e g em polinômios de Legendre são então,

$$A_n a^n + \frac{B_n}{a^{n+1}} = \frac{2n+1}{2}\int_0^\pi f(\theta)P_n(\cos\theta)sen\,\theta\,d\theta \equiv \alpha_n\,,$$
$$A_n b^n + \frac{B_n}{b^{n+1}} = \frac{2n+1}{2}\int_0^\pi g(\theta)P_n(\cos\theta)sen\,\theta\,d\theta \equiv \beta_n\,.$$

Resolvendo o sistema acima para A_n, B_n obtemos,

$$A_n = \frac{\alpha_n a^{n+1} - \beta_n b^{n+1}}{a^{2n+1} - b^{2n+1}}\,,$$
$$B_n = \frac{(\beta_n a^n - \alpha_n b^n)a^{n+1}b^{n+1}}{a^{2n+1} - b^{2n+1}}\,.$$

A solução é assim,

$$\begin{aligned} u(r,\theta) \;&=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n a^{n+1} - \beta_n b^{n+1}}{a^{2n+1} - b^{2n+1}} r^n P_n(\cos\theta) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\beta_n a^n - \alpha_n b^n)a^{n+1}b^{n+1}}{a^{2n+1} - b^{2n+1}}\frac{1}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta)\,. \end{aligned}$$

Se $f = g = 0$ a solução é identicamente nula.

(b) Se $f = 0$ temos $\alpha_n = 0$ e,

$$u(r,\theta) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\frac{r^{2n+1} - a^{2n+1}}{b^{2n+1} - a^{2n+1}}\left(\frac{b}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta)\,.$$

(c) Consideremos agora o caso particular $g = 0$ (Churchill [12], probl. 9.7). Temos $\beta_n = 0$ e a solução fica, após rearranjarmos,

$$u(r,\theta) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\frac{b^{2n+1} - r^{2n+1}}{b^{2n+1} - a^{2n+1}}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta)\,.$$

(d) Se f e g são constantes, iguais a f_0, g_0, por exemplo,

$$\alpha_n = \frac{2n+1}{2}f_0\int_0^\pi P_n(\cos\theta)sen\,\theta\,d\theta\,,$$
$$\beta_n = \frac{2n+1}{2}g_0\int_0^\pi P_n(\cos\theta)sen\,\theta\,d\theta\,.$$

As integrais acima são não nulas apenas $n = 0$, sendo iguais a 2, logo,

$$\alpha_0 = f_0\,,$$
$$\beta_0 = g_0\,,$$

e temos,

$$u(r,\theta) \;\; = \;\; u(r) = \frac{\alpha_0 a - \beta_0 b}{a-b} + \frac{(\beta_0-\alpha_0)ab}{a-b}\frac{1}{r}\,,$$

que é a solução esfericamente simétrica.

3. Encontre a solução $u(r,\theta)$ para as equações:

(a)
$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) = -f(r,\theta)\,;$$

(b)
$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) = +\alpha^2\,;$$

com α constante,

(c)
$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) = -\alpha^2\,;$$

com α constante,

(d)
$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) = +\alpha^2 u\,;$$

com α constante,

(e)
$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) = -\alpha^2 u\,;$$

com α constante e,

$$0 \leq r \leq a\,,$$
$$u(a,\theta) = \mu(\theta)\,.$$

(a) Escrevemos a solução da forma usual como,

$$u(r,\theta) = u_h(r,\theta) + u_p(r,\theta)\,,$$

com u_h satisfazendo a equação homogênea com condições de contorno não-homogêneas (problema 1 em $r \leq a$), e u_p satisfazendo a equação não-homogênea com condições de contorno homogêneas. Expandimos u_p e f em séries de funções associadas de Legendre do primeiro tipo,

$$
\begin{aligned}
u_p(r,\theta) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k(r) P_k^m(\cos\theta)\,, \\
A_k(r) &= \frac{(2k+1)(k-m)!}{2(k+m)!} \int_0^{\pi} u_p(r,\theta') P_k^m(\cos\theta') sen\,\theta'\, d\theta'\,, \\
f(r,\theta) &= \sum_{k=1}^{\infty} B_k(r) P_k^m(\cos\theta)\,, \\
B_k(r) &= \frac{(2k+1)(k-m)!}{2(k+m)!} \int_0^{\pi} f(r,\theta') P_k^m(\cos\theta') sen\,\theta'\, d\theta'\,.
\end{aligned}
$$

Os coeficientes $B's$ são determinados por f. Os coeficientes $A's$ que definem a solução u_p ainda precisam ser determinados. Substituímos agora u_p e f na equação diferencial,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) = -f(r,\theta)\,.$$

Calculando as derivadas de u_p,

$$\frac{\partial u_p}{\partial r} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k'(r) P_k^m(\cos\theta)\,,$$

em que a linha denota derivada em relação a r;

$$r^2\frac{\partial u_p}{\partial r} = \sum_{k=1}^{\infty} r^2 A_k'(r) P_k^m(\cos\theta)\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u_p}{\partial r}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} [2rA_k'(r) + r^2 A_k''(r)] P_k^m(\cos\theta)\,,$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u_p}{\partial r}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{r}A_k'(r) + A_k''(r)\right] P_k^m(\cos\theta)\,,$$

$$\frac{\partial u_p}{\partial \theta} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(r) \frac{d}{d\theta} P_k^m(\cos\theta)\,,$$

$$sen\,\theta \frac{\partial u_p}{\partial \theta} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(r) sen\,\theta \frac{d}{d\theta} P_k^m(\cos\theta)\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen\,\theta \frac{\partial u_p}{\partial \theta}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(r) \frac{d}{d\theta}\left[sen\,\theta \frac{d}{d\theta} P_k^m(\cos\theta)\right].$$

Usando agora,

$$\frac{d}{d\theta}\left[sen\,\theta \frac{d}{d\theta} P_k^m(\cos\theta)\right] = -\left[k(k+1) sen\,\theta - \frac{m^2}{sen\,\theta}\right] P_k^m(\cos\theta)\,,$$

temos,

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen\,\theta \frac{\partial u_p}{\partial \theta}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} A_k(r)\left[k(k+1) sen\,\theta - \frac{m^2}{sen\,\theta}\right] P_k^m(\cos\theta)\,,$$

e,

$$\frac{1}{r^2 sen\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen\,\theta \frac{\partial u_p}{\partial \theta}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k(r)}{r^2}\left[k(k+1) - \frac{m^2}{sen^2\,\theta}\right] P_k^m(\cos\theta)\,.$$

A equação diferencial fica portanto,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) = -f(r,\theta)\,,\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2}{r}A_k'(r) + A_k''(r)\right] P_k^m(\cos\theta)\\
&-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k(r)}{r^2}\left[k(k+1) - \frac{m^2}{sen^2\,\theta}\right] P_k^m(\cos\theta) = -\sum_{k=1}^{\infty} B_k(r) P_k^m(\cos\theta)\,.
\end{aligned}$$

Igualando os coeficientes dos dois lados da equação acima, escolhendo $m = 0$*,*

$$\frac{2}{r}A'_k(r) + A''_k(r) - \frac{A_k(r)}{r^2}\,[k(k+1)] = -B_k(r)\,.$$

Obtemos assim uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, não-homogênea, na forma,

$$\frac{2}{x}y'(x) + y''(x) - \frac{y(x)}{x^2}k(k+1) = -g(x)\,,$$

ou,

$$x^2y''(x) + 2xy'(x) - y(x)k(k+1) = -x^2g(x)\,.$$

A solução da equação acima pode ser escrita, como vimos, como a soma da solução da equação homogênea e uma solução particular da equação não-homogênea,

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)\,.$$

Vimos que a equação,

$$x^2y'' + (2l+1)xy' + (\alpha^2x^{2r} + \beta^2)y = 0\,,$$

em que l, α, r, β *são constantes, possui solução,*

$$y = x^{-l}[c_1J_{\kappa/r}(\alpha x^r/r) + c_2Y_{\kappa/r}(\alpha x^r/r)]\,,$$

e $\kappa = \sqrt{l^2 - \beta^2}$*. Se* $\alpha = 0$ *temos a equação de Euler ou equação de Cauchy, com solução,*

$$y = x^{-l}(c_3x^{\kappa} + c_4x^{-\kappa})\,.$$

Em particular, se $\alpha = 0$ *e* $l = 1/2$ *a equação fica,*

$$x^2y'' + 2xy' + \beta^2y = 0\,,$$

que é a nossa equação homogênea com $\beta^2 = -k(k+1)$*. A solução da equação acima é assim,*

$$y = x^{-1/2}(c_3x^{\kappa} + c_4x^{-\kappa})\,,$$

com $\kappa = \sqrt{(1/4) + k(k+1)} = k + 1/2$*. Logo, renomeando as constantes,*

$$y_h(x) = c_1x^k + c_2x^{-k-1}\,.$$

A solução particular é (capítulo 22),

$$y_p(x) = y_1(x)\int_{x_0}^{x} \frac{y_2(x')g(x')}{\Delta(x')}dx' - y_2(x)\int_{x_0}^{x} \frac{y_1(x')g(x')}{\Delta(x')}dx' \,,$$

com $\Delta = y_1 y_2' - y_1' y_2$ *e* $y_1 = x^k$, $y_2 = x^{-k-1}$. *Calculando* Δ *explicitamente,*

$$\begin{aligned} \Delta &= y_1 y_2' - y_1' y_2 = (-k-1)x^k x^{-k-2} - k x^{k-1} x^{-k-1} \,, \\ \Delta &= -(k+1)x^{-2} - k x^{-2} = -(2k+1)x^{-2} \,, \end{aligned}$$

logo,

$$y_p(x) \;=\; -\frac{1}{2k+1}x^k \int_{x_0}^{x} x'^{-k+1} g(x')dx' + \frac{1}{2k+1}x^{-k-1}\int_{x_0}^{x} x'^{k+2} g(x')dx' \,.$$

Os coeficientes $A's$ *são então dados por,*

$$A_k(r) \;=\; -\frac{1}{2k+1}r^k \int_{r_0}^{r} r'^{-k+1} B_k(r')dr' + \frac{1}{2k+1}r^{-k-1}\int_{r_0}^{r} r'^{k+2} B_k(r')dr' \,.$$

A solução u_p *é, como vimos,*

$$u_p(r,\theta,\varphi) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} A_k(r) P_k(\cos\theta) \,.$$

Os coeficientes $A's$ *são determinados em função dos coeficientes* $B's$*, que dependem de* f*. Explicitamente (com* $m = 0$*),*

$$B_k(r) \;=\; \frac{2k+1}{2}\int_0^{\pi} f(r,\theta')P_k(\cos\theta') sen\,\theta'\, d\theta' \,.$$

Consideremos o caso particular em que $f = f_0$ *constante. Temos,*

$$\begin{aligned} B_k(r) &= \frac{2k+1}{2}\int_0^{\pi} f(r,\theta')P_k(\cos\theta') sen\,\theta'\, d\theta' \,, \\ &= \frac{2k+1}{2} f_0 \int_0^{\pi} P_k(\cos\theta') sen\,\theta'\, d\theta' \,. \end{aligned}$$

Calculando a integral acima temos,

$$I_k \equiv \int_0^\pi P_k(\cos\theta') sen\,\theta'\, d\theta' = \int_{-1}^1 P_k(x)dx = \begin{cases} 2\,, & k=0\,, \\ 0\,, & k=1,2,\ldots \end{cases}$$

O único coeficiente não nulo é então para $k=0$,

$$B_0(r) = \frac{1}{2} f_0 \int_0^\pi P_0(\cos\theta') sen\,\theta'\, d\theta' = f_0\,,$$

e na solução u_p o único coeficiente não nulo é A_0,

$$\begin{aligned}
A_0(r) &= -\int_{r_0}^r r' B_0(r')dr' + r^{-1}\int_{r_0}^r r'^2 B_0(r')dr'\,, \\
&= -f_0 \int_{r_0}^r r'dr' + r^{-1} f_0 \int_{r_0}^r r'^2 dr'\,, \\
&= -f_0 \left[\frac{r'^2}{2}\right]_{r_0}^r + r^{-1} f_0 \left[\frac{r'^3}{3}\right]_{r_0}^r\,, \\
&= -\frac{f_0}{2}(r^2 - r_0^2) + \frac{f_0}{3r}(r^3 - r_0^3)\,.
\end{aligned}$$

A solução fica então,

$$u_p(r,\theta,\varphi) = A_0(r) P_0(\cos\theta) = -\frac{f_0}{2}(r^2 - r_0^2) + \frac{f_0}{3r}(r^3 - r_0^3)\,.$$

Notemos que u_p depende apenas de r nesse caso, e escolhendo $r_0 = a$ temos condições de contorno homogêneas. Vamos verificar que u_p satisfaz a equação diferencial,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{du_p}{dr}\right) = -f(r,\theta,\varphi)\,, \\
&\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(-\frac{f_0}{3}(r^3 - r_0^3)\right) = -f_0\,, \\
&\frac{1}{r^2}\left(-f_0 r^2\right) = -f_0\,, \\
&-f_0 = -f_0\,,
\end{aligned}$$

como deve ser.

4. Encontre a solução $u(r,\theta)$ para as equações:

(a)
$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=-f(r,\theta)\,;$$
(b)
$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=+\alpha^2\,;$$
com α constante,
(c)
$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=-\alpha^2\,;$$
com α constante,
(d)
$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=+\alpha^2 u\,;$$
com α constante,
(e)
$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=-\alpha^2 u\,;$$
com α constante e,

$$a\le r\le b\,,$$
$$u(a,\theta)=\mu(\theta)\,,\quad u(b,\theta)=\nu(\theta)\,.$$

5. Usando o resultado do problema 3(a), encontre a solução particular $u_p(r,\theta,\varphi)$ para a equação,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=-f(r,\theta)\,,$$

com condições de contorno homogêneas em $0\le r\le a$, nos seguintes casos:
(a)
$$f(r,\theta)=\frac{Ae^{-\kappa r}}{r}\text{sen}\,\theta\,;$$
(b)
$$f(r,\theta)=\frac{e^{-\kappa r}}{r}(a+br)\text{sen}\,\theta\,;$$
(c)
$$f(r,\theta)=\frac{e^{-\kappa r}}{r}(a+br+cr^2)\text{sen}\,\theta\,;$$
(d)
$$u(r)=e^{-\kappa r}(a+br+cr^2)\text{sen}\,\theta\,.$$

5 Considerando $u = u(r, \theta, \varphi)$

Escrevendo a solução na forma,

$$u = R(r)\Theta(\theta)e^{im\varphi}\,, \tag{18}$$

temos, de (1),

$$r^2\frac{R''}{R} + 2r\frac{R'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\theta}\frac{\Theta'}{\Theta} - \frac{m^2}{\mathrm{sen}^2\theta} = 0\,,$$

ou,

$$r^2\frac{R''}{R} + 2r\frac{R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} - \frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\theta}\frac{\Theta'}{\Theta} + \frac{m^2}{\mathrm{sen}^2\theta} = -\lambda^2\,. \tag{19}$$

A equação para R é então,

$$r^2R'' + 2rR' + \lambda^2 R = 0\,, \tag{20}$$

que é idêntica a (7), com $\lambda^2 = -n(n+1)$.

A equação para Θ é,

$$\frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\theta}\frac{\Theta'}{\Theta} - \frac{m^2}{\mathrm{sen}^2\theta} - \lambda^2 = 0\,,$$

ou,

$$\mathrm{sen}^2\theta\,\Theta'' + \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,\Theta' + [\mathrm{sen}^2\theta\, n(n+1) - m^2]\Theta = 0\,. \tag{21}$$

Fazendo $\xi = \cos\theta$,

$$(1-\xi^2)\frac{d^2\Theta}{d\xi^2} - 2\xi\frac{d\Theta}{d\xi} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-\xi^2}\right]\Theta = 0\,. \tag{22}$$

A equação acima é a *equação diferencial associada de Legendre* para $\Theta(\theta)$. Em termos de $y(x)$,

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0\,, \tag{23}$$

com $-1 \leq x \leq +1$. A solução são as *funções associadas de Legendre do primeiro e do segundo tipo*, respectivamente $P_n^m(x)$ e $Q_n^m(x)$. A solução geral de $\nabla^2 u = 0$, considerando $u = u(r, \theta, \varphi)$, é então,

$$u = \left(A_1 r^n + \frac{B_1}{r^{n+1}}\right)[A_2 P_n^m(\xi) + B_2 Q_n^m(\xi)]e^{im\varphi}\,, \tag{24}$$

com $\xi = \cos\theta$. Consideramos o caso em que m e n são inteiros não negativos. Usando novamente o princípio da superposição, a solução mais geral é,

$$u = \sum_{nm} \left(A_{1n} r^n + \frac{B_{1n}}{r^{n+1}} \right) [A_{2nm} P_n^m(\xi) + B_{2nm} Q_n^m(\xi)] e^{im\varphi} \,, \tag{25}$$

Vamos escrever a solução acima da equação (1) de forma um pouco diferente,

$$u = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi) \,. \tag{26}$$

substituindo a expressão acima em (1),

$$r^2 \frac{R''}{R} + 2r\frac{R'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\theta}\frac{\Theta'}{\Theta} + \frac{1}{\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\Phi''}{\Phi} = 0 \,,$$

ou,

$$r^2 \frac{R''}{R} + 2r\frac{R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} - \frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\theta}\frac{\Theta'}{\Theta} - \frac{1}{\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\Phi''}{\Phi} = -\lambda^2 \,,$$

A equação para R é, assim,

$$r^2 R'' + 2rR' + \lambda^2 R = 0 \,, \tag{27}$$

idêntica a (7), com $\lambda^2 = -n(n+1)$. Continuando, temos,

$$-\frac{\Theta''}{\Theta} - \frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\theta}\frac{\Theta'}{\Theta} - \frac{1}{\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\Phi''}{\Phi} = -\lambda^2 \,,$$

ou,

$$-\mathrm{sen}^2\theta\frac{\Theta''}{\Theta} - \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\frac{\Theta'}{\Theta} + \mathrm{sen}^2\theta\,\lambda^2 = \frac{\Phi''}{\Phi} = -m^2 \,.$$

A equação para Φ é então,

$$\Phi'' + m^2\Phi = 0 \,, \tag{28}$$

com solução,

$$\Phi = A_3 \cos m\varphi + B_3 \mathrm{sen}\, m\varphi \,. \tag{29}$$

A equação para Θ é,

$$\mathrm{sen}^2\theta\,\Theta'' + \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,\Theta' + [\mathrm{sen}^2\theta\, n(n+1) - m^2]\Theta = 0 \,, \tag{30}$$

idêntica a (21). A solução geral de $\nabla^2 u = 0$, considerando $u = u(r, \theta, \boldsymbol{\varphi})$, pode assim ser escrita como,

$$u = \left(A_1 r^n + \frac{B_1}{r^{n+1}} \right) [A_2 P_n^m(\xi) + B_2 Q_n^m(\xi)][A_3 \cos m\varphi + B_3 \mathrm{sen}\, m\varphi] \,, \tag{31}$$

com $\xi = \cos\theta$. Pelo princípio da superposição novamente,

$$\begin{aligned} u \;=\; & \sum_{nm} \left(A_{1n} r^n + \frac{B_{1n}}{r^{n+1}} \right) [A_{2nm} P_n^m(\xi) + B_{2nm} Q_n^m(\xi)] \times \\ & \times [A_{3m} \cos m\varphi + B_{3m} \mathrm{sen}\, m\varphi] \,. \end{aligned} \tag{32}$$

Harmônicos Esféricos

Vamos escrever agora a solução de forma um pouco diferente,

$$u = AR(r) Y_{nm}(\theta, \varphi) \,, \tag{33}$$

em que $Y_{nm}(\theta, \varphi)$ são os *harmônicos esféricos* [3],

$$Y_{nm}(\theta, \varphi) = C_{nm} P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \,. \tag{34}$$

Os coeficientes C_{nm} são dados pela condição de normalização,

$$\int_0^\pi \mathrm{sen}\, \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi Y^*_{n'm'}(\theta, \varphi) Y_{nm}(\theta, \varphi) = \delta_{nn'} \delta_{mm'} \,. \tag{35}$$

Também temos a relação de completude,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} Y^*_{nm}(\theta', \varphi') Y_{nm}(\theta, \varphi) = \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos\theta - \cos\theta') \,. \tag{36}$$

Vamos primeiro determinar os coeficientes C_{nm} em (44). Substituindo (44) em (45),

$$\int_0^\pi \mathrm{sen}\, \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi C_{n'm'} P_{n'}^{m'}(\cos\theta) e^{-im'\varphi} C_{nm} P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi} = \delta_{nn'} \delta_{mm'} \,,$$
$$C_{n'm'} C_{nm} \int_0^\pi \mathrm{sen}\, \theta d\theta P_{n'}^{m'}(\cos\theta) P_n^m(\cos\theta) \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-im'\boldsymbol{\varphi}} e^{im\varphi} = \delta_{nn'} \delta_{mm'} \,.$$

A integral em φ é nula se $m \neq m'$, e é igual a 2π se $m = m'$, logo,

$$C_{n'm'}C_{nm}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta d\theta P_{n'}^{m'}(\cos\theta)P_n^m(\cos\theta)2\pi\delta_{mm'}=\delta_{nn'}\delta_{mm'}\,.$$

Somando em m',

$$\begin{aligned}&\sum_{m'}C_{n'm'}C_{nm}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta d\theta P_{n'}^{m'}(\cos\theta)P_n^m(\cos\theta)2\pi\delta_{mm'}=\sum_{m'}\delta_{nn'}\delta_{mm'}\,,\\&2\pi C_{n'm}C_{nm}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta d\theta P_{n'}^{m}(\cos\theta)P_n^m(\cos\theta)=\delta_{nn'}\,.\end{aligned}$$

Usando a relação de ortogonalidade para as funções associadas de Legendre do primeiro tipo ($x=\cos\theta$),

$$\int_{-1}^{+1}P_n^m(x)P_k^m(x)dx=\begin{cases}0\,, & n\neq k\,,\\ \dfrac{2}{2n+1}\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!}\,, & n=k\,,\end{cases}$$

e somando em n',

$$2\pi C_{nm}^2\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}=1\,.$$

Portanto,

$$C_{nm}=\sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\,,\tag{37}$$

e,

$$Y_{nm}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}P_n^m(\cos\theta)e^{im\varphi}\,.\tag{38}$$

Vamos escrever a equação diferencial satisfeita pelos harmônicos esféricos. Substituindo (43) em (1) temos,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0\,,\\&R''Y+\frac{2}{r}R'Y+\frac{R}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{R}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=0\,,\\&r^2\frac{R''}{R}+2r\frac{R'}{R}+\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{1}{Y}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=0\,,\end{aligned}$$

ou,

$$\frac{r^2R''}{R}+2r\frac{R'}{R}=-\frac{1}{\text{sen}\theta}\frac{1}{Y}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{\text{sen}^2\theta}\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=-\lambda^2\,.$$

A equação para R é então,

$$r^2R''+2rR'+\lambda^2R=0\,, \tag{39}$$

que é idêntica a (7), (20) e (27), com $\lambda^2=-n(n+1)$.

A equação diferencial satisfeita por Y é,

$$\frac{1}{\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\text{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}-\lambda^2Y=0\,,$$

ou, como $\lambda^2=-n(n+1)$,

$$\frac{1}{\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\text{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+n(n+1)Y=0\,, \tag{40}$$

Uma função qualquer $f(\theta,\varphi)$ pode ser expandida em harmônicos esféricos,

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}A_{lm}Y_{lm}(\theta,\varphi)\,. \tag{41}$$

Para calcularmos os coeficientes A_{lm} multiplicamos a expressão acima dos dois lados por $Y^*_{l'm'}(\theta,\varphi)$ e integramos em $d\Omega$,

$$\int_0^{\pi}\text{sen}\,\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi f(\theta,\varphi)Y^*_{l'm'}(\theta,\varphi)=$$
$$=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}A_{lm}\int_0^{\pi}\text{sen}\,\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi Y^*_{l'm'}(\theta,\varphi)Y_{lm}(\theta,\varphi)\,.$$

Usando (45),

$$\int_0^{\pi}\text{sen}\,\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi f(\theta,\varphi)Y^*_{l'm'}(\theta,\varphi)=$$
$$=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}A_{lm}\delta_{ll'}\delta_{mm'}=A_{l'm'}\,,$$

ou,

$$A_{l'm'}=\int_0^{\pi}\text{sen}\,\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi f(\theta,\varphi)Y^*_{l'm'}(\theta,\varphi)\,. \tag{42}$$

6 Problemas

1-Calcule a solução $u(r,\theta,\varphi)$ no interior e no exterior de uma esfera de raio a, com a condição de contorno (Spiegel [7], probl. 7.30),

$$u(a,\theta,\varphi) = f(\theta,\varphi)\,.$$

(a) A solução é,

$$u(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{nm} r^n P_n^m(\cos\theta)[A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm} sen\, m\varphi]\,, & 0 \le r \le a\,,\\ \displaystyle\sum_{nm} \frac{1}{r^{n+1}} P_n^m(\cos\theta)[C_{nm}\cos m\varphi + D_{nm} sen\, m\varphi]\,, & a \le r \le \infty\,. \end{cases}$$

Usando a condição de contorno obtemos,

$$\sum_{nm} a^n P_n^m(\cos\theta)[A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm} sen\, m\varphi] = f(\theta,\varphi)\,,$$
$$\sum_{nm} \frac{1}{a^{n+1}} P_n^m(\cos\theta)[C_{nm}\cos m\varphi + D_{nm} sen\, m\varphi] = f(\theta,\varphi)\,.$$

As expressões acima são séries de Fourier, logo,

$$\sum_n a^n P_n(\cos\theta) A_{n0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,x)\,dx\,,$$
$$\sum_n a^n P_n^m(\cos\theta) A_{nm} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,x)\cos mx\,dx\,,$$
$$\sum_n a^n P_n^m(\cos\theta) B_{nm} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,x) sen\, mx\,dx\,, \quad m = 1,2,\ldots$$
$$\sum_n \frac{1}{a^{n+1}} P_n(\cos\theta) C_{n0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,x)\,dx\,,$$
$$\sum_n \frac{1}{a^{n+1}} P_n^m(\cos\theta) C_{nm} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,x)\cos mx\,dx\,,$$
$$\sum_n \frac{1}{a^{n+1}} P_n^m(\cos\theta) D_{nm} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,x) sen\, mx\,dx\,, \quad m = 1,2,\ldots$$

Temos agora séries de polinômios de Legendre e de funções associadas de Legendre do primeiro tipo, logo,

$$\begin{aligned}
a^n A_{n0} &= \frac{C_{n0}}{a^{n+1}} = \frac{2n+1}{2}\int_0^\pi P_n(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta \,\times \\
&\times \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,x)\, dx\,, \\
a^n A_{nm} &= \frac{C_{nm}}{a^{n+1}} = \frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!}\int_0^\pi P_n^m(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta \,\times \\
&\times \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,x)\cos mx\, dx\,, \\
a^n B_{nm} &= \frac{D_{nm}}{a^{n+1}} = \frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!}\int_0^\pi P_n^m(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta \,\times \\
&\times \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,x) sen\, mx\, dx\,,
\end{aligned}$$

ou,

$$\begin{aligned}
A_{n0} &= \frac{C_{n0}}{a^{2n+1}} = \frac{2n+1}{2a^n}\int_0^\pi P_n(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta \,\times \\
&\times \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,x)\, dx\,, \\
A_{nm} &= \frac{C_{nm}}{a^{2n+1}} = \frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!a^n}\int_0^\pi P_n^m(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta \,\times \\
&\times \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,x)\cos mx\, dx\,, \\
B_{nm} &= \frac{D_{nm}}{a^{2n+1}} = \frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!a^n}\int_0^\pi P_n^m(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta \,\times \\
&\times \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,x) sen\, mx\, dx\,,
\end{aligned}$$

A solução é portanto,

$$
\begin{aligned}
u(r,\theta,\varphi) \;\; = \;\; & \sum_n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta)\times \\
& \times \frac{2n+1}{2}\int_0^\pi P_n(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta \times \\
& \times \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,x)\, dx\,, \\
& + \sum_{nm} \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi \times \\
& \times \frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!}\int_0^\pi P_n^m(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta \times \\
& \times \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,x)\cos mx\, dx \\
& + \sum_{nm} \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n^m(\cos\theta) sen\, m\varphi \times \\
& \times \frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!}\int_0^\pi P_n^m(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta \times \\
& \times \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,x) sen\, mx\, dx\,, \\
& 0 \le r \le a\,,
\end{aligned}
$$

e,

$$
\begin{aligned}
u(r,\theta,\varphi) \quad = \quad & \sum_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta) \times \\
& \times \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi P_n(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta \times \\
& \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,x)\, dx \\
& + \sum_{nm} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n^m(\cos\theta) \cos m\varphi \times \\
& \times \frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!} \int_0^\pi P_n^m(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta \times \\
& \times \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,x) \cos mx\, dx \\
& + \sum_{nm} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n^m(\cos\theta) sen\, m\varphi \times \\
& \times \frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!} \int_0^\pi P_n^m(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta \times \\
& \times \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,x) sen\, mx\, dx \\
& a \le r \le \infty\,.
\end{aligned}
$$

Se $f = 0$ a solução é nula.

(b) Se $f = f_0$ constante, temos, em $0 \le r \le a$,

$$
\begin{aligned}
u(r,\theta,\varphi) \;=\;& \sum_n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta)\,\times \\
& \times \frac{2n+1}{2} f_0 \int_0^{\pi} P_n(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta \,\times \\
& \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\,, \\
& + \sum_{nm} \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi \,\times \\
& \times \frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!} f_0 \int_0^{\pi} P_n^m(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta \,\times \\
& \times \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\, dx \\
& + \sum_{nm} \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n^m(\cos\theta) sen\, m\varphi \,\times \\
& \times \frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!} f_0 \int_0^{\pi} P_n^m(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta \,\times \\
& \times \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} sen\, mx\, dx\,, \\
& 0 \le r \le a\,.
\end{aligned}
$$

Nos dois últimos termos as integrais do coseno e do seno se anulam, e no primeiro termo o único termo não nulo é para $n = 0$, logo,

$$
\begin{aligned}
u(r,\theta,\varphi) \;=\;& P_0(\cos\theta)\frac{1}{2} f_0 \int_0^{\pi} P_0(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta \,\times \\
& \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = f_0\,, \\
& 0 \le r \le a\,.
\end{aligned}
$$

Em $a \le r \le \infty$ obtemos, de forma análoga,

$$
u(r,\theta,\varphi) \;=\; f_0 \frac{a}{r}\,, \;\; a \le r \le \infty\,.
$$

A solução é esfericamente simétrica, como esperado.

(c) Consideremos o caso particular $f(\theta,\varphi) = v_0 sen^2\theta \cos 2\varphi$ (Spiegel [7], probl. 7.29). Da expansão em série para f,

$$\begin{aligned} f(\theta,\varphi) &= \sum_{nm} a^n P_n^m(\cos\theta)[A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm} sen\, m\varphi]\,,\\ &= v_0 sen^2\theta \cos 2\varphi\,, \end{aligned}$$

vemos que $B_{nm} = 0$ *e* $A_{n2} \neq 0$,

$$\begin{aligned} f(\theta,\varphi) &= \sum_{n} a^n P_n^2(\cos\theta) A_{n2}\cos 2\varphi\,,\\ &= v_0 sen^2\theta \cos 2\varphi\,, \end{aligned}$$

Como $P_2^2(x) = 3(1-x^2) = 3sen^2\,\theta$, *o único termo não nulo na soma acima é* $n = 2$,

$$\begin{aligned} f(\theta,\varphi) &= a^2 P_2^2(\cos\theta) A_{22}\cos 2\varphi\,,\\ &= a^2(3sen^2\,\theta) A_{22}\cos 2\varphi\,,\\ &= v_0 sen^2\theta \cos 2\varphi\,, \end{aligned}$$

logo $3a^2A_{22} = v_0$, *ou* $A_{22} = v_0/3a^2$. *Portanto, a solução é,*

$$u(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} r^2 P_2^2(\cos\theta) A_{22}\cos 2\varphi\,, & 0 \le r \le a\,,\\ \dfrac{1}{r^3} P_2^2(\cos\theta) a^5 A_{22}\cos 2\varphi\,, & a \le r \le \infty\,, \end{cases}$$

ou,

$$u(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} v_0 \dfrac{r^2}{a^2} sen^2\,\theta \cos 2\varphi\,, & 0 \le r \le a\,,\\ v_0 \dfrac{a^3}{r^3} sen^2\,\theta \cos 2\varphi\,, & a \le r \le \infty\,. \end{cases}$$

(d) Consideremos agora $f(\theta,\varphi) = v_0 sen^3\theta\cos\theta\cos 3\varphi$ *(Spiegel [7], probl. 7.63). Da expansão em série para* f,

$$\begin{aligned} f(\theta,\varphi) &= \sum_{nm} a^n P_n^m(\cos\theta)[A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm} sen\, m\varphi]\,,\\ &= v_0 sen^3\theta \cos\theta \cos 3\varphi\,, \end{aligned}$$

logo, como $P_4^3(x) = 105x(1-x^2)^{3/2} = 105 sen^3\theta\cos\theta$,

$$
\begin{aligned}
f(\theta,\varphi) &= a^4 P_4^3(\cos\theta) A_{43}\cos 3\varphi\,,\\
&= a^4(105 sen^3\theta\cos\theta) A_{43}\cos 3\varphi\,,\\
&= v_0 sen^3\theta\cos\theta\cos 3\varphi\,.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
A_{43} = \frac{C_{43}}{a^9} = \frac{v_0}{105 a^4}\,.
$$

Os outros coeficientes são nulos. A solução é portanto,

$$
u(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} r^4 P_4^3(\cos\theta) A_{43}\cos 3\varphi\,, & 0\le r\le a\,,\\ \dfrac{1}{r^5} P_4^3(\cos\theta) C_{43}\cos 3\varphi\,, & a\le r\le\infty\,, \end{cases}
$$

ou,

$$
u(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} v_0\dfrac{r^4}{a^4} sen^3\theta\cos\theta\cos 3\varphi\,, & 0\le r\le a\,,\\ v_0\dfrac{a^5}{r^5} sen^3\theta\cos\theta\cos 3\varphi\,, & a\le r\le\infty\,. \end{cases}
$$

2. Calcule $u(r,\theta,\varphi)$ em $0\le r\le a$, com a condição de contorno,

$$
u(a,\theta,\varphi) = f(\theta,\varphi)\,.
$$

A solução é, usando o resultado do problema anterior,

$$
\begin{aligned}
u(r,\theta,\varphi) \;=\; & \sum_n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta) \times \\
& \times \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi P_n(\cos\theta) sen\,\theta \, d\theta \times \\
& \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,x)\,dx\,, \\
& + \sum_{nm} \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n^m(\cos\theta) \cos m\varphi \times \\
& \times \frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!} \int_0^\pi P_n^m(\cos\theta) sen\,\theta \, d\theta \times \\
& \times \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,x) \cos mx \, dx \\
& + \sum_{nm} \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n^m(\cos\theta) sen\, m\varphi \times \\
& \times \frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!} \int_0^\pi P_n^m(\cos\theta) sen\,\theta \, d\theta \times \\
& \times \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,x) sen\, mx \, dx\,, \\
& 0 \leq r \leq a\,.
\end{aligned}
$$

Se $f = f_0$ *constante, temos, em* $0 \leq r \leq a$*,*

$$
\begin{aligned}
u(r,\theta,\varphi) &= \sum_n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta) \times \\
&\times \frac{2n+1}{2} f_0 \int_0^\pi P_n(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta \times \\
&\times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\,, \\
&+ \sum_{nm} \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n^m(\cos\theta) \cos m\varphi \times \\
&\times \frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!} f_0 \int_0^\pi P_n^m(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta \times \\
&\times \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\, dx \\
&+ \sum_{nm} \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n^m(\cos\theta) sen\, m\varphi \times \\
&\times \frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!} f_0 \int_0^\pi P_n^m(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta \times \\
&\times \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} sen\, mx\, dx\,, \\
&0 \le r \le a\,.
\end{aligned}
$$

Nos dois últimos termos as integrais do coseno e do seno se anulam, e no primeiro termo o único termo não nulo é para $n = 0$, logo,

$$
\begin{aligned}
u(r,\theta,\varphi) &= P_0(\cos\theta) \frac{1}{2} f_0 \int_0^\pi P_0(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta \times \\
&\times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = f_0\,, \\
&0 \le r \le a\,.
\end{aligned}
$$

3. Considerando o intervalo $a \le r \le b$, encontre a solução $u(r,\theta,\varphi)$ com as condições de contorno,

$$
\begin{aligned}
u(a,\theta,\varphi) = f(\theta,\varphi)\,, \\
u(b,\theta,\varphi) = g(\theta,\varphi)\,.
\end{aligned}
$$

(a) Escrevemos a solução como,

$$\begin{aligned}
u(r,\theta,\varphi) &= \sum_{nm}\left(A_{1n}r^n+\frac{B_{1n}}{r^{n+1}}\right)P_n^m(\cos\theta)\times \\
&\quad\times[A_{3nm}\cos m\varphi+B_{3nm}sen\, m\varphi]\,,
\end{aligned}$$

e as condições de contorno nos dão,

$$\begin{aligned}
u(a,\theta,\varphi) &= f(\theta,\varphi)=\sum_{nm}\left(A_{1n}a^n+\frac{B_{1n}}{a^{n+1}}\right)P_n^m(\cos\theta)\times \\
&\quad\times[A_{3nm}\cos m\varphi+B_{3nm}sen\, m\varphi]\,, \\
u(b,\theta,\varphi) &= g(\theta,\varphi)=\sum_{nm}\left(A_{1n}b^n+\frac{B_{1n}}{b^{n+1}}\right)P_n^m(\cos\theta)\times \\
&\quad\times[A_{3nm}\cos m\varphi+B_{3nm}sen\, m\varphi]\,.
\end{aligned}$$

Considerando séries de Fourier para f e g temos,

$$\begin{aligned}
\sum_{n}\left(A_{1n}a^n+\frac{B_{1n}}{a^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)A_{3n0} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta,x)\,dx\,, \\
\sum_{n}\left(A_{1n}a^n+\frac{B_{1n}}{a^{n+1}}\right)P_n^m(\cos\theta)A_{3nm} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta,x)\cos mx\,dx\,, \\
\sum_{n}\left(A_{1n}a^n+\frac{B_{1n}}{a^{n+1}}\right)P_n^m(\cos\theta)B_{3nm} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta,x)sen\, mx\,dx\,, \\
\sum_{n}\left(A_{1n}b^n+\frac{B_{1n}}{b^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)A_{3n0} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(\theta,x)\,dx\,, \\
\sum_{n}\left(A_{1n}b^n+\frac{B_{1n}}{b^{n+1}}\right)P_n^m(\cos\theta)A_{3nm} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(\theta,x)\cos mx\,dx\,, \\
\sum_{n}\left(A_{1n}b^n+\frac{B_{1n}}{b^{n+1}}\right)P_n^m(\cos\theta)B_{3nm} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(\theta,x)sen\, mx\,dx\,.
\end{aligned}$$

Temos agora séries de polinômios de Legendre e de funções associadas de Legendre do primeiro tipo, logo,

$$
\begin{aligned}
\left(A_{1n}a^n + \frac{B_{1n}}{a^{n+1}}\right) A_{3n0} &= \frac{2n+1}{2}\int_0^\pi P_n(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta \times \\
&\quad \times \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,x)\, dx\,, \\
\left(A_{1n}a^n + \frac{B_{1n}}{a^{n+1}}\right) A_{3nm} &= \frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!}\int_0^\pi P_n^m(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta \times \\
&\quad \times \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,x)\cos mx\, dx\,, \\
\left(A_{1n}a^n + \frac{B_{1n}}{a^{n+1}}\right) B_{3nm} &= \frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!}\int_0^\pi P_n^m(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta \times \\
&\quad \times \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,x) sen\, mx\, dx\,, \\
\left(A_{1n}b^n + \frac{B_{1n}}{b^{n+1}}\right) A_{3n0} &= \frac{2n+1}{2}\int_0^\pi P_n(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta \times \\
&\quad \times \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta,x)\, dx\,, \\
\left(A_{1n}b^n + \frac{B_{1n}}{b^{n+1}}\right) A_{3nm} &= \frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!}\int_0^\pi P_n^m(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta \times \\
&\quad \times \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta,x)\cos mx\, dx\,, \\
\left(A_{1n}b^n + \frac{B_{1n}}{b^{n+1}}\right) B_{3nm} &= \frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!}\int_0^\pi P_n^m(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta \times \\
&\quad \times \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta,x) sen\, mx\, dx\,.
\end{aligned}
$$

As expressões acima nos dão os produtos $A_{1n}A_{3n0}$, etc. Temos seis equações lineares para seis variáveis. Definimos as variáveis por,

$$
\begin{aligned}
x(1) &= A_{1n}A_{3n0}\,, \\
x(2) &= B_{1n}A_{3n0}\,, \\
x(3) &= A_{1n}A_{3nm}\,, \\
x(4) &= B_{1n}A_{3nm}\,, \\
x(5) &= A_{1n}B_{3nm}\,, \\
x(6) &= B_{1n}B_{3nm}\,, \qquad (43)
\end{aligned}
$$

a matriz dos coeficientes por A_{ij}, e o lado direito das equações por $y(i)$. Em forma matricial o sistema de equações fica então,

$$Ax = y\,,$$

e a solução é,

$$x(i) = \frac{\Delta_i}{\Delta}\,,$$

em que Δ *é o determinante da matriz* A *dos coeficientes, e* Δ_i *o determinante obtido substituindo a coluna* i *da matriz* A *por* $y(i)$*. Calculando os determinantes obtemos,*

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left(\frac{b^n}{a^{n+1}} - \frac{a^n}{b^{n+1}}\right)^3\,,\\
\Delta_1 &= \left(\frac{y(4)}{a^{n+1}} - \frac{y(1)}{b^{n+1}}\right)\left(\frac{b^n}{a^{n+1}} - \frac{a^n}{b^{n+1}}\right)^2\,,\\
\Delta_2 &= [y(1)b^n - y(4)a^n]\left(\frac{b^n}{a^{n+1}} - \frac{a^n}{b^{n+1}}\right)^2\,,\\
\Delta_3 &= \left(\frac{y(5)}{a^{n+1}} - \frac{y(2)}{b^{n+1}}\right)\left(\frac{b^n}{a^{n+1}} - \frac{a^n}{b^{n+1}}\right)^2\,,\\
\Delta_4 &= [y(2)b^n - y(5)a^n]\left(\frac{b^n}{a^{n+1}} - \frac{a^n}{b^{n+1}}\right)^2\,,\\
\Delta_5 &= \left(\frac{y(6)}{a^{n+1}} - \frac{y(3)}{b^{n+1}}\right)\left(\frac{b^n}{a^{n+1}} - \frac{a^n}{b^{n+1}}\right)^2\,,\\
\Delta_6 &= [y(3)b^n - y(6)a^n]\left(\frac{b^n}{a^{n+1}} - \frac{a^n}{b^{n+1}}\right)^2\,.
\end{aligned}$$

Os valores de x *são então,*

$$x(1)=\left(\frac{y(4)}{a^{n+1}}-\frac{y(1)}{b^{n+1}}\right)\left(\frac{b^n}{a^{n+1}}-\frac{a^n}{b^{n+1}}\right)^{-1},$$

$$x(2)=[y(1)b^n-y(4)a^n]\left(\frac{b^n}{a^{n+1}}-\frac{a^n}{b^{n+1}}\right)^{-1},$$

$$x(3)=\left(\frac{y(5)}{a^{n+1}}-\frac{y(2)}{b^{n+1}}\right)\left(\frac{b^n}{a^{n+1}}-\frac{a^n}{b^{n+1}}\right)^{-1},$$

$$x(4)=[y(2)b^n-y(5)a^n]\left(\frac{b^n}{a^{n+1}}-\frac{a^n}{b^{n+1}}\right)^{-1},$$

$$x(5)=\left(\frac{y(6)}{a^{n+1}}-\frac{y(3)}{b^{n+1}}\right)\left(\frac{b^n}{a^{n+1}}-\frac{a^n}{b^{n+1}}\right)^{-1},$$

$$x(6)=[y(3)b^n-y(6)a^n]\left(\frac{b^n}{a^{n+1}}-\frac{a^n}{b^{n+1}}\right)^{-1}.$$

Escrevemos a solução na forma,

$$\begin{aligned}
u(r,\theta,\varphi) &= \sum_n A_{1n}A_{3n0}r^nP_n(\cos\theta)\\
&\quad+\sum_n B_{1n}A_{3n0}\frac{1}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta)\\
&\quad+\sum_{nm} A_{1n}A_{3nm}r^nP_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi\\
&\quad+\sum_{nm} B_{1n}A_{3nm}\frac{1}{r^{n+1}}P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi\\
&\quad+\sum_{nm} A_{1n}B_{3nm}r^nP_n^m(\cos\theta)sen\, m\varphi\\
&\quad+\sum_{nm} B_{1n}B_{3nm}\frac{1}{r^{n+1}}P_n^m(\cos\theta)sen\, m\varphi\,,
\end{aligned}$$

ou,

$$
\begin{aligned}
u(r,\theta,\varphi) \;=\; & \sum_n x(1) r^n P_n(\cos\theta) \\
& + \sum_n x(2) \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta) \\
& + \sum_{nm} x(3) r^n P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi \\
& + \sum_{nm} x(4) \frac{1}{r^{n+1}} P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi \\
& + \sum_{nm} x(5) r^n P_n^m(\cos\theta) sen\, m\varphi \\
& + \sum_{nm} x(6) \frac{1}{r^{n+1}} P_n^m(\cos\theta) sen\, m\varphi\,.
\end{aligned}
$$

Substituindo $x(i)$,

$$
\begin{aligned}
u(r,\theta,\varphi) &= \sum_n r^n P_n(\cos\theta) \times \\
&\times \left(\frac{y(4)}{a^{n+1}} - \frac{y(1)}{b^{n+1}}\right)\left(\frac{b^n}{a^{n+1}} - \frac{a^n}{b^{n+1}}\right)^{-1} \\
&+ \sum_n \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta) \times \\
&\times [y(1)b^n - y(4)a^n]\left(\frac{b^n}{a^{n+1}} - \frac{a^n}{b^{n+1}}\right)^{-1} \\
&+ \sum_{nm} r^n P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi \times \\
&\times \left(\frac{y(5)}{a^{n+1}} - \frac{y(2)}{b^{n+1}}\right)\left(\frac{b^n}{a^{n+1}} - \frac{a^n}{b^{n+1}}\right)^{-1} \\
&+ \sum_{nm} \frac{1}{r^{n+1}} P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi \times \\
&\times [y(2)b^n - y(5)a^n]\left(\frac{b^n}{a^{n+1}} - \frac{a^n}{b^{n+1}}\right)^{-1} \\
&+ \sum_{nm} r^n P_n^m(\cos\theta) sen\, m\varphi \times \\
&\times \left(\frac{y(6)}{a^{n+1}} - \frac{y(3)}{b^{n+1}}\right)\left(\frac{b^n}{a^{n+1}} - \frac{a^n}{b^{n+1}}\right)^{-1} \\
&+ \sum_{nm} \frac{1}{r^{n+1}} P_n^m(\cos\theta) sen\, m\varphi \times \\
&\times [y(3)b^n - y(6)a^n]\left(\frac{b^n}{a^{n+1}} - \frac{a^n}{b^{n+1}}\right)^{-1} .
\end{aligned}
$$

Se f, g são nulas, a solução é identicamente nula.

(b) Consideremos o caso particular f, g constantes. Temos nesse caso, fazendo $f = f_0$ e $g = g_0$,

$$
\begin{aligned}
y(1) &= \frac{2n+1}{2} f_0 \int_0^\pi P_n(\cos\theta) sen\,\theta \, d\theta \,, \\
y(2) &= 0 \,, \\
y(3) &= 0 \,, \\
y(4) &= \frac{2n+1}{2} g_0 \int_0^\pi P_n(\cos\theta) sen\,\theta \, d\theta \,, \\
y(5) &= 0 \,, \\
y(6) &= 0 \,.
\end{aligned}
$$

A integral acima é 2 para $n = 0$, e zero para outros valores de n. Obtemos assim $y(1) = f_0$, $y(4) = g_0$ se $n = 0$. Portanto a solução fica,

$$
u(r, \theta, \varphi) = \frac{b g_0 - a f_0}{b - a} + \left(\frac{f_0 - g_0}{b - a} \right) \frac{ab}{r} \,,
$$

como obtivemos para uma solução esfericamente simétrica, isto é, dependente apenas de r.

(c) Consideremos $f = 0$. Nesse caso $y(1) = y(2) = y(3) = 0$ e temos,

$$
\begin{aligned}
u(r, \theta, \varphi) &= \sum_n \frac{r^{2n+1} - a^{2n+1}}{b^{2n+1} - a^{2n+1}} \left(\frac{b}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos\theta) y(4) \\
&\quad + \sum_{nm} \frac{r^{2n+1} - a^{2n+1}}{b^{2n+1} - a^{2n+1}} \left(\frac{b}{r} \right)^{n+1} P_n^m(\cos\theta) \times \\
&\quad \times [y(5) \cos m\varphi + y(6) sen\, m\varphi] \,.
\end{aligned}
$$

(d) Consideremos $g = 0$. Agora temos $y(4) = y(5) = y(6) = 0$, e a solução fica,

$$
\begin{aligned}
u(r, \theta, \varphi) &= \sum_n \frac{b^{2n+1} - r^{2n+1}}{b^{2n+1} - a^{2n+1}} \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos\theta) y(1) \\
&\quad + \sum_{nm} \frac{b^{2n+1} - r^{2n+1}}{b^{2n+1} - a^{2n+1}} \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} P_n^m(\cos\theta) \times \\
&\quad \times [y(2) \cos m\varphi + y(3) sen\, m\varphi] \,.
\end{aligned}
$$

4. Consideramos agora o intervalo $0 \leq r \leq \infty$, e duas superfícies esféricas concêntricas em $r = a$ e $r = b$, com as mesmas condiçõe de contorno do problema anterior.

A solução é,

$$u(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{nm} r^n P_n^m(\cos\theta)\times \\ \times[A_{1nm}\cos m\varphi + B_{1nm} sen\, m\varphi]\,, \quad 0 \le r \le a\,, \\ \displaystyle\sum_{nm} \left(A_{2n} r^n + \frac{B_{2n}}{r^{n+1}}\right) P_n^m(\cos\theta)\times \\ \times[A_{3nm}\cos m\varphi + B_{3nm} sen\, m\varphi]\,, \quad a \le r \le b\,, \\ \displaystyle\sum_{nm} \frac{1}{r^{n+1}} P_n^m(\cos\theta)\times \\ \times[A_{4nm}\cos m\varphi + B_{4nm} sen\, m\varphi]\,, \quad b \le r \le \infty\,. \end{cases}$$

A continuidade da solução em $r = a$ *e* $r = b$ *e as condições de contorno nos dão as equações,*

$$\begin{aligned} &\sum_{nm} a^n P_n^m(\cos\theta)[A_{1nm}\cos m\varphi + B_{1nm} sen\, m\varphi] = \\ &= \sum_{nm} \left(A_{2n} a^n + \frac{B_{2n}}{a^{n+1}}\right) P_n^m(\cos\theta)[A_{3nm}\cos m\varphi + B_{3nm} sen\, m\varphi]\,, \\ &= f(\theta,\varphi)\,, \\ &\sum_{nm} \left(A_{2n} b^n + \frac{B_{2n}}{b^{n+1}}\right) P_n^m(\cos\theta)[A_{3nm}\cos m\varphi + B_{3nm} sen\, m\varphi] = \\ &= \sum_{nm} \frac{1}{b^{n+1}} P_n^m(\cos\theta)[A_{4nm}\cos m\varphi + B_{4nm} sen\, m\varphi]\,, \\ &= g(\theta,\varphi)\,. \end{aligned}$$

Temos séries de Fourier e de funções associadas de Legendre, portanto,

$$
\begin{aligned}
\sum_n a^n P_n^0(\cos\theta) A_{1n0} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,\varphi)\, d\varphi\,,\\
\sum_n a^n P_n^m(\cos\theta) A_{1nm} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,\varphi)\cos m\varphi\, d\varphi\,,\\
\sum_n a^n P_n^m(\cos\theta) B_{1nm} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,\varphi) sen\, m\varphi\, d\varphi\,,\\
\sum_n \frac{1}{b^{n+1}} P_n^0(\cos\theta) A_{4n0} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta,\varphi)\, d\varphi\,,\\
\sum_n \frac{1}{b^{n+1}} P_n^m(\cos\theta) A_{4nm} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta,\varphi)\cos m\varphi\, d\varphi\,,\\
\sum_n \frac{1}{b^{n+1}} P_n^m(\cos\theta) B_{4nm} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta,\varphi) sen\, m\varphi\, d\varphi\,,
\end{aligned}
$$

e,

$$
\begin{aligned}
a^n A_{1n0} &= \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} P_n(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,\varphi)\, d\varphi\,,\\
a^n A_{1nm} &= \frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!}\int_0^{\pi} P_n^m(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,\varphi)\cos m\varphi\, d\varphi\,,\\
a^n B_{1nm} &= \frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!}\int_0^{\pi} P_n^m(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,\varphi) sen\, m\varphi\, d\varphi\,,\\
\frac{1}{b^{n+1}} A_{4n0} &= \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} P_n(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta,\varphi)\, d\varphi\,,\\
\frac{1}{b^{n+1}} A_{4nm} &= \frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!}\int_0^{\pi} P_n^m(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta,\varphi)\cos m\varphi\, d\varphi\,,\\
\frac{1}{b^{n+1}} B_{4nm} &= \frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!}\int_0^{\pi} P_n^m(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta,\varphi) sen\, m\varphi\, d\varphi\,.
\end{aligned}
\tag{44}
$$

Para os demais coeficientes temos,

$$
\begin{aligned}
a^n A_{1n0} &= \left(A_{2n} a^n + \frac{B_{2n}}{a^{n+1}} \right) A_{3n0}\,, \\
a^n A_{1nm} &= \left(A_{2n} a^n + \frac{B_{2n}}{a^{n+1}} \right) A_{3nm}\,, \\
a^n B_{1nm} &= \left(A_{2n} a^n + \frac{B_{2n}}{a^{n+1}} \right) B_{3nm}\,, \\
\left(A_{2n} b^n + \frac{B_{2n}}{b^{n+1}} \right) A_{3n0} &= \frac{1}{b^{n+1}} A_{4n0}\,, \\
\left(A_{2n} b^n + \frac{B_{2n}}{b^{n+1}} \right) A_{3nm} &= \frac{1}{b^{n+1}} A_{4nm}\,, \\
\left(A_{2n} b^n + \frac{B_{2n}}{b^{n+1}} \right) B_{3nm} &= \frac{1}{b^{n+1}} B_{4nm}\,.
\end{aligned} \tag{45}
$$

A resolução do sistema acima é semelhante ao que fizemos no problema 2. Chamamos o lado direito de (44) de $y(i)$*. Com isso escrevemos (45) como,*

$$
\begin{aligned}
\left(A_{2n} a^n + \frac{B_{2n}}{a^{n+1}} \right) A_{3n0} &= y(1)\,, \\
\left(A_{2n} a^n + \frac{B_{2n}}{a^{n+1}} \right) A_{3nm} &= y(2)\,, \\
\left(A_{2n} a^n + \frac{B_{2n}}{a^{n+1}} \right) B_{3nm} &= y(3)\,, \\
\left(A_{2n} b^n + \frac{B_{2n}}{b^{n+1}} \right) A_{3n0} &= y(4)\,, \\
\left(A_{2n} b^n + \frac{B_{2n}}{b^{n+1}} \right) A_{3nm} &= y(5)\,, \\
\left(A_{2n} b^n + \frac{B_{2n}}{b^{n+1}} \right) B_{3nm} &= y(6)\,.
\end{aligned} \tag{46}
$$

Definimos as variáveis por,

$$
\begin{aligned}
x(1) &= A_{2n} A_{3n0}\,, \\
x(2) &= B_{2n} A_{3n0}\,, \\
x(3) &= A_{2n} A_{3nm}\,, \\
x(4) &= B_{2n} A_{3nm}\,, \\
x(5) &= A_{2n} B_{3nm}\,, \\
x(6) &= B_{2n} B_{3nm}\,,
\end{aligned} \tag{47}
$$

Com isso escrevemos o sistema de equações (45), ou (46), como,

$$Ax = y\,,$$

com solução,

$$x(i) = \frac{\Delta_i}{\Delta}\,.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} u(r,\theta,\varphi) &= \sum_n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta) y(1) \\ &+ \sum_{nm} \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n^m(\cos\theta)\left[y(2)\cos m\varphi + y(3) sen\, m\varphi\right]\,, \\ &0 \le r \le a\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(r,\theta,\varphi) &= \sum_n \left(\frac{\Delta_1}{\Delta} r^n + \frac{\Delta_2}{\Delta}\frac{1}{r^{n+1}}\right) P_n(\cos\theta) \\ &+ \sum_{nm} \left(\frac{\Delta_3}{\Delta} r^n + \frac{\Delta_4}{\Delta}\frac{1}{r^{n+1}}\right) P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi \\ &+ \sum_{nm} \left(\frac{\Delta_5}{\Delta} r^n + \frac{\Delta_6}{\Delta}\frac{1}{r^{n+1}}\right) P_n^m(\cos\theta) sen\, m\varphi\,, \\ &a \le r \le b\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(r,\theta,\varphi) &= \sum_n \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta)\frac{y(4)}{b^{n+1}} \\ &+ \sum_{nm} \frac{1}{r^{n+1}} P_n^m(\cos\theta)\left[\frac{y(5)}{b^{n+1}}\cos m\varphi + \frac{y(6)}{b^{n+1}} sen\, m\varphi\right]\,, \\ &b \le r \le \infty\,. \end{aligned}$$

Se $f = f_0$ e $g = g_0$ constantes, os únicos coeficientes não nulos são,

$$
\begin{aligned}
&A_{100} = f_0\,,\\
&A_{400} = bg_0\,,\\
&\left(A_{20} + \frac{B_{20}}{a}\right) A_{300} = f_0\,,\\
&\left(A_{20} + \frac{B_{20}}{b}\right) A_{300} = g_0\,.
\end{aligned}
$$

A solução das duas últimas equações é,

$$
\begin{aligned}
A_{20}A_{300} &= \frac{bg_0 - af_0}{b-a}\,,\\
B_{20}A_{300} &= \frac{ab(f_0 - g_0)}{b-a}\,.
\end{aligned}
$$

A solução fica então,

$$
u(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} f_0\,, \quad 0 \le r \le a\,,\\ \dfrac{bg_0 - af_0}{b-a} + \dfrac{ab(f_0-g_0)}{b-a}\dfrac{1}{r}\,, \quad a \le r \le b\,,\\ \dfrac{b}{r} g_0\,, \quad b \le r \le \infty\,, \end{cases}
$$

como esperado.

5. Encontre a solução $u(r,\theta,\varphi)$ para as equações:

(a)

$$
\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathrm{sen}\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -f(r,\theta,\varphi)\,;
$$

(b)

$$
\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathrm{sen}\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = +\alpha^2\,;
$$

com α constante,

(c)

$$
\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathrm{sen}\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -\alpha^2\,;
$$

com α constante,

(d)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\text{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=+\alpha^2 u\,;$$

com α constante,

(e)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\text{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=-\alpha^2 u\,;$$

com α constante e,

$$0\le r\le a\,,$$
$$u(a,\theta,\varphi)=\mu(\theta,\varphi)\,.$$

(a) Escrevemos a solução da forma usual como,

$$u(r,\theta,\varphi)=u_h(r,\theta,\varphi)+u_p(r,\theta,\varphi)\,,$$

com u_h satisfazendo a equação homogênea com condições de contorno não-homogêneas (problema 2), e u_p satisfazendo a equação não-homogênea com condições de contorno homogêneas. Expandimos u_p e f em séries de Fourier,

$$u_p(r,\theta,\varphi)=\frac{a_0(r,\theta)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n(r,\theta)\cos(n\varphi)+b_n(r,\theta)sen(n\varphi)\right]\,,$$
$$\frac{a_0(r,\theta)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_p(r,\theta,\varphi')\,d\varphi'\,,$$
$$a_n(r,\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u_p(r,\theta,\varphi')\cos(n\varphi')\,d\varphi'\,,$$
$$b_n(r,\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u_p(r,\theta,\varphi')sen(n\varphi')\,d\varphi'\,,\quad n=1,2,\dots$$

$$f(r,\theta,\varphi)=\frac{c_0(r,\theta)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n(r,\theta)\cos(n\varphi)+d_n(r,\theta)sen(n\varphi)\right]\,,$$
$$\frac{c_0(r,\theta)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(r,\theta,\varphi')\,d\varphi'\,,$$
$$c_n(r,\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(r,\theta,\varphi')\cos(n\varphi')d\varphi'\,,$$
$$d_n(r,\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(r,\theta,\varphi')sen(n\varphi')\,d\varphi'\,,\quad n=1,2,\dots$$

Expandimos agora os coeficientes do lado esquerdo em séries de funções associadas de Legendre do primeiro tipo,

$$
\begin{aligned}
\frac{a_0(r,\theta)}{2} &= \sum_{k=0}^{\infty} A_{0k}(r) P_k(\cos\theta)\,, \\
A_{0k}(r) &= \frac{2k+1}{2}\int_0^{\pi} \frac{a_0(r,\theta')}{2} P_k(\cos\theta') sen\,\theta'\, d\theta'\,, \\
a_n(r,\theta) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}(r) P_k^m(\cos\theta)\,, \\
A_{nk}(r) &= \frac{(2k+1)(k-m)!}{2(k+m)!}\int_0^{\pi} a_n(r,\theta') P_k^m(\cos\theta') sen\,\theta'\, d\theta'\,, \\
b_n(r,\theta) &= \sum_{k=1}^{\infty} B_{nk}(r) P_k^m(\cos\theta)\,, \\
B_{nk}(r) &= \frac{(2k+1)(k-m)!}{2(k+m)!}\int_0^{\pi} b_n(r,\theta') P_k^m(\cos\theta') sen\,\theta'\, d\theta'\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{c_0(r,\theta)}{2} &= \sum_{k=0}^{\infty} C_{0k}(r) P_k(\cos\theta)\,, \\
C_{0k}(r) &= \frac{2k+1}{2}\int_0^{\pi} \frac{c_0(r,\theta')}{2} P_k(\cos\theta') sen\,\theta'\, d\theta'\,, \\
c_n(r,\theta) &= \sum_{k=1}^{\infty} C_{nk}(r) P_k^m(\cos\theta)\,, \\
C_{nk}(r) &= \frac{(2k+1)(k-m)!}{2(k+m)!}\int_0^{\pi} c_n(r,\theta') P_k^m(\cos\theta') sen\,\theta'\, d\theta'\,, \\
d_n(r,\theta) &= \sum_{k=1}^{\infty} D_{nk}(r) P_k^m(\cos\theta)\,, \\
D_{nk}(r) &= \frac{(2k+1)(k-m)!}{2(k+m)!}\int_0^{\pi} d_n(r,\theta') P_k^m(\cos\theta') sen\,\theta'\, d\theta'\,.
\end{aligned}
$$

As expansões de u_p e f ficam então,

$$
\begin{aligned}
u_p(r,\theta,\varphi) &= \frac{a_0(r,\theta)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n(r,\theta)\cos(n\varphi) + b_n(r,\theta) sen(n\varphi)\right] \,, \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} A_{0k}(r) P_k(\cos\theta) \\
&\quad + \sum_{n,k=1}^{\infty} A_{nk}(r) P_k^m(\cos\theta)\cos(n\varphi) \\
&\quad + \sum_{n,k=1}^{\infty} B_{nk}(r) P_k^m(\cos\theta) sen(n\varphi) \,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(r,\theta,\varphi) &= \frac{c_0(r,\theta)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n(r,\theta)\cos(n\varphi) + d_n(r,\theta) sen(n\varphi)\right] \,, \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} C_{0k}(r) P_k(\cos\theta) \\
&\quad + \sum_{n,k=1}^{\infty} C_{nk}(r) P_k^m(\cos\theta)\cos(n\varphi) \\
&\quad + \sum_{n,k=1}^{\infty} D_{nk}(r) P_k^m(\cos\theta) sen(n\varphi) \,.
\end{aligned}
$$

Os coeficientes $c's, d's, C's, D's$ são determinados por f. Os coeficientes $A's, B's$ que definem a solução u_p ainda precisam ser determinados. Substituimos agora u_p e f na equação diferencial,

$$
\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sen^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = -f(r,\theta,\varphi) \,.
$$

Calculando as derivadas de u_p,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_p}{\partial r} &= \sum_{k=0}^{\infty} A'_{0k}(r) P_k(\cos\theta) \\
&\quad + \sum_{n,k=1}^{\infty} A'_{nk}(r) P_k^m(\cos\theta)\cos(n\varphi) \\
&\quad + \sum_{n,k=1}^{\infty} B'_{nk}(r) P_k^m(\cos\theta) sen(n\varphi) \,,
\end{aligned}
$$

em que a linha denota derivada em relação a r;

$$\begin{aligned} r^2\frac{\partial u_p}{\partial r} &= \sum_{k=0}^{\infty} r^2 A'_{0k}(r) P_k(\cos\theta) \\ &+ \sum_{n,k=1}^{\infty} r^2 A'_{nk}(r) P_k^m(\cos\theta)\cos(n\varphi) \\ &+ \sum_{n,k=1}^{\infty} r^2 B'_{nk}(r) P_k^m(\cos\theta) sen(n\varphi)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u_p}{\partial r}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty}[2rA'_{0k}(r) + r^2 A''_{0k}(r)] P_k(\cos\theta) \\ &+ \sum_{n,k=1}^{\infty} [2rA'_{nk}(r) + r^2 A''_{nk}(r)] P_k^m(\cos\theta)\cos(n\varphi) \\ &+ \sum_{n,k=1}^{\infty} [2rB'_{nk}(r) + r^2 B''_{nk}(r)] P_k^m(\cos\theta) sen(n\varphi)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u_p}{\partial r}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{2}{r}A'_{0k}(r) + A''_{0k}(r)\right] P_k(\cos\theta) \\ &+ \sum_{n,k=1}^{\infty}\left[\frac{2}{r}A'_{nk}(r) + A''_{nk}(r)\right] P_k^m(\cos\theta)\cos(n\varphi) \\ &+ \sum_{n,k=1}^{\infty}\left[\frac{2}{r}B'_{nk}(r) + B''_{nk}(r)\right] P_k^m(\cos\theta) sen(n\varphi)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_p}{\partial \theta} &= \sum_{k=0}^{\infty} A_{0k}(r)\frac{d}{d\theta}P_k(\cos\theta) \\ &+ \sum_{n,k=1}^{\infty} A_{nk}(r)\cos(n\varphi)\frac{d}{d\theta}P_k^m(\cos\theta) \\ &+ \sum_{n,k=1}^{\infty} B_{nk}(r) sen(n\varphi)\frac{d}{d\theta}P_k^m(\cos\theta)\,, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
sen\,\theta\frac{\partial u_p}{\partial\theta} &= \sum_{k=0}^{\infty} A_{0k}(r)sen\,\theta\frac{d}{d\theta}P_k(\cos\theta) \\
&+ \sum_{n,k=1}^{\infty} A_{nk}(r)\cos(n\varphi)sen\,\theta\frac{d}{d\theta}P_k^m(\cos\theta) \\
&+ \sum_{n,k=1}^{\infty} B_{nk}(r)sen(n\varphi)sen\,\theta\frac{d}{d\theta}P_k^m(\cos\theta)\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\,\theta\frac{\partial u_p}{\partial\theta}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} A_{0k}(r)\frac{d}{d\theta}\left[sen\,\theta\frac{d}{d\theta}P_k(\cos\theta)\right] \\
&+ \sum_{n,k=1}^{\infty} A_{nk}(r)\cos(n\varphi)\frac{d}{d\theta}\left[sen\,\theta\frac{d}{d\theta}P_k^m(\cos\theta)\right] \\
&+ \sum_{n,k=1}^{\infty} B_{nk}(r)sen(n\varphi)\frac{d}{d\theta}\left[sen\,\theta\frac{d}{d\theta}P_k^m(\cos\theta)\right]\,.
\end{aligned}
$$

Usando agora,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta}\left[sen\,\theta\frac{d}{d\theta}P_k(\cos\theta)\right] &= -k(k+1)sen\,\theta P_k(\cos\theta)\,, \\
\frac{d}{d\theta}\left[sen\,\theta\frac{d}{d\theta}P_k^m(\cos\theta)\right] &= -\left[k(k+1)sen\,\theta - \frac{m^2}{sen\,\theta}\right]P_k^m(\cos\theta)\,,
\end{aligned}
$$

temos,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\,\theta\frac{\partial u_p}{\partial\theta}\right) &= -\sum_{k=0}^{\infty} A_{0k}(r)k(k+1)sen\,\theta P_k(\cos\theta) \\
&- \sum_{n,k=1}^{\infty} A_{nk}(r)\cos(n\varphi)\left[k(k+1)sen\,\theta - \frac{m^2}{sen\,\theta}\right]P_k^m(\cos\theta) \\
&- \sum_{n,k=1}^{\infty} B_{nk}(r)sen(n\varphi)\left[k(k+1)sen\,\theta - \frac{m^2}{sen\,\theta}\right]P_k^m(\cos\theta)\,,
\end{aligned}
$$

e,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r^2 sen\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\,\theta\frac{\partial u_p}{\partial\theta}\right) &= -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_{0k}(r)}{r^2}k(k+1)P_k(\cos\theta) \\
&\quad -\sum_{n,k=1}^{\infty}\frac{A_{nk}(r)}{r^2}\cos(n\varphi)\left[k(k+1)-\frac{m^2}{sen^2\,\theta}\right]P_k^m(\cos\theta) \\
&\quad -\sum_{n,k=1}^{\infty}\frac{B_{nk}(r)}{r^2}sen(n\varphi)\left[k(k+1)-\frac{m^2}{sen^2\,\theta}\right]P_k^m(\cos\theta)\,.
\end{aligned}
$$

Continuando,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_p}{\partial\varphi^2} &= -\sum_{n,k=1}^{\infty}n^2 A_{nk}(r)P_k^m(\cos\theta)\cos(n\varphi) \\
&\quad -\sum_{n,k=1}^{\infty}n^2 B_{nk}(r)P_k^m(\cos\theta)sen(n\varphi)\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r^2 sen^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} &= -\sum_{n,k=1}^{\infty}\frac{1}{r^2 sen^2\theta}n^2 A_{nk}(r)P_k^m(\cos\theta)\cos(n\varphi) \\
&\quad -\sum_{n,k=1}^{\infty}\frac{1}{r^2 sen^2\theta}n^2 B_{nk}(r)P_k^m(\cos\theta)sen(n\varphi)\,.
\end{aligned}
$$

A equação diferencial fica portanto,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r^2 sen^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=-f(r,\theta,\varphi)\,,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{2}{r}A'_{0k}(r)+A''_{0k}(r)\right]P_k(\cos\theta)$$

$$+\sum_{n,k=1}^{\infty}\left[\frac{2}{r}A'_{nk}(r)+A''_{nk}(r)\right]P_k^m(\cos\theta)\cos(n\varphi)$$

$$+\sum_{n,k=1}^{\infty}\left[\frac{2}{r}B'_{nk}(r)+B''_{nk}(r)\right]P_k^m(\cos\theta)sen(n\varphi)$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_{0k}(r)}{r^2}k(k+1)P_k(\cos\theta)$$

$$-\sum_{n,k=1}^{\infty}\frac{A_{nk}(r)}{r^2}\cos(n\varphi)\left[k(k+1)-\frac{m^2}{sen^2\theta}\right]P_k^m(\cos\theta)$$

$$-\sum_{n,k=1}^{\infty}\frac{B_{nk}(r)}{r^2}sen(n\varphi)\left[k(k+1)-\frac{m^2}{sen^2\theta}\right]P_k^m(\cos\theta)$$

$$-\sum_{n,k=1}^{\infty}\frac{1}{r^2 sen^2\theta}n^2A_{nk}(r)P_k^m(\cos\theta)\cos(n\varphi)$$

$$-\sum_{n,k=1}^{\infty}\frac{1}{r^2 sen^2\theta}n^2B_{nk}(r)P_k^m(\cos\theta)sen(n\varphi)=$$

$$=-\sum_{k=0}^{\infty}C_{0k}(r)P_k(\cos\theta)$$

$$-\sum_{n,k=1}^{\infty}C_{nk}(r)P_k^m(\cos\theta)\cos(n\varphi)$$

$$-\sum_{n,k=1}^{\infty}D_{nk}(r)P_k^m(\cos\theta)sen(n\varphi)\,.$$

Igualando os coeficientes dos dois lados da equação acima,

$$\frac{2}{r}A'_{0k}(r) + A''_{0k}(r) - \frac{A_{0k}(r)}{r^2}k(k+1) = -C_{0k}(r)\,,$$
$$\frac{2}{r}A'_{nk}(r) + A''_{nk}(r) - \frac{A_{nk}(r)}{r^2}\left[k(k+1) - \frac{m^2}{sen^2\,\theta}\right]$$
$$-\frac{1}{r^2 sen^2\theta}n^2 A_{nk}(r) = -C_{nk}(r)\,,$$
$$\frac{2}{r}B'_{nk}(r) + B''_{nk}(r) - \frac{B_{nk}(r)}{r^2}\left[k(k+1) - \frac{m^2}{sen^2\,\theta}\right]$$
$$-\frac{1}{r^2 sen^2\theta}n^2 B_{nk}(r) = -D_{nk}(r)\,.$$

Escolhendo $m = n$ nas duas últimas equações,

$$\frac{2}{r}A'_{0k}(r) + A''_{0k}(r) - \frac{A_{0k}(r)}{r^2}k(k+1) = -C_{0k}(r)\,,$$
$$\frac{2}{r}A'_{nk}(r) + A''_{nk}(r) - \frac{A_{nk}(r)}{r^2}k(k+1) = -C_{nk}(r)\,,$$
$$\frac{2}{r}B'_{nk}(r) + B''_{nk}(r) - \frac{B_{nk}(r)}{r^2}k(k+1) = -D_{nk}(r)\,.$$

Obtemos assim três equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, não-homogêneas, idênticas, na forma,

$$\frac{2}{x}y'(x) + y''(x) - \frac{y(x)}{x^2}k(k+1) = -g(x)\,,$$

ou,

$$x^2 y''(x) + 2xy'(x) - y(x)k(k+1) = -x^2 g(x)\,.$$

A solução da equação acima pode ser escrita, como vimos, como a soma da solução da equação homogênea e uma solução particular da equação não-homogênea,

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)\,.$$

Vimos que a equação,

$$x^2 y'' + (2l+1)xy' + (\alpha^2 x^{2r} + \beta^2)y = 0\,,$$

em que l, α, r, β são constantes, possui solução,

$$y = x^{-l}[c_1 J_{\kappa/r}(\alpha x^r/r) + c_2 Y_{\kappa/r}(\alpha x^r/r)]\,,$$

e $\kappa = \sqrt{l^2 - \beta^2}$. *Se* $\alpha = 0$ *temos a equação de Euler ou equação de Cauchy, com solução,*

$$y = x^{-l}(c_3 x^{\kappa} + c_4 x^{-\kappa})\,.$$

Em particular, se $\alpha = 0$ *e* $l = 1/2$ *a equação fica,*

$$x^2 y'' + 2xy' + \beta^2 y = 0\,,$$

que é a nossa equação homogênea com $\beta^2 = -k(k+1)$. *A solução da equação acima é assim,*

$$y = x^{-1/2}(c_3 x^{\kappa} + c_4 x^{-\kappa})\,,$$

com $\kappa = \sqrt{(1/4) + k(k+1)} = k + 1/2$. *Logo, renomeando as constantes,*

$$y_h(x) = c_1 x^k + c_2 x^{-k-1}\,.$$

A solução particular é (capítulo 22),

$$y_p(x) = y_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{y_2(x')g(x')}{\Delta(x')} dx' - y_2(x) \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(x')g(x')}{\Delta(x')} dx'\,,$$

com $\Delta = y_1 y_2' - y_1' y_2$ *e* $y_1 = x^k$, $y_2 = x^{-k-1}$. *Calculando* Δ *explicitamente,*

$$\begin{array}{l} \Delta = y_1 y_2' - y_1' y_2 = (-k-1)x^k x^{-k-2} - kx^{k-1}x^{-k-1}\,, \\ \Delta = -(k+1)x^{-2} - kx^{-2} = -(2k+1)x^{-2}\,, \end{array}$$

logo,

$$y_p(x) \;\; = \;\; -\frac{1}{2k+1} x^k \int_{x_0}^{x} x'^{-k+1} g(x') dx' + \frac{1}{2k+1} x^{-k-1} \int_{x_0}^{x} x'^{k+2} g(x') dx'\,.$$

Os coeficientes $A's, B's$ *são então dados por,*

$$\begin{aligned} A_{0k}(r) &= -\frac{1}{2k+1} r^k \int_{r_0}^{r} r'^{-k+1} C_{0k}(r') dr' + \frac{1}{2k+1} r^{-k-1} \int_{r_0}^{r} r'^{k+2} C_{0k}(r') dr'\,, \\ A_{nk}(r) &= -\frac{1}{2k+1} r^k \int_{r_0}^{r} r'^{-k+1} C_{nk}(r') dr' + \frac{1}{2k+1} r^{-k-1} \int_{r_0}^{r} r'^{k+2} C_{nk}(r') dr'\,, \\ B_{nk}(r) &= -\frac{1}{2k+1} r^k \int_{r_0}^{r} r'^{-k+1} D_{nk}(r') dr' + \frac{1}{2k+1} r^{-k-1} \int_{r_0}^{r} r'^{k+2} D_{nk}(r') dr'\,. \end{aligned}$$

A solução u_p é, como vimos (com $m = n$ em cada termo da soma),

$$\begin{aligned} u_p(r,\theta,\varphi) &= \sum_{k=0}^{\infty} A_{0k}(r) P_k(\cos\theta) \\ &+ \sum_{n,k=1}^{\infty} A_{nk}(r) P_k^n(\cos\theta)\cos(n\varphi) \\ &+ \sum_{n,k=1}^{\infty} B_{nk}(r) P_k^n(\cos\theta) sen(n\varphi)\,. \end{aligned}$$

Os coeficientes $A's, B's$ são determinados em função dos coeficientes $C's, D's$, que dependem de f. Explicitamente,

$$\begin{aligned} f(r,\theta,\varphi) &= \sum_{k=0}^{\infty} C_{0k}(r) P_k(\cos\theta) \\ &+ \sum_{n,k=1}^{\infty} C_{nk}(r) P_k^n(\cos\theta)\cos(n\varphi) \\ &+ \sum_{n,k=1}^{\infty} D_{nk}(r) P_k^n(\cos\theta) sen(n\varphi)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{0k}(r) &= \frac{2k+1}{2}\int_0^{\pi} \frac{c_0(r,\theta')}{2} P_k(\cos\theta') sen\,\theta'\,d\theta'\,, \\ &= \frac{2k+1}{2}\int_0^{\pi} P_k(\cos\theta') sen\,\theta'\,d\theta' \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\theta',\varphi')\,d\varphi'\,, \\ C_{nk}(r) &= \frac{(2k+1)(k-n)!}{2(k+n)!}\int_0^{\pi} c_n(r,\theta') P_k^n(\cos\theta') sen\,\theta'\,d\theta'\,, \\ &= \frac{(2k+1)(k-n)!}{2(k+n)!}\int_0^{\pi} P_k^n(\cos\theta') sen\,\theta'\,d\theta' \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\theta',\varphi')\cos(n\varphi')d\varphi'\,, \\ D_{nk}(r) &= \frac{(2k+1)(k-n)!}{2(k+n)!}\int_0^{\pi} d_n(r,\theta') P_k^n(\cos\theta') sen\,\theta'\,d\theta'\,, \\ &= \frac{(2k+1)(k-n)!}{2(k+n)!}\int_0^{\pi} P_k^n(\cos\theta') sen\,\theta'\,d\theta' \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\theta',\varphi') sen(n\varphi')\,d\varphi'\,. \end{aligned}$$

Consideremos o caso particular em que $f = f_0$ constante. Temos,

$$
\begin{aligned}
C_{0k}(r) &= \frac{2k+1}{2}\int_0^{\pi} P_k(\cos\theta') sen\,\theta'\, d\theta' \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\theta',\varphi')\, d\varphi'\,, \\
&= \frac{2k+1}{2}\int_0^{\pi} P_k(\cos\theta') sen\,\theta'\, d\theta' \frac{1}{2\pi} f_0 \int_0^{2\pi} d\varphi'\,, \\
&= \frac{2k+1}{2}\int_0^{\pi} P_k(\cos\theta') sen\,\theta'\, d\theta' \frac{1}{2\pi} f_0 2\pi\,, \\
C_{nk}(r) &= \frac{(2k+1)(k-m)!}{2(k+m)!}\int_0^{\pi} P_k^n(\cos\theta') sen\,\theta'\, d\theta' \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\theta',\varphi')\cos(n\varphi') d\varphi'\,, \\
&= \frac{(2k+1)(k-m)!}{2(k+m)!}\int_0^{\pi} P_k^n(\cos\theta') sen\,\theta'\, d\theta' \frac{1}{\pi} f_0 \int_0^{2\pi} \cos(n\varphi') d\varphi' = 0\,, \\
D_{nk}(r) &= \frac{(2k+1)(k-m)!}{2(k+m)!}\int_0^{\pi} P_k^n(\cos\theta') sen\,\theta'\, d\theta' \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\theta',\varphi') sen(n\varphi')\, d\varphi'\,, \\
&= \frac{(2k+1)(k-m)!}{2(k+m)!}\int_0^{\pi} P_k^n(\cos\theta') sen\,\theta'\, d\theta' \frac{1}{\pi} f_0 \int_0^{2\pi} sen(n\varphi')\, d\varphi' = 0\,.
\end{aligned}
$$

Apenas C_{0k} é diferente de zero,

$$
C_{0k}(r) = \frac{2k+1}{2} f_0 \int_0^{\pi} P_k(\cos\theta') sen\,\theta'\, d\theta'\,.
$$

Calculando a integral acima temos,

$$
I_k \equiv \int_0^{\pi} P_k(\cos\theta') sen\,\theta'\, d\theta' = \int_{-1}^{1} P_k(x) dx = \begin{cases} 2\,, & k = 0\,, \\ 0\,, & k = 1, 2, \ldots \end{cases}
$$

O único coeficiente não nulo é então para $k = 0$,

$$
C_{00}(r) = \frac{1}{2} f_0 \int_0^{\pi} P_0(\cos\theta') sen\,\theta'\, d\theta' = f_0\,,
$$

e na solução u_p o único coeficiente não nulo é A_{00},

$$
\begin{aligned}
A_{00}(r) &= -\int_{r_0}^{r} r' C_{00}(r') dr' + r^{-1}\int_{r_0}^{r} r'^2 C_{00}(r') dr'\,, \\
&= -f_0 \int_{r_0}^{r} r' dr' + r^{-1} f_0 \int_{r_0}^{r} r'^2 dr'\,, \\
&= -f_0 \left[\frac{r'^2}{2}\right]_{r_0}^{r} + r^{-1} f_0 \left[\frac{r'^3}{3}\right]_{r_0}^{r}\,, \\
&= -\frac{f_0}{2}(r^2 - r_0^2) + \frac{f_0}{3r}(r^3 - r_0^3)\,.
\end{aligned}
$$

A solução fica então,

$$u_p(r,\theta,\varphi) \;=\; A_{00}(r)P_0(\cos\theta) = -\frac{f_0}{2}(r^2-r_0^2)+\frac{f_0}{3r}(r^3-r_0^3)\,.$$

Notemos que u_p depende apenas de r nesse caso, e escolhendo $r_0 = a$ temos condições de contorno homogêneas. Vamos verificar que u_p satisfaz a equação diferencial,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du_p}{dr}\right) = -f(r,\theta,\varphi)\,,\\
&\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(-\frac{f_0}{3}(r^3-r_0^3)\right) = -f_0\,,\\
&\frac{1}{r^2}\left(-f_0 r^2\right) = -f_0\,,\\
&-f_0 = -f_0\,,
\end{aligned}$$

como deve ser.

6. Encontre a solução $u(r,\theta,\varphi)$ para as equações:

(a)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = -f(r,\theta,\varphi)\,;$$

(b)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = +\alpha^2\,;$$

com α constante,

(c)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = -\alpha^2\,;$$

com α constante,

(d)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = +\alpha^2 u\,;$$

com α constante,

(e)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\text{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=-\alpha^2 u\,;$$

com α constante e,

$$\begin{aligned}&a\le r\le b\,,\\ &u(a,\theta,\varphi)=\mu(\theta,\varphi)\,,\quad u(b,\theta,\varphi)=\nu(\theta,\varphi)\,.\end{aligned}$$

7. Uma esfera oca de raio a possui potencial dado por,

$$v(a,\theta)=\begin{cases}v_0 & 0\le\theta\le\pi/2\,,\\ v_1 & \pi/2\le\theta\le\pi\,.\end{cases}$$

Determine o potencial v no interior e no exterior da esfera (Spiegel [7], probl. 7.18, com $v_1=0$).

No interior da esfera, $0\le r\le a$, temos,

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n r^n P_n(\cos\theta)\,.$$

Em $r=a$,

$$u(a,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n a^n P_n(\cos\theta)=\begin{cases}v_0 & 0\le\theta\le\pi/2\,,\\ v_1 & \pi/2\le\theta\le\pi\,.\end{cases}$$

Temos uma série em polinômios de Legendre, logo,

$$\begin{aligned}A_n a^n \;&=\; \frac{2n+1}{2}v_0\int_0^{\pi/2}P_n(\cos\theta)sen\,\theta\,d\theta\\ &\quad+\frac{2n+1}{2}v_1\int_{\pi/2}^{\pi}P_n(\cos\theta)sen\,\theta\,d\theta\end{aligned}$$

Calculando alguns coeficientes obtemos,

$$A_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v_1)\,,$$
$$A_1 = \frac{3}{4a}(v_0 - v_1)\,,$$
$$A_2 = 0\,,$$
$$A_3 = \frac{7}{16a^3}(v_1 - v_0)\,,$$
$$A_4 = 0\,,$$
$$A_5 = \frac{11}{32a^5}(v_0 - v_1)\,,$$
$$\ldots$$

Em $\theta = \pi/2$ temos $x = \cos\theta = 0$, e $P_n(x) = 0$ para n ímpar, logo,

$$u(r, \pi/2) = A_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v_1)\,.$$

No exterior da esfera, em $a \leq r \leq \infty$, temos,

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta)\,.$$

Em $r = a$,

$$u(a, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{a^{n+1}} P_n(\cos\theta) = \begin{cases} v_0 & 0 \leq \theta \leq \pi/2\,, \\ v_1 & \pi/2 \leq \theta \leq \pi\,. \end{cases}$$

Temos uma série em polinômios de Legendre como antes, logo,

$$\begin{aligned} \frac{B_n}{a^{n+1}} &= \frac{2n+1}{2} v_0 \int_0^{\pi/2} P_n(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta \\ &\quad + \frac{2n+1}{2} v_1 \int_{\pi/2}^{\pi} P_n(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta \end{aligned}$$

Vemos que,

$$\frac{B_n}{a^{n+1}} = A_n a^n\,,$$

ou,

$$B_n = A_n a^{2n+1}\,.$$

Alguns coeficientes são,

$$
\begin{aligned}
&B_0 = \frac{a}{2}(v_0 + v_1)\,, \\
&B_1 = \frac{3a^2}{4}(v_0 - v_1)\,, \\
&B_2 = 0\,, \\
&B_3 = \frac{7a^4}{16}(v_1 - v_0)\,, \\
&B_4 = 0\,, \\
&B_5 = \frac{11a^6}{32}(v_0 - v_1)\,, \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Em $\theta = \pi/2$,

$$
u(r, \pi/2) = \frac{B_0}{a} = \frac{1}{2}(v_0 + v_1)\,.
$$

Se $v_0 = v_1$,

$$
u(r,\theta) = \begin{cases} v_0\,, & r \le a\,, \\ v_0 \dfrac{a}{r}\,, & r \ge a\,. \end{cases}
$$

Se $v_1 = -v_0$,

$$
\begin{aligned}
&A_0 = 0\,, \\
&A_1 = \frac{3}{2a} v_0\,, \\
&A_2 = 0\,, \\
&A_3 = -\frac{7}{8a^3} v_0\,, \\
&A_4 = 0\,, \\
&A_5 = \frac{11}{16a^5} v_0\,, \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

e o potencial interior é,

$$
\begin{aligned}
u(r,\theta) \;\; = \;\; & \frac{3r}{2a} v_0 P_1(\cos\theta) - \frac{7r^3}{8a^3} v_0 P_3(\cos\theta) \\
& + \frac{11r^5}{16a^5} v_0 P_5(\cos\theta) + \ldots\,, \quad r \le a\,.
\end{aligned}
$$

Temos $u(r,\pi/2)=0$. *Em* $r \geq a$ *temos,*

$$\begin{aligned}
&B_0 = 0\,, \\
&B_1 = \frac{3a^2}{2} v_0\,, \\
&B_2 = 0\,, \\
&B_3 = -\frac{7a^4}{8} v_0\,, \\
&B_4 = 0\,, \\
&B_5 = \frac{11a^6}{16} v_0\,, \\
&\ldots
\end{aligned}$$

e o potencial exterior é,

$$\begin{aligned}
u(r,\theta) &= \frac{3a^2}{2r^2} v_0 P_1(\cos\theta) - \frac{7a^4}{8r^4} v_0 P_3(\cos\theta) \\
&\quad + \frac{11a^6}{16r^6} v_0 P_5(\cos\theta) + \ldots
\end{aligned}$$

Temos $u(r,\pi/2)=0$ *também.*

8. Um hemisfério de raio a possui potencial igual a v_0 em $r=a$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, e igual a v_1 na base definida por $0 \leq r \leq a$, $\theta = \pi/2$,

$$v(r,\theta) = \begin{cases} v_0 & , \;\; r = a\,, \;\; 0 \leq \theta \leq \pi/2\,, \\ v_1 & , \;\; 0 \leq r \leq a\,, \;\; \theta = \pi/2\,. \end{cases}$$

Determine o potencial v no interior e no exterior do hemisfério (Spiegel [7], probl. 7.19, com $v_1 = 0$).

Podemos resolver esse problema considerando uma esfera com potencial dado na superfície $r=a$ *por,*

$$v(a,\theta) = \begin{cases} v_0 & , \;\; 0 \leq \theta \leq \pi/2\,, \\ v_2 & , \;\; \pi/2 \leq \theta \leq \pi\,, \end{cases}$$

com $v_2 = 2v_1 - v_0$. *Em* $\theta = \pi/2$, *na base do hemisfério, o potencial é,*

$$\frac{v_0 + v_2}{2} = v_1\,,$$

como esperado.

Usando o resultado do problema 1, com v_1 substituído por v_2, escrevemos a solução como,

$$u(r,\theta) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta)\,, & 0 \le r \le a\,, \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta)\,, & r \ge a\,, \end{cases}$$

com,

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{2}(v_0 + v_2)\,, \\
A_1 &= \frac{3}{4a}(v_0 - v_2)\,, \\
A_2 &= 0\,, \\
A_3 &= \frac{7}{16a^3}(v_2 - v_0)\,, \\
A_4 &= 0\,, \\
A_5 &= \frac{11}{32a^5}(v_0 - v_2)\,, \\
&\dots
\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}
B_0 &= \frac{a}{2}(v_0 + v_2)\,, \\
B_1 &= \frac{3a^2}{4}(v_0 - v_2)\,, \\
B_2 &= 0\,, \\
B_3 &= \frac{7a^4}{16}(v_2 - v_0)\,, \\
B_4 &= 0\,, \\
B_5 &= \frac{11a^6}{32}(v_0 - v_2)\,, \\
&\dots
\end{aligned}$$

Como $v_0 + v_2 = 2v_1$, $v_0 - v_2 = 2(v_0 - v_1)$, o potencial interior é,

$$\begin{aligned}
u(r,\theta) \;=\;& v_1 P_0(\cos\theta) + \frac{3}{2}(v_0 - v_1)\frac{r}{a}P_1(\cos\theta) \\
& -\frac{7}{8}(v_0 - v_1)\frac{r^3}{a^3}P_3(\cos\theta) + \frac{11}{16}(v_0 - v_1)\frac{r^5}{a^5}P_5(\cos\theta) + \dots\,, \\
& 0 \le r \le a\,,
\end{aligned}$$

e o potencial exterior é,

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= v_1 \frac{a}{r} P_0(\cos\theta) + \frac{3}{2}(v_0 - v_1)\frac{a^2}{r^2} P_1(\cos\theta) \\ &\quad - \frac{7}{8}(v_0 - v_1)\frac{a^4}{r^4} P_3(\cos\theta) + \frac{11}{16}(v_0 - v_1)\frac{a^6}{r^6} P_5(\cos\theta) + \dots \\ &\quad r \geq a \,. \end{aligned}$$

9. Determine o potencial v no interior e no exterior de uma esfera de raio a, quando o potencial na superfície é dado por,

(a) $v_0 \operatorname{sen}\theta$;
(b) $v_0 \operatorname{sen}^2\theta$ (Spiegel [7], probl. 7.49);
(c) $v_0(1 + 3\cos\theta)$ (Spiegel [7], probl. 7.48);
(d) $v_0 \cos\varphi$;
(e) $v_0 \cos^2\varphi$;
(f) $v_0 \operatorname{sen}^3\theta \cos\theta \cos 3\varphi$ (Spiegel [7], probl. 7.63).

Determine o potencial considerando agora as condições acima para a derivada $u' = \partial u/\partial r$ em $r \to a_-$. Em todos os casos considere u contínua.

10. Considere uma região esférica de raio interno a e raio externo b. Determine o potencial v em $a < r < b$ quando,

(a) $v(a) = v_1 \operatorname{sen}\theta$, $v(b) = v_2 \cos\theta$;
(b) $v(a) = v_1 \operatorname{sen}\theta \cos\varphi$, $v(b) = v_2 \cos\theta \operatorname{sen}\varphi$.

11. Considere um círculo de massa m e raio a, com distribuição uniforme de massa. (a) Calcule o potencial gravitacional sobre o eixo do círculo. (b) Calcule o potencial gravitacional em qualquer ponto do espaço (Spiegel [7], probl. 7.20).

(a) A densidade linear de massa é $\lambda = m/2\pi a$. O potencial gravitacional em um ponto P sobre o eixo z, devido a um elemento de massa dm do círculo, é,

$$dV = \frac{Gdm}{r} \,,$$

em que G é a constante universal da gravitação, e r é a distância do elemento de massa dm ao ponto P. Como $r^2 = z^2 + a^2$ e $dm = \lambda ds = \lambda a d\boldsymbol{\varphi}$,

$$dV = \frac{G\lambda a d\boldsymbol{\varphi}}{\sqrt{z^2 + a^2}} \,.$$

O potencial em P é então,

$$V = \frac{2\pi G\lambda a}{\sqrt{z^2 + a^2}} \,, \quad P = (0, 0, z) \,.$$

(b) Vamos agora calcular o potencial em qualquer ponto do espaço. Temos,

$$V(r,\theta) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta) & r < a\,, \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta) & r > a\,. \end{cases}$$

Consideramos primeiro o caso $r < a$. Em $\theta = 0$, temos $r = z$, e como $P_n(1) = 1$,

$$\frac{2\pi G\lambda a}{\sqrt{z^2 + a^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n\,, \quad z < a\,.$$

Reescrevendo a expressão acima,

$$\frac{2\pi G\lambda a}{a\sqrt{1 + (z/a)^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n\,.$$

Usando agora a expansão,

$$\begin{aligned}(1+x)^{-1/2} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 \\ &\quad + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \ldots\,, \quad x < 1\,,\end{aligned}$$

temos,

$$\begin{aligned}(1+x^2)^{-1/2} &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 \\ &\quad + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^8 \ldots\,, \quad x < 1\,.\end{aligned}$$

Portanto,

$$2\pi G\lambda \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a}\right)^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{z}{a}\right)^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{z}{a}\right)^6 \right.$$
$$\left. + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\left(\frac{z}{a}\right)^8 \ldots\right] = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n\,.$$

Os coeficientes A_n são então,

$$
\begin{aligned}
&A_0 = 2\pi G\lambda\,,\\
&A_1 = 0\,,\\
&A_2 = -2\pi G\lambda\frac{1}{2}\frac{1}{a^2}\,,\\
&A_3 = 0\,,\\
&A_4 = 2\pi G\lambda\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{a^4}\,,\\
&A_5 = 0\,,\\
&A_6 = -2\pi G\lambda\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{1}{a^6}\,,\\
&A_7 = 0\,,\\
&A_8 = 2\pi G\lambda\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\frac{1}{a^8}\,,\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

e temos,

$$
\begin{aligned}
V(r,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta)\,,\\
&= 2\pi G\lambda\left[1 - \frac{1}{2}\frac{r^2}{a^2}P_2(\cos\theta) + \frac{3}{8}\frac{r^4}{a^4}P_4(\cos\theta)\right.\\
&\left. -\frac{5}{16}\frac{r^6}{a^6}P_6(\cos\theta) + \frac{35}{128}\frac{r^8}{a^8}P_8(\cos\theta)\ldots\right]\,,\quad r < a\,.
\end{aligned}
$$

A fórmula geral para A_n é,

$$
\begin{aligned}
&A_{2n} = 2\pi G\lambda(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\frac{1}{a^{2n}}\,,\\
&A_{2n+1} = 0\,,\quad n = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

O potencial em $r < a$ é assim,

$$
V = 2\pi G\lambda\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n}P_{2n}(\cos\theta)\,,\quad r < a\,.
$$

Considerando agora o caso $r > a$, escrevemos de forma análoga em $\theta = 0$,

$$
\frac{2\pi G\lambda a}{\sqrt{z^2+a^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{z^{n+1}}\,,\quad z > a\,.
$$

Reescrevendo a expressão acima,

$$\frac{2\pi G\lambda a}{z\sqrt{1+(a/z)^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{z^{n+1}}\,.$$

Portanto,

$$2\pi G\lambda \frac{a}{z}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{z}\right)^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{a}{z}\right)^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{a}{z}\right)^6 \right.$$
$$\left. + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\left(\frac{a}{z}\right)^8 \ldots\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{z^{n+1}}\,,$$

ou,

$$2\pi G\lambda \left[\frac{a}{z} - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{z}\right)^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{a}{z}\right)^5 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{a}{z}\right)^7 + \right.$$
$$\left. + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\left(\frac{a}{z}\right)^9 + \ldots\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{z^{n+1}}\,.$$

Os coeficientes B_n são então,

$$\begin{aligned}
&B_0 = 2\pi G\lambda a\,,\\
&B_1 = 0\,,\\
&B_2 = -2\pi G\lambda \frac{1}{2} a^3\,,\\
&B_3 = 0\,,\\
&B_4 = 2\pi G\lambda \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} a^5\,,\\
&B_5 = 0\,,\\
&B_6 = -2\pi G\lambda \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} a^7\,,\\
&B_7 = 0\,,\\
&B_8 = 2\pi G\lambda \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} a^9\,,\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Temos então, em $r > a$,

$$
\begin{aligned}
V(r,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta)\,, \\
&= 2\pi G\lambda \left[\frac{a}{r} - \frac{1}{2}\frac{a^3}{r^3} P_2(\cos\theta) + \frac{3}{8}\frac{a^5}{r^5} P_4(\cos\theta) \right. \\
&\left. -\frac{5}{16}\frac{a^7}{r^7} P_6(\cos\theta) + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\frac{a^9}{r^9} P_8(\cos\theta) + \ldots \right]\,, \quad r > a\,.
\end{aligned}
$$

A fórmula geral para B_n é,

$$
\begin{aligned}
&B_{2n} = 2\pi G\lambda (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2n!!} a^{2n+1}\,, \\
&B_{2n+1} = 0\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

O potencial em $r > a$ é portanto,

$$
V = 2\pi G\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1} P_{2n}(\cos\theta)\,, \quad r > a\,.
$$

12. Considere um disco de massa m e raio a, com distribuição uniforme de massa. (a) Calcule o potencial gravitacional sobre o eixo do disco. (b) Calcule o potencial gravitacional em qualquer ponto do espaço (Spiegel [7], probl. 7.55). (c) Calcule o potencial para uma faixa de raio interno a e raio externo b. (d) Faça o limite $\delta \to 0$ em $b = a + \delta$ e obtenha o resultado do problema 5.

(a) Para uma faixa de raio r e largura dr sobre o disco, o potencial sobre o eixo z é, usando a expressão para o potencial de um círculo,

$$
dV = \frac{2\pi G r\lambda}{\sqrt{z^2 + r^2}} = \frac{2\pi G r\sigma dr}{\sqrt{z^2 + r^2}}\,,
$$

em que usamos $\lambda = \sigma dr$. Integrando em r de 0 até a,

$$
V = \int dV = 2\pi G\sigma \int_0^a \frac{r\,dr}{\sqrt{z^2 + r^2}} = 2\pi G\sigma(\sqrt{z^2 + a^2} - z)\,,
$$

(b) O potencial em um ponto qualquer é,

$$
V = \begin{cases}
\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta)\,, & r < a\,, \\
\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta)\,, & r > a\,.
\end{cases}
$$

Sobre o eixo z temos $\theta = 0$, logo, como nesse caso $r = z$ e $P_n(1) = 1$,

$$V = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \,, & z < a \,, \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{z^{n+1}} \,, & z > a \,. \end{cases}$$

Portanto, em $z < a$,

$$2\pi G\sigma(\sqrt{z^2 + a^2} - z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \,, \quad z < a \,.$$

Usando a relação,

$$(1 + x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \ldots$$

temos,

$$\begin{aligned} &2\pi G\sigma a \left(1 + \frac{1}{2}\frac{z^2}{a^2} - \frac{1}{2 \cdot 4}\frac{z^4}{a^4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{z^6}{a^6} \right. \\ &\left. - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\frac{z^8}{a^8} + \ldots - \frac{z}{a}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \,, \quad z < a \,. \end{aligned}$$

Os coeficientes A_n são então,

$$\begin{aligned} A_0 &= 2\pi G\sigma a \,, \\ A_1 &= -2\pi G\sigma \,, \\ A_2 &= \pi G\sigma \frac{1}{a} \,, \\ A_3 &= 0 \,, \\ A_4 &= -\pi G\sigma \frac{1}{4a^3} \,, \\ A_5 &= 0 \,, \\ A_6 &= \pi G\sigma \frac{1}{8a^5} \,, \\ A_7 &= 0 \,, \\ A_8 &= -2\pi G\sigma \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\frac{1}{a^7} \,, \\ &\ldots \end{aligned}$$

e a solução para $r < a$ é,

$$\begin{aligned} V(r,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta)\,, \\ &= 2\pi G\sigma a \left[1 - \frac{r}{a}P_1(\cos\theta) + \frac{r^2}{2a^2}P_2(\cos\theta) - \frac{r^4}{8a^4}P_4(\cos\theta)\right. \\ &\quad \left. + \frac{r^6}{16a^6}P_6(\cos\theta) - \frac{5r^8}{128a^8}P_8(\cos\theta) + \ldots\right]\,, \quad r < a\,. \end{aligned}$$

Considerando agora $z > a$, temos,

$$2\pi G\sigma(\sqrt{z^2+a^2} - z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{z^{n+1}}\,, \quad z > a\,,$$

ou,

$$\begin{aligned} &2\pi G\sigma a \left(\frac{a}{2z} - \frac{a^3}{8z^3} + \frac{a^5}{16z^5} - \frac{5a^7}{128z^7}\right. \\ &\left. + \ldots - 1\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{z^{n+1}}\,, \quad z > a\,. \end{aligned}$$

Os coeficientes B_n são então,

$$\begin{aligned} &B_0 = \pi G\sigma a^2\,, \\ &B_1 = 0\,, \\ &B_2 = -\pi G\sigma \frac{a^4}{4}\,, \\ &B_3 = 0\,, \\ &B_4 = \pi G\sigma \frac{a^6}{8}\,, \\ &B_5 = 0\,, \\ &B_6 = -\pi G\sigma \frac{5a^8}{64}\,, \\ &\ldots \end{aligned}$$

e a solução em $r > a$ é,

$$
\begin{aligned}
V(r,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta)\,, \\
&= 2\pi G\sigma a \left[\frac{a}{2r} - \frac{a^3}{8r^3} P_2(\cos\theta) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a^5}{16r^5} P_4(\cos\theta) - \frac{5a^7}{128r^7} P_6(\cos\theta) + \ldots \right]\,, \quad r > a\,.
\end{aligned}
$$

(c) Consideramos agora uma faixa de raio interno a e raio externo b. Primeiro escrevemos o potencial para um disco de raio b,

$$
\begin{aligned}
V(r,\theta) &= 2\pi G\sigma b \left[1 - \frac{r}{b} P_1(\cos\theta) + \frac{r^2}{2b^2} P_2(\cos\theta) \right. \\
&\quad \left. - \frac{r^4}{8b^4} P_4(\cos\theta) + \frac{r^6}{18b^6} P_6(\cos\theta) + \ldots \right]\,, \quad r < b\,, \\
V(r,\theta) &= 2\pi G\sigma b \left[\frac{b}{2r} - \frac{b^3}{8r^3} P_2(\cos\theta) \right. \\
&\quad \left. + \frac{b^5}{16r^5} P_4(\cos\theta) - \frac{5b^7}{128r^7} P_6(\cos\theta) + \ldots \right]\,, \quad r > b\,.
\end{aligned}
$$

Precisamos subtrair o potencial de um disco de raio a,

$$
\begin{aligned}
V(r,\theta) &= 2\pi G\sigma a \left[1 - \frac{r}{a} P_1(\cos\theta) + \frac{r^2}{2a^2} P_2(\cos\theta) \right. \\
&\quad \left. - \frac{r^4}{8a^4} P_4(\cos\theta) + \frac{r^6}{16a^6} P_6(\cos\theta) + \ldots \right]\,, \quad r < a\,, \\
V(r,\theta) &= 2\pi G\sigma a \left[\frac{a}{2r} - \frac{a^3}{8r^3} P_2(\cos\theta) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a^5}{16r^5} P_4(\cos\theta) - \frac{5a^7}{128r^7} P_6(\cos\theta) + \ldots \right]\,, \quad r > a\,.
\end{aligned}
$$

O potencial resultante é então, em $r < a$,

$$
\begin{aligned}
V(r,\theta) &= 2\pi G\sigma b\left[1-\frac{r}{b}P_1(\cos\theta)+\frac{r^2}{2b^2}P_2(\cos\theta)\right.\\
&\left.-\frac{r^4}{8b^4}P_4(\cos\theta)+\frac{r^6}{16b^6}P_6(\cos\theta)+\ldots\right]\\
&-2\pi G\sigma a\left[1-\frac{r}{a}P_1(\cos\theta)+\frac{r^2}{2a^2}P_2(\cos\theta)\right.\\
&\left.-\frac{r^4}{8a^4}P_4(\cos\theta)+\frac{r^6}{16a^6}P_6(\cos\theta)+\ldots\right]\,,\quad r<a\,.
\end{aligned}
$$

Em $a<r<b$ temos,

$$
\begin{aligned}
V(r,\theta) &= 2\pi G\sigma b\left[1-\frac{r}{b}P_1(\cos\theta)+\frac{r^2}{2b^2}P_2(\cos\theta)\right.\\
&\left.-\frac{r^4}{8b^4}P_4(\cos\theta)+\frac{r^6}{16b^6}P_6(\cos\theta)+\ldots\right]\\
&-2\pi G\sigma a\left[\frac{a}{2r}-\frac{a^3}{8r^3}P_2(\cos\theta)\right.\\
&\left.+\frac{a^5}{16r^5}P_4(\cos\theta)-\frac{5a^7}{128r^7}P_6(\cos\theta)+\ldots\right]\,,\quad a<r<b\,.
\end{aligned}
$$

Finalmente, em $r>b$ temos,

$$
\begin{aligned}
V(r,\theta) &= 2\pi G\sigma b\left[\frac{b}{2r}-\frac{b^3}{8r^3}P_2(\cos\theta)\right.\\
&\left.+\frac{b^5}{16r^5}P_4(\cos\theta)-\frac{5b^7}{128r^7}P_6(\cos\theta)+\ldots\right]\\
&-2\pi G\sigma a\left[\frac{a}{2r}-\frac{a^3}{8r^3}P_2(\cos\theta)\right.\\
&\left.+\frac{a^5}{16r^5}P_4(\cos\theta)-\frac{5a^7}{128r^7}P_6(\cos\theta)+\ldots\right]\,,\quad r>b\,.
\end{aligned}
$$

(d) Fazemos agora no resultado anterior $b=a+\delta$. Em $r<a$,

$$
\begin{aligned}
V(r,\theta) &= 2\pi G\sigma(a+\delta)\left[1-\frac{r}{a}(1-\delta/a)P_1(\cos\theta)+\frac{r^2}{2a^2}(1-2\delta/a)P_2(\cos\theta)\right.\\
&\quad \left.-\frac{r^4}{8a^4}(1-4\delta/a)P_4(\cos\theta)+\frac{r^6}{16a^6}(1-6\delta/a)P_6(\cos\theta)+\ldots\right]\\
&\quad -2\pi G\sigma a\left[1-\frac{r}{a}P_1(\cos\theta)+\frac{r^2}{2a^2}P_2(\cos\theta)\right.\\
&\quad \left.-\frac{r^4}{8a^4}P_4(\cos\theta)+\frac{r^6}{16a^6}P_6(\cos\theta)+\ldots\right],\\
&= 2\pi G\sigma\delta\left[1-\frac{r^2}{2a^2}P_2(\cos\theta)\right.\\
&\quad \left.+\frac{3r^4}{8a^4}P_4(\cos\theta)-\frac{5r^6}{16a^6}P_6(\cos\theta)+\ldots\right],\quad r<a\,.
\end{aligned}
$$

Em $r>b$, com $b=a+\delta$,

$$
\begin{aligned}
V(r,\theta) &= 2\pi G\sigma(a+\delta)\left[\frac{a+\delta}{2r}-\frac{(a+\delta)^3}{8r^3}P_2(\cos\theta)\right.\\
&\quad \left.+\frac{(a+\delta)^5}{16r^5}P_4(\cos\theta)-\frac{5(a+\delta)^7}{128r^7}P_6(\cos\theta)+\ldots\right]\\
&\quad -2\pi G\sigma a\left[\frac{a}{2r}-\frac{a^3}{8r^3}P_2(\cos\theta)\right.\\
&\quad \left.+\frac{a^5}{16r^5}P_4(\cos\theta)-\frac{5a^7}{128r^7}P_6(\cos\theta)+\ldots\right],\\
&= 2\pi G\sigma\delta\left[\frac{a}{r}-\frac{a^3}{2r^3}P_2(\cos\theta)+\frac{3a^5}{8r^5}P_4(\cos\theta)\right.\\
&\quad \left.-\frac{5a^7}{16r^7}P_6(\cos\theta)+\ldots\right],\quad r>a+\delta\,.
\end{aligned}
$$

No limite $\delta\to 0$ temos um círculo de raio a e densidade linear $\lambda=\sigma\delta$.

13. Uma esfera de raio a e massa M possui distribuição uniforme de massa. Calcule o potencial gravitacional ϕ em todo o espaço (Spiegel [7], probl. 7.51, 7.52).

Em $r<a$ temos o potencial ϕ satisfazendo a equação de Poisson,

$$\nabla^2\phi=4\pi G\rho\,,$$

em que $\rho=M/(4\pi a^3/3)$ é a densidade, nesse caso uniforme. Como $\phi=\phi(r)$, temos,

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right) = 4\pi G\rho\,,$$

logo,

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right) = 4\pi G\rho r^2\,,$$

ou,

$$r^2\frac{d\phi}{dr} = \frac{4\pi G\rho}{3}r^3 + c_0\,.$$

Prosseguindo,

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{4\pi G\rho}{3}r + \frac{c_0}{r^2}\,,$$

portanto,

$$\phi = \frac{2\pi G\rho}{3}r^2 - \frac{c_0}{r} + c_1\,, \quad r < a\,.$$

Para que a solução seja finita em $r = 0$ devemos ter $c_0 = 0$. Em $r > a$,

$$\phi = -\frac{GM}{r}\,,$$

equivalente ao de uma partícula de massa M. A continuidade do potencial em $r = a$ nos dá,

$$\frac{2\pi G\rho}{3}a^2 + c_1 = -\frac{GM}{a}\,,$$

logo,

$$c_1 = -\frac{3GM}{2a}\,.$$

O potencial em $r < a$ é portanto,

$$\phi = \frac{2\pi G\rho}{3}r^2 - \frac{3GM}{2a}\,, \quad r < a\,,$$

ou,

$$\phi = \frac{GM}{2a}\left(\frac{r^2}{a^2} - 3\right)\,, \quad r < a\,.$$

14. Uma casca esférica de raio interno a e raio externo b possui massa M, com distribuição uniforme de massa. Calcule o potencial gravitacional ϕ em todo o espaço (Spiegel [7], probl. 7.54).

Escrevemos agora, usando $\rho = M/(4\pi(b^3 - a^3)/3)$,

$$\phi = \begin{cases} c_0\,, & r < a\,,\\ \dfrac{GMr^2}{2(b^3-a^3)} - \dfrac{c_1}{r} + c_2\,, & a < r < b\,,\\ -\dfrac{GM}{r}\,, & r > b\,. \end{cases}$$

A derivada do potencial é,

$$\frac{d\phi}{dr} = \begin{cases} 0\,, & r < a\,,\\ \dfrac{GMr}{b^3-a^3} + \dfrac{c_1}{r^2}\,, & a < r < b\,,\\ \dfrac{GM}{r^2}\,, & r > b\,. \end{cases}$$

A continuidade do potencial e da derivada em $r = a$ *nos dá,*

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{GMa^2}{2(b^3-a^3)} - \frac{c_1}{a} + c_2\,,\\ \frac{GMb^2}{2(b^3-a^3)} - \frac{c_1}{b} + c_2 &= -\frac{GM}{b}\,,\\ \frac{GMa}{b^3-a^3} + \frac{c_1}{a^2} &= 0\,,\\ \frac{GMb}{b^3-a^3} + \frac{c_1}{b^2} &= \frac{GM}{b^2}\,. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} c_0 &= -\frac{3GM(b^2-a^2)}{2(b^3-a^3)}\,,\\ c_1 &= -\frac{GMa^3}{b^3-a^3}\,,\\ c_2 &= -\frac{3GMb^2}{2(b^3-a^3)}\,. \end{aligned}$$

O potencial é então,

$$
\phi = \begin{cases} -\dfrac{GM}{2(b^3-a^3)} 3(b^2-a^2)\,, & r < a\,, \\ \dfrac{GM}{2(b^3-a^3)}\left(r^2 + \dfrac{2a^3}{r} - 3b^2\right)\,, & a < r < b\,, \\ -\dfrac{GM}{r}\,, & r > b\,, \end{cases}
$$

ou, em termos de ρ,

$$
\phi = \begin{cases} -2\pi G\rho(b^2-a^2)\,, & r < a\,, \\ \dfrac{2\pi G\rho}{3}\left(r^2 + \dfrac{2a^3}{r} - 3b^2\right)\,, & a < r < b\,, \\ -\dfrac{4\pi G\rho(b^3-a^3)}{3r}\,, & r > b\,, \end{cases}
$$

15. Uma casca esférica de raio a e espessura infinitesimal possui massa M, com distribuição uniforme de massa. Calcule o potencial gravitacional em todo o espaço.

Fazemos $b = a + \delta$ no problema anterior e tomamos o limite $\delta \to 0$. Temos,

$$
\begin{aligned} b^2 - a^2 &\simeq 2a\delta\,, \\ b^3 - a^3 &\simeq 3a^2\delta\,, \end{aligned}
$$

logo,

$$
\phi = \begin{cases} -\dfrac{GM}{a}\,, & r < a\,, \\ -\dfrac{GM}{r}\,, & r > a\,, \end{cases}
$$

ou, em termos de ρ,

$$
\phi = \begin{cases} -4\pi aG\rho\delta\,, & r < a\,, \\ -\dfrac{4\pi a^2 G\rho\delta}{r}\,, & r > a\,. \end{cases}
$$

Podemos definir uma densidade superficial de massa σ para uma casca de espessura $\delta \to 0$. Escrevendo ρ,

$$\rho = \frac{M}{(4\pi/3)(b^3 - a^3)} \simeq \frac{M}{(4\pi/3)(3a^2\delta)} \simeq \frac{M}{4\pi a^2\delta}\,,$$

ou,

$$\sigma \equiv \rho\delta = \frac{M}{4\pi a^2}\,.$$

Portanto, em termos de σ*,*

$$\phi = \begin{cases} -4\pi a G\sigma\,, & r < a\,, \\ -\dfrac{4\pi a^2 G\sigma}{r}\,, & r > a\,. \end{cases}$$

16. Considere o problema 4, com a condição de contorno dada para a derivada $\partial v/\partial r$, em vez de para a função v.

17. Considere o problema 4, com a condição de contorno dada para a função v em $r = a$ e para a derivada $\partial v/\partial r$ em $r = b$.

18. Considere os problema 4, com a condição de contorno dada para a derivada $\partial v/\partial r$ em $r = a$, e para a função v em $r = b$.

19. Usando o resultado do problema 5(a), encontre a solução particular $u_p(r, \theta, \varphi)$ para a equação,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathrm{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -f(r, \theta, \varphi)\,,$$

com condições de contorno homogêneas em $0 \le r \le a$, nos seguintes casos:

(a)

$$f(r, \theta, \varphi) = \frac{Ae^{-\kappa r}}{r}\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi\,;$$

(b)

$$f(r, \theta, \varphi) = \frac{e^{-\kappa r}}{r}(a + br)\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi\,;$$

(c)

$$f(r, \theta, \varphi) = \frac{e^{-\kappa r}}{r}(a + br + cr^2)\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi\,.$$

(d)

$$f(r, \theta, \varphi) = e^{-\kappa r}(a + br + cr^2)\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi\,.$$

7 Apêndice

(a) Série de Fourier:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \mathrm{sen}\frac{n\pi x}{L} \right) \,, \\
\frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, dx \,, \\
a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx \,, \\
b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \mathrm{sen}\frac{n\pi x}{L}\, dx \,, \quad n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

(b) Série de Fourier de senos

$$
f(z) = \sum_{j=1} b_j \mathrm{sen}\,(j\pi z/L) \,,
$$

$$
b_j = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \mathrm{sen}\,(j\pi x/L)\, dx \,.
$$

(c) Série de Fourier de cosenos

$$
f(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1} a_j \cos\,(j\pi z/L) \,,
$$

$$
a_j = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos\,(j\pi x/L)\, dx \,.
$$

(d) Polinômios de Legendre ($x = \cos\theta$)

$$
\begin{aligned}
&P_0(x) = 1\\
&P_1(x) = x\\
&P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\\
&P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)\\
&P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)\\
&P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)\\
&P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)\\
&P_7(x) = \frac{1}{16}(497x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)\\
&P_8(x) = \frac{1}{128}(6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35)
\end{aligned}
$$

Relação de ortogonalidade:

$$
\int_{-1}^{+1} P_n(x)P_k(x)dx = \begin{cases} 0\,, & n \neq k\,,\\ \dfrac{2}{2n+1}\,, & n = k\,, \end{cases}
$$

(e) Funções associadas de Legendre

$$
\begin{aligned}
&P_1^1(x) = (1 - x^2)^{1/2} = \operatorname{sen}\theta\\
&P_2^1(x) = 3x(1 - x^2)^{1/2} = 3\operatorname{sen}\theta\cos\theta\\
&P_2^2(x) = 3(1 - x^2) = 3\operatorname{sen}^2\theta\\
&P_3^1(x) = \frac{3}{2}(5x^2 - 1)(1 - x^2)^{1/2} = \frac{3}{2}(5\cos^2\theta - 1)\operatorname{sen}\theta\\
&P_3^2(x) = 15x(1 - x^2) = 15\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\\
&P_3^3(x) = 15(1 - x^2)^{3/2} = 15\operatorname{sen}^3\theta\\
&P_4^1(x) = \frac{5}{2}(7x^3 - 3x)(1 - x^2)^{1/2} = \frac{5}{2}(7\cos^3\theta - 3\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\\
&P_4^2(x) = \frac{15}{2}(7x^2 - 1)(1 - x^2) = \frac{15}{2}(7\cos^2\theta - 1)\operatorname{sen}^2\theta\\
&P_4^3(x) = 105x(1 - x^2)^{3/2} = 105\operatorname{sen}^3\theta\cos\theta\\
&P_4^4(x) = 105(1 - x^2)^2 = 105\operatorname{sen}^4\theta
\end{aligned}
$$

Relação de ortogonalidade:

$$\int_{-1}^{+1} P_n^m(x) P_k^m(x) dx = \begin{cases} 0\,, & n \neq k\,, \\ \dfrac{2}{2n+1}\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!}\,, & n = k\,, \end{cases}$$

(f) Série de polinômios de Legendre

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k P_k(\cos\theta)\,,$$
$$C_k = \frac{2k+1}{2} \int_0^{\pi} f(\theta) P_k(\cos\theta) \text{sen}\,\theta\, d\theta\,.$$

(g) Série de funções associadas de Legendre do primeiro tipo

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k P_k^m(\cos\theta)\,,$$
$$D_k = \frac{(2k+1)(k-m)!}{2(k+m)!} \int_0^{\pi} f(\theta) P_k^m(\cos\theta) \text{sen}\,\theta\, d\theta\,,$$

(h) Funções de Bessel
1.

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p J_n(\lambda_p x)\,, \quad 0 < x < a\,,$$

$$J_n(\lambda_p a) = 0\,, \quad p = 1, 2, 3, \dots\,,$$

$$A_k = \frac{2}{a^2 J_{n+1}^2(\lambda_k a)} \int_0^a x J_n(\lambda_k x) f(x) dx\,.$$

2.

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p J_n(\lambda_p x)\,, \quad 0 < x < a\,,$$

$$J_n'(\lambda_p a) = 0\,, \quad p = 1, 2, 3, \dots,$$

$$A_k = \frac{2}{a^2(1 - n^2/(\lambda_k a)^2) J_n^2(\lambda_k a)} \int_0^a x J_n(\lambda_k x) f(x) dx\,.$$

Em particular, se temos,

$$J_1(\lambda_p a) = 0\,,\ \ p = 1, 2, 3, \ldots,$$

então,

$$f(x) = A_0 + \sum_{p=1}^{\infty} A_p J_0(\lambda_p x)\,,\ \ 0 < x < a\,,$$

com,

$$A_0 = \frac{2}{a^2}\int_0^a x f(x) dx\,,$$
$$A_k = \frac{2}{a^2 J_0^2(\lambda_k a)}\int_0^a x J_0(\lambda_k x) f(x) dx\,.$$

3.

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p J_n(\lambda_p x)\,,\ \ 0 < x < a\,,$$

$$R J_n(\lambda_p a) + S\lambda_p a J_n'(\lambda_p a) = 0\,,\ \ p = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$A_k \;=\; \frac{2(\lambda_k a)^2 \displaystyle\int_0^a x J_n(\lambda_k x) f(x) dx}{a^2 J_n^2(\lambda_k a)[R^2/S^2 + (\lambda_k a)^2 - n^2]}\,.$$

4.

$$U_\mu(\lambda_j \rho) \equiv Y_\mu(\lambda_j a) J_\mu(\lambda_j \rho) - J_\mu(\lambda_j a) Y_\mu(\lambda_j \rho)\,,$$

$$U_\mu(\lambda_j b) = 0\,,$$

$$\int_a^b \rho U_\mu(\lambda_j \rho) U_\mu(\lambda_k \rho) d\rho = 0\,,\ \ j \neq k\,,$$

$$f(\rho) = \sum_{j=1} A_j U_\mu(\lambda_j \rho)\,,$$

$$A_j = \frac{\displaystyle\int_a^b \rho f(\rho) U_\mu(\lambda_j \rho) d\rho}{\displaystyle\int_a^b \rho U_\mu^2(\lambda_j \rho) d\rho}\,.$$

References

[1] A. Sommerfeld, *Partial Differential Equations in Physics*, Academic Press, New York and London (1964s).

[2] R. K. Wangsness, *Electromagnetic Fields*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York (1986).

[3] Jackson, J.D., *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, New York (1962).

[4] Stratton, J. A., *Electromagnetic Theory*, 1st ed., McGraw-Hill, New York (1941).

[5] I. S. Gradshteyn, I. M. Rytzhik, *Table of Integral, Series, and Products*, 5th ed., Academic Press, San Diego (1994).

[6] M. R. Spiegel, S. Lipschutz, J. Liu, *Schaum's Outline of Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York (2009).

[7] M. R. Spiegel, *Schaum's Outline of Fourier Analysis with Applications to Boundary Value Problems*, McGraw-Hill, New York (1974).

[8] M. R. Spiegel, *Schaum's Outline of Advanced Mathematics for Engineers and Scientists*, McGraw-Hill, New York (1971).

[9] Arfken, G. B., Weber, H. J., *Mathematical Methods for Physicists*, 6th. ed., Elsevier Academic Press, Amsterdam (2005).

[10] Morse, P. M., Feshbach, H., *Methods of Theoretical Physics*, vols. I e II, McGraw-Hill, New York (1953).

[11] Mathews, J., Walker, R. L., *Mathematical Methods of Physics*, 2nd. ed., Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Redwood City (1969).

[12] Churchill, R. V., *Fourier Series and Boundary Value Problems*, McGraw-Hill, New York (1941).