# 5 - A equação de Laplace em coordenadas esféricas

A equação de Laplace, $\nabla^2 u = 0$, em coordenadas esféricas, é,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0\,, \tag{1}$$

com $u = u(r, \theta, \varphi)$.

## 1 Considerando $u = u(r)$

Nesse caso temos,

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right)=0\,, \tag{2}$$

ou,

$$r^2 u' = A\,, \tag{3}$$

em que $A$ é uma constante. Integrando mais uma vez,

$$u(r) = -\frac{A}{r} + B\,. \tag{4}$$

Se queremos uma solução finita em $r = 0$, então $A = 0$. Se a solução é finita também em $r \to \infty$, temos $B = 0$, e a solução é identicamente nula.

Se podemos incluir a divergência em $r = 0$, como no caso de cargas puntiformes em eletrostática, temos $A \neq 0$.

## 2 Problemas

1-Consideremos uma esfera de raio $a$. Calcule o potencial interior e exterior se $u(a) = v_0$ (Churchill [12], probl. 9.1).

*Temos no interior $A = 0$, para não termos a divergência em $r = 0$, e no exterior $B = 0$ para termos uma solução finita, assim,*

$$u(r) = \begin{cases} B\,, & r < a\,, \\ -\dfrac{A}{r}\,, & r > a\,. \end{cases}$$

*Em $r = a$,*

$$u(a) = v_0 = B = -\frac{A}{a}\,,$$

*portanto a solução é,*

$$u(r) = \begin{cases} v_0\,, & r < a\,, \\ v_0\dfrac{a}{r}\,, & r > a\,. \end{cases}$$

*Se $v_0 = 0$ a solução é identicamente nula.*

2-Considere o intervalo $a \leq r \leq b$ com as condições de contorno (Spiegel [7], probl. 7.71),

$$u(a) = u_a\,, \quad u(b) = u_b\,.$$

*Temos,*

$$-\frac{A}{a} + B = u_a\,, \quad -\frac{A}{b} + B = u_b\,.$$

*Das equações acima obtemos,*

$$A = \frac{(u_b - u_a)ab}{b-a}\,,$$
$$B = \frac{bu_b - au_a}{b-a}\,,$$

*e a solução fica,*

$$u(r) = -\frac{(u_b - u_a)ab}{b-a}\frac{1}{r} + \frac{bu_b - au_a}{b-a}\,.$$

*Se $u_a$ e $u_b$ são nulos, a solução é identicamente nula, e se $u_a = u_b$ a solução é constante.*

3-Considere uma casca esférica com raios $a$ e $2a$, com temperaturas 0 e $u_0$ respectivamente (Spiegel [7], probl. 7.50).

*Temos agora,*

$$A = 2au_0\,,$$
$$B = 2u_0\,,$$

*logo a solução fica,*

$$u(r) = 2u_0 \left(1 - \frac{a}{r}\right) . \tag{5}$$

4. Encontre a solução $u(r)$ para as equações:
(a)

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = -f(r)\,;$$

(b)

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = +\alpha^2\,;$$

com $\alpha$ constante,
(c)

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = -\alpha^2\,;$$

com $\alpha$ constante,
(d)

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = +\alpha^2 u\,;$$

com $\alpha$ constante,
(e)

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = -\alpha^2 u\,;$$

com $\alpha$ constante e,

$$0 \leq r \leq a\,,$$
$$u(a) = u_a\,.$$

*Solução:*
*(a)*

$$u(r) = u_a - \int_a^r r' f(r') dr' + r^{-1} \int_a^r r'^2 f(r') dr'\,.$$

*Para o caso particular em que $f = f_0$ constante, temos,*

$$u_p(r) = -\frac{f_0}{2}(r^2 - a^2) + \frac{f_0}{3r}(r^3 - a^3)\,.$$

5. Considere o problema anterior com,

$$
\begin{aligned}
&a \le r \le b\,,\\
&u(a) = u_a\,, \quad u(b) = u_b\,.
\end{aligned}
$$

6. Considere a equação,

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = -f(r)\,.$$

Calcule $f(r)$ para as soluções abaixo:

(a)

$$u(r) = \frac{Ae^{-\kappa r}}{r}\,;$$

(b)

$$u(r) = \frac{e^{-\kappa r}}{r}(a+br)\,;$$

(c)

$$u(r) = \frac{e^{-\kappa r}}{r}(a+br+cr^2)\,;$$

(d)

$$u(r) = e^{-\kappa r}(a+br+cr^2)\,.$$

7. Usando o resultado do problema 3(a), encontre a solução particular $u_p(r)$ para a equação,

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = -f(r)\,,$$

com condições de contorno homogêneas em $0 \le r \le a$, nos seguintes casos:

(a)

$$f(r) = \frac{Ae^{-\kappa r}}{r}\,;$$

(b)

$$f(r) = \frac{e^{-\kappa r}}{r}(a+br)\,;$$

(c)

$$f(r) = \frac{e^{-\kappa r}}{r}(a+br+cr^2)\,;$$

(d)

$$f(r) = e^{-\kappa r}(a+br+cr^2)\,.$$

## 3 Considerando $u = u(r, \theta)$

Substituindo,

$$u = R(r)\Theta(\theta)\,, \tag{6}$$

em (1), obtemos,

$$r^2\frac{R''}{R} + 2r\frac{R'}{R} + \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\Theta'}{\Theta} + \frac{\Theta''}{\Theta} = 0\,,$$

ou,

$$r^2\frac{R''}{R} + 2r\frac{R'}{R} = -\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\Theta'}{\Theta} - \frac{\Theta''}{\Theta} = -\lambda^2\,.$$

A equação para $R$ é, assim,

$$r^2R'' + 2rR' + \lambda^2 R = 0\,, \tag{7}$$

e para $\Theta$,

$$\operatorname{sen}\theta\Theta'' + \cos\theta\Theta' - \lambda^2\operatorname{sen}\theta\Theta = 0\,. \tag{8}$$

A equação para $R$, (7), é a equação de Euler ou Cauchy. Fazendo $R = r^p$, obtemos,

$$p^2 + p + \lambda^2 = 0\,. \tag{9}$$

A solução da equação acima é,

$$p = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\lambda^2}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda^2}\,. \tag{10}$$

Assim, a solução de (7) é,

$$R(r) = Ar^{p_1} + Br^{p_2}\,,$$

com

$$p_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda^2}\,,$$
$$p_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda^2}\,.$$

Podemos escrever a solução acima de forma mais simples, notando que,

$$p_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda^2} = -\frac{1}{2} - \left(p_1 + \frac{1}{2}\right) = -1 - p_1 \, .$$

Assim, fazendo $p_1 = n$, temos $p_2 = -n - 1$, a solução de (7) é,

$$R(r) = Ar^n + \frac{B}{r^{n+1}} \, . \tag{11}$$

A constante $\lambda^2$ em termos de $n$ é,

$$p_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda^2} = n \, ,$$

ou,

$$\frac{1}{4} - \lambda^2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 = n^2 + n + \frac{1}{4} \, .$$

Temos portanto,

$$\lambda^2 = -n(n+1) \, . \tag{12}$$

Consideremos agora a equação para $\Theta(\theta)$, eq.(8). Usando a relação acima essa equação fica,

$$\operatorname{sen}\theta\Theta'' + \cos\theta\Theta' + n(n+1)\operatorname{sen}\theta\Theta = 0 \, . \tag{13}$$

Fazendo $\xi = \cos\theta$ temos,

$$\begin{aligned}
\frac{d\Theta}{d\theta} &= \frac{d\xi}{d\theta}\frac{d\Theta}{d\xi} = -\operatorname{sen}\theta\frac{d\Theta}{d\xi} = -\sqrt{1-\cos^2\theta}\frac{d\Theta}{d\xi} = -\sqrt{1-\xi^2}\frac{d\Theta}{d\xi} \, , \\
\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} &= \frac{d\xi}{d\theta}\frac{d}{d\xi}\left(-\sqrt{1-\xi^2}\frac{d\Theta}{d\xi}\right) = -\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{d\Theta}{d\xi} - \sqrt{1-\xi^2}\frac{d^2\Theta}{d\xi^2}\right) \, , \\
\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} &= -\xi\frac{d\Theta}{d\xi} + (1-\xi^2)\frac{d^2\Theta}{d\xi^2} \, .
\end{aligned}$$

A equação para $\Theta$ fica então,

$$(1-\xi^2)\frac{d^2\Theta}{d\xi^2} - 2\xi\frac{d\Theta}{d\xi} + n(n+1)\Theta = 0 \, . \tag{14}$$

A equação acima é a *equação diferencial de Legendre* para $\Theta(\theta)$, ou, em termos de $y(x)$,

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \, , \tag{15}$$

com $-1 \leq x \leq +1$. A solução são os *polinômios de Legendre* $P_n(x)$, e as *funções de Legendre do segundo tipo* $Q_n(x)$.

A solução geral de $\nabla^2 u = 0$, considerando $u = u(r, \theta)$, é então,

$$u = \left( A_1 r^n + \frac{B_1}{r^{n+1}} \right) \left[ A_2 P_n(\xi) + B_2 Q_n(\xi) \right], \tag{16}$$

com $\xi = \cos\theta$. Consideramos $n$ inteiro não negativo, que nos dará os principais casos para alguns sistemas físicos mais comuns. Como a equação de Laplace é linear e homogênea, o princípio da superposição é obedecido, e podemos escrever a solução mais geral como uma soma de termos como em (16),

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_{1n} r^n + \frac{B_{1n}}{r^{n+1}} \right) \left[ A_{2n} P_n(\xi) + B_{2n} Q_n(\xi) \right]. \tag{17}$$

As constantes são determinadas pelas condições de contorno. Como a aplicação mais comum que encontraremos é em situações físicas, em geral teremos a condição de continuidade de $u$, que representará na maioria dos casos um potencial ou outra função contínua. Também continuamos tendo $u$ finita em $r = 0$ e $u \to 0$ em $r \to \infty$.

# 4 Problemas

1-Considerando o intervalo $0 \leq r \leq \infty$, encontre a solução $u(r, \theta)$ com a condição de contorno,

$$u(a, \theta) = f(\theta).$$

*(a) A solução é,*

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta) \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta, \quad r < a, \\ u(r,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta) \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos\theta) sen\,\theta\, d\theta, \quad r > a. \end{aligned}$$

*Se $f = 0$ a solução é identicamente nula.*

*(b) Consideremos o caso particular $f(\theta) = v_0(1 + 3\cos\theta)$ (Spiegel [7], probl. 7.48).*

*A solução é,*

$$
\begin{aligned}
u(r,\theta) &= v_0 + 3v_0\frac{r}{a}\cos\theta\,, \quad r < a\,,\\
u(r,\theta) &= v_0\frac{a}{r} + 3v_0\frac{a^2}{r^2}\cos\theta\,, \quad r > a\,.
\end{aligned}
$$

*Se $v_0 = 0$ a solução é identicamente nula.*

*(c) Consideremos agora o caso $f(\theta) = v_0 sen^2\theta$ (Spiegel [7], probl. 7.49). Temos,*

$$
\begin{aligned}
u(r,\theta) &= \frac{2}{3}v_0\left(1 - \frac{r^2}{a^2}P_2(\cos\theta)\right)\,, \quad r < a\,,\\
u(r,\theta) &= \frac{2}{3}v_0\frac{a}{r}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}P_2(\cos\theta)\right)\,, \quad r > a\,.
\end{aligned}
$$

*Se $v_0 = 0$ a solução é identicamente nula.*

*(d) Consideremos agora o caso em que $f(\theta) = c\cos\theta$ (Churchill [12], probl. 9.3). Temos agora,*

$$
u(r,\theta) = \begin{cases} c\dfrac{r}{a}\cos\theta\,, \quad r < a\,,\\ c\dfrac{a^2}{r^2}\cos\theta\,, \quad r > a\,. \end{cases}
$$

*Se $c = 0$ a solução é identicamente nula.*

*(e) Se $f = f_0$ constante temos,*

$$
u(r,\theta) = u(r) = \begin{cases} f_0\,, \quad r < a\,,\\ f_0\dfrac{a}{r}\,, \quad r > a\,, \end{cases}
$$

*que é a solução esfericamente simétrica, dependente apenas de $r$. Se $f_0 = 0$ a solução é identicamente nula.*

2-Considerando o intervalo $a \leq r \leq b$, encontre a solução $u(r,\theta)$ com as condições de contorno,

$$
\begin{aligned}
u(a,\theta) = f(\theta)\,,\\
u(b,\theta) = g(\theta)\,.
\end{aligned}
$$

*(a) A solução é,*

$$
\begin{aligned}
u(r,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n a^{n+1} - \beta_n b^{n+1}}{a^{2n+1} - b^{2n+1}} r^n P_n(\cos\theta) \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta_n a^n - \alpha_n b^n) a^{n+1} b^{n+1}}{a^{2n+1} - b^{2n+1}} \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta)\,.
\end{aligned}
$$

*Se $f = g = 0$ a solução é identicamente nula.*

*(b) Se $f = 0$ temos $\alpha_n = 0$ e,*

$$
u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{r^{2n+1} - a^{2n+1}}{b^{2n+1} - a^{2n+1}} \left(\frac{b}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta)\,.
$$

*(c) Consideremos agora o caso particular $g = 0$ (Churchill [12], probl. 9.7). Temos $\beta_n = 0$ e a solução fica, após rearranjarmos,*

$$
u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{b^{2n+1} - r^{2n+1}}{b^{2n+1} - a^{2n+1}} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta)\,.
$$

*(d) Se $f$ e $g$ são constantes, iguais a $f_0$, $g_0$, por exemplo,*

$$
u(r,\theta) = u(r) = \frac{\alpha_0 a - \beta_0 b}{a - b} + \frac{(\beta_0 - \alpha_0) ab}{a - b} \frac{1}{r}\,,
$$

*que é a solução esfericamente simétrica.*

3. Encontre a solução $u(r,\theta)$ para as equações:

(a)

$$
\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) = -f(r,\theta)\,;
$$

(b)

$$
\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) = +\alpha^2\,;
$$

(c)

$$
\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) = -\alpha^2\,;
$$

(d)

$$
\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) = +\alpha^2 u\,;
$$

(e)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=-\alpha^2 u\,;$$

com $\alpha$ constante e,

$$0\le r\le a\,,$$
$$u(a,\theta)=\mu(\theta)\,.$$

*(a) Escrevemos a solução da forma usual como,*

$$u(r,\theta)=u_h(r,\theta)+u_p(r,\theta)\,,$$

*com $u_h$ satisfazendo a equação homogênea com condições de contorno não-homogêneas (problema 1 em $r\le a$),*

$$u_h(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta)\frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi}\mu(\theta)P_n(\cos\theta)sen\,\theta\,d\theta\,,\quad 0\le r\le a\,.$$

*A solução particular $u_p$ é,*

$$\begin{aligned}u_p(r,\theta) &= \sum_{k=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{2k+1}r^k\int_a^r r'^{-k+1}B_k(r')dr'\right.\\ &\left.+\frac{1}{2k+1}r^{-k-1}\int_a^r r'^{k+2}B_k(r')dr'\right]P_k(\cos\theta)\,.\end{aligned}$$

*Para o caso particular em que $f=f_0$ constante,*

$$u_p(r,\theta) = A_0(r)P_0(\cos\theta)=-\frac{f_0}{2}(r^2-a^2)+\frac{f_0}{3r}(r^3-a^3)\,.$$

*Notemos que $u_p$ depende apenas de $r$ nesse caso.*

4. Encontre a solução $u(r,\theta)$ para as equações:

(a)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=-f(r,\theta)\,;$$

(b)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=+\alpha^2\,;$$

com $\alpha$ constante,

(c)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)=-\alpha^2\,;$$

com $\alpha$ constante,

(d)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)=+\alpha^2 u\,;$$

com $\alpha$ constante,

(e)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)=-\alpha^2 u\,;$$

com $\alpha$ constante e,

$$\begin{aligned}&a\le r\le b\,,\\&u(a,\theta)=\mu(\theta)\,,\quad u(b,\theta)=\nu(\theta)\,.\end{aligned}$$

5. Usando o resultado do problema 3(a), encontre a solução particular $u_p(r,\theta,\varphi)$ para a equação,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)=-f(r,\theta)\,,$$

com condições de contorno homogêneas em $0\le r\le a$, nos seguintes casos:

(a)

$$f(r,\theta)=\frac{Ae^{-\kappa r}}{r}\mathrm{sen}\;\theta\,;$$

(b)

$$f(r,\theta)=\frac{e^{-\kappa r}}{r}(a+br)\mathrm{sen}\;\theta\,;$$

(c)

$$f(r,\theta)=\frac{e^{-\kappa r}}{r}(a+br+cr^2)\mathrm{sen}\;\theta\,;$$

(d)

$$u(r)=e^{-\kappa r}(a+br+cr^2)\mathrm{sen}\;\theta\,.$$

## 5 Considerando $u = u(r, \theta, \varphi)$

Escrevendo a solução na forma,

$$u = R(r)\Theta(\theta)e^{im\varphi}\,, \tag{18}$$

temos, de (1),

$$r^2\frac{R''}{R} + 2r\frac{R'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\Theta'}{\Theta} - \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta} = 0\,,$$

ou,

$$r^2\frac{R''}{R} + 2r\frac{R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} - \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\Theta'}{\Theta} + \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta} = -\lambda^2\,. \tag{19}$$

A equação para $R$ é então,

$$r^2R'' + 2rR' + \lambda^2 R = 0\,, \tag{20}$$

que é idêntica a (7), com $\lambda^2 = -n(n+1)$.

A equação para $\Theta$ é,

$$\frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\Theta'}{\Theta} - \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta} - \lambda^2 = 0\,,$$

ou,

$$\operatorname{sen}^2\theta\,\Theta'' + \operatorname{sen}\,\theta\cos\theta\,\Theta' + [\operatorname{sen}^2\theta\, n(n+1) - m^2]\Theta = 0\,. \tag{21}$$

Fazendo $\xi = \cos\theta$,

$$(1-\xi^2)\frac{d^2\Theta}{d\xi^2} - 2\xi\frac{d\Theta}{d\xi} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-\xi^2}\right]\Theta = 0\,. \tag{22}$$

A equação acima é a *equação diferencial associada de Legendre* para $\Theta(\theta)$. Em termos de $y(x)$,

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0\,, \tag{23}$$

com $-1 \leq x \leq +1$. A solução são as *funções associadas de Legendre do primeiro e do segundo tipo*, respectivamente $P_n^m(x)$ e $Q_n^m(x)$. A solução geral de $\nabla^2 u = 0$, considerando $u = u(r, \theta, \varphi)$, é então,

$$u = \left(A_1 r^n + \frac{B_1}{r^{n+1}}\right)[A_2 P_n^m(\xi) + B_2 Q_n^m(\xi)]e^{im\varphi}\,, \tag{24}$$

com $\xi = \cos\theta$. Consideramos o caso em que $m$ e $n$ são inteiros não negativos. Usando novamente o princípio da superposição, a solução mais geral é,

$$u = \sum_{nm} \left( A_{1n} r^n + \frac{B_{1n}}{r^{n+1}} \right) [A_{2nm} P_n^m(\xi) + B_{2nm} Q_n^m(\xi)] e^{im\varphi} \,, \tag{25}$$

Vamos escrever a solução acima da equação (1) de forma um pouco diferente,

$$u = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi) \,. \tag{26}$$

substituindo a expressão acima em (1),

$$r^2 \frac{R''}{R} + 2r\frac{R'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\Theta'}{\Theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\Phi''}{\Phi} = 0 \,,$$

ou,

$$r^2 \frac{R''}{R} + 2r\frac{R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} - \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\Theta'}{\Theta} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\Phi''}{\Phi} = -\lambda^2 \,,$$

A equação para $R$ é, assim,

$$r^2 R'' + 2rR' + \lambda^2 R = 0 \,, \tag{27}$$

idêntica a (7), com $\lambda^2 = -n(n+1)$. Continuando, temos,

$$-\frac{\Theta''}{\Theta} - \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\Theta'}{\Theta} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\Phi''}{\Phi} = -\lambda^2 \,,$$

ou,

$$-\operatorname{sen}^2\theta \frac{\Theta''}{\Theta} - \operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{\Theta'}{\Theta} + \operatorname{sen}^2\theta\,\lambda^2 = \frac{\Phi''}{\Phi} = -m^2 \,.$$

A equação para $\Phi$ é então,

$$\Phi'' + m^2\Phi = 0 \,, \tag{28}$$

com solução,

$$\Phi = A_3 \cos m\varphi + B_3 \operatorname{sen} m\varphi \,. \tag{29}$$

A equação para $\Theta$ é,

$$\operatorname{sen}^2\theta\,\Theta'' + \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\Theta' + [\operatorname{sen}^2\theta\, n(n+1) - m^2]\Theta = 0 \,, \tag{30}$$

idêntica a (21). A solução geral de $\nabla^2 u = 0$, considerando $u = u(r, \theta, \boldsymbol{\varphi})$, pode assim ser escrita como,

$$u = \left(A_1 r^n + \frac{B_1}{r^{n+1}}\right)[A_2 P_n^m(\xi) + B_2 Q_n^m(\xi)][A_3 \cos m\varphi + B_3 \mathrm{sen}\ m\varphi]\,, \quad (31)$$

com $\xi = \cos\theta$. Pelo princípio da superposição novamente,

$$\begin{aligned} u &= \sum_{nm} \left(A_{1n} r^n + \frac{B_{1n}}{r^{n+1}}\right)[A_{2nm} P_n^m(\xi) + B_{2nm} Q_n^m(\xi)] \times \\ &\quad \times [A_{3m} \cos m\varphi + B_{3m} \mathrm{sen}\ m\varphi]\,. \end{aligned} \quad (32)$$

# Harmônicos Esféricos

Vamos escrever agora a solução de forma um pouco diferente,

$$u = AR(r) Y_{nm}(\theta, \varphi)\,, \quad (33)$$

em que $Y_{nm}(\theta, \varphi)$ são os *harmônicos esféricos* [3],

$$Y_{nm}(\theta, \varphi) = C_{nm} P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi}\,. \quad (34)$$

Os coeficientes $C_{nm}$ são dados pela condição de normalização,

$$\int_0^\pi \mathrm{sen}\ \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{n'm'}^*(\theta, \varphi) Y_{nm}(\theta, \varphi) = \delta_{nn'} \delta_{mm'}\,. \quad (35)$$

Também temos a relação de completude,

$$\sum_{n=0}^\infty \sum_{m=-n}^n Y_{nm}^*(\theta', \varphi') Y_{nm}(\theta, \varphi) = \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos\theta - \cos\theta')\,. \quad (36)$$

Vamos primeiro determinar os coeficientes $C_{nm}$ em (34). Substituindo (34) em (35),

$$\int_0^\pi \mathrm{sen}\ \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi C_{n'm'} P_{n'}^{m'}(\cos\theta) e^{-im'\varphi} C_{nm} P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi} = \delta_{nn'} \delta_{mm'}\,,$$

$$C_{n'm'} C_{nm} \int_0^\pi \mathrm{sen}\ \theta d\theta P_{n'}^{m'}(\cos\theta) P_n^m(\cos\theta) \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-im'\boldsymbol{\varphi}} e^{im\varphi} = \delta_{nn'} \delta_{mm'}\,.$$

A integral em $\varphi$ é nula se $m \neq m'$, e é igual a $2\pi$ se $m = m'$, logo,

$$C_{n'm'}C_{nm}\int_0^\pi \mathrm{sen}\;\theta d\theta P_{n'}^{m'}(\cos\theta)P_n^m(\cos\theta)2\pi\delta_{mm'}=\delta_{nn'}\delta_{mm'}\,.$$

Somando em $m'$,

$$\sum_{m'}C_{n'm'}C_{nm}\int_0^\pi \mathrm{sen}\;\theta d\theta P_{n'}^{m'}(\cos\theta)P_n^m(\cos\theta)2\pi\delta_{mm'}=\sum_{m'}\delta_{nn'}\delta_{mm'}\,,$$
$$2\pi C_{n'm}C_{nm}\int_0^\pi \mathrm{sen}\;\theta d\theta P_{n'}^{m}(\cos\theta)P_n^m(\cos\theta)=\delta_{nn'}\,.$$

Usando a relação de ortogonalidade para as funções associadas de Legendre do primeiro tipo ($x=\cos\theta$),

$$\int_{-1}^{+1}P_n^m(x)P_k^m(x)dx=\begin{cases}0\,, & n\neq k\,,\\ \dfrac{2}{2n+1}\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!}\,, & n=k\,,\end{cases}$$

e somando em $n'$,

$$2\pi C_{nm}^2\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}=1\,.$$

Portanto,

$$C_{nm}=\sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\,, \tag{37}$$

e,

$$Y_{nm}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}P_n^m(\cos\theta)e^{im\varphi}\,. \tag{38}$$

Vamos escrever a equação diferencial satisfeita pelos harmônicos esféricos. Substituindo (33) em (1) temos,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\mathrm{sen}^{\,2}\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0\,,$$
$$R''Y+\frac{2}{r}R'Y+\frac{R}{r^2\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{R}{r^2\mathrm{sen}^{\,2}\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=0\,,$$
$$r^2\frac{R''}{R}+2r\frac{R'}{R}+\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\frac{1}{Y}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\mathrm{sen}^{\,2}\theta}\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=0\,,$$

ou,

$$\frac{r^2R''}{R}+2r\frac{R'}{R}=-\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{1}{Y}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=-\lambda^2\,.$$

A equação para $R$ é então,

$$r^2R''+2rR'+\lambda^2R=0\,,\tag{39}$$

que é idêntica a (7), (20) e (27), com $\lambda^2=-n(n+1)$.

A equação diferencial satisfeita por $Y$ é,

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}-\lambda^2Y=0\,,$$

ou, como $\lambda^2=-n(n+1)$,

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+n(n+1)Y=0\,,\tag{40}$$

Uma função qualquer $f(\theta,\varphi)$ pode ser expandida em harmônicos esféricos,

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}A_{lm}Y_{lm}(\theta,\varphi)\,.\tag{41}$$

Para calcularmos os coeficientes $A_{lm}$ multiplicamos a expressão acima dos dois lados por $Y^*_{l'm'}(\theta,\varphi)$ e integramos em $d\Omega$,

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}\,\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi f(\theta,\varphi)Y^*_{l'm'}(\theta,\varphi)=$$
$$=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}A_{lm}\int_0^\pi \operatorname{sen}\,\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi Y^*_{l'm'}(\theta,\varphi)Y_{lm}(\theta,\varphi)\,.$$

Usando (35),

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}\,\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi f(\theta,\varphi)Y^*_{l'm'}(\theta,\varphi)=$$
$$=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}A_{lm}\delta_{ll'}\delta_{mm'}=A_{l'm'}\,,$$

ou,

$$A_{l'm'}=\int_0^\pi \operatorname{sen}\,\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi f(\theta,\varphi)Y^*_{l'm'}(\theta,\varphi)\,.\tag{42}$$

# 6 Problemas

1-Calcule a solução $u(r, \theta, \varphi)$ no interior e no exterior de uma esfera de raio $a$, com a condição de contorno (Spiegel [7], probl. 7.30),

$$u(a, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi)\,.$$

*(a) A solução é,*

$$\begin{aligned}
u(r,\theta,\varphi) \;=\; & \sum_n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta)\,\times \\
& \times \frac{2n+1}{2}\int_0^\pi P_n(\cos\theta)\,sen\;\theta\,d\theta\,\times \\
& \times \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,x)\,dx\,, \\
& + \sum_{nm} \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi\,\times \\
& \times \frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!}\int_0^\pi P_n^m(\cos\theta)\,sen\;\theta\,d\theta\,\times \\
& \times \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,x)\cos mx\,dx \\
& + \sum_{nm} \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n^m(\cos\theta)\,sen\;m\varphi\,\times \\
& \times \frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!}\int_0^\pi P_n^m(\cos\theta)\,sen\;\theta\,d\theta\,\times \\
& \times \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,x)\,sen\;mx\,dx\,, \\
& 0 \le r \le a\,,
\end{aligned}$$

*e,*

$$
\begin{aligned}
u(r,\theta,\varphi) \;=\; & \sum_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta)\,\times \\
& \times \frac{2n+1}{2}\int_0^\pi P_n(\cos\theta)sen\;\theta\,d\theta\,\times \\
& \times \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,x)\,dx \\
& + \sum_{nm}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi\,\times \\
& \times \frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!}\int_0^\pi P_n^m(\cos\theta)sen\;\theta\,d\theta\,\times \\
& \times \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,x)\cos mx\,dx \\
& + \sum_{nm}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n^m(\cos\theta)sen\;m\varphi\,\times \\
& \times \frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!}\int_0^\pi P_n^m(\cos\theta)sen\;\theta\,d\theta\,\times \\
& \times \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,x)sen\;mx\,dx \\
& a \le r \le \infty\,.
\end{aligned}
$$

*Se $f = 0$ a solução é nula.*

*(b) Se $f = f_0$ constante temos,*

$$
u(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} f_0\,, & 0 \le r \le a\,, \\ f_0\dfrac{a}{r}\,, & a \le r \le \infty\,. \end{cases}
$$

*A solução é esfericamente simétrica, como esperado.*

*(c) Consideremos o caso particular $f(\theta,\varphi) = v_0 sen^2\theta\cos 2\varphi$ (Spiegel [7], probl. 7.29). A solução é,*

$$
u(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} r^2 P_2^2(\cos\theta)A_{22}\cos 2\varphi\,, & 0 \le r \le a\,, \\ \dfrac{1}{r^3}P_2^2(\cos\theta)a^5 A_{22}\cos 2\varphi\,, & a \le r \le \infty\,, \end{cases}
$$

*ou,*

$$
u(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} v_0\dfrac{r^2}{a^2}sen^2\,\theta\cos 2\varphi\,, & 0 \le r \le a\,, \\ v_0\dfrac{a^3}{r^3}sen^2\,\theta\cos 2\varphi\,, & a \le r \le \infty\,. \end{cases}
$$

*(d) Consideremos agora* $f(\theta,\varphi) = v_0 sen^3\theta\cos\theta\cos 3\varphi$ *(Spiegel [7], probl. 7.63). A solução é portanto,*

$$u(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} r^4 P_4^3(\cos\theta) A_{43}\cos 3\varphi\,, & 0 \le r \le a\,, \\ \dfrac{1}{r^5} P_4^3(\cos\theta) C_{43}\cos 3\varphi\,, & a \le r \le \infty\,, \end{cases}$$

*ou,*

$$u(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} v_0 \dfrac{r^4}{a^4} sen^3\theta\cos\theta\cos 3\varphi\,, & 0 \le r \le a\,, \\ v_0 \dfrac{a^5}{r^5} sen^3\theta\cos\theta\cos 3\varphi\,, & a \le r \le \infty\,. \end{cases}$$

2. Considerando o intervalo $a \le r \le b$, encontre a solução $u(r,\theta,\varphi)$ com as condições de contorno,

$$\begin{aligned} u(a,\theta,\varphi) &= f(\theta,\varphi)\,, \\ u(b,\theta,\varphi) &= g(\theta,\varphi)\,. \end{aligned}$$

3. Consideramos agora o intervalo $0 \le r \le \infty$, e duas superfícies esféricas concêntricas em $r = a$ e $r = b$, com as mesmas condiçõe de contorno do problema anterior.

4. Encontre a solução $u(r,\theta,\varphi)$ para as equações:

(a)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \text{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\,\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\text{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = -f(r,\theta,\varphi)\,;$$

(b)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \text{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\,\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\text{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = +\alpha^2\,;$$

(c)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \text{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\,\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\text{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = -\alpha^2\,;$$

(d)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \text{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\,\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\text{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = +\alpha^2 u\,;$$

(e)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\text{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\,\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\text{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=-\alpha^2 u\,;$$

com $\alpha$ constante e,

$$0\le r\le a\,,$$
$$u(a,\theta,\varphi)=\mu(\theta,\varphi)\,.$$

5. Encontre a solução $u(r,\theta,\varphi)$ para as equações:
(a)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\text{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\,\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\text{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=-f(r,\theta,\varphi)\,;$$

(b)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\text{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\,\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\text{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=+\alpha^2\,;$$

(c)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\text{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\,\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\text{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=-\alpha^2\,;$$

(d)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\text{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\,\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\text{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=+\alpha^2 u\,;$$

(e)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\text{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\,\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\text{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=-\alpha^2 u\,;$$

com $\alpha$ constante e,

$$a\le r\le b\,,$$
$$u(a,\theta,\varphi)=\mu(\theta,\varphi)\,,\quad u(b,\theta,\varphi)=\nu(\theta,\varphi)\,.$$

6. Uma esfera oca de raio $a$ possui potencial dado por,

$$v(a,\theta)=\begin{cases} v_0 & 0\le\theta\le\pi/2\,,\\ v_1 & \pi/2\le\theta\le\pi\,.\end{cases}$$

Determine o potencial $v$ no interior e no exterior da esfera (Spiegel [7], probl. 7.18, com $v_1=0$).

*Se* $v_0=v_1$,

$$u(r,\theta)=\begin{cases} v_0\,, & r\le a\,,\\ v_0\dfrac{a}{r}\,, & r\ge a\,.\end{cases}$$

*Se* $v_1=-v_0$ *o potencial interior é,*

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \frac{3r}{2a}v_0P_1(\cos\theta)-\frac{7r^3}{8a^3}v_0P_3(\cos\theta)\\ &\quad+\frac{11r^5}{16a^5}v_0P_5(\cos\theta)+\dots\,,\quad r\le a\,.\end{aligned}$$

*O potencial exterior é,*

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \frac{3a^2}{2r^2}v_0P_1(\cos\theta)-\frac{7a^4}{8r^4}v_0P_3(\cos\theta)\\ &\quad+\frac{11a^6}{16r^6}v_0P_5(\cos\theta)+\dots\end{aligned}$$

*Temos* $u(r,\pi/2)=0$ *também.*

7. Um hemisfério de raio $a$ possui potencial igual a $v_0$ em $r=a$, $0\le\theta\le\pi/2$, e igual a $v_1$ na base definida por $0\le r\le a$, $\theta=\pi/2$,

$$v(r,\theta)=\begin{cases} v_0 & ,\ r=a\,,\ \ 0\le\theta\le\pi/2\,,\\ v_1 & ,\ 0\le r\le a\,,\ \ \theta=\pi/2\,.\end{cases}$$

Determine o potencial $v$ no interior e no exterior do hemisfério (Spiegel [7], probl. 7.19, com $v_1=0$).

*O potencial interior é,*

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= v_1P_0(\cos\theta)+\frac{3}{2}(v_0-v_1)\frac{r}{a}P_1(\cos\theta)\\ &\quad-\frac{7}{8}(v_0-v_1)\frac{r^3}{a^3}P_3(\cos\theta)+\frac{11}{16}(v_0-v_1)\frac{r^5}{a^5}P_5(\cos\theta)+\dots\,,\\ &\quad 0\le r\le a\,,\end{aligned}$$

*e o potencial exterior é,*

$$
\begin{aligned}
u(r,\theta) \;=\;& v_1\frac{a}{r}P_0(\cos\theta)+\frac{3}{2}(v_0-v_1)\frac{a^2}{r^2}P_1(\cos\theta)\\
&-\frac{7}{8}(v_0-v_1)\frac{a^4}{r^4}P_3(\cos\theta)+\frac{11}{16}(v_0-v_1)\frac{a^6}{r^6}P_5(\cos\theta)+\dots\\
&r\geq a\,.
\end{aligned}
$$

8. Determine o potencial $v$ no interior e no exterior de uma esfera de raio $a$, quando o potencial na superfície é dado por,

(a) $v_0 \operatorname{sen}\theta$;
(b) $v_0 \operatorname{sen}^2\theta$ (Spiegel [7], probl. 7.49);
(c) $v_0(1+3\cos\theta)$ (Spiegel [7], probl. 7.48);
(d) $v_0\cos\varphi$;
(e) $v_0\cos^2\varphi$;
(f) $v_0\operatorname{sen}^3\theta\cos\theta\cos 3\varphi$ (Spiegel [7], probl. 7.63).

Determine o potencial considerando agora as condições acima para a derivada $u'=\partial u/\partial r$ em $r\to a_-$. Em todos os casos considere $u$ contínua.

9. Considere uma região esférica de raio interno $a$ e raio externo $b$. Determine o potencial $v$ em $a<r<b$ quando,

(a) $v(a)=v_1\operatorname{sen}\theta$ , $v(b)=v_2\cos\theta$;
(b) $v(a)=v_1\operatorname{sen}\theta\cos\varphi$, $v(b)=v_2\cos\theta\operatorname{sen}\varphi$.

10. Considere um círculo de massa $m$ e raio $a$, com distribuição uniforme de massa. (a) Calcule o potencial gravitacional sobre o eixo do círculo. (b) Calcule o potencial gravitacional em qualquer ponto do espaço (Spiegel [7], probl. 7.20).

*(a) O potencial sobre o eixo do círculo é,*

$$V=\frac{2\pi G\lambda a}{\sqrt{z^2+a^2}}\,,\quad P=(0,0,z)\,.$$

*(b) O potencial em qualquer ponto do espaço é,*

$$V=2\pi G\lambda\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n}P_{2n}(\cos\theta)\,,\quad r<a\,,$$

*e,*

$$V=2\pi G\lambda\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1}P_{2n}(\cos\theta)\,,\quad r>a\,.$$

11. Considere um disco de massa $m$ e raio $a$, com distribuição uniforme de massa. (a) Calcule o potencial gravitacional sobre o eixo do disco. (b) Calcule o potencial gravitacional em qualquer ponto do espaço (Spiegel [7], probl. 7.55). (c) Calcule o potencial para uma faixa de raio interno $a$ e raio externo $b$. (d) Faça o limite $\delta \to 0$ em $b = a + \delta$ e obtenha o resultado do problema 5.

*(a)*

$$V = \int dV = 2\pi G\sigma \int_0^a \frac{r\, dr}{\sqrt{z^2 + r^2}} = 2\pi G\sigma(\sqrt{z^2 + a^2} - z)\,,$$

*(b) O potencial em um ponto qualquer é,*

$$\begin{aligned} V(r,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta)\,, \\ &= 2\pi G\sigma a \left[1 - \frac{r}{a}P_1(\cos\theta) + \frac{r^2}{2a^2}P_2(\cos\theta) - \frac{r^4}{8a^4}P_4(\cos\theta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{r^6}{16a^6}P_6(\cos\theta) - \frac{5r^8}{128a^8}P_8(\cos\theta) + \ldots\right]\,, \quad r < a\,, \end{aligned}$$

*e,*

$$\begin{aligned} V(r,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta)\,, \\ &= 2\pi G\sigma a \left[\frac{a}{2r} - \frac{a^3}{8r^3}P_2(\cos\theta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{a^5}{16r^5}P_4(\cos\theta) - \frac{5a^7}{128r^7}P_6(\cos\theta) + \ldots\right]\,, \quad r > a\,. \end{aligned}$$

*(c) O potencial é,*

$$\begin{aligned} V(r,\theta) &= 2\pi G\sigma b \left[1 - \frac{r}{b}P_1(\cos\theta) + \frac{r^2}{2b^2}P_2(\cos\theta) \right. \\ &\quad \left. - \frac{r^4}{8b^4}P_4(\cos\theta) + \frac{r^6}{16b^6}P_6(\cos\theta) + \ldots\right] \\ &\quad - 2\pi G\sigma a \left[1 - \frac{r}{a}P_1(\cos\theta) + \frac{r^2}{2a^2}P_2(\cos\theta) \right. \\ &\quad \left. - \frac{r^4}{8a^4}P_4(\cos\theta) + \frac{r^6}{16a^6}P_6(\cos\theta) + \ldots\right]\,, \quad r < a\,, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
V(r,\theta) &= 2\pi G\sigma b\left[1-\frac{r}{b}P_1(\cos\theta)+\frac{r^2}{2b^2}P_2(\cos\theta)\right.\\
&\left.-\frac{r^4}{8b^4}P_4(\cos\theta)+\frac{r^6}{16b^6}P_6(\cos\theta)+\ldots\right]\\
&-2\pi G\sigma a\left[\frac{a}{2r}-\frac{a^3}{8r^3}P_2(\cos\theta)\right.\\
&\left.+\frac{a^5}{16r^5}P_4(\cos\theta)-\frac{5a^7}{128r^7}P_6(\cos\theta)+\ldots\right]\,,\quad a<r<b\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V(r,\theta) &= 2\pi G\sigma b\left[\frac{b}{2r}-\frac{b^3}{8r^3}P_2(\cos\theta)\right.\\
&\left.+\frac{b^5}{16r^5}P_4(\cos\theta)-\frac{5b^7}{128r^7}P_6(\cos\theta)+\ldots\right]\\
&-2\pi G\sigma a\left[\frac{a}{2r}-\frac{a^3}{8r^3}P_2(\cos\theta)\right.\\
&\left.+\frac{a^5}{16r^5}P_4(\cos\theta)-\frac{5a^7}{128r^7}P_6(\cos\theta)+\ldots\right]\,,\quad r>b\,.
\end{aligned}
$$

*(d) Fazemos agora no resultado anterior $b=a+\delta$. Em $r<a$,*

$$
\begin{aligned}
V(r,\theta) &= 2\pi G\sigma\delta\left[1-\frac{r^2}{2a^2}P_2(\cos\theta)\right.\\
&\left.+\frac{3r^4}{8a^4}P_4(\cos\theta)-\frac{5r^6}{16a^6}P_6(\cos\theta)+\ldots\right]\,,\quad r<a\,.
\end{aligned}
$$

*Em $r>b$, com $b=a+\delta$,*

$$
\begin{aligned}
V(r,\theta) &= 2\pi G\sigma\delta\left[\frac{a}{r}-\frac{a^3}{2r^3}P_2(\cos\theta)+\frac{3a^5}{8r^5}P_4(\cos\theta)\right.\\
&\left.-\frac{5a^7}{16r^7}P_6(\cos\theta)+\ldots\right]\,,\quad r>a\,.
\end{aligned}
$$

*No limite $\delta\to 0$ temos um círculo de raio $a$ e densidade linear $\lambda=\sigma\delta$.*

12. Uma esfera de raio $a$ e massa $M$ possui distribuição uniforme de massa. Calcule o potencial gravitacional $\phi$ em todo o espaço (Spiegel [7], probl. 7.51, 7.52).

*Em $r > a$,*

$$\phi = -\frac{GM}{r}\,,$$

*equivalente ao de uma partícula de massa $M$. Em $r < a$,*

$$\phi = \frac{2\pi G\rho}{3}r^2 - \frac{3GM}{2a}\,, \quad r < a\,,$$

*ou,*

$$\phi = \frac{GM}{2a}\left(\frac{r^2}{a^2} - 3\right)\,, \quad r < a\,.$$

13. Uma casca esférica de raio interno $a$ e raio externo $b$ possui massa $M$, com distribuição uniforme de massa. Calcule o potencial gravitacional $\phi$ em todo o espaço (Spiegel [7], probl. 7.54).

*O potencial é,*

$$\phi = \begin{cases} -\dfrac{GM}{2(b^3 - a^3)}3(b^2 - a^2)\,, & r < a\,, \\ \dfrac{GM}{2(b^3 - a^3)}\left(r^2 + \dfrac{2a^3}{r} - 3b^2\right)\,, & a < r < b\,, \\ -\dfrac{GM}{r}\,, & r > b\,, \end{cases}$$

*ou, em termos de $\rho$,*

$$\phi = \begin{cases} -2\pi G\rho(b^2 - a^2)\,, & r < a\,, \\ \dfrac{2\pi G\rho}{3}\left(r^2 + \dfrac{2a^3}{r} - 3b^2\right)\,, & a < r < b\,, \\ -\dfrac{4\pi G\rho(b^3 - a^3)}{3r}\,, & r > b\,, \end{cases}$$

14. Uma casca esférica de raio $a$ e espessura infinitesimal possui massa $M$, com distribuição uniforme de massa. Calcule o potencial gravitacional em todo o espaço.

*Fazemos $b = a + \delta$ no problema anterior e tomamos o limite $\delta \to 0$. Temos,*

$$\begin{aligned} b^2 - a^2 &\simeq 2a\delta\,, \\ b^3 - a^3 &\simeq 3a^2\delta\,, \end{aligned}$$

*logo,*

$$\phi = \begin{cases} -\dfrac{GM}{a}\,, & r < a\,, \\ -\dfrac{GM}{r}\,, & r > a\,, \end{cases}$$

*ou, em termos de* $\rho$*,*

$$\phi = \begin{cases} -4\pi a G\rho\delta\,, & r < a\,, \\ -\dfrac{4\pi a^2 G\rho\delta}{r}\,, & r > a\,. \end{cases}$$

*Podemos definir uma densidade superficial de massa* $\sigma$ *para uma casca de espessura* $\delta \to 0$*. Escrevendo* $\rho$*,*

$$\rho = \frac{M}{(4\pi/3)(b^3 - a^3)} \simeq \frac{M}{(4\pi/3)(3a^2\delta)} \simeq \frac{M}{4\pi a^2\delta}\,,$$

*ou,*

$$\sigma \equiv \rho\delta = \frac{M}{4\pi a^2}\,.$$

*Portanto, em termos de* $\sigma$*,*

$$\phi = \begin{cases} -4\pi a G\sigma\,, & r < a\,, \\ -\dfrac{4\pi a^2 G\sigma}{r}\,, & r > a\,. \end{cases}$$

15. Considere o problema 2, com a condição de contorno dada para a derivada $\partial v/\partial r$, em vez de para a função $v$.

16. Considere o problema 2, com a condição de contorno dada para a função $v$ em $r = a$ e para a derivada $\partial v/\partial r$ em $r = b$.

17. Considere os problema 2, com a condição de contorno dada para a derivada $\partial v/\partial r$ em $r = a$, e para a função $v$ em $r = b$.

18. Usando o resultado do problema 4(a), encontre a solução particular $u_p(r, \theta, \varphi)$ para a equação,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = -f(r, \theta, \varphi)\,,$$

com condições de contorno homogêneas em $0 \le r \le a$, nos seguintes casos:

(a)

$$f(r,\theta,\varphi) = Ar^2 \text{sen}\ \theta \cos 2\varphi\,;$$

(b)

$$f(r,\theta,\varphi) = \frac{Ae^{-\kappa r}}{r} \text{sen}\ \theta \cos \varphi\,;$$

(c)

$$f(r,\theta,\varphi) = \frac{e^{-\kappa r}}{r}(a+br) \text{sen}\ \theta \cos \varphi\,;$$

(d)

$$f(r,\theta,\varphi) = \frac{e^{-\kappa r}}{r}(a+br+cr^2) \text{sen}\ \theta \cos \varphi\,.$$

(e)

$$f(r,\theta,\varphi) = e^{-\kappa r}(a+br+cr^2) \text{sen}\ \theta \cos \varphi\,.$$

*(a) A solução $u_p$ é,*

$$\begin{aligned} u_p(r,\theta,\varphi) &= \sum_{k=2}^{\infty} A_{2k}(r) P_k^2(\cos\theta)\cos(2\varphi)\,, \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ -r^k \left[ \frac{r^{-k+4} - a^{-k+4}}{-k+4} \right] + r^{-k-1} \left[ \frac{r^{k+5} - a^{k+5}}{k+5} \right] \right\} \times \\ &\quad \times \frac{\alpha_k}{2k+1} P_k^2(\cos\theta)\cos(2\varphi)\,. \end{aligned}$$

# 7 Apêndice

(a) Série de Fourier:

$$\begin{aligned} & f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \text{sen}\,\frac{n\pi x}{L} \right)\,, \\ & \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx\,, \\ & a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx\,, \\ & b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,dx\,, \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

(b) Série de Fourier de senos

$$f(z) = \sum_{j=1} b_j \text{sen}\,(j\pi z/L)\,,$$

$$b_j = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\text{sen}\,(j\pi x/L)\,dx\,.$$

(c) Série de Fourier de cosenos

$$f(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1} a_j \cos(j\pi z/L)\,,$$

$$a_j = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(j\pi x/L)\,dx\,.$$

(d) Polinômios de Legendre ($x = \cos\theta$)

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1\\
P_1(x) &= x\\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\\
P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)\\
P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)\\
P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)\\
P_6(x) &= \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)\\
P_7(x) &= \frac{1}{16}(497x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)\\
P_8(x) &= \frac{1}{128}(6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35)
\end{aligned}$$

Relação de ortogonalidade:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)P_k(x)dx = \begin{cases} 0\,, & n \neq k\,,\\ \dfrac{2}{2n+1}\,, & n = k\,, \end{cases}$$

(e) Funções associadas de Legendre

$$
\begin{aligned}
&P_1^1(x) = (1-x^2)^{1/2} = \text{sen }\theta\\
&P_2^1(x) = 3x(1-x^2)^{1/2} = 3\text{sen }\theta\cos\theta\\
&P_2^2(x) = 3(1-x^2) = 3\text{sen}^2\theta\\
&P_3^1(x) = \frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{1/2} = \frac{3}{2}(5\cos^2\theta-1)\text{sen }\theta\\
&P_3^2(x) = 15x(1-x^2) = 15\text{sen}^2\theta\cos\theta\\
&P_3^3(x) = 15(1-x^2)^{3/2} = 15\text{sen}^3\theta\\
&P_4^1(x) = \frac{5}{2}(7x^3-3x)(1-x^2)^{1/2} = \frac{5}{2}(7\cos^3\theta-3\cos\theta)\text{sen }\theta\\
&P_4^2(x) = \frac{15}{2}(7x^2-1)(1-x^2) = \frac{15}{2}(7\cos^2\theta-1)\text{sen}^2\theta\\
&P_4^3(x) = 105x(1-x^2)^{3/2} = 105\text{sen}^3\theta\cos\theta\\
&P_4^4(x) = 105(1-x^2)^2 = 105\text{sen}^4\theta
\end{aligned}
$$

Relação de ortogonalidade:

$$
\int_{-1}^{+1} P_n^m(x)P_k^m(x)dx = \begin{cases} 0\,, & n\neq k\,,\\ \dfrac{2}{2n+1}\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!}\,, & n=k\,,\end{cases}
$$

(f) Série de polinômios de Legendre

$$
\begin{aligned}
f(\theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k P_k(\cos\theta)\,,\\
C_k &= \frac{2k+1}{2}\int_0^{\pi} f(\theta)P_k(\cos\theta)\text{sen }\theta\, d\theta\,.
\end{aligned}
$$

(g) Série de funções associadas de Legendre do primeiro tipo

$$
\begin{aligned}
f(\theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} D_k P_k^m(\cos\theta)\,,\\
D_k &= \frac{(2k+1)(k-m)!}{2(k+m)!}\int_0^{\pi} f(\theta)P_k^m(\cos\theta)\text{sen }\theta\, d\theta\,,
\end{aligned}
$$

(h) Funções de Bessel

1.

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p J_n(\lambda_p x)\,, \quad 0 < x < a\,,$$

$$J_n(\lambda_p a) = 0\,, \quad p = 1, 2, 3, \ldots\,,$$

$$A_k = \frac{2}{a^2 J_{n+1}^2(\lambda_k a)} \int_0^a x J_n(\lambda_k x) f(x) dx\,.$$

2.

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p J_n(\lambda_p x)\,, \quad 0 < x < a\,,$$

$$J_n'(\lambda_p a) = 0\,, \quad p = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$A_k = \frac{2}{a^2(1 - n^2/(\lambda_k a)^2) J_n^2(\lambda_k a)} \int_0^a x J_n(\lambda_k x) f(x) dx\,.$$

Em particular, se temos,

$$J_1(\lambda_p a) = 0\,, \quad p = 1, 2, 3, \ldots,$$

então,

$$f(x) = A_0 + \sum_{p=1}^{\infty} A_p J_0(\lambda_p x)\,, \quad 0 < x < a\,,$$

com,

$$A_0 = \frac{2}{a^2} \int_0^a x f(x) dx\,,$$
$$A_k = \frac{2}{a^2 J_0^2(\lambda_k a)} \int_0^a x J_0(\lambda_k x) f(x) dx\,.$$

3.

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p J_n(\lambda_p x)\,, \quad 0 < x < a\,,$$

$$R J_n(\lambda_p a) + S \lambda_p a J_n'(\lambda_p a) = 0\,, \quad p = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$
A_k \;=\; \frac{2(\lambda_k a)^2 \displaystyle\int_0^a x J_n(\lambda_k x) f(x) dx}{a^2 J_n^2(\lambda_k a)[R^2/S^2 + (\lambda_k a)^2 - n^2]} \,.
$$

4.

$$
U_\mu(\lambda_j \rho) \equiv Y_\mu(\lambda_j a) J_\mu(\lambda_j \rho) - J_\mu(\lambda_j a) Y_\mu(\lambda_j \rho) \,,
$$

$$
U_\mu(\lambda_j b) = 0 \,,
$$

$$
\int_a^b \rho U_\mu(\lambda_j \rho) U_\mu(\lambda_k \rho) d\rho = 0 \,, \quad j \neq k \,,
$$

$$
f(\rho) = \sum_{j=1} A_j U_\mu(\lambda_j \rho) \,,
$$

$$
A_j = \frac{\displaystyle\int_a^b \rho f(\rho) U_\mu(\lambda_j \rho) d\rho}{\displaystyle\int_a^b \rho U_\mu^2(\lambda_j \rho) d\rho} \,.
$$

# References


[1] A. Sommerfeld, *Partial Differential Equations in Physics*, Academic Press, New York and London (1964s).

[2] R. K. Wangsness, *Electromagnetic Fields*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York (1986).

[3] Jackson, J.D., *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, New York (1962).

[4] Stratton, J. A., *Electromagnetic Theory*, 1st ed., McGraw-Hill, New York (1941).

[5] I. S. Gradshteyn, I. M. Rytzhik, *Table of Integral, Series, and Products*, 5th ed., Academic Press, San Diego (1994).

[6] M. R. Spiegel, S. Lipschutz, J. Liu, *Schaum's Outline of Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York (2009).

[7] M. R. Spiegel, *Schaum's Outline of Fourier Analysis with Applications to Boundary Value Problems*, McGraw-Hill, New York (1974).

[8] M. R. Spiegel, *Schaum's Outline of Advanced Mathematics for Engineers and Scientists*, McGraw-Hill, New York (1971).

[9] Arfken, G. B., Weber, H. J., *Mathematical Methods for Physicists*, 6th. ed., Elsevier Academic Press, Amsterdam (2005).

[10] Morse, P. M., Feshbach, H., *Methods of Theoretical Physics*, vols. I e II, McGraw-Hill, New York (1953).

[11] Mathews, J., Walker, R. L., *Mathematical Methods of Physics*, 2nd. ed., Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Redwood City (1969).

[12] Churchill, R. V., *Fourier Series and Boundary Value Problems*, McGraw-Hill, New York (1941).