

A equação de Laplace em coordenadas cilíndricas

A equação de Laplace, $\nabla^2 u = 0$, em coordenadas cilíndricas, é,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

com $u = u(\rho, \varphi, z)$. Procederemos de maneira análoga ao capítulo 3, procurando soluções que descrevam determinados problemas físicos.

1 Considerando $u = u(\rho)$

A equação (1) fica, considerando $u = u(\rho)$,

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) = 0.$$

Resolvendo a equação acima temos,

$$\rho \frac{du}{d\rho} = c_0,$$

com c_0 uma constante. Continuando,

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\rho} &= \frac{c_0}{\rho}, \\ u &= c_0 \ln \rho + c_1, \end{aligned}$$

com c_1 outra constante de integração. A solução da equação de Laplace em coordenadas cilíndricas, considerando $u = u(\rho)$ apenas, é então,

$$u(\rho) = c_0 \ln \rho + c_1. \quad (2)$$

Intervalo $0 \leq \rho \leq \infty$

A solução (2) diverge em $\rho \rightarrow 0$ e $\rho \rightarrow \infty$. Embora isso seja inconveniente para um sistema físico real, em algumas situações idealizadas essa função é útil. O potencial eletrostático para uma linha carregada infinita, por exemplo, é da forma (2). Nesse caso é comum definirmos um ponto ρ_0 como o ponto em que o potencial se anula. Temos,

$$\begin{aligned}u(\rho_0) &= c_0 \ln \rho_0 + c_1 = 0, \\c_1 &= -c_0 \ln \rho_0,\end{aligned}$$

e portanto,

$$u(\rho) = c_0 \ln \rho - c_0 \ln \rho_0 = c_0 \ln(\rho/\rho_0).$$

Resta ainda o problema de determinar c_0 .

Intervalo $a \leq \rho \leq b$

Agora não temos problemas de divergências.

Condição de contorno $u(a) = u_a$, $u(b) = u_b$, com $a < b$

Com as condições acima obtemos o sistema,

$$\begin{aligned}u(a) &= c_0 \ln a + c_1 = u_a, \\u(b) &= c_0 \ln b + c_1 = u_b,\end{aligned}$$

com solução,

$$\begin{aligned}c_0 &= \frac{u_b - u_a}{\ln(b/a)}, \\c_1 &= \frac{u_a \ln b - u_b \ln a}{\ln(b/a)}.\end{aligned}$$

se $u_a = u_b$ temos $c_0 = 0$, $c_1 = u_a$ e $u(\rho) = u_a$ constante. Condições de contorno envolvendo a derivada de u podem ser tratadas de forma semelhante.

2 Problemas

1. Encontre a solução $u(\rho)$ para as equações:

(a)

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) = -f(\rho);$$

(b)

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) = +\alpha^2;$$

(c)

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) = -\alpha^2;$$

(d)

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) = +\alpha^2 u;$$

(e)

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) = -\alpha^2 u;$$

(f)

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) - \alpha^2 u = -f(\rho);$$

(g)

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) + \alpha^2 u = -f(\rho);$$

com α constante e,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \rho \leq a, \\ u(a) &= u_a. \end{aligned}$$

(a) A equação fica,

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du}{d\rho} = -f(\rho).$$

Escrevemos a solução como,

$$u(\rho) = u_h(\rho) + u_p(\rho),$$

em que u_h é a solução da equação homogênea com condições de contorno não-homogêneas, e u_p é uma solução particular da equação não-homogênea com condições de contorno homogêneas. Vimos que a solução da equação homogênea em $0 \leq \rho \leq a$, finita, é uma constante, logo $u_h(\rho) = u_a =$ constante. Expandimos u_p e f em séries de funções de Bessel,

$$\begin{aligned} u_p(\rho) &= \sum_{i=1}^{\infty} A_i J_n(\lambda_i \rho), \quad 0 \leq \rho \leq a, \\ A_i &= \frac{2}{a^2 J_{n+1}^2(\lambda_i a)} \int_0^a \rho' J_n(\lambda_i \rho') u_p(\rho') d\rho'. \end{aligned}$$

$$f(\rho) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i J_n(\lambda_i \rho), \quad 0 \leq \rho \leq a,$$

$$B_i = \frac{2}{a^2 J_{n+1}^2(\lambda_i a)} \int_0^a \rho' J_n(\lambda_i \rho') f(\rho') d\rho'.$$

$$J_n(\lambda_i a) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Substituindo u_p e f na equação diferencial,

$$\frac{d^2 u_p}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du_p}{d\rho} = -f(\rho),$$

$$\frac{d^2}{d\rho^2} \left[\sum_{i=1}^{\infty} A_i J_n(\lambda_i \rho) \right] + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[\sum_{i=1}^{\infty} A_i J_n(\lambda_i \rho) \right] = - \sum_{i=1}^{\infty} B_i J_n(\lambda_i \rho),$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i \frac{d^2}{d\rho^2} [J_n(\lambda_i \rho)] + \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{\infty} A_i \frac{d}{d\rho} [J_n(\lambda_i \rho)] = - \sum_{i=1}^{\infty} B_i J_n(\lambda_i \rho).$$

Usando as relações [6, 7, 8],

$$x J'_n(x) = n J_n(x) - x J_{n+1}(x),$$

ou,

$$J'_n(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x),$$

temos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} [J_n(\lambda_i \rho)] &= \lambda_i \left[\frac{n}{\lambda_i \rho} J_n(\lambda_i \rho) - J_{n+1}(\lambda_i \rho) \right], \\ &= \frac{n}{\rho} J_n(\lambda_i \rho) - \lambda_i J_{n+1}(\lambda_i \rho), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{d\rho^2} [J_n(\lambda_i\rho)] &= \lambda_i^2 \left[-\frac{n}{(\lambda_i\rho)^2} J_n(\lambda_i\rho) + \frac{n}{\lambda_i\rho} \left(\frac{n}{\lambda_i\rho} J_n(\lambda_i\rho) - J_{n+1}(\lambda_i\rho) \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{n+1}{\lambda_i\rho} J_{n+1}(\lambda_i\rho) + J_{n+2}(\lambda_i\rho) \right], \\
&= -\frac{n}{\rho^2} J_n(\lambda_i\rho) + \frac{n^2}{\rho^2} J_n(\lambda_i\rho) - \frac{n\lambda_i}{\rho} J_{n+1}(\lambda_i\rho) \\
&\quad - \frac{(n+1)\lambda_i}{\rho} J_{n+1}(\lambda_i\rho) + \lambda_i^2 J_{n+2}(\lambda_i\rho), \\
&= \frac{n(n-1)}{\rho^2} J_n(\lambda_i\rho) - \frac{(2n+1)\lambda_i}{\rho} J_{n+1}(\lambda_i\rho) \\
&\quad + \lambda_i^2 J_{n+2}(\lambda_i\rho).
\end{aligned}$$

A equação diferencial fica então,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\infty} A_i \frac{d^2}{d\rho^2} [J_n(\lambda_i\rho)] + \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{\infty} A_i \frac{d}{d\rho} [J_n(\lambda_i\rho)] = - \sum_{i=1}^{\infty} B_i J_n(\lambda_i\rho), \\
&\sum_{i=1}^{\infty} A_i \left[\frac{n(n-1)}{\rho^2} J_n(\lambda_i\rho) - \frac{(2n+1)\lambda_i}{\rho} J_{n+1}(\lambda_i\rho) + \lambda_i^2 J_{n+2}(\lambda_i\rho) \right] \\
&+ \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{\infty} A_i \left[\frac{n}{\rho} J_n(\lambda_i\rho) - \lambda_i J_{n+1}(\lambda_i\rho) \right] = - \sum_{i=1}^{\infty} B_i J_n(\lambda_i\rho), \\
&\sum_{i=1}^{\infty} A_i \left[\frac{n^2}{\rho^2} J_n(\lambda_i\rho) - \frac{(2n+2)\lambda_i}{\rho} J_{n+1}(\lambda_i\rho) + \lambda_i^2 J_{n+2}(\lambda_i\rho) \right] = \\
&= - \sum_{i=1}^{\infty} B_i J_n(\lambda_i\rho).
\end{aligned}$$

Usando,

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x),$$

temos,

$$J_{n+2}(x) = \frac{2(n+1)}{x} J_{n+1}(x) - J_n(x),$$

logo,

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{\infty} A_i \left[\frac{n^2}{\rho^2} J_n(\lambda_i \rho) - \frac{(2n+2)\lambda_i}{\rho} J_{n+1}(\lambda_i \rho) \right. \\
& \quad \left. + \lambda_i^2 \left(\frac{2(n+1)}{\lambda_i \rho} J_{n+1}(\lambda_i \rho) - J_n(\lambda_i \rho) \right) \right] = \\
& = - \sum_{i=1}^{\infty} B_i J_n(\lambda_i \rho), \\
& \sum_{i=1}^{\infty} A_i \left[\frac{n^2}{\rho^2} J_n(\lambda_i \rho) - \lambda_i^2 J_n(\lambda_i \rho) \right] = \\
& = - \sum_{i=1}^{\infty} B_i J_n(\lambda_i \rho).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$A_i \left[\frac{n^2}{\rho^2} - \lambda_i^2 \right] = -B_i. \quad (3)$$

Poderíamos ter escrito (3) desde o início, pois J_n é solução da equação de Bessel. Supomos que A_i é independente de ρ , logo devemos ter $n = 0$,

$$A_i = \frac{B_i}{\lambda_i^2} = \frac{1}{\lambda_i^2} \frac{2}{a^2 J_1^2(\lambda_i a)} \int_0^a \rho' J_0(\lambda_i \rho') f(\rho') d\rho'.$$

A solução particular u_p é então,

$$\begin{aligned}
u_p(\rho) &= \sum_{i=1}^{\infty} A_i J_0(\lambda_i \rho) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_i}{\lambda_i^2} J_0(\lambda_i \rho), \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} J_0(\lambda_i \rho) \frac{1}{\lambda_i^2} \frac{2}{a^2 J_1^2(\lambda_i a)} \int_0^a \rho' J_0(\lambda_i \rho') f(\rho') d\rho', \\
&0 \leq \rho \leq a.
\end{aligned}$$

Notemos que a solução u_p satisfaz condições de contorno homogêneas em $\rho = a$, como esperado.

Podemos escrever u_p em termos de uma função de Green,

$$u_p(\rho) = \int_0^a G(\rho, \rho') f(\rho') d\rho',$$

com,

$$\begin{aligned}
G(\rho, \rho') &= \sum_{i=1}^{\infty} J_0(\lambda_i \rho) \frac{1}{\lambda_i^2} \frac{2}{a^2 J_1^2(\lambda_i a)} \rho' J_0(\lambda_i \rho'), \\
&= \frac{2}{a^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho'}{\lambda_i^2} \frac{J_0(\lambda_i \rho) J_0(\lambda_i \rho')}{J_1^2(\lambda_i a)}, \\
&0 \leq \rho \leq a.
\end{aligned}$$

Vamos verificar que $u_p(\rho)$ de fato satisfaz a equação diferencial não-homogênea. Derivando u_p ,

$$\begin{aligned}
\frac{du_p}{d\rho} &= \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{d}{d\rho} J_0(\lambda_i \rho) \right] \frac{1}{\lambda_i^2} \frac{2}{a^2 J_1^2(\lambda_i a)} \int_0^a \rho' J_0(\lambda_i \rho') f(\rho') d\rho', \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} [-\lambda_i J_1(\lambda_i \rho)] \frac{1}{\lambda_i^2} \frac{2}{a^2 J_1^2(\lambda_i a)} \int_0^a \rho' J_0(\lambda_i \rho') f(\rho') d\rho', \\
&= - \sum_{i=1}^{\infty} J_1(\lambda_i \rho) \frac{1}{\lambda_i} \frac{2}{a^2 J_1^2(\lambda_i a)} \int_0^a \rho' J_0(\lambda_i \rho') f(\rho') d\rho'.
\end{aligned}$$

em que usamos $J_0'(x) = -J_1(x)$. Multiplicando por ρ e derivando novamente,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du_p}{d\rho} \right) &= - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho} [\rho J_1(\lambda_i \rho)] \frac{1}{\lambda_i} \frac{2}{a^2 J_1^2(\lambda_i a)} \int_0^a \rho' J_0(\lambda_i \rho') f(\rho') d\rho' , \\
&= - \sum_{i=1}^{\infty} [J_1(\lambda_i \rho) + \lambda_i \rho J_1'(\lambda_i \rho)] \frac{1}{\lambda_i} \frac{2}{a^2 J_1^2(\lambda_i a)} \int_0^a \rho' J_0(\lambda_i \rho') f(\rho') d\rho' , \\
&= - \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ J_1(\lambda_i \rho) + \lambda_i \rho \left[\frac{1}{\lambda_i \rho} J_1(\lambda_i \rho) - J_2(\lambda_i \rho) \right] \right\} \times \\
&\quad \times \frac{1}{\lambda_i} \frac{2}{a^2 J_1^2(\lambda_i a)} \int_0^a \rho' J_0(\lambda_i \rho') f(\rho') d\rho' , \\
&= - \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ J_1(\lambda_i \rho) + \lambda_i \rho \left[\frac{1}{\lambda_i \rho} J_1(\lambda_i \rho) - \frac{2}{\lambda_i \rho} J_1(\lambda_i \rho) + J_0(\lambda_i \rho) \right] \right\} \times \\
&\quad \times \frac{1}{\lambda_i} \frac{2}{a^2 J_1^2(\lambda_i a)} \int_0^a \rho' J_0(\lambda_i \rho') f(\rho') d\rho' , \\
&= - \sum_{i=1}^{\infty} \{ J_1(\lambda_i \rho) + [-J_1(\lambda_i \rho) + \lambda_i \rho J_0(\lambda_i \rho)] \} \times \\
&\quad \times \frac{1}{\lambda_i} \frac{2}{a^2 J_1^2(\lambda_i a)} \int_0^a \rho' J_0(\lambda_i \rho') f(\rho') d\rho' , \\
&= - \sum_{i=1}^{\infty} \rho J_0(\lambda_i \rho) \frac{2}{a^2 J_1^2(\lambda_i a)} \int_0^a \rho' J_0(\lambda_i \rho') f(\rho') d\rho' ,
\end{aligned}$$

em que usamos,

$$\begin{aligned}
J_1'(x) &= \frac{1}{x} J_1(x) - J_2(x) , \\
J_2(x) &= \frac{2}{x} J_1(x) - J_0(x) .
\end{aligned}$$

Finalmente, dividindo por ρ ,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du_p}{d\rho} \right) &= - \sum_{i=1}^{\infty} J_0(\lambda_i \rho) \frac{2}{a^2 J_1^2(\lambda_i a)} \int_0^a \rho' J_0(\lambda_i \rho') f(\rho') d\rho' , \\
&= -f(\rho) ,
\end{aligned}$$

como deve ser.

Se $f(\rho) = f_0$ constante,

$$\begin{aligned}
u_p(\rho) &= \sum_{i=1}^{\infty} J_0(\lambda_i \rho) \frac{1}{\lambda_i^2} \frac{2}{a^2 J_1^2(\lambda_i a)} \int_0^a \rho' J_0(\lambda_i \rho') f(\rho') d\rho' , \\
&= f_0 \sum_{i=1}^{\infty} J_0(\lambda_i \rho) \frac{1}{\lambda_i^2} \frac{2}{a^2 J_1^2(\lambda_i a)} \int_0^a \rho' J_0(\lambda_i \rho') d\rho' , \\
&0 \leq \rho \leq a .
\end{aligned}$$

Usando as relações,

$$\begin{aligned}
\int x J_0(x) dx &= x J_1(x) , \\
\int x^n J_{n-1}(x) dx &= x^n J_n(x) ,
\end{aligned}$$

temos,

$$\int_0^a \rho' J_0(\lambda_i \rho') d\rho' = \frac{1}{\lambda_i^2} \int_0^{\lambda_i a} u J_0(u) du = \frac{a}{\lambda_i} J_1(\lambda_i a) .$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
u_p(\rho) &= f_0 \sum_{i=1}^{\infty} J_0(\lambda_i \rho) \frac{1}{\lambda_i^2} \frac{2}{a^2 J_1^2(\lambda_i a)} \int_0^a \rho' J_0(\lambda_i \rho') d\rho' , \\
&= f_0 \sum_{i=1}^{\infty} J_0(\lambda_i \rho) \frac{1}{\lambda_i^2} \frac{2}{a^2 J_1^2(\lambda_i a)} \frac{a}{\lambda_i} J_1(\lambda_i a) , \\
&= f_0 \frac{2}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^3} \frac{J_0(\lambda_i \rho)}{J_1(\lambda_i a)} , \\
&0 \leq \rho \leq a .
\end{aligned}$$

Podemos verificar que a solução acima satisfaz a equação diferencial,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 u_p}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du_p}{d\rho} &= -f(\rho), \\
\frac{d^2}{d\rho^2} \left[f_0 \frac{2}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^3} \frac{J_0(\lambda_i \rho)}{J_1(\lambda_i a)} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[f_0 \frac{2}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^3} \frac{J_0(\lambda_i \rho)}{J_1(\lambda_i a)} \right] &= -f_0, \\
f_0 \frac{2}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^3} \frac{1}{J_1(\lambda_i a)} \frac{d^2}{d\rho^2} J_0(\lambda_i \rho) + \frac{1}{\rho} f_0 \frac{2}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^3} \frac{1}{J_1(\lambda_i a)} \frac{d}{d\rho} J_0(\lambda_i \rho) &= -f_0, \\
f_0 \frac{2}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^3} \frac{1}{J_1(\lambda_i a)} \left[\frac{d^2}{d\rho^2} J_0(\lambda_i \rho) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} J_0(\lambda_i \rho) \right] &= -f_0.
\end{aligned}$$

Como $J_0(\lambda_i \rho)$ é solução da equação de Bessel de ordem zero,

$$\frac{d^2}{d\rho^2} J_0(\lambda_i \rho) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} J_0(\lambda_i \rho) = -\lambda_i^2 J_0(\lambda_i \rho),$$

logo,

$$\begin{aligned}
f_0 \frac{2}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^3} \frac{1}{J_1(\lambda_i a)} [-\lambda_i^2 J_0(\lambda_i \rho)] &= -f_0, \\
\frac{2}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \frac{J_0(\lambda_i \rho)}{J_1(\lambda_i a)} &= 1,
\end{aligned}$$

como deve ser.

Usando a relação,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^3} \frac{J_0(\lambda_i \rho)}{J_1(\lambda_i a)} = \frac{a}{8} (a^2 - \rho^2),$$

podemos escrever u_p para f constante como,

$$\begin{aligned}
u_p(\rho) &= f_0 \frac{2}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^3} \frac{J_0(\lambda_i \rho)}{J_1(\lambda_i a)}, \\
&= f_0 \frac{2}{a} \frac{a}{8} (a^2 - \rho^2) = f_0 \frac{1}{4} (a^2 - \rho^2), \\
0 &\leq \rho \leq a.
\end{aligned}$$

A solução acima satisfaz de fato a equação diferencial.

Usamos as relações,

$$1 = \frac{2}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \frac{J_0(\lambda_i \rho)}{J_1(\lambda_i a)},$$

$$x^2 = \frac{2}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^3} \frac{J_0(\lambda_i \rho)}{J_1(\lambda_i a)} [(\lambda_i a)^2 - 4].$$

(b) Usando o resultado anterior com $-f(\rho) = +\alpha^2$ constante, a solução particular é,

$$u_p(\rho) = -\alpha^2 \frac{1}{4} (a^2 - \rho^2),$$

$$0 \leq \rho \leq a.$$

(c) Nesse caso temos,

$$u_p(\rho) = +\alpha^2 \frac{1}{4} (a^2 - \rho^2),$$

$$0 \leq \rho \leq a.$$

(d) Temos,

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) = +\alpha^2 u,$$

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du}{d\rho} = +\alpha^2 u,$$

$$\rho^2 \frac{d^2 u}{d\rho^2} + \rho \frac{du}{d\rho} - \alpha^2 \rho^2 u = 0.$$

Temos uma equação de Bessel modificada de ordem zero, com solução,

$$u(\rho) = c_1 I_0(\alpha \rho) + c_2 K_0(\alpha \rho),$$

em que I_0 e K_0 são as funções de Bessel modificadas de ordem zero, de primeira e segunda espécie, respectivamente. A solução finita em $0 \leq \rho \leq a$ é obtida fazendo $c_2 = 0$,

$$u(\rho) = c_1 I_0(\alpha \rho).$$

Em $\rho = a$,

$$u(a) = c_1 I_0(\alpha a) = u_a ,$$

logo,

$$c_1 = \frac{u_a}{I_0(\alpha a)} .$$

A solução é portanto,

$$u(\rho) = u_a \frac{I_0(\alpha \rho)}{I_0(\alpha a)} .$$

(e) Agora temos a equação de Bessel de ordem zero,

$$\rho^2 \frac{d^2 u}{d\rho^2} + \rho \frac{du}{d\rho} + \alpha^2 \rho^2 u = 0 ,$$

com solução,

$$u(\rho) = c_1 J_0(\alpha \rho) + c_2 Y_0(\alpha \rho) ,$$

em que J_0 e Y_0 são as funções de Bessel de ordem zero, de primeira e segunda espécie, respectivamente. A solução finita em $0 \leq \rho a$ é obtida fazendo $c_2 = 0$,

$$u(\rho) = c_1 J_0(\alpha \rho) .$$

Em $\rho = a$,

$$u(a) = c_1 J_0(\alpha a) = u_a ,$$

logo,

$$c_1 = \frac{u_a}{J_0(\alpha a)} .$$

A solução é portanto,

$$u(\rho) = u_a \frac{J_0(\alpha \rho)}{J_0(\alpha a)} .$$

2. Considere o problema anterior com,

$$\begin{aligned} a &\leq \rho \leq b , \\ u(a) &= u_a , \quad u(b) = u_b . \end{aligned}$$

(a) A equação fica,

$$\frac{d^2u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du}{d\rho} = -f(\rho).$$

Escrevemos a solução, como antes,

$$u(\rho) = u_h(\rho) + u_p(\rho),$$

em que u_h é a solução da equação homogênea com condições de contorno não-homogêneas, e u_p é uma solução particular da equação não-homogênea com condições de contorno homogêneas. Expandimos u_p e f em séries de funções de Bessel,

$$U_n(\lambda_j \rho) \equiv J_n(\lambda_j \rho) Y_n(\lambda_j a) - J_n(\lambda_j a) Y_n(\lambda_j \rho),$$

com λ_j definido por,

$$U_n(\lambda_j b) = 0,$$

As funções U_n são ortogonais,

$$\int_a^b \rho U_n(\lambda_j \rho) U_n(\lambda_k \rho) d\rho = 0, \quad j \neq k.$$

As expansões para u_p e f são,

$$\begin{aligned} u_p(\rho) &= \sum_{j=1} A_j U_n(\lambda_j \rho), \\ A_j &= \frac{\int_a^b \rho' u_p(\rho') U_n(\lambda_j \rho') d\rho'}{\int_a^b \rho' U_n^2(\lambda_j \rho') d\rho'}, \\ f(\rho) &= \sum_{j=1} B_j U_n(\lambda_j \rho), \\ B_j &= \frac{\int_a^b \rho' f(\rho') U_n(\lambda_j \rho') d\rho'}{\int_a^b \rho' U_n^2(\lambda_j \rho') d\rho'}. \end{aligned}$$

Substituindo u_p e f na equação diferencial,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 u_p}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du_p}{d\rho} &= -f(\rho), \\
\frac{d^2}{d\rho^2} \left[\sum_{j=1} A_j U_n(\lambda_j \rho) \right] + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[\sum_{j=1} A_j U_n(\lambda_j \rho) \right] &= - \sum_{j=1} B_j U_n(\lambda_j \rho), \\
\sum_{j=1} A_j \frac{d^2}{d\rho^2} U_n(\lambda_j \rho) + \sum_{j=1} A_j \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} U_n(\lambda_j \rho) &= - \sum_{j=1} B_j U_n(\lambda_j \rho), \\
\sum_{j=1} A_j \left[\frac{d^2}{d\rho^2} U_n(\lambda_j \rho) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} U_n(\lambda_j \rho) \right] &= - \sum_{j=1} B_j U_n(\lambda_j \rho), \\
\sum_{j=1} A_j \left[(n^2/\rho^2) - \lambda_j^2 \right] U_n(\lambda_j \rho) &= - \sum_{j=1} B_j U_n(\lambda_j \rho).
\end{aligned}$$

pois U_n satisfaz a equação de Bessel. Portanto,

$$A_j \left[(n^2/\rho^2) - \lambda_j^2 \right] = -B_j.$$

Como antes, devemos ter $n = 0$ para A_j constante, logo,

$$A_j = \frac{B_j}{\lambda_j^2} = \frac{1}{\lambda_j^2} \frac{\int_a^b \rho' f(\rho') U_0(\lambda_j \rho') d\rho'}{\int_a^b \rho' U_0^2(\lambda_j \rho') d\rho'}.$$

A solução u_p é portanto,

$$\begin{aligned}
u_p(\rho) &= \sum_{j=1} A_j U_0(\lambda_j \rho) = \sum_{j=1} \frac{B_j}{\lambda_j^2} U_0(\lambda_j \rho), \\
&= \sum_{j=1} \frac{U_0(\lambda_j \rho)}{\lambda_j^2} \frac{\int_a^b \rho' f(\rho') U_0(\lambda_j \rho') d\rho'}{\int_a^b \rho' U_0^2(\lambda_j \rho') d\rho'}.
\end{aligned}$$

Vamos verificar que u_p satisfaz a equação diferencial. Calculando as derivadas de u_p ,

$$\begin{aligned}\frac{du_p(\rho)}{d\rho} &= \sum_{j=1} \frac{1}{\lambda_j^2} \frac{dU_0(\lambda_j\rho)}{d\rho} \frac{\int_a^b \rho' f(\rho') U_0(\lambda_j\rho') d\rho'}{\int_a^b \rho' U_0^2(\lambda_j\rho') d\rho'}, \\ \frac{d^2u_p(\rho)}{d\rho^2} &= \sum_{j=1} \frac{1}{\lambda_j^2} \frac{d^2U_0(\lambda_j\rho)}{d\rho^2} \frac{\int_a^b \rho' f(\rho') U_0(\lambda_j\rho') d\rho'}{\int_a^b \rho' U_0^2(\lambda_j\rho') d\rho'}\end{aligned}$$

Substituindo na equação diferencial,

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du}{d\rho} &= -f(\rho), \\ \sum_{j=1} \frac{1}{\lambda_j^2} \left[\frac{d^2U_0(\lambda_j\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dU_0(\lambda_j\rho)}{d\rho} \right] &\frac{\int_a^b \rho' f(\rho') U_0(\lambda_j\rho') d\rho'}{\int_a^b \rho' U_0^2(\lambda_j\rho') d\rho'} \\ &= - \sum_{j=1} U_0(\lambda_j\rho) \frac{\int_a^b \rho' f(\rho') U_0(\lambda_j\rho') d\rho'}{\int_a^b \rho' U_0^2(\lambda_j\rho') d\rho'},\end{aligned}$$

ou,

$$\sum_{j=1} \frac{1}{\lambda_j^2} \left[\frac{d^2U_0(\lambda_j\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dU_0(\lambda_j\rho)}{d\rho} + \lambda_j^2 U_0(\lambda_j\rho) \right] \frac{\int_a^b \rho' f(\rho') U_0(\lambda_j\rho') d\rho'}{\int_a^b \rho' U_0^2(\lambda_j\rho') d\rho'} = 0.$$

Como U_0 satisfaz à equação de Bessel, temos,

$$\rho^2 U_0''(\lambda_j\rho) + \rho U_0'(\lambda_j\rho) + \lambda_j^2 \rho^2 U_0(\lambda_j\rho) = 0,$$

e o termo entre colchetes na equação acima se anula. Portanto u_p satisfaz a equação diferencial.

Escrevendo u_p em termos de função de Green temos,

$$u_p(\rho) = \int_a^b G(\rho, \rho') f(\rho') d\rho',$$

com,

$$G(\rho, \rho') = \sum_{j=1} \frac{1}{\lambda_j^2} \frac{\rho' U_0(\lambda_j \rho) U_0(\lambda_j \rho')}{\int_a^b \rho' U_0^2(\lambda_j \rho') d\rho'}.$$

Se $f(\rho) = f_0$ constante temos,

$$u_p(\rho) = f_0 \sum_{j=1} \frac{U_0(\lambda_j \rho)}{\lambda_j^2} \frac{\int_a^b \rho' U_0(\lambda_j \rho') d\rho'}{\int_a^b \rho' U_0^2(\lambda_j \rho') d\rho'},$$

(b) Com $f(\rho) = -\alpha^2$,

$$u_p(\rho) = -\alpha^2 \sum_{j=1} \frac{U_0(\lambda_j \rho)}{\lambda_j^2} \frac{\int_a^b \rho' U_0(\lambda_j \rho') d\rho'}{\int_a^b \rho' U_0^2(\lambda_j \rho') d\rho'}.$$

(c) Agora $f(\rho) = +\alpha^2$, logo,

$$u_p(\rho) = +\alpha^2 \sum_{j=1} \frac{U_0(\lambda_j \rho)}{\lambda_j^2} \frac{\int_a^b \rho' U_0(\lambda_j \rho') d\rho'}{\int_a^b \rho' U_0^2(\lambda_j \rho') d\rho'}.$$

(d) Temos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) &= +\alpha^2 u, \\ \frac{d^2 u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du}{d\rho} &= +\alpha^2 u, \\ \rho^2 \frac{d^2 u}{d\rho^2} + \rho \frac{du}{d\rho} - \alpha^2 \rho^2 u &= 0. \end{aligned}$$

Temos uma equação de Bessel modificada de ordem zero, com solução,

$$u(\rho) = c_1 I_0(\alpha\rho) + c_2 K_0(\alpha\rho) .$$

As condições de contorno nos dão,

$$\begin{aligned} c_1 I_0(\alpha a) + c_2 K_0(\alpha a) &= u_a , \\ c_1 I_0(\alpha b) + c_2 K_0(\alpha b) &= u_b , \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{u_a K_0(\alpha b) - u_b K_0(\alpha a)}{I_0(\alpha a) K_0(\alpha b) - K_0(\alpha a) I_0(\alpha b)} , \\ c_2 &= \frac{u_b I_0(\alpha a) - u_a I_0(\alpha b)}{I_0(\alpha a) K_0(\alpha b) - K_0(\alpha a) I_0(\alpha b)} . \end{aligned}$$

A solução é portanto,

$$\begin{aligned} u(\rho) &= c_1 I_0(\alpha\rho) + c_2 K_0(\alpha\rho) , \\ &= u_a \frac{K_0(\alpha b) I_0(\alpha\rho) - I_0(\alpha b) K_0(\alpha\rho)}{I_0(\alpha a) K_0(\alpha b) - K_0(\alpha a) I_0(\alpha b)} \\ &\quad + u_b \frac{I_0(\alpha a) K_0(\alpha\rho) - K_0(\alpha a) I_0(\alpha\rho)}{I_0(\alpha a) K_0(\alpha b) - K_0(\alpha a) I_0(\alpha b)} . \end{aligned}$$

Usando,

$$V_n(\lambda_j \rho) \equiv I_n(\lambda_j \rho) K_n(\lambda_j b) - I_n(\lambda_j b) K_n(\lambda_j \rho) ,$$

$$W_n(\lambda_j \rho) \equiv I_n(\lambda_j \rho) K_n(\lambda_j a) - I_n(\lambda_j a) K_n(\lambda_j \rho) ,$$

temos,

$$u_p(\rho) = u_a \frac{V_0(\alpha\rho)}{V_0(\alpha a)} + u_b \frac{W_0(\alpha\rho)}{W_0(\alpha b)} .$$

(e) Agora temos a equação de Bessel de ordem zero,

$$\rho^2 \frac{d^2 u}{d\rho^2} + \rho \frac{du}{d\rho} + \alpha^2 \rho^2 u = 0 ,$$

com solução,

$$u(\rho) = c_1 J_0(\alpha\rho) + c_2 Y_0(\alpha\rho) .$$

As condições de contorno nos dão,

$$\begin{aligned} c_1 J_0(\alpha a) + c_2 Y_0(\alpha a) &= u_a , \\ c_1 J_0(\alpha b) + c_2 Y_0(\alpha b) &= u_b , \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{u_a Y_0(\alpha b) - u_b Y_0(\alpha a)}{J_0(\alpha a) Y_0(\alpha b) - Y_0(\alpha a) J_0(\alpha b)} , \\ c_2 &= \frac{u_b J_0(\alpha a) - u_a J_0(\alpha b)}{J_0(\alpha a) Y_0(\alpha b) - Y_0(\alpha a) J_0(\alpha b)} . \end{aligned}$$

A solução é assim,

$$\begin{aligned} u(\rho) &= c_1 J_0(\alpha\rho) + c_2 Y_0(\alpha\rho) , \\ &= u_a \frac{Y_0(\alpha b) J_0(\alpha\rho) - J_0(\alpha b) Y_0(\alpha\rho)}{J_0(\alpha a) Y_0(\alpha b) - Y_0(\alpha a) J_0(\alpha b)} \\ &\quad + u_b \frac{J_0(\alpha a) Y_0(\alpha\rho) - Y_0(\alpha a) J_0(\alpha\rho)}{J_0(\alpha a) Y_0(\alpha b) - Y_0(\alpha a) J_0(\alpha b)} . \end{aligned}$$

Usando,

$$U_n(\lambda_j \rho) \equiv J_n(\lambda_j \rho) Y_n(\lambda_j a) - J_n(\lambda_j a) Y_n(\lambda_j \rho) ,$$

$$Z_n(\lambda_j \rho) \equiv J_n(\lambda_j \rho) Y_n(\lambda_j b) - J_n(\lambda_j b) Y_n(\lambda_j \rho) ,$$

temos,

$$u(\rho) = u_a \frac{Z_0(\alpha\rho)}{Z_0(\alpha a)} + u_b \frac{U_0(\alpha\rho)}{U_0(\alpha b)} .$$

3 Considerando $u = u(\rho, z)$

Substituindo $u(\rho, z) = R(\rho)Z(z)$ em (1), vem,

$$\frac{1}{\rho R}(\rho R')' + \frac{Z''}{Z} = 0 ,$$

em que $R' = dR/d\rho$, $Z' = dZ/dz$, etc. Da equação acima temos,

$$\frac{1}{\rho R}(\rho R')' = -\frac{Z''}{Z} \equiv -\lambda^2.$$

Portanto, obtemos as equações ordinárias,

$$\rho^2 R'' + \rho R' + (\lambda \rho)^2 R = 0, \quad (4)$$

$$Z'' - \lambda^2 Z = 0. \quad (5)$$

A solução da equação (5) é,

$$Z(z) = a_1 \cosh \lambda z + a_2 \sinh \lambda z. \quad (6)$$

A equação (4) é a equação diferencial de Bessel de ordem zero, com solução,

$$R(\rho) = b_1 J_0(\lambda \rho) + b_2 Y_0(\lambda \rho). \quad (7)$$

Notemos que as soluções acima são para $\lambda \neq 0$. Se $\lambda = 0$ as funções R e Z são constantes. Se $\lambda = 0$, temos de (4) e (5),

$$\begin{aligned} (\rho R')' &= 0, \\ Z'' &= 0. \end{aligned}$$

As soluções das equações acima são,

$$R(\rho) = a_0 + b_0 \ln \rho, \quad (8)$$

$$Z(z) = c_0 z + d_0. \quad (9)$$

Pelo princípio da superposição, a solução geral é uma soma das possíveis soluções individuais,

$$\begin{aligned} u(\rho, z) &= (c_0 z + d_0)(a_0 + b_0 \ln \rho) \\ &+ \sum_{\lambda > 0} [b_{1\lambda} J_0(\lambda \rho) + b_{2\lambda} Y_0(\lambda \rho)][a_{1\lambda} \cosh \lambda z + a_{2\lambda} \sinh \lambda z]. \end{aligned} \quad (10)$$

A determinação das constantes e dos possíveis valores de λ_n depende das condições de contorno.

Consideremos agora a outra possibilidade para a constante de separação λ ,

$$\frac{1}{\rho R}(\rho R')' = -\frac{Z''}{Z} \equiv +\lambda^2.$$

Obtemos agora,

$$\rho^2 R'' + \rho R' - (\lambda \rho)^2 R = 0, \quad (11)$$

$$Z'' + \lambda^2 Z = 0. \quad (12)$$

A solução da equação para Z é,

$$Z(z) = a_1 \cos \lambda z + a_2 \operatorname{sen} \lambda z. \quad (13)$$

A equação para R é a equação diferencial modificada de Bessel, com solução,

$$R(\rho) = b_1 I_0(\lambda \rho) + b_2 K_0(\lambda \rho). \quad (14)$$

A solução geral agora é,

$$\begin{aligned} u(\rho, z) = & (c_0 z + d_0)(a_0 + b_0 \ln \rho) \\ & + \sum_{\lambda > 0} [b_{1\lambda} I_0(\lambda \rho) + b_{2\lambda} K_0(\lambda \rho)] [a_{1\lambda} \cos \lambda z + a_{2\lambda} \operatorname{sen} \lambda z]. \end{aligned} \quad (15)$$

4 Problemas

1. Considerando o intervalo $0 \leq \rho \leq a$, $0 \leq z \leq L$, encontre a solução $u(\rho, z)$ com as condições de contorno,

$$\begin{aligned} u(a, z) &= f(z), \\ u(\rho, 0) &= g(\rho), \\ u(\rho, L) &= h(\rho). \end{aligned}$$

Escrevemos a solução como uma soma de três funções, cada uma satisfazendo uma das condições de contorno e se anulando nas outras,

$$u(\rho, z) = u_1(\rho, z) + u_2(\rho, z) + u_3(\rho, z),$$

com,

$$\begin{aligned}
u_1(a, z) &= f(z), \quad u_1(\rho, 0) = 0, \quad u_1(\rho, L) = 0, \\
u_2(a, z) &= 0, \quad u_2(\rho, 0) = g(\rho), \quad u_2(\rho, L) = 0, \\
u_3(a, z) &= 0, \quad u_3(\rho, 0) = 0, \quad u_3(\rho, L) = h(\rho).
\end{aligned}$$

(a) *Cálculo de u_1 .*

A solução geral finita em $\rho = 0$ é,

$$\begin{aligned}
u_1(\rho, z) &= c_0 z + d_0 \\
&+ \sum_{\lambda > 0} I_0(\lambda \rho) [a_{1\lambda} \cos \lambda z + a_{2\lambda} \operatorname{sen} \lambda z].
\end{aligned}$$

Escrevendo as condições de contorno para u_1 temos,

$$\begin{aligned}
u_1(a, z) &= f(z) = c_0 z + d_0 + \sum_{\lambda > 0} I_0(\lambda a) [a_{1\lambda} \cos \lambda z + a_{2\lambda} \operatorname{sen} \lambda z], \\
u_1(\rho, 0) &= 0 = d_0 + \sum_{\lambda > 0} I_0(\lambda \rho) a_{1\lambda}, \\
u_1(\rho, L) &= 0 = c_0 L + d_0 + \sum_{\lambda > 0} I_0(\lambda \rho) [a_{1\lambda} \cos \lambda L + a_{2\lambda} \operatorname{sen} \lambda L].
\end{aligned}$$

Podemos satisfazer as duas últimas condições escolhendo,

$$\begin{aligned}
c_0 &= d_0 = a_{1\lambda} = 0, \\
\lambda_j L &= \pi j, \quad j = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

A condição para $f(z)$ fica então,

$$u_1(a, z) = f(z) = \sum_{j=1} I_0(\lambda_j a) a_{2j} \operatorname{sen}(j\pi z/L),$$

que é a expansão de $f(z)$ em série de Fourier de senos, logo,

$$I_0(\lambda_j a) a_{2j} = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}(j\pi x/L) dx.$$

A expansão em série de $f(z)$ é então, explicitamente,

$$f(z) = \frac{2}{L} \sum_{j=1} \operatorname{sen}(j\pi z/L) \int_0^L f(x) \operatorname{sen}(j\pi x/L) dx. \quad (16)$$

Incidentalmente, obtivemos uma representação para a função delta de Dirac no intervalo $(0, L)$. Da definição

$$f(z) = \int_0^L \delta(z-x)f(x)dx, \quad (17)$$

temos,

$$\delta(z-x) = \frac{2}{L} \sum_{j=1}^{\infty} \text{sen}(j\pi z/L) \text{sen}(j\pi x/L). \quad (18)$$

Notemos que se $f(z) = f_0$ constante, a série para f fica,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{j=1}^{\infty} \text{sen}(j\pi z/L) \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen}(j\pi x/L) dx, \\ f_0 &= f_0 \sum_{j=1}^{\infty} \text{sen}(j\pi z/L) \frac{2}{L} \int_0^L \text{sen}(j\pi x/L) dx, \\ f_0 &= f_0 \sum_{j=1}^{\infty} \text{sen}[(2j-1)\pi z/L] \frac{2}{L} \frac{2L}{(2j-1)\pi}, \\ f_0 &= \frac{4f_0}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\text{sen}[(2j-1)\pi z/L]}{2j-1}, \end{aligned}$$

em que usamos,

$$\begin{aligned} \int_0^L \text{sen}(j\pi x/L) dx &= -\frac{L}{j\pi} \cos(j\pi x/L) \Big|_0^L = -\frac{L}{j\pi} \cos j\pi + \frac{L}{j\pi}, \\ &= \frac{L}{j\pi} [1 - \cos j\pi] = \frac{L}{j\pi} [1 - (-1)^j], \\ &= \begin{cases} 0, & j \text{ par}, \\ \frac{2L}{j\pi}, & j \text{ ímpar}. \end{cases} \\ &= \frac{2L}{(2j-1)\pi}, j = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Vemos que a expansão de 1 no intervalo $0 \leq z \leq L$ é,

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\text{sen}[(2j-1)\pi z/L]}{2j-1}. \quad (20)$$

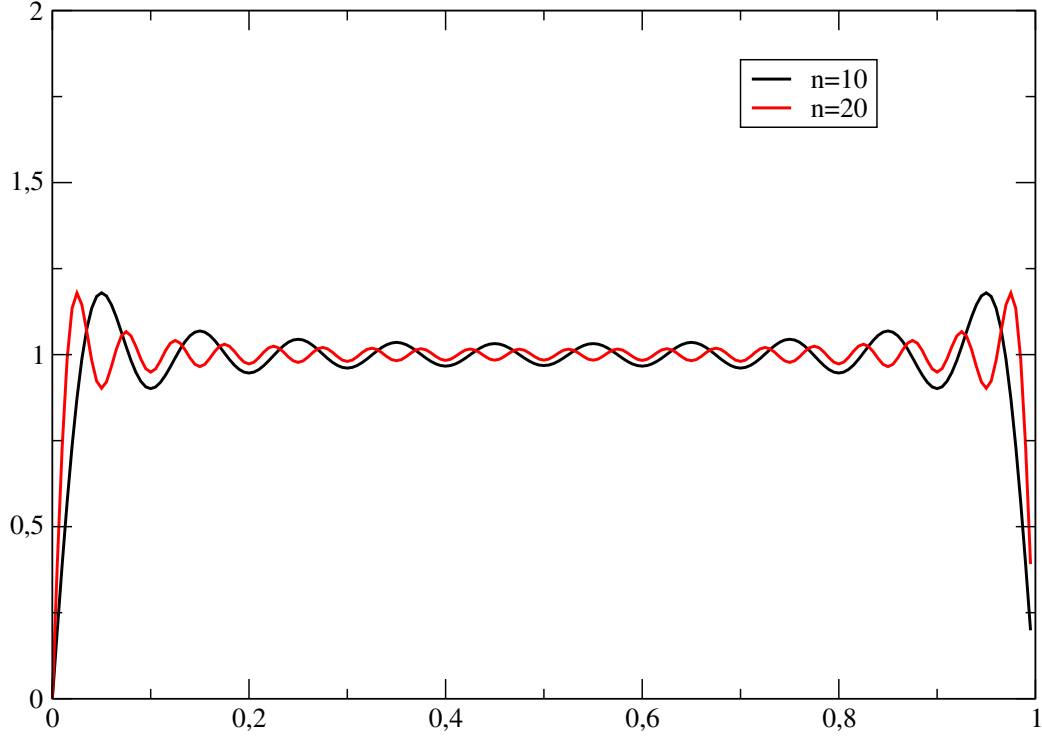


Fig. 1. Expansão de 1 em $0 \leq z \leq L$ para $L = 1$. O número de termos na soma é indicado.

A solução u_1 é então, para $f(z)$ qualquer,

$$u_1(\rho, z) = \sum_{j=1} \frac{I_0(\lambda_j \rho)}{I_0(\lambda_j a)} \text{sen } \lambda_j z \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen}(j\pi x/L) dx.$$

Podemos escrever a solução acima como,

$$u_1 = \int_0^L f(x) G(x, \rho, z) dx,$$

com,

$$G(x, \rho, z) = \frac{2}{L} \sum_{j=1} \frac{I_0(\lambda_j \rho)}{I_0(\lambda_j a)} \text{sen}(\lambda_j z) \text{sen}(\lambda_j x), \quad \lambda_j = j\pi/L.$$

Se $f = f_0$ constante ([7], probl. 6.101),

$$\begin{aligned}
u_1(\rho, z) &= \sum_{j=1} \frac{I_0(\lambda_j \rho)}{I_0(\lambda_j a)} \operatorname{sen} \lambda_j z \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}(j\pi x/L) dx, \\
&= \sum_{j=1} \frac{I_0(\lambda_j \rho)}{I_0(\lambda_j a)} \operatorname{sen} \lambda_j z \frac{2}{L} f_0 \int_0^L \operatorname{sen}(j\pi x/L) dx, \\
&= \sum_{j=1} \frac{I_0(\lambda_j \rho)}{I_0(\lambda_j a)} \operatorname{sen} \lambda_j z \frac{2f_0}{j\pi} (1 - \cos j\pi), \\
&= \frac{4f_0}{\pi} \sum_{j=1} \frac{I_0((2j-1)\pi\rho/L)}{I_0((2j-1)\pi a/L)} \frac{\operatorname{sen}[(2j-1)\pi z/L]}{2j-1}.
\end{aligned}$$

Se $f_0 = 0$ temos $u_1 = 0$.

(b) Cálculo de u_2 .

Escrevemos a solução geral finita em $\rho = 0$ de forma conveniente como,

$$u_2(\rho, z) = c_0 z + d_0 + \sum_{\lambda > 0} J_0(\lambda \rho) a_{2\lambda} \operatorname{senh} \lambda(z - L).$$

Escrevendo as condições de contorno para u_2 temos,

$$\begin{aligned}
u_2(a, z) = 0 &= c_0 z + d_0 + \sum_{\lambda > 0} J_0(\lambda a) a_{2\lambda} \operatorname{senh} \lambda(z - L), \\
u_2(\rho, 0) = g(\rho) &= d_0 - \sum_{\lambda > 0} J_0(\lambda \rho) a_{2\lambda} \operatorname{senh} \lambda L, \\
u_2(\rho, L) = 0 &= c_0 L + d_0.
\end{aligned}$$

Podemos satisfazer a primeira e a última condições escolhendo,

$$\begin{aligned}
c_0 &= d_0 = 0, \\
J_0(\lambda_j a) &= 0, \quad j = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

A segunda condição é então a expansão de $g(\rho)$ em funções de Bessel, logo,

$$a_{2j} = -\frac{2}{a^2 J_1^2(\lambda_j a) \operatorname{senh} \lambda_j L} \int_0^a x J_0(\lambda_j x) g(x) dx.$$

Explicitamente a expansão de $g(\rho)$ é então,

$$g(\rho) = \frac{2}{a^2} \sum_j \frac{J_0(\lambda_j \rho)}{J_1^2(\lambda_j a)} \int_0^a x J_0(\lambda_j x) g(x) dx, \quad J_0(\lambda_j a) = 0. \quad (21)$$

Se $g(\rho) = g_0$ constante temos,

$$\begin{aligned} g(\rho) &= \frac{2}{a^2} \sum_j \frac{J_0(\lambda_j \rho)}{J_1^2(\lambda_j a)} \int_0^a x J_0(\lambda_j x) g(x) dx, \\ g_0 &= g_0 \frac{2}{a^2} \sum_j \frac{J_0(\lambda_j \rho)}{J_1^2(\lambda_j a)} \int_0^a x J_0(\lambda_j x) dx, \\ g_0 &= g_0 \frac{2}{a^2} \sum_j \frac{J_0(\lambda_j \rho)}{J_1^2(\lambda_j a)} \frac{a}{\lambda_j} J_1(\lambda_j a), \\ g_0 &= g_0 \frac{2}{a} \sum_j \frac{J_0(\lambda_j \rho)}{\lambda_j J_1(\lambda_j a)}, \end{aligned}$$

em que usamos

$$\int_0^a x J_0(\lambda x) dx = \frac{a}{\lambda} J_1(\lambda a). \quad (22)$$

Da expressão acima temos uma expansão para 1 [7],

$$1 = \frac{2}{a} \sum_{j=1} \frac{J_0(\lambda_j \rho)}{\lambda_j J_1(\lambda_j a)}, \quad J_0(\lambda_j a) = 0. \quad (23)$$

É interessante fazer o gráfico da expressão acima para alguns termos da série. As primeiras raízes de $J_0(\lambda_j a) = 0$ são,

$$\lambda_j a = 2,4048, 5,5201, 8,6537, 11,7915, 14,9309, 18,0711, \dots$$

A figura 2 mostra a série em (23) para alguns termos na soma.

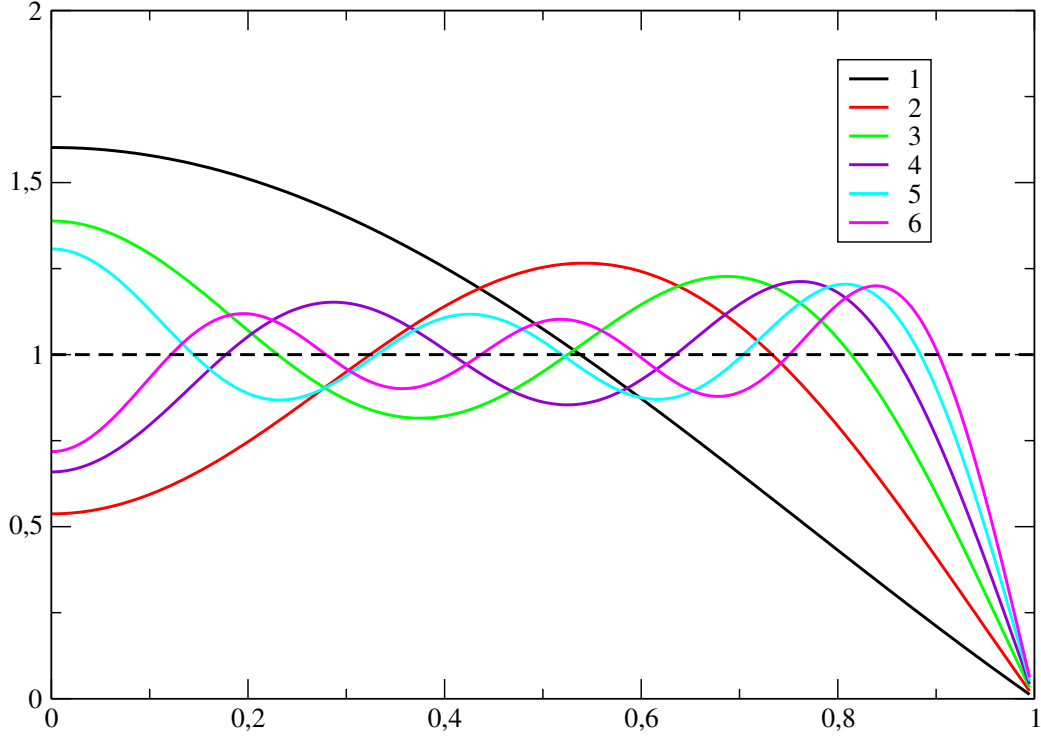


Fig. 2. Série para a função constante 1 em $0 \leq \rho \leq a$, na equação (23), para alguns termos na série. Usamos $a = 1$.

A expressão (21) para a expansão de $g(\rho)$ nos dá uma representação para a função delta de Dirac no intervalo $0 \leq \rho \leq a$. Da equação,

$$g(\rho) = \int_0^a \delta(\rho - x)g(x)dx,$$

temos,

$$\delta(\rho - x) = \frac{2}{a^2} \sum_j \frac{J_0(\lambda_j \rho)}{J_1^2(\lambda_j a)} x J_0(\lambda_j x), \quad J_0(\lambda_j a) = 0. \quad (24)$$

A solução u_2 é então ([7], prob. 6.93),

$$u_2(\rho, z) = -\frac{2}{a^2} \sum_{j=1} \frac{\sinh \lambda_j(z - L)}{\sinh \lambda_j L} \frac{J_0(\lambda_j \rho)}{J_1^2(\lambda_j a)} \int_0^a x J_0(\lambda_j x) g(x) dx.$$

Podemos escrever a solução acima como,

$$u_2(\rho, z) = \int_0^a G(x, \rho, z) g(x) dx,$$

com,

$$G(x, \rho, z) = -\frac{2}{a^2} \sum_{j=1} \frac{\sinh \lambda_j(z-L)}{\sinh \lambda_j L} \frac{J_0(\lambda_j \rho)}{J_1^2(\lambda_j a)} x J_0(\lambda_j x), \quad J_0(\lambda_j a) = 0.$$

Em $z = 0$,

$$u_2(\rho, 0) = \sum_{j=1} \frac{2J_0(\lambda_j \rho)}{a^2 J_1^2(\lambda_j a)} \int_0^a x J_0(\lambda_j x) g(x) dx = g(\rho),$$

como esperado. Se $g(\rho) = g_0$ constante temos,

$$\begin{aligned} u_2(\rho, z) &= -\sum_{j=1} \frac{\sinh \lambda_j(z-L)}{\sinh \lambda_j L} \frac{2J_0(\lambda_j \rho)}{a^2 J_1^2(\lambda_j a)} g_0 \int_0^a x J_0(\lambda_j x) dx, \\ &= -\frac{2g_0}{a} \sum_{j=1} \frac{\sinh \lambda_j(z-L)}{\lambda_j \sinh \lambda_j L} \frac{J_0(\lambda_j \rho)}{J_1(\lambda_j a)}. \end{aligned}$$

Em $z = 0$,

$$u_2(\rho, 0) = \frac{2g_0}{a} \sum_{j=1} \frac{J_0(\lambda_j \rho)}{\lambda_j J_1(\lambda_j a)} = g_0,$$

como esperado. Se $g_0 = 0$ temos $u_2 = 0$.

(c) Cálculo de u_3 .

Escrevemos a solução geral finita em $\rho = 0$ como,

$$u_3(\rho, z) = c_0 z + d_0 + \sum_{\lambda > 0} J_0(\lambda \rho) a_{2\lambda} \sinh \lambda z.$$

Escrevendo as condições de contorno para u_3 temos,

$$\begin{aligned} u_3(a, z) = 0 &= c_0 z + d_0 + \sum_{\lambda > 0} J_0(\lambda a) a_{2\lambda} \sinh \lambda z, \\ u_3(\rho, 0) = 0 &= d_0, \\ u_3(\rho, L) = h(\rho) &= c_0 L + d_0 + \sum_{\lambda > 0} J_0(\lambda \rho) a_{2\lambda} \sinh \lambda L. \end{aligned}$$

Podemos satisfazer as duas primeiras condições escolhendo,

$$\begin{aligned} c_0 &= d_0 = 0, \\ J_0(\lambda_j a) &= 0, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

A terceira condição é então a expansão de $h(\rho)$ em funções de Bessel, logo,

$$a_{2j} = \frac{2}{a^2 J_1^2(\lambda_j a) \sinh \lambda_j L} \int_0^a x J_0(\lambda_j x) h(x) dx, \quad J_0(\lambda_j a) = 0.$$

A expansão de $h(\rho)$ é assim,

$$h(\rho) = \frac{2}{a^2} \sum_{j=1} \frac{J_0(\lambda_j \rho)}{J_1^2(\lambda_j a)} \int_0^a x J_0(\lambda_j x) h(x) dx.$$

A solução u_3 é então,

$$u_3(\rho, z) = \frac{2}{a^2} \sum_{j=1} \frac{\sinh \lambda_j z}{\sinh \lambda_j L} \frac{J_0(\lambda_j \rho)}{J_1^2(\lambda_j a)} \int_0^a x J_0(\lambda_j x) h(x) dx.$$

Podemos escrever a solução acima como,

$$u_3(\rho, z) = \int_0^a G(x, \rho, z) h(x) dx,$$

com,

$$G(x, \rho, z) = \frac{2}{a^2} \sum_{j=1} \frac{\sinh \lambda_j z}{\sinh \lambda_j L} \frac{J_0(\lambda_j \rho)}{J_1^2(\lambda_j a)} x J_0(\lambda_j x).$$

Se $h = h_0$ constante ([7], probl. 6.111),

$$\begin{aligned} u_3(\rho, z) &= \sum_{j=1} \frac{\sinh \lambda_j z}{\sinh \lambda_j L} \frac{2 J_0(\lambda_j \rho)}{a^2 J_1^2(\lambda_j a)} h_0 \int_0^a x J_0(\lambda_j x) dx, \\ &= \frac{2 h_0}{a} \sum_{j=1} \frac{\sinh \lambda_j z}{\lambda_j \sinh \lambda_j L} \frac{J_0(\lambda_j \rho)}{J_1(\lambda_j a)}, \end{aligned}$$

em que usamos $x J_0(x) = (x J_1(x))'$. Se $h_0 = 0$ temos $u_3 = 0$.

(d) Se as funções nas condições de contorno são constantes, isto é,

$$\begin{aligned} u(a, z) &= f_0, \\ u(\rho, 0) &= g_0, \\ u(\rho, L) &= h_0, \end{aligned}$$

a solução é,

$$\begin{aligned}
u(\rho, z) = & \frac{4f_0}{\pi} \sum_{j=1} \frac{I_0((2j-1)\pi\rho/L)}{I_0((2j-1)\pi a/L)} \frac{\text{sen}[(2j-1)\pi z/L]}{2j-1} \\
& - \frac{2g_0}{a} \sum_{j=1} \frac{\text{senh } \lambda_j(z-L)}{\lambda_j \text{senh } \lambda_j L} \frac{J_0(\lambda_j \rho)}{J_1(\lambda_j a)} \\
& + \frac{2h_0}{a} \sum_{j=1} \frac{\text{senh } \lambda_j z}{\lambda_j \text{senh } \lambda_j L} \frac{J_0(\lambda_j \rho)}{J_1(\lambda_j a)}, \quad J_0(\lambda_j a) = 0.
\end{aligned}$$

2. Considerando o intervalo $0 \leq \rho \leq a$, $0 \leq z \leq L$, encontre a solução $u(\rho, z)$ com as condições de contorno,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(a, z)}{\partial \rho} &= f(z), \\
u(\rho, 0) &= g(\rho), \\
u(\rho, L) &= h(\rho).
\end{aligned}$$

Escrevemos a solução como uma soma de três funções, cada uma satisfazendo uma das condições de contorno e se anulando nas outras,

$$u(\rho, z) = u_1(\rho, z) + u_2(\rho, z) + u_3(\rho, z),$$

com,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1(a, z)}{\partial \rho} &= f(z), \quad u_1(\rho, 0) = 0, \quad u_1(\rho, L) = 0, \\
\frac{\partial u_2(a, z)}{\partial \rho} &= 0, \quad u_2(\rho, 0) = g(\rho), \quad u_2(\rho, L) = 0, \\
\frac{\partial u_3(a, z)}{\partial \rho} &= 0, \quad u_3(\rho, 0) = 0, \quad u_3(\rho, L) = h(\rho).
\end{aligned}$$

(a) A solução u_1 é,

$$u_1(\rho, z) = \frac{2}{L} \sum_{j=1} \frac{I_0(\lambda_j \rho)}{\lambda_j I_1(\lambda_j a)} \text{sen}(j\pi z/L) \int_0^L f(x) \text{sen}(j\pi x/L) dx,$$

ou,

$$u_1(\rho, z) = \int_0^L G(x, \rho, z) f(x) dx ,$$

com,

$$G(x, \rho, z) = \frac{2}{L} \sum_{j=1} \frac{I_0(\lambda_j \rho)}{\lambda_j I_1(\lambda_j a)} \text{sen}(j\pi z/L) \text{sen}(j\pi x/L) .$$

Se $f = f_0$ constante,

$$\begin{aligned} u_1(\rho, z) &= \frac{2}{L} \sum_{j=1} \frac{I_0(\lambda_j \rho)}{\lambda_j I_1(\lambda_j a)} \text{sen}(j\pi z/L) f_0 \int_0^L \text{sen}(j\pi x/L) dx , \\ &= \frac{4Lf_0}{\pi^2} \sum_{j=1} \frac{I_0((2j-1)\pi\rho/L)}{(2j-1)I_1((2j-1)\pi a/L)} \frac{\text{sen}[(2j-1)\pi z/L]}{2j-1} . \end{aligned}$$

Se $f_0 = 0$ temos $u_1 = 0$.

(b) A solução u_2 é,

$$\begin{aligned} u_2(\rho, z) &= \left(1 - \frac{z}{L}\right) \frac{2}{a^2} \int_0^a xg(x)dx \\ &\quad - \frac{2}{a^2} \sum_{j=1} \frac{J_0(\lambda_j \rho) \sinh \lambda_j(z-L)}{J_0^2(\lambda_j a) \sinh \lambda_j L} \int_0^a xJ_0(\lambda_j x)g(x)dx . \end{aligned}$$

Se $g(\rho) = g_0$ constante temos,

$$u_2(\rho, z) = \left(1 - \frac{z}{L}\right) g_0 .$$

Se $g_0 = 0$ temos $u_2 = 0$.

(c) A solução u_3 é,

$$\begin{aligned} u_3(\rho, z) &= \frac{2z}{a^2 L} \int_0^a xh(x)dx \\ &\quad + \frac{2}{a^2} \sum_{j=1} \frac{J_0(\lambda_j \rho) \sinh \lambda_j z}{J_0^2(\lambda_j a) \sinh \lambda_j L} \int_0^a xJ_0(\lambda_j x)h(x)dx . \end{aligned}$$

Se $h(\rho) = h_0$ constante obtemos,

$$u_3(\rho, z) = \frac{z}{L} h_0 .$$

Se $h_0 = 0$ temos $u_3 = 0$.

(d) Se as condições de contorno são todas dadas por constantes temos,

$$\begin{aligned} u(\rho, z) &= \sum_{j=1} \frac{I_0(\lambda_j \rho)}{\lambda_j I_1(\lambda_j a)} \operatorname{sen}(j\pi z/L) \frac{2}{L} f_0 \int_0^L \operatorname{sen}(j\pi x/L) dx, \\ &= \frac{4Lf_0}{\pi^2} \sum_{j=1} \frac{I_0((2j-1)\pi\rho/L)}{(2j-1)I_1((2j-1)\pi a/L)} \frac{\operatorname{sen}[(2j-1)\pi z/L]}{2j-1} \\ &\quad + \left(1 - \frac{z}{L}\right) g_0 + \frac{z}{L} h_0. \end{aligned}$$

3. Considerando o intervalo $0 \leq \rho \leq a$, $0 \leq z \leq L$, encontre a solução $u(\rho, z)$ com as condições de contorno,

$$\begin{aligned} u(a, z) &= f(z), \\ \frac{\partial u(\rho, 0)}{\partial z} &= g(\rho), \\ u(\rho, L) &= h(\rho). \end{aligned}$$

Escrevemos a solução como uma soma de três funções, cada uma satisfazendo uma das condições de contorno e se anulando nas outras,

$$u(\rho, z) = u_1(\rho, z) + u_2(\rho, z) + u_3(\rho, z),$$

com,

$$\begin{aligned} u_1(a, z) &= f(z), \quad \frac{\partial u_1(\rho, 0)}{\partial z} = 0, \quad u_1(\rho, L) = 0, \\ u_2(a, z) &= 0, \quad \frac{\partial u_2(\rho, 0)}{\partial z} = g(\rho), \quad u_2(\rho, L) = 0, \\ u_3(a, z) &= 0, \quad \frac{\partial u_3(\rho, 0)}{\partial z} = 0, \quad u_3(\rho, L) = h(\rho). \end{aligned}$$

(a) A solução u_1 é,

$$\begin{aligned} u_1(\rho, z) &= \frac{2}{L} \sum_{j=1} \frac{I_0((2j-1)\pi\rho/2L)}{I_0((2j-1)\pi a/2L)} \cos[(2j-1)\pi z/2L] \times \\ &\quad \times \int_0^{+L} f(x) \cos[(2j-1)\pi x/2L] dx, \end{aligned}$$

ou,

$$u_1(\rho, z) = \int_0^{+L} G(x, \rho, z) f(x) dx ,$$

com,

$$\begin{aligned} G(x, \rho, z) &= \frac{2}{L} \sum_{j=1} \frac{I_0((2j-1)\pi\rho/2L)}{I_0((2j-1)\pi a/2L)} \times \\ &\times \cos[(2j-1)\pi z/2L] \cos[(2j-1)\pi x/2L] . \end{aligned}$$

Se $f(z) = f_0$ constante temos,

$$\begin{aligned} u_1(\rho, z) &= \frac{4f_0}{\pi} \sum_{j=1} \frac{I_0((2j-1)\pi\rho/2L)}{I_0((2j-1)\pi a/2L)} \cos[(2j-1)\pi z/2L] \times \\ &\times \frac{1}{2j-1} \text{sen}[(2j-1)\pi/2] . \end{aligned}$$

Se $f_0 = 0$ temos $u_1 = 0$.

(b) A solução u_2 é,

$$u_2(\rho, z) = -\frac{2}{a^2} \sum_{j=1} \frac{J_0(\lambda_j \rho) \sinh \lambda_j (L-z)}{\lambda_j J_1^2(\lambda_j a) \cosh \lambda_j L} \int_0^a x J_0(\lambda_j x) g(x) dx ,$$

ou,

$$u_2(\rho, z) = \int_0^a G(x, \rho, z) g(x) dx ,$$

com,

$$G(x, \rho, z) = -\frac{2}{a^2} \sum_{j=1} \frac{J_0(\lambda_j \rho) \sinh \lambda_j (L-z)}{\lambda_j J_1^2(\lambda_j a) \cosh \lambda_j L} x J_0(\lambda_j x) .$$

Se $g(\rho) = g_0$ constante,

$$u_2(\rho, z) = -\frac{2g_0}{a} \sum_{j=1} \frac{J_0(\lambda_j \rho) \sinh \lambda_j (L-z)}{\lambda_j^2 J_1(\lambda_j a) \cosh \lambda_j L} .$$

Se $g_0 = 0$ temos $u_2 = 0$.

(c) A solução u_3 é,

$$\begin{aligned}
u_3(\rho, z) &= c_0 z + d_0 + \sum_{j=1} J_0(\lambda_j \rho) a_{2j} \cosh \lambda_j z, \\
&= \frac{2}{a^2} \sum_{j=1} \frac{J_0(\lambda_j \rho) \cosh \lambda_j z}{J_1^2(\lambda_j a) \cosh \lambda_j L} \int_0^a x J_0(\lambda_j x) h(x) dx,
\end{aligned}$$

ou,

$$u_3(\rho, z) = \int_0^a G(x, \rho, z) h(x) dx,$$

com,

$$G(x, \rho, z) = \frac{2}{a^2} \sum_{j=1} \frac{J_0(\lambda_j \rho) \cosh \lambda_j z}{J_1^2(\lambda_j a) \cosh \lambda_j L} x J_0(\lambda_j x).$$

Se $h(\rho) = h_0$ constante,

$$\begin{aligned}
u_3(\rho, z) &= \frac{2}{a^2} \sum_{j=1} \frac{J_0(\lambda_j \rho) \cosh \lambda_j z}{J_1^2(\lambda_j a) \cosh \lambda_j L} \int_0^a x J_0(\lambda_j x) h(x) dx, \\
&= \frac{2}{a^2} \sum_{j=1} \frac{J_0(\lambda_j \rho) \cosh \lambda_j z}{J_1^2(\lambda_j a) \cosh \lambda_j L} h_0 \int_0^a x J_0(\lambda_j x) dx, \\
&= \frac{2h_0}{a} \sum_{j=1} \frac{J_0(\lambda_j \rho) \cosh \lambda_j z}{\lambda_j J_1(\lambda_j a) \cosh \lambda_j L}.
\end{aligned}$$

Se $h_0 = 0$ temos $u_3 = 0$.

(d) Se as funções nas condições de contorno são constantes,

$$\begin{aligned}
u(\rho, z) &= \frac{4f_0}{\pi} \sum_{j=1} \frac{I_0((2j-1)\pi\rho/2L)}{I_0((2j-1)\pi a/2L)} \cos[(2j-1)\pi z/2L] \times \\
&\quad \times \frac{1}{2j-1} \operatorname{sen}[(2j-1)\pi/2] \\
&\quad - \frac{2g_0}{a} \sum_{j=1} \frac{J_0(\lambda_j \rho) \operatorname{senh} \lambda_j (L-z)}{\lambda_j^2 J_1(\lambda_j a) \cosh \lambda_j L} \\
&\quad + \frac{2h_0}{a} \sum_{j=1} \frac{J_0(\lambda_j \rho) \cosh \lambda_j z}{\lambda_j J_1(\lambda_j a) \cosh \lambda_j L}.
\end{aligned}$$

4. Considerando o intervalo $0 \leq \rho \leq a$, $0 \leq z \leq L$, encontre a solução $u(\rho, z)$ com as condições de contorno,

$$\begin{aligned} u(a, z) &= f(z), \\ u(\rho, 0) &= g(\rho), \\ \frac{\partial u(\rho, L)}{\partial z} &= h(\rho). \end{aligned}$$

Escrevemos a solução como uma soma de três funções, cada uma satisfazendo uma das condições de contorno e se anulando nas outras,

$$u(\rho, z) = u_1(\rho, z) + u_2(\rho, z) + u_3(\rho, z),$$

com,

$$\begin{aligned} u_1(a, z) &= f(z), \quad u_1(\rho, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_1(\rho, L)}{\partial z} = 0, \\ u_2(a, z) &= 0, \quad u_2(\rho, 0) = g(\rho), \quad \frac{\partial u_2(\rho, L)}{\partial z} = 0, \\ u_3(a, z) &= 0, \quad u_3(\rho, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_3(\rho, L)}{\partial z} = h(\rho). \end{aligned}$$

(a) A solução u_1 é,

$$\begin{aligned} u_1(\rho, z) &= \sum_{\lambda > 0} I_0(\lambda \rho) a_{2\lambda} \operatorname{sen} \lambda z, \\ &= \frac{2}{L} \sum_{j=1} \frac{I_0(\lambda_j \rho)}{I_0(\lambda_j a)} \operatorname{sen} [(2j-1)\pi z/2L] \int_0^L f(x) \operatorname{sen} ((2j-1)\pi x/2L) dx, \end{aligned}$$

ou,

$$u_1(\rho, z) = \int_0^L G(x, \rho, z) f(x) dx,$$

com,

$$G(x, \rho, z) = \frac{2}{L} \sum_{j=1} \frac{I_0(\lambda_j \rho)}{I_0(\lambda_j a)} \operatorname{sen} [(2j-1)\pi z/2L] \operatorname{sen} ((2j-1)\pi x/2L).$$

Se $f(z) = f_0$ constante,

$$\begin{aligned}
u_1(\rho, z) &= \frac{2}{L} \sum_{j=1} \frac{I_0(\lambda_j \rho)}{I_0(\lambda_j a)} \text{sen}[(2j-1)\pi z/2L] \int_0^L f(x) \text{sen}((2j-1)\pi x/2L) dx, \\
&= \frac{2}{L} \sum_{j=1} \frac{I_0(\lambda_j \rho)}{I_0(\lambda_j a)} \text{sen}[(2j-1)\pi z/2L] f_0 \int_0^L \text{sen}((2j-1)\pi x/2L) dx, \\
&= \frac{4f_0}{\pi} \sum_{j=1} \frac{I_0(\lambda_j \rho)}{I_0(\lambda_j a)} \frac{\text{sen}[(2j-1)\pi z/2L]}{2j-1}.
\end{aligned}$$

Se $f_0 = 0$ temos $u_1 = 0$.

(b) A solução u_2 é,

$$u_2(\rho, z) = \frac{2}{a^2} \sum_{j=1} \frac{J_0(\lambda_j \rho) \cosh \lambda_j(L-z)}{J_1^2(\lambda_j a) \cosh \lambda_j L} \int_0^a x J_0(\lambda_j x) g(x) dx,$$

ou,

$$u_2(\rho, z) = \int_0^a G(x, \rho, z) g(x) dx,$$

com,

$$G(x, \rho, z) = \frac{2}{a^2} \sum_{j=1} \frac{J_0(\lambda_j \rho) \cosh \lambda_j(L-z)}{J_1^2(\lambda_j a) \cosh \lambda_j L} x J_0(\lambda_j x).$$

Se $g(\rho) = g_0$ constante,

$$\begin{aligned}
u_2(\rho, z) &= \frac{2}{a^2} \sum_{j=1} \frac{J_0(\lambda_j \rho) \cosh \lambda_j(L-z)}{J_1^2(\lambda_j a) \cosh \lambda_j L} \int_0^a x J_0(\lambda_j x) g(x) dx, \\
&= \frac{2}{a^2} \sum_{j=1} \frac{J_0(\lambda_j \rho) \cosh \lambda_j(L-z)}{J_1^2(\lambda_j a) \cosh \lambda_j L} g_0 \int_0^a x J_0(\lambda_j x) dx, \\
&= \frac{2g_0}{a} \sum_{j=1} \frac{J_0(\lambda_j \rho) \cosh \lambda_j(L-z)}{\lambda_j J_1(\lambda_j a) \cosh \lambda_j L}.
\end{aligned}$$

Se $g_0 = 0$ temos $u_2 = 0$.

(c) A solução u_3 é,

$$u_3(\rho, z) = \frac{2}{a^2} \sum_{j=1} \frac{J_0(\lambda_j \rho) \sinh \lambda_j z}{\lambda_j J_1^2(\lambda_j a) \cosh \lambda_j L} \int_0^a x J_0(\lambda_j x) h(x) dx,$$

ou,

$$u_3(\rho, z) = \int_0^a G(x, \rho, z) h(x) dx ,$$

com,

$$G(x, \rho, z) = \frac{2}{a^2} \sum_{j=1} \frac{J_0(\lambda_j \rho) \sinh \lambda_j z}{\lambda_j J_1^2(\lambda_j a) \cosh \lambda_j L} x J_0(\lambda_j x) .$$

Se $h(\rho) = h_0$ constante temos,

$$u_3(\rho, z) = \frac{2h_0}{a} \sum_{j=1} \frac{J_0(\lambda_j \rho) \sinh \lambda_j z}{\lambda_j^2 J_1(\lambda_j a) \cosh \lambda_j L} ,$$

Se $h_0 = 0$ temos $u_3 = 0$.

(d) Se as funções das condições de contorno são constantes temos,

$$\begin{aligned} u(\rho, z) = & \frac{4f_0}{\pi} \sum_{j=1} \frac{I_0(\lambda_j \rho)}{I_0(\lambda_j a)} \frac{\sin[(2j-1)\pi z/2L]}{2j-1} \\ & + \frac{2g_0}{a} \sum_{j=1} \frac{J_0(\lambda_j \rho) \cosh \lambda_j (L-z)}{\lambda_j J_1(\lambda_j a) \cosh \lambda_j L} \\ & + \frac{2h_0}{a} \sum_{j=1} \frac{J_0(\lambda_j \rho) \sinh \lambda_j z}{\lambda_j^2 J_1(\lambda_j a) \cosh \lambda_j L} . \end{aligned}$$

5. Considere um cilindro infinito de raio a . Calcule a solução $u(\rho, z)$ da equação de Laplace com a condição de contorno $u(a, z) = f(z)$ ([7], probl. 6.104).

A solução é,

$$u(\rho, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dv \frac{I_0(\lambda \rho)}{I_0(\lambda a)} f(v) \cos \lambda(z-v) ,$$

ou,

$$u(\rho, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(v, \rho, z) f(v) dv ,$$

com,

$$G(v, \rho, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\lambda \frac{I_0(\lambda \rho)}{I_0(\lambda a)} \cos \lambda(z-v) .$$

Se $f(z) = f_0$ constante em $-L \leq z \leq +L$,

$$u(\rho, z) = \frac{f_0}{\pi} \int_0^\infty d\lambda \frac{I_0(\lambda\rho)}{I_0(\lambda a)} \frac{1}{\lambda} [-\operatorname{sen} \lambda(z-L) + \operatorname{sen} \lambda(z+L)].$$

Se $f_0 = 0$ temos $u = 0$.

6. Considere um cilindro infinito de raio a . Encontre a solução $u(\rho, z)$ com a condição de contorno,

$$\frac{\partial u(a, z)}{\partial \rho} = f(z).$$

7. Considerando o intervalo $a \leq \rho \leq b$, $0 \leq z \leq L$, encontre a solução $u(\rho, z)$ com as condições de contorno,

$$\begin{aligned} u(a, z) &= f(z), \\ u(b, z) &= g(z), \\ u(\rho, 0) &= h(\rho), \\ u(\rho, L) &= v(\rho). \end{aligned}$$

Escrevemos a solução como uma soma de quatro funções, cada uma satisfazendo uma das condições de contorno e se anulando nas outras, como antes,

$$u(\rho, z) = u_1(\rho, z) + u_2(\rho, z) + u_3(\rho, z) + u_4(\rho, z),$$

com,

$$\begin{aligned} u_1(a, z) &= f(z), \quad u_1(b, z) = 0, \quad u_1(\rho, 0) = 0, \quad u_1(\rho, L) = 0, \\ u_2(a, z) &= 0, \quad u_2(b, z) = g(z), \quad u_2(\rho, 0) = 0, \quad u_2(\rho, L) = 0, \\ u_3(a, z) &= 0, \quad u_3(b, z) = 0, \quad u_3(\rho, 0) = h(\rho), \quad u_3(\rho, L) = 0, \\ u_4(a, z) &= 0, \quad u_4(b, z) = 0, \quad u_4(\rho, 0) = 0, \quad u_4(\rho, L) = v(\rho). \end{aligned}$$

(a) Definindo,

$$V_n(\lambda_j \rho) \equiv I_n(\lambda_j \rho) K_n(\lambda_j b) - I_n(\lambda_j b) K_n(\lambda_j \rho), \quad (25)$$

a solução u_1 é $(\lambda_j = j\pi/L)$,

$$u_1(\rho, z) = \frac{2}{L} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{V_0(\lambda_j \rho)}{V_0(\lambda_j a)} \operatorname{sen}(j\pi z/L) \int_0^L f(x) \operatorname{sen}(j\pi x/L) dx,$$

ou,

$$u_1(\rho, z) = \int_0^L G(x, \rho, z) f(x) dx ,$$

com,

$$G(x, \rho, z) = \frac{2}{L} \sum_{j=1} \frac{V_0(\lambda_j \rho)}{V_0(\lambda_j a)} \text{sen}(j\pi z/L) \text{sen}(j\pi x/L) .$$

Se $f(z) = f_0$ constante,

$$u_1(\rho, z) = \frac{4f_0}{\pi} \sum_{j=1} \frac{V_0(\pi(2j-1)\rho/L)}{V_0(\pi(2j-1)a/L)} \frac{\text{sen}[\pi(2j-1)z/L]}{2j-1} .$$

Se $f_0 = 0$ temos $u_1 = 0$.

(b) Definindo,

$$W_n(\lambda_j \rho) \equiv I_n(\lambda_j \rho) K_n(\lambda_j a) - I_n(\lambda_j a) K_n(\lambda_j \rho) , \quad (26)$$

a solução u_2 é ($\lambda_j = j\pi/L$),

$$u_2(\rho, z) = \sum_{j=1} \frac{W_0(\lambda_j \rho)}{W_0(\lambda_j b)} \text{sen} \lambda_j z \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \text{sen}(j\pi x/L) dx ,$$

ou,

$$u_2(\rho, z) = \int_0^L G(x, \rho, z) g(x) dx ,$$

com,

$$G(x, \rho, z) = \sum_{j=1} \frac{W_0(\lambda_j \rho)}{W_0(\lambda_j b)} \text{sen} \lambda_j z \frac{2}{L} \text{sen}(j\pi x/L) .$$

Se $g(z) = g_0$ constante,

$$u_2(\rho, z) = \frac{4g_0}{\pi} \sum_{j=1} \frac{W_0((2j-1)\pi\rho/L)}{W_0((2j-1)\pi b/L)} \frac{\text{sen}[(2j-1)\pi z/L]}{2j-1} .$$

Se $g_0 = 0$ temos $u_2 = 0$.

(c) Determinamos λ_j por,

$$J_0(\lambda_j a)Y_0(\lambda_j b) - J_0(\lambda_j b)Y_0(\lambda_j a) = 0 ,$$

ou,

$$U_0(\lambda_j b) = 0 , \quad (27)$$

com,

$$U_n(\lambda_j \rho) \equiv J_n(\lambda_j \rho)Y_n(\lambda_j a) - J_n(\lambda_j a)Y_n(\lambda_j \rho) . \quad (28)$$

A solução u_3 é,

$$u_3(\rho, z) = \sum_{j=1} U_0(\lambda_j \rho) \frac{\sinh \lambda_j (L - z)}{\sinh \lambda_j L} \frac{\int_a^b x h(x) U_0(\lambda_j x) dx}{\int_a^b y [U_0(\lambda_j y)]^2 dy} ,$$

ou,

$$u_3(\rho, z) = \int_a^b G(x, \rho, z) h(x) dx ,$$

com,

$$G(x, \rho, z) = \sum_{j=1} U_0(\lambda_j \rho) \frac{\sinh \lambda_j (L - z)}{\sinh \lambda_j L} \frac{x U_0(\lambda_j x)}{\int_a^b y [U_0(\lambda_j y)]^2 dy} .$$

Se $h(\rho) = h_0$ constante temos,

$$u_3(\rho, z) = h_0 \sum_{j=1} U_0(\lambda_j \rho) \frac{\sinh \lambda_j (L - z)}{\sinh \lambda_j L} \frac{\int_a^b x U_0(\lambda_j x) dx}{\int_a^b y [U_0(\lambda_j y)]^2 dy} .$$

Se $h_0 = 0$ temos $u_3 = 0$.

(d) A solução u_4 é,

$$u_4(\rho, z) = \sum_{j=1} \frac{\sinh \lambda_j z}{\sinh \lambda_j L} U_0(\lambda_j \rho) \frac{\int_a^b x v(x) U_0(\lambda_j x) dx}{\int_a^b y [U_0(\lambda_j y)]^2 dy} , \quad U_0(\lambda_j b) = 0 ,$$

ou,

$$u_4(\rho, z) = \int_a^b G(x, \rho, z) v(x) dx ,$$

com,

$$G(x, \rho, z) = \sum_{j=1} \frac{\sinh \lambda_j z}{\sinh \lambda_j L} U_0(\lambda_j \rho) \frac{x U_0(\lambda_j x)}{\int_a^b y [U_0(\lambda_j y)]^2 dy} .$$

Se $v(\rho) = v_0$ constante,

$$\begin{aligned} u_4(\rho, z) &= \sum_{j=1} \frac{\sinh \lambda_j z}{\sinh \lambda_j L} U_0(\lambda_j \rho) \frac{\int_a^b x v(x) U_0(\lambda_j x) dx}{\int_a^b y [U_0(\lambda_j y)]^2 dy} , \\ &= v_0 \sum_{j=1} \frac{\sinh \lambda_j z}{\sinh \lambda_j L} U_0(\lambda_j \rho) \frac{\int_a^b x U_0(\lambda_j x) dx}{\int_a^b y [U_0(\lambda_j y)]^2 dy} . \end{aligned}$$

Se $v_0 = 0$ temos $u_4 = 0$.

(e) Se as funções das condições de contorno são constantes a solução é,

$$\begin{aligned} u(\rho, z) &= \frac{4f_0}{\pi} \sum_{j=1} \frac{V_0(\pi(2j-1)\rho/L)}{V_0(\pi(2j-1)a/L)} \frac{\sin[(2j-1)\pi z/L]}{2j-1} \\ &+ \frac{4g_0}{\pi} \sum_{j=1} \frac{W_0((2j-1)\pi\rho/L)}{W_0((2j-1)\pi b/L)} \frac{\sin[(2j-1)\pi z/L]}{2j-1} \\ &+ h_0 \sum_{j=1} U_0(\lambda_j \rho) \frac{\sinh \lambda_j (L-z)}{\sinh \lambda_j L} \frac{\int_a^b x U_0(\lambda_j x) dx}{\int_a^b y [U_0(\lambda_j y)]^2 dy} \\ &+ v_0 \sum_{j=1} \frac{\sinh \lambda_j z}{\sinh \lambda_j L} U_0(\lambda_j \rho) \frac{\int_a^b x U_0(\lambda_j x) dx}{\int_a^b y [U_0(\lambda_j y)]^2 dy} . \end{aligned}$$

8. Considere uma casca cilíndrica infinita de raio interno a e raio interno b . Encontre a solução $u(\rho, z)$ com as condições de contorno,

$$\begin{aligned} u(a, z) &= f(z), \\ u(b, z) &= g(z). \end{aligned}$$

9. Encontre a solução $u(\rho, z)$ para as equações:

(a)

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -f(\rho, z);$$

(b)

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = +\alpha^2;$$

(c)

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\alpha^2;$$

(d)

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = +\alpha^2 u;$$

(e)

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\alpha^2 u;$$

(f)

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \alpha^2 u = -f(\rho, z);$$

(g)

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \alpha^2 u = -f(\rho, z);$$

com α constante e,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \rho \leq a, \quad 0 \leq z \leq L, \\ u(a, z) &= \mu(z), \quad u(\rho, 0) = \nu_1(\rho), \\ u(\rho, L) &= \nu_2(\rho). \end{aligned}$$

10. Considere o problema anterior com,

$$\begin{aligned}
a &\leq \rho \leq b, \quad 0 \leq z \leq L, \\
u(a, z) &= \mu_1(z), \quad u(b, z) = \mu_2(z), \\
u(\rho, 0) &= \nu_1(\rho), \quad u(\rho, L) = \nu_2(\rho).
\end{aligned}$$

5 Considerando $u = u(\rho, \varphi)$

Substituindo $u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$ em (1), vem,

$$\frac{\rho}{R}(\rho R')' + \frac{\Phi''}{\Phi} = 0.$$

Da equação acima temos,

$$\frac{\rho}{R}(\rho R')' = -\frac{\Phi''}{\Phi} \equiv +\lambda^2. \quad (29)$$

Da relação acima temos,

$$\Phi'' + \lambda^2 \Phi = 0, \quad (30)$$

$$\rho^2 R'' + \rho R' - \lambda^2 R = 0. \quad (31)$$

A equação (30) possui solução,

$$\Phi(\varphi) = b_1 \cos \lambda \varphi + b_2 \sin \lambda \varphi. \quad (32)$$

A equação (31) é a *equação diferencial de Cauchy ou Euler*, com solução,

$$R(\rho) = \frac{a_1}{\rho^\lambda} + a_2 \rho^\lambda. \quad (33)$$

Notemos que as soluções acima são para $\lambda \neq 0$. Se $\lambda = 0$ as funções R e Φ são constantes. Se $\lambda = 0$, temos de (29),

$$\Phi'' = 0, \quad (34)$$

$$(\rho R')' = 0. \quad (35)$$

As soluções das equações acima são,

$$\Phi(\varphi) = c_0 \varphi + d_0, \quad (36)$$

$$R(r) = a_0 + b_0 \ln \rho. \quad (37)$$

Escolhemos $c_0 =$ para termos Φ unívoca. Pelo princípio da superposição, a solução geral é uma soma das possíveis soluções individuais,

$$u(\rho, \varphi) = a_0 + b_0 \ln \rho + \sum_{\lambda > 0} \left(\frac{a_{1\lambda}}{\rho^\lambda} + a_{2\lambda} \rho^\lambda \right) [b_{1\lambda} \cos \lambda \varphi + b_{2\lambda} \operatorname{sen} \lambda \varphi]. \quad (38)$$

A determinação das constantes e dos possíveis valores de λ depende das condições de contorno.

6 Problemas

1. Considerando o intervalo $0 \leq \rho \leq a$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, encontre a solução $u(\rho, \varphi)$ com a condição de contorno,

$$u(a, \varphi) = f(\varphi).$$

A solução geral, com λ inteiro, para que a solução seja unicamente definida, e finita em $\rho = 0$, é

$$u(\rho, \varphi) = a_0 + \sum_{j=1} \rho^j [b_{1j} \cos j\varphi + b_{2j} \operatorname{sen} j\varphi].$$

Usando a condição de contorno temos,

$$f(\varphi) = a_0 + \sum_{j=1} a^j [b_{1j} \cos j\varphi + b_{2j} \operatorname{sen} j\varphi].$$

A expressão acima é uma série de Fourier, logo,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a^j b_{1j} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos jx dx, \\ a^j b_{2j} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} jx dx, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

o que completa a solução do problema,

$$\begin{aligned}
u(\rho, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\
&+ \sum_{j=1} \frac{\rho^j}{a^j} \cos j\varphi \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos jx dx \\
&+ \sum_{j=1} \frac{\rho^j}{a^j} \operatorname{sen} j\varphi \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} jx dx .
\end{aligned}$$

Se $f(\varphi) = f_0$ constante,

$$u(\rho, \varphi) = f_0 .$$

2. Considerando o intervalo $0 \leq \rho \leq a$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, encontre a solução $u(\rho, \varphi)$ com a condição de contorno,

$$\frac{\partial u(a, \varphi)}{\partial \rho} = f(\varphi) .$$

A solução é,

$$\begin{aligned}
u(\rho, \varphi) &= a_0 + \sum_{j=1} \frac{\rho^j}{\pi j a^{j-1}} \cos j\varphi \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos jx dx \\
&+ \sum_{j=1} \frac{\rho^j}{\pi j a^{j-1}} \operatorname{sen} j\varphi \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} jx dx ,
\end{aligned}$$

com a_0 indeterminado.

3. Considerando o intervalo $a \leq \rho \leq b$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, encontre a solução $u(\rho, \varphi)$ com as condições de contorno,

$$\begin{aligned}
u(a, \varphi) &= f(\varphi) , \\
u(b, \varphi) &= g(\varphi) .
\end{aligned}$$

Escrevemos a solução como,

$$u(\rho, \varphi) = u_1(\rho, \varphi) + u_2(\rho, \varphi) ,$$

com,

$$\begin{aligned} u_1(a, \varphi) &= f(\varphi), \quad u_1(b, \varphi) = 0, \\ u_2(a, \varphi) &= 0, \quad u_2(b, \varphi) = g(\varphi). \end{aligned}$$

(a) A solução u_1 é,

$$\begin{aligned} u_1(\rho, \varphi) &= a_0 + b_0 \ln \rho \\ &+ \sum_{j=1} \left(\frac{1}{\rho^j} - \frac{\rho^j}{b^{2j}} \right) \cos j\varphi \frac{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos jx \, dx}{\left(\frac{1}{a^j} - \frac{a^j}{b^{2j}} \right)} \\ &+ \sum_{j=1} \left(\frac{1}{\rho^j} - \frac{\rho^j}{b^{2j}} \right) \sin j\varphi \frac{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin jx \, dx}{\left(\frac{1}{a^j} - \frac{a^j}{b^{2j}} \right)}, \end{aligned}$$

com,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\ln b}{\ln b/a} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx, \\ b_0 &= \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx}{\ln a/b}. \end{aligned}$$

Se $f(\varphi) = f_0$ constante,

$$u_1(\rho, \varphi) = a_0 + b_0 \ln \rho,$$

com,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\ln b}{\ln b/a} f_0, \\ b_0 &= \frac{f_0}{\ln a/b}. \end{aligned}$$

(b) A solução u_2 é,

$$\begin{aligned}
u_2(\rho, \varphi) &= a_0 + b_0 \ln \rho \\
&+ \sum_{j=1} \left(\frac{1}{\rho^j} - \frac{\rho^j}{a^{2j}} \right) \cos j\varphi \frac{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos jx \, dx}{\left(\frac{1}{b^j} - \frac{b^j}{a^{2j}} \right)} \\
&+ \sum_{j=1} \left(\frac{1}{\rho^j} - \frac{\rho^j}{a^{2j}} \right) \sin j\varphi \frac{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin jx \, dx}{\left(\frac{1}{b^j} - \frac{b^j}{a^{2j}} \right)},
\end{aligned}$$

com,

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{\ln a}{\ln a/b} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \, dx, \\
b_0 &= \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \, dx}{\ln b/a}.
\end{aligned}$$

Se $g(\varphi) = g_0$ constante,

$$u_2(\rho, \varphi) = a_0 + b_0 \ln \rho,$$

com,

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{g_0 \ln a}{\ln a/b}, \\
b_0 &= \frac{g_0}{\ln b/a}.
\end{aligned}$$

4. Considere o problema 1 com $u_a(\varphi) = \cos \varphi$.
O único coeficiente não nulo é $b_{11} = 1/a$, logo a solução é,

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\rho}{a} \cos \varphi.$$

5. Considere o problema 1 com $u_a(\varphi) = \sin \varphi$.
Agora o único coeficiente não nulo é $b_{21} = 1/a$, logo,

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\rho}{a} \sin \varphi.$$

6. Considere o problema 3 com $u_a(\varphi) = \cos \varphi$ e $u_b(\varphi) = \sin 2\varphi$.
A solução é,

$$u(\rho, \varphi) = \left(-\frac{b^2}{\rho} + \rho \right) \frac{a}{a^2 - b^2} \cos \varphi + \left(-\frac{a^4}{\rho^2} + \rho^2 \right) \frac{b^2}{b^4 - a^4} \sin 2\varphi,$$

7. Uma placa circular de raio a , com faces isoladas, possui metade do seu contorno a temperatura $f(\varphi)$ e a outra metade a temperatura $g(\varphi)$. Calcule a temperatura no estado estacionário (Spiegel [7], probl. 2.28 com $a = 1$ e $f = u_1, g = u_2$ constantes).

8. Uma placa circular de raio a , com faces isoladas, possui seu contorno com temperatura dada por $120 + 60 \cos 2\varphi$. Calcule a temperatura no estado estacionário (Spiegel [7], probl. 2.53 com $a = 1$).

9. Uma placa circular de raio interno a e raio externo b possui faces isoladas, com temperaturas nos contornos $f(\varphi)$ e $g(\varphi)$, respectivamente. Calcule a temperatura no estado estacionário (Spiegel [7], probl. 2.67).

10. Considere o problema anterior nos limites (a) $a \rightarrow 0$, (b) $b \rightarrow \infty$ (Spiegel [7], probl. 2.68).

11. Uma placa possui a forma de um setor de círculo de raio a e ângulo β . Calcule a temperatura no estado estacionário se (Spiegel [7], probl. 2.76 com $g = h = 0$),

$$u(a, \varphi) = f(\varphi), \quad u(\rho, 0) = g(\rho), \quad u(\rho, \beta) = h(\rho).$$

12. Encontre a solução $u(\rho, \varphi)$ para as equações:

(a)

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -f(\rho, \varphi);$$

(b)

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = +\alpha^2;$$

(c)

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -\alpha^2;$$

(d)

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = +\alpha^2 u;$$

(e)

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -\alpha^2 u;$$

(f)

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \alpha^2 u = -f(\rho, \varphi);$$

(g)

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \alpha^2 u = -f(\rho, \varphi);$$

com α constante e,

$$\begin{aligned} 0 \leq \rho \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ u(a, \varphi) = \mu(\varphi). \end{aligned}$$

13. Considere o problema anterior com,

$$\begin{aligned} a \leq \rho \leq b, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ u(a, \varphi) = \mu_1(\varphi), \quad u(b, \varphi) = \mu_2(\varphi). \end{aligned}$$

7 Considerando $u = u(\rho, \varphi, z)$

Substituindo $u(\rho, \varphi, z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$ em (1), vem,

$$\frac{1}{\rho R}(\rho R')' + \frac{1}{\rho^2} \frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{Z''}{Z} = 0.$$

Da equação acima temos,

$$\frac{1}{\rho R}(\rho R')' + \frac{1}{\rho^2} \frac{\Phi''}{\Phi} = -\frac{Z''}{Z} \equiv -\lambda^2. \quad (39)$$

Podemos escrever a equação para Z ,

$$Z'' - \lambda^2 Z = 0, \quad (40)$$

Voltando a (39), temos,

$$\frac{1}{\rho R}(\rho R')' + \frac{1}{\rho^2} \frac{\Phi''}{\Phi} = -\lambda^2,$$

ou,

$$\frac{\rho}{R}(\rho R')' + \frac{\Phi''}{\Phi} + \lambda^2 \rho^2 = 0.$$

Portanto,

$$\frac{\rho}{R}(\rho R')' + \lambda^2 \rho^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi} \equiv \mu^2.$$

Da relação acima temos,

$$\Phi'' + \mu^2 \Phi = 0, \quad (41)$$

$$\rho^2 R'' + \rho R' + (\lambda^2 \rho^2 - \mu^2) R = 0. \quad (42)$$

A equação (42) é a equação diferencial de Bessel, com solução,

$$R(\rho) = a_1 J_\mu(\lambda \rho) + a_2 Y_\mu(\lambda \rho). \quad (43)$$

As soluções acima são para $\lambda \neq 0$. Se $\lambda = 0$ temos para $R(\rho)$,

$$\rho^2 R'' + \rho R' - \mu^2 R = 0,$$

com solução,

$$R(\rho) = \frac{a_0}{\rho^\mu} + b_0 \rho^\mu,$$

e para Z ,

$$Z(z) = c_0 z + d_0.$$

Pelo princípio da superposição, a solução geral é uma soma das possíveis soluções individuais,

$$\begin{aligned} u(\rho, \varphi, z) = & (c_0 z + d_0)(a_0 + b_0 \ln \rho) \\ & + (e_0 z + f_0) \sum_{\mu} \left(\frac{a_{0\mu}}{\rho^\mu} + b_{0\mu} \rho^\mu \right) [d_{1\mu} \cos \mu \varphi + d_{2\mu} \sin \mu \varphi] \\ & + \sum_{\lambda \mu} [a_{1\lambda \mu} J_\mu(\lambda \rho) + a_{2\lambda \mu} Y_\mu(\lambda \rho)] \times \\ & \times [b_{1\mu} \cos \mu \varphi + b_{2\mu} \sin \mu \varphi] [c_{1\lambda} \cosh \lambda z + c_{2\lambda} \sinh \lambda z], \quad (44) \end{aligned}$$

com u_0 constante. A determinação das constantes e dos possíveis valores de λ e μ depende das condições de contorno.

Consideramos agora outra possibilidade para a constante de separação λ . Escrevemos,

$$\frac{1}{\rho R}(\rho R')' + \frac{1}{\rho^2} \frac{\Phi''}{\Phi} = -\frac{Z''}{Z} \equiv +\lambda^2. \quad (45)$$

Podemos escrever a equação para Z ,

$$Z'' + \lambda^2 Z = 0, \quad (46)$$

com solução,

$$Z(z) = c_{1\lambda} \cos \lambda z + c_{2\lambda} \sin \lambda z.$$

Voltando a (28), temos,

$$\frac{1}{\rho R}(\rho R')' + \frac{1}{\rho^2} \frac{\Phi''}{\Phi} = +\lambda^2,$$

ou,

$$\frac{\rho}{R}(\rho R')' + \frac{\Phi''}{\Phi} - \lambda^2 \rho^2 = 0.$$

Portanto,

$$\frac{\rho}{R}(\rho R')' - \lambda^2 \rho^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi} \equiv \mu^2.$$

Da relação acima temos,

$$\Phi'' + \mu^2 \Phi = 0, \quad (47)$$

$$\rho^2 R'' + \rho R' - (\lambda^2 \rho^2 + \mu^2) R = 0. \quad (48)$$

A equação (48) é a equação diferencial modificada de Bessel, com solução,

$$R(\rho) = a_1 I_\mu(\lambda \rho) + a_2 K_\mu(\lambda \rho), \quad \mu \neq 0. \quad (49)$$

Para $\mu = 0$ temos $R = a_0 + b_0 \ln \rho$. A solução geral é então,

$$u(\rho, \varphi, z) = (c_0 z + d_0)(a_0 + b_0 \ln \rho) \quad (50)$$

$$\begin{aligned} & + (e_0 z + f_0) \sum_{\mu} \left(\frac{a_{0\mu}}{\rho^\mu} + b_{0\mu} \rho^\mu \right) [d_{1\mu} \cos \mu \varphi + d_{2\mu} \sin \mu \varphi] \\ & + \sum_{\mu\lambda} [a_{1\lambda\mu} I_\mu(\lambda \rho) + a_{2\lambda\mu} K_\mu(\lambda \rho)] \times \\ & \times [b_{1\mu} \cos \mu \varphi + b_{2\mu} \sin \mu \varphi] [c_{1\lambda} \cos \lambda z + c_{2\lambda} \sin \lambda z]. \end{aligned} \quad (51)$$

A determinação das constantes e dos possíveis valores de λ e μ depende, como é usual, das condições de contorno.

8 Problemas

1. Considerando o intervalo $0 \leq \rho \leq a$, $0 \leq z \leq L$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, encontre a solução $u(\rho, \varphi, z)$ com as condições de contorno,

$$\begin{aligned} u(a, \varphi, z) &= f(\varphi, z), \\ u(\rho, \varphi, 0) &= g(\rho, \varphi), \\ u(\rho, \varphi, L) &= h(\rho, \varphi). \end{aligned}$$

Como antes, escrevemos a solução geral como uma soma de soluções, cada uma satisfazendo uma das condições de contorno. Portanto,

$$u(\rho, \varphi, z) = u_1(\rho, \varphi, z) + u_2(\rho, \varphi, z) + u_3(\rho, \varphi, z),$$

com,

$$\begin{aligned} u_1(a, \varphi, z) &= f(\varphi, z), \quad u_1(\rho, \varphi, 0) = 0, \quad u_1(\rho, \varphi, L) = 0, \\ u_2(a, \varphi, z) &= 0, \quad u_2(\rho, \varphi, 0) = g(\rho, \varphi), \quad u_2(\rho, \varphi, L) = 0, \\ u_3(a, \varphi, z) &= 0, \quad u_3(\rho, \varphi, 0) = 0, \quad u_3(\rho, \varphi, L) = h(\rho, \varphi). \end{aligned}$$

(a) A solução u_1 é,

$$\begin{aligned} u_1(\rho, \varphi, z) &= \sum_j \frac{I_0(\lambda_j \rho)}{I_0(\lambda_j a)} \operatorname{sen} \lambda_j z \times \\ &\times \frac{2}{L} \int_0^L \operatorname{sen}(j\pi y/L) dy \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) dx \\ &+ \sum_{j\mu} \frac{I_\mu(\lambda_j \rho)}{I_\mu(\lambda_j a)} \cos \mu \varphi \operatorname{sen} \lambda_j z \times \\ &\times \frac{2}{L} \int_0^L \operatorname{sen}(j\pi y/L) dy \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \cos \mu x dx \\ &+ \sum_{j\mu} \frac{I_\mu(\lambda_j \rho)}{I_\mu(\lambda_j a)} \operatorname{sen} \mu \varphi \operatorname{sen} \lambda_j z \times \\ &\times \frac{2}{L} \int_0^L \operatorname{sen}(j\pi y/L) dy \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \operatorname{sen} \mu x dx. \end{aligned}$$

Se $f(\varphi, z) = f_0$ constante,

$$\begin{aligned}
u_1(\rho, \varphi, z) &= \sum_j \frac{I_0(\lambda_j \rho)}{I_0(\lambda_j a)} \operatorname{sen} \lambda_j z \frac{2f_0}{L} \int_0^L \operatorname{sen}(j\pi y/L) dy, \\
&= \frac{2f_0}{L} \sum_j \frac{I_0(\lambda_j \rho)}{I_0(\lambda_j a)} \operatorname{sen} \lambda_j z \int_0^L \operatorname{sen}(j\pi y/L) dy, \\
&= \frac{2f_0}{L} \sum_j \frac{I_0((2j-1)\pi\rho/L)}{I_0((2j-1)\pi a/L)} \operatorname{sen}(j\pi z/L) \frac{2L}{(2j-1)\pi}, \\
&= \frac{4f_0}{\pi} \sum_j \frac{I_0((2j-1)\pi\rho/L)}{I_0((2j-1)\pi a/L)} \frac{\operatorname{sen}[(2j-1)\pi z/L]}{2j-1}.
\end{aligned}$$

Se $f_0 = 0$ temos $u_1 = 0$.

(b) A solução u_2 é ([7], 6.97a),

$$\begin{aligned}
u_2(\rho, \varphi, z) &= \frac{2}{a^2} \sum_j \frac{J_0(\lambda_{0j} \rho)}{J_1^2(\lambda_{0j} a)} \frac{\operatorname{senh} \lambda_{0j}(L-z)}{\operatorname{senh} \lambda_{0j} L} \times \\
&\quad \times \int_0^a x J_0(\lambda_{0j} x) dx \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x, y) dy \\
&\quad + \frac{2}{a^2} \sum_{\mu j} \frac{J_\mu(\lambda_{\mu j} \rho)}{J_{\mu+1}^2(\lambda_{\mu j} a)} \frac{\operatorname{senh} \lambda_{\mu j}(L-z)}{\operatorname{senh} \lambda_{\mu j} L} \cos \mu \varphi \times \\
&\quad \times \int_0^a x J_\mu(\lambda_{\mu j} x) dx \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x, y) \cos \mu y dy \\
&\quad + \frac{2}{a^2} \sum_{\mu j} \frac{J_\mu(\lambda_{\mu j} \rho)}{J_{\mu+1}^2(\lambda_{\mu j} a)} \frac{\operatorname{senh} \lambda_{\mu j}(L-z)}{\operatorname{senh} \lambda_{\mu j} L} \operatorname{sen} \mu \varphi \times \\
&\quad \times \int_0^a x J_\mu(\lambda_{\mu j} x) dx \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x, y) \operatorname{sen} \mu y dy.
\end{aligned}$$

Se $g(\rho, \varphi) = g_0$ constante,

$$u_2(\rho, \varphi, z) = \frac{2g_0}{a} \sum_j \frac{J_0(\lambda_{0j} \rho)}{\lambda_{0j} J_1(\lambda_{0j} a)} \frac{\operatorname{senh} \lambda_{0j}(L-z)}{\operatorname{senh} \lambda_{0j} L}.$$

Se $g_0 = 0$ temos $u_2 = 0$.

Se $g(\rho, \varphi) = \rho^2 \cos \varphi$ ([7], 6.97b),

$$u_2(\rho, \varphi, z) = \sum_j J_1(\lambda_j \rho) \cos \varphi \sinh \lambda_j (L - z) \times \\ \times \frac{1}{\sinh \lambda_j L} \frac{2}{a^2 J_2^2(\lambda_j a)} \int_0^a x^3 J_1(\lambda_j x) dx ,$$

com $J_1(\lambda_j a) = 0$. Calculando a integral acima temos,

$$\int_0^a x^3 J_1(\lambda_j x) dx = \frac{1}{\lambda_j^3} \left[(3a - \lambda_j^2 a^3) J_0(\lambda_j a) - 3 \int_0^a J_0(\lambda_j x) dx \right] .$$

Usamos as seguintes integrais indefinidas,

$$\begin{aligned} \int \cos px \cos qx dx &= \frac{\sin(p-q)x}{2(p-q)} + \frac{\sin(p+q)x}{2(p+q)} , \\ \int \sin px \cos qx dx &= -\frac{\cos(p-q)x}{2(p-q)} - \frac{\cos(p+q)x}{2(p+q)} , \\ \int \cos^2 ax dx &= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} , \\ \int x^m J_1(x) dx &= -x^m J_0(x) + m \int x^{m-1} J_0(x) dx , \\ \int x^2 J_0(x) dx &= x^2 J_1(x) + x J_0(x) - \int J_0(x) dx . \end{aligned}$$

(c) A solução u_3 é,

$$\begin{aligned} u_3(\rho, \varphi, z) &= \frac{2}{a^2} \sum_j \frac{J_0(\lambda_{0j} \rho)}{J_1^2(\lambda_{0j} a)} \frac{\sinh \lambda_{0j} z}{\sinh \lambda_{0j} L} \times \\ &\times \int_0^a x J_0(\lambda_{0j} x) dx \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x, y) dy \\ &+ \frac{2}{a^2} \sum_{j\mu} \frac{J_\mu(\lambda_{\mu j} \rho)}{J_{\mu+1}^2(\lambda_{\mu j} a)} \frac{\sinh \lambda_{\mu j} z}{\sinh \lambda_{\mu j} L} \cos \mu \varphi \times \\ &\times \int_0^a x J_\mu(\lambda_{\mu j} x) dx \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x, y) \cos \mu y dy \\ &+ \frac{2}{a^2} \sum_{j\mu} \frac{J_\mu(\lambda_{\mu j} \rho)}{J_{\mu+1}^2(\lambda_{\mu j} a)} \frac{\sinh \lambda_{\mu j} z}{\sinh \lambda_{\mu j} L} \sin \mu \varphi \times \\ &\times \int_0^a x J_\mu(\lambda_{\mu j} x) dx \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x, y) \sin \mu y dy . \end{aligned}$$

Se $h(\rho, \varphi) = h_0$ constante,

$$u_3(\rho, \varphi, z) = \frac{2h_0}{a} \sum_j \frac{J_0(\lambda_{0j}\rho)}{\lambda_{0j}J_1(\lambda_{0j}a)} \frac{\sinh \lambda_{0j}z}{\sinh \lambda_{0j}L}.$$

Se $h_0 = 0$ temos $u_3 = 0$.

(d) Considerando as funções nas condições de contorno constantes, a solução é,

$$\begin{aligned} u(\rho, \varphi, z) = & \frac{4f_0}{\pi} \sum_j \frac{I_0((2j-1)\pi\rho/L)}{I_0((2j-1)\pi a/L)} \frac{\sin((2j-1)\pi z/L)}{2j-1} \\ & + \frac{2g_0}{a} \sum_j \frac{J_0(\lambda_{0j}\rho)}{\lambda_{0j}J_1(\lambda_{0j}a)} \frac{\sinh \lambda_{0j}(L-z)}{\sinh \lambda_{0j}L} \\ & + \frac{2h_0}{a} \sum_j \frac{J_0(\lambda_{0j}\rho)}{\lambda_{0j}J_1(\lambda_{0j}a)} \frac{\sinh \lambda_{0j}z}{\sinh \lambda_{0j}L}. \end{aligned}$$

2. Considerando o intervalo $a \leq \rho \leq b$, $0 \leq z \leq L$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, encontre a solução $u(\rho, \varphi, z)$ com as condições de contorno,

$$\begin{aligned} u(a, \varphi, z) &= f(\varphi, z), \\ u(b, \varphi, z) &= g(\varphi, z), \\ u(\rho, \varphi, 0) &= h(\rho, \varphi), \\ u(\rho, \varphi, L) &= v(\rho, \varphi). \end{aligned}$$

Escrevemos a solução como uma soma de soluções, cada uma satisfazendo uma das condições de contorno,

$$u(\rho, \varphi, z) = u_1(\rho, \varphi, z) + u_2(\rho, \varphi, z) + u_3(\rho, \varphi, z) + u_4(\rho, \varphi, z),$$

com,

$$\begin{aligned} u_1(a, \varphi, z) &= f(\varphi, z), \quad u_1(b, \varphi, z) = 0, \quad u_1(\rho, \varphi, 0) = 0, \quad u_1(\rho, \varphi, L) = 0, \\ u_2(a, \varphi, z) &= 0, \quad u_2(b, \varphi, z) = g(\varphi, z), \quad u_2(\rho, \varphi, 0) = 0, \quad u_2(\rho, \varphi, L) = 0, \\ u_3(a, \varphi, z) &= 0, \quad u_3(b, \varphi, z) = 0, \quad u_3(\rho, \varphi, 0) = h(\rho, \varphi), \quad u_3(\rho, \varphi, L) = 0, \\ u_4(a, \varphi, z) &= 0, \quad u_4(b, \varphi, z) = 0, \quad u_4(\rho, \varphi, 0) = 0, \quad u_4(\rho, \varphi, L) = v(\rho, \varphi). \end{aligned}$$

(a) A solução u_1 é,

$$\begin{aligned}
u_1(\rho, \varphi, z) = & \sum_j \frac{V_0(j\pi\rho/L)}{V_0(j\pi a/L)} \text{sen}(j\pi z/L) \times \\
& \times \frac{2}{L} \int_0^L \text{sen}(j\pi y/L) dy \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) dx \\
& + \sum_{\mu j} \frac{V_{\mu}(j\pi\rho/L)}{V_{\mu}(j\pi a/L)} \cos \mu\varphi \text{sen}(j\pi z/L) \times \\
& \times \frac{2}{L} \int_0^L \text{sen}(j\pi y/L) dy \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \cos \mu x dx \\
& + \sum_{\mu j} \frac{V_{\mu}(j\pi\rho/L)}{V_{\mu}(j\pi a/L)} \text{sen} \mu\varphi \text{sen}(j\pi z/L) \times \\
& \times \frac{2}{L} \int_0^L \text{sen}(j\pi y/L) dy \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \text{sen} \mu x dx .
\end{aligned}$$

Se $f(\varphi, z) = f_0$ constante,

$$\begin{aligned}
u_1(\rho, \varphi, z) = & \sum_j \frac{V_0(j\pi\rho/L)}{V_0(j\pi a/L)} \text{sen}(j\pi z/L) \frac{2}{L} f_0 \int_0^L \text{sen}(j\pi y/L) dy , \\
= & \frac{4f_0}{\pi} \sum_j \frac{V_0((2j-1)\pi\rho/L)}{V_0((2j-1)\pi a/L)} \frac{\text{sen}[(2j-1)\pi z/L]}{2j-1} .
\end{aligned}$$

Se $f_0 = 0$ temos $u_1 = 0$.

(b) A solução u_2 é,

$$\begin{aligned}
u_2(\rho, \varphi, z) &= \sum_j \frac{W_0(\lambda_j \rho)}{W_0(\lambda_j b)} \operatorname{sen} \lambda_j z \times \\
&\times \frac{2}{L} \int_0^L \operatorname{sen}(j\pi y/L) dy \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x, y) dx \\
&+ \sum_{\mu j} \frac{W_\mu(\lambda_j \rho)}{W_\mu(\lambda_j b)} \cos \mu \varphi \operatorname{sen} \lambda_j z \times \\
&\times \frac{2}{L} \int_0^L \operatorname{sen}(j\pi y/L) dy \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x, y) \cos \mu x dx \\
&+ \sum_{\mu j} \frac{W_\mu(\lambda_j \rho)}{W_\mu(\lambda_j b)} \operatorname{sen} \mu \varphi \operatorname{sen} \lambda_j z \times \\
&\times \frac{2}{L} \int_0^L \operatorname{sen}(j\pi y/L) dy \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x, y) \operatorname{sen} \mu x dx .
\end{aligned}$$

Se $g(\varphi, z) = g_0$ constante,

$$\begin{aligned}
u_2(\rho, \varphi, z) &= \sum_j \frac{W_0(\lambda_j \rho)}{W_0(\lambda_j b)} \operatorname{sen} \lambda_j z \frac{2}{L} \int_0^L \operatorname{sen}(j\pi y/L) dy g_0 , \\
&= \frac{4g_0}{\pi} \sum_j \frac{W_0((2j-1)\pi\rho/L)}{W_0((2j-1)\pi b/L)} \frac{\operatorname{sen}[(2j-1)\pi z/L]}{2j-1} .
\end{aligned}$$

Se $g_0 = 0$ temos $u_2 = 0$.

(c) A solução u_3 é,

$$\begin{aligned}
u_3(\rho, \varphi, z) = & \sum_j \frac{U_0(\lambda_{0j}\rho)}{\int_a^b v[U_0(\lambda_{0j}v)]^2 dv} \frac{\sinh \lambda_{0j}(L-z)}{\sinh \lambda_{0j}L} \times \\
& \times \int_a^b x U_0(\lambda_{0j}x) dx \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x, y) dy \\
& + \sum_{\mu j} \frac{U_\mu(\lambda_{\mu j}\rho)}{\int_a^b v[U_\mu(\lambda_{\mu j}v)]^2 dv} \frac{\sinh \lambda_{\mu j}(L-z)}{\sinh \lambda_{\mu j}L} \cos \mu \varphi \times \\
& \times \int_a^b x U_\mu(\lambda_{\mu j}x) dx \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x, y) \cos \mu y dy \\
& + \sum_{\mu j} \frac{U_\mu(\lambda_{\mu j}\rho)}{\int_a^b v[U_\mu(\lambda_{\mu j}v)]^2 dv} \frac{\sinh \lambda_{\mu j}(L-z)}{\sinh \lambda_{\mu j}L} \sin \mu \varphi \times \\
& \times \int_a^b x U_\mu(\lambda_{\mu j}x) dx \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x, y) \sin \mu y dy .
\end{aligned}$$

Se $h(\rho, \varphi) = h_0$ constante,

$$\begin{aligned}
u_3(\rho, \varphi, z) &= \sum_j \frac{U_0(\lambda_{0j}\rho)}{\int_a^b v[U_0(\lambda_{0j}v)]^2 dv} \frac{\sinh \lambda_{0j}(L-z)}{\sinh \lambda_{0j}L} \int_a^b x U_0(\lambda_{0j}x) dx h_0 \\
&= h_0 \sum_j \frac{U_0(\lambda_{0j}\rho)}{\int_a^b v[U_0(\lambda_{0j}v)]^2 dv} \frac{\sinh \lambda_{0j}(L-z)}{\sinh \lambda_{0j}L} \int_a^b x U_0(\lambda_{0j}x) dx .
\end{aligned}$$

Se $h_0 = 0$ temos $u_3 = 0$.

(d) A solução u_4 é,

$$\begin{aligned}
u_4(\rho, \varphi, z) = & \sum_j \frac{U_0(\lambda_{0j}\rho)}{\int_a^b w[U_0(\lambda_{0j}w)]^2 dw} \frac{\sinh \lambda_{0j} z}{\sinh \lambda_{0j} L} \times \\
& \times \int_a^b x U_0(\lambda_{0j}x) dx \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(x, y) dy \\
& + \sum_{\mu j} \frac{U_\mu(\lambda_{\mu j}\rho)}{\int_a^b w[U_\mu(\lambda_{\mu j}w)]^2 dw} \frac{\sinh \lambda_{\mu j} z}{\sinh \lambda_{\mu j} L} \cos \mu \varphi \times \\
& \times \int_a^b x U_\mu(\lambda_{\mu j}x) dx \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(x, y) \cos \mu y dy \\
& + \sum_{\mu j} \frac{U_\mu(\lambda_{\mu j}\rho)}{\int_a^b w[U_\mu(\lambda_{\mu j}w)]^2 dw} \frac{\sinh \lambda_{\mu j} z}{\sinh \lambda_{\mu j} L} \sin \mu \varphi \times \\
& \times \int_a^b x U_\mu(\lambda_{\mu j}x) dx \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(x, y) \sin \mu y dy .
\end{aligned}$$

Se $v(\rho, \varphi) = v_0$ constante,

$$\begin{aligned}
u_4(\rho, \varphi, z) &= \sum_j \frac{U_0(\lambda_{0j}\rho)}{\int_a^b w[U_0(\lambda_{0j}w)]^2 dw} \frac{\sinh \lambda_{0j} z}{\sinh \lambda_{0j} L} \int_a^b x U_0(\lambda_{0j}x) dx v_0 , \\
&= v_0 \sum_j \frac{U_0(\lambda_{0j}\rho)}{\int_a^b w[U_0(\lambda_{0j}w)]^2 dw} \frac{\sinh \lambda_{0j} z}{\sinh \lambda_{0j} L} \int_a^b x U_0(\lambda_{0j}x) dx .
\end{aligned}$$

Se $v_0 = 0$ temos $u_4 = 0$.

(e) Se as funções nas condições de contorno são todas constantes,

$$\begin{aligned}
u(\rho, \varphi, z) = & \frac{4f_0}{\pi} \sum_j \frac{V_0((2j-1)\pi\rho/L)}{V_0((2j-1)\pi a/L)} \frac{\text{sen}[(2j-1)\pi z/L]}{2j-1} \\
& + \frac{4g_0}{\pi} \sum_j \frac{W_0((2j-1)\pi\rho/L)}{W_0((2j-1)\pi b/L)} \frac{\text{sen}[(2j-1)\pi z/L]}{2j-1} \\
& + h_0 \sum_j \frac{U_0(\lambda_{0j}\rho)}{\int_a^b w[U_0(\lambda_{0j}w)]^2 dw} \frac{\text{senh}\lambda_{0j}(L-z)}{\text{senh}\lambda_{0j}L} \int_a^b xU_0(\lambda_{0j}x)dx \\
& + v_0 \sum_j \frac{U_0(\lambda_{0j}\rho)}{\int_a^b w[U_0(\lambda_{0j}w)]^2 dw} \frac{\text{senh}\lambda_{0j}z}{\text{senh}\lambda_{0j}L} \int_a^b xU_0(\lambda_{0j}x)dx .
\end{aligned}$$

3. Considere um cilindro infinito de raio a . Calcule a solução $u(\rho, \varphi, z)$ da equação de Laplace com a condição de contorno,

$$u(a, \varphi, z) = f(\varphi, z) .$$

4. Considere um cilindro infinito de raio a . Calcule a solução $u(\rho, \varphi, z)$ da equação de Laplace com a condição de contorno,

$$\frac{\partial u(a, \varphi, z)}{\partial \rho} = f(\varphi, z) .$$

5. Considere uma casca cilíndrica infinita de raio interno a e raio externo b . Calcule a solução $u(\rho, \varphi, z)$ da equação de Laplace com as condições de contorno,

$$\begin{aligned}
u(a, \varphi, z) &= f(\varphi, z) , \\
u(b, \varphi, z) &= g(\varphi, z) .
\end{aligned}$$

6. Considere um cilindro em $0 < \rho < a$, $0 < z < L$ com radiação obedecendo a lei de Newton do resfriamento em $z = 0$. Calcule a temperatura no estado estacionário (Spiegel [7], probl. 6.98).

7. Encontre a solução $u(\rho, \varphi, z)$ para as equações:

(a)

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -f(\rho, \varphi, z) ;$$

(b)

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = +\alpha^2 ;$$

$$\begin{aligned}
\text{(c)} \quad & \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\alpha^2; \\
\text{(d)} \quad & \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = +\alpha^2 u; \\
\text{(e)} \quad & \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\alpha^2 u; \\
\text{(f)} \quad & \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \alpha^2 u = -f(\rho, \varphi, z); \\
\text{(g)} \quad & \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \alpha^2 u = -f(\rho, \varphi, z);
\end{aligned}$$

com α constante e,

$$\begin{aligned}
& 0 \leq \rho \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq L, \\
& u(a, \varphi, z) = \mu(\varphi, z), \quad u(\rho, \varphi, 0) = \nu_1(\rho, \varphi), \\
& u(\rho, \varphi, L) = \nu_2(\rho, \varphi).
\end{aligned}$$

8. Considere o problema anterior com,

$$\begin{aligned}
& a \leq \rho \leq b, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq L, \\
& u(a, \varphi, z) = \mu_1(\varphi, z), \quad u(b, \varphi, z) = \mu_2(\varphi, z), \\
& u(\rho, \varphi, 0) = \nu_1(\rho, \varphi), \quad u(\rho, \varphi, L) = \nu_2(\rho, \varphi).
\end{aligned}$$

9 Apêndice

1. Séries de Fourier.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right),$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

2. Série de Fourier de senos.

$$f(z) = \sum_{j=1} b_j \operatorname{sen} (j\pi z/L),$$

$$b_j = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} (j\pi x/L) dx.$$

3. Série de Fourier de cosenos.

$$f(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1} a_j \cos (j\pi z/L),$$

$$a_j = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos (j\pi x/L) dx.$$

4. Polinômios de Legendre ($x = \cos \theta$).

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= x \\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\
P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\
P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\
P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \\
P_6(x) &= \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5) \\
P_7(x) &= \frac{1}{16}(497x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x) \\
P_8(x) &= \frac{1}{128}(6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35)
\end{aligned}$$

5. Relação de ortogonalidade.

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)P_k(x)dx = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \frac{2}{2n+1}, & n = k, \end{cases}$$

6. Série de polinômios de Legendre.

$$\begin{aligned}
f(\theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k P_k(\cos \theta), \\
C_k &= \frac{2k+1}{2} \int_0^{\pi} f(\theta) P_k(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta.
\end{aligned}$$

7. Funções associadas de Legendre.

$$\begin{aligned}
P_1^1(x) &= (1-x^2)^{1/2} = \text{sen } \theta \\
P_2^1(x) &= 3x(1-x^2)^{1/2} = 3\text{sen } \theta \cos \theta \\
P_2^2(x) &= 3(1-x^2) = 3\text{sen}^2 \theta \\
P_3^1(x) &= \frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{1/2} = \frac{3}{2}(5\cos^2 \theta - 1)\text{sen } \theta \\
P_3^2(x) &= 15x(1-x^2) = 15\text{sen}^2 \theta \cos \theta \\
P_3^3(x) &= 15(1-x^2)^{3/2} = 15\text{sen}^3 \theta \\
P_4^1(x) &= \frac{5}{2}(7x^3-3x)(1-x^2)^{1/2} = \frac{5}{2}(7\cos^3 \theta - 3\cos \theta)\text{sen } \theta \\
P_4^2(x) &= \frac{15}{2}(7x^2-1)(1-x^2) = \frac{15}{2}(7\cos^2 \theta - 1)\text{sen}^2 \theta \\
P_4^3(x) &= 105x(1-x^2)^{3/2} = 105\text{sen}^3 \theta \cos \theta \\
P_4^4(x) &= 105(1-x^2)^2 = 105\text{sen}^4 \theta
\end{aligned}$$

8. Relação de ortogonalidade.

$$\int_{-1}^{+1} P_n^m(x) P_k^m(x) dx = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, & n = k, \end{cases}$$

9. Série de funções associadas de Legendre do primeiro tipo.

$$\begin{aligned}
f(\theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} D_k P_k^m(\cos \theta), \\
D_k &= \frac{(2k+1)(k-m)!}{2(k+m)!} \int_0^{\pi} f(\theta) P_k^m(\cos \theta) \text{sen } \theta d\theta,
\end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned}
\int_0^L \text{sen}(j\pi x/L) dx &= \begin{cases} 0, & j \text{ par}, \\ \frac{2L}{j\pi}, & j \text{ ímpar}. \end{cases} \\
&= \frac{2L}{(2j-1)\pi}, j = 1, 2, 3, \dots
\end{aligned}$$

11.

$$\int_0^L x \text{sen}(j\pi x/L) dx = \frac{L^2}{j\pi} (-1)^{j+1}, j = 1, 2, 3, \dots$$

12.

$$\int_0^{+L} \cos(k\pi x/2L) dx = \frac{2L}{k\pi} \text{sen}(k\pi/2).$$

13.

$$\int_0^L \cos(i\pi x/L) \cos(j\pi x/L) dx = \begin{cases} 0, i \neq j, \\ \frac{L}{2}, i = j. \end{cases}$$

14.

$$\int_0^{+L} \cos[(2j-1)\pi z/2L] \cos[(2k-1)\pi z/2L] dz = \begin{cases} 0, j \neq k, \\ \frac{L}{2}, j = k. \end{cases}$$

15.

$$\delta(z-x) = \frac{2}{L} \sum_{j=1} \text{sen}(j\pi z/L) \text{sen}(j\pi x/L),$$

$$0 \leq x, z \leq L.$$

16.

$$\delta(z-x) = \frac{2}{L} \sum_{j=1} \text{sen}[(2j-1)\pi z/2L] \text{sen}((2j-1)\pi x/2L),$$

$$0 \leq x, z \leq L.$$

17.

$$\delta(z-x) = \frac{2}{L} \sum_{j=1} \cos[(2j-1)\pi z/2L] \cos[(2j-1)\pi x/2L],$$

$$0 \leq x, z \leq L.$$

18.

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{j=1} \frac{\text{sen}[(2j-1)\pi z/2L]}{2j-1}, \quad 0 \leq x \leq L.$$

19.

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{j=1} \frac{1}{2j-1} \cos[(2j-1)\pi z/2L] \operatorname{sen}[(2j-1)\pi/2], \quad 0 \leq x \leq L.$$

20. Funções de Bessel.

$$xJ'_n(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x),$$

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}J_n(x) - J_{n-1}(x),$$

$$\int xJ_0(x)dx = xJ_1(x),$$

$$\int x^n J_{n-1}(x)dx = x^n J_n(x),$$

$$\int_0^a \rho' J_0(\lambda_i \rho') d\rho' = \frac{a}{\lambda_i} J_1(\lambda_i a).$$

(a)

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p J_n(\lambda_p x), \quad 0 < x < a,$$

$$J_n(\lambda_p a) = 0, \quad p = 1, 2, 3, \dots,$$

$$A_k = \frac{2}{a^2 J_{n+1}^2(\lambda_k a)} \int_0^a x J_n(\lambda_k x) f(x) dx.$$

(b)

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p J_n(\lambda_p x), \quad 0 < x < a,$$

$$J'_n(\lambda_p a) = 0, \quad p = 1, 2, 3, \dots,$$

$$A_k = \frac{2}{a^2 (1 - n^2/(\lambda_k a)^2) J_n^2(\lambda_k a)} \int_0^a x J_n(\lambda_k x) f(x) dx.$$

Em particular, se temos,

$$J_1(\lambda_p a) = 0, \quad p = 1, 2, 3, \dots,$$

então,

$$f(x) = A_0 + \sum_{p=1}^{\infty} A_p J_0(\lambda_p x), \quad 0 < x < a,$$

com,

$$A_0 = \frac{2}{a^2} \int_0^a x f(x) dx,$$

$$A_k = \frac{2}{a^2 J_0^2(\lambda_k a)} \int_0^a x J_0(\lambda_k x) f(x) dx.$$

(c)

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p J_n(\lambda_p x), \quad 0 < x < a,$$

$$R J_n(\lambda_p a) + S \lambda_p a J_n'(\lambda_p a) = 0, \quad p = 1, 2, 3, \dots,$$

$$A_k = \frac{2(\lambda_k a)^2 \int_0^a x J_n(\lambda_k x) f(x) dx}{a^2 J_n^2(\lambda_k a) [R^2/S^2 + (\lambda_k a)^2 - n^2]}.$$

(d)

$$1 = \frac{2}{a} \sum_{j=1} \frac{J_0(\lambda_j \rho)}{\lambda_j J_1(\lambda_j a)}, \quad J_0(\lambda_j a) = 0.$$

(e)

$$\delta(\rho - x) = \frac{2}{a^2} \sum_j \frac{J_0(\lambda_j \rho)}{J_1^2(\lambda_j a)} x J_0(\lambda_j x), \quad J_0(\lambda_j a) = 0, \quad 0 \leq \rho \leq a.$$

(f)

$$U_n(\lambda_j \rho) \equiv J_n(\lambda_j \rho) Y_n(\lambda_j a) - J_n(\lambda_j a) Y_n(\lambda_j \rho),$$

$$U_n(\lambda_j b) = 0,$$

$$\int_a^b \rho U_\mu(\lambda_j \rho) U_\mu(\lambda_k \rho) d\rho = 0, \quad j \neq k.$$

(g)

$$f(\rho) = \sum_{j=1} A_j U_\mu(\lambda_j \rho),$$

$$A_j = \frac{\int_a^b \rho f(\rho) U_\mu(\lambda_j \rho) d\rho}{\int_a^b \rho U_\mu^2(\lambda_j \rho) d\rho}.$$

(h)

$$\delta(\rho - x) = \sum_j \frac{U_0(\lambda_j \rho)}{\int_a^b y [U_0(\lambda_j y)]^2 dy} x U_0(\lambda_j x), \quad a \leq \rho \leq b,$$

(i)

$$1 = \sum_j U_0(\lambda_j \rho) \frac{\int_a^b x U_0(\lambda_j x) dx}{\int_a^b y [U_0(\lambda_j y)]^2 dy}.$$

(j)

$$V_n(\lambda_j \rho) \equiv I_n(\lambda_j \rho) K_n(\lambda_j b) - I_n(\lambda_j b) K_n(\lambda_j \rho),$$

(k)

$$W_n(\lambda_j \rho) \equiv I_n(\lambda_j \rho) K_n(\lambda_j a) - I_n(\lambda_j a) K_n(\lambda_j \rho),$$

$$Z_n(\lambda_j \rho) \equiv J_n(\lambda_j \rho) Y_n(\lambda_j b) - J_n(\lambda_j b) Y_n(\lambda_j \rho),$$

(l)

$$f(x) = x^2 = \frac{2}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_k x)}{J_1(\lambda_k a)} \frac{1}{\lambda_k^3} [(\lambda_k a)^2 - 4], \quad J_0(\lambda_k a) = 0.$$

References

- [1] A. Sommerfeld, *Partial Differential Equations in Physics*, Academic Press, New York and London (1964s).
- [2] R. K. Wangsness, *Electromagnetic Fields*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York (1986).
- [3] Jackson, J.D., *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, New York (1962).
- [4] Stratton, J. A., *Electromagnetic Theory*, 1st ed., McGraw-Hill, New York (1941).
- [5] I. S. Gradshteyn, I. M. Rytzhik, *Table of Integral, Series, and Products*, 5th ed., Academic Press, San Diego (1994).
- [6] M. R. Spiegel, S. Lipschutz, J. Liu, *Schaum's Outline of Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York (2009).
- [7] M. R. Spiegel, *Schaum's Outline of Fourier Analysis with Applications to Boundary Value Problems*, McGraw-Hill, New York (1974).
- [8] M. R. Spiegel, *Schaum's Outline of Advanced Mathematics for Engineers and Scientists*, McGraw-Hill, New York (1971).
- [9] Arfken, G. B., Weber, H. J., *Mathematical Methods for Physicists*, 6th. ed., Elsevier Academic Press, Amsterdam (2005).
- [10] Morse, P. M., Feshbach, H., *Methods of Theoretical Physics*, vols. I e II, McGraw-Hill, New York (1953).
- [11] Mathews, J., Walker, R. L., *Mathematical Methods of Physics*, 2nd. ed., Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Redwood City (1969).