

20 - Problemas de valores de contorno

1 Equações diferenciais parciais lineares

A equação diferencial parcial linear de ordem dois em duas variáveis independentes é da forma,

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G, \quad (1)$$

com A, B, C, D, E, F, G podendo depender de x e y mas não de u . Uma equação de segunda ordem com variáveis independentes x e y que não possui a forma acima é chamada *não linear*.

Se G é igual a zero a equação é chamada *homogênea*, e se $G \neq 0$ é chamada *não homogênea*. A generalização para equações de ordem superior é imediata.

A equação (1) é classificada como *elíptica*, *hiperbólica* ou *parabólica* conforme $B^2 - 4AC$ seja menor, maior ou igual a zero, respectivamente.

2 Algumas equações diferenciais parciais importantes

Equação da corda vibrante

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Essa equação é aplicável a pequenas vibrações transversais de uma corda flexível esticada, como uma corda de violino, inicialmente localizada no eixo x e colocada em movimento (fig. 1). A função $y(x, t)$ é o deslocamento de um ponto x da corda no instante t . A constante $a^2 = \tau/\mu$, com τ a tensão constante da corda e μ a massa constante por unidade de comprimento da corda. Supomos que nenhuma força externa atua sobre a corda e que ela vibra apenas devido à sua elasticidade.

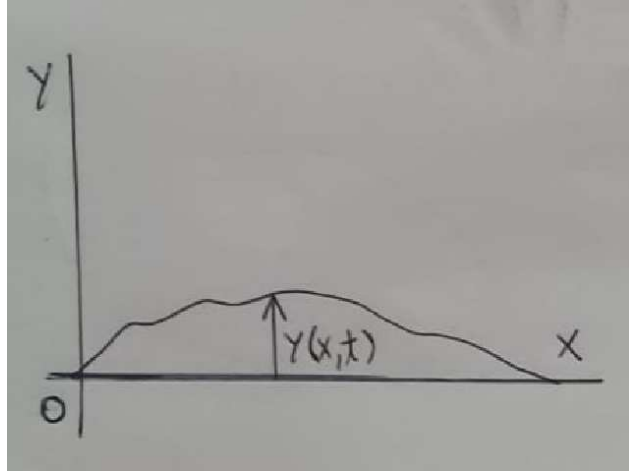


Fig. 1.

A equação pode ser facilmente generalizada para mais dimensões, como por exemplo as vibrações de uma membrana em duas dimensões. Em duas dimensões a equação é,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right). \quad (3)$$

Equação da condução do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \nabla^2 u. \quad (4)$$

Aqui $u(x, y, z, t)$ é a temperatura na posição (x, y, z) em um sólido no instante t . A constante κ é a *difusividade*, igual a $K/\sigma\mu$, com K a *condutividade térmica*, σ o calor específico, e μ a densidade, massa por unidade de volume, suposta constante. Chamamos $\nabla^2 u$ o *Laplaciano* de u , que em coordenadas cartesianas retangulares tridimensionais (x, y, z) é,

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (5)$$

Equação de Laplace

$$\nabla^2 v = 0. \quad (6)$$

Essa equação ocorre em muitas áreas. Na teoria da condução do calor, por exemplo, v é a *temperatura do estado estacionário*, isto é a temperatura após um longo intervalo de tempo, com equação obtida fazendo $\partial u/\partial t = 0$ na equação da condução do calor. Na teoria da gravitação ou da eletricidade v representa o *potencial gravitacional* ou *potencial eletrostático*, respectivamente. Por essa razão a equação é chamada *equação do potencial*.

O problema de resolver $\nabla^2 v = 0$ em uma região R quando v é uma função dada no contorno de R é algumas vezes chamada *problema de Dirichlet*.

Equação das vibrações longitudinais de uma barra

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (7)$$

Essa equação descreve o movimento de uma barra (fig. 2) que pode vibrar longitudinalmente (na direção x), supondo as vibrações serem pequenas. A variável $u(x, t)$ é o deslocamento longitudinal da posição de equilíbrio da seção reta transversal em x . A constante $c^2 = E/\mu$, com E sendo o módulo de elasticidade, estresse dividido por deformação, e depende das propriedades da barra, μ é a densidade, massa por unidade de volume.

Notemos que essa equação é a mesma da corda vibrante.

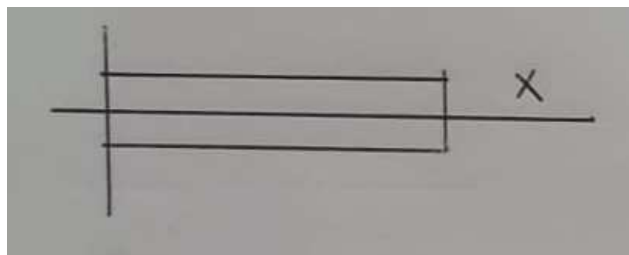


Fig. 2.

Equação das vibrações transversais de uma barra

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0. \quad (8)$$

Essa equação descreve o movimento de uma barra, inicialmente localizada no eixo x (fig. 3), que vibra transversalmente, isto é perpendicularmente à

direção x , supondo pequenas vibrações. Nesse caso $y(x, t)$ é o deslocamento transversal ou deflexão em um ponto x no instante t . A constante $b^2 = EI/A\mu$, com E o módulo de elasticidade, I o momento de inércia de qualquer seção transversal em torno do eixo x , A é a área da seção transversal, e μ é a massa por unidade de comprimento. No caso em que uma força externa transversal $F(x, t)$ é aplicada, o lado direito da equação é substituído por $b^2 F(x, t)/EI$.

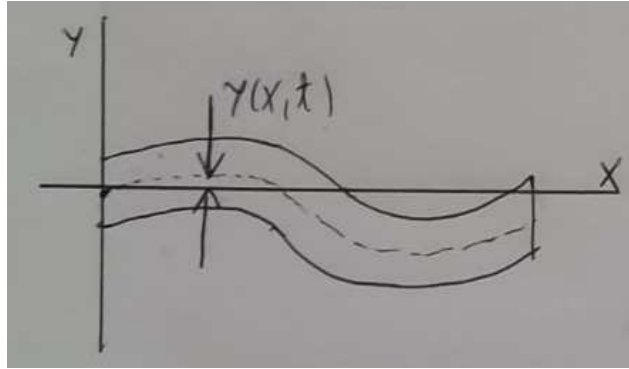


Fig. 3.

3 O Laplaciano em diferentes sistemas de coordenadas

O Laplaciano $\nabla^2 u$ aparece bastante em equações diferenciais parciais em ciência e engenharia. Dependendo do tipo de problema envolvido, a escolha do sistema de coordenadas pode ser importante na obtenção de soluções. Por exemplo, se o problema envolve um cilindro, pode ser mais conveniente usar *coordenadas cilíndricas*, e se envolve uma esfera, pode ser mais conveniente usar *coordenadas esféricas*.

O Laplaciano em coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) (fig. 4) é dado por,

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (9)$$

As equações de transformação entre coordenadas retangulares e cilíndricas são,

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, \\ y &= \rho \operatorname{sen} \varphi, \\ z &= z, \end{aligned} \quad (10)$$

com $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-\infty \leq z \leq +\infty$.

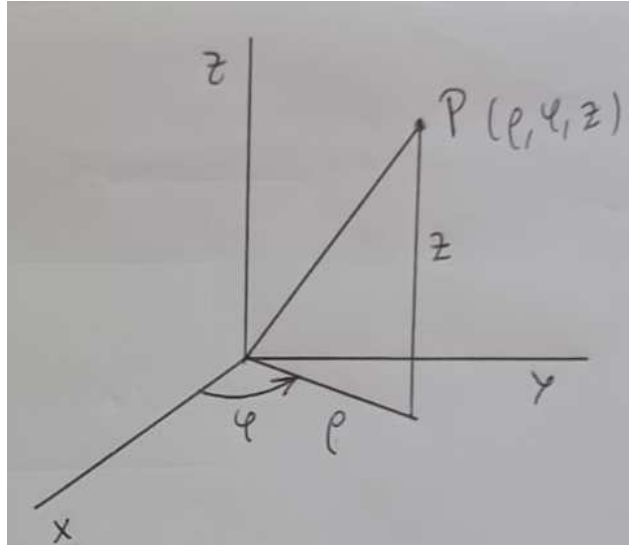


Fig. 4.

O Laplaciano em coordenadas esféricas (r, θ, φ) (fig. 5) é,

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \quad (11)$$

As equações de transformação entre coordenadas retangulares e esféricas são,

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta, \end{aligned} \quad (12)$$

com $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

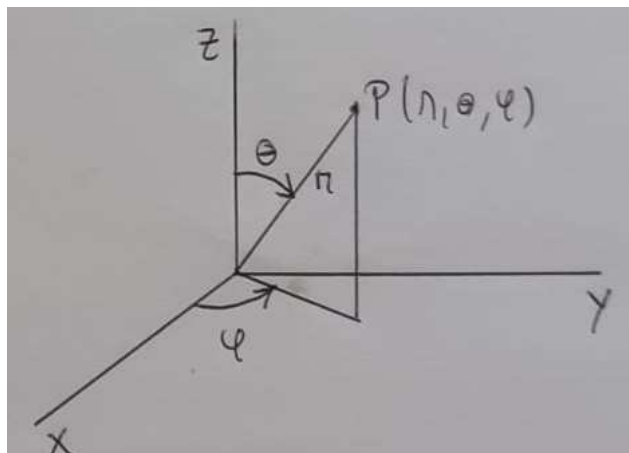


Fig. 5.

4 Métodos para resolver problemas de valores de contorno

Existem vários métodos para resolver problemas de valores de contorno envolvendo equações diferenciais parciais lineares. Vamos ver dois métodos que representam pontos de vista algo opostos.

No primeiro método procuramos a solução geral da equação diferencial parcial, e então particularizamos para obter a solução real usando as condições de contorno. No segundo método primeiro encontramos soluções particulares da equação diferencial parcial e então construímos a solução real usando essas soluções particulares. Dos dois métodos o segundo será de muito maior aplicabilidade do que o primeiro.

Soluções gerais.

Nesse método primeiro encontramos a solução geral e então a solução particular que satisfaz as condições de contorno. Os seguintes teoremas são de importância fundamental.

Teorema 1.1 (Princípio da superposição). Se u_1, u_2, \dots, u_n são soluções de uma equação diferencial parcial linear homogênea, então $c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_nu_n$, com c_1, c_2, \dots, c_n constantes, também é uma solução.

Teorema 1.2 A solução geral de uma equação diferencial parcial linear não homogênea é obtida adicionando uma solução particular da equação não homogênea à solução geral da equação homogênea.

Às vezes podemos encontrar soluções gerais usando os métodos para equações diferenciais ordinárias.

Se A, B, \dots, F em (1) são constantes, então a solução geral da equação homogênea pode ser encontrada supondo $u = e^{ax+by}$, com a e b constantes a serem determinadas.

Soluções particulares por separação de variáveis.

Nesse método, simples mas poderoso, supomos que a solução pode ser expressa como um produto de funções desconhecidas, cada uma dependendo de apenas uma das variáveis independentes. O sucesso do método está em ser possível escrever a equação resultante de modo que cada lado depende apenas de uma

variável independente, enquanto o outro lado depende das outras variáveis, logo cada lado deve ser uma constante. Repetindo o método as funções desconhecidas podem ser determinadas. A superposição dessas soluções pode ser usada para encontrar a solução real.

5 Problemas

1-Obtenha a equação da corda vibrante ([7], probl. 1.1).

Supomos que Δs na figura 6 representa um elemento de arco da corda. Como supomos a tensão constante, a força vertical resultante agindo para cima sobre Δs é,

$$\tau \operatorname{sen} \theta_2 - \tau \operatorname{sen} \theta_1.$$

Como $\operatorname{sen} \theta \cong \tan \theta$ para ângulos pequenos, essa força é,

$$\tau \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} - \tau \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x,$$

em que usamos o fato que $\tan \theta = \partial y / \partial x$. Pela segunda lei de Newton, essa força é igual à massa do elemento de corda, $\mu \Delta s$ multiplicada pela aceleração de Δs , que é $\partial^2 y / \partial t^2 + \varepsilon$, em que $\varepsilon \rightarrow 0$ se $\Delta s \rightarrow 0$. Temos então, aproximadamente,

$$\tau \left[\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} - \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x \right] = (\mu \Delta s) \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \varepsilon \right).$$

Se as vibrações são pequenas, então $\Delta s \cong \Delta x$, e após dividirmos a equação acima por $\mu \Delta x$,

$$\frac{\tau}{\mu} \frac{\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} - \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x}{\Delta x} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \varepsilon.$$

Tomando o limite $\Delta x \rightarrow 0$, que também implica em $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\frac{\tau}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

ou,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

com $a^2 = \tau/\mu$.

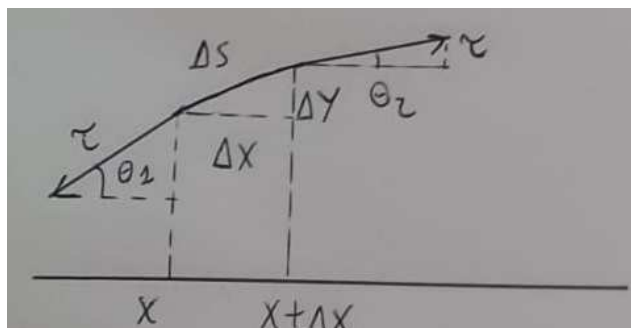


Fig. 6.

2-Escriva as condições de contorno para uma corda vibrante de comprimento L com (a) as extremidades em $x = 0$ e $x = L$ fixas, (b) forma inicial dada por $f(x)$, (c) distribuição de velocidade inicial dada por $g(x)$, (d) deslocamento em qualquer ponto x em um instante t é finito ([7], probl. 1.2).

(a) Se a corda é fixa em $x = 0$ e $x = L$, então o deslocamento $y(x, t)$ em $x = 0$ e $x = L$ deve ser zero em qualquer instante de tempo $t > 0$,

$$y(0, t) = 0, \quad y(L, t) = 0, \quad t > 0.$$

(b) Como a corda possui forma inicial dada por $f(x)$, temos,

$$y(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L.$$

(c) Como a velocidade inicial da corda em qualquer ponto x é $g(x)$, temos,

$$y_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L.$$

Notemos que $y_t(x, 0)$ é o mesmo que $\partial y/\partial t$ calculada em $t = 0$.

(d) Como $y(x, t)$ é limitado, podemos encontrar uma constante M independente de x e t tal que,

$$|y(x, t)| < M, \quad 0 < x < L, \quad t > 0.$$

3-Escriva condições de contorno para a corda vibrante com (a) a extremidade $x = 0$ em movimento com deslocamento dado por $G(t)$, (b) a extremidade $x = L$ não é fixa mas é livre para se mover ([7], probl. 1.3).

(a) O deslocamento em $x = 0$ é dado por $y(0, t)$, logo,

$$y(0, t) = G(t) \quad t > 0.$$

(b) Se τ é a tensão, a força transversal atuando em qualquer ponto x é,

$$\tau \frac{\partial y}{\partial x} = \tau y_x(x, t).$$

Como a extremidade $x = L$ é livre para se mover, de modo que não há forças atuando sobre ela, temos,

$$\tau y_x(L, t) = 0, \quad \text{ou} \quad y_x(L, t) = 0, \quad t > 0.$$

4-Supomos que a tensão é variável, isto é $\tau = \tau(x)$. Obtenha a equação da corda vibrante nesse caso ([7], probl. 1.4).

Agora temos para a força vertical,

$$\tau(x) \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - \tau(x) \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_x,$$

e assim,

$$\frac{\tau(x) \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - \tau(x) \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_x}{\mu \Delta x} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \varepsilon.$$

Fazendo o limite $\Delta x \rightarrow 0$, que implica $\varepsilon \rightarrow 0$, temos,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\tau(x) \frac{\partial y}{\partial x} \right] = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

após multiplicarmos por μ .

5-Mostre que o fluxo de calor através de um plano em um meio condutor é $-K \partial u / \partial n$, em que u é a temperatura, n é a normal na direção perpendicular ao plano, e K é a condutividade térmica do meio ([7], probl. 1.5).

Supomos dois planos paralelos I e II distantes Δn (fig. 7), com temperaturas u e $u + \Delta u$, respectively.

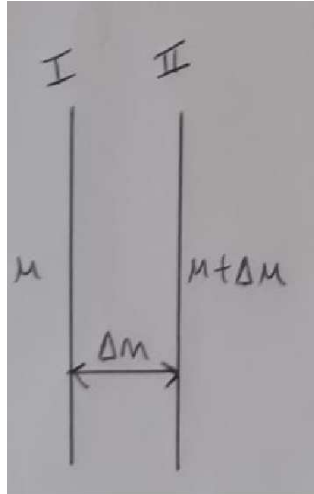


Fig. 7.

Então o calor flui do plano de maior temperatura para o plano de menor temperatura. A quantidade de calor por unidade de área, por unidade de tempo, chamada fluxo de calor, é diretamente proporcional à diferença de temperatura Δu , e inversamente proporcional à distância Δn . Temos portanto,

$$\text{Fluxo de calor de I para II} = -K \frac{\Delta u}{\Delta n},$$

em que K é a constante de proporcionalidade, chamada condutividade térmica. O sinal menos na equação acima é porque se $\Delta u > 0$, o fluxo de calor ocorre de II para I. As dimensões de K são,

$$K \sim \frac{\text{energia}}{\text{tempo} \cdot \text{comprimento} \cdot \text{temperatura}},$$

e as unidades SI de K são $J/m.s.K$.

Tomando o limite em que Δn vai a zero, também temos Δu indo a zero, logo,

$$\text{Fluxo de calor através do plano I} = -K \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Às vezes chamamos $\partial u / \partial n$ o gradiente de u , que em forma vetorial é ∇u , de modo que a equação acima pode ser escrita como,

$$\text{Fluxo de calor através do plano I} = -K \nabla u.$$

Vemos que as dimensões de $K \partial u / \partial n$ ou $K \nabla u$ são,

$$K \nabla u \sim \frac{\text{energia}}{\text{tempo} \cdot \text{área}},$$

e as unidades SI são $J/s.m^2$.

6-Se a temperatura em qualquer ponto (x, y, z) de um sólido no instante t é $u(x, y, z, t)$, e se K , σ e μ são respectivamente a condutividade térmica, o calor específico e a densidade do sólido, todas supostas constantes, mostre que ([7], probl. 1.6),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \nabla^2 u, \quad \kappa = K/\sigma\mu.$$

Consideremos um pequeno volume de um sólido, como indicado na figura 8, e grandemente aumentado na figura 9. A quantidade de calor por unidade de área, por unidade de tempo, entrando no elemento pela face PQRS é $-K\partial u/\partial x|_x$. Como a área da face PQRS é $\Delta y\Delta z$, a quantidade total de calor entrando no elemento pela face PQRS em Δt é,

$$-K \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x \Delta y \Delta z \Delta t.$$

Da mesma forma, a quantidade de calor deixando o elemento de volume pela face NWZT é,

$$-K \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z \Delta t.$$

A quantidade de calor que permanece no elemento é dada pela quantidade entrando menos a quantidade saindo, que é então,

$$\left\{ K \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - K \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x \right\} \Delta y \Delta z \Delta t.$$

Da mesma forma podemos escrever para as direções y e z ,

$$\left\{ K \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y+\Delta y} - K \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_y \right\} \Delta x \Delta z \Delta t,$$

e,

$$\left\{ K \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z+\Delta z} - K \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_z \right\} \Delta x \Delta y \Delta t,$$

respectivamente. A quantidade total de calor ganha pelo elemento de volume é a soma das três relações acima. Essa quantidade de calor aumenta a temperatura do elemento de Δu . Pela definição de calor específico, o calor necessário para aumentar a temperatura de uma massa m por Δu é $m\sigma\Delta u$, em que σ é o

calor específico. Se a densidade do sólido é μ , então $m = \mu\Delta x\Delta y\Delta z$. Portanto a quantidade de calor dada pela soma das relações acima é igual a,

$$\sigma\mu\Delta x\Delta y\Delta z\Delta u.$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \left\{ K \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - K \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x \right\} \Delta y \Delta z \Delta t \\ & + \left\{ K \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y+\Delta y} - K \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_y \right\} \Delta x \Delta z \Delta t \\ & + \left\{ K \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z+\Delta z} - K \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_z \right\} \Delta x \Delta y \Delta t = \sigma\mu\Delta x\Delta y\Delta z\Delta u. \end{aligned}$$

Dividindo essa expressão por $\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$,

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{K \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - K \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x}{\Delta x} \right\} + \left\{ \frac{K \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y+\Delta y} - K \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_y}{\Delta y} \right\} \\ & + \left\{ \frac{K \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z+\Delta z} - K \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_z}{\Delta z} \right\} = \sigma\mu \frac{\Delta u}{\Delta t}. \end{aligned}$$

No limite em que Δx , Δy , Δz , Δt todos tendem a zero, obtemos,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \sigma\mu \frac{\partial u}{\partial t},$$

ou, se K é constante,

$$K \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \sigma\mu \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Podemos reescrever a equação acima como,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \nabla^2 u,$$

com $\kappa = K/\sigma\mu$ sendo a difusividade. As dimensões de κ são,

$$\kappa \sim \frac{\text{comprimento}^2}{\text{tempo}},$$

e as unidades SI de κ são m^2/s .

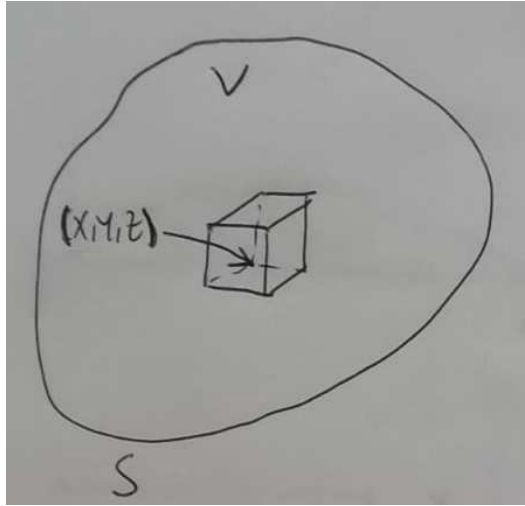


Fig. 8.

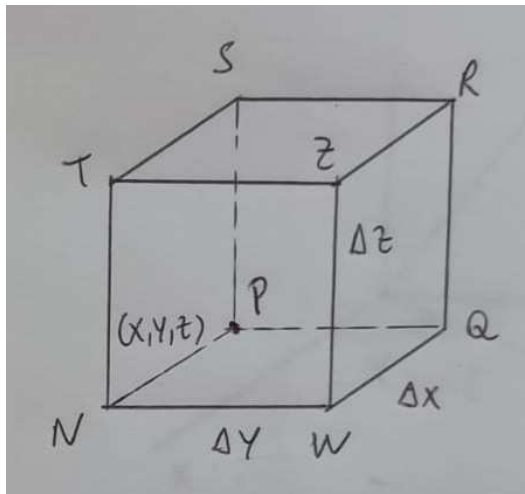


Fig. 9.

7-Considere o problema anterior com métodos vetoriais ([7], probl. 1.7).

Seja V um volume arbitrário em um sólido, e S sua superfície (fig. 8). O fluxo total de calor por S , ou a quantidade de calor deixando S por unidade de tempo, é,

$$\int_S (-K \nabla u) \cdot \mathbf{n} dS,$$

em que \mathbf{n} é o vetor unitário à superfície. Assim, a quantidade de calor entrando em S por unidade de tempo é,

$$\int_S (K \nabla u) \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot (K \nabla u) dV,$$

pelo teorema da divergência. O calor contido em um volume V é,

$$\int_V \sigma \mu u dV.$$

A taxa de aumento de calor é portanto,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \sigma \mu u dV = \int_V \sigma \mu \frac{\partial u}{\partial t} dV.$$

Igualando o lado direito das expressões acima,

$$\int_V \left[\sigma \mu \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (K \nabla u) \right] dV = 0,$$

e como V é arbitrário, o integrando deve ser identicamente zero, logo,

$$\sigma \mu \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (K \nabla u),$$

ou, se K, σ, μ são constantes,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{K}{\sigma \mu} \nabla \cdot \nabla u = \kappa \nabla^2 u.$$

8-Obtenha a equação da condução do calor na presença de uma fonte térmica ([13]).

Representamos a fonte térmica pela função $F(\mathbf{r}, t)$. As dimensões de F são,

$$F \sim \frac{\text{energia}}{\text{tempo.comprimento}^3},$$

e as unidades SI são $J/s.m^3$. A equação do calor fica,

$$\sigma \mu \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (K \nabla u) + F(\mathbf{r}, t),$$

ou, se K, σ, μ são constantes,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{K}{\sigma \mu} \nabla \cdot \nabla u + \frac{1}{\sigma \mu} F(\mathbf{r}, t) = \kappa \nabla^2 u + f(\mathbf{r}, t),$$

com,

$$f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sigma \mu} F(\mathbf{r}, t).$$

Se há troca de calor com o meio, de acordo com a lei de Newton, a quantidade de calor perdida é,

$$F_0 = h(u - T_0),$$

em que $T_0(\mathbf{r}, t)$ é a temperatura do meio, e h é o coeficiente de troca térmica. Assim, a densidade de fontes térmicas em \mathbf{r}, t é,

$$F = F_1(\mathbf{r}, t) - h(u - T_0),$$

em que $F_1(\mathbf{r}, t)$ é a densidade de outras fontes de calor.

Se temos uma barra homogênea, a equação da condução do calor com troca térmica lateral, é da forma,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \nabla^2 u - \alpha u + f(\mathbf{r}, t),$$

com,

$$\alpha = \frac{h}{\sigma\mu}, \quad f(\mathbf{r}, t) = \alpha T_0(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\sigma\mu} F_1(\mathbf{r}, t).$$

Se os coeficientes dependem da posição e do tempo, isto é, temos um meio não homogêneo, a equação do calor fica,

$$\sigma(\mathbf{r}, t)\mu(\mathbf{r}, t)\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot [K(\mathbf{r}, t)\nabla u] + F(\mathbf{r}, t).$$

9-Uma barra de difusividade κ possui extremidades em $x = 0$ e $x = L$, sobre o eixo x (fig. 10). Sua superfície lateral é isolada, de modo que o calor não pode entrar ou sair. (a) Se a temperatura inicial é $f(x)$ e as extremidades estão na temperatura zero, enuncie as condições de contorno. (b) Considere agora a extremidade $x = L$ isolada. (c) Considere agora a extremidade $x = L$ irradiando para o meio na temperatura u_0 ([7], probl. 1.9).

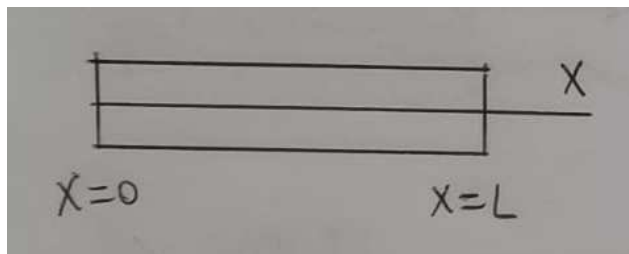


Fig. 10.

10-Mostre que $u(x, t) = e^{-8t} \text{sen } 2x$ é uma solução do problema de contorno ([7], probl. 1.12),

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) &= \text{sen } 2x.\end{aligned}$$

11-([7], probl. 1.13) (a) Encontre a solução geral da equação,

$$\frac{\partial v}{\partial x} + 3 \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

(b) Encontre a solução particular que satisfaz a condição $v(0, y) = 4 \text{ sen } y$.

12-Mostre que $y(x, t) = F(2x + 5t) + G(2x - 5t)$ é uma solução geral de,

11-(a) Encontre a solução geral da equação,

$$4 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 25 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

(b) Encontre a solução particular que satisfaz as condições,

$$y(0, t) = y(\pi, t) = 0, \quad y(x, 0) = \text{sen } 2x, \quad \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

12-(a) Encontre a solução geral da equação,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^2 y.$$

(b) Encontre a solução particular que satisfaz as condições,

$$z(x, 0) = x^2, \quad z(1, y) = \cos y.$$

13-Resolva a equação,

$$t \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} = x^2.$$

14-Resolva a equação,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

15-Encontre a solução geral de,

(a) $2 \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} = 2u.$

(b) $4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

16-Resolva a equação,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 10e^{2x+y}.$$

17-Resolva a equação,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{2x+y}.$$

18-Resolva o problema de valores de contorno abaixo pelo método de separação de variáveis,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4 \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u(0, y) = 8e^{-3y}.$$

19-Resolva o problema anterior se $u(0, y) = 8e^{-3y} + 4e^{-5y}.$

20-Resolva o problema abaixo,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 3, \quad t > 0, \quad u(0, t) = u(3, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = 5 \operatorname{sen} 4\pi x - 3 \operatorname{sen} 8\pi x + 2 \operatorname{sen} 10\pi x, \quad |u(x, t)| < M.$$

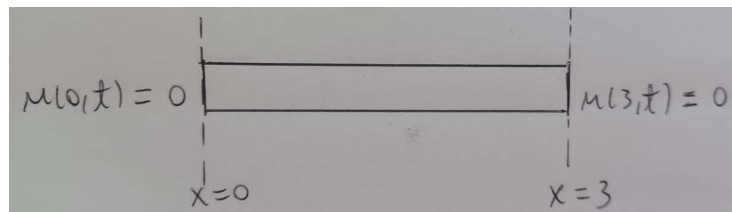


Fig. 11.

21-Resolva o problema abaixo,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= 16 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0, \\ y(0, t) &= y(2, t) = 0, \\ y(x, 0) &= 6 \operatorname{sen} \pi x - 3 \operatorname{sen} 4\pi x, \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= 0, \quad |y(x, t)| < M.\end{aligned}$$

22-Resolva o problema abaixo,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 3, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= u(3, t) = 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad |u(x, t)| < M.\end{aligned}$$

23-Uma corda horizontal com extremidades fixas vibra em um plano vertical sob a influência da gravidade. Mostre que sua equação é (Spiegel [7], probl. 1.26),

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - g,$$

em que g é a aceleração da gravidade. Encontre a solução para as condições de contorno:

- (a) $u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = 0$;
- (b) $u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x)$ (Spiegel [7], probl. 2.59);
- (c) $u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g_0 = \text{constante}$.

24-Uma barra localizada no eixo x possui extremidades em $x = 0$ e $x = L$. A temperatura inicial da barra é $f(x), 0 < x < L$, e as extremidades $x = 0, x = L$ são mantidas a temperaturas constantes T_1, T_2 , respectivamente. Supondo o meio na temperatura u_0 e a lei de resfriamento de Newton, mostre que a equação diferencial parcial para a temperatura da barra, em qualquer ponto e em qualquer tempo, é dada por (Spiegel [7], probl. 1.27),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta(u - u_0),$$

e escreva as condições de contorno correspondentes. Encontre a solução $u(x, t)$.

25- Escreva as condições de contorno para o problema anterior se (a) as extremidades em $x = 0$ e $x = L$ são isoladas; (b) as extremidades em $x = 0$ e $x = L$ irradiam no meio de acordo com a lei de resfriamento de Newton (Spiegel [7], probl. 1.28). Encontre a solução $u(x, t)$.

26-Uma corda possui as extremidades em $x = 0$ e $x = L$. Ela é deslocada uma distância h no seu ponto médio, e então solta. Formule o problema de valores de contorno para o deslocamento $y(x, t)$ de um ponto qualquer da corda (Spiegel [7], probl. 1.31).

27-Suponha que no problema 21 temos $y(x, 0) = f(x)$, com $0 < x < 2$. Resolva o problema expandindo $f(x)$ em uma série de senos.

28-Suponha que no problema 22 as condições de contorno são,

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \quad u(3, t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x).$$

Resolva o problema expandindo $f(x)$ em uma série de cossenos.

29-Obtenha a solução do problema de valores de contorno (Spiegel [7], probl. 1.44),

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

$$y(0, t) = y(5, t) = 0, \quad y(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = f(x), \quad 0 < x < 5, \quad t > 0.$$

se,

(a) $f(x) = 5 \operatorname{sen} \pi x$.

(b) $f(x) = 3 \operatorname{sen} 2\pi x - 2 \operatorname{sen} 5\pi x$.

30-Resolva,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2u,$$

se,

$$u(0, t) = u(3, t) = 0, \quad u(x, 0) = 2 \operatorname{sen} \pi x - \operatorname{sen} 4\pi x.$$

31-Uma corda flexível, com densidade linear de massa constante $\lambda = m/L$, é suspensa por uma extremidade, como mostrado na figura 12. Obtenha a

equação satisfeita pela função $y(x, t)$, que descreve a posição da corda. Obtenha a solução $y(x, t)$ se a posição inicial da corda é $y(x, 0) = f(x)$ e a velocidade inicial é $\partial y(x, 0)/\partial t = h(x)$ ([7], problemas 6.99, 6.100, 6.102, 6.103; [13], pág. 59).

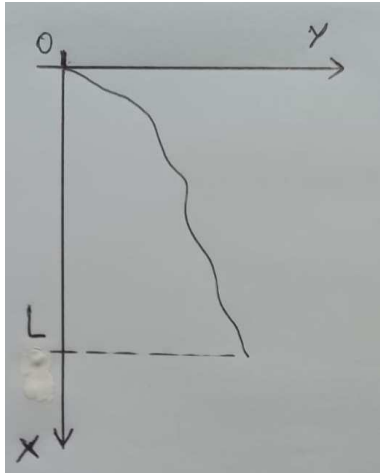


Fig. 12.

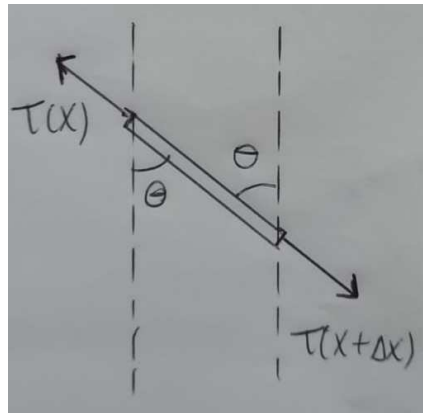


Fig. 13.

Escrevendo a segunda lei de Newton para o elemento de corda na figura 13 temos,

$$T_y(x + dx) - T_y(x) = \Delta m a .$$

Notemos que o movimento da corda é na direção y . Substituindo $\Delta m = \lambda dx$ e $a = \partial^2 y / \partial t^2$,

$$\begin{aligned} T_y(x + dx) - T_y(x) &= \lambda dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} , \\ \frac{T_y(x + dx) - T_y(x)}{dx} &= \lambda \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} , \\ \frac{\partial T_y}{\partial x} &= \lambda \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} . \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\partial y}{\partial x} , \\ T_x &= T \cos \theta , \quad T_y = T \sin \theta , \end{aligned}$$

logo,

$$\tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta} = \frac{T_y}{T_x} = \frac{\partial y}{\partial x},$$

$$T_y = T_x \frac{\partial y}{\partial x}.$$

A componente x da tensão compensa a força da gravidade,

$$T_x(x) = \lambda(L - x)g,$$

e a equação de movimento fica,

$$\frac{\partial T_y}{\partial x} = \lambda \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T_x \frac{\partial y}{\partial x} \right) = \lambda \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(L - x)g \frac{\partial y}{\partial x} \right) = \lambda \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

$$-g \frac{\partial y}{\partial x} + (L - x)g \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

ou,

$$(L - x)g \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - g \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Substituindo $y(x, t) = X(x)T(t)$ obtemos,

$$(L - x)gX''T - gX'T = XT'',$$

$$(L - x)g \frac{X''}{X} - g \frac{X'}{X} = \frac{T''}{T} = -\mu^2.$$

Fazendo $v = L - x$,

$$X' = \frac{dX}{dx} = \frac{dX}{dv} \frac{dv}{dx} = -\frac{dX}{dv},$$

$$X'' = \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{d}{dx} \frac{dX}{dv} = -\frac{d^2 X}{dv^2} \frac{dv}{dx} = \frac{d^2 X}{dv^2},$$

e a equação para X fica,

$$(L - x)gX'' - gX' + \mu^2 X = 0,$$

$$vg \frac{d^2 X}{dv^2} + g \frac{dX}{dv} + \mu^2 X = 0,$$

ou,

$$v \frac{d^2 X}{dv^2} + \frac{dX}{dv} + \frac{\mu^2}{g} X = 0.$$

Fazendo agora $v = z^2$, temos,

$$\begin{aligned} 2z \frac{dz}{dv} &= 1, \quad \frac{dz}{dv} = \frac{1}{2z}, \\ \frac{dX}{dv} &= \frac{dX}{dz} \frac{dz}{dv} = \frac{dX}{dz} \frac{1}{2z}, \\ \frac{d^2 X}{dv^2} &= \frac{d}{dv} \frac{dX}{dv} = \frac{d}{dv} \left(\frac{dX}{dz} \frac{1}{2z} \right) = \frac{1}{2z} \frac{d^2 X}{dz^2} \frac{1}{2z} - \frac{dX}{dz} \frac{1}{2z^2} \frac{1}{2z}, \end{aligned}$$

e a equação para X fica,

$$\begin{aligned} v \frac{d^2 X}{dv^2} + \frac{dX}{dv} + \frac{\mu^2}{g} X &= 0, \\ z^2 \left(\frac{1}{2z} \frac{d^2 X}{dz^2} \frac{1}{2z} - \frac{dX}{dz} \frac{1}{2z^2} \frac{1}{2z} \right) + \frac{dX}{dz} \frac{1}{2z} + \frac{\mu^2}{g} X &= 0, \\ \frac{1}{4} \frac{d^2 X}{dz^2} + \frac{1}{4z} \frac{dX}{dz} + \frac{\mu^2}{g} X &= 0, \end{aligned}$$

ou,

$$z^2 \frac{d^2 X}{dz^2} + z \frac{dX}{dz} + \frac{4\mu^2}{g} z^2 X = 0.$$

A equação acima é a equação diferencial de Bessel de ordem 0, com solução,

$$\begin{aligned} X(z) &= A J_0(2\mu z / \sqrt{g}), \\ X(v) &= A J_0(2\mu \sqrt{v/g}), \\ X(x) &= A J_0(2\mu \sqrt{(L-x)/g}). \end{aligned}$$

A equação para T é,

$$T'' + \mu^2 T = 0,$$

com solução,

$$T(t) = B \cos(\mu t) + C \operatorname{sen}(\mu t).$$

A solução geral é então,

$$y(x, t) = \sum_{i=1} J_0(2\mu_i \sqrt{(L-x)/g}) [B_i \cos(\mu_i t) + C_i \text{sen}(\mu_i t)].$$

Vemos que μ_i são as frequências de oscilação do sistema. As condições de contorno são,

$$y(0, t) = 0 = \sum_{i=1} J_0(2\mu_i \sqrt{L/g}) [B_i \cos(\mu_i t) + C_i \text{sen}(\mu_i t)],$$

$$y(x, 0) = f(x) = \sum_{i=1} J_0(2\mu_i \sqrt{(L-x)/g}) B_i,$$

$$\frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = h(x) = \sum_{i=1} J_0(2\mu_i \sqrt{(L-x)/g}) C_i \mu_i.$$

A primeira condição acima determina μ_i como raízes da equação,

$$J_0(2\mu_i \sqrt{L/g}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

As outras equações são expansões de f e g em série de funções de Bessel J_0 . Para f temos,

$$f(x) = \sum_{i=1} J_0(2\mu_i \sqrt{(L-x)/g}) B_i.$$

Fazendo a troca de variáveis $u = 2\sqrt{(L-x)/g}$, temos $x = L - gu^2/4$ e,

$$f(x) = \sum_{i=1} J_0(2\mu_i \sqrt{(L-x)/g}) B_i,$$

$$f(L - gu^2/4) = \sum_{i=1} J_0(\mu_i u) B_i.$$

Multiplicando a equação acima por $u J_0(\mu_j u)$ e integrando em u ,

$$\int_{2\sqrt{L/g}}^0 u J_0(\mu_j u) f(L - gu^2/4) du = \sum_{i=1} B_i \int_{2\sqrt{L/g}}^0 u J_0(\mu_i u) J_0(\mu_j u) du,$$

em que os limites de integração correspondem a $x = 0$ e $x = L$. Definindo $a = 2\sqrt{L/g}$ e invertendo os limites de integração dos dois lados,

$$\begin{aligned} \int_0^a u J_0(\mu_j u) f(L - gu^2/4) du &= \sum_{i=1} B_i \int_0^a u J_0(\mu_i u) J_0(\mu_j u) du, \\ &= B_j \int_0^a u J_0^2(\mu_j u) du, \\ &= B_j \frac{a^2}{2} J_0^2(\mu_j a) = B_j \frac{a^2}{2} J_1^2(\mu_j a). \end{aligned}$$

Portanto,

$$B_j = \frac{2}{a^2 J_1^2(\mu_j a)} \int_0^a u J_0(\mu_j u) f(L - gu^2/4) du.$$

Procedendo analogamente para $h(x)$ temos,

$$C_j = \frac{2}{\mu_j a^2 J_1^2(\mu_j a)} \int_0^a u J_0(\mu_j u) h(L - gu^2/4) du.$$

32. Obtenha a equação das vibrações transversais de uma barra,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \quad 0 < x < L.$$

33-Vimos que a equação das vibrações transversais de uma barra é,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \quad 0 < x < L.$$

Obtenha a solução para as condições de contorno,

$$\begin{aligned} y(0, t) &= 0, \\ \frac{\partial y(0, t)}{\partial x} &= 0, \\ y(x, 0) &= f(x), \\ \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} &= g(x), \end{aligned}$$

com $f(0) = g(0) = 0$.

Escrevemos a solução como $X(x)T(t)$, obtendo,

$$\begin{aligned} XT'' + b^2 X^{(4)}T &= 0, \\ \frac{T''}{T} + b^2 \frac{X^{(4)}}{X} &= 0, \\ \frac{T''}{T} &= -b^2 \frac{X^{(4)}}{X} = -\mu^2. \end{aligned}$$

A equação para T é assim,

$$T'' + \mu^2 T = 0,$$

com solução,

$$T(t) = A \cos \mu t + B \operatorname{sen} \mu t .$$

A equação para X é,

$$X^{(4)} - \frac{\mu^2}{b^2} X = 0 .$$

Definindo $\lambda^4 = \mu^2/b^2$ temos,

$$X(x) = C \operatorname{sen} \lambda x + D \cos \lambda x + E \operatorname{senh} \lambda x + F \cosh \lambda x .$$

Das condições de contorno para $y(0, t)$ e $\partial y(0, t)/\partial x$, temos,

$$X(0) = 0 ,$$

$$X'(0) = 0 .$$

logo,

$$D + F = 0 ,$$

$$\lambda C + \lambda E = 0 .$$

Das equações acima temos,

$$F = -D ,$$

$$E = -C ,$$

Outras condições usuais são,

$$X''(L) = 0 ,$$

$$X'''(L) = 0 ,$$

ou,

$$C(\operatorname{sen} \lambda L + \operatorname{senh} \lambda L) + D(\cos \lambda L + \cosh \lambda L) = 0 ,$$

$$-C(\cos \lambda L + \cosh \lambda L) + D(\operatorname{sen} \lambda L - \operatorname{senh} \lambda L) = 0 .$$

As equações acima são um sistema homogêneo para C e D . Os valores de λ são portanto dados pela condição,

$$(\operatorname{sen} \lambda L + \operatorname{senh} \lambda L)(\operatorname{sen} \lambda L - \operatorname{senh} \lambda L) + (\cos \lambda L + \cosh \lambda L)^2 = 0,$$

ou,

$$f(\lambda L) \equiv 1 + \cos \lambda L \cosh \lambda L = 0.$$

Fazendo o gráfico da função acima obtemos as raízes λ_i (figura 14). As primeiras raízes $\lambda_i L$ são,

$$1,8746, 4,6935, 7,8545, 10,995, 14,136, \dots$$

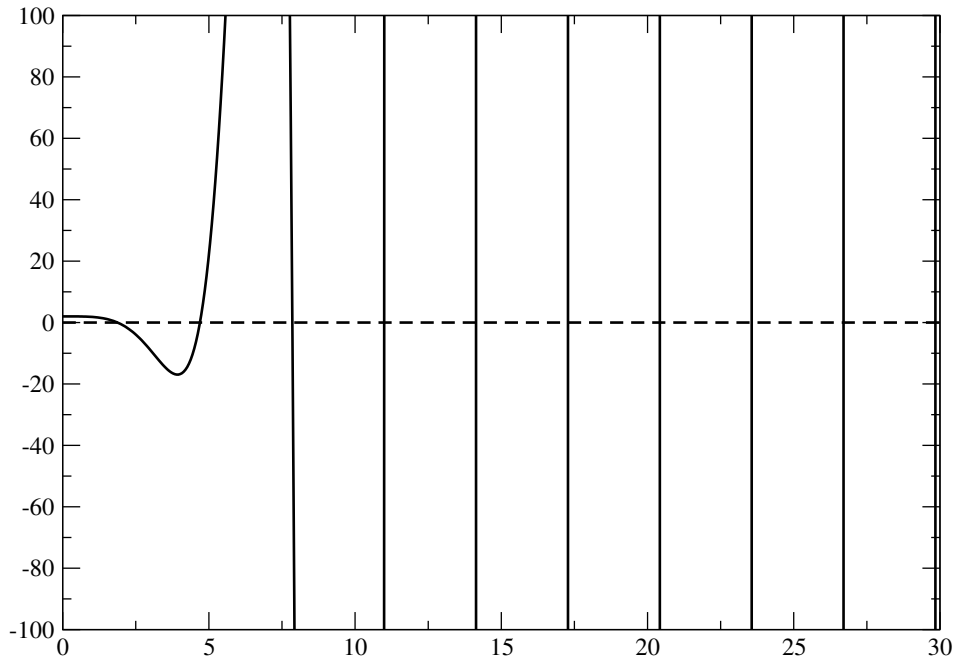


Fig. 14. Gráfico de $f(\lambda)$ em função de λ . Usamos $L = 1$.

As frequências angulares são portanto,

$$\mu_i = 2\pi f_i = b\lambda_i^2,$$

e as frequências lineares são,

$$f_i = \frac{b\lambda_i^2}{2\pi}.$$

Um valor típico de b é $\cong 15 \text{ m}^2/\text{s}$, logo as primeiras frequências são, considerando $L = 1 \text{ m}$,

$$8,36 \text{ Hz}, 52,43 \text{ Hz}, 146,83 \text{ Hz}, 287,72 \text{ Hz}, 475,59 \text{ Hz}, \dots$$

A solução é então, usando o princípio da superposição,

$$y(x, t) = \sum_{i=1} [C_i (\text{sen } \lambda_i x - \text{senh } \lambda_i x) + D_i (\cos \lambda_i x - \cosh \lambda_i x)] \times \\ \times [A_i \cos \mu_i t + B_i \text{sen } \mu_i t].$$

Das condições de contorno para f e g temos,

$$y(x, 0) = f(x), \\ = \sum_{i=1} [C_i (\text{sen } \lambda_i x - \text{senh } \lambda_i x) + D_i (\cos \lambda_i x - \cosh \lambda_i x)] A_i, \\ \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = g(x), \\ = \sum_{i=1} [C_i (\text{sen } \lambda_i x - \text{senh } \lambda_i x) + D_i (\cos \lambda_i x - \cosh \lambda_i x)] B_i \mu_i.$$

Como tratar as expansões acima?

34-Obtenha a solução para a equação das vibrações transversais de uma barra ([7], probl. 2.66),

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \quad 0 < x < L.$$

com as condições de contorno,

$$y(0, t) = y(L, t) = 0, \\ \frac{\partial^2 y(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y(L, t)}{\partial x^2} = 0, \\ y(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = g(x).$$

Escrevemos a solução na forma,

$$y(x, t) = \sum_{i=1} [C_i \text{sen } \lambda_i x + D_i \cos \lambda_i x] [A_i \cos \mu_i t + B_i \text{sen } \mu_i t],$$

com $\lambda_i^4 = \mu_i^2/b^2$. As condições de contorno ficam,

$$\begin{aligned}
y(0, t) = 0 &= \sum_{i=1} D_i [A_i \cos \mu_i t + B_i \text{sen } \mu_i t], \\
y(L, t) = 0 &= \sum_{i=1} [C_i \text{sen } \lambda_i L + D_i \cos \lambda_i L] [A_i \cos \mu_i t + B_i \text{sen } \mu_i t], \\
y(x, 0) = f(x) &= \sum_{i=1} [C_i \text{sen } \lambda_i x + D_i \cos \lambda_i x] A_i, \\
\frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = g(x) &= \sum_{i=1} [C_i \text{sen } \lambda_i x + D_i \cos \lambda_i x] B_i \mu_i, \\
\frac{\partial^2 y(0, t)}{\partial x^2} = 0 &= \sum_{i=1} [-D_i \lambda_i^2] [A_i \cos \mu_i t + B_i \text{sen } \mu_i t], \\
\frac{\partial^2 y(L, t)}{\partial x^2} = 0 &= \sum_{i=1} [-C_i \lambda_i^2 \text{sen } \lambda_i L - D_i \lambda_i^2 \cos \lambda_i L] [A_i \cos \mu_i t + B_i \text{sen } \mu_i t].
\end{aligned}$$

Satisfazemos as equações acima escolhendo,

$$\begin{aligned}
D_i &= 0, \\
\lambda_i L &= i\pi, \quad i = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

As condições para f e g são séries de Fourier no intervalo $0 < x < L$, logo são séries de seno de Fourier de meio intervalo,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} b_i \text{sen } \frac{i\pi x}{L}, \\
b_i &= \frac{2}{L} \int_0^L F(x) \text{sen } \frac{i\pi x}{L} dx.
\end{aligned}$$

Comparando com as equações para f e g ,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{i=1} A_i C_i \text{sen } \lambda_i x = \sum_{i=1} A_i C_i \text{sen } \frac{i\pi x}{L}, \\
g(x) &= \sum_{i=1} B_i C_i \mu_i \text{sen } \lambda_i x = \sum_{i=1} B_i C_i \mu_i \text{sen } \frac{i\pi x}{L},
\end{aligned}$$

temos,

$$\begin{aligned}
A_i C_i &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen } \frac{i\pi x}{L} dx, \\
B_i C_i \mu_i &= \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \text{sen } \frac{i\pi x}{L} dx.
\end{aligned}$$

A solução é portanto,

$$y(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{i=1} \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{L} \cos \frac{i^2 \pi^2 b t}{L^2} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{L} dx \\ + \frac{2}{L} \sum_{i=1} \frac{L^2}{i^2 \pi^2 b} \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{i^2 \pi^2 b t}{L^2} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{L} dx .$$

35-Considere o problema anterior com a solução na forma,

$$y(x, t) = \sum_{i=1} [C_i \operatorname{sen} \lambda_i x + D_i \cos \lambda_i x + E_i \operatorname{senh} \lambda_i x + F_i \operatorname{cosh} \lambda_i x] \times \\ \times [A_i \cos \mu_i t + B_i \operatorname{sen} \mu_i t] ,$$

com $\lambda_i^4 = \mu_i^2/b^2$.

As condições de contorno nos dão,

$$y(0, t) = 0 , \\ = \sum_{i=1} [D_i + F_i][A_i \cos \mu_i t + B_i \operatorname{sen} \mu_i t] , \\ y(L, t) = 0 , \\ = \sum_{i=1} [C_i \operatorname{sen} \lambda_i L + D_i \cos \lambda_i L + E_i \operatorname{senh} \lambda_i L + F_i \operatorname{cosh} \lambda_i L] \times \\ \times [A_i \cos \mu_i t + B_i \operatorname{sen} \mu_i t] , \\ y(x, 0) = f(x) , \\ = \sum_{i=1} [C_i \operatorname{sen} \lambda_i x + D_i \cos \lambda_i x + E_i \operatorname{senh} \lambda_i x + F_i \operatorname{cosh} \lambda_i x] A_i , \\ \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = g(x) , \\ = \sum_{i=1} [C_i \operatorname{sen} \lambda_i x + D_i \cos \lambda_i x + E_i \operatorname{senh} \lambda_i x + F_i \operatorname{cosh} \lambda_i x] B_i \mu_i , \\ \frac{\partial^2 y(0, t)}{\partial x^2} = 0 , \\ = \sum_{i=1} [-D_i \lambda_i^2 + F_i \lambda_i^2][A_i \cos \mu_i t + B_i \operatorname{sen} \mu_i t] , \\ \frac{\partial^2 y(L, t)}{\partial x^2} = 0 , \\ = \sum_{i=1} [-C_i \lambda_i^2 \operatorname{sen} \lambda_i L - D_i \lambda_i^2 \cos \lambda_i L + E_i \lambda_i^2 \operatorname{senh} \lambda_i L + F_i \lambda_i^2 \operatorname{cosh} \lambda_i L] \times \\ \times [A_i \cos \mu_i t + B_i \operatorname{sen} \mu_i t] .$$

Das equações acima temos,

$$D_i = E_i = F_i = 0, \\ \lambda_i L = i\pi.$$

Obtemos portanto a solução do problema anterior.

36-Obtenha a solução para a equação das vibrações transversais de uma barra ([7], problema 3.42),

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \quad 0 < x < L.$$

com as condições de contorno,

$$y(0, t) = y(L, t) = 0, \\ \frac{\partial y(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial y(L, t)}{\partial x} = 0, \\ y(x, 0) = f(x).$$

Escrevemos a solução na forma,

$$y(x, t) = \sum_{i=1} [C_i \operatorname{sen} \lambda_i x + D_i \cos \lambda_i x + E_i \operatorname{senh} \lambda_i x + F_i \operatorname{cosh} \lambda_i x] \times \\ \times [A_i \cos \mu_i t + B_i \operatorname{sen} \mu_i t],$$

com $\lambda_i^4 = \mu_i^2/b^2$.

37-Obtenha a solução para a equação das vibrações transversais de uma barra,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \quad 0 < x < L.$$

com as condições de contorno,

$$y(0, t) = y(L, t) = 0, \\ \frac{\partial^2 y(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y(L, t)}{\partial x^2} = 0, \\ y(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = g(x).$$

Escrevemos a solução na forma,

$$y(x, t) = \sum_{i=1} [C_i \operatorname{sen} \lambda_i x + D_i \cos \lambda_i x + E_i \operatorname{senh} \lambda_i x + F_i \operatorname{cosh} \lambda_i x] \times \\ \times [A_i \cos \mu_i t + B_i \operatorname{sen} \mu_i t],$$

com $\lambda_i^4 = \mu_i^2/b^2$.

38-Obtenha a solução para a equação das vibrações transversais de uma barra,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \quad 0 < x < L.$$

com as condições de contorno ([13], pág. 166),

$$\begin{aligned} y(0, t) = \frac{\partial y(0, t)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^2 y(L, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 y(L, t)}{\partial x^3} &= 0, \\ y(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} &= g(x). \end{aligned}$$

Escrevemos a solução na forma,

$$\begin{aligned} y(x, t) = \sum_{i=1} [C_i \text{sen } \lambda_i x + D_i \cos \lambda_i x + E_i \text{senh } \lambda_i x + F_i \cosh \lambda_i x] \times \\ \times [A_i \cos \mu_i t + B_i \text{sen } \mu_i t], \end{aligned}$$

com $\lambda_i^4 = \mu_i^2/b^2$.

39-Obtenha a solução para a equação das vibrações transversais de uma barra,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \quad 0 < x < L.$$

com as condições de contorno ([13], pág. 166),

$$\begin{aligned} y(0, t) = \frac{\partial^2 y(0, t)}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 y(L, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 y(L, t)}{\partial x^3} &= 0, \\ y(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} &= g(x). \end{aligned}$$

Escrevemos a solução na forma,

$$\begin{aligned} y(x, t) = \sum_{i=1} [C_i \text{sen } \lambda_i x + D_i \cos \lambda_i x + E_i \text{senh } \lambda_i x + F_i \cosh \lambda_i x] \times \\ \times [A_i \cos \mu_i t + B_i \text{sen } \mu_i t], \end{aligned}$$

com $\lambda_i^4 = \mu_i f 32^2 / b^2$.

40-Obtenha a solução para a equação das vibrações transversais de uma barra,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \quad 0 < x < L.$$

com as condições de contorno ([13], pág. 166),

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y(0, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^3 y(0, t)}{\partial x^3} = 0, \\ \frac{\partial^2 y(L, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^3 y(L, t)}{\partial x^3} = 0, \\ y(x, 0) &= f(x), \quad \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = g(x). \end{aligned}$$

Escrevemos a solução na forma,

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \sum_{i=1} [C_i \operatorname{sen} \lambda_i x + D_i \cos \lambda_i x + E_i \operatorname{senh} \lambda_i x + F_i \cosh \lambda_i x] \times \\ &\quad \times [A_i \cos \mu_i t + B_i \operatorname{sen} \mu_i t], \end{aligned}$$

com $\lambda_i^4 = \mu_i^2 / b^2$.

41-Obtenha a solução para a equação das vibrações transversais de uma barra (Spiegel [7], probl. 2.65),

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \quad 0 < x < L.$$

com as condições de contorno,

$$\begin{aligned} y(0, t) &= y(L, t) = 0, \\ \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial^2 y(0, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 y(L, t)}{\partial x^2} = 0, \\ y(x, 0) &= f(x), \quad |y(x, t)| < M. \end{aligned}$$

42-Considere o problema anterior com $y_t(x, 0) = g(x)$ (Spiegel [7], probl. 2.66).

43-Uma barra semi-infinita ($x > 0$) fixa em $x = 0$ é solta do repouso com posição inicial $f(x)$. Calcule $y(x, t)$ (Spiegel [7], probl. 5.52).

44-Resolva o problema de valores de contorno (Spiegel [7], probl. 3.42),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$
$$u(0, t) = u_x(0, t) = u(L, t) = u_x(L, t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad |u(x, t)| < M.$$

References

- [1] A. Sommerfeld, *Partial Differential Equations in Physics*, Academic Press, New York and London (1964s).
- [2] R. K. Wangsness, *Electromagnetic Fields*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York (1986).
- [3] Jackson, J.D., *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, New York (1962).
- [4] Stratton, J. A., *Electromagnetic Theory*, 1st ed., McGraw-Hill, New York (1941).
- [5] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integral, Series, and Products*, 5th ed., Academic Press, San Diego (1994).
- [6] M. R. Spiegel, S. Lipschutz, J. Liu, *Schaum's Outline of Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York (2009).
- [7] M. R. Spiegel, *Schaum's Outline of Fourier Analysis with Applications to Boundary Value Problems*, McGraw-Hill, New York (1974).
- [8] M. R. Spiegel, *Schaum's Outline of Advanced Mathematics for Engineers and Scientists*, McGraw-Hill, New York (1971).
- [9] Arfken, G. B., Weber, H. J., *Mathematical Methods for Physicists*, 6th. ed., Elsevier Academic Press, Amsterdam (2005).
- [10] Morse, P. M., Feshbach, H., *Methods of Theoretical Physics*, vols. I e II, McGraw-Hill, New York (1953).
- [11] Mathews, J., Walker, R. L., *Mathematical Methods of Physics*, 2nd. ed., Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Redwood City (1969).
- [12] Churchill, R. V., *Fourier Series and Boundary Value Problems*, McGraw-Hill, New York (1941).
- [13] A. N. Tjonov, A. A. Samarski, *Ecuaciones de la Fisica Matematica*, Editorial Mir, Moscu (1972).
- [14] S. Timoshenko, *Vibration Problems in Engineering*, D. van Nostrand, New York (1937).