3 - A equação de Laplace em coordenadas cartesianas

A equação de Laplace $\nabla^2 u = 0$ em coordenadas cartesianas é,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \,. \tag{1}$$

1 Considerando $u(x)$

Nesse caso temos,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \,, \tag{2}$$

com solução,

$$u(x) = ax + b \,. \tag{3}$$

Problemas

1. Obtenha a solução $u(x)$ no intervalo $0 \leq x \leq +\infty$, com $u(0) = u_0$, $u'(0) = v_0$.

A solução é $u(x) = ax + b$. Em $x = 0$, $u(0) = b = u_0$, $u'(0) = a = v_0$, logo,

$$u(x) = v_0 x + u_0 \,.$$

Se a solução deve ser finita, então $v_0 = 0$. Assim, uma solução finita é necessariamente uma constante.

2. Obtenha a solução $u(x)$ no intervalo $0 \leq x \leq L$, com,

(a) $u(0) = u_0$, $u(L) = v_0$.

A solução é $u(x) = ax + b$. Em $x = 0$, $u(0) = b = u_0$, e em $x = L$, $u(L) = aL + b = v_0$, logo, $b = u_0$ e $a = (v_0 - b)/L = (v_0 - u_0)/L$,

$$u(x) = \frac{v_0 - u_0}{L} x + u_0 \,.$$

(b) $u'(0) = u_0$, $u(L) = v_0$.

Temos $a = u_0$ e $aL + b = v_0$, ou $b = (v_0 - aL) = v_0 - u_0 L$, logo,

$$u(x) = u_0 x + v_0 - u_0 L \,.$$

(c) $u(0) = u_0$, $u'(L) = v_0$.

Agora, $b = u_0$*,* $a = v_0$*, logo,*

$$u(x) = v_0 x + u_0\,.$$

(d) $u'(0) = u_0$, $u'(L) = v_0$.

Temos, $u'(x) = a = u_0 = v_0$*. Portanto a derivada deve ser igual em* $x = 0$ *e* $x = L$*, e falta determinar* b*,*

$$u(x) = u_0 x + b\,.$$

3. Obtenha a solução $u(x)$ no intervalo $A \leq x \leq B$, com,

(a) $u(A) = u_0$, $u(B) = v_0$.

Temos,

$$\begin{aligned} aA + b &= u_0\,, \\ aB + b &= v_0\,, \end{aligned}$$

logo,

$$a = (u_0 - v_0)/(A - B)\,, \quad b = (Av_0 - Bu_0)/(A - B)\,.$$

A solução é então,

$$u(x) = \frac{u_0 - v_0}{A - B}x + \frac{Av_0 - Bu_0}{A - B}\,.$$

(b) $u'(A) = u_0$, $u(B) = v_0$.

Temos,

$$\begin{aligned} a &= u_0\,, \\ aB + b &= v_0\,, \end{aligned}$$

logo $b = v_0 - aB = v_0 - u_0 B$ *e,*

$$u(x) = u_0 x + v_0 - u_0 B\,.$$

(c) $u(A) = u_0$, $u'(B) = v_0$.

Temos,

$$aA + b = u_0\,,$$
$$a = v_0\,,$$

portanto $b = u_0 - aA = u_0 - v_0 A$ *e,*

$$u(x) = v_0 x + u_0 - v_0 A\,.$$

(d) $u'(A) = u_0$, $u'(B) = v_0$.
Como $u' = a$, *devemos ter* $a = u_0 = v_0$, *e,*

$$u(x) = u_0 x + b\,,$$

com b *fica indeterminado.*

4. Calcule a temperatura estacionária para uma barra sobre o eixo x com extremidades em $x = 0$ e $x = 10$. As condições de contorno são $u(0) = 150^o$C, $u(10) = 100^o$C ([7], probl. 2.52).

A equação do calor para a situação estacionária (equação de Laplace), em uma dimensão, é $u'' = 0$. *A solução é,*

$$u(x) = \frac{u_0 - v_0}{A - B}x + \frac{Av_0 - Bu_0}{A - B} = 150 - 5x\,.$$

5. Calcule $u(x)$ para as equações:
(a)
$$\frac{d^2u}{dx^2} = -f(x)\,;$$
(b)
$$\frac{d^2u}{dx^2} = +\alpha^2\,;$$
com α constante,
(c)
$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\alpha^2\,;$$
com α constante,
(d)
$$\frac{d^2u}{dx^2} = +\alpha^2 u\,;$$
com α constante,

(e)

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\alpha^2 u\,;$$

com α constante e,

$$\begin{aligned}&0 \le x \le a\,,\\ &u(0) = u_0\,, \quad u(a) = u_a\,.\end{aligned}$$

(a) A solução da equação pode ser escrita como a soma da solução da equação homogênea e uma solução particular da equação não-homogênea,

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x)\,.$$

Expandimos $u_p(x)$ e $f(x)$ em séries de Fourier de senos,

$$u_p(x) = \sum_{j=1} a_j\, sen\;(j\pi x/a)\,,$$

$$a_j = \frac{2}{a}\int_0^a u_p(x')\, sen\;(j\pi x'/a)\, dx'\,,$$

$$f(x) = \sum_{j=1} b_j\, sen\;(j\pi x/a)\,,$$

$$b_j = \frac{2}{a}\int_0^a f(x')\, sen\;(j\pi x'/a)\, dx'\,.$$

Substituindo na equação diferencial,

$$\begin{aligned}&\frac{d^2u_p}{dx^2} = -f(x)\,,\\ &-\sum_{j=1} a_j (j\pi/a)^2\, sen\;(j\pi x/a) = -\sum_{j=1} b_j\, sen\;(j\pi x/a)\,,\end{aligned}$$

logo,

$$a_j = \frac{b_j}{(j\pi/a)^2} = \frac{1}{(j\pi/a)^2}\frac{2}{a}\int_0^a f(x')\, sen\;(j\pi x'/a)\, dx'\,.$$

A solução particular é portanto,

$$
\begin{aligned}
u_p(x) &= \sum_{j=1} a_j \, sen\,(j\pi x/a)\,, \\
&= \sum_{j=1} sen\,(j\pi x/a)\frac{1}{(j\pi/a)^2}\frac{2}{a}\int_0^a f(x')\,sen\,(j\pi x'/a)\,dx'\,.
\end{aligned}
$$

Podemos escrever a solução acima em termos de uma função de Green,

$$
u_p(x) = \int_0^a G(x,x')f(x')dx'\,,
$$

com,

$$
G(x,x') = \sum_{j=1} sen\,(j\pi x/a)\frac{1}{(j\pi/a)^2}\frac{2}{a}\,sen\,(j\pi x'/a)\,.
$$

A solução da equação homogênea é,

$$
u_h(x) = Ax + B\,.
$$

A solução u_p satisfaz condições de contorno homogêneas em $x = 0$ e $x = a$. Para a solução u_h temos então,

$$
\begin{aligned}
u(0) &= B = u_0\,, \\
u(a) &= Aa + B = u_a
\end{aligned}
$$

de onde temos,

$$
A = \frac{u_a - u_0}{a}\,, \quad B = u_0\,.
$$

A solução completa é então,

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \frac{u_a - u_0}{a}x + u_0 \\
&\quad + \sum_{j=1} sen\,(j\pi x/a)\frac{1}{(j\pi/a)^2}\frac{2}{a}\int_0^a f(x')\,sen\,(j\pi x'/a)\,dx'\,.
\end{aligned}
$$

6. Resolva o problema anterior com as condições de contorno,

$$
u'(0) = u_0\,, \quad u'(a) = u_a\,.
$$

7. Considere o problema 5 com as condições de contorno,

$$u'(0) + h[u(0) - u_0] = 0\,,$$
$$u'(a) + h[u(a) - u_1] = 0\,.$$

2 Considerando $u(x, y)$

Agora temos,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,. \tag{4}$$

Substituindo,

$$u(x, y) = X(x)Y(y)\,,$$

temos,

$$X''Y + XY'' = 0\,,$$

ou,

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0\,.$$

Temos então,

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} \equiv -\lambda^2\,,$$

ou,

$$X'' + \lambda^2 X = 0\,,$$
$$Y'' - \lambda^2 Y = 0\,.$$

As soluções das equações acima são,

$$X(x) = a_1 \cos \lambda x + a_2 \operatorname{sen} \lambda x\,,$$
$$Y(y) = b_1 \cosh \lambda y + b_2 \operatorname{senh} \lambda y\,.$$

Consideramos $\lambda \neq 0$. Se $\lambda = 0$ vem,

$$X(x) = a_0 x + b_0\,, \quad Y(y) = c_0 y + d_0\,.$$

Pelo princípio da superposição, escrevemos a solução geral como,

$$\begin{aligned} u(x,y) &= (a_0 x + b_0)(c_0 y + d_0) + \\ &\quad + \sum_{\lambda>0} [a_1 \cos \lambda x + a_2 \operatorname{sen} \lambda x][b_1 \cosh \lambda y + b_2 \operatorname{senh} \lambda y] \,. \end{aligned} \tag{5}$$

Usando $+\lambda^2$ em vez de $-\lambda^2$ como constante de separação,

$$\begin{aligned} u(x,y) &= (a_0 x + b_0)(c_0 y + d_0) + \\ &\quad + \sum_{\lambda>0} [a_1 \cosh \lambda x + a_2 \operatorname{senh} \lambda x][b_1 \cos \lambda y + b_2 \operatorname{sen} \lambda y] \,. \end{aligned} \tag{6}$$

3 Problemas

1. Mostre que a solução da equação,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \,,$$

com condições de contorno,

$$u(0,y) = u(a,y) = u(x,0) = 0 \,, \quad u(x,b) = f_b(x) \,,$$

é (Morse [10], pág. 797; Spiegel [7], probl. 2.56),

$$u(x,y) = \int_0^a f_b(\xi) G_b(x,y,\xi) d\xi$$

com,

$$G_b(x,y,\xi) = \frac{2}{a} \sum_{j=1} \frac{\operatorname{senh}(j\pi y/a)}{\operatorname{senh}(j\pi b/a)} \operatorname{sen} \frac{j\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{j\pi \xi}{a} \,.$$

A função G_b é uma função de x, y, e da variável ξ sobre a superfície $y = b$. Morse e Feshbach [10] mostram a analogia entre um problema homogêneo com condições de contorno não homogêneas, e um problema não homogêneo com condições de contorno homogêneas. Embora esse problema seja homogêneo, a função G_b é análoga a uma função de Green.

Escrevemos a solução como,

$$u(x,y) = \sum_{\lambda>0} [a_1 \cos \lambda x + a_2 \, sen \, \lambda x][b_1 \cosh \lambda y + b_2 \, senh \, \lambda y] \,.$$

As condições de contorno nos dão,

$$\begin{aligned}
u(0,y) &= 0 = \sum_{\lambda>0} a_1[b_1 \cosh \lambda y + b_2\, senh\, \lambda y]\,, \\
u(a,y) &= 0 = \sum_{\lambda>0} [a_1 \cos \lambda a + a_2\, sen\, \lambda a][b_1 \cosh \lambda y + b_2\, senh\, \lambda y]\,, \\
u(x,0) &= 0 = \sum_{\lambda>0} [a_1 \cos \lambda x + a_2\, sen\, \lambda x] b_1\,, \\
u(x,b) &= f_b(x) = \sum_{\lambda>0} [a_1 \cos \lambda x + a_2\, sen\, \lambda x][b_1 \cosh \lambda b + b_2\, senh\, \lambda b]\,.
\end{aligned}$$

Satisfazemos as condições acima escolhendo,

$$\begin{aligned}
& a_1 = b_1 = 0\,, \\
& \lambda_j a = j\pi\,, \quad j = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

Com isso a equação para $f_b(x)$ fica,

$$f_b(x) = \sum_{j=1} a_2 b_2\, senh\, \frac{j\pi b}{a}\, sen\, \frac{j\pi x}{a}\,.$$

A expressão acima é uma expansão de $f_b(x)$ em série de Fourier de senos, logo,

$$a_2 b_2\, senh\, \frac{j\pi b}{a} = \frac{2}{a} \int_0^a f_b(\xi)\, sen\, \frac{j\pi\xi}{a}\, d\xi\,,$$

ou,

$$a_2 b_2 = \frac{1}{senh\,(j\pi b/a)} \frac{2}{a} \int_0^a f_b(\xi)\, sen\, \frac{j\pi\xi}{a}\, d\xi\,.$$

A expansão de f_b é assim,

$$f_b(x) = \frac{2}{a} \sum_{j=1} sen\, \frac{j\pi x}{a} \int_0^a f_b(\xi)\, sen\, \frac{j\pi\xi}{a}\, d\xi\,.$$

Se f_b é constante,

$$\begin{aligned}
f_b &= \frac{2}{a} \sum_{j=1} sen\, \frac{j\pi x}{a} \int_0^a f_b\, sen\, \frac{j\pi\xi}{a}\, d\xi\,, \\
1 &= \frac{4}{\pi} \sum_{j=1} \frac{sen\,[(2j-1)\pi x/a]}{2j-1}\,, \qquad (7)
\end{aligned}$$

em que usamos,

$$\int_0^a sen\,(j\pi\xi/a)d\xi = \begin{cases} \dfrac{2a}{j\pi}\,, & j\ ímpar\,, \\ 0\,, & j\ par\,. \end{cases}$$

A figura 1 mostra o gráfico da equação (7) para alguns termos da soma.

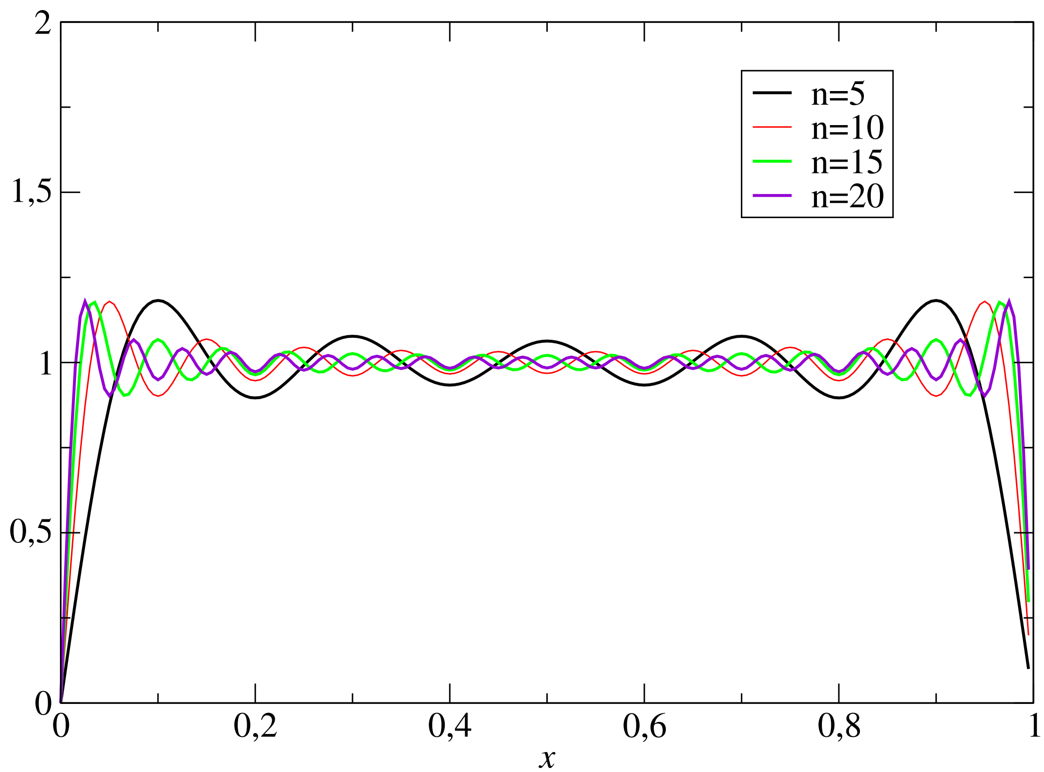

Fig. 1. Gráfico da equação (7) para os n primeiros. termos da soma com $a = 1$. *Usamos* $n = 5, 10, 15, 20$.

A solução é então,

$$u(x,y) \;=\; \sum_{j=1} sen\,(j\pi x/a)\frac{senh\,(j\pi y/a)}{senh\,(j\pi b/a)}\frac{2}{a}\int_0^a f_b(\xi)\,sen\,\frac{j\pi\xi}{a}\,d\xi\,,$$

ou,

$$u(x,y) = \int_0^a f_b(\xi)G_b(x,y,\xi)d\xi$$

com,

$$G_b(x,y,\xi) = \frac{2}{a}\sum_{j=1} \frac{senh\,(j\pi y/a)}{senh\,(j\pi b/a)}\, sen\,\frac{j\pi x}{a}\, sen\,\frac{j\pi\xi}{a}\,.$$

Em $y = b$,

$$u(x,b) \;=\; \sum_{j=1} sen\,(j\pi x/a)\frac{2}{a}\int_0^a f_b(\xi)\, sen\,\frac{j\pi\xi}{a}\, d\xi = f_b(x)\,,$$

como deve ser. Podemos escrever também,

$$u(x,b) = \int_0^a f_b(\xi) G_b(x,b,\xi) d\xi = f_b(x)\,,$$

o que nos dá uma representação para a função delta de Dirac,

$$G_b(x,b,\xi) = \frac{2}{a}\sum_{j=1} sen\,\frac{j\pi x}{a}\, sen\,\frac{j\pi\xi}{a} = \delta(\xi - x)\,.$$

Se f_b é constante (Spiegel [7]; probl. 2.30; probl. 2.56 com $a = b$),

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{j=1} \frac{sen\,(j\pi x/a)\, senh\,(j\pi y/a)}{senh\,(j\pi b/a)}\frac{2}{a}\int_0^a f_b\, sen\,\frac{j\pi\xi}{a}\, d\xi\,, \\ &= f_b\frac{4}{\pi}\sum_{j=1} \frac{sen\,[(2j-1)\pi x/a]}{2j-1}\frac{senh\,[(2j-1)\pi y/a]}{senh\,[(2j-1)\pi b/a]}\,. \end{aligned}$$

Em $y = b$,

$$u(x,b) = f_b\frac{4}{\pi}\sum_{j=1} \frac{sen\,[(2j-1)\pi x/a]}{2j-1} = f_b\,,$$

como deve ser. Finalmente, se $f_b = 0$ então $u = 0$.

2. Considere a mesma placa do problema anterior com,

$$\begin{aligned} u(0,y) = f_1(y)\,,\;\; u(a,y) = f_2(y)\,, \\ u(x,0) = g_1(x)\,,\;\; u(x,b) = g_2(x)\,. \end{aligned}$$

Calcule a temperatura estacionária (Spiegel [7], probl. 2.31 com f_1, f_2, g_1, g_2 constantes; probl. 2.57 com $a = b$; Morse e Feshbach [10], p. 1178 com $g_1 = 1$, $f_1 = f_2 = g_2 = 0$).

Escrevemos a solução como,

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4\,,$$

com as condições de contorno,

$$\begin{array}{llll}
u_1(0,y) = f_1(y), & u_2(0,y) = 0, & u_3(0,y) = 0, & u_4(0,y) = 0, \\
u_1(a,y) = 0, & u_2(a,y) = f_2(y), & u_3(a,y) = 0, & u_4(a,y) = 0, \\
u_1(x,0) = 0, & u_2(x,0) = 0, & u_3(x,0) = g_1(x), & u_4(0,y) = 0, \\
u_1(x,b) = 0, & u_2(x,b) = 0, & u_3(x,b) = 0, & u_4(x,b) = g_2(x).
\end{array}$$

(a) Cálculo de u_1.
Escrevemos u_1 como,

$$u_1(x,y) = \sum_{\lambda>0} [a_1 \cosh \lambda(a-x) + a_2\, senh\, \lambda(a-x)][b_1 \cos \lambda y + b_2\, sen\, \lambda y]\,.$$

As condições de contorno ficam,

$$\begin{aligned}
u_1(0,y) &= \sum_{\lambda>0} [a_1 \cosh \lambda a + a_2\, senh\, \lambda a][b_1 \cos \lambda y + b_2\, sen\, \lambda y] = f_1(y)\,, \\
u_1(a,y) &= \sum_{\lambda>0} a_1 [b_1 \cos \lambda y + b_2\, sen\, \lambda y] = 0\,, \\
u_1(x,0) &= \sum_{\lambda>0} [a_1 \cosh \lambda(a-x) + a_2\, senh\, \lambda(a-x)] b_1 = 0\,, \\
u_1(x,b) &= \sum_{\lambda>0} [a_1 \cosh \lambda(a-x) + a_2\, senh\, \lambda(a-x)][b_1 \cos \lambda b + b_2\, sen\, \lambda b] = 0\,,
\end{aligned}$$

Satisfazemos as condições acima escolhendo,

$$\begin{aligned}
&a_1 = b_1 = 0\,, \\
&\lambda_j b = j\pi\,, \quad j = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

A solução fica então, fazendo $b_2 = 1$,

$$u_1(x,y) = \sum_{j=1} a_2\, senh\, \lambda_j (a-x)\, sen\, \lambda_j y\,.$$

Em $x = 0$,

$$u_1(0,y) = \sum_{j=1} a_2\, senh\, \lambda_j a\, sen\, \lambda_j y = f_1(y)\,.$$

Temos uma série de Fourier de senos, logo,

$$a_2\, senh\, \lambda_j a = \frac{2}{b}\int_0^b f_1(\xi)\, sen\, (\lambda_j \xi)\, d\xi\,,$$

ou,

$$a_2 = \frac{1}{senh\, \lambda_j a}\frac{2}{b}\int_0^b f_1(\xi)\, sen\, (\lambda_j \xi)\, d\xi\,,$$

Com isso a solução u_1 *é,*

$$u_1(x,y) = \frac{2}{b}\sum_{j=1} sen\, \lambda_j y \frac{senh\, \lambda_j (a-x)}{senh\, \lambda_j a}\int_0^b f_1(\xi)\, sen\, (\lambda_j \xi)\, d\xi\,.$$

Podemos verificar que as condições de contorno são satisfeitas, u_1 *se anulando em* $x = a$*,* $y = 0$ *e* $y = b$*. Em* $x = 0$ *temos,*

$$u_1(0,y) = \frac{2}{b}\sum_{j=1} sen\, \lambda_j y \int_0^b f_1(\xi)\, sen\, (\lambda_j \xi)\, d\xi = f_1(y)\,.$$

Comparando a expressão acima com,

$$f_1(y) = \int_0^b f_1(\xi)\delta(\xi - y)\, d\xi\,,$$

obtemos,

$$\delta(\xi - y) = \frac{2}{b}\sum_{j=1} sen\, (j\pi y/b)\, sen\, (j\pi\xi/b)\,.$$

Se f_1 *é constante,*

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{2}{b}\sum_{j=1} sen\, (j\pi y/b) f_1 \int_0^b sen\, (j\pi\xi/b)\, d\xi\,, \\ &= \frac{2}{b}\sum_{j=1} sen\, [(2j-1)\pi y/b] f_1 \frac{2b}{(2j-1)\pi}\,, \\ &= f_1 \frac{4}{\pi}\sum_{j=1} \frac{sen\, [(2j-1)\pi y/b]}{2j-1}\,, \\ &= f_1\,, \end{aligned}$$

pois,

$$\frac{4}{\pi}\sum_{j=1} \frac{sen\,[(2j-1)\pi y/b]}{2j-1} = 1\,.$$

Nesse caso a solução fica,

$$\begin{aligned}
u_1(x,y) &= \frac{2}{b}\sum_{j=1} sen\,\lambda_j y \frac{senh\,\lambda_j(a-x)}{senh\,\lambda_j a}\int_0^b f_1(\xi)\, sen\,(\lambda_j\xi)\, d\xi\,,\\
&= \frac{2}{b}f_1\sum_{j=1} sen\,(j\pi y/b)\frac{senh\,[j\pi(a-x)/b]}{senh\,(j\pi a/b)}\int_0^b sen\,(j\pi\xi/b)\, d\xi\,,\\
&= \frac{2}{b}f_1\sum_{j=1} sen\,[(2j-1)\pi y/b]\frac{senh\,[(2j-1)\pi(a-x)/b]}{senh\,[(2j-1)\pi a/b]}\frac{2b}{(2j-1)\pi}\,,\\
&= \frac{4}{\pi}f_1\sum_{j=1}\frac{senh\,[(2j-1)\pi(a-x)/b]}{senh\,[(2j-1)\pi a/b]}\frac{sen\,[(2j-1)\pi y/b]}{2j-1}\,,\quad f_1\, constante\,.
\end{aligned}$$

Podemos escrever a solução em termos da função de Green,

$$\begin{aligned}
u_1(x,y) &= \frac{2}{b}\sum_{j=1} sen\,\lambda_j y \frac{senh\,\lambda_j(a-x)}{senh\,\lambda_j a}\int_0^b f_1(\xi)\, sen\,(\lambda_j\xi)\, d\xi\,,\\
&= \int_0^b G(x,y,\xi) f_1(\xi) d\xi\,,
\end{aligned}$$

com,

$$G(x,y,\xi) = \frac{2}{b}\sum_{j=1}\frac{senh\,\lambda_j(a-x)}{senh\,\lambda_j a}\, sen\,\lambda_j y\, sen\,\lambda_j\xi\,.$$

Notemos que $G(0,y,\xi) = \delta(\xi - y)$.

(b) Cálculo de u_2.

Para u_2 *escrevemos,*

$$u_2(x,y) = \sum_{\lambda>0}[a_1\cosh\lambda x + a_2\, senh\,\lambda x][b_1\cos\lambda y + b_2\, sen\,\lambda y]\,.$$

As condições de contorno ficam,

$$u_2(0,y) = \sum_{\lambda>0} a_1[b_1 \cos\lambda y + b_2\, sen\,\lambda y] = 0\,,$$
$$u_2(a,y) = \sum_{\lambda>0} [a_1 \cosh\lambda a + a_2\, senh\,\lambda a][b_1 \cos\lambda y + b_2\, sen\,\lambda y] = f_2(y)\,,$$
$$u_2(x,0) = \sum_{\lambda>0} [a_1 \cosh\lambda x + a_2\, senh\,\lambda x] b_1 = 0\,,$$
$$u_2(x,b) = \sum_{\lambda>0} [a_1 \cosh\lambda x + a_2\, senh\,\lambda x][b_1 \cos\lambda b + b_2\, sen\,\lambda b] = 0\,,$$

Satisfazemos as condições acima escolhendo,

$$a_1 = b_1 = 0\,,$$
$$\lambda_j b = j\pi\,, \quad j = 1, 2, \ldots$$

A solução fica então, fazendo $b_2 = 1$,

$$u_2(x,y) = \sum_{j=1} a_2\, senh\,\lambda_j x\, sen\,\lambda_j y]\,.$$

Em $x = a$,

$$u_2(a,y) = \sum_{j=1} a_2\, senh\,\lambda_j a\, sen\,\lambda_j y = f_2(y)\,.$$

Temos uma série Fourier de senos, logo,

$$a_2\, senh\,\lambda_j a = \frac{2}{b}\int_0^b f_2(v)\, sen\,(\lambda_j v)\, dv\,,$$

ou,

$$a_2 = \frac{1}{senh\,\lambda_j a}\frac{2}{b}\int_0^b f_2(v)\, sen\,(\lambda_j v)\, dv\,,$$

Com isso a solução u_2 é,

$$u_2(x,y) = \sum_{j=1} sen\,\lambda_j y \frac{senh\,\lambda_j x}{senh\,\lambda_j a}\frac{2}{b}\int_0^b f_2(v)\, sen\,(\lambda_j v)\, dv\,.$$

(c) Cálculo de u_3.
Escrevemos u_3 como,

$$u_3(x,y) = \sum_{\lambda>0} [a_1 \cos \lambda x + a_2\, sen\, \lambda x][b_1 \cosh \lambda(b-y) + b_2\, senh\, \lambda(b-y)]\,.$$

As condições de contorno ficam,

$$\begin{aligned}
u_3(0,y) &= \sum_{\lambda>0} a_1 [b_1 \cosh \lambda(b-y) + b_2\, senh\, \lambda(b-y)] = 0\,,\\
u_3(a,y) &= \sum_{\lambda>0} [a_1 \cos \lambda a + a_2\, sen\, \lambda a][b_1 \cosh \lambda(b-y) + b_2\, senh\, \lambda(b-y)] = 0\,,\\
u_3(x,0) &= \sum_{\lambda>0} [a_1 \cos \lambda x + a_2\, sen\, \lambda x][b_1 \cosh \lambda b + b_2\, senh\, \lambda b] = g_1(x)\,,\\
u_3(x,b) &= \sum_{\lambda>0} [a_1 \cos \lambda x + a_2\, sen\, \lambda x] b_1 = 0\,,
\end{aligned}$$

Satisfazemos as condições acima escolhendo,

$$\begin{aligned}
&a_1 = b_1 = 0\,,\\
&\lambda_j a = j\pi\,, \quad j = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

A solução fica então, fazendo $b_2 = 1$,

$$u_3(x,y) = \sum_{j=1} a_2\, sen\, \lambda_j x\, senh\, \lambda_j (b-y)\,.$$

Em $y = 0$,

$$u_3(x,y) = \sum_{j=1} a_2\, sen\, \lambda_j x\, senh\, \lambda_j b = g_1(x)\,.$$

Temos uma série de Fourier de senos, logo,

$$a_2\, senh\, \lambda_j b = \frac{2}{a} \int_0^a g_1(v)\, sen\, (\lambda_j v)\, dv\,,$$

ou,

$$a_2 = \frac{1}{senh\, \lambda_j b} \frac{2}{a} \int_0^a g_1(v)\, sen\, (\lambda_j v)\, dv\,,$$

Com isso a solução u_3 é,

$$u_3(x,y) = \sum_{j=1} sen\,\lambda_j x \frac{senh\,\lambda_j (b-y)}{senh\,\lambda_j b} \frac{2}{a} \int_0^a g_1(v)\, sen\,(\lambda_j v)\, dv\,.$$

(d) Cálculo de u_4.
Escrevemos u_4 como,

$$u_4(x,y) = \sum_{\lambda>0} [a_1 \cos \lambda x + a_2\, sen\,\lambda x][b_1 \cosh \lambda y + b_2\, senh\,\lambda y]\,.$$

As condições de contorno ficam,

$$u_4(0,y) = \sum_{\lambda>0} a_1 [b_1 \cosh \lambda y + b_2\, senh\,\lambda y] = 0\,,$$
$$u_4(a,y) = \sum_{\lambda>0} [a_1 \cos \lambda a + a_2\, sen\,\lambda a][b_1 \cosh \lambda y + b_2\, senh\,\lambda y] = 0\,,$$
$$u_4(x,0) = \sum_{\lambda>0} [a_1 \cos \lambda x + a_2\, sen\,\lambda x] b_1 = 0\,,$$
$$u_4(x,b) = \sum_{\lambda>0} [a_1 \cos \lambda x + a_2\, sen\,\lambda x][b_1 \cosh \lambda b + b_2\, senh\,\lambda b] = g_2(x)\,,$$

Satisfazemos as condições acima escolhendo,

$$a_1 = b_1 = 0\,,$$
$$\lambda_j a = j\pi\,, \quad j = 1, 2, \ldots$$

A solução fica então, fazendo $b_2 = 1$,

$$u_4(x,y) = \sum_{j=1} a_2\, sen\,\lambda_j x\, senh\,\lambda_j y\,.$$

Em $y = b$,

$$u_4(x,y) = \sum_{j=1} a_2\, sen\,\lambda_j x\, senh\,\lambda_j b = g_2(x)\,.$$

Temos uma série de Fourier de senos, logo,

$$a_2\, senh\,\lambda_j b = \frac{2}{a} \int_0^a g_2(v)\, sen\,(\lambda_j v)\, dv\,,$$

ou,

$$a_2 = \frac{1}{senh\,\lambda_j b}\frac{2}{a}\int_0^a g_2(v)\,sen\,(\lambda_j v)\,dv\,,$$

Com isso a solução u_4 *é,*

$$u_4(x,y) = \sum_{j=1} sen\,\lambda_j x \frac{senh\,\lambda_j y}{senh\,\lambda_j b}\frac{2}{a}\int_0^a g_2(v)\,sen\,(\lambda_j v)\,dv\,.$$

3. Uma placa semi-infinita de largura a possui lados paralelos em $x = 0$, $x = a$ e $y = 0$. Calcule a temperatura no estado estacionário se $u(0,y) = f(y)$, $u(a,y) = g(y)$, $u(x,0) = h(x)$ (Spiegel [7], probl. 2.58 com $f = g = 0$, $h = u_0$; Wangsness [2], p. 186).

4. Obtenha $u(x,y)$ no intervalo $-L \leq x \leq L$, $-\infty \leq y \leq +\infty$, para as condições de contorno,

(a) $u(x,0) = f(x)$.

Escrevemos a solução na forma,

$$u(x,y) \;=\; \sum_{\lambda>0}[a_1\cos\lambda x + a_2\,sen\,\lambda x][b_1\cosh\lambda y + b_2\,senh\,\lambda y]\,.$$

Para termos uma solução finita em $y \to \pm\infty$ *escrevemos,*

$$u(x,y) = \begin{cases} \sum_{\lambda>0} e^{-\lambda y}[a_1\cos\lambda x + a_2\,sen\,\lambda x]\,, & y > 0\,, \\ \sum_{\lambda>0} e^{\lambda y}[a_1\cos\lambda x + a_2\,sen\,\lambda x]\,, & y < 0\,. \end{cases}$$

A condições de contorno nos dá,

$$u(x,0) \;=\; f(x) = \sum_{\lambda>0}[a_1\cos\lambda x + a_2\,sen\,\lambda x]\,,$$

que é uma série de Fourier,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \, sen \, \frac{n\pi x}{L} \right) \,, \\
\frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) \, dx \,, \\
a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx \,, \\
b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \, sen \, \frac{n\pi x}{L} \, dx \,, \quad n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

Portanto, fazendo $\lambda_n = n\pi/L$, a solução é,

$$
u(x,y) = \begin{cases} \sum\limits_{n=0} e^{-n\pi y/L} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \, sen \, \frac{n\pi x}{L} \right) \,, & y > 0 \,, \\ \sum\limits_{n=0} e^{n\pi y/L} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \, sen \, \frac{n\pi x}{L} \right) \,, & y < 0 \,. \end{cases}
$$

(b) $u_x(x,0) = f(x)$.
(c) $u(x,L) = f(x)$.
(d) $u_x(x,L) = f(x)$.

5. Encontre a solução da equação de Laplace em $y > 0$ se $u(x,0) = f(x)$ (Spiegel [7], probl. 5.19).

6. Mostre que a solução do problema anterior pode ser escrita na forma (Spiegel [7], probl. 5.20),

$$
u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y f(v)}{y^2 + (v-x)^2} dv \,.
$$

7. Resolva o problema de valores de contorno (Spiegel [7], probl. 5.44),

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \,, \quad y > 0 \,,
$$

com,

$$
u(x,0) = \begin{cases} -1 \,, & x < 0 \,, \\ 1 \,, & x > 0 \,. \end{cases}
$$

8. Considere o problema anterior com (Spiegel [7], probl. 5.45),

$$u(x,0) = \begin{cases} 0\,, & x < 0\,, \\ u_0\,, & x > 0\,. \end{cases}$$

9. Considere o problema 7 com (Spiegel [7], probl. 5.46),

$$u(x,0) = \begin{cases} 0\,, & x < -1\,, \\ 1\,, & -1 < x < 1\,, \\ 0\,, & x > 1\,. \end{cases}$$

10. A região $x > 0$, $y > 0$ possui potencial nulo em $x = 0$ e $f(x)$ em $y = 0$. Calcule $u(x,y)$. Calcule $u(x,y)$ se $f(x) = 1$ (Spiegel [7], probl. 5.47).

11. As linhas $y = 0$ e $y = a$ possuem potenciais zero e $f(x)$, respectivamente. Calcule o potencial entre as linhas (Spiegel [7], probl. 5.49).

12. Encontre a solução da equação de Laplace em $0 < x < \infty$, $0 < y < \infty$ se $u(x,0) = f(x)$ e $u(0,y) = g(y)$.

13. Encontre a solução $u(x,y)$ da equação de Laplace em $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, com as condições de contorno (Morse e Feshbach [10], p.707),

$$\begin{aligned} &u(0,y) = u(a,y) = u(x,b) = 0\,, \\ &u(x,0) = \psi_s(x)\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{j=1} A_j\, senh\,[(j\pi/a)(b-y)]\, sen\,(j\pi x/a)\,, \\ &= \sum_{j=1} \frac{senh\,[(j\pi/a)(b-y)]}{senh\,(j\pi b/a)}\, sen\,(j\pi x/a) \frac{2}{a} \int_0^a \psi_s(x')\, sen\,(j\pi x'/a) dx'\,. \end{aligned}$$

14. Encontre a solução $u(x,y)$ da equação de Laplace em $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq \infty$, com as condições de contorno (Morse e Feshbach [10], p.709),

$$\begin{aligned} &u(0,y) = u(a,y) = 0\,, \\ &u(x,0) = \psi_s(x)\,. \end{aligned}$$

15. Encontre a solução $u(x,y)$ da equação de Laplace em $0 \leq x \leq a$, $-\infty \leq y \leq +\infty$, com as condições de contorno,

$$u(0,y) = u(a,y) = 0\,.$$

16. Encontre a solução $u(x,y)$ para as equações:
(a)
$$\nabla^2 u = -f(x,y)\,;$$
(b)
$$\nabla^2 u = +\alpha^2\,;$$
com α constante,
(c)
$$\nabla^2 u = -\alpha^2\,;$$
com α constante,
(d)
$$\nabla^2 u = +\alpha^2 u\,;$$
com α constante,
(e)
$$\nabla^2 u = -\alpha^2 u\,;$$
com α constante e,

$$\begin{aligned}
&0 \le x \le a\,, \quad 0 \le y \le b\,,\\
&u(0,y) = \mu_1(y)\,, \quad u(a,y) = \mu_2(y)\,,\\
&u(x,0) = \nu_1(x)\,, \quad u(x,b) = \nu_2(x)\,.
\end{aligned}$$

(a) De forma análoga ao caso unidimensional, escrevemos a solução como,

$$u(x,y) = u_h(x,y) + u_p(x,y)\,,$$

com a solução u_h da equação homogênea com condições de contorno não-homogêneas (problema 2), e u_p uma solução particular da equação não-homogênea com condições de contorno homogêneas.

Expandimos u_p e f em séries de senos de Fourier duplas,

$$u_p(x,y) = \sum_{ij=1}^{\infty} A_{ij}\, sen\,\frac{i\pi x}{a}\, sen\,\frac{j\pi y}{b}\,,$$

$$A_{ij} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b u_p(x',y')\, sen\,\frac{i\pi x'}{a}\, sen\,\frac{j\pi y'}{b} dx'dy'\,,$$

$$f(x,y) = \sum_{ij=1}^{\infty} B_{ij}\, sen\,\frac{i\pi x}{a}\, sen\,\frac{j\pi y}{b}\,,$$

$$B_{ij} = \frac{4}{ab}\int_0^a \int_0^b f(x',y')\, sen\,\frac{i\pi x'}{a}\, sen\,\frac{j\pi y'}{b} dx'dy'\,.$$

Substituindo u_p *e* f *na equação diferencial,*

$$\begin{aligned}
&\nabla^2 u_p = -f(x,y)\,,\\
&\frac{\partial^2 u_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_p}{\partial y^2} = -f(x,y)\,,\\
&-\sum_{ij=1}^{\infty} A_{ij}(i\pi/a)^2\, sen\,\frac{i\pi x}{a}\, sen\,\frac{j\pi y}{b} - \sum_{ij=1}^{\infty} A_{ij}(j\pi/b)^2\, sen\,\frac{i\pi x}{a}\, sen\,\frac{j\pi y}{b} =\\
&= -\sum_{ij=1}^{\infty} B_{ij}\, sen\,\frac{i\pi x}{a}\, sen\,\frac{j\pi y}{b}\,,
\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= \frac{B_{ij}}{(i\pi/a)^2 + (j\pi/b)^2}\,,\\
&= \frac{1}{(i\pi/a)^2 + (j\pi/b)^2}\frac{4}{ab}\int_0^a \int_0^b f(x',y')\, sen\,\frac{i\pi x'}{a}\, sen\,\frac{j\pi y'}{b} dx'dy'\,.
\end{aligned}$$

A solução particular é então,

$$\begin{aligned}
u_p(x,y) &= \sum_{ij=1}^{\infty} A_{ij}\, sen\,\frac{i\pi x}{a}\, sen\,\frac{j\pi y}{b}\,,\\
&= \sum_{ij=1}^{\infty} sen\,\frac{i\pi x}{a}\, sen\,\frac{j\pi y}{b}\frac{1}{(i\pi/a)^2 + (j\pi/b)^2} \times\\
&\quad \times \frac{4}{ab}\int_0^a \int_0^b f(x',y')\, sen\,\frac{i\pi x'}{a}\, sen\,\frac{j\pi y'}{b} dx'dy'\,.
\end{aligned}$$

Podemos verificar que u_p *satisfaz condições de contorno homogêneas. Escrevendo* u_p *em termos de função de Green temos,*

$$u_p(x,y) = \int_0^a \int_0^b G(x,y;x',y') f(x',y') dx'dy'\,,$$

com (Morse e Feshbach [10], p. 798),

$$
\begin{aligned}
G(x,y;x',y') &= \sum_{ij=1}^{\infty} sen\,\frac{i\pi x}{a}\,sen\,\frac{j\pi y}{b}\,\frac{1}{(i\pi/a)^2+(j\pi/b)^2}\times \\
&\quad \times\frac{4}{ab}\,sen\,\frac{i\pi x'}{a}\,sen\,\frac{j\pi y'}{b}\,.
\end{aligned}
$$

17. Encontre a solução $u(x,y)$ da equação de Laplace em $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, com as condições de contorno (Morse e Feshbach [10], p.712),

$$
\begin{aligned}
&u_x(0,y) = u_x(a,y) = u_y(x,b) = 0\,, \\
&u(x,0) = \psi_s(x)\,.
\end{aligned}
$$

18. Encontre a solução $u(x,y)$ da equação de Laplace em $-\infty \le x \le \infty$, $0 \le y \le b$, com as condições de contorno (Morse e Feshbach [10], p. 1176),

$$
\begin{aligned}
&u(x,0) = u_0\,, \quad -d/2 \le x \le d/2\,, \\
&u(x,0) = 0\,, \quad x \le -d/2\,, x \ge d/2\,, \\
&u(x,b) = 0,.
\end{aligned}
$$

19. Resolva o problema 16 com as condições de contorno,

$$
\begin{aligned}
&u_x(0,y) = \mu_1(y)\,, \quad u_x(a,y) = \mu_2(y)\,, \\
&u_y(x,0) = \nu_1(x)\,, \quad u_y(x,b) = \nu_2(x)\,.
\end{aligned}
$$

20. Considere o problema 16 com as condições de contorno,

$$
\begin{aligned}
&u_x(0,y) + h[u(0,y) - \mu_1(y)] = 0\,, \quad u_x(a,y) + h[u(a,y) - \mu_2(y)] = 0\,, \\
&u_y(x,0) + h[u(x,0) - \nu_1(x)] = 0\,, \quad u_y(x,b) + h[u(x,b) - \nu_2(x)] = 0\,.
\end{aligned}
$$

4 Considerando $u(x,y,z)$

Substituindo em (1) a solução,

$$
u(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)\,,
$$

temos,

$$X''YZ + XY''Z + XYZ'' = 0\,,$$

ou,

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0\,.$$

Escrevemos a equação acima na forma,

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\frac{Z''}{Z} \equiv -\lambda^2\,. \tag{8}$$

Podemos escrever a função Z,

$$Z(z) = c_1 \cosh \lambda z + c_2 \operatorname{senh} \lambda z\,.$$

Reescrevemos (8) na forma,

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \lambda^2 \equiv -\mu^2\,, \tag{9}$$

de onde temos,

$$\begin{aligned} &X'' + \mu^2 X = 0\,,\\ &Y'' + (\lambda^2 - \mu^2)Y = 0\,. \end{aligned}$$

As soluções para X e Y são,

$$\begin{aligned} &X(x) = a_1 \cos \mu x + a_2 \operatorname{sen} \mu x\,,\\ &Y(y) = b_1 \cos \sqrt{\lambda^2 - \mu^2} y + b_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^2 - \mu^2} y\,, \quad \lambda^2 > \mu^2\,,\\ &Y(y) = b_1 \cosh \sqrt{\mu^2 - \lambda^2} y + b_2 \operatorname{senh} \sqrt{\mu^2 - \lambda^2} y\,, \quad \lambda^2 < \mu^2\,. \end{aligned}$$

Notemos que as funções X, Y, Z serão trigonométricas ou hiperbólicas de acordo com a forma como escrevemos as constantes de separação, $\pm\lambda^2, \pm\mu^2$.

(a) $-\lambda^2, -\mu^2$:

$$\begin{aligned} u(x,y,z) \;&=\; \sum_{\lambda,\mu>0} (a_{1\mu} \cos \mu x + a_{2\mu} \operatorname{sen} \mu x) \times\\ &\times (b_{1\lambda\mu} \cos \sqrt{\lambda^2 - \mu^2} y + b_{2\lambda\mu} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda^2 - \mu^2} y) \times\\ &\times (c_{1\lambda} \cosh \lambda z + c_{2\lambda} \operatorname{senh} \lambda z)\,, \quad \lambda^2 > \mu^2\,, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
u(x,y,z) &= \sum_{\lambda,\mu>0} (a_{1\mu}\cos\mu x + a_{2\mu}\,\mathrm{sen}\,\mu x)\times \\
&\times(b_1\cosh\sqrt{\mu^2-\lambda^2}y + b_2\,\mathrm{senh}\,\sqrt{\mu^2-\lambda^2}y)\times \\
&\times(c_{1\lambda}\cosh\lambda z + c_{2\lambda}\,\mathrm{senh}\,\lambda z)\,,\quad \lambda^2<\mu^2\,. \qquad (11)
\end{aligned}$$

(b) $-\lambda^2, +\mu^2$:

$$\begin{aligned}
u(x,y,z) &= \sum_{\lambda,\mu>0} (a_1\cosh\mu x + a_2\,\mathrm{senh}\,\mu x)\times \\
&\times(b_1\cos\sqrt{\lambda^2+\mu^2}y + b_2\,\mathrm{sen}\,\sqrt{\lambda^2+\mu^2}y)\times \\
&\times(c_1\cosh\lambda z + c_2\,\mathrm{senh}\,\lambda z)\,. \qquad (12)
\end{aligned}$$

(c) $+\lambda^2, -\mu^2$:

$$\begin{aligned}
u(x,y,z) &= \sum_{\lambda,\mu>0} (a_1\cos\mu x + a_2\,\mathrm{sen}\,\mu x)\times \\
&\times(b_1\cosh\sqrt{\lambda^2+\mu^2}y + b_2\,\mathrm{senh}\,\sqrt{\lambda^2+\mu^2}y)\times \\
&\times(c_1\cos\lambda z + c_2\,\mathrm{sen}\,\lambda z)\,. \qquad (13)
\end{aligned}$$

(d) $+\lambda^2, +\mu^2$:

$$\begin{aligned}
u(x,y,z) &= \sum_{\lambda,\mu>0} (a_1\cosh\mu x + a_2\,\mathrm{senh}\,\mu x)\times \\
&\times(b_1\cosh\sqrt{\lambda^2-\mu^2}y + b_2\,\mathrm{senh}\,\sqrt{\lambda^2-\mu^2}y)\times \\
&\times(c_1\cos\lambda z + c_2\,\mathrm{sen}\,\lambda z)\,,\quad \lambda^2>\mu^2\,, \qquad (14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(x,y,z) &= \sum_{\lambda,\mu>0} (a_1\cosh\mu x + a_2\,\mathrm{senh}\,\mu x)\times \\
&\times(b_1\cos\sqrt{\mu^2-\lambda^2}y + b_2\,\mathrm{sen}\,\sqrt{\mu^2-\lambda^2}y)\times \\
&\times(c_1\cos\lambda z + c_2\,\mathrm{sen}\,\lambda z)\,,\quad \lambda^2<\mu^2\,. \qquad (15)
\end{aligned}$$

Notemos que as soluções acima são para λ e μ não nulos. Se temos $\lambda=0$, por exemplo, a solução para Z é,

$$Z(z) = a_0 z + b_0\,.$$

5 Problemas

1. Calcule $u(x, y, z)$ em $0 < x < a$, $0 < y < b$, $0 < z < c$, com (Spiegel [7], 2.73 com $a = b = c$; Morse e Feschbach [10], p. 1256 com $u(x, y, 0) = \psi_0$ e os demais lados iguais a zero),

$$\begin{aligned}
u(0, y, z) &= f_1(y, z)\,, \quad u(a, y, z) = f_2(y, z)\,, \\
u(x, 0, z) &= g_1(x, z)\,, \quad u(x, b, z) = g_2(x, z)\,, \\
u(x, y, 0) &= h_1(x, y)\,, \quad u(x, y, c) = h_2(x, y)\,.
\end{aligned}$$

Escrevemos a solução como,

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6\,,$$

com $u_1(0, y, z) = f_1(y, z)$ e zero nas outras faces. Analogamente para u_2, etc.

(a) Cálculo de u_1.

Escrevemos u_1 como,

$$\begin{aligned}
u_1(x, y, z) &= \sum_{\lambda,\mu} senh\,[\mu(a - x)] \times \\
&\quad \times (b_1 \cos \alpha y + b_2\, sen\, \alpha y)(c_1 \cos \lambda z + c_2\, sen\, \lambda z)\,, \qquad (16) \\
&\quad \alpha^2 = \mu^2 - \lambda^2\,, \;\; \mu^2 > \lambda^2\,, \qquad (17)
\end{aligned}$$

e as condições de contorno,

$$
\begin{aligned}
u_1(0,y,z) &= f_1(y,z)\,, \\
&= \sum_{\lambda,\mu} senh\,(\mu a)\,\times \\
&\quad \times(b_1 \cos\alpha y + b_2\, sen\ \alpha y)(c_1 \cos\lambda z + c_2\, sen\ \lambda z)\,, \\
u_1(a,y,z) &= 0\,, \\
u_1(x,0,z) &= 0 = \sum_{\lambda,\mu} senh\,[\mu(a-x)]\,\times \\
&\quad \times b_1(c_1 \cos\lambda z + c_2\, sen\ \lambda z)\,, \\
u_1(x,b,z) &= 0 = \sum_{\lambda,\mu} senh\,[\mu(a-x)]\,\times \\
&\quad \times(b_1 \cos\alpha b + b_2\, sen\ \alpha b)(c_1 \cos\lambda z + c_2\, sen\ \lambda z)\,, \\
u_1(x,y,0) &= 0 = \sum_{\lambda,\mu} senh\,[\mu(a-x)]\,\times \\
&\quad \times(b_1 \cos\alpha y + b_2\, sen\ \alpha y)c_1\,, \\
u_1(x,y,c) &= 0 = \sum_{\lambda,\mu} senh\,[\mu(a-x)]\,\times \\
&\quad \times(b_1 \cos\alpha y + b_2\, sen\ \alpha y)(c_1 \cos\lambda c + c_2\, sen\ \lambda c)\,, \\
&\quad \alpha^2 = \mu^2 - \lambda^2\,, \;\; \mu^2 > \lambda^2\,.
\end{aligned}
$$

Satisfazemos as condições acima escolhendo,

$$
\begin{aligned}
& b_1 = c_1 = 0\,, \\
& \lambda_i c = i\pi\,, \;\; i = 1,2,\ldots \\
& \alpha_j b = j\pi\,, \;\; j = 1,2,\ldots
\end{aligned}
$$

A equação para f_1 *fica,*

$$
\begin{aligned}
& f_1(y,z) = \sum_{ij} b_2 c_2\, senh\,(\mu_{ij} a)\, sen\,(j\pi y/b)\, sen\,(i\pi z/c)\,, \\
& \alpha_j^2 + \lambda_i^2 = \mu_{ij}^2\,, \;\; \mu_{ij}^2 > \lambda_i^2\,.
\end{aligned}
$$

Temos uma expansão em série de senos de Fourier, logo,

$$
\sum_j b_2 c_2\, senh\,(\mu_{ij} a)\, sen\,(j\pi y/b) = \frac{2}{c}\int_0^c f_1(y,\zeta)\, sen\ (i\pi\zeta/c)\, d\zeta\,,
$$

e,

$$b_2 c_2 \, senh\,(\mu_{ij} a) = \frac{2}{b} \int_0^b \, sen\;(j\pi\eta/b)\, d\eta \frac{2}{c} \int_0^c f_1(\eta,\zeta)\, sen\;(i\pi\zeta/c)\, d\zeta\,.$$

Portanto,

$$b_2 c_2 = \frac{1}{senh\,(\mu_{ij} a)} \frac{2}{b} \int_0^b \, sen\;(j\pi\eta/b)\, d\eta \frac{2}{c} \int_0^c f_1(\eta,\zeta)\, sen\;(i\pi\zeta/c)\, d\zeta\,.$$

A expansão para f_1 *é então,*

$$\begin{aligned} f_1(y,z) \;&=\; \sum_{ij} sen\,(j\pi y/b)\, sen\,(i\pi z/c) \times \\ &\times \frac{2}{b} \int_0^b \, sen\;(j\pi\eta/b)\, d\eta \frac{2}{c} \int_0^c f_1(\eta,\zeta)\, sen\;(i\pi\zeta/c)\, d\zeta\,. \end{aligned}$$

Se f_1 *é constante,*

$$\begin{aligned} f_1 \;&=\; \sum_{ij} sen\,(j\pi y/b)\, sen\,(i\pi z/c) \times \\ &\times \frac{2}{b} \int_0^b \, sen\;(j\pi\eta/b)\, d\eta \frac{2}{c} \int_0^c f_1\, sen\;(i\pi\zeta/c)\, d\zeta\,, \\ &= f_1 \frac{16}{\pi^2} \sum_{ij} \frac{sen\,[(2j-1)\pi y/b]}{2j-1} \frac{sen\,[(2i-1)\pi z/c]}{2i-1}\,, \end{aligned}$$

ou,

$$1 = \frac{16}{\pi^2} \sum_{ij} \frac{sen\,[(2j-1)\pi y/b]}{2j-1} \frac{sen\,[(2i-1)\pi z/c]}{2i-1}\,, \tag{18}$$

em que usamos,

$$\int_0^a sen\,(i\pi\xi/a) d\xi = \begin{cases} \dfrac{2a}{i\pi}\,, & i \text{ ímpar}\,, \\ 0\,, & i \text{ par}\,. \end{cases}$$

A figura 2 mostra um gráfico de (18) para alguns termos da série.

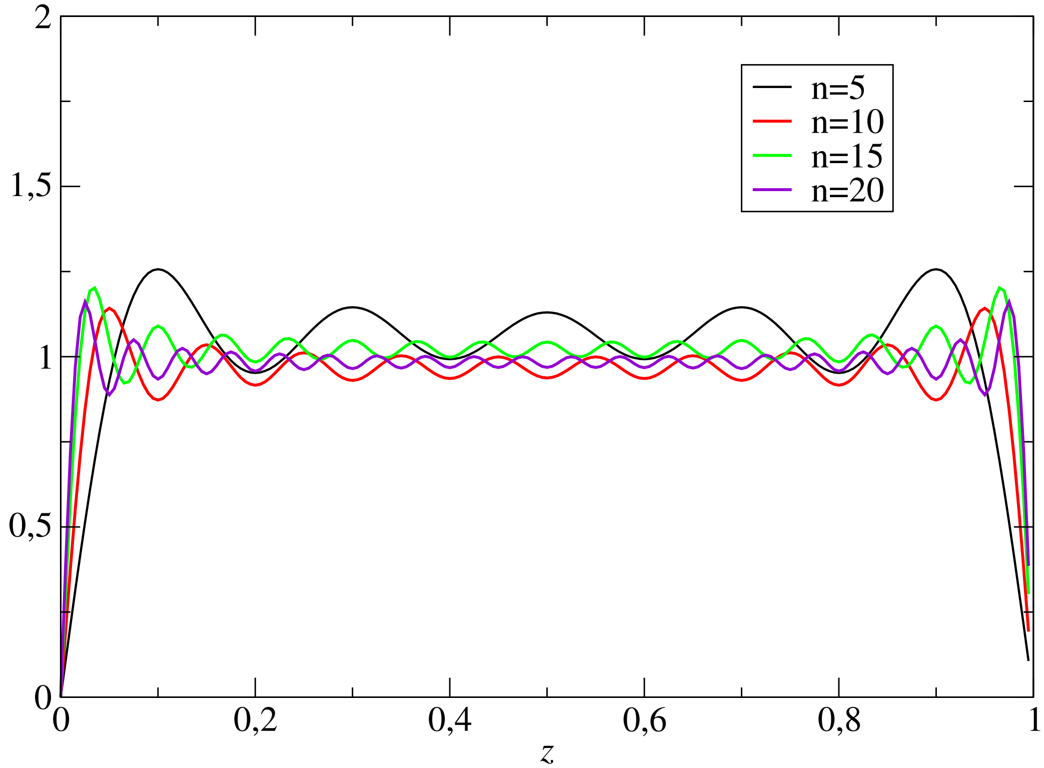

Fig. 2. Gráfico de (18) para os n primeiros termos da série, com $b = c = 1$, $y = 0,5$, e $n = 5, 10, 15, 20$.

A solução fica então,

$$
\begin{aligned}
u_1(x,y,z) &= \sum_{ij} \frac{senh\,[\mu_{ij}(a-x)]}{senh\,(\mu_{ij}a)}\, sen\,(j\pi y/b)\, sen\,(i\pi z/c) \times \\
&\times \frac{2}{b}\int_0^b sen\ (j\pi\eta/b)\, d\eta \frac{2}{c}\int_0^c f_1(\eta,\zeta)\, sen\ (i\pi\zeta/c)\, d\zeta\,, \\
&\alpha_j^2 + \lambda_i^2 = \mu_{ij}^2\,, \quad \mu^2 > \lambda^2\,.
\end{aligned}
$$

Se f_1 é constante,

$$
\begin{aligned}
u_1(x,y,z) &= f_1 \frac{16}{\pi^2} \sum_{ij} \frac{senh\,[\mu_{ij}(a-x)]}{senh\,(\mu_{ij}a)} \times \\
&\times \frac{sen\,[(2j-1)\pi y/b]}{2j-1} \frac{sen\,[(2i-1)\pi z/c]}{2i-1} \times \\
&\alpha_j^2 + \lambda_i^2 = \mu_{ij}^2\,, \quad \mu^2 > \lambda^2\,,
\end{aligned}
$$

e se $f_1 = 0$ *temos* $u_1 = 0$.

Podemos escrever a solução acima como,

$$u_1(x,y,z) = \int_0^b \int_0^c G(x,y,z;\eta,\zeta) f_1(\eta,\zeta) d\eta d\zeta \,,$$

ou, como $u_1(0,y,z) = f_1(y,z)$,

$$u_1(x,y,z) = \int_0^b \int_0^c G(x,y,z;\eta,\zeta) u_1(0,\eta,\zeta) d\eta d\zeta \,,$$

com,

$$\begin{aligned} G(x,y,z;\eta,\zeta) &= \sum_{ij} \frac{senh\,[\mu_{ij}(a-x)]}{senh\,(\mu_{ij}a)}\, sen\,(j\pi y/b)\, sen\,(i\pi z/c) \times \\ &\quad \times \frac{2}{b}\, sen\,(j\pi\eta/b)\, \frac{2}{c}\, sen\,(i\pi\zeta/c)\,, \\ &\quad \alpha_j^2 + \lambda_i^2 = \mu_{ij}^2\,, \;\; \mu^2 > \lambda^2\,. \end{aligned}$$

Em $x = 0$,

$$\begin{aligned} u_1(0,y,z) &= \sum_{ij} sen\,(j\pi y/b)\, sen\,(i\pi z/c) \times \\ &\quad \times \frac{2}{b} \int_0^b sen\,(j\pi\eta/b)\, d\eta \frac{2}{c} \int_0^c f_1(\eta,\zeta)\, sen\,(i\pi\zeta/c)\, d\zeta\,, \\ &= f_1(y,z)\,, \\ &\quad \alpha_j^2 + \lambda_i^2 = \mu_{ij}^2\,, \;\; \mu^2 > \lambda^2\,, \end{aligned}$$

como deve ser.

Também podemos escrever,

$$u_1(0,y,z) = \int_0^b \int_0^c G(0,y,z;\eta,\zeta) u_1(0,\eta,\zeta) d\eta d\zeta \,,$$

com,

$$\begin{aligned} G(0,y,z;\eta,\zeta) &= \sum_{ij} sen\,(j\pi y/b)\, sen\,(i\pi z/c) \times \\ &\quad \times \frac{2}{b}\, sen\,(j\pi\eta/b)\, \frac{2}{c}\, sen\,(i\pi\zeta/c)\,, \\ &\quad \alpha_j^2 + \lambda_i^2 = \mu_{ij}^2\,, \;\; \mu^2 > \lambda^2\,. \end{aligned}$$

Portanto podemos escrever,

$$G(0,y,z;\eta,\zeta)=\delta(\eta-y)\delta(\zeta-z)\,.$$

Para o cálculo de u_2 etc., o procedimento é análogo.

(b) Cálculo de u_2.

(c) Cálculo de u_3.

(d) Cálculo de u_4.

(e) Cálculo de u_5.

A condição de contorno para u_5 é,

$$u_5(x,y,0)=h_1(x,y)\,,$$

com $u_5=0$ nas outras faces.

Escrevemos u_5 como,

$$\begin{aligned} u_5(x,y,z) &= \sum_{\lambda,\mu>0}(a_1\cos\mu x+a_2\,sen\,\mu x)\times \\ &\quad \times(b_1\cos\alpha y+b_2\,sen\ \alpha y)\times \\ &\quad \times\,senh\,\lambda(c-z)\,,\quad \lambda^2>\mu^2\,,\quad \alpha^2=\lambda^2-\mu^2\,, \end{aligned}$$

e as condições de contorno,

$$
\begin{aligned}
u_5(0,y,z) &= 0 = \sum_{\lambda,\mu>0} a_1(b_1 \cos\alpha y + b_2\, sen\ \alpha y) \times \\
&\quad \times senh\,\lambda(c-z)\,, \\
u_5(a,y,z) &= 0 = \sum_{\lambda,\mu>0} (a_1 \cos\mu a + a_2\, sen\,\mu a) \times \\
&\quad \times (b_1 \cos\alpha y + b_2\, sen\ \alpha y) \times \\
&\quad \times senh\,\lambda(c-z)\,, \\
u_5(x,0,z) &= 0 = \sum_{\lambda,\mu>0} (a_1 \cos\mu x + a_2\, sen\,\mu x) \times \\
&\quad \times b_1\, senh\,\lambda(c-z)\,, \\
u_5(x,b,z) &= 0 = \sum_{\lambda,\mu>0} (a_1 \cos\mu x + a_2\, sen\,\mu x) \times \\
&\quad \times (b_1 \cos\alpha b + b_2\, sen\ \alpha b) \times \\
&\quad \times senh\,\lambda(c-z)\,, \\
u_5(x,y,0) &= h_1(x,y)\,, \\
&= \sum_{\lambda,\mu>0} (a_1 \cos\mu x + a_2\, sen\,\mu x) \times \\
&\quad \times (b_1 \cos\alpha y + b_2\, sen\ \alpha y) \times \\
&\quad \times senh\,\lambda c\,, \\
u_5(x,y,c) &= 0\,.
\end{aligned}
$$

Satisfazemos as condições acima escolhendo,

$$
\begin{aligned}
&a_1 = b_1 = 0\,, \\
&\mu_i a = i\pi\,, \quad i = 0,1,2,\ldots, \\
&\alpha_j b = j\pi\,, \quad j = 0,1,2,\ldots
\end{aligned}
$$

A equação para h_1 fica então,

$$
\begin{aligned}
&h_1(x,y) = \sum_{ij} a_2 b_2\, sen\,(i\pi x/a)\, sen\ (j\pi y/b)\, senh\,\lambda_{ij} c\,, \\
&\lambda_{ij}^2 = \alpha_j^2 + \mu_i^2 = \left(\frac{j\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{i\pi}{a}\right)^2\,.
\end{aligned}
$$

Temos uma expansão em série de senos de Fourier, logo,

$$\sum_i a_2 b_2 \, sen\,(i\pi x/a)\, senh\,\lambda_{ij} c = \frac{2}{b}\int_0^b h_1(x,\zeta)\, sen\,(j\pi\zeta/b)\, d\zeta\,,$$

e,

$$a_2 b_2 \, senh\,\lambda_{ij} c = \frac{2}{a}\int_0^a \; sen\,(i\pi\eta/a)\, d\eta \frac{2}{b}\int_0^b h_1(\eta,\zeta)\, sen\,(j\pi\zeta/b)\, d\zeta\,.$$

Portanto,

$$a_2 b_2 = \frac{1}{senh\,\lambda_{ij} c}\frac{2}{a}\int_0^a \; sen\,(i\pi\eta/a)\, d\eta \frac{2}{b}\int_0^b h_1(\eta,\zeta)\, sen\,(j\pi\zeta/b)\, d\zeta\,.$$

A expansão para h_1 *é assim,*

$$\begin{aligned}
& h_1(x,y) = \sum_{ij} \; sen\,(i\pi x/a)\, sen\,(j\pi y/b) \times \\
& \frac{2}{a}\int_0^a \; sen\,(i\pi\eta/a)\, d\eta \frac{2}{b}\int_0^b h_1(\eta,\zeta)\, sen\,(j\pi\zeta/b)\, d\zeta\,, \\
& \lambda_{ij}^2 = \alpha_j^2 + \mu_i^2 = \left(\frac{j\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{i\pi}{a}\right)^2 .
\end{aligned}$$

Se h_1 *é constante,*

$$\begin{aligned}
& h_1 = \sum_{ij} \; sen\,(i\pi x/a)\, sen\,(j\pi y/b) \times \\
& \times \frac{2}{a}\int_0^a \; sen\,(i\pi\eta/a)\, d\eta \frac{2}{b}\int_0^b h_1 \, sen\,(j\pi\zeta/b)\, d\zeta\,,
\end{aligned}$$

ou,

$$1 = \frac{16}{\pi^2}\sum_{ij} \frac{sen\,[(2i-1)\pi x/a]}{2i-1}\frac{sen\,[(2j-1)\pi y/b]}{2j-1}\,,$$

em que usamos,

$$\int_0^a sen\,(i\pi\xi/a)d\xi = \begin{cases} \dfrac{2a}{i\pi}\,, & i\;ímpar\,, \\ 0\,, & i\;par\,. \end{cases}$$

A solução fica então,

$$\begin{aligned} u_5(x,y,z) &= \sum_{ij} sen\,(i\pi x/a)\,sen\,(j\pi y/b)\frac{senh\,\lambda_{ij}(c-z)}{senh\,\lambda_{ij}c} \times \\ &\times\frac{2}{a}\int_0^a sen\,(i\pi\eta/a)\,d\eta\frac{2}{b}\int_0^b h_1(\eta,\zeta)\,sen\,(j\pi\zeta/b)\,d\zeta\,, \\ &\lambda_{ij}^2 = \alpha_j^2+\mu_i^2 = \left(\frac{j\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{i\pi}{a}\right)^2\,. \end{aligned}$$

Se h_1 é constante,

$$\begin{aligned} u_5(x,y,z) &= \frac{16h_1}{\pi^2}\sum_{ij}\frac{senh\,\lambda_{ij}(c-z)}{senh\,\lambda_{ij}c} \times \\ &\times\frac{sen\,[(2i-1)\pi x/a]}{2i-1}\,\frac{sen\,[(2j-1)\pi y/b]}{2j-1}\,, \\ &\lambda_{ij}^2 = \frac{(2j-1)^2\pi^2}{b^2}+\frac{(2i-1)^2\pi^2}{a^2}\,, \end{aligned}$$

e se $h_1 = 0$ temos $u_5 = 0$.

Podemos escrever a solução acima como,

$$u_5(x,y,z) = \int_0^a\int_0^b G(x,y,z;\eta,\zeta)h_1(\eta,\zeta)d\eta d\zeta\,,$$

ou, como $u_5(x,y,0) = h_1(x,y)$,

$$u_5(x,y,z) = \int_0^a\int_0^b G(x,y,z;\eta,\zeta)u_5(\eta,\zeta,0)d\eta d\zeta\,,$$

com,

$$\begin{aligned} G(x,y,z;\eta,\zeta) &= \frac{4}{ab}\sum_{ij} sen\,(i\pi x/a)\,sen\,(j\pi y/b)\frac{senh\,\lambda_{ij}(c-z)}{senh\,\lambda_{ij}c} \times \\ &\times sen\,(i\pi\eta/a)\,sen\,(j\pi\zeta/b)\,, \\ &\lambda_{ij}^2 = \alpha_j^2+\mu_i^2 = \left(\frac{j\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{i\pi}{a}\right)^2\,. \end{aligned}$$

Em $z = 0$,

$$\begin{aligned}
u_5(x,y,0) &= \sum_{ij} sen\,(i\pi x/a)\, sen\,(j\pi y/b) \times \\
&\quad \times \frac{2}{a}\int_0^a sen\,(i\pi\eta/a)\, d\eta \frac{2}{b}\int_0^b h_1(\eta,\zeta)\, sen\,(j\pi\zeta/b)\, d\zeta\,, \\
&= h_1(x,y)\,, \\
&\quad \lambda_{ij}^2 = \alpha_j^2 + \mu_i^2 = \left(\frac{j\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{i\pi}{a}\right)^2\,,
\end{aligned}$$

como deve ser.

Também temos,

$$u_5(x,y,0) = \int_0^a \int_0^b G(x,y,0;\eta,\zeta) u_5(\eta,\zeta,0) d\eta d\zeta\,,$$

com,

$$\begin{aligned}
G(x,y,0;\eta,\zeta) &= \frac{4}{ab}\sum_{ij} sen\,(i\pi x/a)\, sen\,(j\pi y/b) \times \\
&\quad \times sen\,(i\pi\eta/a)\, sen\,(j\pi\zeta/b)\,.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
G(x,y,0;\eta,\zeta) &= \frac{4}{ab}\sum_{ij} sen\,(i\pi x/a)\, sen\,(j\pi y/b) \times \\
&\quad \times sen\,(i\pi\eta/a)\, sen\,(j\pi\zeta/b)\,, \\
&= \delta(\eta - x)\delta(\zeta - y)\,.
\end{aligned}$$

(f) Cálculo de u_6*.*

2. Considere o problema anterior com $u(x,y,0) = h_1(x,y)$, as outras funções iguais a zero (Spiegel [7], probl. 2.75; probl. 2.72 com $a = b = c$).

3. Encontre a solução da equação de Laplace em $x > 0$ se $u(0,y,z) = f(y,z)$.

4. Encontre a solução da equação de Laplace em $x > 0$, $y > 0$ se $u(0,y,z) = f(y,z)$ e $u(x,0,z) = g(x,z)$.

5. Encontre a solução da equação de Laplace em $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ se $u(0,y,z) = f(y,z)$, $u(x,0,z) = g(x,z)$ e $u(x,y,0) = h(x,y)$.

6. Encontre a solução $u(x, y, z)$ para as equações:

(a)

$$\nabla^2 u = -f(x, y, z)\,;$$

(b)

$$\nabla^2 u = +\alpha^2\,;$$

com α constante,

(c)

$$\nabla^2 u = -\alpha^2\,;$$

com α constante,

(d)

$$\nabla^2 u = +\alpha^2 u\,;$$

com α constante,

(e)

$$\nabla^2 u = -\alpha^2 u\,;$$

com α constante e,

$$\begin{aligned}
&0 \le x \le a\,, \quad 0 \le y \le b\,, \quad 0 \le z \le c\,, \\
&u(0, y, z) = \mu_1(y, z)\,, \quad u(a, y, z) = \mu_2(y, z)\,, \\
&u(x, 0, z) = \nu_1(x, z)\,, \quad u(x, b, z) = \nu_2(x, z)\,, \\
&u(x, y, 0) = \eta_1(x, y)\,, \quad u(x, y, c) = \eta_2(x, y)\,.
\end{aligned}$$

De forma análoga aos casos unidimensional e bidimensional, escrevemos a solução como,

$$u(x, y, z) = u_h(x, y, z) + u_p(x, y, z)\,,$$

com a solução u_h da equação homogênea com condições de contorno não-homogêneas (problema 1), e u_p uma solução particular da equação não-homogênea com condições de contorno homogêneas.

Expandimos u_p e f em séries de senos de Fourier triplas,

$$u_p(x, y, z) = \sum_{ijk=1}^{\infty} A_{ijk}\, sen\,\frac{i\pi x}{a}\, sen\,\frac{j\pi y}{b}\, sen\,\frac{k\pi z}{c}\,,$$

$$A_{ijk} = \frac{8}{abc} \int_0^a \int_0^b \int_0^c u_p(x', y', z')\, sen\,\frac{i\pi x'}{a}\, sen\,\frac{j\pi y'}{b}\, sen\,\frac{k\pi z'}{c} dx' dy' dz'\,,$$

$$f(x,y,z)=\sum_{ijk=1}^{\infty} B_{ijk}\,sen\,\frac{i\pi x}{a}\,sen\,\frac{j\pi y}{b}\,sen\,\frac{k\pi z}{c}\,,$$

$$B_{ijk}=\frac{8}{abc}\int_0^a\int_0^b\int_0^c f(x',y',z')\,sen\,\frac{i\pi x'}{a}\,sen\,\frac{j\pi y'}{b}\,sen\,\frac{k\pi z'}{c}dx'dy'dz'\,.$$

Substituindo u_p e f na equação diferencial,

$$\begin{aligned}
&\nabla^2 u_p=-f(x,y,z)\,,\\
&\frac{\partial^2 u_p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_p}{\partial z^2}=-f(x,y,z)\,,\\
&-\sum_{ijk=1}^{\infty} A_{ijk}[(i\pi/a)^2+(j\pi/b)^2+(k\pi/c)^2]\,sen\,\frac{i\pi x}{a}\,sen\,\frac{j\pi y}{b}\,sen\,\frac{k\pi z}{c}=\\
&=\sum_{ijk=1}^{\infty} B_{ijk}\,sen\,\frac{i\pi x}{a}\,sen\,\frac{j\pi y}{b}\,sen\,\frac{k\pi z}{c}\,,
\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
A_{ijk} &= \frac{B_{ijk}}{(i\pi/a)^2+(j\pi/b)^2+(k\pi/c)^2}\,,\\
&= \frac{1}{(i\pi/a)^2+(j\pi/b)^2+(k\pi/c)^2}\times\\
&\quad\times\frac{8}{abc}\int_0^a\int_0^b\int_0^c f(x',y',z')\,sen\,\frac{i\pi x'}{a}\,sen\,\frac{j\pi y'}{b}\,sen\,\frac{k\pi z'}{c}dx'dy'dz'\,.
\end{aligned}$$

A solução particular é então,

$$\begin{aligned}
u_p(x,y,z) &= \sum_{ijk=1}^{\infty} A_{ijk}\,sen\,\frac{i\pi x}{a}\,sen\,\frac{j\pi y}{b}\,sen\,\frac{k\pi z}{c}\,,\\
&= \sum_{ijk=1}^{\infty}\,sen\,\frac{i\pi x}{a}\,sen\,\frac{j\pi y}{b}\,sen\,\frac{k\pi z}{c}\times\\
&\quad\times\frac{1}{(i\pi/a)^2+(j\pi/b)^2+(k\pi/c)^2}\times\\
&\quad\times\frac{8}{abc}\int_0^a\int_0^b\int_0^c f(x',y',z')\,sen\,\frac{i\pi x'}{a}\,sen\,\frac{j\pi y'}{b}\,sen\,\frac{k\pi z'}{c}dx'dy'dz'\,.
\end{aligned}$$

Podemos verificar que u_p satisfaz condições de contorno homogêneas. Escrevendo u_p em termos de função de Green temos,

$$u_p(x,y,z) = \int_0^a \int_0^b \int_0^c G(x,y,z;x',y',z') f(x',y',z') dx'dy'dz' \,,$$

com,

$$\begin{aligned} G(x,y,z;x',y',z') &= \sum_{ijk=1}^{\infty} sen\, \frac{i\pi x}{a}\, sen\, \frac{j\pi y}{b}\, sen\, \frac{k\pi z}{c} \times \\ &\times \frac{1}{(i\pi/a)^2 + (j\pi/b)^2 + (k\pi/c)^2} \times \\ &\times \frac{8}{abc}\, sen\, \frac{i\pi x'}{a}\, sen\, \frac{j\pi y'}{b}\, sen\, \frac{k\pi z'}{c} \,. \end{aligned}$$

7. Resolva o problema anterior com as condições de contorno,

$$\begin{aligned} u_x(0,y,z) = \mu_1(y,z)\,, \quad u_x(a,y,z) = \mu_2(y,z)\,, \\ u_y(x,0,z) = \nu_1(x,z)\,, \quad u_y(x,b,z) = \nu_2(x,z)\,, \\ u_z(x,y,0) = \eta_1(x,y)\,, \quad u_z(x,y,c) = \nu_2(x,y)\,. \end{aligned}$$

8. Considere o problema 6 com as condições de contorno,

$$\begin{aligned} u_x(0,y,z) + h[u(0,y,z) - \mu_1(y,z)] = 0\,, \quad u_x(a,y,z) + h[u(a,y,z) - \mu_2(y,z)] = 0\,, \\ u_y(x,0,z) + h[u(x,0,z) - \nu_1(x,z)] = 0\,, \quad u_y(x,b,z) + h[u(x,b,z) - \nu_2(x,z)] = 0\,, \\ u_z(x,y,0) + h[u(x,y,0) - \eta_1(x,y)] = 0\,, \quad u_z(x,y,c) + h[u(x,y,c) - \eta_2(x,y)] = 0 \end{aligned}$$

Apêndice

1. Série de Fourier

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}[a_m \cos(m\pi x/L) + b_m \,\mathrm{sen}\,(m\pi x/L)]\,, \\
\frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx\,, \\
a_m &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(m\pi x/L)\,dx\,, \\
b_m &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{sen}\,(m\pi x/L)\,dx\,, \quad m = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

2. Série de Fourier de senos

$$f(z) = \sum_{j=1} b_j \,\mathrm{sen}\,(j\pi z/L)\,,$$

$$b_j = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{sen}\,(j\pi x/L)\,dx\,.$$

3. Série de Fourier de cosenos

$$f(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1} a_j \cos(j\pi z/L)\,,$$

$$a_j = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(j\pi x/L)\,dx\,.$$

4. Série de Fourier de senos dupla

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}\,\mathrm{sen}\,\frac{m\pi x}{L_1}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi y}{L_2}\,,$$

$$B_{mn} = \frac{4}{L_1 L_2}\int_0^{L_1}\int_0^{L_2} f(x,y)\,\mathrm{sen}\,\frac{m\pi x}{L_1}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi y}{L_2} dxdy\,.$$

5. Série de Fourier de senos tripla

$$f(x,y,z) = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{lmn}\,\mathrm{sen}\,\frac{l\pi x}{L_1}\,\mathrm{sen}\,\frac{m\pi y}{L_2}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi z}{L_3}\,,$$

$$B_{lmn} = \frac{8}{L_1 L_2 L_3}\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}\int_0^{L_3} f(x,y,z)\,\mathrm{sen}\,\frac{l\pi x}{L_1}\,\mathrm{sen}\,\frac{m\pi y}{L_2}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi z}{L_3} dxdydz\,.$$

6.

$$\int_0^a \text{sen}\,(i\pi\xi/a)d\xi = \begin{cases} \dfrac{2a}{i\pi}\,, & i\,\text{ímpar}\,, \\ 0\,, & i\,\text{par}\,. \end{cases}$$

7.

$$\int \cos ax\, \cos bx\, dx = \frac{1}{2}\frac{sen\,(a+b)x}{a+b} + \frac{1}{2}\frac{sen\,(a-b)x}{a-b}\,,$$

$$\begin{aligned} \int_{-L}^{L} \cos(i\pi x/L)\, \cos(j\pi x/L)\, dx &= \frac{1}{2}\frac{sen\,[(i+j)\pi x/L]}{(i+j)\pi/L} + \frac{1}{2}\frac{sen\,[(i-j)\pi x/L]}{(i-j)\pi/L}\Bigg|_{-L}^{L}\,, \\ &= \begin{cases} 0\,, & i \neq j\,, \\ L\,, & i = j\,, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{0}^{L} \cos(i\pi x/L)\, \cos(j\pi x/L)\, dx &= \frac{1}{2}\frac{sen\,[(i+j)\pi x/L]}{(i+j)\pi/L} + \frac{1}{2}\frac{sen\,[(i-j)\pi x/L]}{(i-j)\pi/L}\Bigg|_{0}^{L}\,, \\ &= \begin{cases} 0\,, & i \neq j\,, \\ L/2\,, & i = j\,. \end{cases} \end{aligned}$$

8.

$$\int \text{sen}\ ax\ \text{sen}\ bx\, dx = \frac{1}{2}\frac{sen\,(a-b)x}{a-b} - \frac{1}{2}\frac{sen\,(a+b)x}{a+b}\,,$$

$$\begin{aligned} \int_{-L}^{L} \text{sen}\ (i\pi x/L)\ \text{sen}\ (j\pi x/L)\, dx &= \frac{1}{2}\frac{sen\,[(i-j)\pi x/L]}{(i-j)\pi/L} - \frac{1}{2}\frac{sen\,[(i+j)\pi x/L]}{(i+j)\pi/L}\Bigg|_{-L}^{L}\,, \\ &= \begin{cases} 0\,, & i \neq j\,, \\ L\,, & i = j\,, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{0}^{L} \text{sen}\ (i\pi x/L)\ \text{sen}\ (j\pi x/L)\, dx &= \frac{1}{2}\frac{sen\,[(i-j)\pi x/L]}{(i-j)\pi/L} - \frac{1}{2}\frac{sen\,[(i+j)\pi x/L]}{(i+j)\pi/L}\Bigg|_{0}^{L}\,, \\ &= \begin{cases} 0\,, & i \neq j\,, \\ L/2\,, & i = j\,. \end{cases} \end{aligned}$$

9.

$$\int \text{sen } ax \, \cos \, bx \, dx = -\frac{1}{2}\frac{\cos(a+b)x}{a+b} - \frac{1}{2}\frac{\cos\,(a-b)x}{a-b}\,.$$

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L} \text{sen } (i\pi x/L) \, \cos\,(j\pi x/L)\, dx &= -\frac{1}{2}\frac{\cos[(i+j)\pi x/L]}{(i+j)\pi/L} - \frac{1}{2}\frac{\cos\,[(i-j)\pi x/L]}{(i-j)\pi/L}\Bigg|_{-L}^{L}\,,\\ &= 0\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{0}^{L} \text{sen } (i\pi x/L) \, \cos\,(j\pi x/L)\, dx &= -\frac{1}{2}\frac{\cos[(i+j)\pi x/L]}{(i+j)\pi/L} - \frac{1}{2}\frac{\cos\,[(i-j)\pi x/L]}{(i-j)\pi/L}\Bigg|_{0}^{L}\,,\\ &= \begin{cases}\dfrac{1-(-1)^{i+j}}{2(i+j)\pi/L} + \dfrac{1-(-1)^{i+j}}{2(i-j)\pi/L}\,, & i \neq j\,,\\ 0\,, \quad i = j\,.\end{cases}\end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned}\int_{0}^{L} x\,\text{sen } (i\pi x/L)\, dx &= \begin{cases}+\dfrac{L^2}{i\pi}\,, & i \text{ ímpar}\,,\\ -\dfrac{L^2}{i\pi}\,, & i \text{ par}\,,\end{cases}\\ &= \frac{L^2}{i\pi}(-1)^{i+1}\,,\end{aligned}$$

$$\int x\,\text{sen } ax\, dx = \frac{\text{sen } ax}{a^2} - \frac{x\cos ax}{a}\,.$$

11.

$$x = \frac{2L}{\pi}\sum_{i=1} \frac{\text{sen}\,(i\pi x/L)}{i}(-1)^{i+1}\,, \quad 0 < x < L\,.$$

12.

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum_{i=1} \frac{\text{sen}\,[(2i-1)\pi x/L]}{2i-1}\,, \quad 0 < x < L\,.$$

13.

$$\delta(\xi - x) = \frac{2}{a}\sum_{j=1} \operatorname{sen}\frac{j\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{j\pi\xi}{a}\,.$$

14.

$$1 = \frac{16}{\pi^2}\sum_{ij}\frac{\operatorname{sen}\left[(2j-1)\pi y/b\right]}{2j-1}\frac{\operatorname{sen}\left[(2i-1)\pi z/c\right]}{2i-1}\,.$$

15.

$$\begin{aligned}\delta(\eta - y)\delta(\zeta - z) \quad &= \quad \frac{4}{bc}\sum_{ij}\operatorname{sen}\left(j\pi y/b\right)\operatorname{sen}\left(i\pi z/c\right)\times \\ &\quad\quad \times\operatorname{sen}\left(j\pi\eta/b\right)\,\operatorname{sen}\,\left(i\pi\zeta/c\right).\end{aligned}$$

References

[1] A. Sommerfeld, *Partial Differential Equations in Physics*, Academic Press, New York and London (1964s).

[2] R. K. Wangsness, *Electromagnetic Fields*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York (1986).

[3] Jackson, J.D., *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, New York (1962).

[4] Stratton, J. A., *Electromagnetic Theory*, 1st ed., McGraw-Hill, New York (1941).

[5] I. S. Gradshteyn, I. M. Rytzhik, *Table of Integral, Series, and Products*, 5th ed., Academic Press, San Diego (1994).

[6] M. R. Spiegel, S. Lipschutz, J. Liu, *Schaum's Outline of Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York (2009).

[7] M. R. Spiegel, *Schaum's Outline of Fourier Analysis with Applications to Boundary Value Problems*, McGraw-Hill, New York (1974).

[8] M. R. Spiegel, *Schaum's Outline of Advanced Mathematics for Engineers and Scientists*, McGraw-Hill, New York (1971).

[9] Arfken, G. B., Weber, H. J., *Mathematical Methods for Physicists*, 6th. ed., Elsevier Academic Press, Amsterdam (2005).

[10] Morse, P. M., Feshbach, H., *Methods of Theoretical Physics*, vols. I e II, McGraw-Hill, New York (1953).

[11] Mathews, J., Walker, R. L., *Mathematical Methods of Physics*, 2nd. ed., Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Redwood City (1969).