

17 - Superfluidez e supercondutividade

1 Temperatura de transição da supercondução

À medida que a temperatura é reduzida, a resistência elétrica de muitos metais diminui até um valor residual ser atingido. Reduções adicionais de temperatura, mesmo na faixa de milgraus, geralmente não mostram mais variações de resistência. Cerca de metade dos metais, contudo, mostram um comportamento extraordinário conhecido como *supercondutividade*. Após o valor residual da resistência ser atingido e a temperatura ser reduzida ainda mais, a resistência subitamente cai a zero. Supercondutividade tem sido descoberta em 26 elementos metálicos e em mais de mil ligas e compostos. A transição da resistência normal para resistência zero, no caso de metais puros e mesmo cristais, ocorre em um intervalo de temperatura muito pequeno, de cerca de 10 mK ou menos. Portanto a *temperatura de transição* T_c pode ser medida com precisão. Se a curva resistência-temperatura mostra um decréscimo mais gradual do valor normal para zero, a temperatura de transição é tomada como o valor do ponto médio da curva.

Valores de T_c para os elementos supercondutores são mostrados na tabela 1. É um fato interessante que, até o presente, não tem sido observado supercondutividade nos metais alcalinos (grupo 1 da tabela periódica: lítio, sódio, potássio, rubídio, célio e frâncio), metais alcalinos terrosos (grupo 2 da tabela periódica: berílio, magnésio, cálcio, estrôncio, bário e rádio), ou metais nobres (cobre, prata, platina e ouro). A supercondutividade é restrita a metais simples e metais de transição. Não há supercondutores com apenas um elétron de valência, ou com seis elétrons de valência.

Quando ligas de elementos supercondutores são formadas, os valores de T_c geralmente ficam entre os valores dos componentes separados, como o caso de Mo e Nb no lado esquerdo da figura 1. O inverso, contudo, também pode acontecer, como no lado direito da figura 1, onde uma liga de 70% de Mo e 30% de Re possui $T_c = 11$ K, mas nenhum constituinte possui T_c acima de 2 K. O maior valor de T_c tem sido obtido formando compostos de Nb com outros metais. Por exemplo, 20,1 K para um composto de Nb, Al e Ge; 18,07 K para Nb₃Sn; 18 K para Nb₃Al; 17,91 K para NbSn. Alguns dos supercondutores mais peculiares são compostos nos quais *nenhum* dos elementos é supercondutor, como Bi₃Sr (5,62 K), Ge₂4Sc (1,30 K), PtSb (2,1 K), RhTe₂ (1,51 K), e muitos outros.

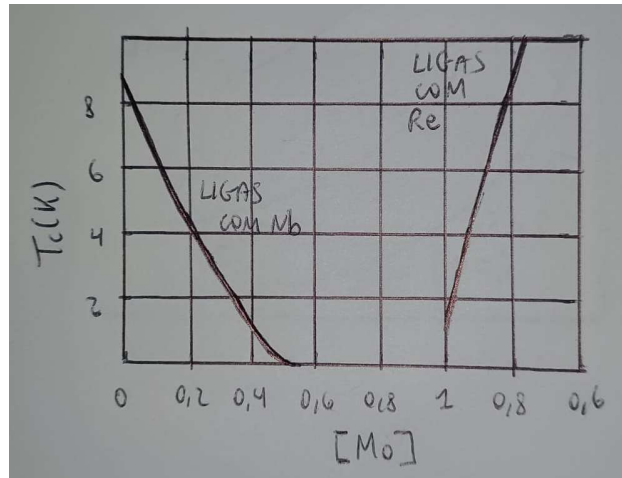


Fig. 1. Temperaturas de transição para supercondutividade de ligas de Nb e Mo e Re e Mo (B. T. Matthias, 1963).

Uma das primeiras tentativas de aplicar a teoria quântica moderna ao problema da supercondutividade foi feita em 1950 por H. Fröhlich, que considerou pela primeira vez a interação dos elétrons livres com a rede, em vez de apenas os elétrons. Embora uma teoria completa não pudesse ser formulada na época, um resultado obtido foi de grande interesse. As temperaturas de transição dos vários isótopos de um elemento variam inversamente com a raiz quadrada da massa isotópica M ,

$$T_c \sim M^{-1/2}, \quad (1)$$

com $\alpha = -1/2$. As medidas feitas nos anos 1950 para Sn, Hg, Tl e Pb concordam bastante bem com a equação de Fröhlich, mas medidas recentes para Mo, Re e Os dão valores de α muito menores do que $-1/2$, e Zr e Ru não mostram efeito isotópico algum. A tabela 2 mostra alguns valores de α obtidos experimentalmente.

Elemento	Z	T_c (K)	Elemento	Z	T_c (K)
Alumínio	13	1,18	Lantânio	57	4,87/6,00
Titânio	22	0,39	Háfnio	72	0,17
Vanádio	23	5,30	Tântalo	73	4,48
Zinco	30	0,88	Tungstênio	74	0,012
Gálio	31	1,09	Rênio	75	1,70
Zircônio	40	0,49	Ósmio	76	0,67
Nióbio	41	9,20	Iródio	77	0,14
Molibdênio	42	0,95	Mercúrio	80	3,95/4,15
Tecnécio	43	6,22	Tálio	81	2,39
Rutênio	44	0,47	Chumbo	82	7,19
Cádmio	48	0,56	Tório	90	1,37
Índio	49	3,40	Protactínio	91	1,4
Estanho	50	3,72	Urânio	92	1,8

Tabela 1. Elementos supercondutores com número atômico indicado e temperatura de transição.

A temperatura de transição para supercondutividade depende também da pressão. Na maioria dos casos, um aumento da pressão causa uma diminuição de T_c . Mas com Tl e U o inverso é verdadeiro, como mostrado na tabela 2. Também podemos ver que há um efeito grande da pressão quando o expoente é $1/2$, mas em quatro casos com α muito menor do que $1/2$ (Mo, Ru, Re e Os) o efeito da pressão é pequeno ou nulo. Não se sabe se essa correlação é real ou não.

A temperatura de transição para supercondutividade de um filme fino é diferente daquela para o metal puro. Por exemplo, T_c para um filme de Pb diminui se a espessura do filme diminui. Os efeitos da pressão e da espessura do filme são tão importantes, que algumas substâncias não supercondutoras tornam-se supercondutoras quando formam filmes (Be, 7 K; Ge, 8,4 K; Bi, 6 K), e outros quando a pressão aumenta para milhares de atmosferas (Se, 6,8 K; Te, 3,3K; Bi, 6 K).

Além de deformações e impurezas, há mais uma condição que afeta a temperatura de transição para supercondutividade, a carga eletrostática do metal. Esse efeito não tem sido estudado extensivamente, mas tem sido observado ser reversível. Se a adição de carga aumenta a temperatura por ΔT_c , então a remoção dessa carga leva T_c de volta ao seu valor original.

Elemento	Efeito isotópico α	$\partial T_c / \partial p$ $\mu\text{K}/\text{atm}$	Elemento	Efeito isotópico α	$\partial T_c / \partial p$ $\mu\text{K}/\text{atm}$
13 Al		-29	73 Ta		-2,6
30 Zn	-0,5	-16	75 Re	-0,38	0
31 Ga		-18	76 Os	-0,21	-1,8
40 Zr	0	+15	80 Hg(α)	-0,5	-37
42 Mo	-0,34	-1	81 Tl	-0,5	+23
44 Ru	0	-3	82 Pb	-0,5	-38
48 Cd	-0,40	-20	90 Th		-17
49 In		-43	92 U	+2	+130
50 Sn	-0,5	-46			

Tabela 2. Efeito isotópico e efeito da pressão em elementos supercondutores.

2 Propriedades magnéticas dos supercondutores do tipo I

Dos 26 elementos mostrados na tabela 1, que se tornam supercondutores sem estar sujeitos a altas pressões ou depositados como um filme fino, os 9 metais simples à direita na tabela periódica (Al, Zn, Ga, Cd, In, Sn, Hg, Tl, Pb), são de particular interesse. Porque esses metais possuem baixos pontos de fusão e são fisicamente macios, são chamados *supercondutores macios*. Supomos que um supercondutor macio é feito na forma de um cilindro com comprimento dez vezes maior do que o seu diâmetro, e colocado longitudinalmente em um campo magnético, e mantido em uma temperatura constante menor do que T_c . Se o campo é aumentado desde zero, o metal permanecerá supercondutor até que um *campo crítico* H_c é alcançado, no qual o material torna-se normal. A transição do estado supercondutor para o estado normal cobre uma estreita faixa de H , e podemos dizer que ocorre *em* H_c . Além disso, se H agora é reduzido, a transição para supercondutividade ocorre no mesmo valor H_c .

A magnitude do campo crítico necessário para destruir a supercondutividade depende apenas da temperatura. Assim, H_c é uma função apenas de T , como mostrado esquematicamente na figura 2. Notemos que a curva $H_c(T)$ divide o plano HT em duas regiões, supercondutora e normal, como uma curva de transição de fase no diagrama pT . Todas essas curvas possuem as seguintes propriedades: (1) a inclinação é sempre negativa; (2) a inclinação no ponto $T = T_c$ ($H_c = 0$) é *finita*; (3) a inclinação em $T = 0$, por extrapolação, é zero. A relação entre o campo crítico e a temperatura

para supercondutores macios é aproximadamente parabólica. Assim, em uma primeira aproximação,

$$H_c = H_0 \left(1 - \frac{T^2}{T_c^2} \right), \quad (2)$$

em que H_0 é o campo crítico em $T = 0$. Apenas se é necessário uma grande precisão temos que considerar outra forma para a curva $H_c(T)$. Valores de T_c , H_0 e dH_c/dT em $T = T_c$ são dados na tabela 3, juntamente com outras propriedades térmicas de supercondutores macios.

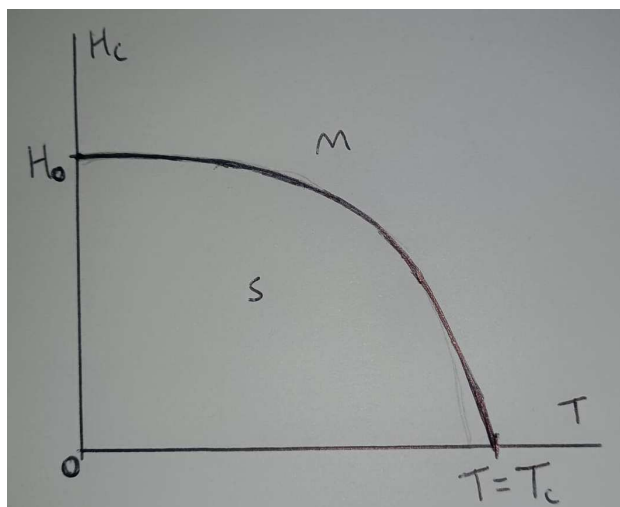


Fig. 2. Campo crítico versus temperatura, esquematicamente.

Uma relação simples entre H_0 e T_c foi descoberta por H. W. Lewis em 1956 não apenas para supercondutores macios, mas também para alguns compostos que, como os supercondutores macios, não possuem uma camada d ou f parcialmente preenchida, dada por,

$$H_0 \sim T_c^{1,3}. \quad (3)$$

Os restantes 17 metais de transição supercondutores, se suficientemente puros e livres de deformação, e preferencialmente na forma de cristais, também mostram propriedades similares àquelas dos supercondutores macios, embora seus valores de H_0 e T_c não satisfazem a relação simples acima. Há outras propriedades que descreveremos, como comprimento de coerência e profundidade de penetração, que esses dois conjuntos de supercondutores possuem em comum, de modo que nos referimos a todos esses metais como *supercondutores do tipo I*. Propriedades magnéticas e térmicas dos metais de transição supercondutores são dadas na tabela 4.

Formando ligas de supercondutores do tipo I formando compostos, depositando em filmes finos, introduzindo deformações ou impurezas, supercondutores com propriedades completamente diferentes podem ser fabricados. Conhecidos como *supercondutores do tipo II*, possuem grande importância prática.

Metal	T_c (K)	H_0 (A/m)	$(dH_c/dT)_{T=T_c}$ (A/m.K)	Θ (K)	γ' (mJ/mol.K ²)	v (cm ³ /mol)
13 Al	1,175	8355,6	$-1,25 \times 10^4$	428	1,35	9,93
30 Zn	0,88	4217,6	-9628,9	310	0,65	9,20
31 Ga	1,09	4058,5	-7400,7	320	0,60	11,8
48 Cd	0,56	2387,3	-6843,7	209	0,69	13,0
49 In	3,41	$2,25 \times 10^4$	$-1,24 \times 10^4$	108	1,66	15,4
50 Sn	3,72	$2,43 \times 10^4$	$-1,17 \times 10^4$	199	1,78	16,1
80 Hg	4,15(α)	$3,27 \times 10^4$				
	3,95(β)	$2,70 \times 10^4$	$-1,54 \times 10^4$	72	1,81	13,8
81 Tl	2,39	$1,36 \times 10^4$	-10^4	79	1,5	17,3
82 Pb	7,19	$6,39 \times 10^4$	$-1,80 \times 10^4$	105	3,0	18,3

Tabela 3. Propriedades dos supercondutores macios.

A resistência elétrica zero de supercondutores do tipo I foi descoberta por Kamerlingh-Onnes em 1911. Aplicando as equações eletromagnéticas de Maxwell a um material de condutividade infinita, obtemos que um metal supercondutor, se colocado em um campo magnético fraco a temperatura ambiente, e então esfriado abaixo de T_c *enquanto ainda no campo*, mantém seu fluxo magnético enquanto mantido nessa temperatura baixa. O argumento baseado na teoria eletromagnética clássica era tão convincente que a conclusão não foi verificada experimentalmente por vinte anos. Em 1931, Meissner esfriou um supercondutor em um campo magnético fraco a uma temperatura abaixo de T_c e descobriu que, no momento em que o metal torna-se supercondutor, todas as linhas de força magnéticas são excluídas e a *indução magnética B se anula*. Esse resultado é agora conhecido como *efeito Meissner*, e a propriedade $B = 0$ é considerada tão fundamental como a propriedade $R' = 0$. De fato, o método mais comum de determinar se um material é supercondutor e o valor de T_c , usa a variação da auto-indutância de um solenóide quando a amostra é colocada dentro da bobina. O solenóide é feito em parte de um circuito ressonante paralelo que controla a frequência de um oscilador, e variações na frequência correspondendo a variações na indutância criam uma perturbação em um circuito ponte, que causa um sinal em um detector. O detector amplifica esse sinal, e o resultado é obtido como função da temperatura para mostrar a transição supercondutora da amostra.

Metal	T_c (K)	H_0 (A/m)	$(dH_c/dT)_{T=T_c}$ (A/m.K)	Θ (K)	γ' (mJ/mol.K ²)	v (cm ³ /mol)
22 Ti	0,39	4456,3	$-2,39 \times 10^4$	420	3,5	10,6
23 V	5,30	$1,04 \times 10^5$	$-3,84 \times 10^4$	380	9,8	8,39
40 Zr	0,49	3740,1	$-1,35 \times 10^4$	291	2,8	14,1
41 Nb	9,20	$1,58 \times 10^5$	$-3,6 \times 10^4$	275	7,8	10,8
42 Mo	0,95	7719	-	450	2,0	9,4
43 Tc	8,22	-	$-2,79 \times 10^4$	-	-	8,6
44 Ru	0,47	5252,1	$-1,56 \times 10^4$	600	3,3	8,4
57 La	4,87 (α)	$6,28 \times 10^4$	-	152	9,4	
	6,00 (β)	$8,71 \times 10^4$	-	140	11,5	22,4
72 Hf	0,165	-	-	252	2,16	13,5
73 Ta	4,48	$6,6 \times 10^4$	$-2,66 \times 10^4$	240	5,9	10,9
74 W	0,012	85,15	-	400	1,21	9,54
75 Re	1,70	$1,6 \times 10^4$	$-1,87 \times 10^4$	430	2,3	9,07
76 Os	0,67	6366,2	$-1,46 \times 10^4$	500	2,4	8,45
77 Ir	0,14	1512	-	420	3,1	8,54
90 Th	1,37	$1,29 \times 10^4$	-	170	4,7	19,8
91 Pa	1,40	-	-	-	-	15,0
92 U(γ)	1,80	$\sim 1,6 \times 10^5$	-	182	10,3	12,5

Tabela 4. Propriedades dos metais de transição supercondutores.

Supomos que um supercondutor do tipo I é feito na forma de um cilindro longo e colocado longitudinalmente em um campo magnético. O comportamento da indução magnética B e da magnetização M , à medida que o campo aumenta isotermicamente, como mostrado na figura 3. O campo crítico H_c apropriado à temperatura particular escolhida é mostrado. Quando o metal está no estado supercondutor, $B = 0$, e como,

$$B = \mu_0(H + M),$$

temos,

$$M = -H. \quad (4)$$

Acima do campo crítico, contudo,

$$B = H, \quad M = 0.$$

O fato de termos $B = 0$ ou $M = -H$ significa que um supercondutor é um *diamagnético perfeito*.

A transição de supercondutividade para condutividade normal a temperatura constante T e campo crítico constante H_c , sob as condições ideais descritas, é uma *transição de fase*. Como os experimentos mostram um calor latente, a transição é de primeira ordem.

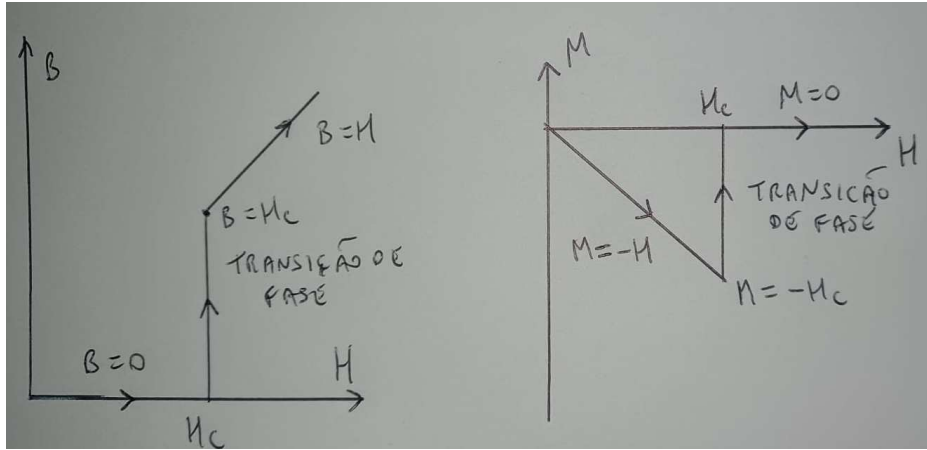


Fig. 3. Comportamento da indução magnética B e da magnetização M de um supercondutor, quando o campo aumenta isotermicamente.

Definindo a função de Gibbs magnética,

$$G' = U - TS - \mu_0 H m ,$$

obtemos,

$$dG' = dU - TdS - SdT - \mu_0 H dm - \mu_0 m dH .$$

Substituindo $dU = TdS + \mu_0 H dm$,

$$\begin{aligned} dG' &= dU - TdS - SdT - \mu_0 H dm - \mu_0 m dH , \\ &= -SdT - \mu_0 m dH , \end{aligned}$$

portanto $G' = G'(T, m)$. A constante T e H , $dG' = 0$ e,

$$G'^s = G'^n ,$$

em que os índices s e n significam fase supercondutora e fase normal, respectivamente. Na temperatura $T + dT$ e no campo $H_c + dH_c$,

$$G'^s + dG'^s = G'^n + dG'^n ,$$

ou,

$$dG'^s = dG'^n .$$

Portanto,

$$-S^s dT - \mu_0 m^s dH_c = -S^n dT - \mu_0 m^n dH_c ,$$

e,

$$-\frac{dH_c}{dT} = \frac{S^n - S^s}{\mu_0 m^n - \mu_0 m^s} .$$

Como,

$$M^n - M^s = 0 + H_c ,$$

obtemos,

$$-\frac{dH_c}{dT} = \frac{S^n - S^s}{\mu_0 V H_c} . \quad (5)$$

A terceira lei da termodinâmica requer que a diferença de entropia $S^n - S^s$ se anule no zero absoluto. Portanto a inclinação dH_c/dT deve ser zero em $T = 0$.

Como $S^n - S^s = L/T$, em que L é o calor latente,

$$L = -\mu_0 V T H_c \frac{dH_c}{dT} . \quad (6)$$

A obtenção desse resultado é equivalente à obtenção da equação de Clapeyron. O valor de dH_c/dT pode ser obtido da curva $H_c T$, e assim L pode ser calculado. Valores de L calculados dessa forma concordam muito bem com valores obtidos calorimetricamente. É interessante notar que L se anula nos dois extremos de temperatura: em $T = 0$, onde $dH_c/dT = 0$, e em $T = T_c$, onde $H_c = 0$.

Como a transição de fase em campo zero ocorre sem calor latente, é portanto uma transição de fase ordem superior, um dos três tipos vistos no capítulo 10. Medidas da capacidade térmica, que veremos em seguida, mostram que a transição é de segunda ordem.

3 Capacidades térmicas dos supercondutores do tipo I

O equipamento para medir a capacidade térmica de uma substância supercondutora difere daquele para uma substância ordinária, fornecendo um

campo magnético para destruir a supercondutividade em temperaturas abaixo de T_c . Em geral, a capacidade térmica é medida na ausência de um campo, a temperaturas acima e abaixo de T_c , para mostrar a transição em T_c , assim como a dependência com a temperatura abaixo de T_c . Quando um campo maior do que H_0 é aplicado, e a dependência completa com a temperatura da capacidade térmica normal é medida. A temperatura é medida usualmente com um termômetro de resistência de carbono ou germânio, colocado na amostra, e calor é fornecido por uma corrente momentânea em uma bobina enrolada em torno da amostra. São feitas curvas da resistência em função do tempo.

Como é usual em baixas temperaturas, experimentalmente é obtido que $c_p = c_V = c$, e como vimos no capítulo 9, c em mJ/mol.K^2 , é dado por,

$$c = \left(\frac{125}{\Theta} \right)^3 + \gamma' T.$$

Experimentalmente, curvas semelhantes são obtidas para metais de transição de grande pureza e livres de deformações. Valores da constante eletrônica γ' e da temperatura de Debye Θ são dados nas tabelas 3 e 4.

O comportamento da capacidade térmica na fase supercondutora é completamente diferente da fase normal. Dos resultados experimentais obtemos $c^s - c^n$, que pode ser usado em equações termodinâmicas simples, como segue.

Vimos que, com a ajuda da função de Gibbs magnética, que em uma transição reversível da supercondutividade para o estado normal a temperatura T e campo $H = H_c$, uma equação semelhante à equação de Clapeyron é obtida. Assim, de (5),

$$S^n - S^s = -\mu_0 V H_c \frac{dH_c}{dT}.$$

Diferenciando a equação acima em relação a T e multiplicando por T ,

$$T \frac{dS^n}{dT} - T \frac{dS^s}{dT} = -\mu_0 V T \frac{d}{dT} \left(H_c \frac{dH_c}{dT} \right).$$

Os termos no lado esquerdo são capacidades térmicas. Dividindo pelo número de moles n ,

$$c^s - c^n = \mu_0 v T \frac{d}{dT} \left(H_c \frac{dH_c}{dT} \right). \quad (7)$$

Essa equação é muito importante, mas deve ser usada com cuidado. Se medidas calorimétricas são particularmente difíceis, como são com mercúrio, é necessário usar a equação acima juntamente com medidas magnéticas (H_c

omo função de T) para calcularmos γ' . Se o material é bastante puro e livre de deformações, a transição de fase de supercondutividade para condutividade normal pode ocorrer reversivelmente, e a equação pode ser usada com segurança. É difícil, contudo, obter alguns dos supercondutores duros puros e livres de deformações. Quando esse é o caso e os valores medidos de H_c são introduzidos na equação acima, os dados calorimétricos obtidos podem apresentar um erro grande.

A equação (7) pode ser usada com confiança para obtermos propriedades magnéticas de supercondutores a partir dos dados calorimétricos. Fazendo a derivada indicada,

$$c^s - c^n = \mu_0 v T \left(\frac{dH_c}{dT} \right)^2 + \mu_0 v T H_c \frac{d^2 H_c}{dT^2}.$$

Em $T = T_c$, $H_c = 0$ e o segundo membro à direita é zero. Portanto,

$$\left. \frac{dH_c}{dT} \right|_{T=T_c} = \sqrt{\frac{(c^s - c^n)_{T=T_c}}{\mu_0 v T_c}}. \quad (8)$$

Essa equação é a *equação de Rutgers*, e nos dá a inclinação da curva $H_c(T)$ na temperatura de transição T_c , em função das medidas calorimétricas.

Integrando (7) de $T = 0$ a $T = T_c$,

$$\int_0^{T_c} (c^s - c^n) dT = \mu_0 v \int_0^{T_c} T \frac{d}{dT} \left(H_c \frac{dH_c}{dT} \right) dT.$$

O lado direito pode ser integrado por partes, o que nos dá,

$$\int_0^{T_c} (c^s - c^n) dT = \mu_0 v T H_c \frac{dH_c}{dT} \Big|_0^{T_c} - \mu_0 v \int_0^{T_c} H_c \frac{dH_c}{dT} dT.$$

O primeiro termo no lado direito se anula em $T = 0$ e $T = T_c$, e fazendo a segunda integral,

$$\int_0^{T_c} (c^s - c^n) dT = \mu_0 v \frac{H_0^2}{2}.$$

Temos então uma expressão para H_0 ,

$$H_0 = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 v} \int_0^{T_c} (c^s - c^n) dT} \quad (9)$$

Com estanho e vanádio os valores de H_0 , e portanto a curva inteira $H_c(T)$, calculada dos dados calorimétricos, concorda bastante bem com medidas puramente magnéticas.

Estudos de difração de raios X da rede cristalina de um metal, antes e depois da transição supercondutora, não indicam nenhuma variação em qualquer propriedade da rede. Supomos então que um metal supercondutor possui a mesma temperatura de Debye Θ da fase normal. Subtraindo a capacidade térmica da rede, $(125/\Theta)^3 T^3$, da capacidade térmica supercondutora, portanto, podemos obter uma capacidade térmica associada com os elétrons supercondutores, c_{el}^s . Temos,

$$c_{el}^s = c^s - \left(\frac{125}{\Theta}\right)^3 T^3. \quad (10)$$

Experimentalmente, a contribuição eletrônica para a capacidade térmica supercondutora obedece aproximadamente a equação,

$$\frac{c_{el}^s}{\gamma T_c} = a e^{-bT_c/T}. \quad (11)$$

Esse comportamento tem sido observado em muitos supercondutores do tipo I, e possui um importante significado teórico em termos de um *intervalo de energia*, como veremos abaixo.

4 Intervalo de energia

5 Supercondutores do tipo II

6 Fluxons e Junção de Josephson

Fluxons

Consideremos um anel supercondutor de área A com uma corrente colocado em um campo magnético externo. O fluxo magnético resultante através do anel será do campo magnético externo e do campo magnético produzido pela corrente supercondutora no anel. Uma análise quântica mostra que o fluxo magnético resultante através do anel é quantizado,

$$\Phi = n\Phi_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (12)$$

com,

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2,0678 \times 10^{-15} T.m^2, \quad (13)$$

que é a menor unidade de fluxo, chamada de fluxon.

Junção de Josephson

Uma junção de Josephson consiste de dois supercondutores separados por uma camada de material isolante de espessura de poucos nanômetros. Pares de Cooper podem tunelar através do material isolante produzindo uma corrente. Mesmo se nenhuma voltagem é aplicada através da junção entre dois supercondutores diferentes, uma corrente resulta devido à diferença de fase entre as funções de onda dos pares de Cooper nos dois supercondutores, um fenômeno conhecido como *efeito Josephson dc*. De forma um pouco surpreendente, quando uma voltagem dc V é aplicada através da junção uma corrente ac surge com frequência,

$$f = \frac{2eV}{h}, \quad (14)$$

que é chamada de *efeito Josephson ac*. Como frequências e voltagens podem ser medidas de forma bastante precisa, o efeito Josephson ac fornece um meio de medir a razão e/h com bastante precisão.

7 Problemas

1. Sendo os calores específicos nas fases normal e supercondutora dados por,

$$\begin{aligned} c^n &= aT + bT^3, \\ c^s &= cT, \end{aligned}$$

obtenha expressões para T_c e H_0 .

Temos,

$$\begin{aligned} \int_0^{T_c} (c^s - c^n) dT &= \int_0^{T_c} [(c - a)T - bT^3] dT, \\ &= \left[(c - a) \frac{T^2}{2} - b \frac{T^4}{4} \right]_0^{T_c}, \\ &= (c - a) \frac{T_c^2}{2} - b \frac{T_c^4}{4}. \end{aligned}$$

Substituindo na expressão para H_0 ,

$$\begin{aligned}
H_0 &= \sqrt{\frac{2}{\mu_0 v} \int_0^{T_c} (c^s - c^n) dT}, \\
&= \sqrt{\frac{2}{\mu_0 v} \left[(c - a) \frac{T_c^2}{2} - b \frac{T_c^4}{4} \right]}.
\end{aligned}$$

Precisamos de outra equação. Usando a equação de Rutgers e definindo $dH_c(T_c)/dT = -\alpha$, com α positivo,

$$\begin{aligned}
\left. \frac{dH_c}{dT} \right|_{T=T_c} &= \sqrt{\frac{(c^s - c^n)_{T=T_c}}{\mu_0 v T_c}}, \\
\alpha^2 &= \frac{(c - a)T_c - bT_c^3}{\mu_0 v T_c}.
\end{aligned}$$

Obtemos T_c da equação acima,

$$T_c = \sqrt{\frac{c - a - \alpha^2 \mu_0 v}{b}}.$$

Portanto, o campo crítico em $T = 0$ é,

$$\begin{aligned}
H_0 &= \sqrt{\frac{2}{\mu_0 v} \left[(c - a) \frac{T_c^2}{2} - b \frac{T_c^4}{4} \right]}, \\
&= \sqrt{\frac{(c - a)^2 - \alpha^4 \mu_0^2 v^2}{2\mu_0 v b}}.
\end{aligned}$$

Obtivemos assim H_0 e T_c em função dos calores específicos e da inclinação da curva $H_c(T)$ em $T = T_c$. Notemos que devemos ter a condição,

$$c - a > \alpha^2 \mu_0 v.$$

2. Para Hg (mercúrio) a temperatura crítica é $T_c = 4,15$ K. O campo magnético crítico em $T = 0$ é $B_0 = 0,041$ T. Calcule o campo em que cessa a supercondutividade em $T = 2,2$ K.

Podemos escrever,

$$B = B_0 \left(1 - \frac{T^2}{T_c^2} \right).$$

Substituindo os valores do enunciado obtemos $B = 0,029 T$.

3. Um fio de Nb (nióbio) com raio 3 mm está na temperatura 4,5 K. Qual é a máxima corrente que o fio pode suportar e ainda permanecer supercondutor? A temperatura crítica é 9,26 K, e $B_0 = 0,199 T$.

Calculando o campo B na superfície do fio que destrói a supercondutividade,

$$B = B_0 \left(1 - \frac{T^2}{T_c^2} \right) = 0,152 T.$$

A corrente i que produz esse campo magnético na superfície do fio é obtida da lei de Ampère,

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r},$$

$$i = \frac{B 2\pi r}{\mu_0} = 2280,1 A.$$

4. Calcule o intervalo de energia para Sn (estanho), cuja temperatura crítica é 3,72 K ($1,13 \times 10^{-3}$ eV; valor experimental: $1,15 \times 10^{-3}$ eV, 2%).

5. O intervalo de energia medido para In (índio) em $T = 0$ K é $1,05 \times 10^{-3}$ eV. Calcule o comprimento de onda máximo de um fóton que dissociará um par de Cooper em In ($1,18 \times 10^7 \text{ \AA}$).

6. A teoria BCS prevê um *efeito isotópico*, em que a temperatura crítica é proporcional a $M^{-1/2}$. As temperaturas críticas de vários isótopos de Hg (mercúrio) são,

Isótopo	¹⁹⁹ Hg	²⁰⁰ Hg	²⁰⁴ Hg
T_c (K)	4,161	4,153	4,126

A partir desses dados calcule α na expressão $T_c \sim M^{-\alpha}$, e compare α com o valor 1/2 previsto pela teoria BCS (0,36).

7. O campo magnético da terra de $5,8 \times 10^{-5}$ T penetra uma anel de raio 2 mm. Quantos fluxons são contidos dentro do anel? ($3,5 \times 10^5$).

8. Um SQUID (“Superconducting Quantum Interference Device”) pode medir um fluxo magnético tão pequeno quanto 1/10000 de um fluxon. Se o SQUID é composto de um anel de 2 mm, calcule a menor variação do campo magnético que pode ser medida ($1,65 \times 10^{-14}$ T).

9. Calcule a frequência da corrente alternada produzida quando uma ddp contínua de 1 μ V é aplicada através da junção (483,6 MHz).

10. Para Pb (chumbo), a supercondutividade começa em $T_c = 7,19$ K, em campo magnético zero. Quando um campo magnético $B_0 = 0,08$ T é aplicado,

a supercondutividade não ocorre em qualquer temperatura. Calcule o campo magnético que destrói a supercondutividade em $T = 2$ K (0,074 T).

11. Para Sn (estanho), a supercondutividade começa em $T_c = 3,72$ K, em campo magnético zero. Quando um campo magnético $B_0 = 0,031$ T é aplicado, a supercondutividade não ocorre em qualquer temperatura. Calcule a temperatura em que cessa a supercondutividade quando um campo magnético de 0,0081 T é aplicado (3,2 K).

12. O intervalo de energia medido para In (índio) em $T = 0$ K é $1,05 \times 10^{-3}$ eV. Use a expressão do intervalo de energia da teoria BCS para calcular a temperatura crítica do In, e compare com o valor experimental 3,408 K (3,45 K; 1% de diferença).

13. Para um certo material, um fóton de comprimento de onda máximo $4,55 \times 10^6$ Å é necessário para dissociar um par de Cooper. Calcule o intervalo de energia do material ($2,73 \times 10^{-3}$ eV, correspondente ao Pb, chumbo).

14. Verifique que o valor numérico de um fluxon é $\Phi_0 = 2,0678 \times 10^{-15}$ T.m².

15. Uma corrente ac de frequência 2000 MHz é observada através de uma junção de Josephson. Calcule a voltagem aplicada (4,136 μ V).

References

- [1] M. W. Zemansky, *Heat and Thermodynamics*, 5th ed., McGraw-Hill Kogakusha Ltd., Tokyo (1968).
- [2] F. Reif, *Fundamentals of statistical and thermal physics*, McGraw-Hill, Singapore (1965).
- [3] T. L. Hill, *Introduction to Statistical Thermodynamics*, Dover, New York (1986).
- [4] T. L. Hill, *Statistical Mechanics, Principles and Selected Applications*, Dover, New York (1956).
- [5] W. Greiner, L. Neise, H. Stöcker, *Thermodynamics and Statistical Mechanics*, Springer-Verlag, New York (1995).
- [6] A. Sommerfeld, *Thermodynamics and Statistical Mechanics*, Academic Press, New York and London (1964).
- [7] E. Fermi, *Thermodynamics*, 2nd ed., Dover, New York (1952).
- [8] E. Schrödinger, *Statistical Thermodynamics*, Dover, New York (1952).

- [9] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Statistical Physics*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass. (1958).
- [10] R. Gautreau, W. Savin, *Schaum's Outline of Theory and Problems of Modern Physics*, 2nd. ed., McGraw-Hill, New York (1999).
- [11] K. Huang, *Statistical Mechanics*, 2nd ed., John Wiley & Sons, Singapore (1987).
- [12] H. B. Callen, *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*, 2nd. ed., John Wiley & Sons, New York (1985).
- [13] J. F. Lee, F. W. Sears, *Termodinâmica*, 2a. ed., LTC, Rio de Janeiro (1969).
- [14] W. J. Moore, *Físico-Química*, LTC e EDUSP, Rio de Janeiro (1968).
- [15] R. K. Wangsness, *Electromagnetic Fields*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York (1986).
- [16] A. Sommerfeld, *Partial Differential Equations in Physics*, Academic Press, New York and London (1964s).
- [17] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integral, Series, and Products*, 5th ed., Academic Press, San Diego (1994).
- [18] M. R. Spiegel, S. Lipschutz, J. Liu, *Schaum's Outline of Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York (2009).
- [19] M. R. Spiegel, *Schaum's Outline of Fourier Analysis with Applications to Boundary Value Problems*, McGraw-Hill, New York (1974).
- [20] M. R. Spiegel, *Schaum's Outline of Advanced Mathematics for Engineers and Scientists*, McGraw-Hill, New York (1971).
- [21] M. M. Abbott, H. G. van Ness, *Schaum's Outline, Thermodynamics with Chemical Applications*, 2nd. ed., McGraw-Hill, New York (1972).
- [22] M. C. Potter, C. W. Somerton, *Schaum's Outline, Theory and Problems of Thermodynamics for Engineers*, McGraw-Hill, New York (1993).