1 - Introdução matemática

Este capítulo baseia-se principalmente nos apêndices do livro de Reif [1].

1 Somas elementares

1.1 A série aritmética

Uma série aritmética é dada pela expressão

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \, , \tag{1}$$

em que o termo n é

$$a_n = a_1 + (n-1)r \, . \tag{2}$$

A quantidade r é a *razão* da série aritmética (1). Conhecendo o primeiro termo da série a_1 e a razão r todos os outros termos podem ser calculados. De fato, conhecendo dois termos entre a_1, a_n e r o terceiro pode ser calculado usando (2).

Vamos calcular agora S_n definido em (1). Primeiro notamos que

$$\begin{aligned}
&a_1 + a_n = 2a_1 + (n-1)r \, , \\
&a_2 + a_{n-1} = 2a_1 + (n-1)r \, , \\
&\cdots \, ,
\end{aligned}$$

e de maneira geral,

$$a_i + a_{n-(i-1)} = 2a_1 + (n-1)r \, . \tag{3}$$

Podemos assim escrever

$$\begin{array}{l}
S_n = a_1 + \cdots + a_n \, , \\
\underline{S_n = a_n + \cdots + a_1 \, ,} \\
2S_n = n(a_1 + a_n) \, .
\end{array}$$

Obtemos assim uma expressão para S_n,

$$S_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n)\,. \tag{4}$$

Substituindo (2) podemos escrever S_n na forma

$$S_n = na_1 + \frac{1}{2}n(n-1)r\,. \tag{5}$$

1.2 A série geométrica

Uma série geométrica é dada pela expressão

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 + qa_1 + q^2a_1 + \cdots + q^{n-1}a_1\,, \tag{6}$$

em que o termo n é

$$a_n = q^{n-1}a_1\,. \tag{7}$$

A quantidade q é a *razão* da série geométrica (6). Conhecendo o primeiro termo da série a_1 e a razão q podemos calcular qualquer outro termo. Conhecendo dois termos entre a_1, a_n e q o terceiro pode ser calculado usando (7).

Vamos calcular agora S_n definido em (6). Multiplicando (6) por q,

$$qS_n = qa_1 + q^2a_1 + \cdots + q^{n-1}a_1 + q^na_1\,. \tag{8}$$

Subtraindo (8) de (6) obtemos

$$(1-q)S_n = a_1 - q^na_1 = a_1(1-q^n)\,, \tag{9}$$

portanto

$$S_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q}\,. \tag{10}$$

Se $|q| < 1$ e a série geométrica (6) é infinita, isto é $n \to \infty$, a série converge, pois $q^n \to 0$. Portanto, para $n \to \infty$ e $|q| < 1$,

$$S = \frac{a_1}{1-q}\,. \tag{11}$$

2 Cálculo da integral $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$

A integral *indefinida* $\int e^{-x^2} dx$ não pode ser calculada em termos de funções elementares. Definimos por I a integral *definida*

$$I \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \,. \tag{12}$$

Podemos calcular I usando o seguinte artifício. Escrevemos I em termos de uma variável de integração diferente,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \,. \tag{13}$$

Multiplicando (12) por (13),

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy \,,$$

ou

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \,. \tag{14}$$

Esta é uma integral sobre todo o plano xy.

Vamos expressar a integral acima em coordenadas polares r e θ. Então $x^2 + y^2 = r^2$, e o elemento de área é $r dr d\theta$ (fig. 1.1). Para cobrir o plano inteiro, as variáveis r e θ devem cobrir os intervalos $0 < r < \infty$ e $0 < \theta < 2\pi$. Desta forma a equação acima fica na forma

$$I^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr \,, \tag{15}$$

pois a integral em θ é imediata. O fator r torna a integral trivial. Obtemos

$$I^2 = 2\pi \int_0^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) d(e^{-r^2}) = -\pi [e^{-r^2}]_0^{\infty} = -\pi(0-1) = \pi \,, \tag{16}$$

ou

$$I = \sqrt{\pi} \,. \tag{17}$$

Portanto,

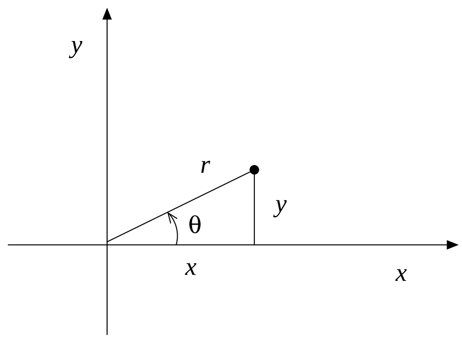
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \,. \tag{18}$$

Notemos que e^{-x^2} é uma função par de x, logo,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx \,,$$

e temos

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \,. \tag{19}$$



[!ht]
Figura 1.1. Coordenadas polares r, θ no plano.

3 Cálculo da integral $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx$

Para $n = 0$ obtemos

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x} dx = -[e^{-x}]_0^{+\infty} = -[0 - 1] = 1 \,. \tag{20}$$

Para n qualquer podemos fazer uma integração por partes,

$$\begin{aligned} \int_{0}^{+\infty} e^{-x} x^n dx &= -\int_{0}^{+\infty} x^n d(e^{-x}) \,, \\ &= -[x^n e^{-x}]_0^{+\infty} + n \int_{0}^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \,. \end{aligned}$$

O primeiro termo é nulo, logo obtemos a relação de recorrência

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x} x^n dx = n \int_{0}^{+\infty} e^{-x} x^{n-1} dx \,. \tag{21}$$

Se n é um inteiro positivo podemos aplicar a equação acima repetidamente até obtermos

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}x^n dx = n(n-1)(n-2)\ldots(2)(1)\,,$$

ou

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}x^n dx = n!\,. \tag{22}$$

De fato a integral é também bem definida se n é não inteiro e $n > -1$. Definimos em geral a "função gama" pela relação

$$\Gamma(n) \equiv \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{n-1} dx\,, \qquad n > 0\,. \tag{23}$$

Pela equação (22) segue que, se n é um inteiro positivo ($n \geq 1$),

$$\Gamma(n) = (n-1)!\,. \tag{24}$$

A equação (21) implica a relação geral ($n \geq 2$)

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)\,. \tag{25}$$

Para $n = 1$ obtemos de (20) ou de (24)

$$\Gamma(1) = 1\,. \tag{26}$$

Notemos que, de (25) e (26), temos $\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1$. Notemos também que

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{-1/2} dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy\,,$$

em que fizemos $x = y^2$. Portanto, usando (19),

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}\,. \tag{27}$$

Portanto,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}x^n dx = n! = \Gamma(n+1)\,, \qquad n > -1\,, \tag{28}$$

e ($a > 0$)

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}x^n dx = \frac{1}{a^{n+1}}\Gamma(n+1)\,. \tag{29}$$

4 Cálculo de integrais da forma $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} x^n dx$

Começamos pelas integrais definidas. Definimos ($a > 0$)

$$I(n) \equiv \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} x^n dx \qquad , n \geq 0\,. \tag{30}$$

Fazendo a troca de variáveis $x \equiv a^{-1/2} y$ obtemos

$$I(n) = a^{-(n+1)/2} \int_0^{+\infty} e^{-y^2} y^n dy\,. \tag{31}$$

Para $n = 0$ temos

$$I(0) = a^{-1/2} \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = a^{-1/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,, \tag{32}$$

em que usamos (19). Para $n = 1$ temos

$$I(1) = a^{-1} \int_0^{+\infty} e^{-y^2} y dy\,. \tag{33}$$

Podemos calcular a integral acima. Fazendo $u \equiv y^2$ temos

$$I(1) = \frac{1}{2} a^{-1} \int_0^{+\infty} e^{-u} du = -\frac{1}{2} a^{-1} [e^{-u}]_0^{+\infty} = -\frac{1}{2} a^{-1} [0 - 1] = \frac{1}{2} a^{-1}\,. \tag{34}$$

Notemos que todas as integrais $I(n)$ com n inteiro e $n > 1$ podem ser reduzidas às integrais $I(0)$ ou $I(1)$ derivando em relação ao parâmetro a. De fato,

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} x^{n-2} dx \right) = -\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} x^n dx\,,$$

logo,

$$I(n) = -\frac{\partial}{\partial a} I(n-2)\,. \tag{35}$$

A equação acima é uma relação de recorrência que pode ser usada quantas vezes for necessário. Por exemplo,

$$I(2) = -\frac{\partial}{\partial a} I(0) = -\frac{\partial}{\partial a} \left(a^{-1/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} a^{-3/2}\,.$$

Alternativamente, podemos fazer $u \equiv ax^2$ em (30), obtendo

$$I(n) = \frac{1}{2} a^{-(n+1)/2} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{(n-1)/2} du\,.$$

Pela definição (23) da função gama temos

$$I(n) \equiv \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} x^n dx = \frac{1}{2} a^{-(n+1)/2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\,. \tag{36}$$

Usando (25) e os valores de $\Gamma(1)$ e $\Gamma(1/2)$ dados em (26) e (27), podemos aplicar (36) para construir uma pequena tabela de integrais. Temos

$$\begin{aligned}
I(0) &= \frac{1}{2}\sqrt{\pi} a^{-1/2} \\
I(1) &= \frac{1}{2} a^{-1} \\
I(2) &= \frac{1}{4}\sqrt{\pi} a^{-3/2} \\
I(3) &= \frac{1}{2} a^{-2} \\
I(4) &= \frac{3}{8}\sqrt{\pi} a^{-5/2} \\
I(5) &= a^{-3}\,.
\end{aligned} \tag{37}$$

Podemos verificar que

$$\frac{\partial}{\partial a} \int_0^{\infty} e^{-ax^2} x^{n-2} dx = -\int_0^{\infty} e^{-ax^2} x^n dx\,, \qquad n \geq 2\,, \tag{38}$$

portanto é válida a relação de recorrência (problema 9)

$$I(n) = -\frac{\partial}{\partial a} I(n-2)\,, \qquad n \geq 2\,. \tag{39}$$

Vamos tratar agora das integrais indefinidas. Definimos

$$I(n) \equiv \int e^{-ax^2} x^n dx \qquad , n \geq 0\,. \tag{40}$$

Para $n = 0$ não temos a integral indefinida, mas podemos obter expressões para

$$I(n, x) = I_n(x) \equiv \int_0^x e^{-au^2} u^n du \qquad , n \geq 0\,. \tag{41}$$

Para $n = 0$,

$$I_0(x) \equiv \int_0^x e^{-au^2} du \,.$$

Usando a função erro [16], que na próxima seção veremos em mais detalhes,

$$Erf(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \,, \tag{42}$$

temos

$$I_0(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} Erf(\sqrt{a}x) \,. \tag{43}$$

Para $n = 1$ temos

$$I_1(x) \equiv \int_0^x e^{-au^2} u du = \frac{1}{2a}(1 - e^{-ax^2}) \,. \tag{44}$$

Podemos calcular I_2 integrando por partes,

$$I_2(x) \equiv \int_0^x e^{-au^2} u^2 du = -\frac{x}{2a} e^{-ax^2} + \frac{1}{2a}\int_0^x e^{-au^2} du \,. \tag{45}$$

Usando novamente a função erro,

$$I_2(x) = -\frac{x}{2a} e^{-ax^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}} Erf(\sqrt{a}x) \,. \tag{46}$$

Podemos calcular I_3 também usando integração por partes,

$$I_3(x) \equiv \int_0^x e^{-au^2} u^3 du = -\frac{x^2}{2a} e^{-ax^2} + \frac{1}{a}\int_0^x e^{-au^2} u du \,. \tag{47}$$

Calculando a integral obtemos

$$I_3(x) = -\frac{e^{-ax^2}}{2a^2}(1 + ax^2) + \frac{1}{2a^2} \,. \tag{48}$$

As integrais I_4, I_5, ..., podem ser calculadas analogamente (problema 8),

$$\begin{aligned} I_4(x) &= -\frac{xe^{-ax^2}}{4a^2}(3 + 2ax^2) + \frac{3\sqrt{\pi}}{8a^{5/2}} Erf(\sqrt{a}x) \,, \\ I_5(x) &= -\frac{e^{-ax^2}}{2a^3}(2 + 2ax^2 + a^2x^4) + \frac{1}{a^3} \,. \end{aligned} \tag{49}$$

Notemos que $I_n(x)$ se reduz a $I(n)$ se $x \to \infty$. Também temos aqui a relação de recorrência (problema 9)

$$I_n(x) = -\frac{\partial}{\partial a} I_{n-2}(x)\,, \qquad n \geq 2\,. \tag{50}$$

5 A função erro

Já vimos que a integral indefinida

$$\int e^{-x^2} dx$$

não pode ser calculada em termos de funções elementares, mas

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Definimos a função erro por

$$Erf(y) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-x^2} dx\,. \tag{51}$$

A função erro é normalizada, de modo que

$$\lim_{y \to \infty} Erf(y) = 1\,.$$

A figura 1.2 mostra o gráfico da função erro.

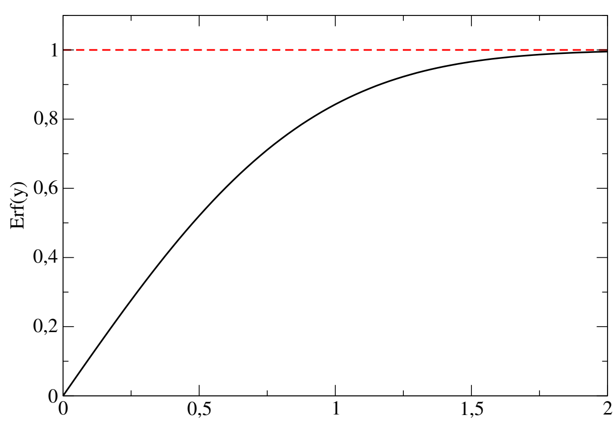


Figura 1.2. Gráfico da função erro.

Podemos obter expansões em série da função erro para y pequeno e y grande. Para y pequeno podemos usar

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \dots\,,$$

obtendo

$$\begin{aligned} Erf(y) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \dots\right) dx\,, \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{10} - \dots\right)\,, \end{aligned} \tag{52}$$

expressão útil se y é pequeno.

Para y grande temos

$$Erf(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx - \int_y^\infty e^{-x^2} dx\right) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_y^\infty e^{-x^2} dx\,. \tag{53}$$

Usando integração por partes,

$$\begin{aligned} \int_y^\infty e^{-x^2} dx &= -\frac{1}{2} \int_y^\infty d(e^{-x^2}) \frac{1}{x}\,, \\ &= \frac{1}{2y} e^{-y^2} - \frac{1}{2} \int_y^\infty e^{-x^2} \frac{1}{x^2} dx\,, \\ &= \frac{1}{2y} e^{-y^2} - \frac{1}{2} \int_y^\infty \frac{d(e^{-x^2})}{-2x^3}\,, \\ &= \frac{1}{2y} e^{-y^2} - \frac{1}{4y^3} e^{-y^2} + \frac{3}{4} \int_y^\infty \frac{e^{-x^2}}{x^4} dx\,. \end{aligned} \tag{54}$$

Prosseguindo com esse processo obtemos

$$Erf(y) = 1 - \frac{e^{-y^2}}{\sqrt{\pi} y} \left(1 - \frac{1}{2y^2} + \dots\right)\,, \qquad y >> 1\,. \tag{55}$$

6 A fórmula de Stirling

Temos, por definição,

$$n! = 1.2 \dots (n-1).n\,,$$

logo

$$
\begin{aligned}
\ln n! &= \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n\,, \\
&= \sum_{i=1}^{n} \ln i \cong \int_1^n \ln x\, dx = [x\ \ln x - x]_1^n\,, \\
&\cong n\ \ln n - n\,.
\end{aligned}
$$

Podemos obter uma aproximação melhor para $n!$. Vimos que

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx\,.$$

O integrando, $f = x^n e^{-x}$, possui um máximo em $x = n$. Expandindo $\ln f$ em torno de $x = n$,

$$\ln f = n \ln n - n - \frac{\xi^2}{2n}\,,$$

com $\xi = x - n$. Portanto,

$$f = n^n e^{-n} e^{-\xi^2/2n}\,, \qquad \xi << n\,.$$

Substituindo na integral,

$$n! = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = \int_{-n}^{+\infty} n^n e^{-n} e^{-\xi^2/2n} d\xi\,,$$

ou, como $-n \to -\infty$,

$$n! = \int_{-\infty}^{+\infty} n^n e^{-n} e^{-\xi^2/2n} d\xi\,.$$

Calculando a integral,

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2n\pi}\,, \qquad n >> 1\,,$$

logo

$$\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n)\,, \qquad n >> 1\,. \tag{56}$$

7 A função delta de Dirac

A função delta de Dirac é definida por

$$\begin{cases} \delta(x-x_0) = 0\,, \quad x \neq 0\,, \\ \delta(x-x_0) \to \infty\,, \, x \to x_0\,, \end{cases} \tag{57}$$

com

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \delta(x-x_0)dx = 1\,. \tag{58}$$

Com essas propriedades temos, para uma função qualquer $f(x)$,

$$\int_A^B f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0)\int_A^B \delta(x-x_0)dx\,, \tag{59}$$

portanto,

$$\int_A^B f(x)\delta(x-x_0)dx = \begin{cases} f(x_0)\,, \; A < x_0 < B\,, \\ 0\,, \qquad \text{outro intervalo}\,. \end{cases} \tag{60}$$

Algumas representações analíticas de $\delta(x)$ $(\gamma \to 0)$:

$$1)\,\delta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma}\,, \; -\gamma/2 < x < \gamma/2\,, \\ 0\,, \; \text{outro intervalo}\,; \end{cases} \tag{61}$$

$$2)\,\delta(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\gamma}{x^2+\gamma^2}\,; \tag{62}$$

$$3)\,\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-x^2/2\gamma^2}}{\gamma}\,. \tag{63}$$

A representação mais conveniente e importante, contudo, é uma envolvendo uma integral. Partimos do resultado

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\phi}d\phi = \begin{cases} 2\pi\,, \qquad\qquad n = 0\,, \\ \dfrac{e^{in\phi}}{in}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0\,, \; n \neq 0\,, \end{cases}$$

com o qual podemos escrever

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\phi}d\phi = \delta_{n,0}\,, \tag{64}$$

em que o lado esquerdo é o “símbolo delta de Kronecker”,

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1\,, \text{ se} n = m\,, \\ 0\,, \text{ se} n \neq m\,. \end{cases} \tag{65}$$

É o análogo para variáveis discretas da função delta de Dirac $\delta(x - x_0)$ para variáveis contínuas.

Para fazer a conexão entre variáveis discretas e contínuas explícita, escolhemos um número grande L tal que

$$x \equiv \frac{2\pi n}{L}\,, \tag{66}$$

de modo que essencialmente todos os valores possíveis da variável contínua x são obtidos à medida que n assume todos os valores inteiros possíveis. A relação acima associa a cada inteiro n o intervalo de x dado por

$$\frac{2\pi}{L}\left(n - \frac{1}{2}\right) < x < \frac{2\pi}{L}\left(n + \frac{1}{2}\right)\,,$$

de magnitude

$$\Delta x = \frac{2\pi}{L}\,, \tag{67}$$

que se torna infinitesimalmente pequeno no limite $L \to \infty$.

De acordo com a definição da delta de Kronecker temos então

$$\delta_{n,0} = \begin{cases} 1\,, \text{ se} -\frac{1}{2}\Delta x < x < \frac{1}{2}\Delta x\,, \\ 0\,, \text{ outro intervalo}\,. \end{cases} \tag{68}$$

Pela eq.(61) podemos escrever

$$\delta(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\delta_{n,0}}{\Delta x}\,, \tag{69}$$

portanto,

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{2\pi \Delta x} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\phi} d\phi\,, \\ &= \lim_{L \to \infty} \frac{1}{2\pi} \frac{L}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(iLx/2\pi)\phi} d\phi\,. \end{aligned}$$

Fazemos agora a troca de variáveis

$$k \equiv \frac{L}{2\pi}\phi\,,$$

de modo que

$$d\phi \equiv \frac{2\pi}{L}dk\,,$$

e

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dk\,. \tag{70}$$

Esta é representação integral para a função delta de Dirac. De maneira mais geral podemos escrever

$$\delta_{n,m} = \delta_{m,n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\phi(n-m)}d\phi\,, \tag{71}$$

$$\delta(x-x_0) = \delta(x_0-x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x_0)}dk\,. \tag{72}$$

8 A desigualdade $\ln x \leq x - 1$

Vamos comparar $\ln x$ com x para valores positivos de x. Consideremos a função

$$f(x) \equiv x - \ln x\,. \tag{73}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Para}\, x \to 0\,, \quad \ln x \to -\infty\,, \text{ logo } f(x) \to \infty\,. \\ \text{Para}\, x \to \infty\,, \ln x << x\,, \quad \text{logo } f(x) \to \infty\,. \end{array}\right\}$$

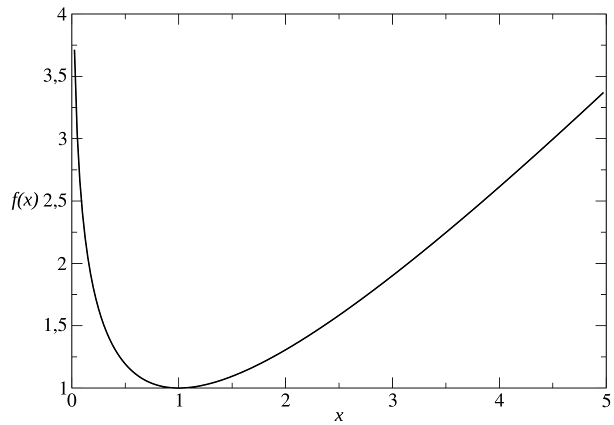
Notemos que

$$\frac{df}{dx} = 1 - \frac{1}{x} = 0\,, \text{para} x = 1\,,$$

quando $f = 1$. Além disso,

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{1}{x^2} = 1 > 0\,, \text{para} x = 1\,,$$

logo o extremo é um ponto de mínimo. O gráfico da função $f(x)$ é mostrado na figura 1.3.



[!ht]
Figura 1.3. Gráfico da função $f(x) = x - \ln x$.

Como a função possui apenas um extremo,

$$f(x) \geq f(1) = 1\,, \tag{74}$$

ou

$$\ln x \leq x - 1\,. \tag{75}$$

9 Cálculo de $I_m \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{(e^x+1)^2} x^m dx$

Ao estudarmos sistemas de Fermi veremos a integral,

$$I_m \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{(e^x+1)^2} x^m dx\,. \tag{76}$$

Notemos primeiro que,

$$\frac{e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)(e^x+1)} = \frac{1}{(e^x+1)(1+e^{-x})}\,,$$

é uma função par de x. Se m é ímpar em ..., então $I_m = 0$,

$$I_m = 0\,, \quad m = 2k+1\,, \quad k = 1, 2, ... \tag{77}$$

Precisamos calcular I_m apenas para m par. Para $m = 0$,

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{(e^x+1)^2} dx = -\frac{1}{e^x+1}\bigg|_{-\infty}^{+\infty} = 1\,. \tag{78}$$

Como precisamos calcular I_m para m par, escrevemos,

$$I_m = 2\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{(e^x+1)^2} x^m dx\,, \quad m = 2, 4, 6, \ldots$$

Integrando por partes,

$$I_m = -\frac{2x^m}{e^x+1}\bigg|_0^{\infty} + 2m\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{e^x+1} dx\,.$$

O primeiro termo se anula, e podemos substituir no segundo a relação,

$$\frac{1}{1+e^{-x}} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j e^{-jx}\,.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
I_m &= 2m\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{e^x+1} dx = 2m\int_0^{+\infty} x^{m-1} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx\,,\\
I_m &= 2m\int_0^{+\infty} x^{m-1} e^{-x} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j e^{-jx} dx\,,\\
I_m &= 2m\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \int_0^{+\infty} x^{m-1} e^{-x(j+1)} dx\,,\\
I_m &= 2m\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \int_0^{+\infty} x^{m-1} e^{-jx} dx\,,
\end{aligned}$$

em que apenas mudamos o início da soma para $j = 1$. Transformando variáveis na integral, $y = jx$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} x^{m-1} e^{-jx} dx &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{j}\right)^{m-1} e^{-y} \frac{dy}{j}\,,\\
&= j^{-m} \int_0^{+\infty} y^{m-1} e^{-y} dy\,,\\
&= j^{-m}\Gamma(m) = j^{-m}(m-1)!\,,
\end{aligned}$$

pois m é inteiro. Assim,

$$I_m = 2m! \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} j^{-m}\,.$$

Definindo a série,

$$\eta(m) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} j^{-m}\,, \tag{79}$$

temos então, para m par,

$$I_m \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{(e^x+1)^2} x^m dx = 2m! \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} j^{-m} = 2m! \eta(m)\,. \tag{80}$$

Podemos reescrever a série η em termos da função zeta de Riemann,

$$\zeta(x) \equiv \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^x}\,. \tag{81}$$

Temos,

$$\eta(m) = \frac{1}{1^m} - \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} - \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \ldots\,.$$

Somando e subtraindo a série com denominador de base par e rearranjando, obtemos a função zeta de Riemann menos duas vezes a série com base par,

$$\begin{aligned}
\eta(m) &= \zeta(m) - 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j)^m}\,, \\
\eta(m) &= \zeta(m) - 2\frac{1}{2^m}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^m}\,, \\
\eta(m) &= \zeta(m) - \frac{1}{2^{m-1}}\zeta(m)\,, \\
\eta(m) &= \left[1 - \frac{1}{2^{m-1}}\right]\zeta(m)\,.
\end{aligned}$$

Podemos então escrever,

$$I_m = 2m!\,\eta(m) = 2m!\,\left[1 - \frac{1}{2^{m-1}}\right]\zeta(m)\,. \tag{82}$$

O problema de calcular I_m fica então reduzido ao cálculo da série η ou ζ.

Cálculo da série η ou ζ usando séries de Fourier

A série de Fourier para uma função $f(x)$ no intervalo $-\pi \leq x \leq +\pi$ é [4,18,19,15],

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\mathrm{sennx}\right)\ ,$$

com,

$$\begin{aligned}
a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\cos nxdx\,,\\
b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\mathrm{sennxdx}\,.
\end{aligned}$$

Vamos calcular a série de Fourier para a função x^2. Temos,

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)dx=\frac{2\pi^2}{3}\,.$$

Como x^2 é uma função par,

$$\begin{aligned}
a_n&=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\pi}f(x)\cos nxdx\,,\\
b_n&=0\,.
\end{aligned}$$

Calculando a_n para $n=1,2,3,\ldots$,

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\pi}x^2\cos nxdx\,.$$

Usando a integral indefinida,

$$\int x^2\cos ax\,dx=\frac{2x}{a^2}\cos ax+\left(\frac{x^2}{a}-\frac{2}{a^3}\right)\mathrm{senax}\,,$$

temos,

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{+\pi}x^2\cos nxdx&=\left[\frac{2x}{n^2}\cos nx+\left(\frac{x^2}{n}-\frac{2}{n^3}\right)\mathrm{sennx}\right]_0^{+\pi}\,,\\
&=\frac{2\pi}{n^2}\cos n\pi+\left(\frac{\pi^2}{n}-\frac{2}{n^3}\right)\mathrm{senn}\pi\,,\\
&=\frac{2\pi}{n^2}(-1)^n\,.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$a_n=\frac{4}{n^2}(-1)^n\,,$$

e a série de Fourier para $f(x) = x^2$ é,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos nx \,.$$

Fazendo $x = \pi$,

$$\begin{aligned}
\pi^2 &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos n\pi \,, \\
\frac{2\pi^2}{3} &= 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \,, \\
\frac{\pi^2}{3} &= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \,,
\end{aligned}$$

ou,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \,. \tag{83}$$

A soma acima é sobre todos os números naturais, e também é igual à $\zeta(2)$. Escrevendo os termos para números pares e ímpares separadamente temos,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6} \,, \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} &= \frac{\pi^2}{6} \,.
\end{aligned}$$

Vemos que o primeiro termo é 1/4 da soma total. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} &= \frac{\pi^2}{6} \,, \\
\frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} &= \frac{\pi^2}{6} \,,
\end{aligned}$$

e,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8} \,, \tag{84}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24} \,. \tag{85}$$

Podemos agora calcular η para $m = 2$,

$$
\begin{aligned}
\eta(2) &\equiv \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} j^{-2} \,, \\
\eta(2) &= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \,, \\
\eta(2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} \,, \\
\eta(2) &= \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12} \,.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
I_2 = 2 \cdot 2!\eta(2) = 4\frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{3} \,. \tag{86}
$$

Vamos agora calcular a série de Fourier para a função x^4. Temos,

$$
a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx = \frac{2\pi^4}{5} \,.
$$

Como x^4 é uma função par, também temos aqui $b_n = 0$. Calculando a_n para $n = 1, 2, 3, \dots$,

$$
a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\pi} x^4 \cos nx dx \,.
$$

Usando a integral indefinida,

$$
\begin{aligned}
\int x^m \cos ax \, dx = & \frac{x^m}{a} \mathrm{senax} + \frac{\mathrm{mx^{m-1}}}{\mathrm{a^2}} \cos \mathrm{ax} \\
& - \frac{m(m-1)}{a^2} \int x^{m-2} \cos axdx \,,
\end{aligned}
$$

temos,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\pi} x^4 \cos nx dx = & \left[\frac{x^4}{n}\mathrm{sennx} + \frac{4\mathrm{x}^3}{\mathrm{n}^2}\cos\mathrm{nx} \right.\\
& \left. - \frac{4(3)}{n^2}\int x^2 \cos nx dx \right]_0^{+\pi} \,, \\
= & \frac{4\pi^3}{n^2}(-1)^n - \frac{12}{n^2}\int_0^{+\pi} x^2 \cos nx dx \,, \\
= & \frac{4\pi^3}{n^2}(-1)^n - \frac{24\pi}{n^4}(-1)^n \,.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
a_n = \frac{8\pi^2}{n^2}(-1)^n - \frac{48}{n^4}(-1)^n \,,
$$

e a série de Fourier para $f(x) = x^4$ é,

$$
x^4 = \frac{\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8\pi^2}{n^2}(-1)^n - \frac{48}{n^4}(-1)^n\right)\cos nx \,.
$$

Fazendo $x = \pi$,

$$
\begin{aligned}
\pi^4 &= \frac{\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8\pi^2}{n^2}(-1)^n - \frac{48}{n^4}(-1)^n\right)\cos n\pi \,, \\
\pi^4 &= \frac{\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8\pi^2}{n^2}(-1)^n - \frac{48}{n^4}(-1)^n\right)(-1)^n \,, \\
\pi^4 &= \frac{\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8\pi^2}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{48}{n^4} \,.
\end{aligned}
$$

Substituindo ...,

$$
\begin{aligned}
\pi^4 &= \frac{\pi^4}{5} + \frac{4\pi^4}{3} - 48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \,, \\
48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} &= \frac{8\pi^4}{15} \,,
\end{aligned}
$$

e finalmente,

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \,. \tag{87}
$$

A soma acima é sobre todos os números naturais, e também é igual à $\zeta(4)$. Escrevendo os termos para números pares e ímpares separadamente temos,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}\,,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{90}\,.$$

Vemos que o primeiro termo é 1/16 da soma total. Assim,

$$\frac{1}{16}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{90}\,,$$
$$\frac{1}{16}\frac{\pi^4}{90} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{90}\,,$$

e,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{15}{16}\frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{96}\,, \tag{88}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^4} = \frac{1}{16}\frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{1440}\,, \tag{89}$$
$$\tag{90}$$

Podemos agora calcular η para $m = 4$,

$$\eta(4) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} j^{-4}\,,$$
$$\eta(4) = 1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots\,,$$
$$\eta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^4}\,,$$
$$\eta(4) = \frac{15}{16}\frac{\pi^4}{90} - \frac{1}{16}\frac{\pi^4}{90} = \frac{14}{16}\frac{\pi^4}{90} = \frac{7}{8}\frac{\pi^4}{90}\,.$$

Portanto,

$$I_4 = 2 \cdot 4!\,\eta(4) = 2 \cdot 4!\,\frac{7}{8}\frac{\pi^4}{90}\,,$$
$$I_4 = \frac{7\pi^4}{15}\,. \tag{91}$$

Vamos agora calcular a série de Fourier para a função x^6. Temos,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)dx = \frac{2\pi^6}{7}\,.$$

Como x^6 é uma função par, também temos aqui $b_n = 0$. Calculando a_n para $n = 1, 2, 3, \ldots,$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\pi} x^6 \cos nx dx\,.$$

Usando a integral indefinida,

$$\int x^m \cos ax\, dx = \frac{x^m}{a}\mathrm{senax} + \frac{\mathrm{mx^{m-1}}}{\mathrm{a^2}}\cos\mathrm{ax} \\ -\frac{m(m-1)}{a^2}\int x^{m-2}\cos axdx\,,$$

temos,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\pi} x^6 \cos nxdx &= \Bigg[\frac{x^6}{n}\mathrm{sennx} + \frac{\mathrm{6x^5}}{\mathrm{n^2}}\cos\mathrm{nx} \\ &\quad - \frac{6(5)}{n^2}\int x^4\cos nxdx\Bigg]_0^{+\pi}\,, \\ &= \frac{6\pi^5}{n^2}(-1)^n - \frac{30}{n^2}\int_0^{+\pi} x^4\cos nxdx\,, \\ &= \frac{6\pi^5}{n^2}(-1)^n - \frac{30}{n^2}\left[\frac{4\pi^3}{n^2}(-1)^n - \frac{24\pi}{n^4}(-1)^n\right]\,, \\ &= \frac{6\pi^5}{n^2}(-1)^n - \frac{30\cdot 4\pi^3}{n^4}(-1)^n + \frac{30\cdot 24\pi}{n^6}(-1)^n\,.\end{aligned}$$

Portanto,

$$a_n = \frac{2\cdot 6\pi^4}{n^2}(-1)^n - \frac{2\cdot 30\cdot 4\pi^2}{n^4}(-1)^n + \frac{2\cdot 30\cdot 24}{n^6}(-1)^n\,,$$

e a série de Fourier para $f(x) = x^6$ é,

$$x^6 = \frac{\pi^6}{7} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\cdot 6\pi^4}{n^2}(-1)^n - \frac{2\cdot 30\cdot 4\pi^2}{n^4}(-1)^n + \frac{2\cdot 30\cdot 24}{n^6}(-1)^n\right)\cos nx\,.$$

Fazendo $x = \pi$,

$$
\begin{aligned}
\pi^6 = \frac{\pi^6}{7} + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 \cdot 6\pi^4}{n^2}(-1)^n - \frac{2 \cdot 30 \cdot 4\pi^2}{n^4}(-1)^n + \frac{2 \cdot 30 \cdot 24}{n^6}(-1)^n \right) \cos n\pi \, , \\
\pi^6 = \frac{\pi^6}{7} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 \cdot 6\pi^4}{n^2} - \frac{2 \cdot 30 \cdot 4\pi^2}{n^4} + \frac{2 \cdot 30 \cdot 24}{n^6} \right) \, , \\
\pi^6 = \frac{\pi^6}{7} + 2 \cdot 6\pi^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 2 \cdot 30 \cdot 4\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + 2 \cdot 30 \cdot 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} \, ,
\end{aligned}
$$

Substituindo ...,

$$
\begin{aligned}
\pi^6 &= \frac{\pi^6}{7} + 2 \cdot 6\pi^4 \left(\frac{\pi^2}{6} \right) - 2 \cdot 30 \cdot 4\pi^2 \left(\frac{\pi^4}{90} \right) + 2 \cdot 30 \cdot 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} \, , \\
\pi^6 &= \frac{\pi^6}{7} + 2\pi^6 - \frac{8\pi^6}{3} + 2 \cdot 30 \cdot 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} \, , \\
2 \cdot 30 \cdot 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} &= \pi^6 - \frac{\pi^6}{7} - 2\pi^6 + \frac{8\pi^6}{3} = \frac{32\pi^6}{21} \, ,
\end{aligned}
$$

e finalmente,

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945} \, . \tag{92}
$$

A soma acima é sobre todos os números naturais, e também é igual à $\zeta(6)$. Escrevendo os termos para números pares e ímpares separadamente temos,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945} \, , \\
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{945} \, .
\end{aligned}
$$

Vemos que o primeiro termo é $1/64 = 1/2^6$ da soma total. Assim,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{64} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{945} \, , \\
&\frac{1}{64} \frac{\pi^6}{945} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{945} \, ,
\end{aligned}
$$

e,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{63}{64}\frac{\pi^6}{945} = \frac{\pi^6}{960}\,, \tag{93}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^6} = \frac{1}{64}\frac{\pi^6}{945} = \frac{\pi^6}{60480}\,. \tag{94}$$

Podemos agora calcular η para $m = 6$,

$$\eta(6) \equiv \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1} j^{-6}\,,$$

$$\eta(6) = 1 - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \ldots\,,$$

$$\eta(6) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^6}\,,$$

$$\eta(6) = \frac{63}{64}\frac{\pi^6}{945} - \frac{1}{64}\frac{\pi^6}{945} = \frac{62}{64}\frac{\pi^6}{945} = \frac{31\pi^6}{30240}\,.$$

Portanto,

$$I_6 = 2 \cdot 6!\eta(6) = 2 \cdot 6!\frac{31\pi^6}{30240}\,,$$

$$I_6 = \frac{31\pi^6}{21}\,. \tag{95}$$

References

[1] F. Reif, *Fundamentals of statistical and thermal physics*, McGraw-Hill, Singapore (1965).

[2] T. L. Hill, *Introduction to Statistical Thermodynamics*, Dover, New York (1986).

[3] T. L. Hill, *Statistical Mechanics, Principles and Selected Applications*, Dover, New York (1956).

[4] M. W. Zemansky, *Heat and Thermodynamics*, 5th ed., McGraw-Hill Kogakusha Ltd., Tokyo (1968).

[5] W. Greiner, L. Neise, H. Stöcker, *Thermodynamics and Statistical Mechanics*, Springer-Verlag, New York (1995).

[6] A. Sommerfeld, *Thermodynamics and Statistical Mechanics*, Academic Press, New York and London (1964).

[7] E. Fermi, *Thermodynamics*, 2nd ed., Dover, New York (1952).

[8] E. Schrödinger, *Statistical Thermodynamics*, Dover, New York (1952).

[9] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Statistical Physics*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass. (1958).

[10] R. Gautreau, W. Savin, *Schaum's Outline of Theory and Problems of Modern Physics*, 2nd. ed., McGraw-Hill, New York (1999).

[11] K. Huang, *Statistical Mechanics*, 2nd ed., John Wiley & Sons, Singapore (1987).

[12] H. B. Callen, *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*, 2nd. ed., John Wiley & Sons, New York (1985).

[13] W. J. Moore, *Físico-Química*, LTC e EDUSP, Rio de Janeiro (1968).

[14] R. K. Wangsness, *Electromagnetic Fields*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York (1986).

[15] A. Sommerfeld, *Partial Differential Equations in Physics*, Academic Press, New York and London (1964s).

[16] I. S. Gradshteyn, I. M. Rytzhik, *Table of Integral, Series, and Products*, 5th ed., Academic Press, San Diego (1994).

[17] M. R. Spiegel, S. Lipschutz, J. Liu, *Schaum's Outline of Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York (2009).

[18] M. R. Spiegel, *Schaum's Outline of Fourier Analysis with Applications to Boundary Value Problems*, McGraw-Hill, New York (1974).

[19] M. R. Spiegel, *Schaum's Outline of Advanced Mathematics for Engineers and Scientists*, McGraw-Hill, New York (1971).