

5 - A equação de Laplace em coordenadas esféricas

A equação de Laplace, $\nabla^2 u = 0$, em coordenadas esféricas, é,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (1)$$

com $u = u(r, \theta, \varphi)$.

1 Considerando $u = u(r)$

Nesse caso temos,

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = 0, \quad (2)$$

ou,

$$r^2 u' = A, \quad (3)$$

em que A é uma constante. Integrando mais uma vez,

$$u(r) = -\frac{A}{r} + B. \quad (4)$$

Se queremos uma solução finita em $r = 0$, então $A = 0$. Se a solução é finita também em $r \rightarrow \infty$, temos $B = 0$, e a solução é identicamente nula.

Se podemos incluir a divergência em $r = 0$, como no caso de cargas puntiformes em eletrostática, temos $A \neq 0$.

2 Problemas

1-Consideremos uma esfera de raio a . Calcule o potencial interior e exterior se $u(a) = v_0$ (Churchill [12], probl. 9.1).

Temos no interior $A = 0$, para não termos a divergência em $r = 0$, e no exterior $B = 0$ para termos uma solução finita, assim,

$$u(r) = \begin{cases} B, & r < a, \\ -\frac{A}{r}, & r > a. \end{cases}$$

Em $r = a$,

$$u(a) = v_0 = B = -\frac{A}{a},$$

portanto a solução é,

$$u(r) = \begin{cases} v_0, & r < a, \\ v_0 \frac{a}{r}, & r > a. \end{cases}$$

Se $v_0 = 0$ a solução é identicamente nula.

2- Considere o intervalo $a \leq r \leq b$ com as condições de contorno (Spiegel [7], probl. 7.71),

$$u(a) = u_a, \quad u(b) = u_b.$$

Temos,

$$-\frac{A}{a} + B = u_a, \quad -\frac{A}{b} + B = u_b.$$

Das equações acima obtemos,

$$A = \frac{(u_b - u_a)ab}{b - a},$$
$$B = \frac{bu_b - au_a}{b - a},$$

e a solução fica,

$$u(r) = -\frac{(u_b - u_a)ab}{b - a} \frac{1}{r} + \frac{bu_b - au_a}{b - a}.$$

Se u_a e u_b são nulos, a solução é identicamente nula, e se $u_a = u_b$ a solução é constante.

3. Considere uma casca esférica com raios a e $2a$, com temperaturas 0 e u_0 respectivamente (Spiegel [7], probl. 7.50).

Temos agora,

$$A = 2au_0,$$
$$B = 2u_0,$$

logo a solução fica,

$$u(r) = 2u_0 \left(1 - \frac{a}{r}\right) . \quad (5)$$

4. Encontre a solução $u(r)$ para as equações:

(a)
$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = -f(r) ;$$

(b)
$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = +\alpha^2 ;$$

(c)
$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = -\alpha^2 ;$$

(d)
$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = +\alpha^2 u ;$$

(e)
$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = -\alpha^2 u ;$$

(f)
$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) + \alpha^2 u = -f(r) ;$$

(g)
$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) - \alpha^2 u = -f(r) ;$$

(h)
$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) + \alpha^2 u = -\beta^2 ;$$

(i)
$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) - \alpha^2 u = -\beta^2 ;$$

com α constante e,

$$\begin{aligned} 0 &\leq r \leq a , \\ u(a) &= u_a . \end{aligned}$$

(a)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = -f(r);$$

Escrevemos a solução da forma usual como,

$$u(r) = u_h(r) + u_p(r),$$

com u_h satisfazendo a equação homogênea com condições de contorno não-homogêneas, e u_p satisfazendo a equação não-homogênea com condições de contorno homogêneas. Reescrevemos a equação diferencial,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du_p}{dr} \right) &= -f(r), \\ \frac{1}{r^2} (2ru'_p + r^2 u''_p) &= -f(r), \\ r^2 u''_p + 2ru'_p &= -r^2 f(r). \end{aligned}$$

Obtemos assim uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, não-homogênea, na forma,

$$x^2 y''(x) + 2xy'(x) - y(x)k(k+1) = -x^2 g(x).$$

A solução da equação acima pode ser escrita, como vimos, como a soma da solução da equação homogênea e uma solução particular da equação não-homogênea,

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

Vimos no capítulo 1 que a equação,

$$x^2 y'' + (2l+1)xy' + (\alpha^2 x^{2r} + \beta^2)y = 0,$$

em que l, α, r, β são constantes, possui solução,

$$y = x^{-l} [c_1 J_{\kappa/r}(\alpha x^r/r) + c_2 Y_{\kappa/r}(\alpha x^r/r)],$$

e $\kappa = \sqrt{l^2 - \beta^2}$. Se $\alpha = 0$ temos a equação de Euler ou equação de Cauchy, com solução,

$$y = x^{-l} (c_3 x^\kappa + c_4 x^{-\kappa}).$$

Em particular, se $\alpha = 0$ e $l = 1/2$ a equação fica,

$$x^2 y'' + 2xy' + \beta^2 y = 0,$$

que é a nossa equação homogênea com $\beta^2 = -k(k+1) = 0$, logo $k = 0$. A solução da equação acima é assim,

$$y = x^{-1/2}(c_3 x^\kappa + c_4 x^{-\kappa}),$$

com $\kappa = \sqrt{(1/4)} = 1/2$. Logo, renomeando as constantes,

$$y_h(x) = c_1 + c_2 x^{-1},$$

ou,

$$u_h(r) = c_1 + c_2 r^{-1}.$$

Como u_h deve ser finita em $r = 0$ temos $c_2 = 0$. Determinamos c_1 das condições de contorno,

$$u_h(a) = c_1 = u_a,$$

logo,

$$c_1 = u_a.$$

O procedimento acima é instrutivo, mas nesse caso a solução da equação homogênea pode ser obtida de maneira simples. Temos,

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du_h}{dr} \right) = 0,$$

logo,

$$r^2 \frac{du_h}{dr} = -c_2,$$

ou,

$$\frac{du_h}{dr} = -c_2 r^{-2}.$$

Portanto,

$$u_h(r) = c_1 + c_2 r^{-1}.$$

Como u_h deve ser finita em $r = 0$ temos $c_2 = 0$ e,

$$u_h(r) = c_1.$$

A solução particular é (capítulo 22),

$$y_p(x) = y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{y_2(x')g(x')}{\Delta(x')}dx' - y_2(x) \int_{x_0}^x \frac{y_1(x')g(x')}{\Delta(x')}dx',$$

com $\Delta = y_1y_2' - y_1'y_2$ e $y_1 = 1$, $y_2 = x^{-1}$. Calculando Δ explicitamente,

$$\Delta = y_1y_2' - y_1'y_2 = -x^{-2},$$

logo,

$$y_p(x) = - \int_{x_0}^x x'g(x')dx' + x^{-1} \int_{x_0}^x x'^2g(x')dx'.$$

A solução u_p é então,

$$u_p(r) = - \int_{r_0}^r r'f(r')dr' + r^{-1} \int_{r_0}^r r'^2f(r')dr'.$$

Em $r = a$,

$$u_p(a) = - \int_{r_0}^a r'f(r')dr' + a^{-1} \int_{r_0}^a r'^2f(r')dr'.$$

Vemos que u_p satisfaz condições de contorno homogêneas se escolhermos $r_0 = a$.

Temos,

$$\begin{aligned} u(r) &= u_h(r) + u_p(r), \\ &= c_1 - \int_a^r r'f(r')dr' + r^{-1} \int_a^r r'^2f(r')dr'. \end{aligned}$$

Consideremos o caso particular em que $f = f_0$ constante. Temos,

$$\begin{aligned} u_p(r) &= - \int_a^r r'f(r')dr' + r^{-1} \int_a^r r'^2f(r')dr', \\ &= -f_0 \int_a^r r'dr' + r^{-1}f_0 \int_a^r r'^2dr', \\ &= -f_0 \left[\frac{r'^2}{2} \right]_a^r + r^{-1}f_0 \left[\frac{r'^3}{3} \right]_a^r, \\ &= -\frac{f_0}{2}(r^2 - a^2) + \frac{f_0}{3r}(r^3 - a^3). \end{aligned}$$

Podemos obter a solução nesse caso integrando diretamente a equação diferencial,

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) &= -f_0, \\ \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) &= -f_0 r^2, \\ r^2 \frac{du}{dr} &= -f_0 \frac{r^3}{3} + c_0, \\ \frac{du}{dr} &= -f_0 \frac{r}{3} + \frac{c_0}{r^2}, \\ u &= -f_0 \frac{r^2}{6} - \frac{c_0}{r} + c_1.\end{aligned}$$

Em $r = a$ devemos ter $u(a) = u_a$,

$$u(a) = -f_0 \frac{a^2}{6} - \frac{c_0}{a} + c_1 = u_a.$$

Não conseguimos determinar c_0 e c_1 , pois temos apenas uma condição. Escolhemos escrever c_1 ,

$$c_1 = u_a + f_0 \frac{a^2}{6} + \frac{c_0}{a},$$

logo,

$$\begin{aligned}u &= -f_0 \frac{r^2}{6} - \frac{c_0}{r} + c_1, \\ u &= -f_0 \frac{r^2}{6} - \frac{c_0}{r} + u_a + f_0 \frac{a^2}{6} + \frac{c_0}{a}, \\ u &= \frac{f_0}{6} (a^2 - r^2) - \frac{c_0}{r} + \frac{c_0}{a} + u_a.\end{aligned}$$

As duas formas da solução devem ser equivalentes, logo,

$$\begin{aligned}u_a - \frac{f_0}{2} (r^2 - a^2) + \frac{f_0}{3r} (r^3 - a^3) &= \\ &= \frac{f_0}{6} (a^2 - r^2) - \frac{c_0}{r} + \frac{c_0}{a} + u_a,\end{aligned}$$

ou,

$$\frac{f_0}{2}a^2 - \frac{f_0}{3r}a^3 = \frac{f_0}{6}a^2 - \frac{c_0}{r} + \frac{c_0}{a}.$$

Satisfazemos a equação acima escolhendo $c_0 = f_0 a^3/3$.

(b)

(c)

(d)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = +\alpha^2 u;$$

Podemos reescrever a equação diferencial,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) &= +\alpha^2 u, \\ \frac{1}{r^2} \left(2r \frac{du}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \left(r^2 \frac{d^2u}{dr^2} \right) &= +\alpha^2 u, \\ \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} - \alpha^2 u &= 0, \\ r^2 \frac{d^2u}{dr^2} + 2r \frac{du}{dr} - \alpha^2 r^2 u &= 0. \end{aligned}$$

Vimos na letra (a) que a equação,

$$x^2 y'' + (2l + 1)xy' + (\alpha^2 x^{2r} + \beta^2)y = 0,$$

em que l, α, r, β são constantes, possui solução,

$$y = x^{-l} [c_1 J_{\kappa/r}(\alpha x^r/r) + c_2 Y_{\kappa/r}(\alpha x^r/r)],$$

e $\kappa = \sqrt{l^2 - \beta^2}$. Logo, $l = 1/2, r = 1, \alpha^2 = -1, \beta = 0, \kappa = l = 1/2$, e a solução é (não confundir a constante r com a variável r),

$$u(r) = r^{-1/2} [c_1 J_{1/2}(ir) + c_2 Y_{1/2}(ir)].$$

As funções acima são funções de Bessel de argumento complexo, ou funções esféricas de Bessel. Vamos contudo defini-las de uma forma um pouco diferente. Definimos,

$$u \equiv \frac{v(\alpha r)}{\sqrt{\alpha r}}.$$

Calculando as derivadas de u ,

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dr} &= \frac{1}{\sqrt{\alpha r}} \frac{d}{dr} v(\alpha r) - \frac{\alpha}{2} \frac{v(\alpha r)}{(\alpha r)^{3/2}}, \\
\frac{d^2 u}{dr^2} &= \frac{1}{\sqrt{\alpha r}} \frac{d^2}{dr^2} v(\alpha r) - \frac{\alpha}{(\alpha r)^{3/2}} \frac{d}{dr} v(\alpha r) \\
&\quad + \frac{3\alpha^2}{4} \frac{v(\alpha r)}{(\alpha r)^{5/2}},
\end{aligned}$$

Substituindo na equação diferencial,

$$\begin{aligned}
r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + 2r \frac{du}{dr} - \alpha^2 r^2 u &= 0, \\
r^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha r}} \frac{d^2}{dr^2} v(\alpha r) - \frac{\alpha}{(\alpha r)^{3/2}} \frac{d}{dr} v(\alpha r) + \frac{3\alpha^2}{4} \frac{v(\alpha r)}{(\alpha r)^{5/2}} \right) \\
+ 2r \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha r}} \frac{d}{dr} v(\alpha r) - \frac{\alpha}{2} \frac{v(\alpha r)}{(\alpha r)^{3/2}} \right) - \alpha^2 r^2 \left(\frac{v(\alpha r)}{\sqrt{\alpha r}} \right) &= 0, \\
\frac{r^2}{\sqrt{\alpha r}} \frac{d^2}{dr^2} v(\alpha r) - \frac{\alpha r^2}{(\alpha r)^{3/2}} \frac{d}{dr} v(\alpha r) + \frac{3\alpha^2 r^2}{4} \frac{v(\alpha r)}{(\alpha r)^{5/2}} \\
+ \frac{2r}{\sqrt{\alpha r}} \frac{d}{dr} v(\alpha r) - \frac{2r\alpha}{2} \frac{v(\alpha r)}{(\alpha r)^{3/2}} - \alpha^2 r^2 \frac{v(\alpha r)}{\sqrt{\alpha r}} &= 0.
\end{aligned}$$

Multiplicando por $\sqrt{\alpha r}$,

$$\begin{aligned}
r^2 \frac{d^2}{dr^2} v(\alpha r) - \frac{\alpha r^2}{\alpha r} \frac{d}{dr} v(\alpha r) + \frac{3\alpha^2 r^2}{4} \frac{v(\alpha r)}{(\alpha r)^2} \\
+ 2r \frac{d}{dr} v(\alpha r) - \frac{2r\alpha}{2} \frac{v(\alpha r)}{\alpha r} - \alpha^2 r^2 v(\alpha r) &= 0, \\
r^2 \frac{d^2}{dr^2} v(\alpha r) - r \frac{d}{dr} v(\alpha r) + \frac{3}{4} v(\alpha r) \\
+ 2r \frac{d}{dr} v(\alpha r) - v(\alpha r) - \alpha^2 r^2 v(\alpha r) &= 0, \\
r^2 \frac{d^2}{dr^2} v(\alpha r) + r \frac{d}{dr} v(\alpha r) - \frac{1}{4} v(\alpha r) - \alpha^2 r^2 v(\alpha r) &= 0,
\end{aligned}$$

ou,

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} v(\alpha r) + r \frac{d}{dr} v(\alpha r) - [\alpha^2 r^2 + \frac{1}{4}] v(\alpha r) = 0.$$

A equação acima é a equação diferencial de Bessel modificada, com solução,

$$v(\alpha r) = c_1 I_{1/2}(\alpha r) + c_2 K_{1/2}(\alpha r) .$$

De forma mais geral, a equação,

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} v(\alpha r) + r \frac{d}{dr} v(\alpha r) - [\alpha^2 r^2 + (n + 1/2)^2] v(\alpha r) = 0 ,$$

possui solução,

$$v(\alpha r) = c_1 I_{n+1/2}(\alpha r) + c_2 K_{n+1/2}(\alpha r) ,$$

enquanto a equação,

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} v(\alpha r) + r \frac{d}{dr} v(\alpha r) + [\alpha^2 r^2 - (n + 1/2)^2] v(\alpha r) = 0 ,$$

possui solução,

$$v(\alpha r) = c_1 J_{n+1/2}(\alpha r) + c_2 Y_{n+1/2}(\alpha r) .$$

A solução u é então dada pelas funções esféricas de Bessel,

$$\begin{aligned} j_n(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x) , \\ y_n(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{n+1/2}(x) , \\ i_n(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} I_{n+1/2}(x) , \\ k_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} K_{n+1/2}(x) . \end{aligned}$$

Os coeficientes numéricos são escolhidos por conveniência, e notemos que não são iguais.

Voltando à nossa equação diferencial,

$$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + 2r \frac{du}{dr} - \alpha^2 r^2 u = 0 ,$$

temos a solução,

$$u(r) = c_1 i_0(\alpha r) + c_2 k_0(\alpha r) .$$

A solução deve ser finita em $r = 0$, logo $c_2 = 0$. Em $r = a$ temos,

$$u(a) = c_1 i_0(\alpha a) = u_a ,$$

portanto,

$$u(r) = u_a \frac{i_0(\alpha r)}{i_0(\alpha a)} .$$

As funções i_0, k_0 são dadas por,

$$i_0(x) = \frac{\sinh x}{x} , \quad k_0(x) = \frac{e^{-x}}{x} .$$

Vamos verificar que essas funções satisfazem a equação diferencial homogênea. Calculando as derivadas,

$$\begin{aligned} i_0'(x) &= \frac{\cosh x}{x} - \frac{\sinh x}{x^2} , \\ k_0'(x) &= -\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2} , \\ i_0''(x) &= \frac{\sinh x}{x} - \frac{\cosh x}{x^2} - \frac{\cosh x}{x^2} + 2\frac{\sinh x}{x^3} , \\ &= \frac{\sinh x}{x} - 2\frac{\cosh x}{x^2} + 2\frac{\sinh x}{x^3} , \\ k_0''(x) &= \frac{e^{-x}}{x} + 2\frac{e^{-x}}{x^2} + 2\frac{e^{-x}}{x^3} , \end{aligned}$$

logo, para $u(\alpha r)$, com $x = \alpha r$,

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{du(x)}{dr} = \frac{dx}{dr} \frac{du(x)}{dx} = \alpha \frac{du(x)}{dx} , \\ u''(x) &= \frac{d^2 u(x)}{dr^2} = \frac{d}{dr} \frac{du(x)}{dr} = \frac{d}{dr} \alpha \frac{du(x)}{dx} = \alpha^2 \frac{d^2 u(x)}{dx^2} . \end{aligned}$$

Para $i_0(\alpha r)$,

$$\begin{aligned}
r^2 u''(\alpha r) + 2r u'(\alpha r) - \alpha^2 r^2 u(\alpha r) &= 0, \\
r^2 u''(x) + 2r u'(x) - x^2 u(x) &= 0, \\
r^2 i_0''(x) + 2r i_0'(x) - x^2 i_0(x) &= 0, \\
r^2 \alpha^2 \left(\frac{\sinh x}{x} - 2 \frac{\cosh x}{x^2} + 2 \frac{\sinh x}{x^3} \right) \\
+ 2r \alpha \left(\frac{\cosh x}{x} - \frac{\sinh x}{x^2} \right) - x^2 \frac{\sinh x}{x} &= 0, \\
x^2 \left(\frac{\sinh x}{x} - 2 \frac{\cosh x}{x^2} + 2 \frac{\sinh x}{x^3} \right) \\
+ 2x \left(\frac{\cosh x}{x} - \frac{\sinh x}{x^2} \right) - x^2 \frac{\sinh x}{x} &= 0.
\end{aligned}$$

Logo $i_0(\alpha r)$ é solução da equação diferencial.

(e)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = -\alpha^2 u;$$

A solução agora é,

$$u(r) = c_1 j_0(\alpha r) + c_2 y_0(\alpha r).$$

Temos $c_2 = 0$ para a solução ser finita em $r = 0$. Em $r = a$,

$$u(a) = c_1 j_0(\alpha a) = u_a.$$

Portanto,

$$u(r) = u_a \frac{j_0(\alpha r)}{j_0(\alpha a)}.$$

(f)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) + \alpha^2 u = -f(r);$$

A solução da equação homogênea, finita em $r = 0$, foi obtida na letra (e)

$$u_h(r) = u_a \frac{j_0(\alpha r)}{j_0(\alpha a)}.$$

A solução particular é, como na letra (a),

$$y_p(x) = y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{y_2(x') f(x')}{\Delta(x')} dx' - y_2(x) \int_{x_0}^x \frac{y_1(x') f(x')}{\Delta(x')} dx',$$

com $\Delta = y_1 y_2' - y_1' y_2$ e $y_1 = j_0(x)$, $y_2 = y_0(x)$. Calculando Δ explicitamente,

$$\begin{aligned}\Delta &= y_1 y_2' - y_1' y_2, \\ &= j_0(\alpha r) y_0'(\alpha r) - j_0'(\alpha r) y_0(\alpha r).\end{aligned}$$

Como,

$$j_0(x) = \frac{\text{sen } x}{x}, \quad y_0(x) = -\frac{\cos x}{x},$$

vem,

$$\begin{aligned}j_0'(x) &= \frac{\cos x}{x} - \frac{\text{sen } x}{x^2} = -y_0(x) - \frac{j_0(x)}{x}, \\ y_0'(x) &= \frac{\text{sen } x}{x} + \frac{\cos x}{x^2} = j_0(x) - \frac{y_0(x)}{x}, \\ j_0''(x) &= -y_0'(x) - \frac{j_0'(x)}{x} + \frac{j_0(x)}{x^2}, \\ &= -j_0(x) + \frac{y_0(x)}{x} + \left(\frac{y_0(x)}{x} + \frac{j_0(x)}{x^2} \right) + \frac{j_0(x)}{x^2}, \\ &= -j_0(x) + \frac{2y_0(x)}{x} + \frac{2j_0(x)}{x^2}, \\ y_0''(x) &= j_0'(x) - \frac{y_0'(x)}{x} + \frac{y_0(x)}{x^2}, \\ &= -y_0(x) - \frac{j_0(x)}{x} - \frac{1}{x} \left(j_0(x) - \frac{y_0(x)}{x} \right) + \frac{y_0(x)}{x^2}, \\ &= -y_0(x) - \frac{2j_0(x)}{x} + \frac{2y_0(x)}{x^2},\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}\Delta &= j_0(\alpha r) y_0'(\alpha r) - j_0'(\alpha r) y_0(\alpha r), \\ &= \alpha \frac{\text{sen } \alpha r}{\alpha r} \left(\frac{\text{sen } \alpha r}{\alpha r} + \frac{\cos \alpha r}{(\alpha r)^2} \right) + \alpha \left(\frac{\cos \alpha r}{\alpha r} - \frac{\text{sen } \alpha r}{(\alpha r)^2} \right) \frac{\cos \alpha r}{\alpha r}, \\ &= \alpha \frac{\text{sen } \alpha r}{\alpha r} \left(\frac{\text{sen } \alpha r}{\alpha r} \right) + \alpha \left(\frac{\cos \alpha r}{\alpha r} \right) \frac{\cos \alpha r}{\alpha r} = \frac{1}{\alpha r^2}.\end{aligned}$$

A solução particular fica então,

$$\begin{aligned}u_p(\alpha r) &= j_0(\alpha r) \alpha \int_{r_0}^r r'^2 y_0(\alpha r') f(r') dr' \\ &\quad - y_0(\alpha r) \alpha \int_{r_0}^r r'^2 j_0(\alpha r') f(r') dr' .\end{aligned}$$

Escolhemos $r_0 = a$, para que a solução particular satisfaça condições de contorno homogêneas em $r = a$. A solução completa é assim, invertendo a ordem de integração, pois consideramos o intervalo $0 \leq r \leq a$,

$$\begin{aligned} u &= u_a \frac{j_0(\alpha r)}{j_0(\alpha a)} - j_0(\alpha r) \alpha \int_r^a r'^2 y_0(\alpha r') f(r') dr' \\ &\quad + y_0(\alpha r) \alpha \int_r^a r'^2 j_0(\alpha r') f(r') dr'. \end{aligned}$$

Consideremos se é possível o caso $f(r) = f_0$ constante. A solução particular fica,

$$\begin{aligned} u_p &= -j_0(\alpha r) \alpha f_0 \int_r^a r'^2 y_0(\alpha r') dr' \\ &\quad + y_0(\alpha r) \alpha f_0 \int_r^a r'^2 j_0(\alpha r') dr'. \end{aligned}$$

Calculando as integrais acima,

$$\begin{aligned} \int_r^a r'^2 y_0(\alpha r') dr' &= - \int_r^a r'^2 \frac{\cos \alpha r'}{\alpha r'} dr' \\ &= -\frac{1}{\alpha} \int_r^a r' \cos \alpha r' dr' \\ &= -\frac{1}{\alpha} \left[\frac{\cos \alpha r'}{\alpha^2} + \frac{r' \sin \alpha r'}{\alpha} \right]_r^a, \\ &= -\frac{1}{\alpha} \left[\frac{\cos \alpha a}{\alpha^2} + \frac{a \sin \alpha a}{\alpha} - \frac{\cos \alpha r}{\alpha^2} - \frac{r \sin \alpha r}{\alpha} \right], \\ \int_r^a r'^2 j_0(\alpha r') dr' &= \int_r^a r'^2 \frac{\sin \alpha r'}{\alpha r'} dr', \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_r^a r' \sin \alpha r' dr', \\ &= \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\sin \alpha r'}{\alpha^2} - \frac{r' \cos \alpha r'}{\alpha} \right]_r^a, \\ &= \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\sin \alpha a}{\alpha^2} - \frac{a \cos \alpha a}{\alpha} - \frac{\sin \alpha r}{\alpha^2} + \frac{r \cos \alpha r}{\alpha} \right], \end{aligned}$$

em que usamos as integrais indefinidas,

$$\begin{aligned}\int x \cos ax dx &= \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x \sin ax}{a}, \\ \int x \sin ax dx &= \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x \cos ax}{a}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}u_p &= -j_0(\alpha r)\alpha f_0 \int_r^a r'^2 y_0(\alpha r') dr' \\ &\quad + y_0(\alpha r)\alpha f_0 \int_r^a r'^2 j_0(\alpha r') dr', \\ &= j_0(\alpha r)\alpha f_0 \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\cos \alpha a}{\alpha^2} + \frac{a \sin \alpha a}{\alpha} - \frac{\cos \alpha r}{\alpha^2} - \frac{r \sin \alpha r}{\alpha} \right] \\ &\quad + y_0(\alpha r)\alpha f_0 \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\sin \alpha a}{\alpha^2} - \frac{a \cos \alpha a}{\alpha} - \frac{\sin \alpha r}{\alpha^2} + \frac{r \cos \alpha r}{\alpha} \right].\end{aligned}$$

Substituindo agora j_0, y_0 ,

$$\begin{aligned}u_p &= \frac{\sin \alpha r}{\alpha r} \alpha f_0 \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\cos \alpha a}{\alpha^2} + \frac{a \sin \alpha a}{\alpha} - \frac{\cos \alpha r}{\alpha^2} - \frac{r \sin \alpha r}{\alpha} \right] \\ &\quad - \frac{\cos \alpha r}{\alpha r} \alpha f_0 \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\sin \alpha a}{\alpha^2} - \frac{a \cos \alpha a}{\alpha} - \frac{\sin \alpha r}{\alpha^2} + \frac{r \cos \alpha r}{\alpha} \right], \\ &= \frac{\sin \alpha r}{r} \frac{f_0}{\alpha} \left[\frac{\cos \alpha a}{\alpha^2} + \frac{a \sin \alpha a}{\alpha} \right] \\ &\quad - \frac{\cos \alpha r}{r} \frac{f_0}{\alpha} \left[\frac{\sin \alpha a}{\alpha^2} - \frac{a \cos \alpha a}{\alpha} \right] - \frac{f_0}{\alpha^2}.\end{aligned}$$

A solução acima se anula em $r = a$, como queremos, mas diverge em $r = 0$.

Vamos escrever a solução particular em termos de função de Green. Temos,

$$\begin{aligned}u_p &= -j_0(\alpha r)\alpha \int_r^a r'^2 y_0(\alpha r') f(r') dr' \\ &\quad + y_0(\alpha r)\alpha \int_r^a r'^2 j_0(\alpha r') f(r') dr', \\ &= \int_r^a [y_0(\alpha r)j_0(\alpha r') - j_0(\alpha r)y_0(\alpha r')] \alpha r'^2 f(r') dr' .\end{aligned}$$

Comparando com,

$$u_p = \int_r^a G(r, r') f(r') dr' ,$$

vem,

$$G(r, r') = [y_0(\alpha r) j_0(\alpha r') - j_0(\alpha r) y_0(\alpha r')] \alpha r'^2 .$$

(g)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) - \alpha^2 u = -f(r) ;$$

(h)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) + \alpha^2 u = -\beta^2 ;$$

Podemos considerar o resultado da letra (f) com $f = f_0 = \beta^2$ constante. Mas vamos tentar integrar a equação diretamente,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) + \alpha^2 u &= -\beta^2 , \\ \frac{1}{r^2} \left(2r \frac{du}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \left(r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} \right) + \alpha^2 u &= -\beta^2 , \\ \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + \alpha^2 u &= -\beta^2 , \\ \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + \alpha^2 u + \beta^2 &= 0 , \\ \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + \alpha^2 (u + \beta^2 / \alpha^2) &= 0 . \end{aligned}$$

Definindo agora,

$$v \equiv u + \beta^2 / \alpha^2 ,$$

a equação diferencial para u fica,

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dv}{dr} + \alpha^2 v = 0 ,$$

com solução,

$$v(r) = c_0 \frac{j_0(\alpha r)}{j_0(\alpha a)} + c_1 \frac{y_0(\alpha r)}{y_0(\alpha a)} .$$

O segundo termo diverge em $r = 0$, mas vamos mantê-lo por enquanto, pois na letra (f) fizemos o mesmo no caso $f = f_0$ constante. A condição de contorno para v fica,

$$v(a) = u(a) + \beta^2/\alpha^2 = u_a + \beta^2/\alpha^2,$$

logo,

$$v(a) = c_0 + c_1 = u_a + \beta^2/\alpha^2.$$

Isolando c_1 ,

$$c_1 = u_a + \beta^2/\alpha^2 - c_0.$$

Deixamos c_0 indeterminado por enquanto. Temos portanto,

$$\begin{aligned} u &= v - \beta^2/\alpha^2, \\ &= c_0 \frac{j_0(\alpha r)}{j_0(\alpha a)} + c_1 \frac{y_0(\alpha r)}{y_0(\alpha a)} - \frac{\beta^2}{\alpha^2}, \\ &= c_0 \frac{j_0(\alpha r)}{j_0(\alpha a)} + (u_a + \beta^2/\alpha^2 - c_0) \frac{y_0(\alpha r)}{y_0(\alpha a)} - \frac{\beta^2}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

A solução acima deve ser equivalente à solução obtida na letra (f) com $f = f_0 = \beta^2$ constante, logo,

$$\begin{aligned} &u_a \frac{j_0(\alpha r)}{j_0(\alpha a)} + \frac{\sin \alpha r}{r} \frac{\beta^2}{\alpha} \left[\frac{\cos \alpha a}{\alpha^2} + \frac{a \sin \alpha a}{\alpha} \right] \\ &- \frac{\cos \alpha r}{r} \frac{\beta^2}{\alpha} \left[\frac{\sin \alpha a}{\alpha^2} - \frac{a \cos \alpha a}{\alpha} \right] - \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \\ &= c_0 \frac{j_0(\alpha r)}{j_0(\alpha a)} + (u_a + \beta^2/\alpha^2 - c_0) \frac{y_0(\alpha r)}{y_0(\alpha a)} - \frac{\beta^2}{\alpha^2}, \end{aligned}$$

ou, usando as definições de j_0, y_0 ,

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad y_0(x) = -\frac{\cos x}{x},$$

vem,

$$\begin{aligned} &u_a \frac{\sin \alpha r}{\sin \alpha a} \frac{a}{r} + \frac{\sin \alpha r}{r} \frac{\beta^2}{\alpha} \left[\frac{\cos \alpha a}{\alpha^2} + \frac{a \sin \alpha a}{\alpha} \right] \\ &- \frac{\cos \alpha r}{r} \frac{\beta^2}{\alpha} \left[\frac{\sin \alpha a}{\alpha^2} - \frac{a \cos \alpha a}{\alpha} \right] = \\ &= c_0 \frac{\sin \alpha r}{\sin \alpha a} \frac{a}{r} + (u_a + \beta^2/\alpha^2 - c_0) \frac{\cos \alpha r}{\cos \alpha a} \frac{a}{r}. \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes de $\sin \alpha r$ e $\cos \alpha r$,

$$\begin{aligned} u_a \frac{1}{\sin \alpha a} a + \frac{\beta^2}{\alpha} \left[\frac{\cos \alpha a}{\alpha^2} + \frac{a \sin \alpha a}{\alpha} \right] &= c_0 \frac{1}{\sin \alpha a} a, \\ -\frac{\beta^2}{\alpha} \left[\frac{\sin \alpha a}{\alpha^2} - \frac{a \cos \alpha a}{\alpha} \right] &= (u_a + \beta^2/\alpha^2 - c_0) \frac{1}{\cos \alpha a} a. \end{aligned}$$

Das equações acima obtemos duas expressões para c_0 , que devem ser equivalentes,

$$\begin{aligned} c_0 &= u_a + \frac{\beta^2}{a\alpha} \sin \alpha a \left(\frac{\cos \alpha a}{\alpha^2} + \frac{a \sin \alpha a}{\alpha} \right), \\ c_0 &= u_a + \beta^2/\alpha^2 + \frac{\beta^2}{a\alpha} \cos \alpha a \left(\frac{\sin \alpha a}{\alpha^2} - \frac{a \cos \alpha a}{\alpha} \right). \end{aligned}$$

De fato, podemos reescrever a segunda equação,

$$\begin{aligned} c_0 &= u_a + \beta^2/\alpha^2 + \frac{\beta^2}{a\alpha} \cos \alpha a \left(\frac{\sin \alpha a}{\alpha^2} - \frac{a \cos \alpha a}{\alpha} \right), \\ &= u_a + \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{\beta^2}{a\alpha} \left(\frac{\sin \alpha a \cos \alpha a}{\alpha^2} - \frac{a \cos^2 \alpha a}{\alpha} \right), \\ &= u_a + \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{\beta^2}{a\alpha} \frac{\sin \alpha a \cos \alpha a}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cos^2 \alpha a, \\ &= u_a + \frac{\beta^2}{a\alpha} \frac{\sin \alpha a \cos \alpha a}{\alpha^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} (1 - \cos^2 \alpha a), \\ &= u_a + \frac{\beta^2}{a\alpha} \frac{\sin \alpha a \cos \alpha a}{\alpha^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \sin^2 \alpha a, \end{aligned}$$

que é equivalente à primeira equação. Logo,

$$\begin{aligned} c_0 &= u_a + \frac{\beta^2}{a\alpha} \sin \alpha a \left(\frac{\cos \alpha a}{\alpha^2} + \frac{a \sin \alpha a}{\alpha} \right), \\ c_1 &= u_a + \beta^2/\alpha^2 - c_0, \\ &= \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{a\alpha} \sin \alpha a \left(\frac{\cos \alpha a}{\alpha^2} + \frac{a \sin \alpha a}{\alpha} \right). \end{aligned}$$

Com isso a solução fica,

$$\begin{aligned}
u &= v - \beta^2/\alpha^2, \\
&= c_0 \frac{j_0(\alpha r)}{j_0(\alpha a)} + c_1 \frac{y_0(\alpha r)}{y_0(\alpha a)} - \frac{\beta^2}{\alpha^2}, \\
&= \left[u_a + \frac{\beta^2}{a\alpha} \operatorname{sen} \alpha a \left(\frac{\cos \alpha a}{\alpha^2} + \frac{a \operatorname{sen} \alpha a}{\alpha} \right) \right] \frac{j_0(\alpha r)}{j_0(\alpha a)} \\
&\quad + \left[\frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{a\alpha} \operatorname{sen} \alpha a \left(\frac{\cos \alpha a}{\alpha^2} + \frac{a \operatorname{sen} \alpha a}{\alpha} \right) \right] \frac{y_0(\alpha r)}{y_0(\alpha a)} - \frac{\beta^2}{\alpha^2}.
\end{aligned}$$

(i)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) - \alpha^2 u = -\beta^2;$$

5. Considere o problema anterior com,

$$\begin{aligned}
a &\leq r \leq b, \\
u(a) &= u_a, \quad u(b) = u_b.
\end{aligned}$$

(a)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = -f(r);$$

Agora temos,

$$u_h = c_1 + \frac{c_2}{r},$$

e,

$$u_p = \int_r^{r_0} r' f(r') dr' - \frac{1}{r} \int_r^{r_0} r'^2 f(r') dr',$$

logo,

$$\begin{aligned}
u &= u_h + u_p, \\
&= c_1 + \frac{c_2}{r} + \int_r^{r_0} r' f(r') dr' - \frac{1}{r} \int_r^{r_0} r'^2 f(r') dr';
\end{aligned}$$

$$c_1 = u_b - \frac{a}{a-b} \left(u_b - u_a + \int_a^b r' f(r') dr' - \frac{1}{a} \int_a^b r'^2 f(r') dr' \right),$$

$$c_2 = \frac{ab}{a-b} \left(u_b - u_a + \int_a^b r' f(r') dr' - \frac{1}{a} \int_a^b r'^2 f(r') dr' \right);$$

$$u(r) = c_1 + \frac{c_2}{r} + \int_r^b r' f(r') dr' - \frac{1}{r} \int_r^b r'^2 f(r') dr'.$$

(b)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = +\alpha^2;$$

Usando o resultado do problema 4a ou 5a com $f = -\alpha^2$, a solução fica,

$$u(r) = c_1 + \frac{c_2}{r} + \frac{\alpha^2}{2}(r^2 - b^2) - \frac{\alpha^2}{3r}(r^3 - b^3).$$

em que escolhemos novamente $r_0 = b$. Vamos verificar que u satisfaz a equação diferencial. Temos,

$$\begin{aligned} u' &= -\frac{c_2}{r^2} + \alpha^2 r + \frac{\alpha^2}{3r^2}(r^3 - b^3) - \alpha^2 r, \\ r^2 u' &= -c_2 + \frac{\alpha^2}{3}(r^3 - b^3), \\ (r^2 u')' &= \alpha^2 r^2, \end{aligned}$$

como esperado. As condições de contorno nos dão,

$$\begin{aligned} u(a) &= c_1 + \frac{c_2}{a} + \frac{\alpha^2}{2}(a^2 - b^2) - \frac{\alpha^2}{3a}(a^3 - b^3) = u_a, \\ u(b) &= c_1 + \frac{c_2}{b} = u_b. \end{aligned}$$

Calculando c_1, c_2 ,

$$\begin{aligned} c_1 &= u_b - \frac{a}{a-b} \left(u_b - u_a + \frac{\alpha^2}{2}(a^2 - b^2) - \frac{\alpha^2}{3a}(a^3 - b^3) \right), \\ c_2 &= \frac{ab}{a-b} \left(u_b - u_a + \frac{\alpha^2}{2}(a^2 - b^2) - \frac{\alpha^2}{3a}(a^3 - b^3) \right). \end{aligned}$$

(c)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = -\alpha^2;$$

Usando o resultado da letra (b), com $-\alpha^2$ em lugar de $+\alpha^2$,

$$u(r) = c_1 + \frac{c_2}{r} - \frac{\alpha^2}{2}(r^2 - b^2) + \frac{\alpha^2}{3r}(r^3 - b^3),$$

$$\begin{aligned} c_1 &= u_b - \frac{a}{a-b} \left(u_b - u_a - \frac{\alpha^2}{2}(a^2 - b^2) + \frac{\alpha^2}{3a}(a^3 - b^3) \right), \\ c_2 &= \frac{ab}{a-b} \left(u_b - u_a - \frac{\alpha^2}{2}(a^2 - b^2) + \frac{\alpha^2}{3a}(a^3 - b^3) \right). \end{aligned}$$

As condições de contorno são satisfeitas. Verificando a solução,

$$\begin{aligned} u' &= -\frac{c_2}{r^2} - \alpha^2 r - \frac{\alpha^2}{3r^2}(r^3 - b^3) + \alpha^2 r, \\ r^2 u' &= -c_2 - \frac{\alpha^2}{3}(r^3 - b^3), \\ (r^2 u')' &= -\alpha^2 r^2, \end{aligned}$$

como esperado.

(d)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = +\alpha^2 u;$$

$$\begin{aligned} u(r) &= c_1 i_0(\alpha r) + c_2 k_0(\alpha r), \\ &= \frac{u_a k_0(\alpha b) - u_b k_0(\alpha a)}{i_0(\alpha a) k_0(\alpha b) - i_0(\alpha b) k_0(\alpha a)} i_0(\alpha r) \\ &\quad + \frac{u_b i_0(\alpha a) - u_a i_0(\alpha b)}{i_0(\alpha a) k_0(\alpha b) - i_0(\alpha b) k_0(\alpha a)} k_0(\alpha r). \end{aligned}$$

(e)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = -\alpha^2 u;$$

Agora temos,

$$u(r) = c_1 j_0(\alpha r) + c_2 y_0(\alpha r).$$

As condições de contorno nos dão,

$$\begin{aligned} u(a) &= c_1 j_0(\alpha a) + c_2 y_0(\alpha a) = u_a, \\ u(b) &= c_1 j_0(\alpha b) + c_2 y_0(\alpha b) = u_b. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
u(r) &= c_1 j_0(\alpha r) + c_2 y_0(\alpha r), \\
&= \frac{u_a y_0(\alpha b) - u_b y_0(\alpha a)}{j_0(\alpha a) y_0(\alpha b) - j_0(\alpha b) y_0(\alpha a)} j_0(\alpha r) \\
&\quad + \frac{u_b j_0(\alpha a) - u_a j_0(\alpha b)}{j_0(\alpha a) y_0(\alpha b) - j_0(\alpha b) y_0(\alpha a)} y_0(\alpha r).
\end{aligned}$$

(f)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) + \alpha^2 u = -f(r);$$

Usando o resultado de 4f, escolhendo $r_0 = b$,

$$\begin{aligned}
u &= c_1 j_0(\alpha r) + c_2 y_0(\alpha r) \\
&\quad - j_0(\alpha r) \alpha \int_r^b r'^2 y_0(\alpha r') f(r') dr' \\
&\quad + y_0(\alpha r) \alpha \int_r^b r'^2 j_0(\alpha r') f(r') dr'.
\end{aligned}$$

Determinamos c_1, c_2 das condições de contorno,

$$\begin{aligned}
u(a) &= c_1 j_0(\alpha a) + c_2 y_0(\alpha a) \\
&\quad - j_0(\alpha a) \alpha \int_a^b r'^2 y_0(\alpha r') f(r') dr' \\
&\quad + y_0(\alpha a) \alpha \int_a^b r'^2 j_0(\alpha r') f(r') dr' = u_a, \\
u(b) &= c_1 j_0(\alpha b) + c_2 y_0(\alpha b) = u_b.
\end{aligned}$$

(g)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) - \alpha^2 u = -f(r);$$

(h)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) + \alpha^2 u = -\beta^2;$$

(i)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) - \alpha^2 u = -\beta^2;$$

6. Considere a equação,

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = -f(r).$$

Calcule $f(r)$ para as soluções abaixo:

(a)

$$u(r) = \frac{Ae^{-\kappa r}}{r};$$

Calculando as derivadas de u ,

$$\begin{aligned} u' &= -\kappa \frac{Ae^{-\kappa r}}{r} - \frac{Ae^{-\kappa r}}{r^2}, \\ u'' &= \kappa^2 \frac{Ae^{-\kappa r}}{r} + \kappa \frac{Ae^{-\kappa r}}{r^2} + \kappa \frac{Ae^{-\kappa r}}{r^2} + 2 \frac{Ae^{-\kappa r}}{r^3}, \\ &= \kappa^2 \frac{Ae^{-\kappa r}}{r} + 2\kappa \frac{Ae^{-\kappa r}}{r^2} + 2 \frac{Ae^{-\kappa r}}{r^3}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} r^2 u' &= -\kappa r Ae^{-\kappa r} - Ae^{-\kappa r}, \\ (r^2 u')' &= -\kappa Ae^{-\kappa r} + \kappa^2 r Ae^{-\kappa r} + \kappa Ae^{-\kappa r} = \kappa^2 r Ae^{-\kappa r}, \\ \frac{1}{r^2} (r^2 u')' &= \frac{\kappa^2}{r} Ae^{-\kappa r}, \end{aligned}$$

e $f(r)$ é dada por,

$$f(r) = -\frac{\kappa^2}{r} Ae^{-\kappa r}.$$

Nesse caso temos portanto,

$$u(r) = \frac{Ae^{-\kappa r}}{r} = -\frac{1}{\kappa^2} f(r).$$

(b)

$$u(r) = \frac{e^{-\kappa r}}{r} (a + br);$$

(c)

$$u(r) = \frac{e^{-\kappa r}}{r}(a + br + cr^2);$$

(d)

$$u(r) = Ae^{-\kappa r};$$

Temos,

$$\begin{aligned} u' &= -\kappa Ae^{-\kappa r}, \\ r^2 u' &= -\kappa Ar^2 e^{-\kappa r}, \\ (r^2 u')' &= -2\kappa A r e^{-\kappa r} + \kappa^2 A r^2 e^{-\kappa r}, \\ \frac{1}{r^2} (r^2 u')' &= -2\kappa A \frac{e^{-\kappa r}}{r} + \kappa^2 A e^{-\kappa r}. \end{aligned}$$

Assim,

$$f(r) = 2\kappa A \frac{e^{-\kappa r}}{r} - \kappa^2 A e^{-\kappa r} = \kappa^2 A e^{-\kappa r} \left(\frac{2}{\kappa r} - 1 \right).$$

(e)

$$u(r) = e^{-\kappa r}(a + br);$$

(f)

$$u(r) = e^{-\kappa r}(a + br + cr^2).$$

7. Usando o resultado do problema 4(a), encontre a solução particular $u_p(r)$ para a equação,

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = -f(r),$$

com condições de contorno homogêneas em $0 \leq r \leq a$, nos seguintes casos:

(a)

$$f(r) = A \frac{e^{-\kappa r}}{r};$$

(b)

$$f(r) = \frac{e^{-\kappa r}}{r}(a + br);$$

(c)

$$f(r) = \frac{e^{-\kappa r}}{r}(a + br + cr^2);$$

(d)

$$f(r) = Ae^{-\kappa r};$$

(e)

$$f(r) = e^{-\kappa r}(a + br);$$

(f)

$$f(r) = e^{-\kappa r}(a + br + cr^2).$$

8. Considere o problema 7 no intervalo $a \leq r \leq b$.

3 Considerando $u = u(r, \theta)$

Substituindo,

$$u = R(r)\Theta(\theta), \quad (6)$$

em (1), obtemos,

$$r^2 \frac{R''}{R} + 2r \frac{R'}{R} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\Theta'}{\Theta} + \frac{\Theta''}{\Theta} = 0,$$

ou,

$$r^2 \frac{R''}{R} + 2r \frac{R'}{R} = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\Theta'}{\Theta} - \frac{\Theta''}{\Theta} = -\lambda^2.$$

A equação para R é, assim,

$$r^2 R'' + 2r R' + \lambda^2 R = 0, \quad (7)$$

e para Θ ,

$$\sin \theta \Theta'' + \cos \theta \Theta' - \lambda^2 \sin \theta \Theta = 0. \quad (8)$$

A equação para R , (7), é a equação de Euler ou Cauchy. Fazendo $R = r^p$, obtemos,

$$p^2 + p + \lambda^2 = 0. \quad (9)$$

A solução da equação acima é,

$$p = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda^2}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda^2}. \quad (10)$$

Assim, a solução de (7) é,

$$R(r) = Ar^{p_1} + Br^{p_2},$$

com

$$p_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda^2},$$

$$p_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda^2}.$$

Podemos escrever a solução acima de forma mais simples, notando que,

$$p_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda^2} = -\frac{1}{2} - \left(p_1 + \frac{1}{2}\right) = -1 - p_1.$$

Assim, fazendo $p_1 = n$, temos $p_2 = -n - 1$, a solução de (7) é,

$$R(r) = Ar^n + \frac{B}{r^{n+1}}. \quad (11)$$

A constante λ^2 em termos de n é,

$$p_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda^2} = n,$$

ou,

$$\frac{1}{4} - \lambda^2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 = n^2 + n + \frac{1}{4}.$$

Temos portanto,

$$\lambda^2 = -n(n+1). \quad (12)$$

Consideremos agora a equação para $\Theta(\theta)$, eq.(8). Usando a relação acima essa equação fica,

$$\sin \theta \Theta'' + \cos \theta \Theta' + n(n+1) \sin \theta \Theta = 0. \quad (13)$$

Fazendo $\xi = \cos \theta$ temos,

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = \frac{d\xi}{d\theta} \frac{d\Theta}{d\xi} = -\sin \theta \frac{d\Theta}{d\xi} = -\sqrt{1 - \cos^2 \theta} \frac{d\Theta}{d\xi} = -\sqrt{1 - \xi^2} \frac{d\Theta}{d\xi},$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = \frac{d\xi}{d\theta} \frac{d}{d\xi} \left(-\sqrt{1 - \xi^2} \frac{d\Theta}{d\xi} \right) = -\sin \theta \left(\frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \frac{d\Theta}{d\xi} - \sqrt{1 - \xi^2} \frac{d^2\Theta}{d\xi^2} \right),$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -\xi \frac{d\Theta}{d\xi} + (1 - \xi^2) \frac{d^2\Theta}{d\xi^2}.$$

A equação para Θ fica então,

$$(1 - \xi^2) \frac{d^2 \Theta}{d\xi^2} - 2\xi \frac{d\Theta}{d\xi} + n(n+1)\Theta = 0. \quad (14)$$

A equação acima é a *equação diferencial de Legendre* para $\Theta(\theta)$, ou, em termos de $y(x)$,

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \quad (15)$$

com $-1 \leq x \leq +1$. A solução são os *polinômios de Legendre* $P_n(x)$, e as *funções de Legendre do segundo tipo* $Q_n(x)$.

A solução geral de $\nabla^2 u = 0$, considerando $u = u(r, \theta)$, é então,

$$u = \left(A_1 r^n + \frac{B_1}{r^{n+1}} \right) [A_2 P_n(\xi) + B_2 Q_n(\xi)], \quad (16)$$

com $\xi = \cos \theta$. Consideramos n inteiro não negativo, que nos dará os principais casos para alguns sistemas físicos mais comuns. Como a equação de Laplace é linear e homogênea, o princípio da superposição é obedecido, e podemos escrever a solução mais geral como uma soma de termos como em (16),

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_{1n} r^n + \frac{B_{1n}}{r^{n+1}} \right) [A_{2n} P_n(\xi) + B_{2n} Q_n(\xi)]. \quad (17)$$

As constantes são determinadas pelas condições de contorno. Como a aplicação mais comum que encontraremos é em situações físicas, em geral teremos a condição de continuidade de u , que representará na maioria dos casos um potencial ou outra função contínua. Também continuamos tendo u finita em $r = 0$ e $u \rightarrow 0$ em $r \rightarrow \infty$.

4 Problemas

1-Considerando o intervalo $0 \leq r \leq \infty$, encontre a solução $u(r, \theta)$ com a condição de contorno,

$$u(a, \theta) = f(\theta).$$

(a)

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos \theta) \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad r < a,$$

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \theta) \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad r > a.$$

Se $f = 0$ a solução é identicamente nula.

(b) Consideremos o caso particular $f(\theta) = v_0(1 + 3 \cos \theta)$ (Spiegel [7], probl. 7.48). Temos,

$$u(r, \theta) = v_0 + 3v_0 \frac{r}{a} \cos \theta, \quad r < a,$$

$$u(r, \theta) = v_0 \frac{a}{r} + 3v_0 \frac{a^2}{r^2} \cos \theta, \quad r > a.$$

Se $v_0 = 0$ a solução é identicamente nula.

(c) Consideremos agora o caso $f(\theta) = v_0 \sin^2 \theta$ (Spiegel [7], probl. 7.49). Temos,

$$u(r, \theta) = \frac{2}{3} v_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} P_2(\cos \theta)\right), \quad r < a,$$

$$u(r, \theta) = \frac{2}{3} v_0 \frac{a}{r} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} P_2(\cos \theta)\right), \quad r > a.$$

Se $v_0 = 0$ a solução é identicamente nula.

(d) Consideremos agora o caso em que $f(\theta) = c \cos \theta$ (Churchill [12], probl. 9.3). Temos $A_1 = c/a$, $B_1 = ca^2$, e temos,

$$u(r, \theta) = \begin{cases} c \frac{r}{a} \cos \theta, & r < a, \\ c \frac{a}{r^2} \cos \theta, & r > a. \end{cases}$$

Se $c = 0$ a solução é identicamente nula.

(e) Se $f = f_0$ constante temos,

$$u(r, \theta) = u(r) = \begin{cases} f_0, & r < a, \\ f_0 \frac{a}{r}, & r > a, \end{cases}$$

que é a solução esfericamente simétrica, dependente apenas de r . Se $f_0 = 0$ a solução é identicamente nula.

2-Considerando o intervalo $a \leq r \leq b$, encontre a solução $u(r, \theta)$ com as condições de contorno,

$$\begin{aligned} u(a, \theta) &= f(\theta), \\ u(b, \theta) &= g(\theta). \end{aligned}$$

(a) Escrevemos a solução como, em $a \leq r \leq b$, como,

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta),$$

e as condições de contorno,

$$\begin{aligned} u(a, \theta) &= f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n a^n + \frac{B_n}{a^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta), \\ u(b, \theta) &= g(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n b^n + \frac{B_n}{b^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta). \end{aligned}$$

Os coeficientes das expansões de f e g em polinômios de Legendre são então,

$$\begin{aligned} A_n a^n + \frac{B_n}{a^{n+1}} &= \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta \equiv \alpha_n, \\ A_n b^n + \frac{B_n}{b^{n+1}} &= \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi g(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta \equiv \beta_n. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema acima para A_n, B_n obtemos,

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\alpha_n a^{n+1} - \beta_n b^{n+1}}{a^{2n+1} - b^{2n+1}}, \\ B_n &= \frac{(\beta_n a^n - \alpha_n b^n) a^{n+1} b^{n+1}}{a^{2n+1} - b^{2n+1}}. \end{aligned}$$

A solução é assim,

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n a^{n+1} - \beta_n b^{n+1}}{a^{2n+1} - b^{2n+1}} r^n P_n(\cos \theta) \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta_n a^n - \alpha_n b^n) a^{n+1} b^{n+1}}{a^{2n+1} - b^{2n+1}} \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta). \end{aligned}$$

Se $f = g = 0$ a solução é identicamente nula.

(b) Se $f = 0$ temos $\alpha_n = 0$ e,

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{r^{2n+1} - a^{2n+1}}{b^{2n+1} - a^{2n+1}} \left(\frac{b}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \theta).$$

(c) Consideremos agora o caso particular $g = 0$ (Churchill [12], probl. 9.7). Temos $\beta_n = 0$ e a solução fica, após rearranjarmos,

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{b^{2n+1} - r^{2n+1}}{b^{2n+1} - a^{2n+1}} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \theta).$$

(d) Se f e g são constantes, iguais a f_0, g_0 ,

$$u(r, \theta) = u(r) = \frac{f_0 a - g_0 b}{a - b} + \frac{(g_0 - f_0)ab}{a - b} \frac{1}{r},$$

que é a solução esfericamente simétrica.

3. Encontre a solução $u(r, \theta)$ para as equações:

(a)

$$\nabla u = -f(r, \theta);$$

(b)

$$\nabla u = +\alpha^2;$$

(c)

$$\nabla u = -\alpha^2;$$

(d)

$$\nabla u = +\alpha^2 u;$$

(e)

$$\nabla u = -\alpha^2 u;$$

(f)

$$\nabla u - \alpha^2 u = -f(r, \theta);$$

(g)

$$\nabla u + \alpha^2 u = -f(r, \theta);$$

com α constante e,

$$0 \leq r \leq a, \\ u(a, \theta) = \mu(\theta).$$

(a) Escrevemos a solução da forma usual como,

$$u(r, \theta) = u_h(r, \theta) + u_p(r, \theta),$$

com u_h satisfazendo a equação homogênea com condições de contorno não-homogêneas (problema 1 em $r \leq a$),

$$u_h(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos \theta) \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} \mu(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad 0 \leq r \leq a.$$

A solução particular u_p satisfaz a equação não-homogênea com condições de contorno homogêneas. Consideremos o caso particular em que $f = f_0$ constante. Temos,

$$u_p(r, \theta) = -\frac{f_0}{2}(r^2 - a^2) + \frac{f_0}{3r}(r^3 - a^3).$$

4. Considere o problema anterior com,

$$a \leq r \leq b, \\ u(a, \theta) = \mu(\theta), \quad u(b, \theta) = \nu(\theta).$$

5. Usando o resultado do problema 3(a), encontre a solução particular $u_p(r, \theta)$ para a equação,

$$\nabla u = -f(r, \theta),$$

com condições de contorno homogêneas em $0 \leq r \leq a$, nos seguintes casos:

(a)

$$f(r, \theta) = \frac{Ae^{-\kappa r}}{r} \sin \theta;$$

(b)

$$f(r, \theta) = \frac{e^{-\kappa r}}{r}(a + br) \sin \theta;$$

(c)

$$f(r, \theta) = \frac{e^{-\kappa r}}{r} (a + br + cr^2) \operatorname{sen} \theta;$$

(d)

$$u(r) = e^{-\kappa r} (a + br + cr^2) \operatorname{sen} \theta.$$

5 Considerando $u = u(r, \theta, \varphi)$

Escrevendo a solução na forma,

$$u = R(r)\Theta(\theta)e^{im\varphi}, \quad (18)$$

temos, de (1),

$$r^2 \frac{R''}{R} + 2r \frac{R'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\Theta'}{\Theta} - \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2 \theta} = 0,$$

ou,

$$r^2 \frac{R''}{R} + 2r \frac{R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} - \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\Theta'}{\Theta} + \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2 \theta} = -\lambda^2. \quad (19)$$

A equação para R é então,

$$r^2 R'' + 2r R' + \lambda^2 R = 0, \quad (20)$$

que é idêntica a (7), com $\lambda^2 = -n(n+1)$.

A equação para Θ é,

$$\frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\Theta'}{\Theta} - \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2 \theta} - \lambda^2 = 0,$$

ou,

$$\operatorname{sen}^2 \theta \Theta'' + \operatorname{sen} \theta \cos \theta \Theta' + [\operatorname{sen}^2 \theta n(n+1) - m^2] \Theta = 0. \quad (21)$$

Fazendo $\xi = \cos \theta$,

$$(1 - \xi^2) \frac{d^2 \Theta}{d\xi^2} - 2\xi \frac{d\Theta}{d\xi} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \xi^2} \right] \Theta = 0. \quad (22)$$

A equação acima é a *equação diferencial associada de Legendre* para $\Theta(\theta)$. Em termos de $y(x)$,

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right] y = 0, \quad (23)$$

com $-1 \leq x \leq +1$. A solução são as *funções associadas de Legendre do primeiro e do segundo tipo*, respectivamente $P_n^m(x)$ e $Q_n^m(x)$. A solução geral de $\nabla^2 u = 0$, considerando $u = u(r, \theta, \varphi)$, é então,

$$u = \left(A_1 r^n + \frac{B_1}{r^{n+1}} \right) [A_2 P_n^m(\xi) + B_2 Q_n^m(\xi)] e^{im\varphi}, \quad (24)$$

com $\xi = \cos \theta$. Consideramos o caso em que m e n são inteiros não negativos. Usando novamente o princípio da superposição, a solução mais geral é,

$$u = \sum_{nm} \left(A_{1n} r^n + \frac{B_{1n}}{r^{n+1}} \right) [A_{2nm} P_n^m(\xi) + B_{2nm} Q_n^m(\xi)] e^{im\varphi}, \quad (25)$$

Vamos escrever a solução acima da equação (1) de forma um pouco diferente,

$$u = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi). \quad (26)$$

substituindo a expressão acima em (1),

$$r^2 \frac{R''}{R} + 2r \frac{R'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\Theta'}{\Theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\Phi''}{\Phi} = 0,$$

ou,

$$r^2 \frac{R''}{R} + 2r \frac{R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\Theta'}{\Theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\Phi''}{\Phi} = -\lambda^2,$$

A equação para R é, assim,

$$r^2 R'' + 2r R' + \lambda^2 R = 0, \quad (27)$$

idêntica a (7), com $\lambda^2 = -n(n+1)$. Continuando, temos,

$$-\frac{\Theta''}{\Theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\Theta'}{\Theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\Phi''}{\Phi} = -\lambda^2,$$

ou,

$$-\sin^2 \theta \frac{\Theta''}{\Theta} - \sin \theta \cos \theta \frac{\Theta'}{\Theta} + \sin^2 \theta \lambda^2 = \frac{\Phi''}{\Phi} = -m^2.$$

A equação para Φ é então,

$$\Phi'' + m^2 \Phi = 0, \quad (28)$$

com solução,

$$\Phi = A_3 \cos m\varphi + B_3 \sin m\varphi. \quad (29)$$

A equação para Θ é,

$$\sin^2 \theta \Theta'' + \sin \theta \cos \theta \Theta' + [\sin^2 \theta n(n+1) - m^2] \Theta = 0, \quad (30)$$

idêntica a (21). A solução geral de $\nabla^2 u = 0$, considerando $u = u(r, \theta, \varphi)$, pode assim ser escrita como,

$$u = \left(A_1 r^n + \frac{B_1}{r^{n+1}} \right) [A_2 P_n^m(\xi) + B_2 Q_n^m(\xi)] [A_3 \cos m\varphi + B_3 \sin m\varphi], \quad (31)$$

com $\xi = \cos \theta$. Pelo princípio da superposição novamente,

$$u = \sum_{nm} \left(A_{1n} r^n + \frac{B_{1n}}{r^{n+1}} \right) [A_{2nm} P_n^m(\xi) + B_{2nm} Q_n^m(\xi)] \times \\ \times [A_{3m} \cos m\varphi + B_{3m} \sin m\varphi]. \quad (32)$$

Harmônicos Esféricos

Vamos escrever agora a solução de forma um pouco diferente,

$$u = AR(r)Y_{nm}(\theta, \varphi), \quad (33)$$

em que $Y_{nm}(\theta, \varphi)$ são os *harmônicos esféricos* (Jackson [3]),

$$Y_{nm}(\theta, \varphi) = C_{nm} P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}. \quad (34)$$

Os coeficientes C_{nm} são dados pela condição de normalização,

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{n'm'}^*(\theta, \varphi) Y_{nm}(\theta, \varphi) = \delta_{nn'} \delta_{mm'}. \quad (35)$$

Também temos a relação de completude,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Y_{nm}^*(\theta', \varphi') Y_{nm}(\theta, \varphi) = \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos \theta - \cos \theta'). \quad (36)$$

Vamos primeiro determinar os coeficientes C_{nm} em (34). Substituindo (34) em (35),

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi C_{n'm'} P_{n'}^{m'}(\cos \theta) e^{-im'\varphi} C_{nm} P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi} = \delta_{nn'} \delta_{mm'}, \\ C_{n'm'} C_{nm} \int_0^\pi \sin \theta d\theta P_{n'}^{m'}(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-im'\varphi} e^{im\varphi} = \delta_{nn'} \delta_{mm'}.$$

A integral em φ é nula se $m \neq m'$, e é igual a 2π se $m = m'$, logo,

$$C_{n'm'}C_{nm} \int_0^\pi \sin \theta d\theta P_{n'}^{m'}(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta) 2\pi \delta_{mm'} = \delta_{nn'} \delta_{mm'}.$$

Somando em m' ,

$$\begin{aligned} \sum_{m'} C_{n'm'}C_{nm} \int_0^\pi \sin \theta d\theta P_{n'}^{m'}(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta) 2\pi \delta_{mm'} &= \sum_{m'} \delta_{nn'} \delta_{mm'}, \\ 2\pi C_{n'm}C_{nm} \int_0^\pi \sin \theta d\theta P_{n'}^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta) &= \delta_{nn'}. \end{aligned}$$

Usando a relação de ortogonalidade para as funções associadas de Legendre do primeiro tipo ($x = \cos \theta$),

$$\int_{-1}^{+1} P_n^m(x) P_k^m(x) dx = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, & n = k, \end{cases}$$

e somando em n' ,

$$2\pi C_{nm}^2 \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} = 1.$$

Portanto,

$$C_{nm} = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}}, \quad (37)$$

e,

$$Y_{nm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}. \quad (38)$$

Vamos escrever a equação diferencial satisfeita pelos harmônicos esféricos. Substituindo (33) em (1) temos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} &= 0, \\ R''Y + \frac{2}{r} R'Y + \frac{R}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{R}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} &= 0, \\ r^2 \frac{R''}{R} + 2r \frac{R'}{R} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} &= 0, \end{aligned}$$

ou,

$$\frac{r^2 R''}{R} + 2r \frac{R'}{R} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} = -\lambda^2.$$

A equação para R é então,

$$r^2 R'' + 2r R' + \lambda^2 R = 0, \quad (39)$$

que é idêntica a (7), (20) e (27), com $\lambda^2 = -n(n+1)$.

A equação diferencial satisfeita por Y é,

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} - \lambda^2 Y = 0,$$

ou, como $\lambda^2 = -n(n+1)$,

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + n(n+1)Y = 0, \quad (40)$$

Uma função qualquer $f(\theta, \varphi)$ pode ser expandida em harmônicos esféricos,

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (41)$$

Para calcularmos os coeficientes A_{lm} multiplicamos a expressão acima dos dois lados por $Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi)$ e integramos em $d\Omega$,

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi f(\theta, \varphi) Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) = \\ & = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi). \end{aligned}$$

Usando (35),

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi f(\theta, \varphi) Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) = \\ & = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} \delta_{ll'} \delta_{mm'} = A_{l'm'}, \end{aligned}$$

ou,

$$A_{l'm'} = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi f(\theta, \varphi) Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi). \quad (42)$$

6 Problemas

1-Calcule a solução $u(r, \theta, \varphi)$ no interior e no exterior de uma esfera de raio a , com a condição de contorno (Spiegel [7], probl. 7.30),

$$u(a, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi).$$

(a) A solução é,

$$\begin{aligned} u(r, \theta, \varphi) = & \sum_n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos \theta) \times \\ & \times \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta \times \\ & \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(\theta, x) dx, \\ & + \sum_{nm} \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi \times \\ & \times \frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!} \int_0^\pi P_n^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta \times \\ & \times \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(\theta, x) \cos mx dx \\ & + \sum_{nm} \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n^m(\cos \theta) \sin m\varphi \times \\ & \times \frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!} \int_0^\pi P_n^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta \times \\ & \times \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(\theta, x) \sin mx dx, \\ & 0 \leq r \leq a, \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}
u(r, \theta, \varphi) = & \sum_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \theta) \times \\
& \times \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta \times \\
& \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(\theta, x) dx \\
& + \sum_{nm} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi \times \\
& \times \frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!} \int_0^\pi P_n^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta \times \\
& \times \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(\theta, x) \cos mx dx \\
& + \sum_{nm} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n^m(\cos \theta) \sin m\varphi \times \\
& \times \frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!} \int_0^\pi P_n^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta \times \\
& \times \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(\theta, x) \sin mx dx \\
& a \leq r \leq \infty.
\end{aligned}$$

Se $f = 0$ a solução é nula.

(b) Se $f = f_0$ constante, temos, em $0 \leq r \leq a$,

$$\begin{aligned}
u(r, \theta, \varphi) &= f_0, \\
0 &\leq r \leq a.
\end{aligned}$$

Em $a \leq r \leq \infty$ obtemos, de forma análoga,

$$u(r, \theta, \varphi) = f_0 \frac{a}{r}, \quad a \leq r \leq \infty.$$

A solução é esfericamente simétrica, como esperado.

(c) Consideremos o caso particular $f(\theta, \varphi) = v_0 \sin^2 \theta \cos 2\varphi$ (Spiegel [7], probl. 7.29). Temos,

$$u(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} v_0 \frac{r^2}{a^2} \sin^2 \theta \cos 2\varphi, & 0 \leq r \leq a, \\ v_0 \frac{a^3}{r^3} \sin^2 \theta \cos 2\varphi, & a \leq r \leq \infty. \end{cases}$$

(d) Consideremos agora $f(\theta, \varphi) = v_0 \sin^3 \theta \cos \theta \cos 3\varphi$ (Spiegel [7], probl. 7.63). Temos,

$$u(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} v_0 \frac{r^4}{a^4} \sin^3 \theta \cos \theta \cos 3\varphi, & 0 \leq r \leq a, \\ v_0 \frac{a^5}{r^5} \sin^3 \theta \cos \theta \cos 3\varphi, & a \leq r \leq \infty. \end{cases}$$

2. Considerando o intervalo $a \leq r \leq b$, encontre a solução $u(r, \theta, \varphi)$ com as condições de contorno,

$$\begin{aligned} u(a, \theta, \varphi) &= f(\theta, \varphi), \\ u(b, \theta, \varphi) &= g(\theta, \varphi). \end{aligned}$$

(b) Consideremos o caso particular f, g constantes, $f = f_0$ e $g = g_0$. A solução fica,

$$u(r, \theta, \varphi) = \frac{bg_0 - af_0}{b - a} + \left(\frac{f_0 - g_0}{b - a} \right) \frac{ab}{r},$$

como obtivemos para uma solução esfericamente simétrica, isto é, dependente apenas de r .

3. Consideramos agora o intervalo $0 \leq r \leq \infty$, e duas superfícies esféricas concêntricas em $r = a$ e $r = b$, com as mesmas condição de contorno do problema anterior.

Se $f = f_0$ e $g = g_0$ constantes,

$$u(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} f_0, & 0 \leq r \leq a, \\ \frac{bg_0 - af_0}{b - a} + \frac{ab(f_0 - g_0)}{b - a} \frac{1}{r}, & a \leq r \leq b, \\ \frac{b}{r} g_0, & b \leq r \leq \infty. \end{cases}$$

4. Encontre a solução $u(r, \theta, \varphi)$ para as equações:

(a)

$$\nabla u = -f(r, \theta, \varphi);$$

(b)

$$\nabla u = +\alpha^2;$$

(c)

$$\nabla u = -\alpha^2;$$

- (d) $\nabla u = +\alpha^2 u;$
- (e) $\nabla u = -\alpha^2 u;$
- (f) $\nabla u + \alpha^2 u = -f(r, \theta, \varphi);$
- (g) $\nabla u - \alpha^2 u = -f(r, \theta, \varphi);$
- (h) $\nabla^2 u + \alpha^2 u = -\beta^2;$
- (i) $\nabla^2 u - \alpha^2 u = -\beta^2;$

com α constante e,

$$0 \leq r \leq a,$$

$$u(a, \theta, \varphi) = \mu(\theta, \varphi).$$

(a) *Escrevemos a solução da forma usual como,*

$$u(r, \theta, \varphi) = u_h(r, \theta, \varphi) + u_p(r, \theta, \varphi),$$

com u_h satisfazendo a equação homogênea com condições de contorno não-homogêneas (problema 2), e u_p satisfazendo a equação não-homogênea com condições de contorno homogêneas.

$$C_{0k}(r) = \frac{2k+1}{2} \int_0^\pi P_k(\cos \theta') \sin \theta' d\theta' \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta', \varphi') d\varphi',$$

$$C_{nk}(r) = \frac{(2k+1)(k-n)!}{2(k+n)!} \int_0^\pi P_k^n(\cos \theta') \sin \theta' d\theta' \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta', \varphi') \cos(n\varphi') d\varphi',$$

$$D_{nk}(r) = \frac{(2k+1)(k-n)!}{2(k+n)!} \int_0^\pi P_k^n(\cos \theta') \sin \theta' d\theta' \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta', \varphi') \sin(n\varphi') d\varphi'.$$

$$\begin{aligned}
u_p(r, \theta, \varphi) = & \sum_{k=0}^{\infty} \left[-\frac{1}{2k+1} r^k \int_{r_0}^r r'^{-k+1} C_{0k}(r') dr' \right. \\
& \left. + \frac{1}{2k+1} r^{-k-1} \int_{r_0}^r r'^{k+2} C_{0k}(r') dr' \right] P_k(\cos \theta) \\
& + \sum_{n,k=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{2k+1} r^k \int_{r_0}^r r'^{-k+1} C_{nk}(r') dr' \right. \\
& \left. + \frac{1}{2k+1} r^{-k-1} \int_{r_0}^r r'^{k+2} C_{nk}(r') dr' \right] P_k^n(\cos \theta) \cos(n\varphi) \\
& + \sum_{n,k=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{2k+1} r^k \int_{r_0}^r r'^{-k+1} D_{nk}(r') dr' \right. \\
& \left. + \frac{1}{2k+1} r^{-k-1} \int_{r_0}^r r'^{k+2} D_{nk}(r') dr' \right] P_k^n(\cos \theta) \sin(n\varphi).
\end{aligned}$$

5. Considere o problema anterior com,

$$\begin{aligned}
a &\leq r \leq b, \\
u(a, \theta, \varphi) &= \mu(\theta, \varphi), \quad u(b, \theta, \varphi) = \nu(\theta, \varphi).
\end{aligned}$$

6. Uma esfera oca de raio a possui potencial dado por,

$$v(a, \theta) = \begin{cases} v_0 & 0 \leq \theta \leq \pi/2, \\ v_1 & \pi/2 \leq \theta \leq \pi. \end{cases}$$

Determine o potencial v no interior e no exterior da esfera (Spiegel [7], probl. 7.18, com $v_1 = 0$).

No interior da esfera, $0 \leq r \leq a$, temos,

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta).$$

Em $r = a$,

$$u(a, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos \theta) = \begin{cases} v_0 & 0 \leq \theta \leq \pi/2, \\ v_1 & \pi/2 \leq \theta \leq \pi. \end{cases}$$

Temos uma série em polinômios de Legendre, logo,

$$\begin{aligned}
A_n a^n &= \frac{2n+1}{2} v_0 \int_0^{\pi/2} P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta \\
&+ \frac{2n+1}{2} v_1 \int_{\pi/2}^{\pi} P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta
\end{aligned}$$

Calculando alguns coeficientes obtemos,

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{2}(v_0 + v_1), \\
A_1 &= \frac{3}{4a}(v_0 - v_1), \\
A_2 &= 0, \\
A_3 &= \frac{7}{16a^3}(v_1 - v_0), \\
A_4 &= 0, \\
A_5 &= \frac{11}{32a^5}(v_0 - v_1), \\
&\dots
\end{aligned}$$

Em $\theta = \pi/2$ temos $x = \cos \theta = 0$, e $P_n(x) = 0$ para n ímpar, logo,

$$u(r, \pi/2) = A_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v_1).$$

No exterior da esfera, em $a \leq r \leq \infty$, temos,

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta).$$

Em $r = a$,

$$u(a, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{a^{n+1}} P_n(\cos \theta) = \begin{cases} v_0 & 0 \leq \theta \leq \pi/2, \\ v_1 & \pi/2 \leq \theta \leq \pi. \end{cases}$$

Temos uma série em polinômios de Legendre como antes, logo,

$$\begin{aligned}
\frac{B_n}{a^{n+1}} &= \frac{2n+1}{2} v_0 \int_0^{\pi/2} P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta \\
&+ \frac{2n+1}{2} v_1 \int_{\pi/2}^{\pi} P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta
\end{aligned}$$

Vemos que,

$$\frac{B_n}{a^{n+1}} = A_n a^n,$$

ou,

$$B_n = A_n a^{2n+1}.$$

Alguns coeficientes são,

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{a}{2}(v_0 + v_1), \\ B_1 &= \frac{3a^2}{4}(v_0 - v_1), \\ B_2 &= 0, \\ B_3 &= \frac{7a^4}{16}(v_1 - v_0), \\ B_4 &= 0, \\ B_5 &= \frac{11a^6}{32}(v_0 - v_1), \\ &\dots \end{aligned}$$

Em $\theta = \pi/2$,

$$u(r, \pi/2) = \frac{B_0}{a} = \frac{1}{2}(v_0 + v_1).$$

Se $v_0 = v_1$,

$$u(r, \theta) = \begin{cases} v_0, & r \leq a, \\ v_0 \frac{a}{r}, & r \geq a. \end{cases}$$

Se $v_1 = -v_0$,

$$\begin{aligned} A_0 &= 0, \\ A_1 &= \frac{3}{2a}v_0, \\ A_2 &= 0, \\ A_3 &= -\frac{7}{8a^3}v_0, \\ A_4 &= 0, \\ A_5 &= \frac{11}{16a^5}v_0, \\ &\dots \end{aligned}$$

e o potencial interior é,

$$u(r, \theta) = \frac{3r}{2a}v_0P_1(\cos \theta) - \frac{7r^3}{8a^3}v_0P_3(\cos \theta) + \frac{11r^5}{16a^5}v_0P_5(\cos \theta) + \dots, \quad r \leq a.$$

Temos $u(r, \pi/2) = 0$. Em $r \geq a$ temos,

$$\begin{aligned} B_0 &= 0, \\ B_1 &= \frac{3a^2}{2}v_0, \\ B_2 &= 0, \\ B_3 &= -\frac{7a^4}{8}v_0, \\ B_4 &= 0, \\ B_5 &= \frac{11a^6}{16}v_0, \\ &\dots \end{aligned}$$

e o potencial exterior é,

$$u(r, \theta) = \frac{3a^2}{2r^2}v_0P_1(\cos \theta) - \frac{7a^4}{8r^4}v_0P_3(\cos \theta) + \frac{11a^6}{16r^6}v_0P_5(\cos \theta) + \dots$$

Temos $u(r, \pi/2) = 0$ também.

7. Um hemisfério de raio a possui potencial igual a v_0 em $r = a$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, e igual a v_1 na base definida por $0 \leq r \leq a$, $\theta = \pi/2$,

$$v(r, \theta) = \begin{cases} v_0 & , \quad r = a, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2, \\ v_1 & , \quad 0 \leq r \leq a, \quad \theta = \pi/2. \end{cases}$$

Determine o potencial v no interior e no exterior do hemisfério (Spiegel [7], probl. 7.19, com $v_1 = 0$).

Podemos resolver esse problema considerando uma esfera com potencial dado na superfície $r = a$ por,

$$v(a, \theta) = \begin{cases} v_0 & , \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2, \\ v_2 & , \quad \pi/2 \leq \theta \leq \pi, \end{cases}$$

com $v_2 = 2v_1 - v_0$. Em $\theta = \pi/2$, na base do hemisfério, o potencial é,

$$\frac{v_0 + v_2}{2} = v_1,$$

como esperado.

Usando o resultado do problema 1, com v_1 substituído por v_2 , escrevemos a solução como,

$$u(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta), & 0 \leq r \leq a, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta), & r \geq a, \end{cases}$$

com,

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2}(v_0 + v_2), \\ A_1 &= \frac{3}{4a}(v_0 - v_2), \\ A_2 &= 0, \\ A_3 &= \frac{7}{16a^3}(v_2 - v_0), \\ A_4 &= 0, \\ A_5 &= \frac{11}{32a^5}(v_0 - v_2), \\ &\dots \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{a}{2}(v_0 + v_2), \\ B_1 &= \frac{3a^2}{4}(v_0 - v_2), \\ B_2 &= 0, \\ B_3 &= \frac{7a^4}{16}(v_2 - v_0), \\ B_4 &= 0, \\ B_5 &= \frac{11a^6}{32}(v_0 - v_2), \\ &\dots \end{aligned}$$

Como $v_0 + v_2 = 2v_1$, $v_0 - v_2 = 2(v_0 - v_1)$, o potencial interior é,

$$\begin{aligned}
u(r, \theta) &= v_1 P_0(\cos \theta) + \frac{3}{2}(v_0 - v_1) \frac{r}{a} P_1(\cos \theta) \\
&\quad - \frac{7}{8}(v_0 - v_1) \frac{r^3}{a^3} P_3(\cos \theta) + \frac{11}{16}(v_0 - v_1) \frac{r^5}{a^5} P_5(\cos \theta) + \dots, \\
&\quad 0 \leq r \leq a,
\end{aligned}$$

e o potencial exterior é,

$$\begin{aligned}
u(r, \theta) &= v_1 \frac{a}{r} P_0(\cos \theta) + \frac{3}{2}(v_0 - v_1) \frac{a^2}{r^2} P_1(\cos \theta) \\
&\quad - \frac{7}{8}(v_0 - v_1) \frac{a^4}{r^4} P_3(\cos \theta) + \frac{11}{16}(v_0 - v_1) \frac{a^6}{r^6} P_5(\cos \theta) + \dots \\
&\quad r \geq a.
\end{aligned}$$

8. Determine o potencial v no interior e no exterior de uma esfera de raio a , quando o potencial na superfície é dado por,

- (a) $v_0 \sin \theta$;
- (b) $v_0 \sin^2 \theta$ (Spiegel [7], probl. 7.49);
- (c) $v_0(1 + 3 \cos \theta)$ (Spiegel [7], probl. 7.48);
- (d) $v_0 \cos \varphi$;
- (e) $v_0 \cos^2 \varphi$;
- (f) $v_0 \sin^3 \theta \cos \theta \cos 3\varphi$ (Spiegel [7], probl. 7.63).

Determine o potencial considerando agora as condições acima para a derivada $u' = \partial u / \partial r$ em $r \rightarrow a_-$. Em todos os casos considere u contínua.

9. Considere uma região esférica de raio interno a e raio externo b . Determine o potencial v em $a < r < b$ quando,

- (a) $v(a) = v_1 \sin \theta$, $v(b) = v_2 \cos \theta$;
- (b) $v(a) = v_1 \sin \theta \cos \varphi$, $v(b) = v_2 \cos \theta \sin \varphi$.

10. Considere um círculo de massa m e raio a , com distribuição uniforme de massa. (a) Calcule o potencial gravitacional sobre o eixo do círculo. (b) Calcule o potencial gravitacional em qualquer ponto do espaço (Spiegel [7], probl. 7.20).

(a) A densidade linear de massa é $\lambda = m/2\pi a$. O potencial gravitacional em um ponto P sobre o eixo z , devido a um elemento de massa dm do círculo, é,

$$dV = \frac{Gdm}{r},$$

em que G é a constante universal da gravitação, e r é a distância do elemento de massa dm ao ponto P . Como $r^2 = z^2 + a^2$ e $dm = \lambda ds = \lambda a d\varphi$,

$$dV = \frac{G\lambda a d\varphi}{\sqrt{z^2 + a^2}}.$$

O potencial em P é então,

$$V = \frac{2\pi G\lambda a}{\sqrt{z^2 + a^2}}, \quad P = (0, 0, z).$$

(b) Vamos agora calcular o potencial em qualquer ponto do espaço. Temos,

$$V(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta) & r < a, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) & r > a. \end{cases}$$

Consideramos primeiro o caso $r < a$. Em $\theta = 0$, temos $r = z$, e como $P_n(1) = 1$,

$$\frac{2\pi G\lambda a}{\sqrt{z^2 + a^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n, \quad z < a.$$

Reescrevendo a expressão acima,

$$\frac{2\pi G\lambda a}{a\sqrt{1 + (z/a)^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n.$$

Usando agora a expansão,

$$\begin{aligned} (1+x)^{-1/2} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 \\ &\quad + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \dots, \quad x < 1, \end{aligned}$$

temos,

$$\begin{aligned} (1+x^2)^{-1/2} &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 \\ &\quad + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^8 \dots, \quad x < 1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$2\pi G\lambda \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a} \right)^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{z}{a} \right)^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{z}{a} \right)^6 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \left(\frac{z}{a} \right)^8 \dots \right] = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n .$$

Os coeficientes A_n são então,

$$\begin{aligned} A_0 &= 2\pi G\lambda , \\ A_1 &= 0 , \\ A_2 &= -2\pi G\lambda \frac{1}{2} \frac{1}{a^2} , \\ A_3 &= 0 , \\ A_4 &= 2\pi G\lambda \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1}{a^4} , \\ A_5 &= 0 , \\ A_6 &= -2\pi G\lambda \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{1}{a^6} , \\ A_7 &= 0 , \\ A_8 &= 2\pi G\lambda \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{1}{a^8} , \\ &\dots \end{aligned}$$

e temos,

$$\begin{aligned} V(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta) , \\ &= 2\pi G\lambda \left[1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{a^2} P_2(\cos \theta) + \frac{3}{8} \frac{r^4}{a^4} P_4(\cos \theta) - \frac{5}{16} \frac{r^6}{a^6} P_6(\cos \theta) + \frac{35}{128} \frac{r^8}{a^8} P_8(\cos \theta) \dots \right] , \quad r < a . \end{aligned}$$

A fórmula geral para A_n é,

$$\begin{aligned} A_{2n} &= 2\pi G\lambda (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \frac{1}{a^{2n}} , \\ A_{2n+1} &= 0 , \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

O potencial em $r < a$ é assim,

$$V = 2\pi G\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n} P_{2n}(\cos \theta), \quad r < a.$$

Considerando agora o caso $r > a$, escrevemos de forma análoga em $\theta = 0$,

$$\frac{2\pi G\lambda a}{\sqrt{z^2 + a^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{z^{n+1}}, \quad z > a.$$

Reescrevendo a expressão acima,

$$\frac{2\pi G\lambda a}{z\sqrt{1 + (a/z)^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{z^{n+1}}.$$

Portanto,

$$2\pi G\lambda \frac{a}{z} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{z}\right)^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{a}{z}\right)^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{a}{z}\right)^6 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \left(\frac{a}{z}\right)^8 \dots \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{z^{n+1}},$$

ou,

$$2\pi G\lambda \left[\frac{a}{z} - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{z}\right)^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{a}{z}\right)^5 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{a}{z}\right)^7 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \left(\frac{a}{z}\right)^9 + \dots \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{z^{n+1}}.$$

Os coeficientes B_n são então,

$$\begin{aligned}
B_0 &= 2\pi G\lambda a, \\
B_1 &= 0, \\
B_2 &= -2\pi G\lambda \frac{1}{2}a^3, \\
B_3 &= 0, \\
B_4 &= 2\pi G\lambda \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}a^5, \\
B_5 &= 0, \\
B_6 &= -2\pi G\lambda \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}a^7, \\
B_7 &= 0, \\
B_8 &= 2\pi G\lambda \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}a^9, \\
&\dots
\end{aligned}$$

Temos então, em $r > a$,

$$\begin{aligned}
V(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta), \\
&= 2\pi G\lambda \left[\frac{a}{r} - \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^3} P_2(\cos \theta) + \frac{3}{8} \frac{a^5}{r^5} P_4(\cos \theta) \right. \\
&\quad \left. - \frac{5}{16} \frac{a^7}{r^7} P_6(\cos \theta) + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{a^9}{r^9} P_8(\cos \theta) + \dots \right], \quad r > a.
\end{aligned}$$

A fórmula geral para B_n é,

$$\begin{aligned}
B_{2n} &= 2\pi G\lambda (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2n!!} a^{2n+1}, \\
B_{2n+1} &= 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

O potencial em $r > a$ é portanto,

$$V = 2\pi G\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1} P_{2n}(\cos \theta), \quad r > a.$$

11. Considere um disco de massa m e raio a , com distribuição uniforme de massa. (a) Calcule o potencial gravitacional sobre o eixo do disco. (b) Calcule o potencial gravitacional em qualquer ponto do espaço (Spiegel [7],

probl. 7.55). (c) Calcule o potencial para uma faixa de raio interno a e raio externo b . (d) Faça o limite $\delta \rightarrow 0$ em $b = a + \delta$ e obtenha o resultado do problema 5.

(a) Para uma faixa de raio r e largura dr sobre o disco, o potencial sobre o eixo z é, usando a expressão para o potencial de um círculo,

$$dV = \frac{2\pi Gr\lambda}{\sqrt{z^2 + r^2}} = \frac{2\pi Gr\sigma dr}{\sqrt{z^2 + r^2}},$$

em que usamos $\lambda = \sigma dr$. Integrando em r de 0 até a ,

$$V = \int dV = 2\pi G\sigma \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{z^2 + r^2}} = 2\pi G\sigma(\sqrt{z^2 + a^2} - z),$$

(b) O potencial em um ponto qualquer é,

$$V = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta), & r < a, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta), & r > a. \end{cases}$$

Sobre o eixo z temos $\theta = 0$, logo, como nesse caso $r = z$ e $P_n(1) = 1$,

$$V = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n, & z < a, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{z^{n+1}}, & z > a. \end{cases}$$

Portanto, em $z < a$,

$$2\pi G\sigma(\sqrt{z^2 + a^2} - z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n, \quad z < a.$$

Usando a relação,

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \dots$$

temos,

$$2\pi G\sigma a \left(1 + \frac{1}{2} \frac{z^2}{a^2} - \frac{1}{2 \cdot 4} \frac{z^4}{a^4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{z^6}{a^6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{z^8}{a^8} + \dots - \frac{z}{a} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n, \quad z < a.$$

Os coeficientes A_n são então,

$$\begin{aligned}
A_0 &= 2\pi G\sigma a, \\
A_1 &= -2\pi G\sigma, \\
A_2 &= \pi G\sigma \frac{1}{a}, \\
A_3 &= 0, \\
A_4 &= -\pi G\sigma \frac{1}{4a^3}, \\
A_5 &= 0, \\
A_6 &= \pi G\sigma \frac{1}{8a^5}, \\
A_7 &= 0, \\
A_8 &= -2\pi G\sigma \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{1}{a^7}, \\
&\dots
\end{aligned}$$

e a solução para $r < a$ é,

$$\begin{aligned}
V(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta), \\
&= 2\pi G\sigma a \left[1 - \frac{r}{a} P_1(\cos \theta) + \frac{r^2}{2a^2} P_2(\cos \theta) - \frac{r^4}{8a^4} P_4(\cos \theta) \right. \\
&\quad \left. + \frac{r^6}{16a^6} P_6(\cos \theta) - \frac{5r^8}{128a^8} P_8(\cos \theta) + \dots \right], \quad r < a.
\end{aligned}$$

Considerando agora $z > a$, temos,

$$2\pi G\sigma(\sqrt{z^2 + a^2} - z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{z^{n+1}}, \quad z > a,$$

ou,

$$\begin{aligned}
&2\pi G\sigma a \left(\frac{a}{2z} - \frac{a^3}{8z^3} + \frac{a^5}{16z^5} - \frac{5a^7}{128z^7} \right. \\
&\quad \left. + \dots - 1 \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{z^{n+1}}, \quad z > a.
\end{aligned}$$

Os coeficientes B_n são então,

$$\begin{aligned}
B_0 &= \pi G \sigma a^2, \\
B_1 &= 0, \\
B_2 &= -\pi G \sigma \frac{a^4}{4}, \\
B_3 &= 0, \\
B_4 &= \pi G \sigma \frac{a^6}{8}, \\
B_5 &= 0, \\
B_6 &= -\pi G \sigma \frac{5a^8}{64}, \\
&\dots
\end{aligned}$$

e a solução em $r > a$ é,

$$\begin{aligned}
V(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta), \\
&= 2\pi G \sigma a \left[\frac{a}{2r} - \frac{a^3}{8r^3} P_2(\cos \theta) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a^5}{16r^5} P_4(\cos \theta) - \frac{5a^7}{128r^7} P_6(\cos \theta) + \dots \right], \quad r > a.
\end{aligned}$$

(c) Consideramos agora uma faixa de raio interno a e raio externo b . Primeiro escrevemos o potencial para um disco de raio b ,

$$\begin{aligned}
V(r, \theta) &= 2\pi G \sigma b \left[1 - \frac{r}{b} P_1(\cos \theta) + \frac{r^2}{2b^2} P_2(\cos \theta) \right. \\
&\quad \left. - \frac{r^4}{8b^4} P_4(\cos \theta) + \frac{r^6}{18b^6} P_6(\cos \theta) + \dots \right], \quad r < b, \\
V(r, \theta) &= 2\pi G \sigma b \left[\frac{b}{2r} - \frac{b^3}{8r^3} P_2(\cos \theta) \right. \\
&\quad \left. + \frac{b^5}{16r^5} P_4(\cos \theta) - \frac{5b^7}{128r^7} P_6(\cos \theta) + \dots \right], \quad r > b.
\end{aligned}$$

Precisamos subtrair o potencial de um disco de raio a ,

$$\begin{aligned}
V(r, \theta) &= 2\pi G\sigma a \left[1 - \frac{r}{a}P_1(\cos \theta) + \frac{r^2}{2a^2}P_2(\cos \theta) \right. \\
&\quad \left. - \frac{r^4}{8a^4}P_4(\cos \theta) + \frac{r^6}{16a^6}P_6(\cos \theta) + \dots \right], \quad r < a, \\
V(r, \theta) &= 2\pi G\sigma a \left[\frac{a}{2r} - \frac{a^3}{8r^3}P_2(\cos \theta) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a^5}{16r^5}P_4(\cos \theta) - \frac{5a^7}{128r^7}P_6(\cos \theta) + \dots \right], \quad r > a.
\end{aligned}$$

O potencial resultante é então, em $r < a$,

$$\begin{aligned}
V(r, \theta) &= 2\pi G\sigma b \left[1 - \frac{r}{b}P_1(\cos \theta) + \frac{r^2}{2b^2}P_2(\cos \theta) \right. \\
&\quad \left. - \frac{r^4}{8b^4}P_4(\cos \theta) + \frac{r^6}{16b^6}P_6(\cos \theta) + \dots \right] \\
&\quad - 2\pi G\sigma a \left[1 - \frac{r}{a}P_1(\cos \theta) + \frac{r^2}{2a^2}P_2(\cos \theta) \right. \\
&\quad \left. - \frac{r^4}{8a^4}P_4(\cos \theta) + \frac{r^6}{16a^6}P_6(\cos \theta) + \dots \right], \quad r < a.
\end{aligned}$$

Em $a < r < b$ temos,

$$\begin{aligned}
V(r, \theta) &= 2\pi G\sigma b \left[1 - \frac{r}{b}P_1(\cos \theta) + \frac{r^2}{2b^2}P_2(\cos \theta) \right. \\
&\quad \left. - \frac{r^4}{8b^4}P_4(\cos \theta) + \frac{r^6}{16b^6}P_6(\cos \theta) + \dots \right] \\
&\quad - 2\pi G\sigma a \left[\frac{a}{2r} - \frac{a^3}{8r^3}P_2(\cos \theta) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a^5}{16r^5}P_4(\cos \theta) - \frac{5a^7}{128r^7}P_6(\cos \theta) + \dots \right], \quad a < r < b.
\end{aligned}$$

Finalmente, em $r > b$ temos,

$$\begin{aligned}
V(r, \theta) = & 2\pi G\sigma b \left[\frac{b}{2r} - \frac{b^3}{8r^3} P_2(\cos \theta) \right. \\
& + \frac{b^5}{16r^5} P_4(\cos \theta) - \frac{5b^7}{128r^7} P_6(\cos \theta) + \dots \Big] \\
& - 2\pi G\sigma a \left[\frac{a}{2r} - \frac{a^3}{8r^3} P_2(\cos \theta) \right. \\
& + \frac{a^5}{16r^5} P_4(\cos \theta) - \frac{5a^7}{128r^7} P_6(\cos \theta) + \dots \Big] , \quad r > b .
\end{aligned}$$

(d) Fazemos agora no resultado anterior $b = a + \delta$. Em $r < a$,

$$\begin{aligned}
V(r, \theta) = & 2\pi G\sigma(a + \delta) \left[1 - \frac{r}{a}(1 - \delta/a)P_1(\cos \theta) + \frac{r^2}{2a^2}(1 - 2\delta/a)P_2(\cos \theta) \right. \\
& - \frac{r^4}{8a^4}(1 - 4\delta/a)P_4(\cos \theta) + \frac{r^6}{16a^6}(1 - 6\delta/a)P_6(\cos \theta) + \dots \Big] \\
& - 2\pi G\sigma a \left[1 - \frac{r}{a}P_1(\cos \theta) + \frac{r^2}{2a^2}P_2(\cos \theta) \right. \\
& - \frac{r^4}{8a^4}P_4(\cos \theta) + \frac{r^6}{16a^6}P_6(\cos \theta) + \dots \Big] , \\
= & 2\pi G\sigma\delta \left[1 - \frac{r^2}{2a^2}P_2(\cos \theta) \right. \\
& + \frac{3r^4}{8a^4}P_4(\cos \theta) - \frac{5r^6}{16a^6}P_6(\cos \theta) + \dots \Big] , \quad r < a .
\end{aligned}$$

Em $r > b$, com $b = a + \delta$,

$$\begin{aligned}
V(r, \theta) &= 2\pi G\sigma(a + \delta) \left[\frac{a + \delta}{2r} - \frac{(a + \delta)^3}{8r^3} P_2(\cos \theta) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(a + \delta)^5}{16r^5} P_4(\cos \theta) - \frac{5(a + \delta)^7}{128r^7} P_6(\cos \theta) + \dots \right] \\
&\quad - 2\pi G\sigma a \left[\frac{a}{2r} - \frac{a^3}{8r^3} P_2(\cos \theta) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a^5}{16r^5} P_4(\cos \theta) - \frac{5a^7}{128r^7} P_6(\cos \theta) + \dots \right], \\
&= 2\pi G\sigma\delta \left[\frac{a}{r} - \frac{a^3}{2r^3} P_2(\cos \theta) + \frac{3a^5}{8r^5} P_4(\cos \theta) \right. \\
&\quad \left. - \frac{5a^7}{16r^7} P_6(\cos \theta) + \dots \right], \quad r > a + \delta.
\end{aligned}$$

No limite $\delta \rightarrow 0$ temos um círculo de raio a e densidade linear $\lambda = \sigma\delta$.

12. Uma esfera de raio a e massa M possui distribuição uniforme de massa. Calcule o potencial gravitacional ϕ em todo o espaço (Spiegel [7], probl. 7.51, 7.52).

Em $r < a$ temos o potencial ϕ satisfazendo a equação de Poisson,

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho,$$

em que $\rho = M/(4\pi a^3/3)$ é a densidade, nesse caso uniforme. Como $\phi = \phi(r)$, temos,

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = 4\pi G\rho,$$

logo,

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = 4\pi G\rho r^2,$$

ou,

$$r^2 \frac{d\phi}{dr} = \frac{4\pi G\rho}{3} r^3 + c_0.$$

Prosseguindo,

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{4\pi G\rho}{3} r + \frac{c_0}{r^2},$$

portanto,

$$\phi = \frac{2\pi G\rho}{3}r^2 - \frac{c_0}{r} + c_1, \quad r < a.$$

Para que a solução seja finita em $r = 0$ devemos ter $c_0 = 0$. Em $r > a$,

$$\phi = -\frac{GM}{r},$$

equivalente ao de uma partícula de massa M . A continuidade do potencial em $r = a$ nos dá,

$$\frac{2\pi G\rho}{3}a^2 + c_1 = -\frac{GM}{a},$$

logo,

$$c_1 = -\frac{3GM}{2a}.$$

O potencial em $r < a$ é portanto,

$$\phi = \frac{2\pi G\rho}{3}r^2 - \frac{3GM}{2a}, \quad r < a,$$

ou,

$$\phi = \frac{GM}{2a} \left(\frac{r^2}{a^2} - 3 \right), \quad r < a.$$

13. Uma casca esférica de raio interno a e raio externo b possui massa M , com distribuição uniforme de massa. Calcule o potencial gravitacional ϕ em todo o espaço (Spiegel [7], probl. 7.54).

Escrevemos agora, usando $\rho = M/(4\pi(b^3 - a^3)/3)$,

$$\phi = \begin{cases} c_0, & r < a, \\ \frac{GM}{2(b^3 - a^3)} - \frac{c_1}{r} + c_2, & a < r < b, \\ -\frac{GM}{r}, & r > b. \end{cases}$$

A derivada do potencial é,

$$\frac{d\phi}{dr} = \begin{cases} 0, & r < a, \\ \frac{GM}{b^3 - a^3} + \frac{c_1}{r^2}, & a < r < b, \\ \frac{GM}{r^2}, & r > b. \end{cases}$$

A continuidade do potencial e da derivada em $r = a$ nos dá,

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{GMa^2}{2(b^3 - a^3)} - \frac{c_1}{a} + c_2, \\ \frac{GMb^2}{2(b^3 - a^3)} - \frac{c_1}{b} + c_2 &= -\frac{GM}{b}, \\ \frac{GMa}{b^3 - a^3} + \frac{c_1}{a^2} &= 0, \\ \frac{GMb}{b^3 - a^3} + \frac{c_1}{b^2} &= \frac{GM}{b^2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} c_0 &= -\frac{3GM(b^2 - a^2)}{2(b^3 - a^3)}, \\ c_1 &= -\frac{GMa^3}{b^3 - a^3}, \\ c_2 &= -\frac{3GMb^2}{2(b^3 - a^3)}. \end{aligned}$$

O potencial é então,

$$\phi = \begin{cases} -\frac{GM}{2(b^3 - a^3)} 3(b^2 - a^2), & r < a, \\ \frac{GM}{2(b^3 - a^3)} \left(r^2 + \frac{2a^3}{r} - 3b^2 \right), & a < r < b, \\ -\frac{GM}{r}, & r > b, \end{cases}$$

ou, em termos de ρ ,

$$\phi = \begin{cases} -2\pi G\rho(b^2 - a^2), & r < a, \\ \frac{2\pi G\rho}{3} \left(r^2 + \frac{2a^3}{r} - 3b^2 \right), & a < r < b, \\ -\frac{4\pi G\rho(b^3 - a^3)}{3r}, & r > b, \end{cases}$$

14. Uma casca esférica de raio a e espessura infinitesimal possui massa M , com distribuição uniforme de massa. Calcule o potencial gravitacional em todo o espaço.

Fazemos $b = a + \delta$ no problema anterior e tomamos o limite $\delta \rightarrow 0$. Temos,

$$\begin{aligned} b^2 - a^2 &\simeq 2a\delta, \\ b^3 - a^3 &\simeq 3a^2\delta, \end{aligned}$$

logo,

$$\phi = \begin{cases} -\frac{GM}{r}, & r < a, \\ -\frac{GM}{r}, & r > a, \end{cases}$$

ou, em termos de ρ ,

$$\phi = \begin{cases} -4\pi a G \rho \delta, & r < a, \\ -\frac{4\pi a^2 G \rho \delta}{r}, & r > a. \end{cases}$$

Podemos definir uma densidade superficial de massa σ para uma casca de espessura $\delta \rightarrow 0$. Escrevendo ρ ,

$$\rho = \frac{M}{(4\pi/3)(b^3 - a^3)} \simeq \frac{M}{(4\pi/3)(3a^2\delta)} \simeq \frac{M}{4\pi a^2 \delta},$$

ou,

$$\sigma \equiv \rho \delta = \frac{M}{4\pi a^2}.$$

Portanto, em termos de σ ,

$$\phi = \begin{cases} -4\pi a G \sigma, & r < a, \\ -\frac{4\pi a^2 G \sigma}{r}, & r > a. \end{cases}$$

15. Considere o problema 2, com a condição de contorno dada para a derivada $\partial v / \partial r$, em vez de para a função v .

16. Considere o problema 2, com a condição de contorno dada para a função v em $r = a$ e para a derivada $\partial v / \partial r$ em $r = b$.

17. Considere o problema 2, com a condição de contorno dada para a derivada $\partial v / \partial r$ em $r = a$, e para a função v em $r = b$.

18. Usando o resultado do problema 4(a), encontre a solução particular $u_p(r, \theta, \varphi)$ para a equação,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -f(r, \theta, \varphi),$$

com condições de contorno homogêneas em $0 \leq r \leq a$, nos seguintes casos:

(a)

$$f(r, \theta, \varphi) = Ar^2 \sin \theta \cos 2\varphi;$$

(b)

$$f(r, \theta, \varphi) = \frac{Ae^{-\kappa r}}{r} \sin \theta \cos \varphi;$$

(c)

$$f(r, \theta, \varphi) = \frac{e^{-\kappa r}}{r} (a + br) \sin \theta \cos \varphi;$$

(d)

$$f(r, \theta, \varphi) = \frac{e^{-\kappa r}}{r} (a + br + cr^2) \sin \theta \cos \varphi.$$

(e)

$$f(r, \theta, \varphi) = e^{-\kappa r} (a + br + cr^2) \sin \theta \cos \varphi.$$

(a)

$$\frac{(2k+1)(k-2)!}{2(k+2)!} Ar^2 \mathcal{I}_k \equiv \alpha_k r^2, \quad k \geq 2;$$

$$\mathcal{I}_k = \int_0^\pi P_k^2(\cos \theta') \sin^2 \theta' d\theta';$$

$$f(r, \theta, \varphi) = \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k r^2 P_k^2(\cos \theta) \cos(2\varphi).$$

$$\begin{aligned} u_p(r, \theta, \varphi) &= \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ -r^k \left[\frac{r^{-k+4} - a^{-k+4}}{-k+4} \right] + r^{-k-1} \left[\frac{r^{k+5} - a^{k+5}}{k+5} \right] \right\} \times \\ &\times \frac{\alpha_k}{2k+1} P_k^2(\cos \theta) \cos(2\varphi). \end{aligned}$$

7 Apêndice

(a) Série de Fourier:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right),$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

(b) Série de Fourier de senos

$$f(z) = \sum_{j=1} b_j \operatorname{sen} (j\pi z/L),$$

$$b_j = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} (j\pi x/L) dx.$$

(c) Série de Fourier de cosenos

$$f(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1} a_j \cos (j\pi z/L),$$

$$a_j = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos (j\pi x/L) dx.$$

(d) Polinômios de Legendre ($x = \cos \theta$)

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= x \\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\
P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\
P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\
P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \\
P_6(x) &= \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5) \\
P_7(x) &= \frac{1}{16}(497x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x) \\
P_8(x) &= \frac{1}{128}(6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35)
\end{aligned}$$

Relação de ortogonalidade:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_k(x) dx = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \frac{2}{2n+1}, & n = k, \end{cases}$$

(e) Funções associadas de Legendre

$$\begin{aligned}
P_1^1(x) &= (1-x^2)^{1/2} = \sin \theta \\
P_2^1(x) &= 3x(1-x^2)^{1/2} = 3 \sin \theta \cos \theta \\
P_2^2(x) &= 3(1-x^2) = 3 \sin^2 \theta \\
P_3^1(x) &= \frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{1/2} = \frac{3}{2}(5 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta \\
P_3^2(x) &= 15x(1-x^2) = 15 \sin^2 \theta \cos \theta \\
P_3^3(x) &= 15(1-x^2)^{3/2} = 15 \sin^3 \theta \\
P_4^1(x) &= \frac{5}{2}(7x^3-3x)(1-x^2)^{1/2} = \frac{5}{2}(7 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \sin \theta \\
P_4^2(x) &= \frac{15}{2}(7x^2-1)(1-x^2) = \frac{15}{2}(7 \cos^2 \theta - 1) \sin^2 \theta \\
P_4^3(x) &= 105x(1-x^2)^{3/2} = 105 \sin^3 \theta \cos \theta \\
P_4^4(x) &= 105(1-x^2)^2 = 105 \sin^4 \theta
\end{aligned}$$

Relação de ortogonalidade:

$$\int_{-1}^{+1} P_n^m(x) P_k^m(x) dx = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, & n = k, \end{cases}$$

(f) Série de polinômios de Legendre

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k P_k(\cos \theta),$$

$$C_k = \frac{2k+1}{2} \int_0^{\pi} f(\theta) P_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

(g) Série de funções associadas de Legendre do primeiro tipo

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k P_k^m(\cos \theta),$$

$$D_k = \frac{(2k+1)(k-m)!}{2(k+m)!} \int_0^{\pi} f(\theta) P_k^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta,$$

(h) Funções de Bessel

1.

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p J_n(\lambda_p x), \quad 0 < x < a,$$

$$J_n(\lambda_p a) = 0, \quad p = 1, 2, 3, \dots,$$

$$A_k = \frac{2}{a^2 J_{n+1}^2(\lambda_k a)} \int_0^a x J_n(\lambda_k x) f(x) dx.$$

2.

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p J_n(\lambda_p x), \quad 0 < x < a,$$

$$J'_n(\lambda_p a) = 0, \quad p = 1, 2, 3, \dots,$$

$$A_k = \frac{2}{a^2 (1 - n^2/(\lambda_k a)^2) J_n^2(\lambda_k a)} \int_0^a x J_n(\lambda_k x) f(x) dx.$$

Em particular, se temos,

$$J_1(\lambda_p a) = 0, \quad p = 1, 2, 3, \dots,$$

então,

$$f(x) = A_0 + \sum_{p=1}^{\infty} A_p J_0(\lambda_p x), \quad 0 < x < a,$$

com,

$$A_0 = \frac{2}{a^2} \int_0^a x f(x) dx,$$

$$A_k = \frac{2}{a^2 J_0^2(\lambda_k a)} \int_0^a x J_0(\lambda_k x) f(x) dx.$$

3.

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p J_n(\lambda_p x), \quad 0 < x < a,$$

$$R J_n(\lambda_p a) + S \lambda_p a J_n'(\lambda_p a) = 0, \quad p = 1, 2, 3, \dots,$$

$$A_k = \frac{2(\lambda_k a)^2 \int_0^a x J_n(\lambda_k x) f(x) dx}{a^2 J_n^2(\lambda_k a) [R^2/S^2 + (\lambda_k a)^2 - n^2]}.$$

4.

$$U_\mu(\lambda_j \rho) \equiv Y_\mu(\lambda_j a) J_\mu(\lambda_j \rho) - J_\mu(\lambda_j a) Y_\mu(\lambda_j \rho),$$

$$U_\mu(\lambda_j b) = 0,$$

$$\int_a^b \rho U_\mu(\lambda_j \rho) U_\mu(\lambda_k \rho) d\rho = 0, \quad j \neq k,$$

$$f(\rho) = \sum_{j=1} A_j U_\mu(\lambda_j \rho),$$

$$A_j = \frac{\int_a^b \rho f(\rho) U_\mu(\lambda_j \rho) d\rho}{\int_a^b \rho U_\mu^2(\lambda_j \rho) d\rho}.$$

8 Bibliografia

- [1] A. Sommerfeld, *Partial Differential Equations in Physics*, Academic Press, New York and London (1964s).
- [2] R. K. Wangsness, *Electromagnetic Fields*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York (1986).
- [3] Jackson, J.D., *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, New York (1962).
- [4] Stratton, J. A., *Electromagnetic Theory*, 1st ed., McGraw-Hill, New York (1941).
- [5] I. S. Gradshteyn, I. M. Rytzhik, *Table of Integral, Series, and Products*, 5th ed., Academic Press, San Diego (1994).
- [6] M. R. Spiegel, S. Lipschutz, J. Liu, *Schaum's Outline of Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York (2009).
- [7] M. R. Spiegel, *Schaum's Outline of Fourier Analysis with Applications to Boundary Value Problems*, McGraw-Hill, New York (1974).
- [8] M. R. Spiegel, *Schaum's Outline of Advanced Mathematics for Engineers and Scientists*, McGraw-Hill, New York (1971).
- [9] Arfken, G. B., Weber, H. J., *Mathematical Methods for Physicists*, 6th. ed., Elsevier Academic Press, Amsterdam (2005).
- [10] Morse, P. M., Feshbach, H., *Methods of Theoretical Physics*, vols. I e II, McGraw-Hill, New York (1953).
- [11] Mathews, J., Walker, R. L., *Mathematical Methods of Physics*, 2nd. ed., Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Redwood City (1969).
- [12] Churchill, R. V., *Fourier Series and Boundary Value Problems*, McGraw-Hill, New York (1941).