



Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino



Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas

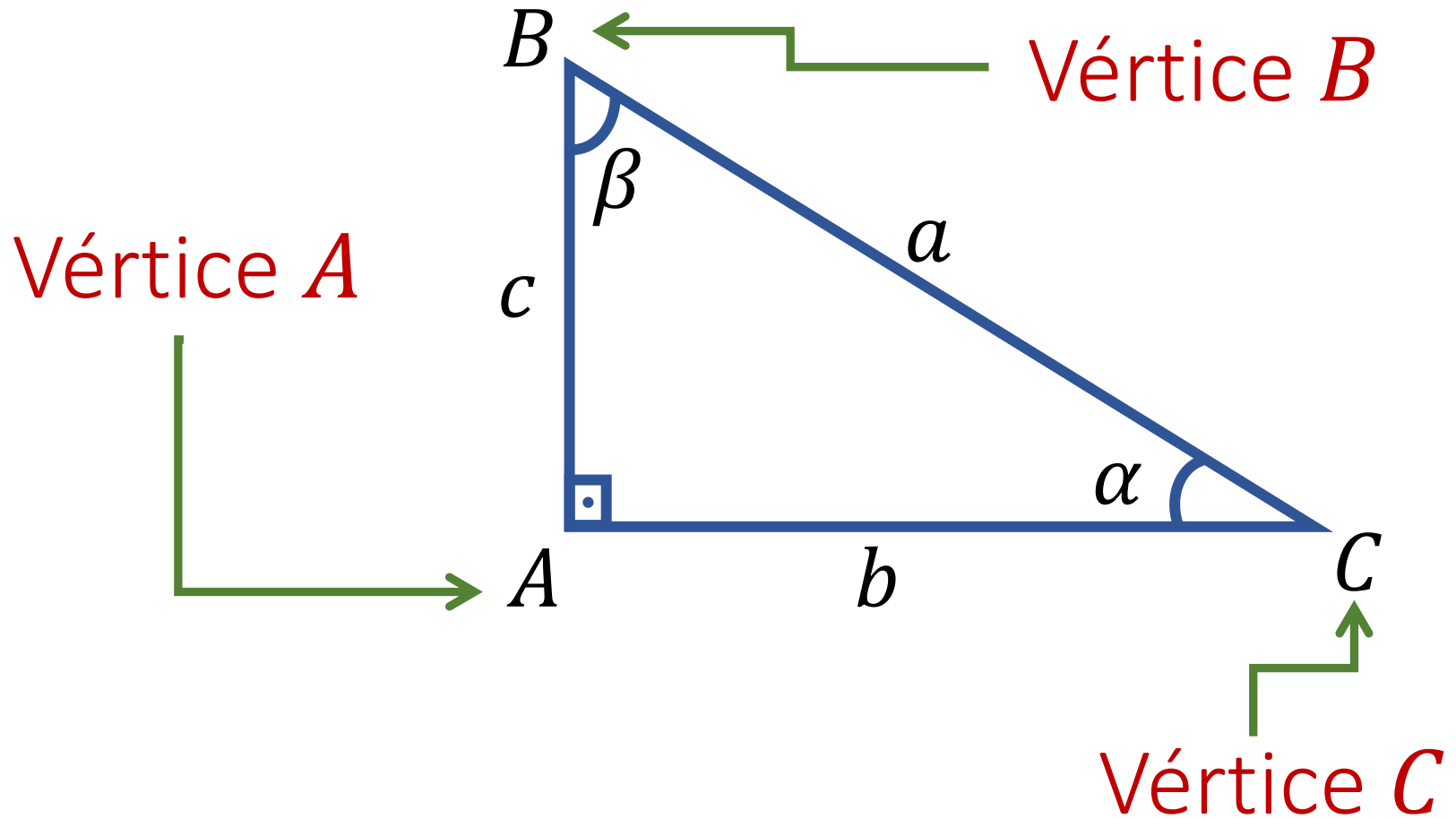
Aula 01

Projeto

GAMA

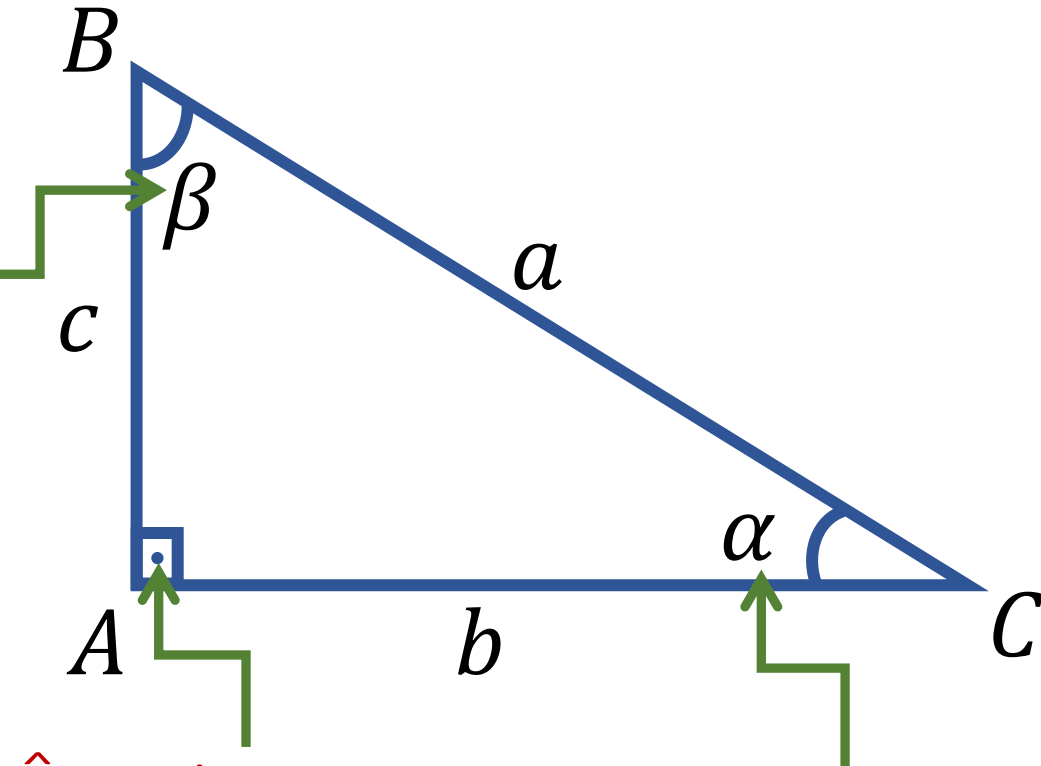
Grupo de Apoio em
Matemática

Triângulo Retângulo



Triângulo Retângulo

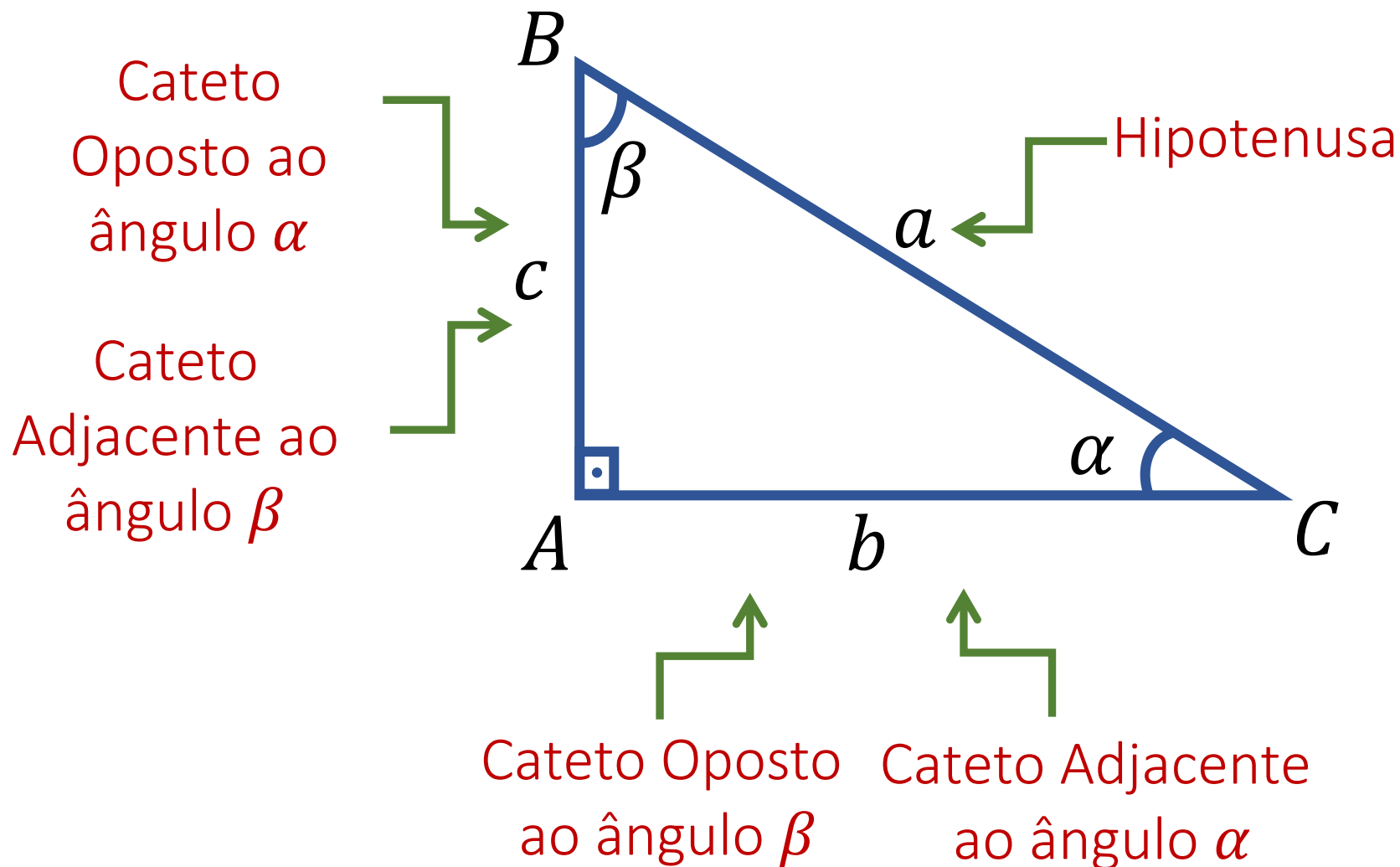
Ângulo interno
relativo ao
vértice B



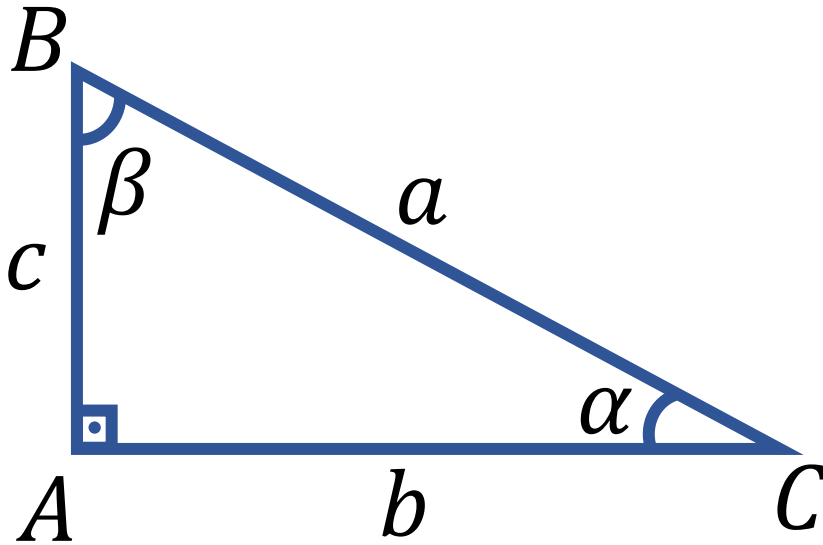
Ângulo reto
(90°)

Ângulo interno
relativo ao vértice C

Triângulo Retângulo



Razões Trigonométricas



Razão Seno

Divisão do cateto oposto pela hipotenusa.

$$\sin \alpha = \frac{c}{a}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{a}$$

Razão Cosseno

Divisão do cateto adjacente pela hipotenusa.

$$\cos \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\cos \beta = \frac{c}{a}$$

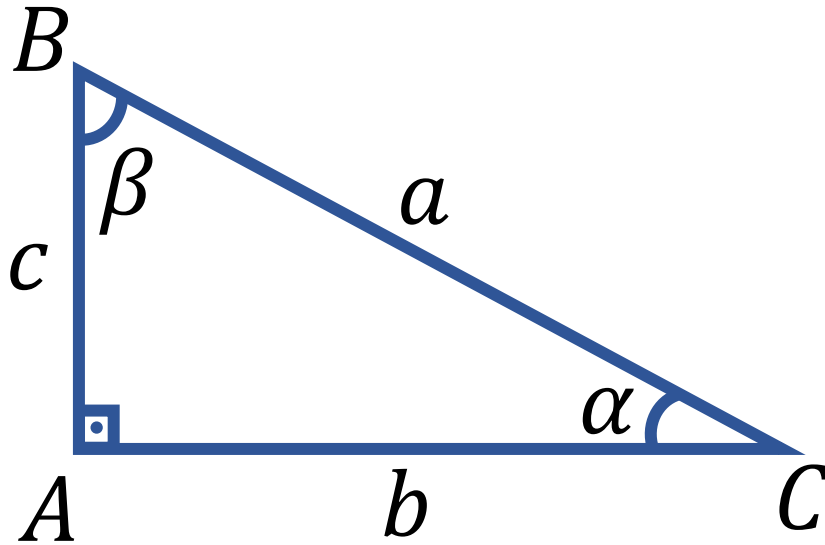
Razão Tangente

Divisão do cateto oposto pelo cateto adjacente.

$$\tan \alpha = \frac{c}{b}$$

$$\tan \beta = \frac{b}{c}$$

Razões Trigonométricas



Razão Cossecante

Divisão da hipotenusa pelo cateto oposto.

$$\csc \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\csc \beta = \frac{a}{b}$$

Razão Secante

Divisão da hipotenusa pelo cateto adjacente.

$$\sec \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\sec \beta = \frac{a}{c}$$

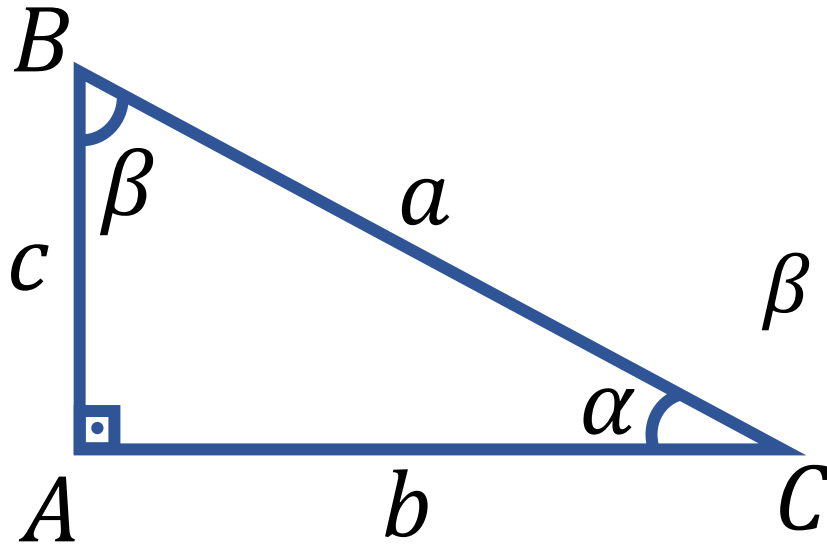
Razão Cotangente

Divisão do cateto adjacente pelo cateto oposto.

$$\cot \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\cot \beta = \frac{c}{b}$$

Razões Trigonométricas



$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

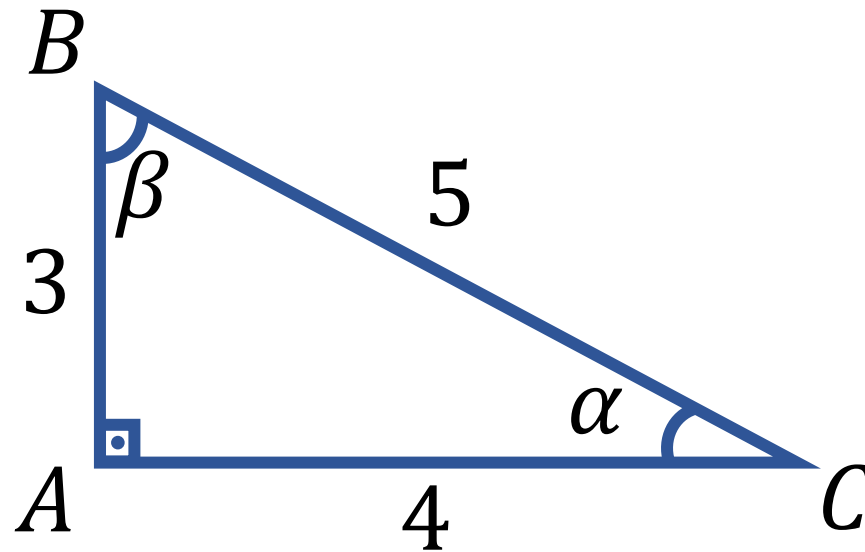
$$\beta = 90^\circ - \alpha \quad \alpha = 90^\circ - \beta$$

$$\sin \alpha = \cos \beta$$
$$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$

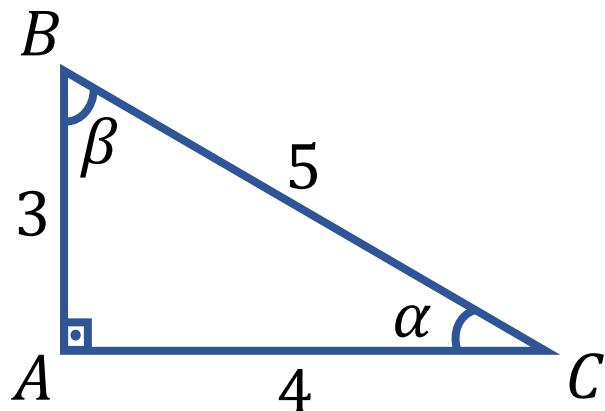
$$\cos \alpha = \sin \beta$$
$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$$

Exemplos

1) Considerando o triângulo abaixo, determine as suas razões trigonométricas para α e β .



Exemplos



$$\text{Seno} = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \quad \sin \beta = \frac{4}{5}$$

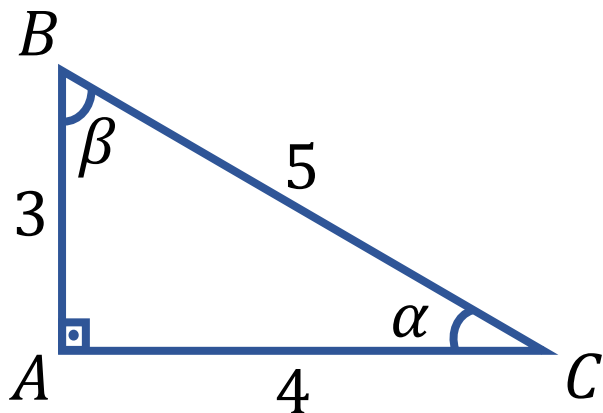
$$\text{Cosseno} = \frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \quad \cos \beta = \frac{3}{5}$$

$$\text{Tangente} = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Cateto adjacente}}$$

$$\tan \alpha = \frac{3}{4} \quad \tan \beta = \frac{4}{3}$$

Exemplos



$$\text{Cossecante} = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto oposto}}$$

$$\csc \alpha = \frac{5}{3} \quad \csc \beta = \frac{5}{4}$$

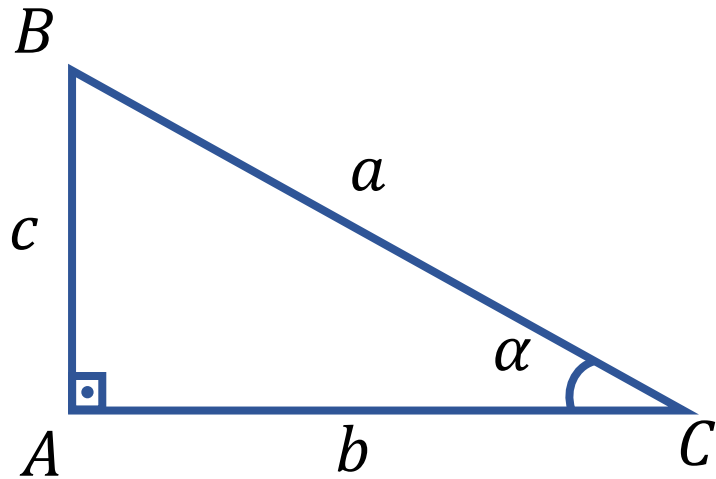
$$\text{Secante} = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto adjacente}}$$

$$\sec \alpha = \frac{5}{4} \quad \sec \beta = \frac{5}{3}$$

$$\text{Cotangente} = \frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Cateto oposto}}$$

$$\cot \alpha = \frac{4}{3} \quad \cot \beta = \frac{3}{4}$$

Relação entre as Razões Trigonométricas



Razão Tangente

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = \frac{c}{b} = \tan \alpha$$

Razão Cossecante

$$\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

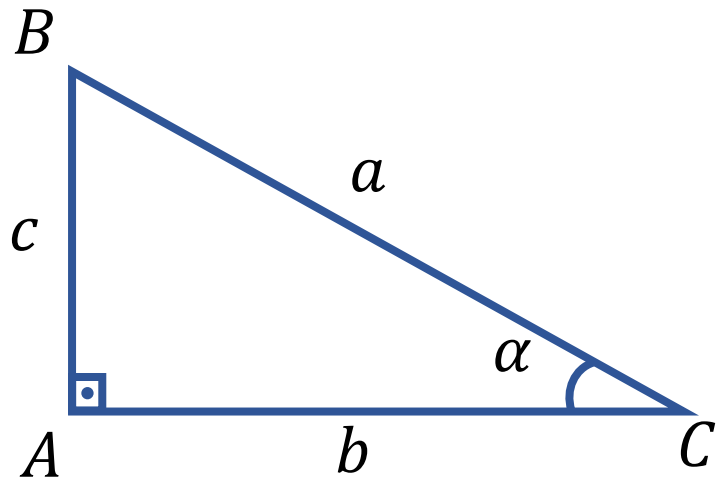
$$\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\frac{c}{a}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{a}{c} = \frac{a}{c} = \csc \alpha$$

Razão Secante

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} = \sec \alpha$$

Relação entre as Razões Trigonométricas



Razão Cotangente

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = \frac{b}{c} = \cot \alpha$$

Razão Cotangente

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$\frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{\frac{c}{b}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{b}{c} = \frac{b}{c} = \cot \alpha$$

Exemplos

1) Sabendo que para um ângulo β em um triângulo retângulo, temos $\sin \beta = \frac{4}{5}$ e $\cos \beta = \frac{3}{5}$ calcule:

(a) $\tan \beta$ (c) $\sec \beta$

(b) $\csc \beta$ (d) $\cot \beta$

Solução:

(a)
$$\textit{Tangente} = \frac{\textit{Seno}}{\textit{Cosseno}}$$

$$\tan \beta = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{3} = \frac{4}{3}$$

(b)
$$\textit{Cossecante} = \frac{1}{\textit{Seno}}$$

$$\csc \beta = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$$

Exemplos

1) Sabendo que para um ângulo β em um triângulo retângulo, temos $\sin \beta = \frac{4}{5}$ e $\cos \beta = \frac{3}{5}$ calcule:

- (a) $\tan \beta$ (c) $\sec \beta$
 (b) $\csc \beta$ (d) $\cot \beta$

Solução:

(c) $\textit{Secante} = \frac{1}{\textit{Cosseno}}$

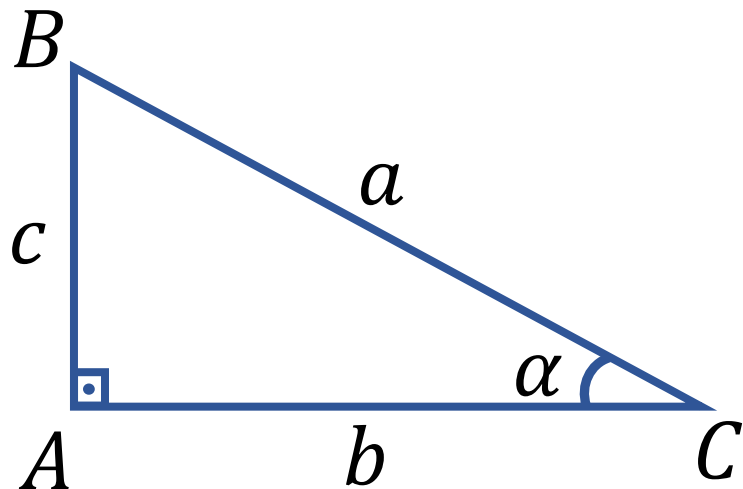
$$\sec \beta = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

(d) $\textit{Cotangente} = \frac{1}{\textit{Tangente}}$ $\textit{Cotangente} = \frac{\textit{Cosseno}}{\textit{Seno}}$

$$\cot \beta = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\cot \beta = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

Identidades Trigonométricas



Teorema de Pitágoras:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Dividindo os lados da
igualdade por a^2 :

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\sin \alpha = \frac{c}{a}$$

Identidades Trigonométricas

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Dividindo os lados da igualdade por $\sin^2 \alpha$:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sin \alpha}\right)^2$$

$$\cot^2 \alpha + 1 = \csc^2 \alpha$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

Dividindo os lados da igualdade por $\cos^2 \alpha$:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos \alpha}\right)^2$$

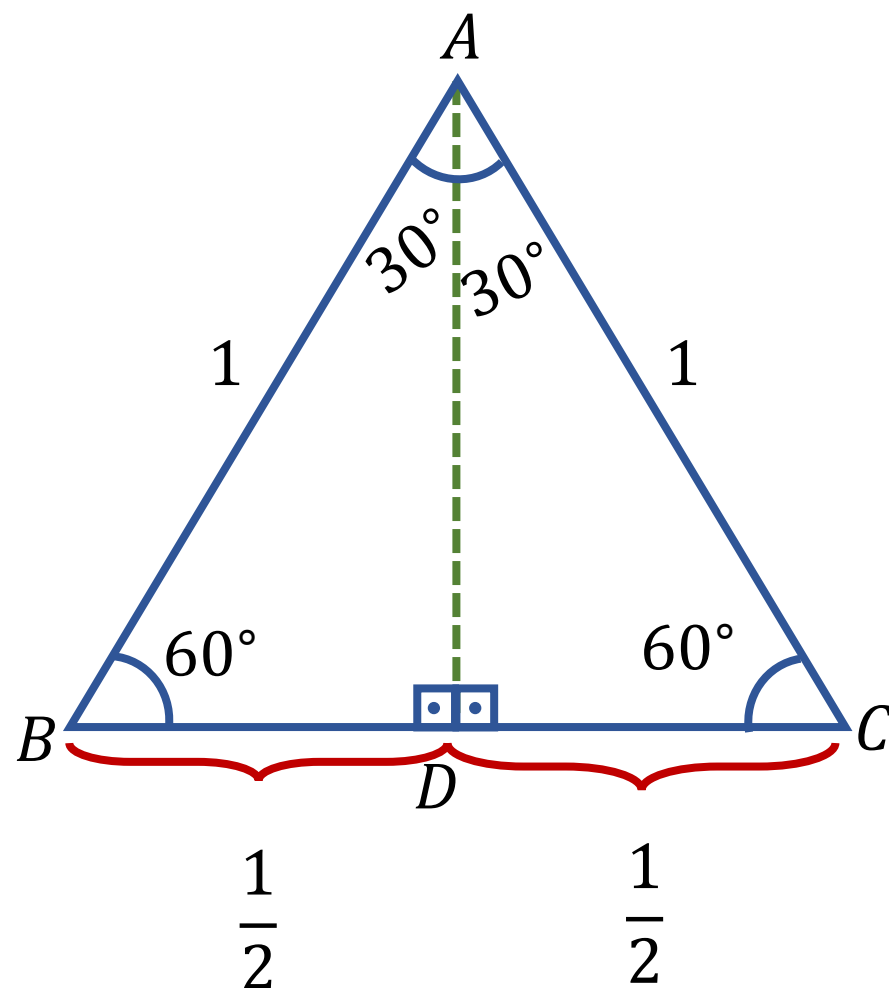
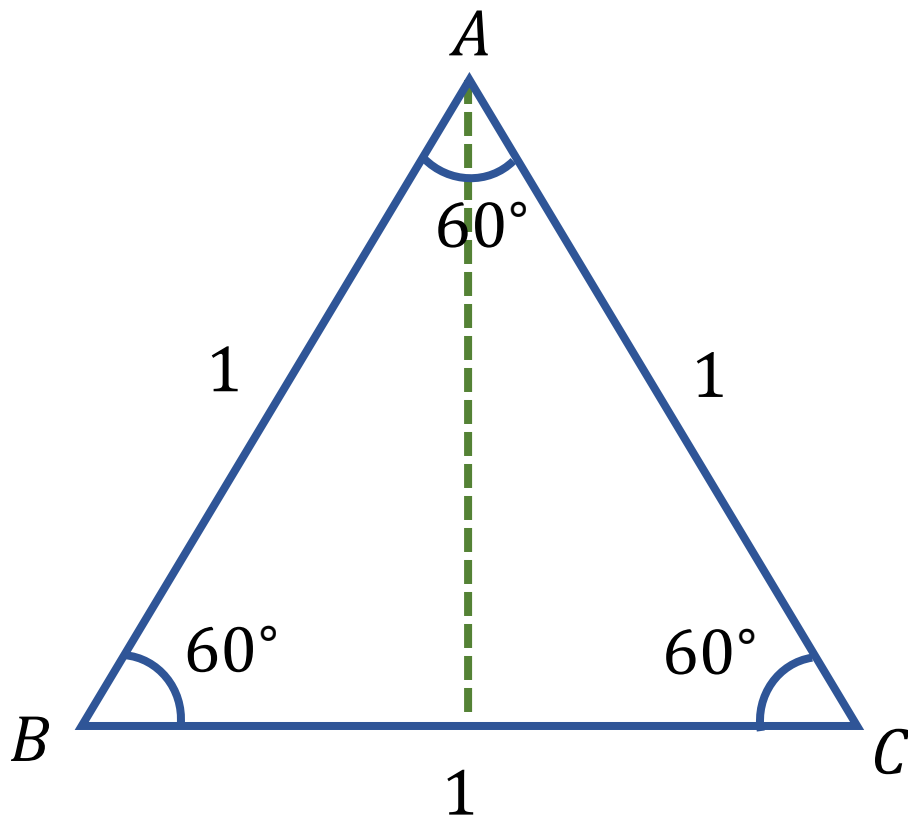
$$\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

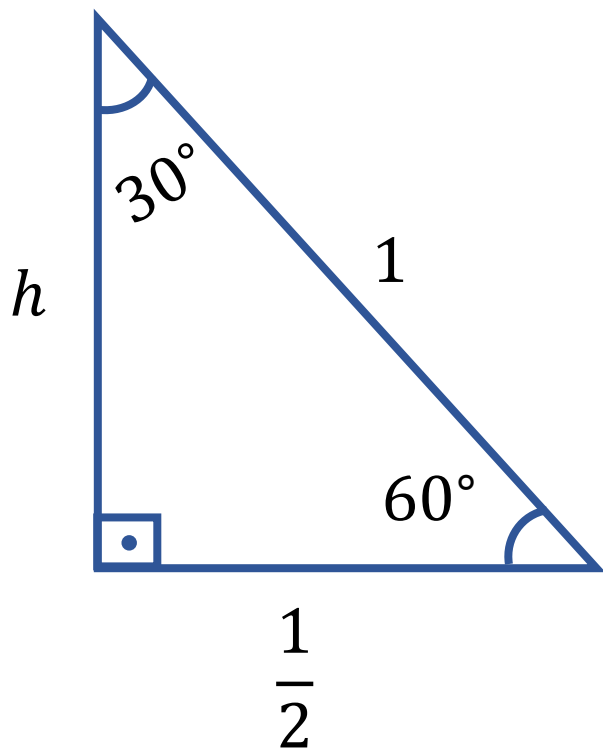
$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

Seno, Cosseno e Tangente de 30° , 45° e 60°

Considerando o triângulo equilátero:



Seno, Cosseno e Tangente de 30° , 45° e 60°



Calculando a altura do triângulo:

Por Pitágoras:

$$1^2 = h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

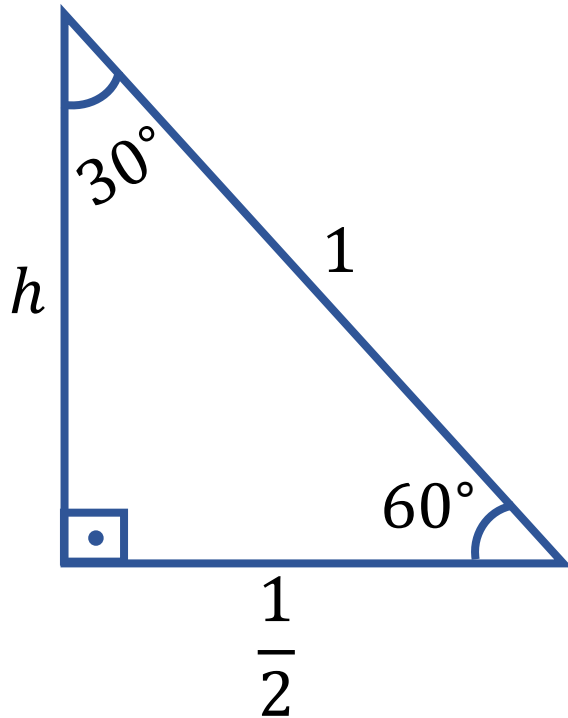
$$h^2 = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{4 - 1}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3}{4}$$

$$h = \pm \sqrt{\frac{3}{4}} \Rightarrow h = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como o valor de h se trata da medida de uma distância, então:

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Seno, Cosseno e Tangente de 30° , 45° e 60°



$$\text{Seno} = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Hipotenusa}}$$

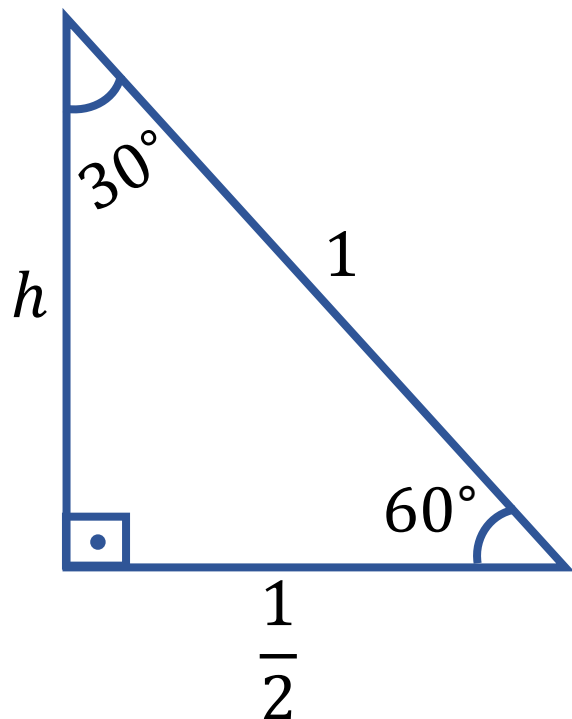
$$\sin 30^\circ = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Seno, Cosseno e Tangente de 30° , 45° e 60°



$$\text{Cosseno} = \frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Hipotenusa}}$$

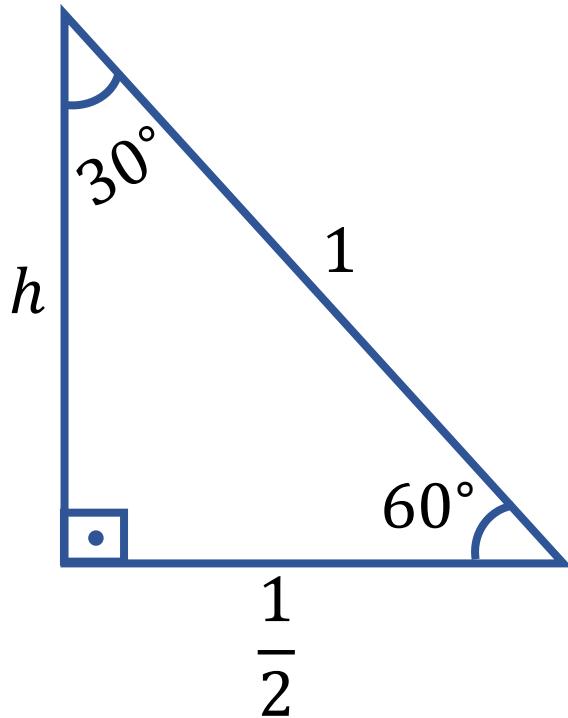
$$\cos 30^\circ = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

Seno, Cosseno e Tangente de 30° , 45° e 60°



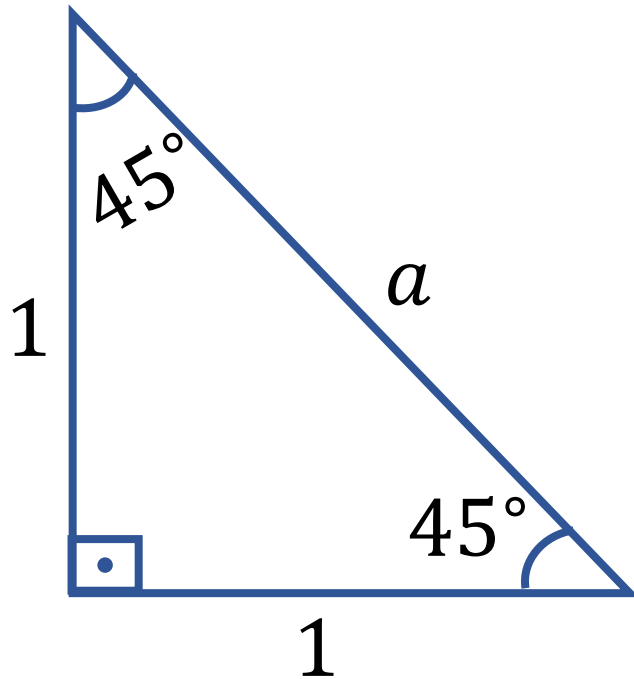
$$\text{Tangente} = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Cateto adjacente}}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{1} = \sqrt{3}$$

Seno, Cosseno e Tangente de 30° , 45° e 60°

Considerando o triângulo isósceles:



Por Pitágoras:

Calculando a hipotenusa do triângulo:

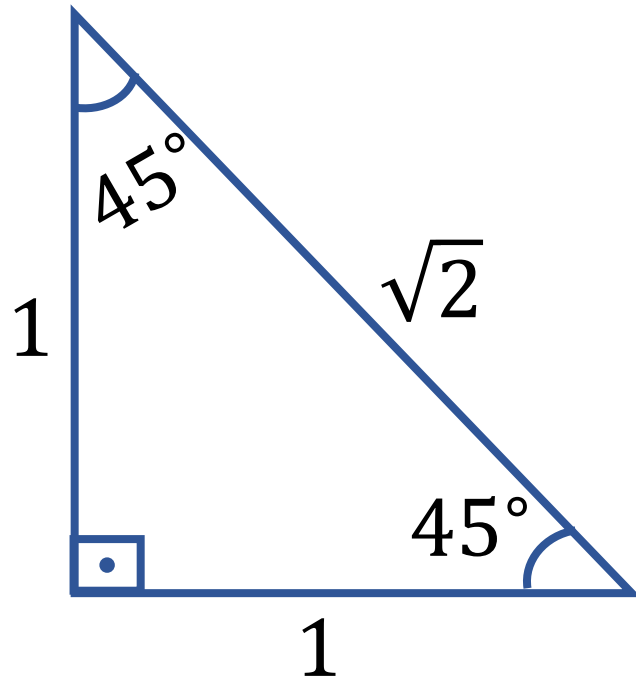
$$a^2 = 1^2 + 1^2$$

$$a^2 = 1 + 1 \Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a = \pm\sqrt{2}$$

Como o valor de a se trata da medida de uma distância, então:

$$a = \sqrt{2}$$

Seno, Cosseno e Tangente de 30° , 45° e 60°



$$\text{Seno} = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Cosseno} = \frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Tangente} = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Cateto adjacente}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

O Ciclo Trigonométrico

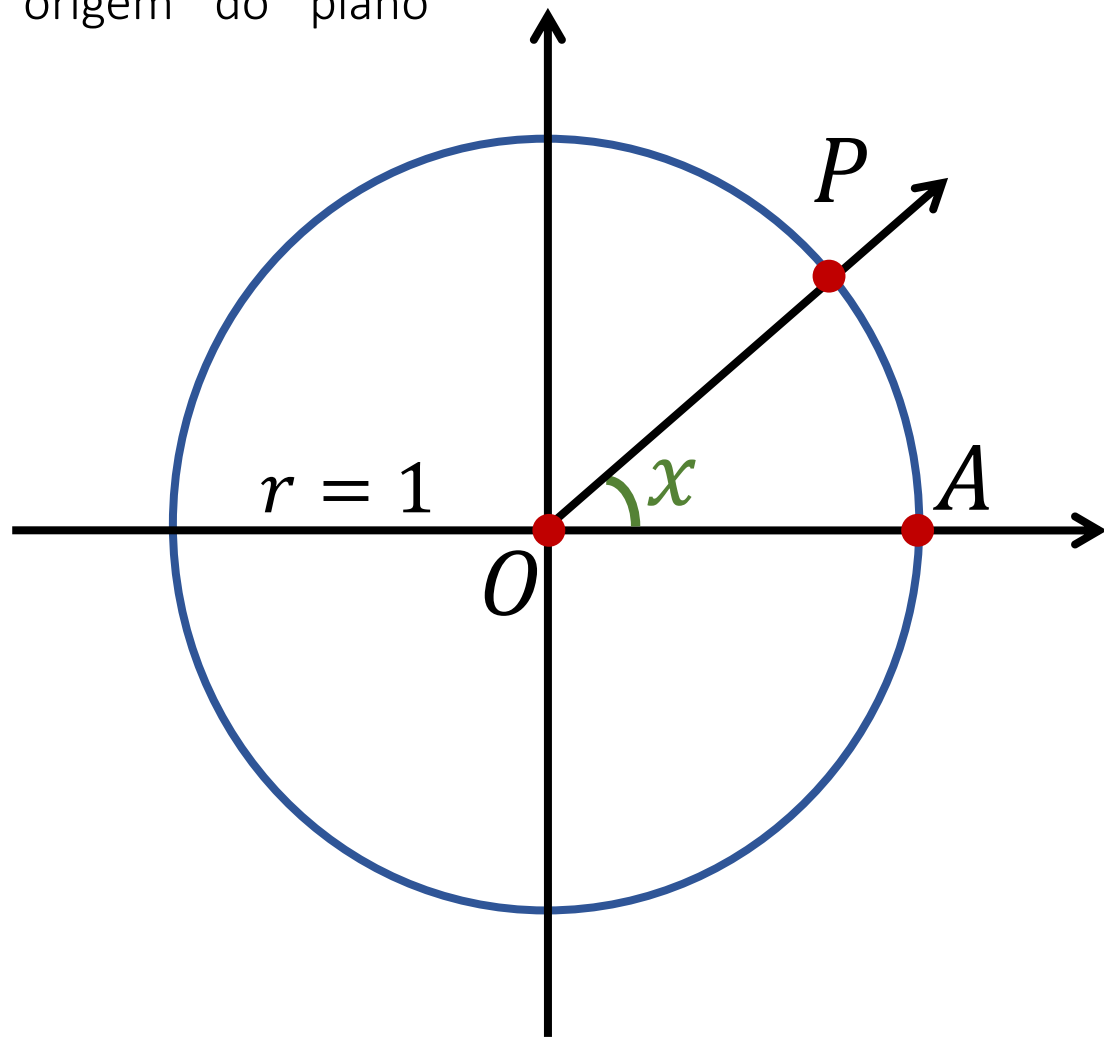
Considerando uma circunferência de raio unitário ($r = 1$) e centro na origem do plano cartesiano.

Fixando os pontos:

$O(0, 0)$

$A(1, 0)$

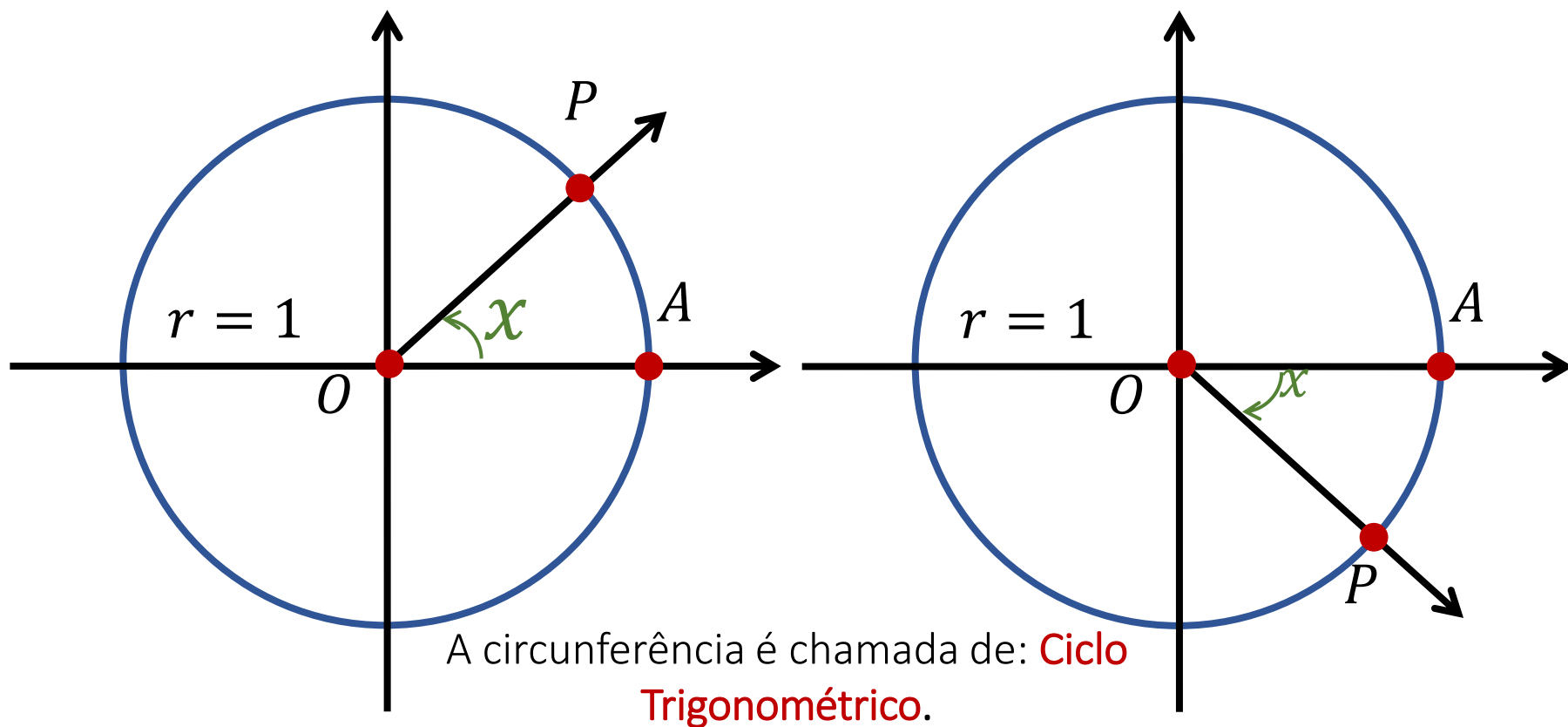
Cada ponto P sobre a circunferência determina um ângulo $x = AOP$.



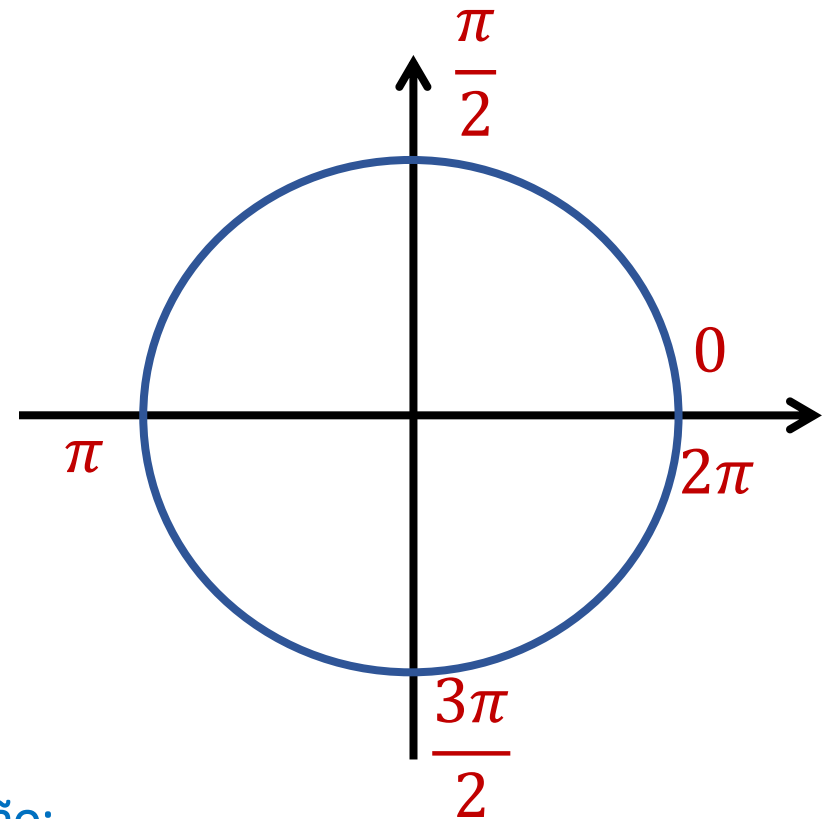
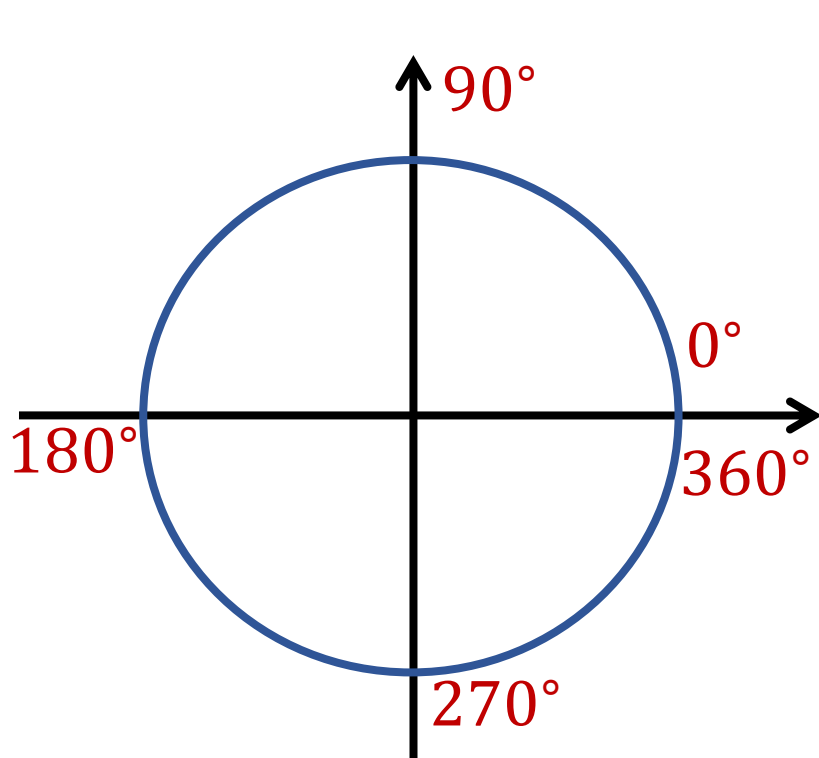
O Ciclo Trigonométrico

Estes ângulos podem ser medidos nos sentidos:

- positivo (**anti-horário**)
- negativo (**horário**)



O Ciclo Trigonométrico



Conversão:

$$180^\circ \longleftrightarrow \pi$$

Graus

Radianos

Exemplos

1) Em cada caso, faça a respectiva conversão:

(a) 120° para radianos.

(b) $\frac{3\pi}{4}$ radianos para graus.

Solução:

(a) 120° para radianos.

Regra de três:	
Graus	Radianos
180°	π
120°	x

$$180x = 120\pi \Rightarrow x = \frac{120\cancel{\pi}}{180\cancel{\pi}} \Rightarrow x = \frac{12\overset{\div 6}{\pi}}{18\underset{\div 6}{\pi}} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

Exemplos

1) Em cada caso, faça a respectiva conversão:

(a) 120° para radianos.

(b) $\frac{3\pi}{4}$ radianos para graus.

Solução:

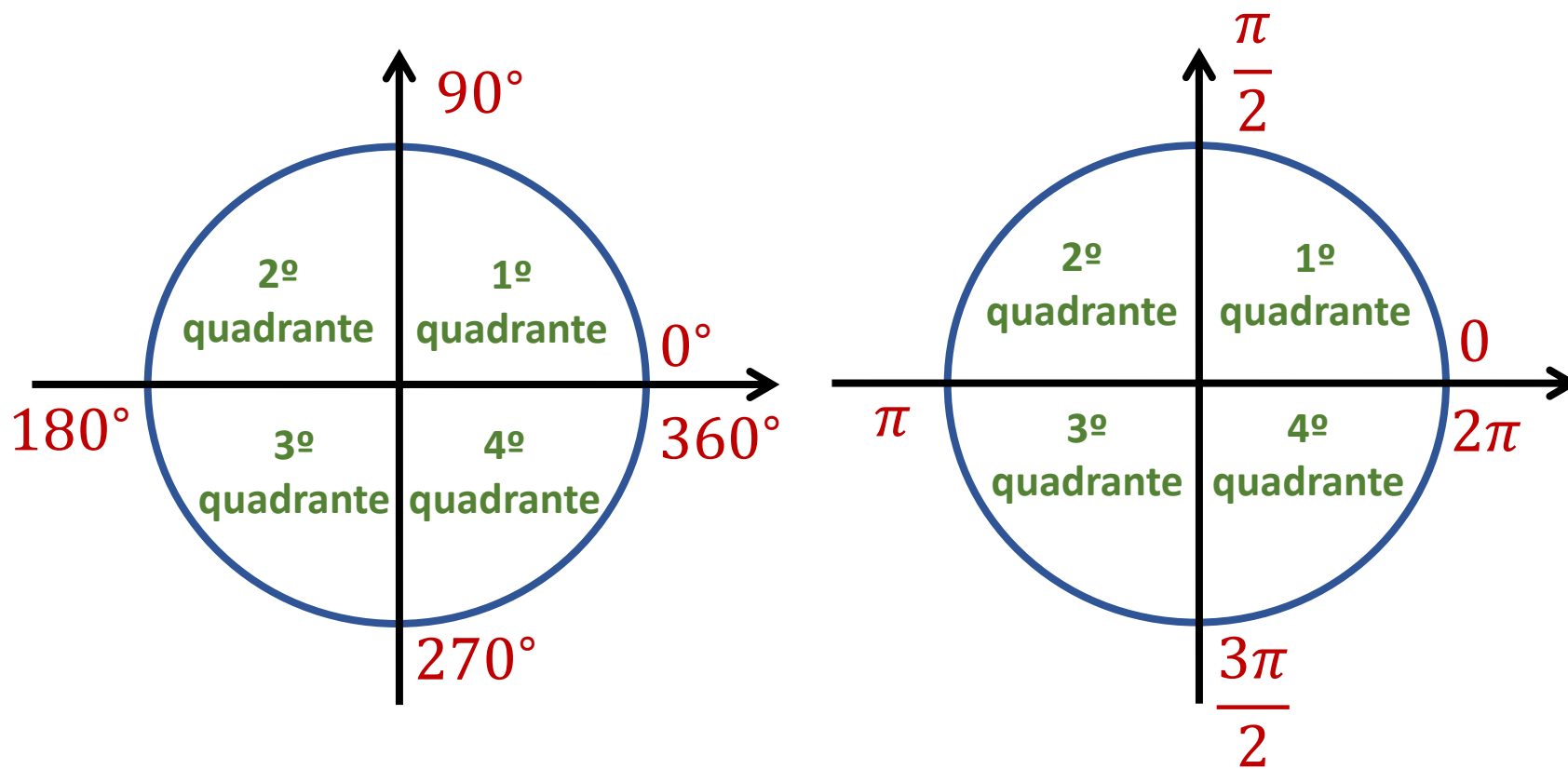
(b) $\frac{3\pi}{4}$ radianos para graus.

Regra de três:	
Graus	Radianos
180°	π
x	$\frac{3\pi}{4}$

$$\pi x = 180 \cdot \left(\frac{3\pi}{4} \right) \Rightarrow x = \left(\frac{540\pi}{\pi} \right) \cdot \frac{1}{\pi} \Rightarrow x = \frac{135\pi}{\pi} \Rightarrow x = 135^\circ$$

O Ciclo Trigonométrico

O ciclo é dividido em quatro regiões (**quadrantes**).



Exemplos

2) Indique em quais quadrantes pertencem os ângulos abaixo:

(a) $\frac{\pi}{6}$

(b) $\frac{3\pi}{4}$

(c) $\frac{4\pi}{3}$

(d) $\frac{11\pi}{6}$

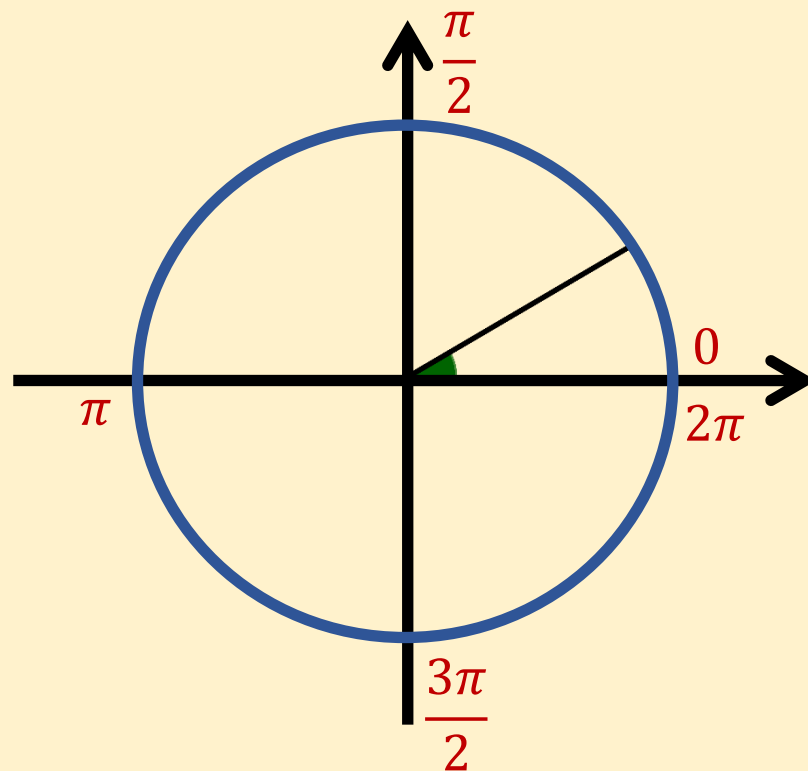
Solução:

$$(a) \frac{\pi}{6} = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$$

Podemos ver que 30° está entre 0° e 90° .

Então, $\frac{\pi}{6}$ está entre 0 e $\frac{\pi}{2}$.

Portanto, $\frac{\pi}{6}$ pertence ao 1º quadrante.



Exemplos

2) Indique em quais quadrantes pertencem os ângulos abaixo:

(a) $\frac{\pi}{6}$

(b) $\frac{3\pi}{4}$

(c) $\frac{4\pi}{3}$

(d) $\frac{11\pi}{6}$

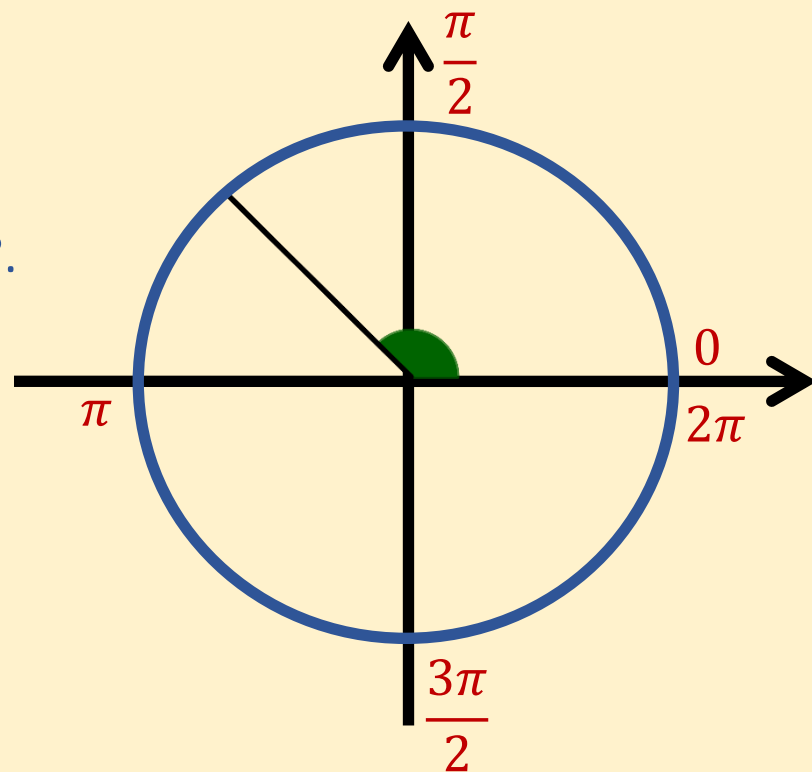
Solução:

$$(b) \frac{3\pi}{4} = \frac{3 \cdot (180^\circ)}{4} = 3 \cdot (45^\circ) = 135^\circ$$

Podemos ver que 135° está entre 90° e 180° .

Então, $\frac{3\pi}{4}$ está entre $\frac{\pi}{2}$ e π .

Portanto, $\frac{3\pi}{4}$ pertence ao 2º quadrante.



Exemplos

2) Indique em quais quadrantes pertencem os ângulos abaixo:

(a) $\frac{\pi}{6}$

(b) $\frac{3\pi}{4}$

(c) $\frac{4\pi}{3}$

(d) $\frac{11\pi}{6}$

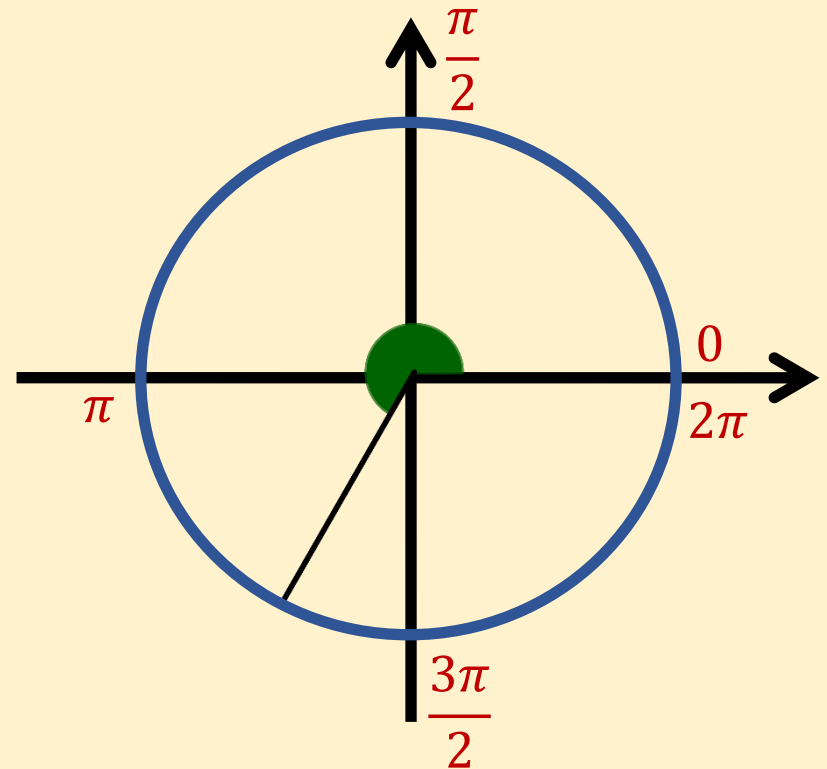
Solução:

$$(c) \frac{4\pi}{3} = \frac{4 \cdot (180^\circ)}{3} = 4 \cdot (60^\circ) = 240^\circ$$

Podemos ver que 240° está entre 180° e 270° .

Então, $\frac{4\pi}{3}$ está entre π e $\frac{3\pi}{2}$.

Portanto, $\frac{4\pi}{3}$ pertence ao 3º quadrante.



Exemplos

2) Indique em quais quadrantes pertencem os ângulos abaixo:

(a) $\frac{\pi}{6}$

(b) $\frac{3\pi}{4}$

(c) $\frac{4\pi}{3}$

(d) $\frac{11\pi}{6}$

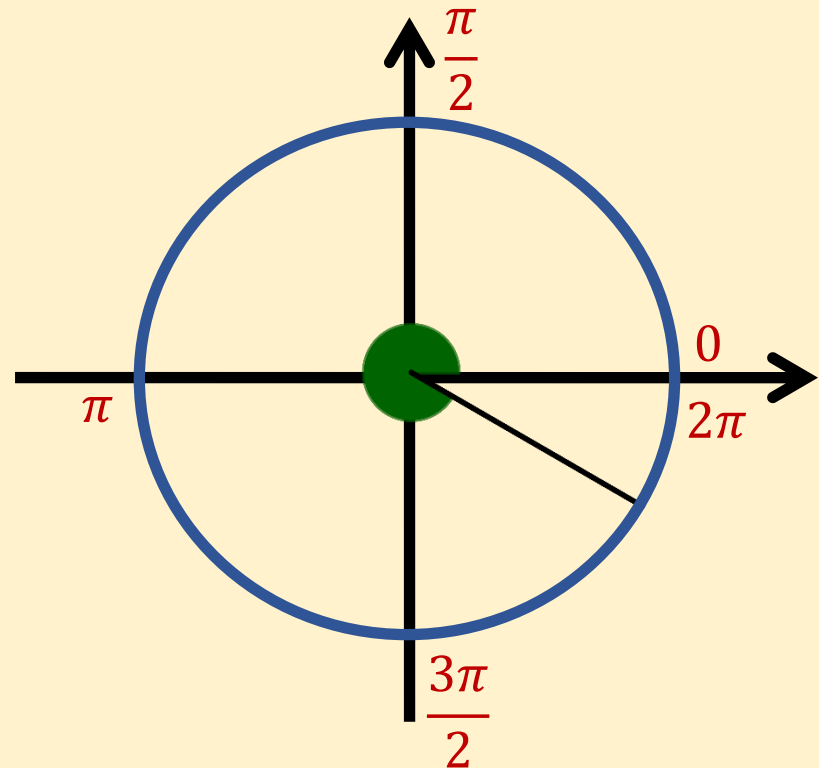
Solução:

$$(d) \frac{11\pi}{6} = \frac{11 \cdot (180^\circ)}{6} = 11 \cdot (30^\circ) = 330^\circ$$

Podemos ver que 330° está entre 270° e 360° .

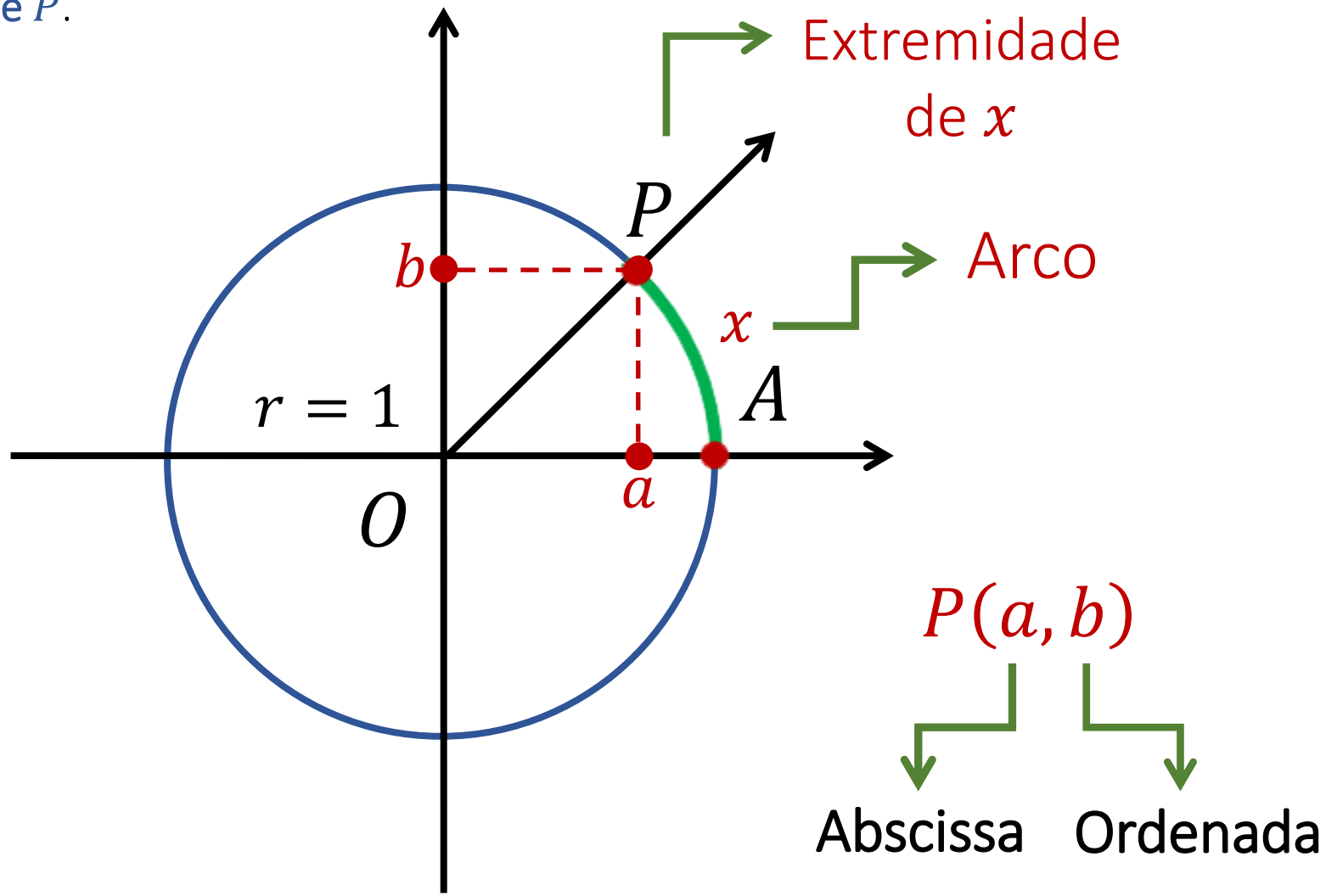
Então, $\frac{11\pi}{6}$ está entre $\frac{3\pi}{2}$ e 2π .

Portanto, $\frac{11\pi}{6}$ pertence ao 4º quadrante.



Trigonometria no Ciclo Trigonométrico

A cada ponto $P(a, b)$ no ciclo trigonométrico está associado um arco x de extremidade P .



Trigonometria no Ciclo Trigonométrico

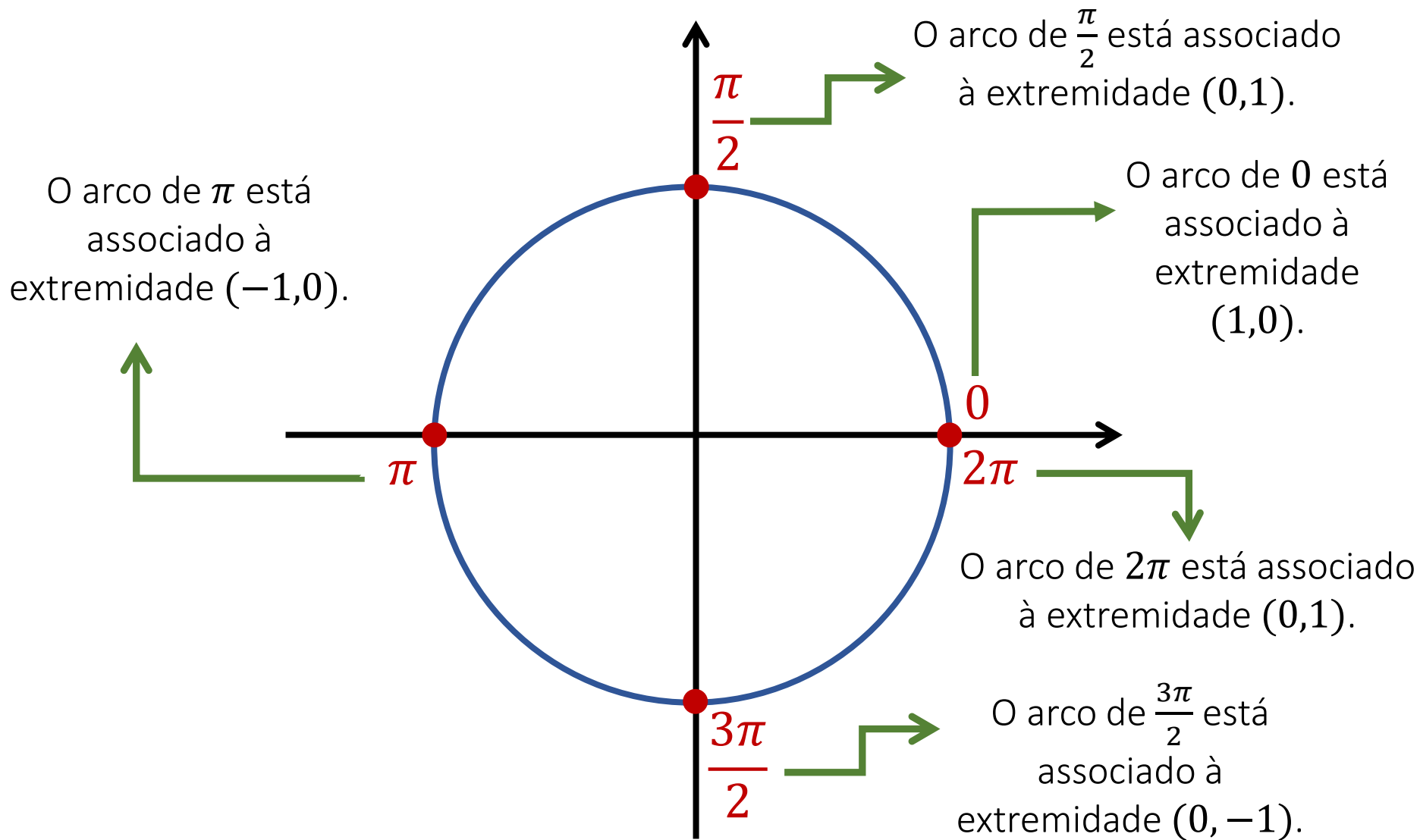


Imagem dos Arcos Especiais no Ciclo

Extremidade do arco $\frac{\pi}{6}$ e seus correspondentes:

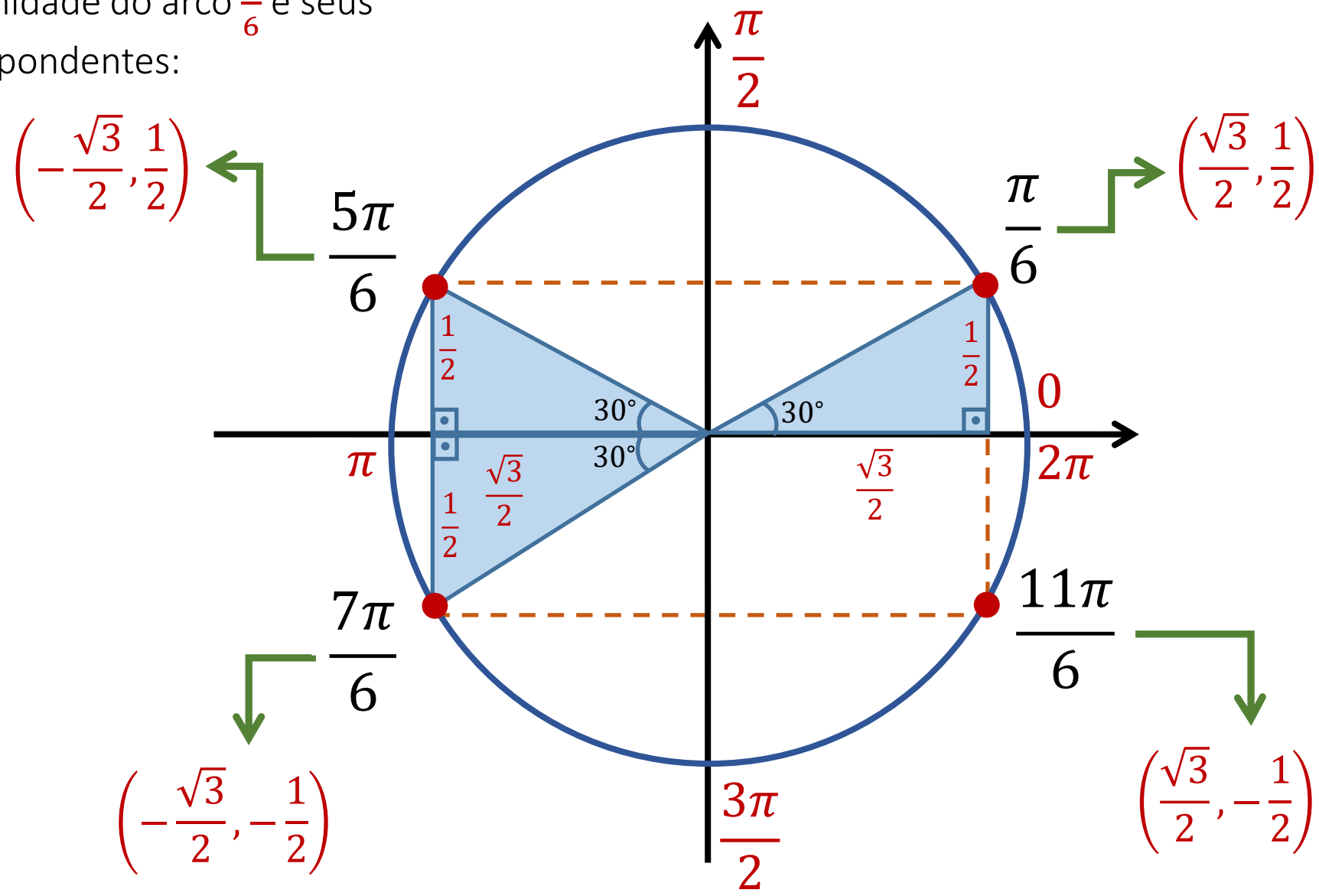


Imagem dos Arcos Especiais no Ciclo

Extremidade do arco $\frac{\pi}{4}$ e seus correspondentes:

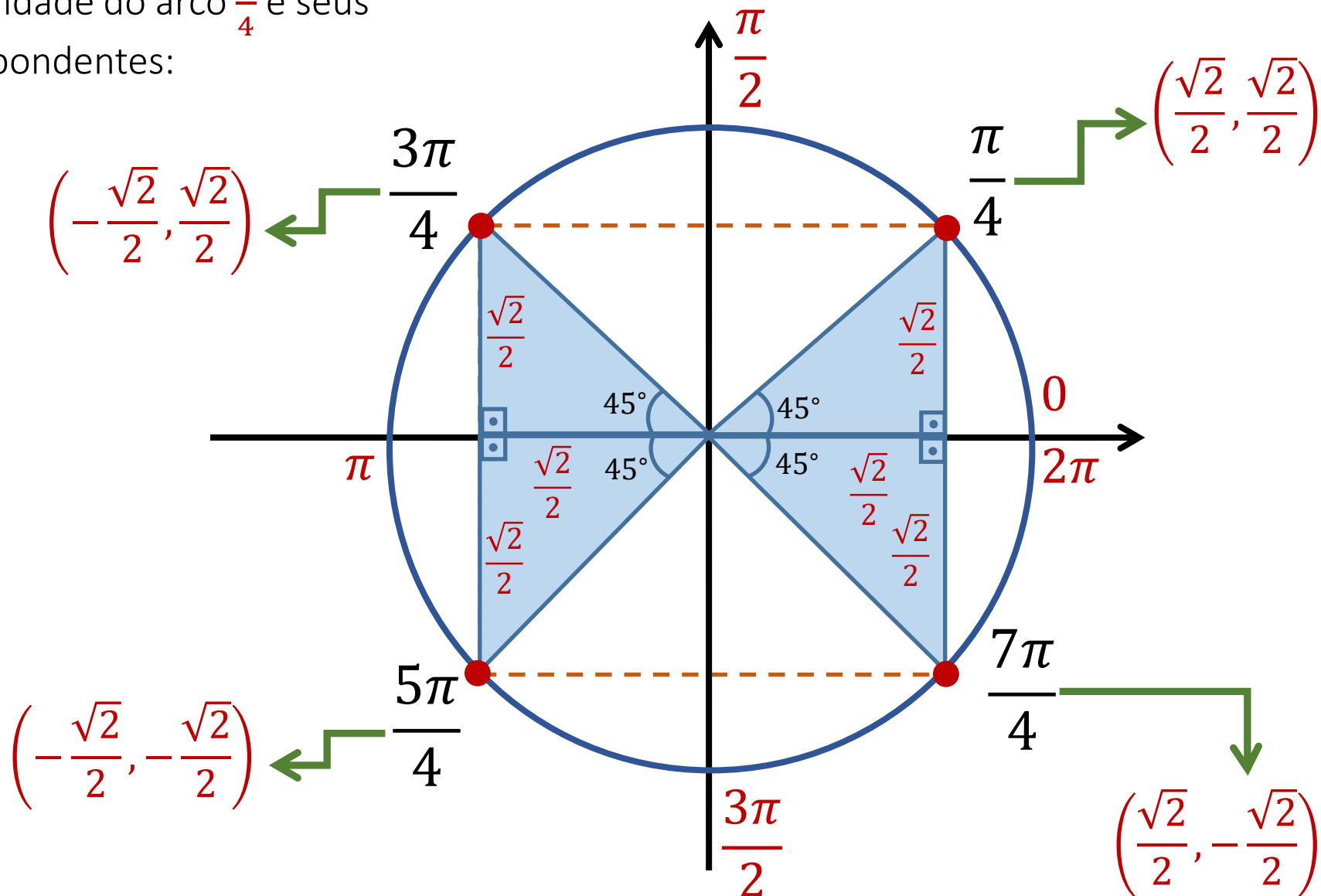
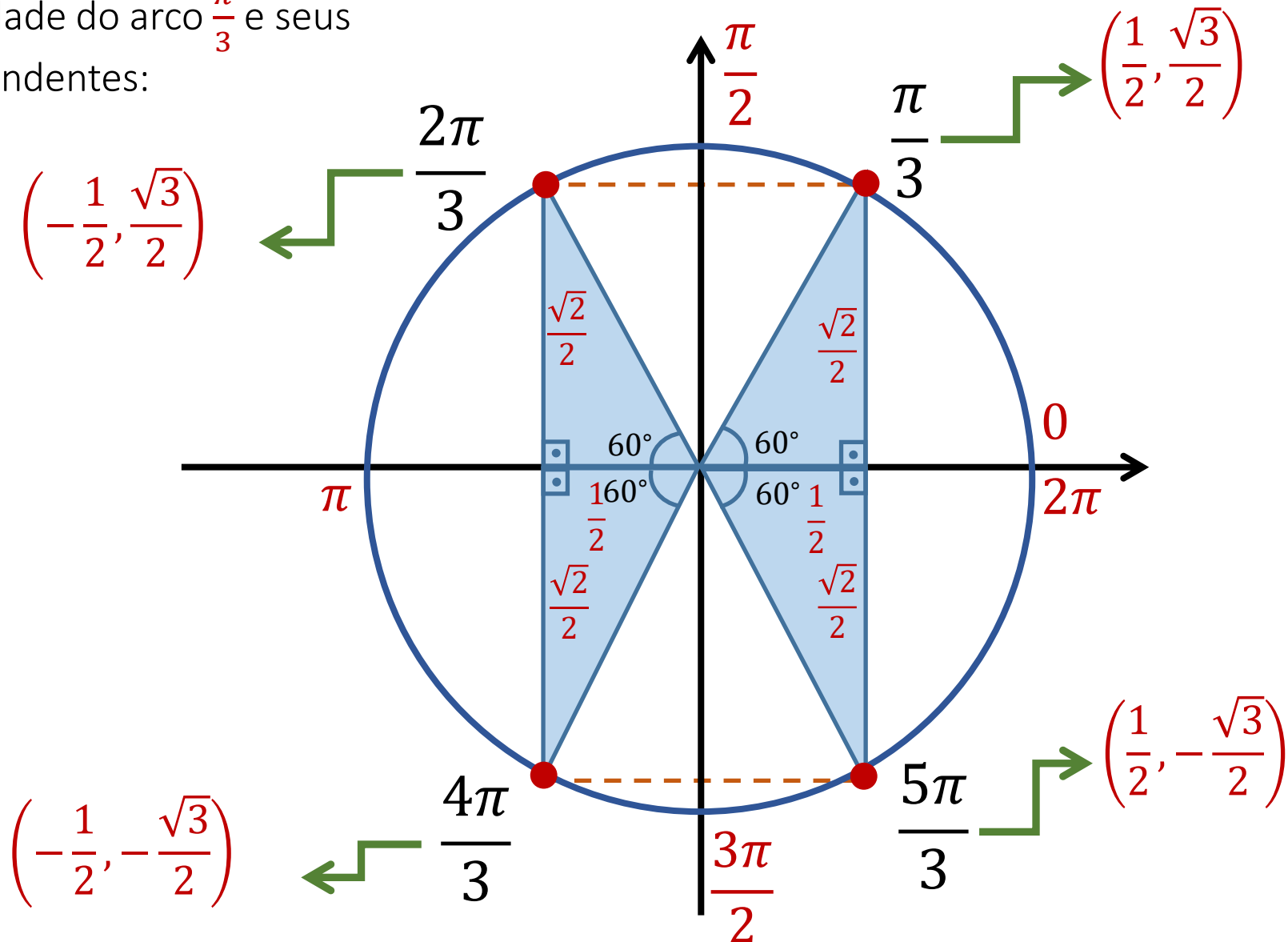


Imagem dos Arcos Especiais no Ciclo

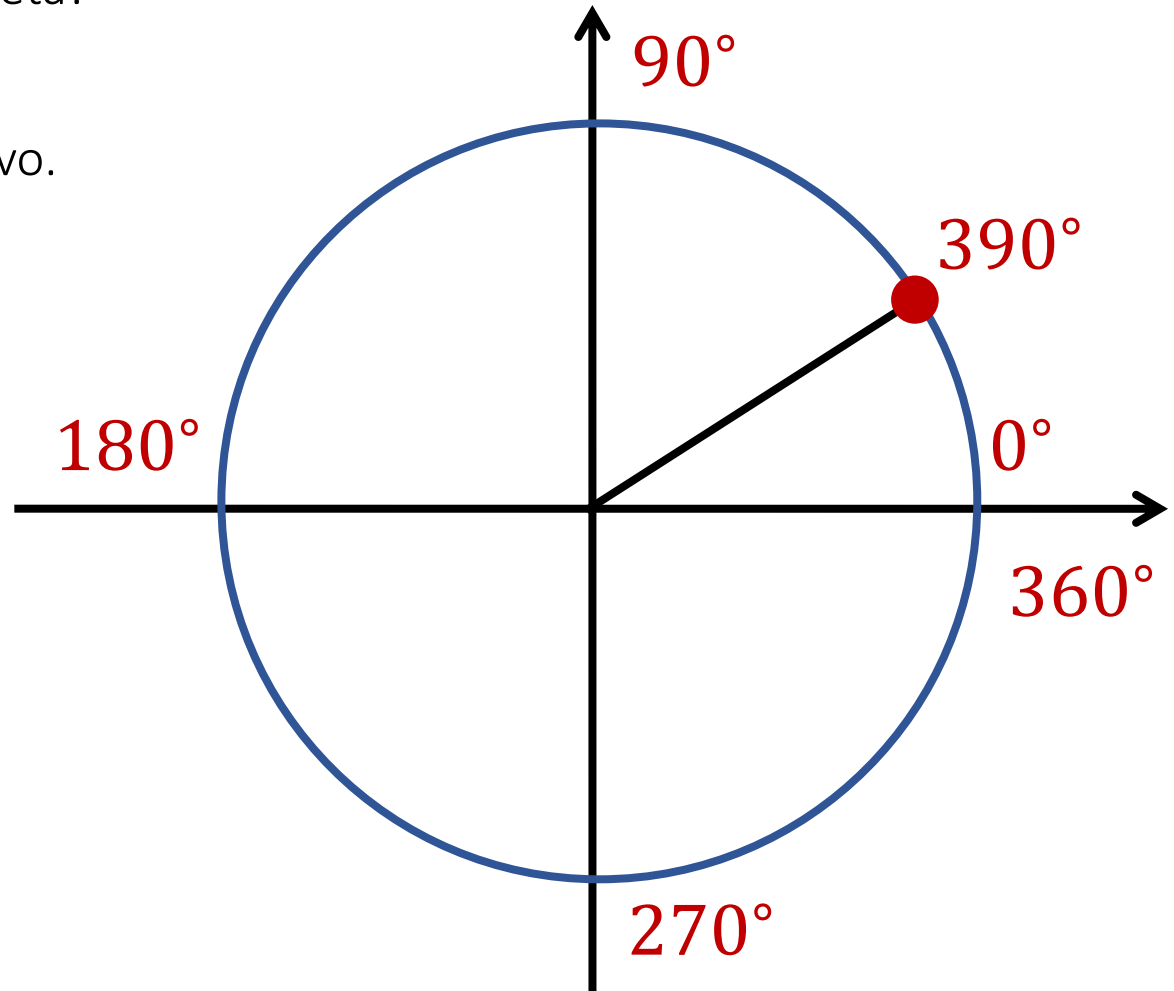
Extremidade do arco $\frac{\pi}{3}$ e seus correspondentes:



Arcos Côngruos

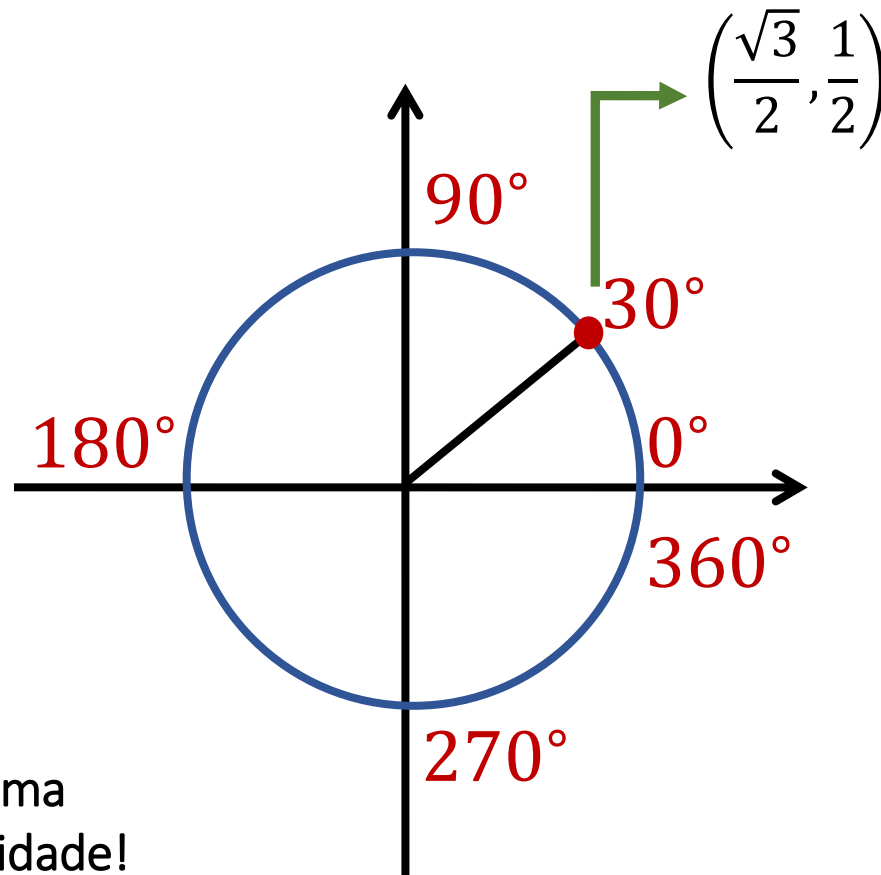
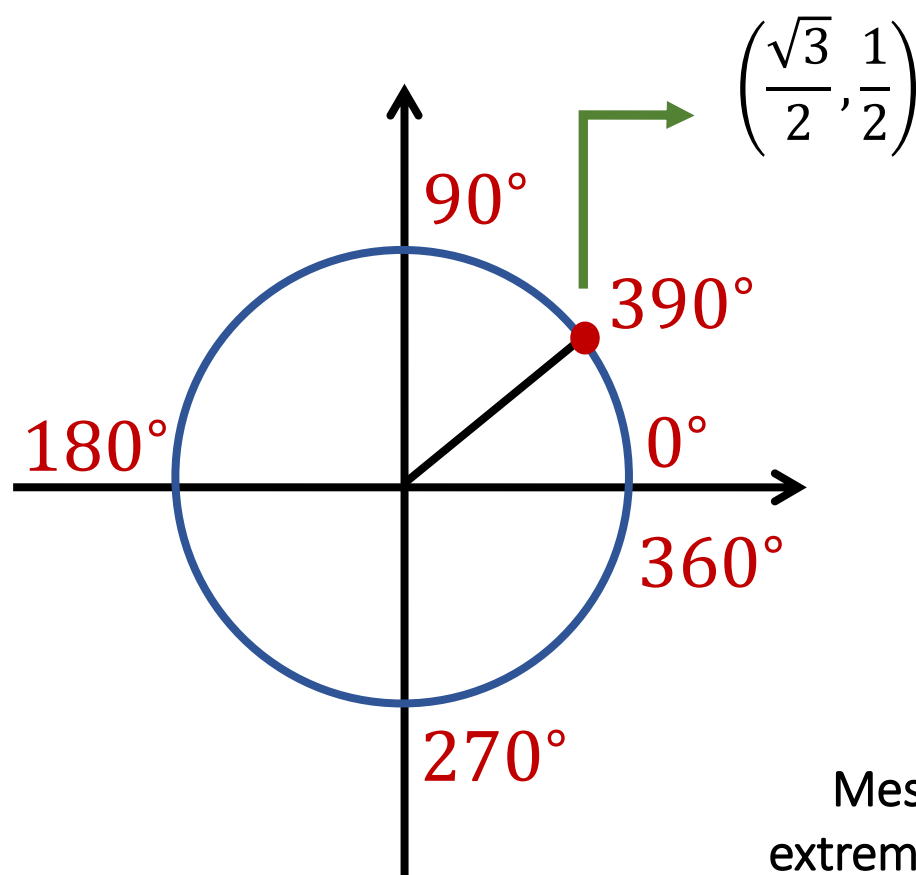
Existem casos em que um arco por de ser maior que uma volta completa!

- ✓ Tanto no sentido positivo.
- ✓ Quanto no sentido negativo.



Exemplos

1) Note que o arco de 390° equivale a uma volta completa (360°) mais um arco de 30° .



Mesma
extremidade!

Arcos Côngruos

Definição:

Dois arcos α_1 e α_2 são ditos **côngruos ou congruentes** se ambos possuem a mesma extremidade (mesma abscissa e mesma ordenada) no ciclo trigonométrico.

Ou seja, α_1 e α_2 diferem apenas por um certo número de voltas completas.

A **expressão geral** que define todos os demais arcos congruentes a α_0 é dada por:

Arcos dados em graus

$$\alpha = \alpha_0 + k \cdot (360^\circ)$$

Número de voltas completas

Arcos dados em radianos

$$\alpha = \alpha_0 + k \cdot (2\pi)$$

Número de voltas completas

Exemplos

1) Determine a expressão geral de cada arco dado:

(a) 150°

(b) $\frac{4\pi}{3}$

Solução:

(a) 150°

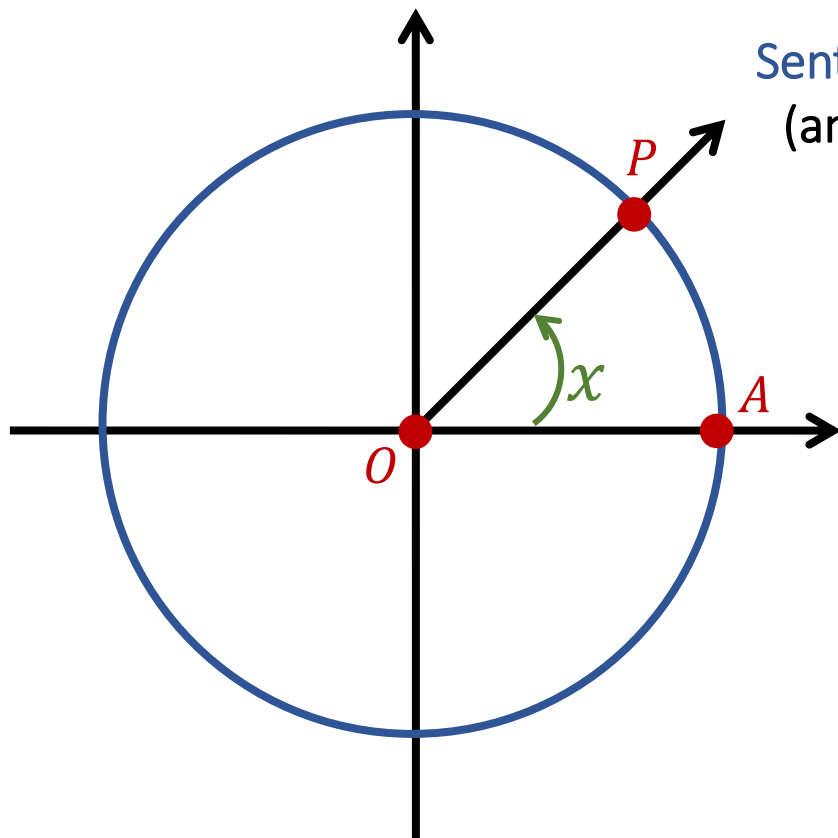
$$\alpha = 150^\circ + k \cdot (360^\circ)$$

(b) $\frac{4\pi}{3}$

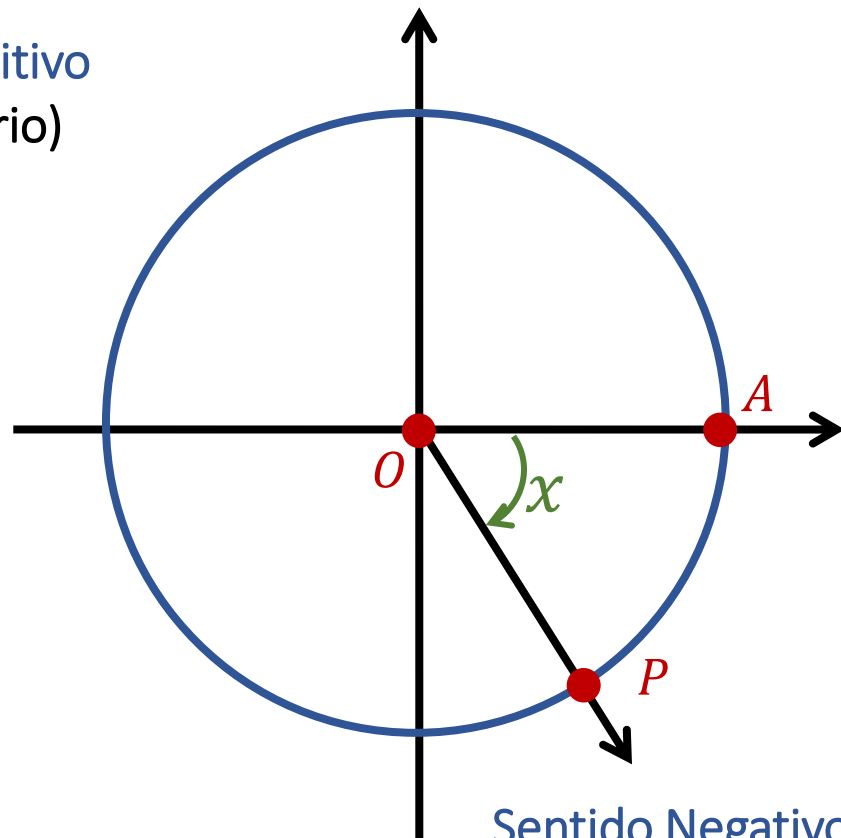
$$\alpha = \frac{4\pi}{3} + k \cdot (2\pi)$$

Voltas no Ciclo Trigonométrico

Fixados os pontos O e A , cada ponto P sobre o Ciclo, determina um ângulo $x = AOP$, que pode ser medido nos sentidos **positivo** ou **negativo**.



Sentido Positivo
(anti-horário)



Sentido Negativo
(horário)

Menor determinação positiva

Definição:

O menor arco congruente a α tal que $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ (graus) ou $0 \leq \alpha < 2\pi$ (radianos) é chamado de **menor determinação positiva**.

Menor determinação positiva

$$0^\circ \leq \alpha_0 < 360^\circ$$

$$\alpha = \alpha_0 + k \cdot (360^\circ)$$

Número de voltas
completas

Menor determinação positiva

$$0^\circ \leq \alpha_0 < 2\pi$$

$$\alpha = \alpha_0 + k \cdot (2\pi)$$

Número de voltas
completas

Menor determinação positiva

$$\alpha = \alpha_0 + k \cdot (360^\circ)$$

$$\alpha = \alpha_0 + k \cdot (2\pi)$$

Nas expressões acima, $k \in \mathbb{Z}$.

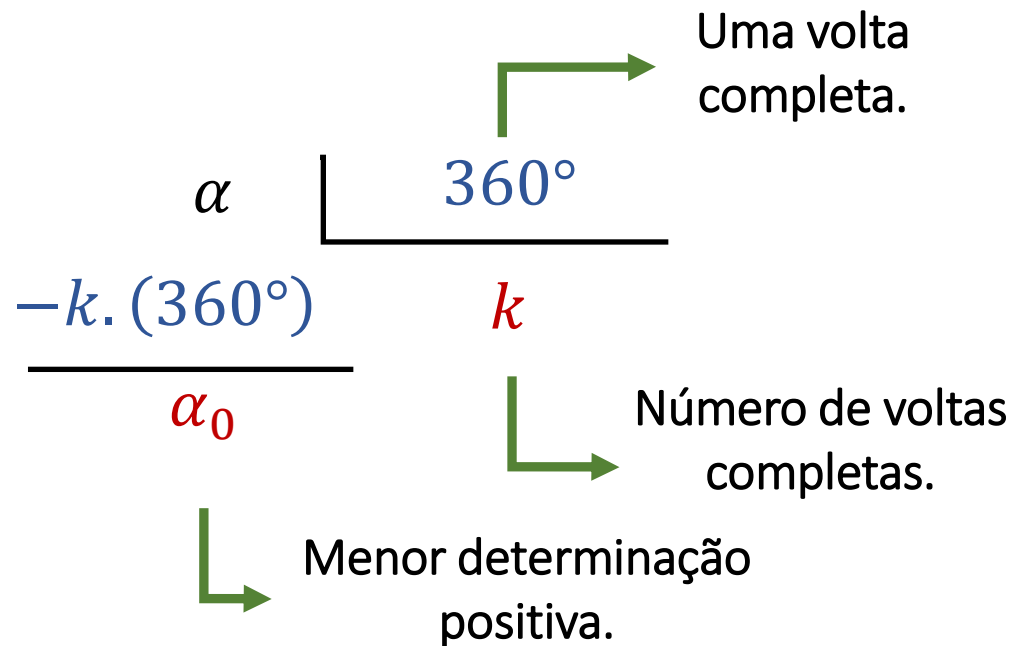
- ✓ $k > 0$ indica n voltas no **sentido anti-horário**.
(sentido positivo do ciclo)
- ✓ $k < 0$ indica n voltas no **sentido horário**.
(sentido negativo do ciclo)

A menor determinação positiva de um arco α é encontrada da seguinte maneira:

Menor determinação positiva

Se $\alpha > 0$ temos que o o ponto deu n voltas no **sentido anti-horário**, ou seja, no **sentido positivo**!

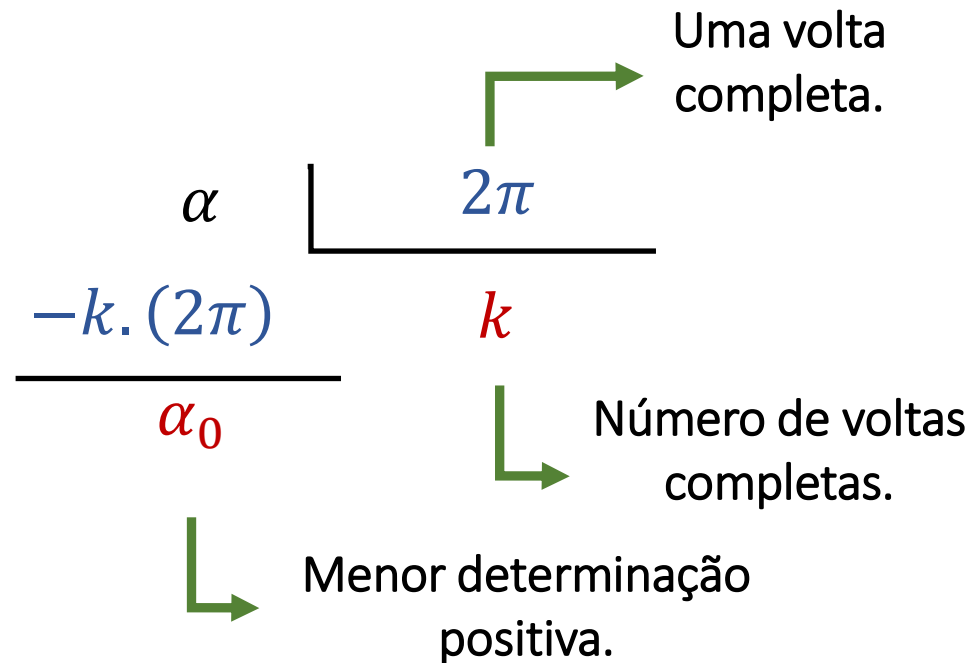
Logo:



Menor determinação positiva

Se $\alpha > 0$ temos que o o ponto deu n voltas no **sentido anti-horário**, ou seja, no **sentido positivo**!

Logo:



Menor determinação positiva

A menor determinação positiva de um arco α é encontrada da seguinte maneira:

Se $\alpha < 0$ temos que o número o ponto deu n voltas no **sentido horário**, ou seja, no **sentido negativo**!

Logo:

Fazemos a soma, até obtermos um arco positivo.

$$\alpha + 360^\circ \quad \text{ou} \quad \alpha + 2\pi$$

Exemplos

2) Encontre a menor determinação positiva do arco:

(a) 390°

(b) 840°

(c) -1024°

(d) $-\frac{21\pi}{4}$

Solução:

$$\begin{array}{r} 390^\circ \\ -360^\circ \\ \hline 30^\circ \end{array} \quad \begin{array}{l} 360^\circ \\ 1 \end{array}$$

Logo, $390^\circ = 30^\circ + 1 \cdot (360^\circ)$

Portanto a menor determinação positiva de 390° será 30° .

$$\begin{array}{r} 840^\circ \\ -720^\circ \\ \hline 120^\circ \end{array} \quad \begin{array}{l} 360^\circ \\ 2 \end{array}$$

Logo, $840^\circ = 120^\circ + 2 \cdot (360^\circ)$

Portanto a menor determinação positiva de 840° será 120° .

Exemplos

2) Encontre a menor determinação positiva do arco:

(a) 390°

(b) 840°

(c) -1024°

(d) $-\frac{21\pi}{4}$

Solução:

(c) -1024°

$$-1024^\circ + 360^\circ = -664^\circ$$

$$\Rightarrow -664^\circ + 360^\circ = -304^\circ$$

$$\Rightarrow -304^\circ + 360^\circ = 56^\circ$$

Portanto a menor determinação positiva de -1024° será 56° .

(d) $-\frac{21\pi}{4}$

$$-\frac{21\pi}{4} + 2\pi = \frac{-21\pi + 8\pi}{4} = -\frac{13\pi}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{13\pi}{4} + 2\pi = \frac{-13\pi + 8\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{5\pi}{4} + 2\pi = \frac{-5\pi + 8\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

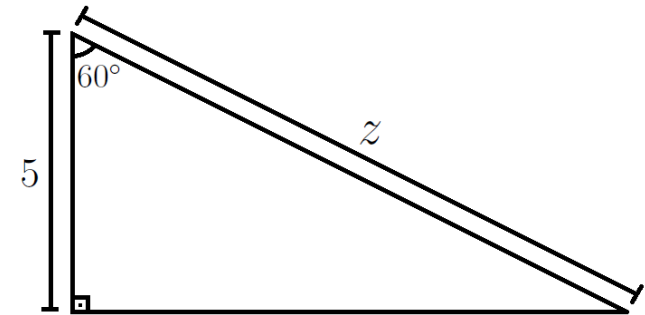
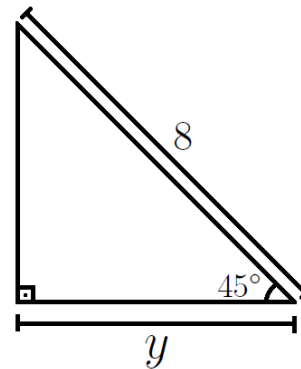
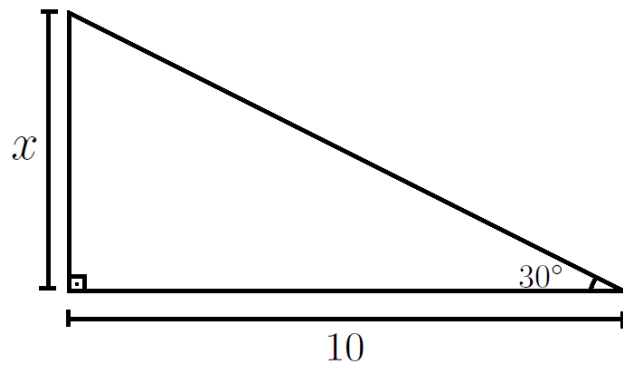
Portanto a menor determinação positiva de $-\frac{21\pi}{4}$ será $\frac{3\pi}{4}$.

Exercícios Propostos

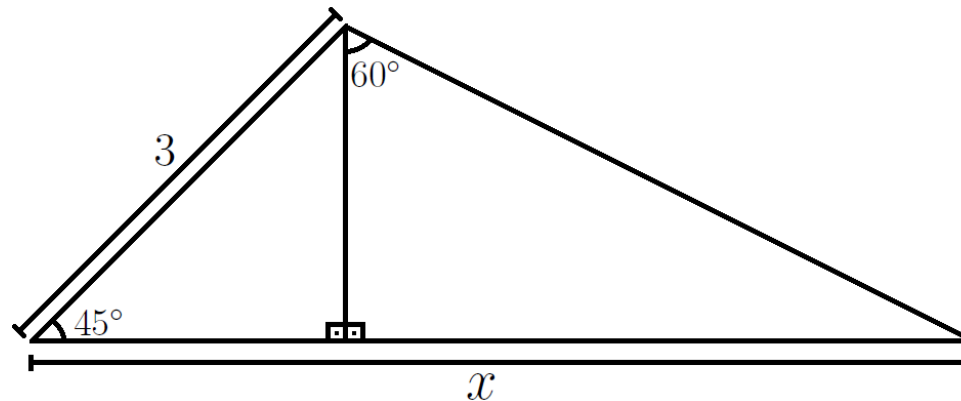


Exercícios

1) Em cada caso, determine os valores de x , y e z .



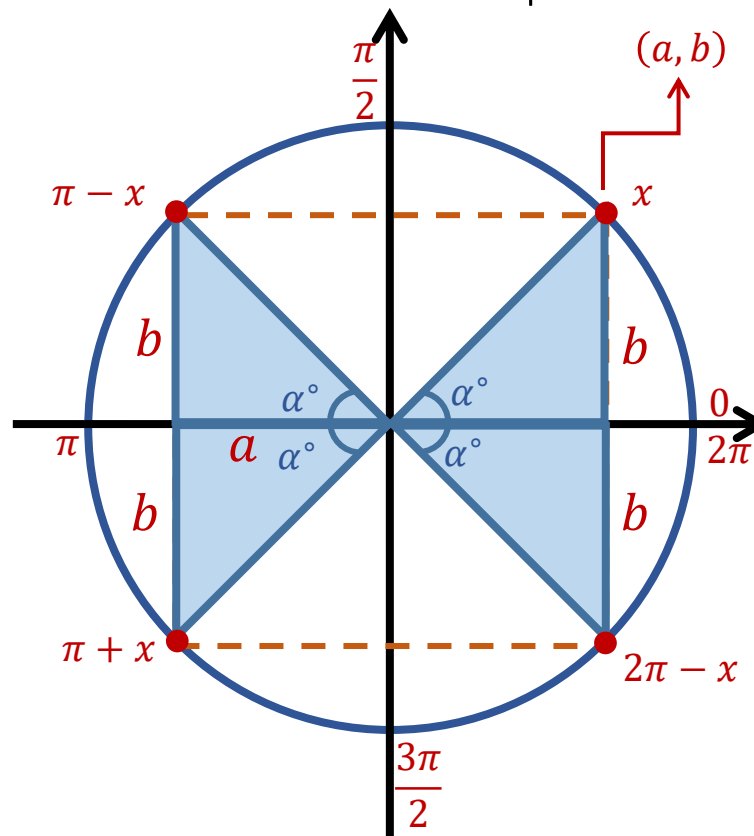
2) Determine o valor de x .



Exercícios

3) Considerando o arco x representado no ciclo trigonométrico abaixo, determine e represente no ciclo os arcos e as respectivas coordenadas correspondentes ao arco x nos demais quadrantes:

$x \longrightarrow (a, b)$



4) Em cada caso, encontre a menor determinação positiva do arco dado.

- (a) 2205° (b) -840° (c) -1440° (d) 9π (e) $-\frac{37\pi}{3}$

Respostas

Exercício 1:

$$x = \frac{10\sqrt{3}}{3} \quad y = 4\sqrt{2} \quad z = 10$$

Exercício 2:

$$x = \frac{3\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{3})$$

Exercício 3:

a) 45° e) $\frac{5\pi}{3}$

b) 240°

c) 0

d) π

Exercício 3:

Correspondente de x no segundo quadrante

$$\pi - x \longrightarrow (-a, b)$$

Correspondente de x no terceiro quadrante

$$\pi + x \longrightarrow (-a, -b)$$

Correspondente de x no quarto quadrante

$$2\pi - x \longrightarrow (a, -b)$$

55 Monitorias!!



Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

<http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias>

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

<http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA>

O GAMA possui monitorias de:

- ☐ Matemática Elementar, Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e equivalentes)
 - ☐ ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
 - ☐ Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3 (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.



Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino



Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas

Aula 02

Projeto

GAMA

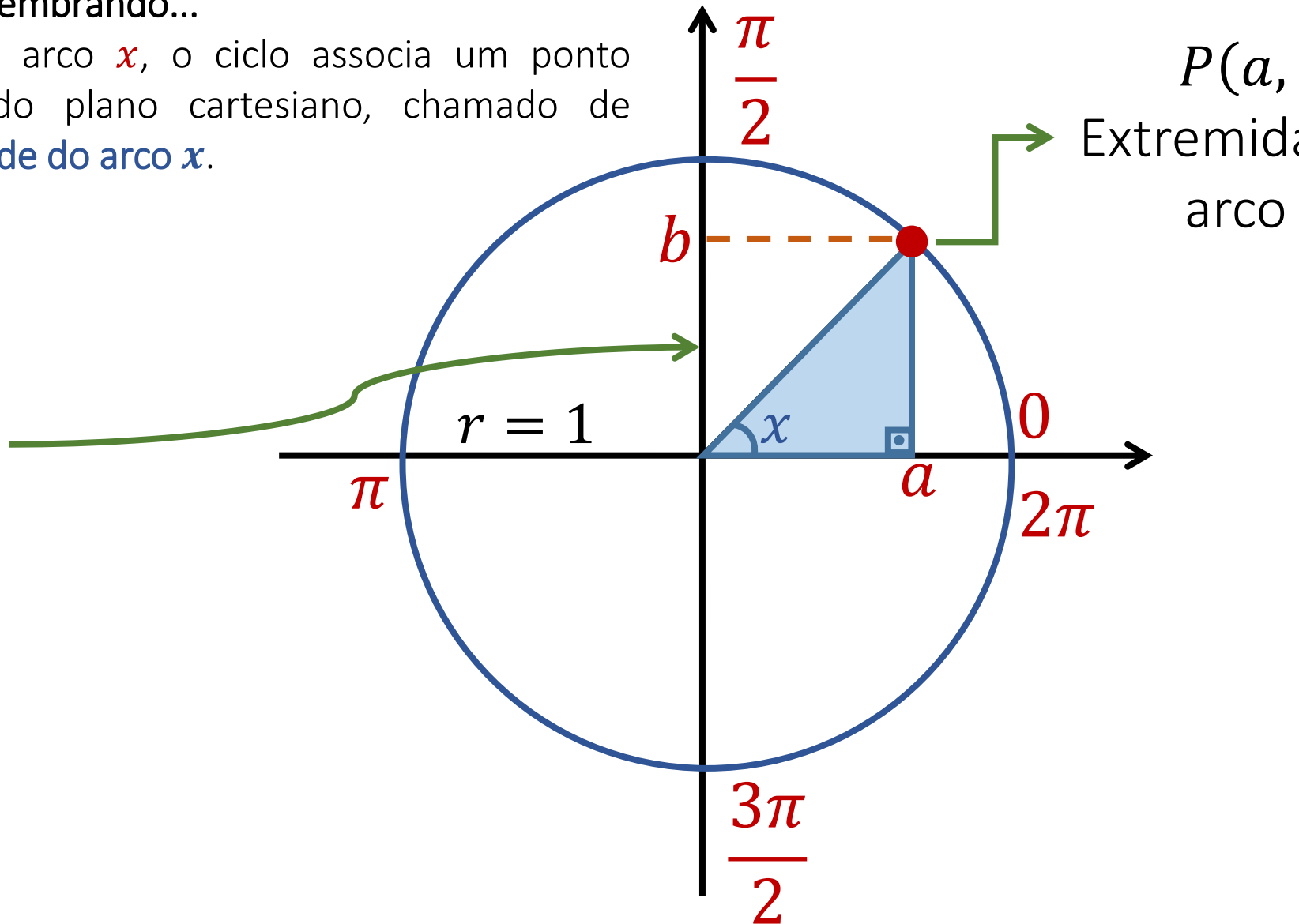
Grupo de Apoio em
Matemática

Seno e Cosseno no Ciclo Trigonométrico

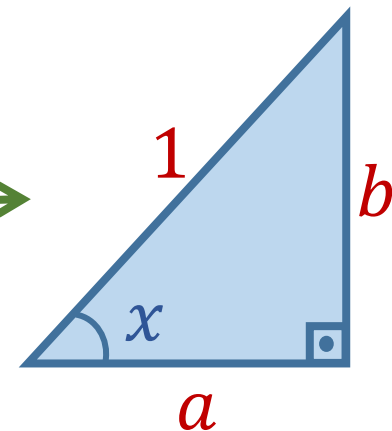
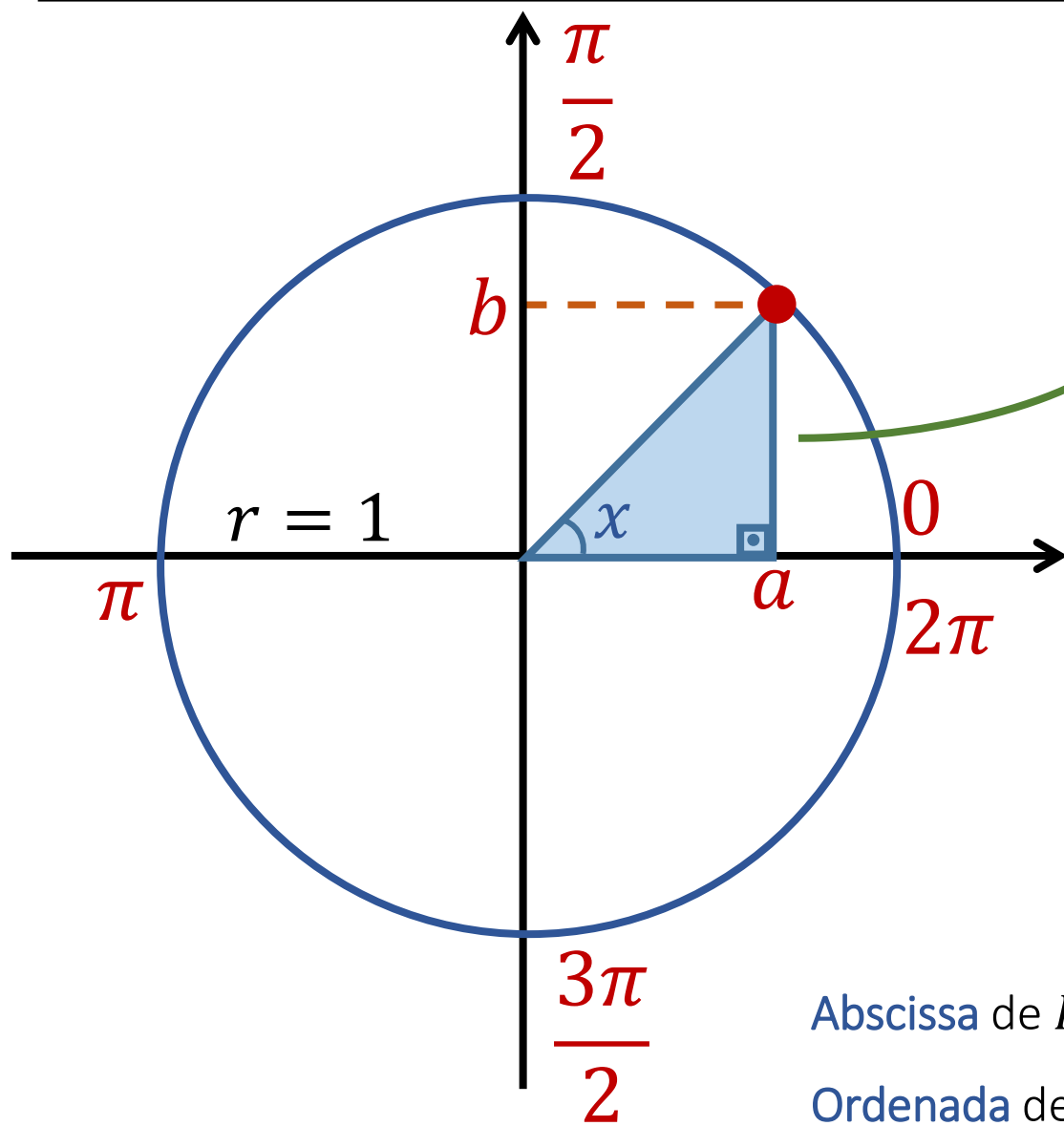
Lembrando...

Para cada arco x , o ciclo associa um ponto $P(a, b)$ do plano cartesiano, chamado de **extremidade do arco x** .

Logo



Seno e Cosseno no Ciclo Trigonométrico



$$\sin x = \frac{b}{1} = b$$

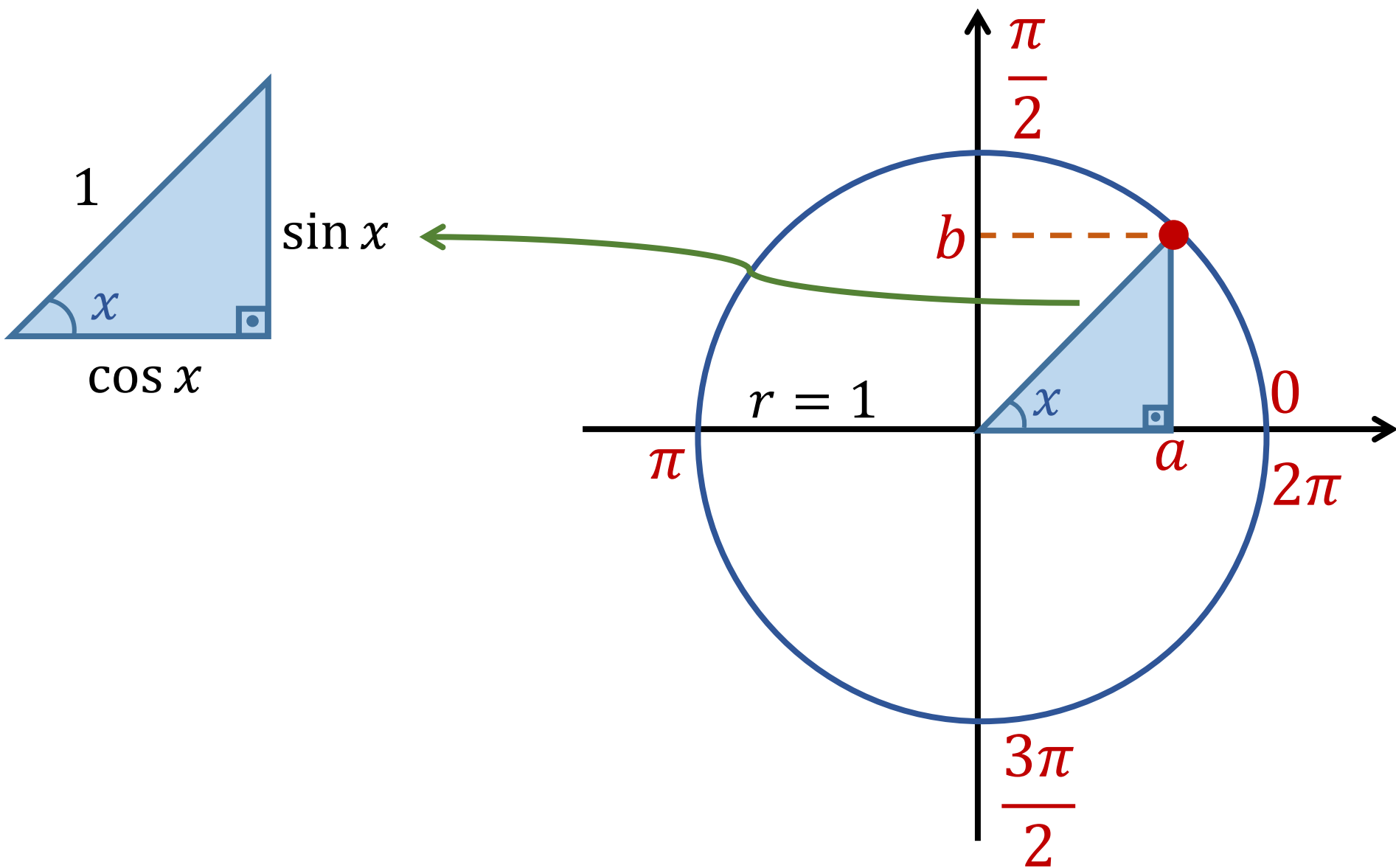
$$\cos x = \frac{a}{1} = a$$

Portanto:

Abscissa de P é igual ao **cosseno** do arco x .

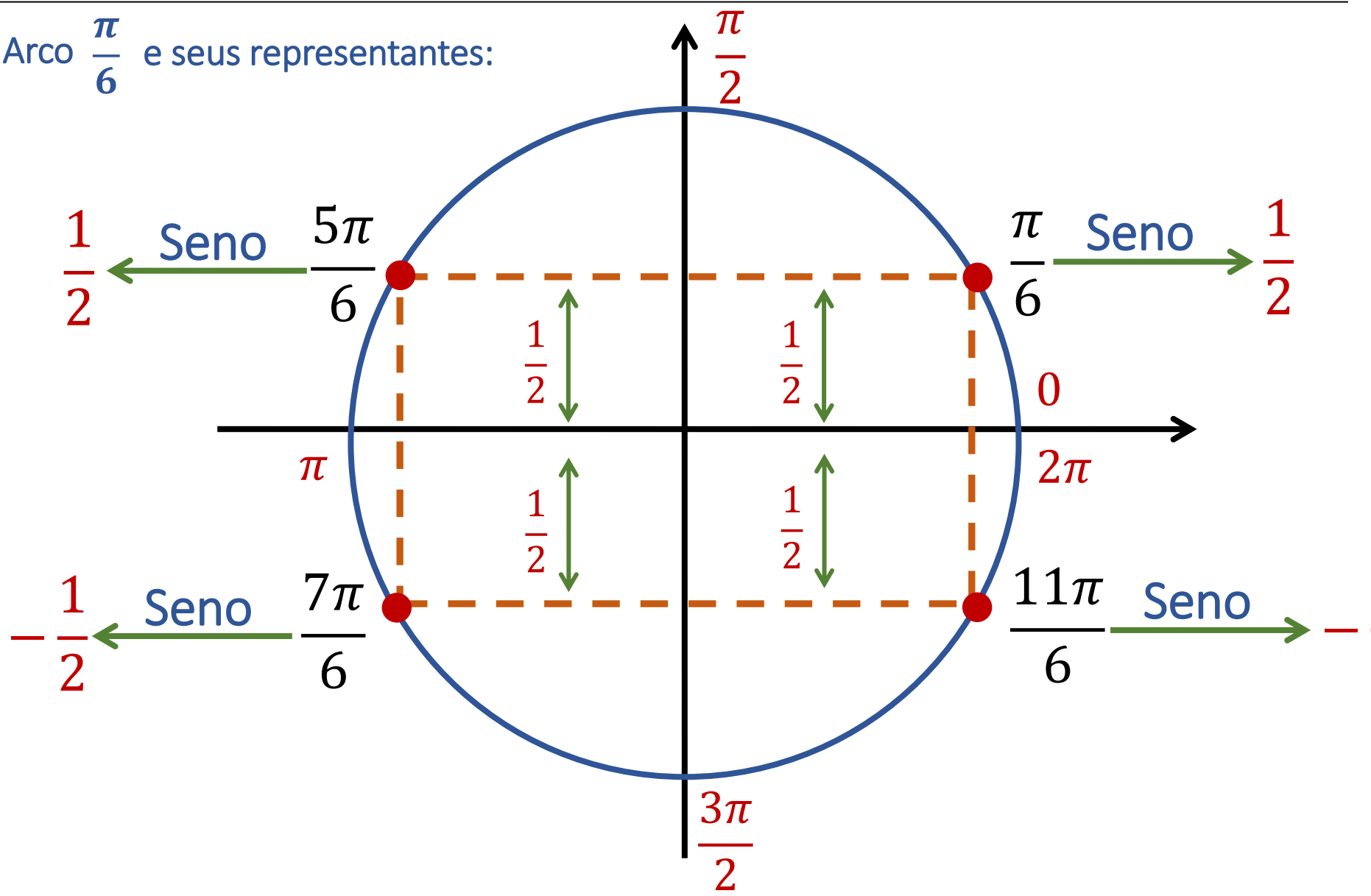
Ordenada de P é igual ao **seno** do arco x .

Seno e Cosseno no Ciclo Trigonométrico



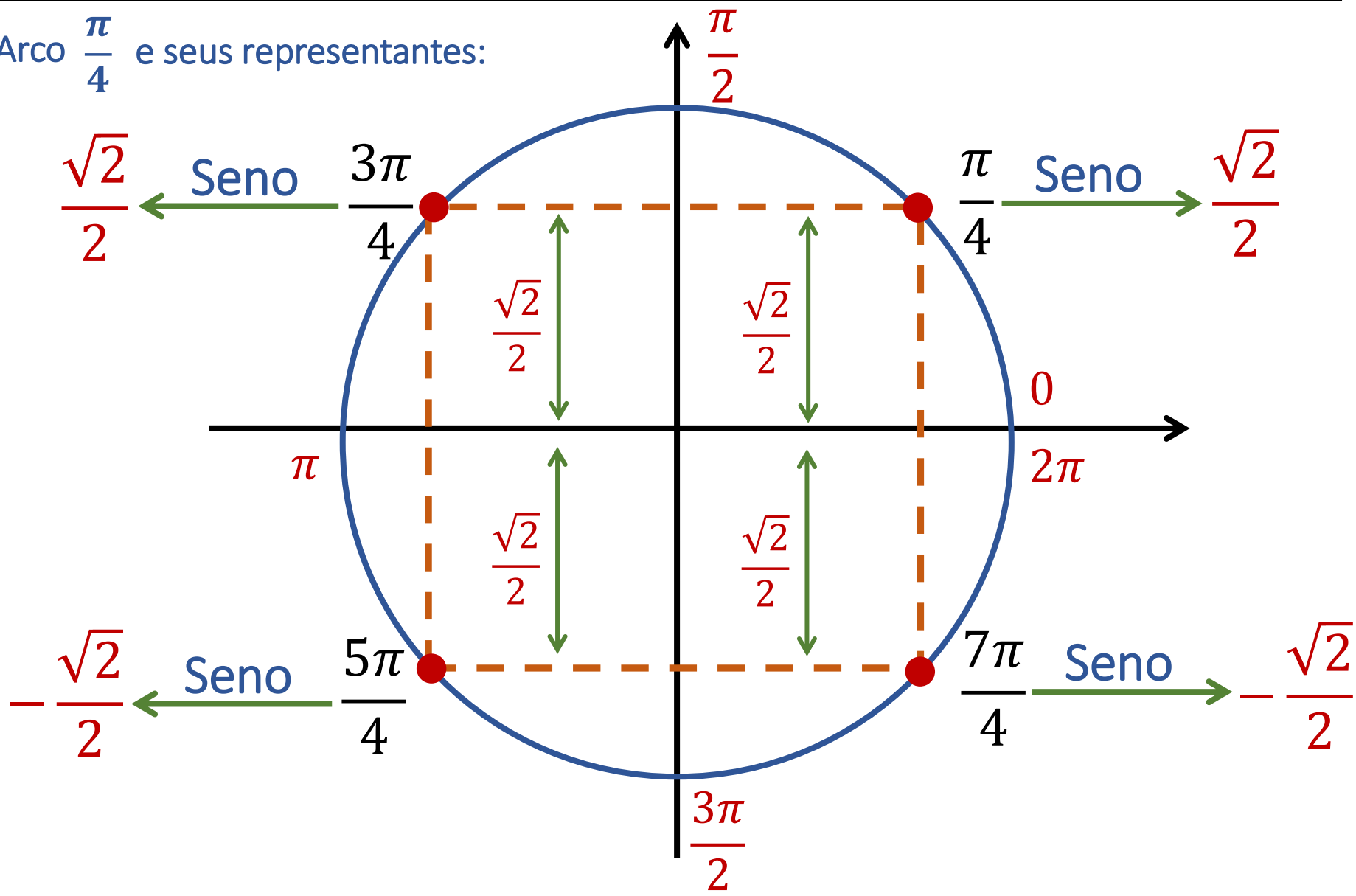
Seno dos arcos notáveis

Arco $\frac{\pi}{6}$ e seus representantes:



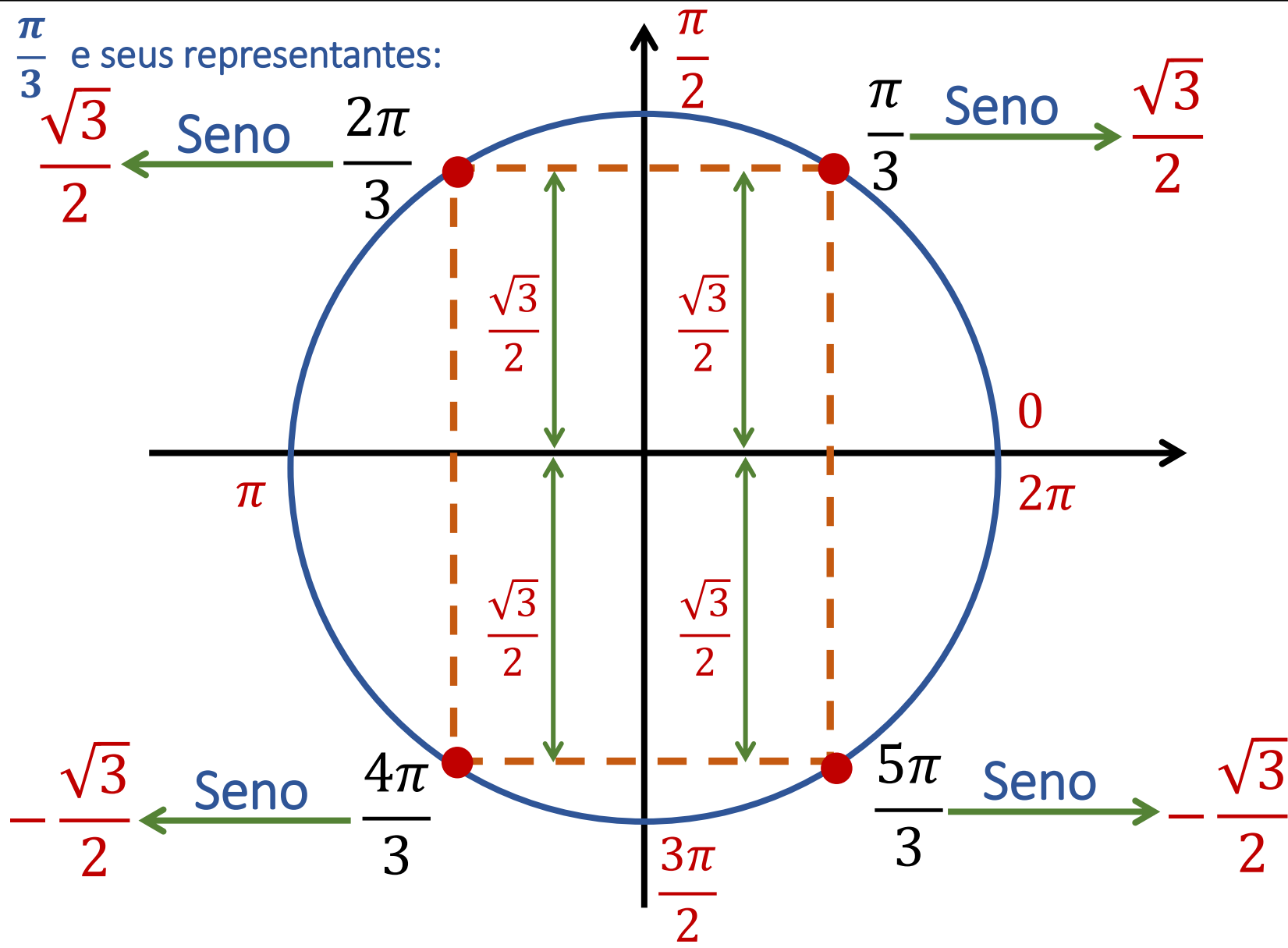
Seno dos arcos notáveis

Arco $\frac{\pi}{4}$ e seus representantes:



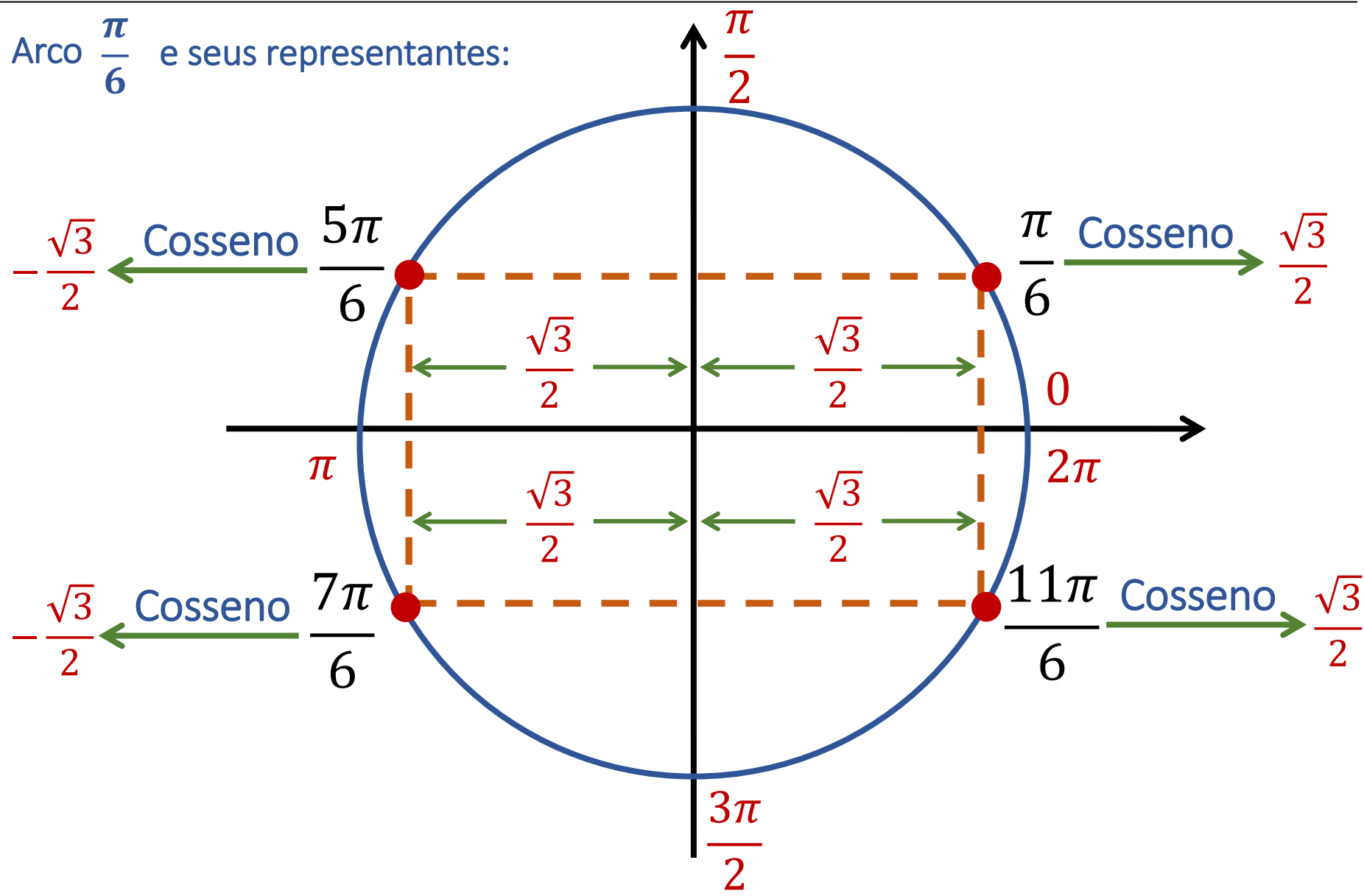
Seno dos arcos notáveis

Arco $\frac{\pi}{3}$ e seus representantes:



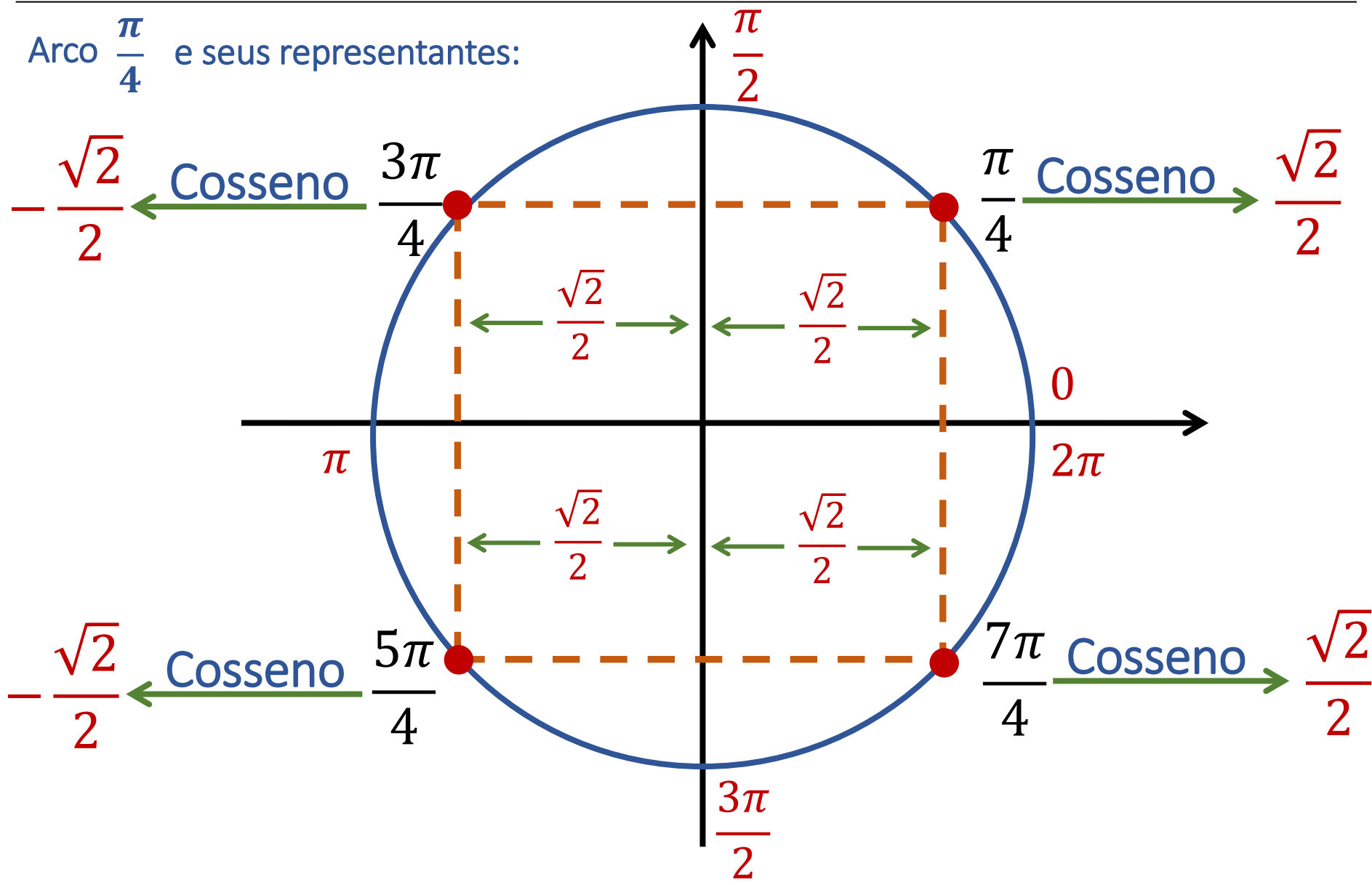
Cosseno dos arcos notáveis

Arco $\frac{\pi}{6}$ e seus representantes:



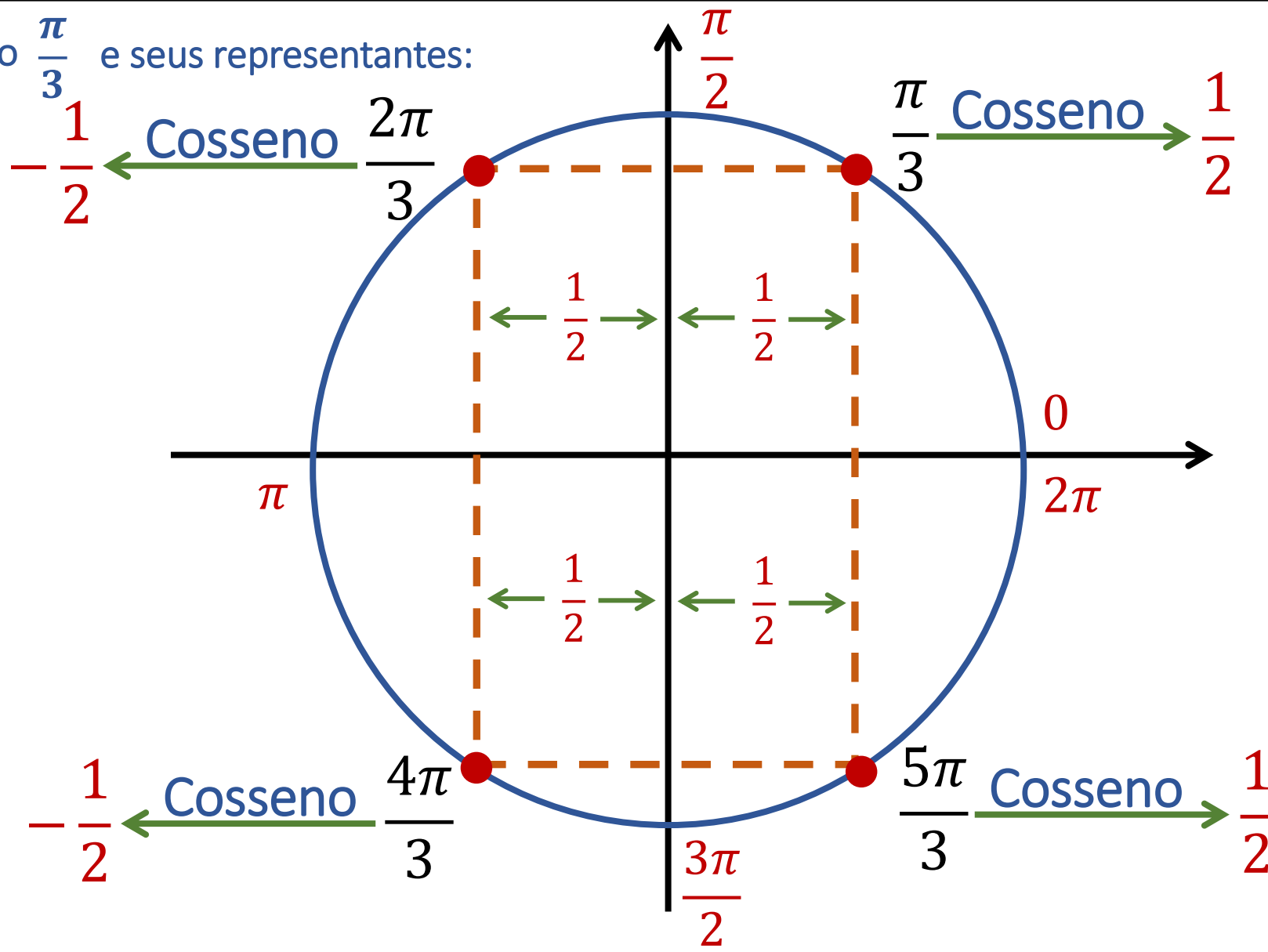
Cosseno dos arcos notáveis

Arco $\frac{\pi}{4}$ e seus representantes:

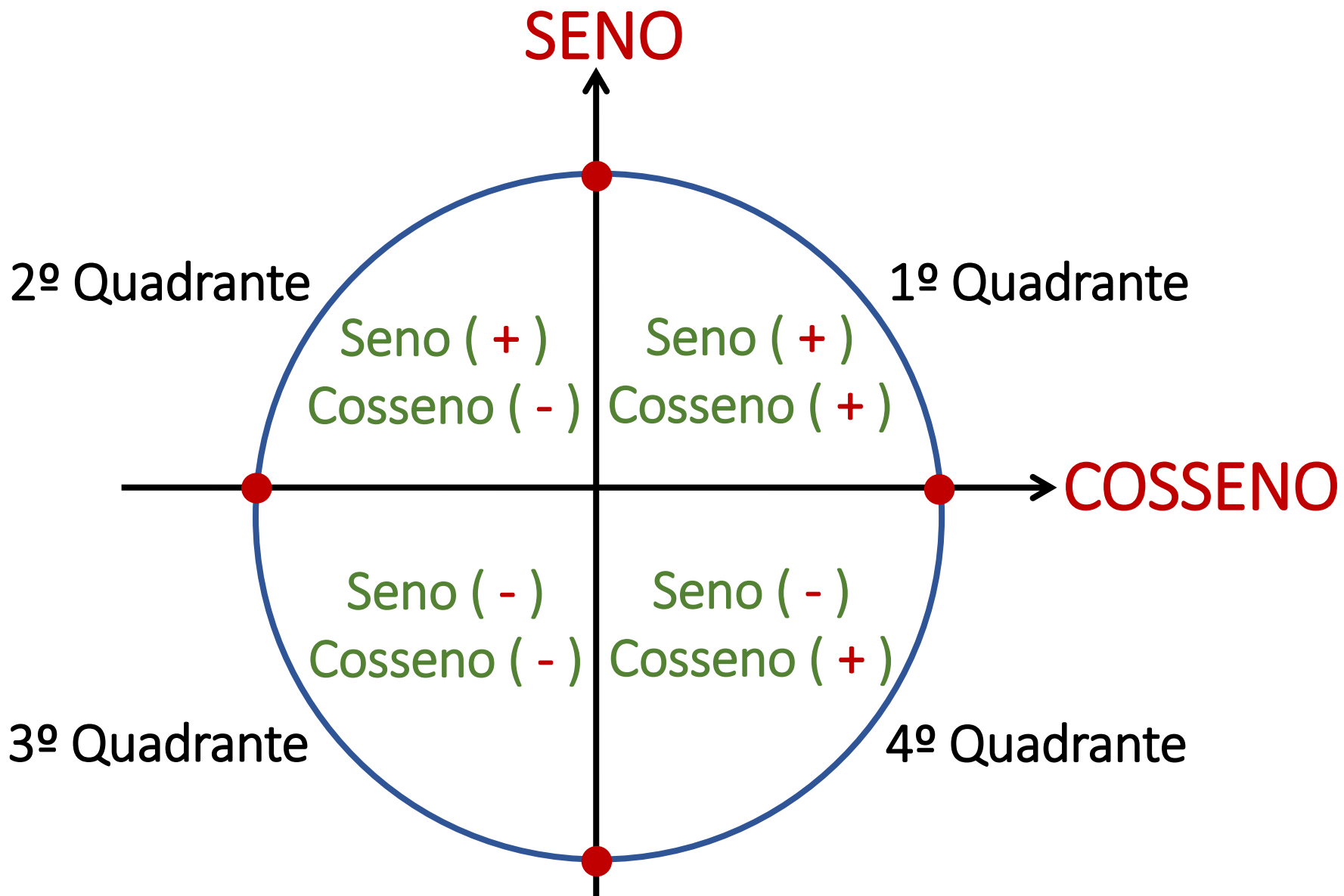


Cosseno dos arcos notáveis

Arco $\frac{\pi}{3}$ e seus representantes:



Sinais do Seno e do Cosseno



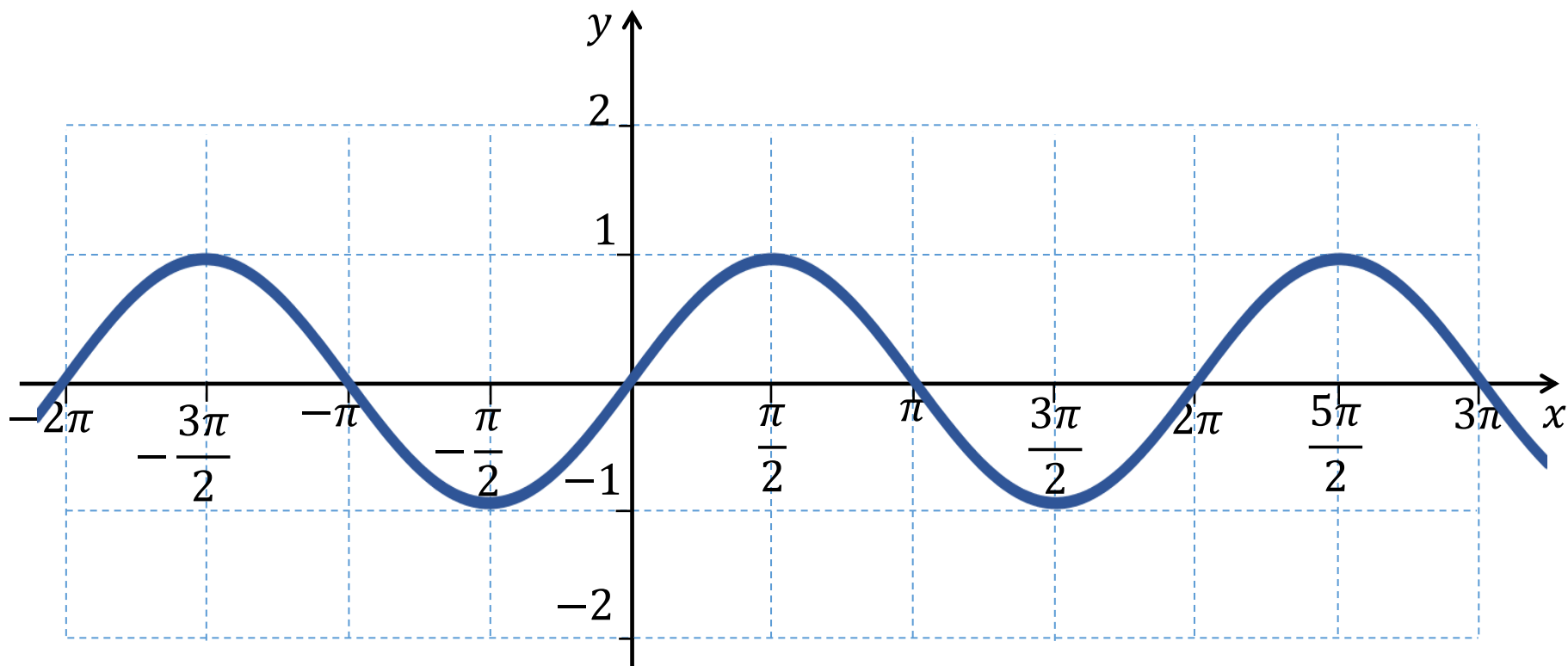
Função Seno

Definição:

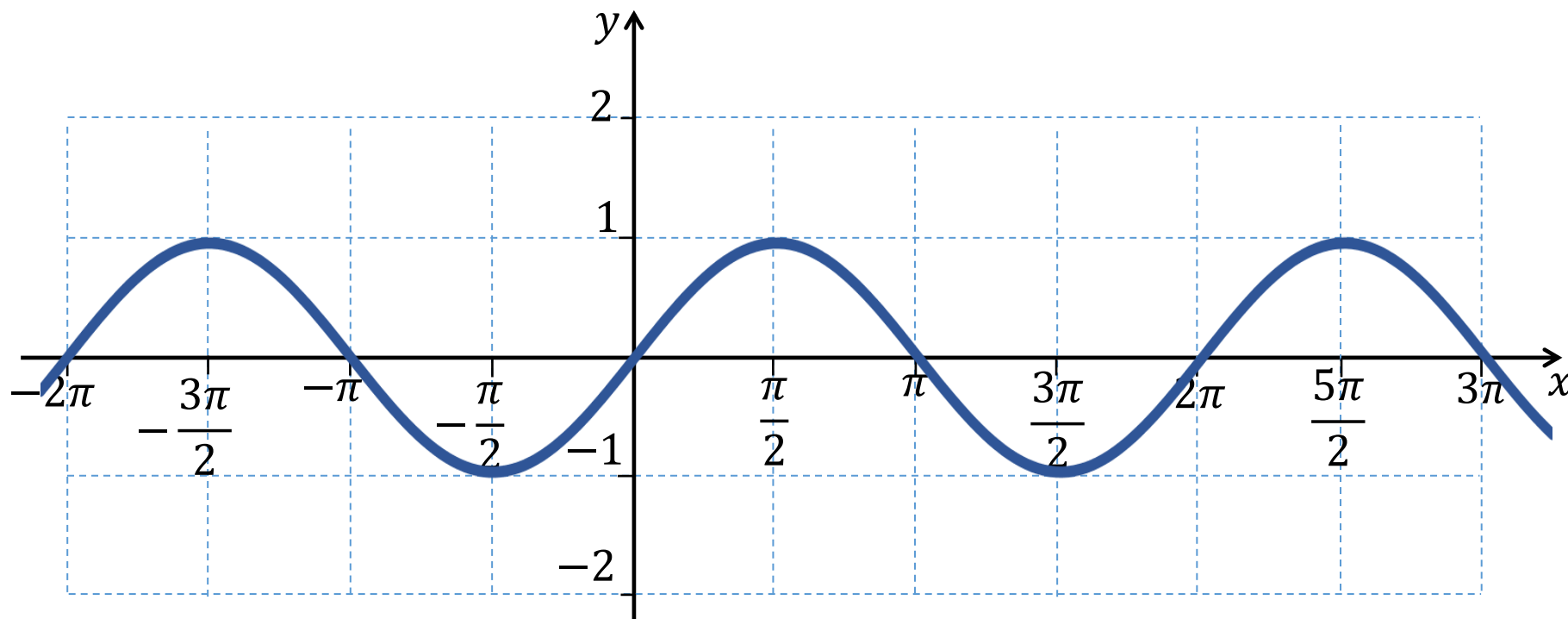
A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sin x$ é chamada de **função seno**.

Gráfico da função seno

$$y = \sin x$$



Função Seno



Domínio

$$D(f) = \mathbb{R}$$

Imagem

$$Im(f) = [-1, 1]$$

Período

$$P(f) = 2\pi$$

Função Seno

1º quadrante:

- ✓ Função positiva.
- ✓ Função crescente.

2º quadrante:

- ✓ Função positiva.
- ✓ Função decrescente.

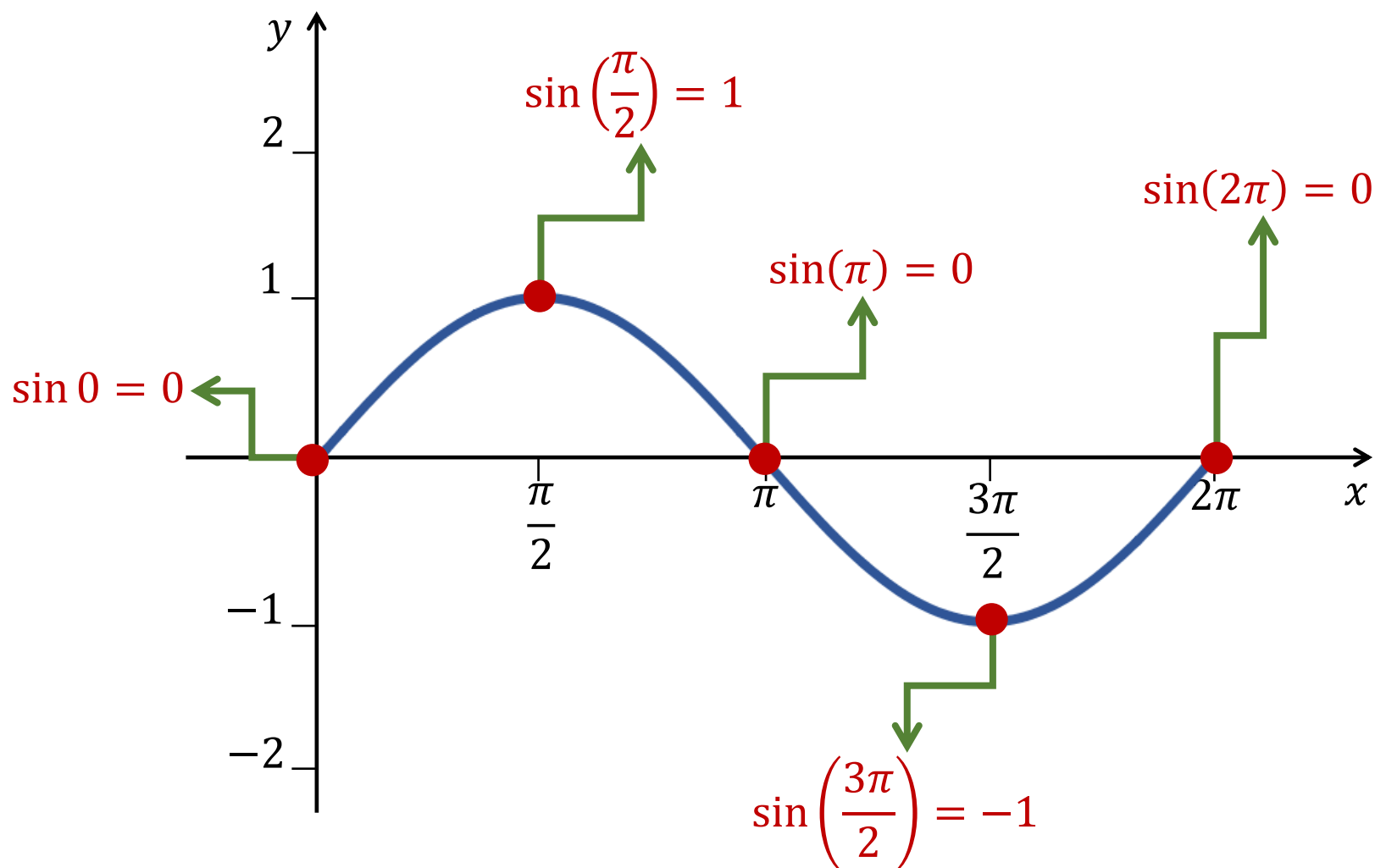
3º quadrante:

- ✓ Função negativa.
- ✓ Função decrescente.

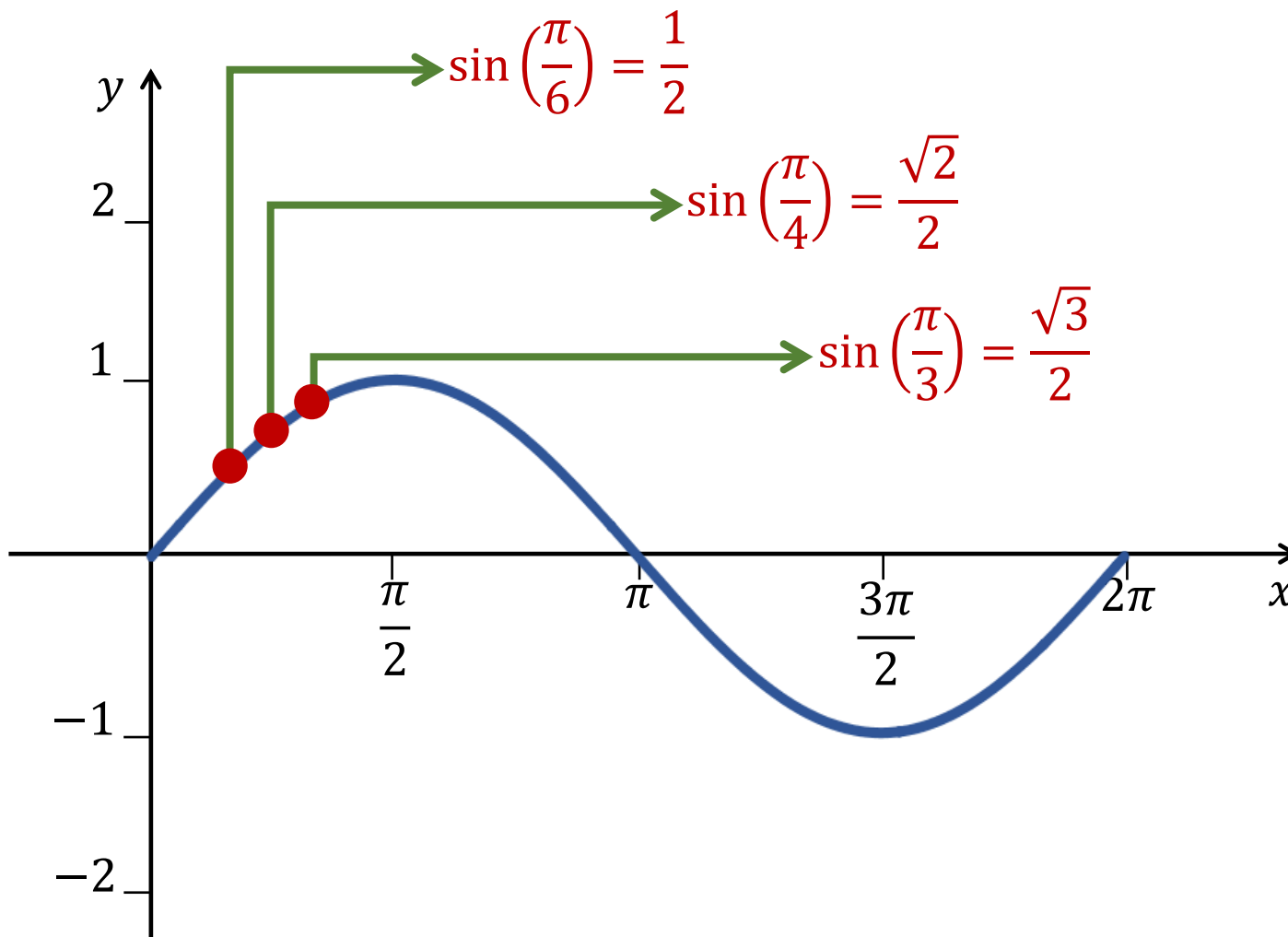
4º quadrante:

- ✓ Função negativa.
- ✓ Função crescente.

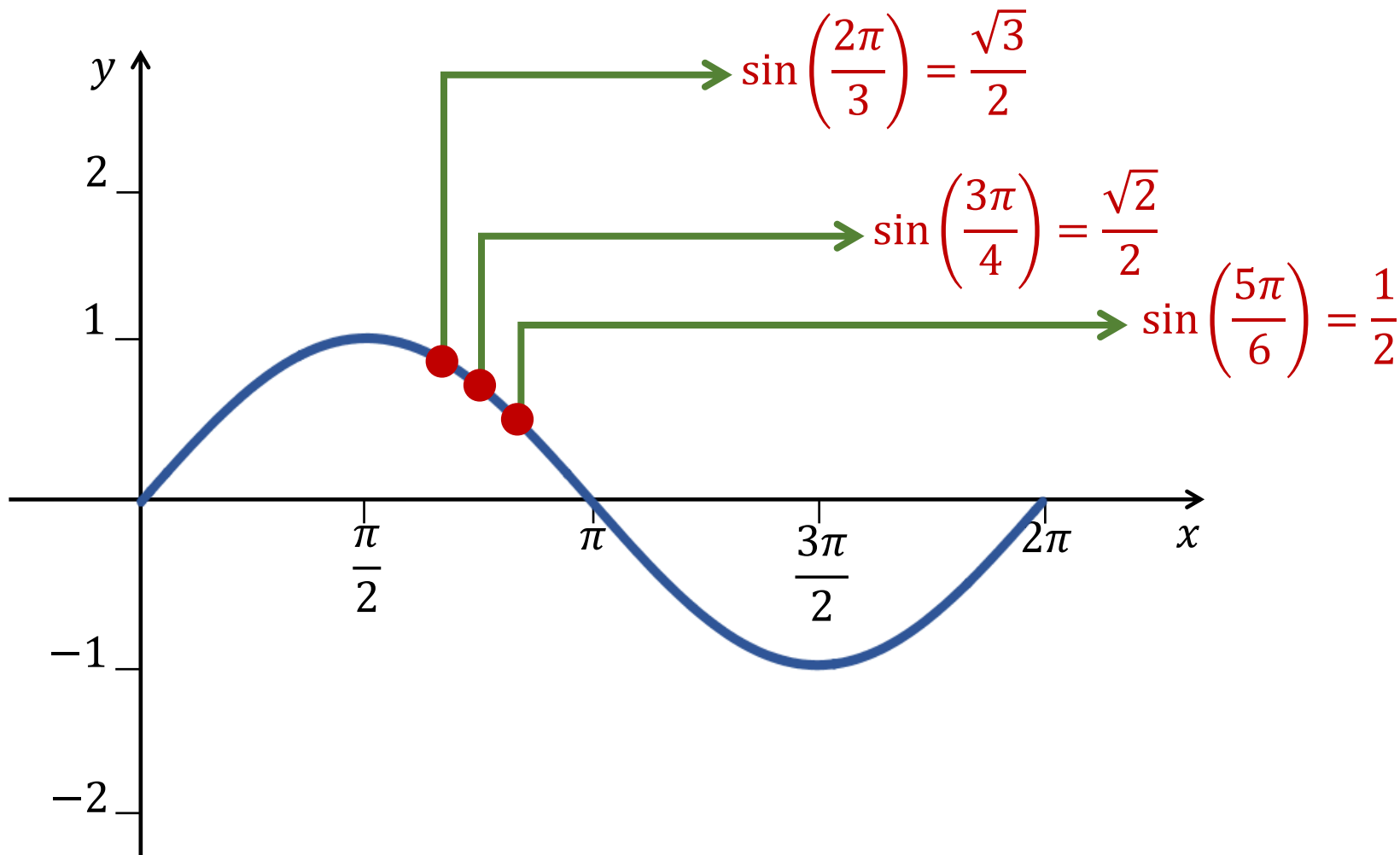
Função Seno



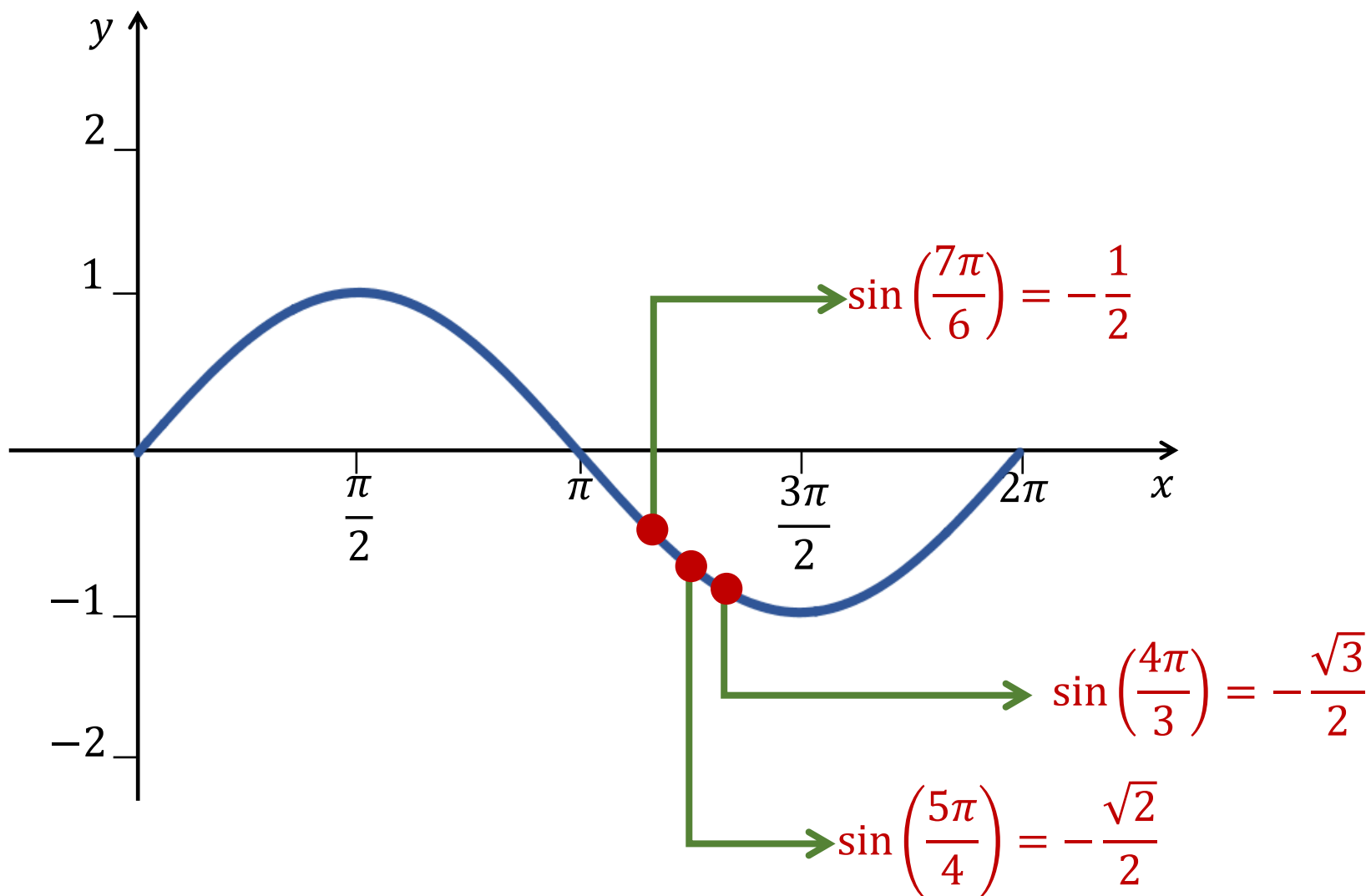
Função Seno: primeiro quadrante



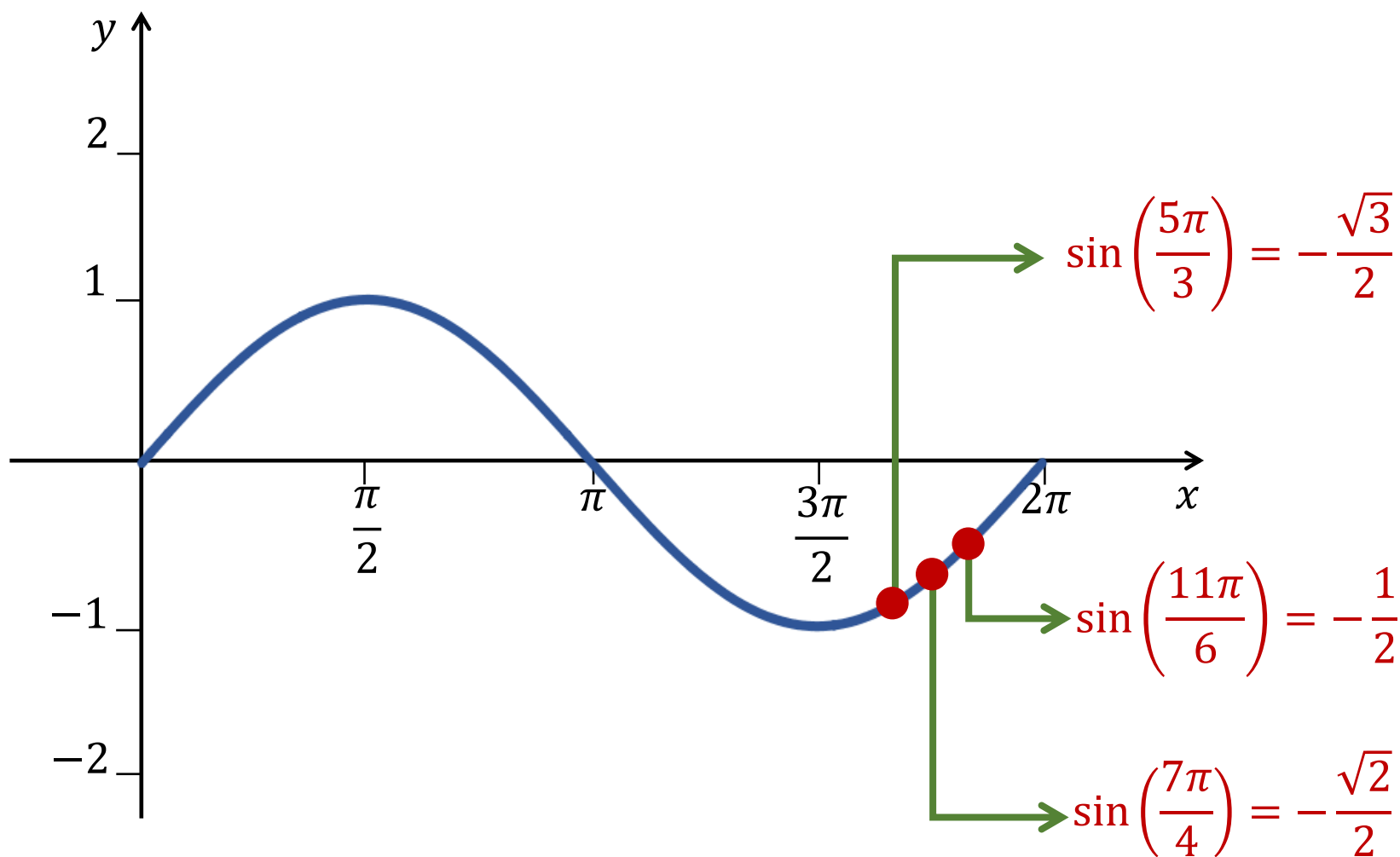
Função Seno: segundo quadrante



Função Seno: terceiro quadrante



Função Seno: quarto quadrante



Exemplos

Esboce o gráfico da função $f(x) = \sin x + 3$.

Solução:

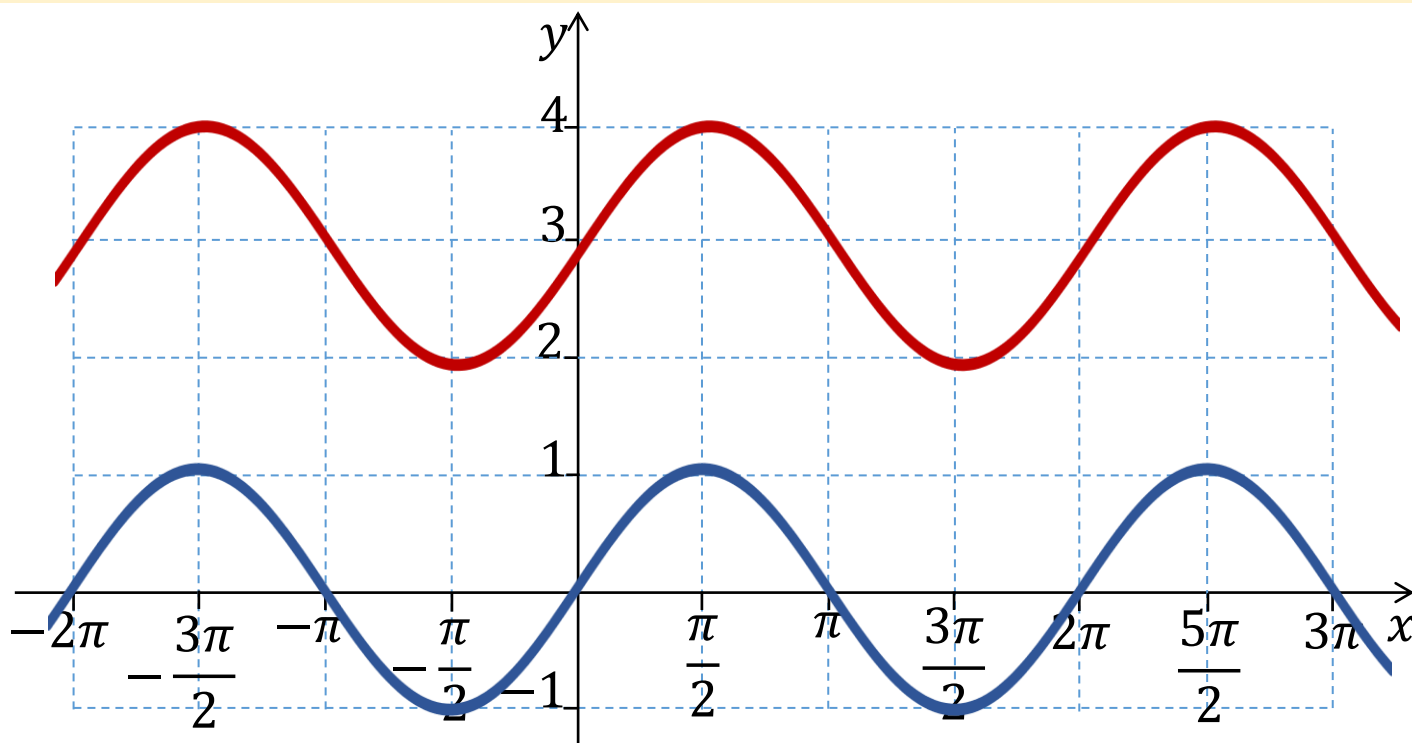
$$y = \sin x$$

$$y = \sin x + 3$$

$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$Im(f) = [2, 4]$$

$$P(f) = 2\pi$$



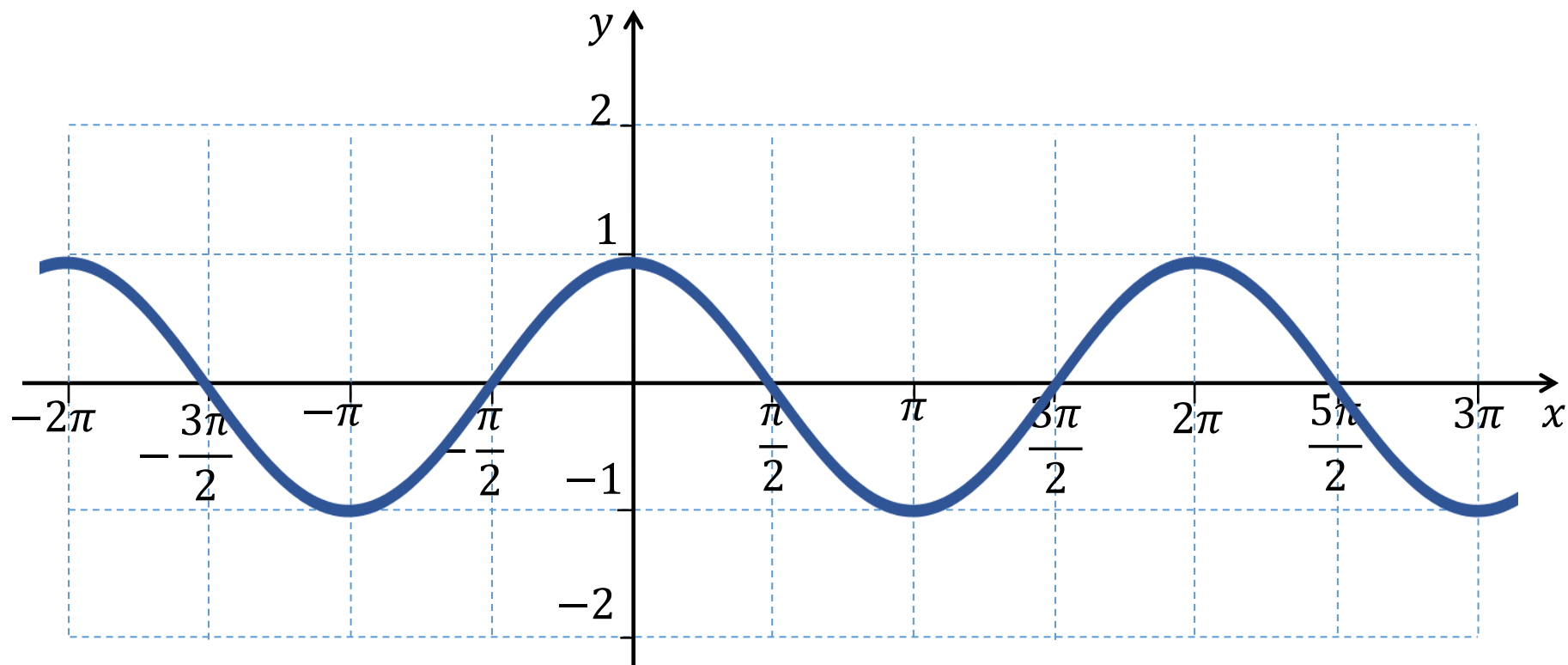
Função Cosseno

Definição:

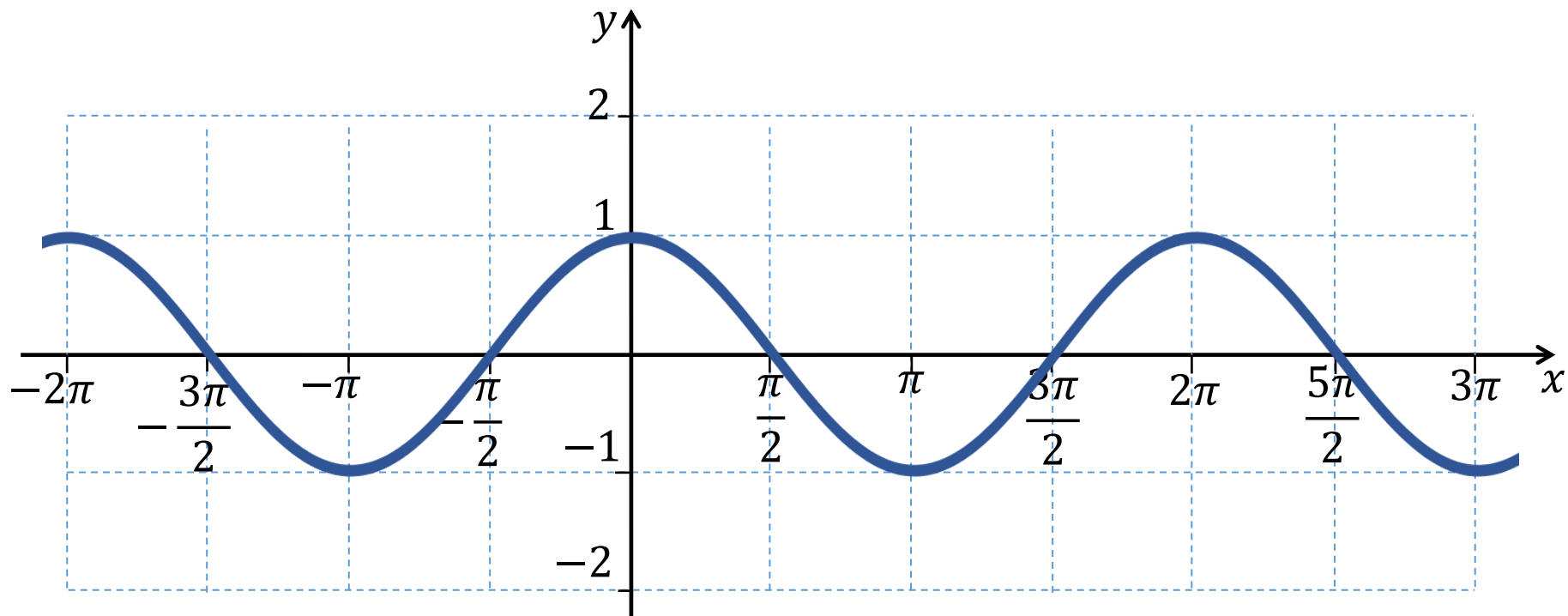
A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos x$ é chamada de **função cosseno**.

Gráfico da função cosseno

$$y = \cos x$$



Função Cosseno



Domínio

$$D(f) = \mathbb{R}$$

Imagem

$$Im(f) = [-1, 1]$$

Período

$$P(f) = 2\pi$$

Função Cosseno

1º quadrante:

- ✓ Função positiva.
- ✓ Função decrescente.

2º quadrante:

- ✓ Função negativa.
- ✓ Função decrescente.

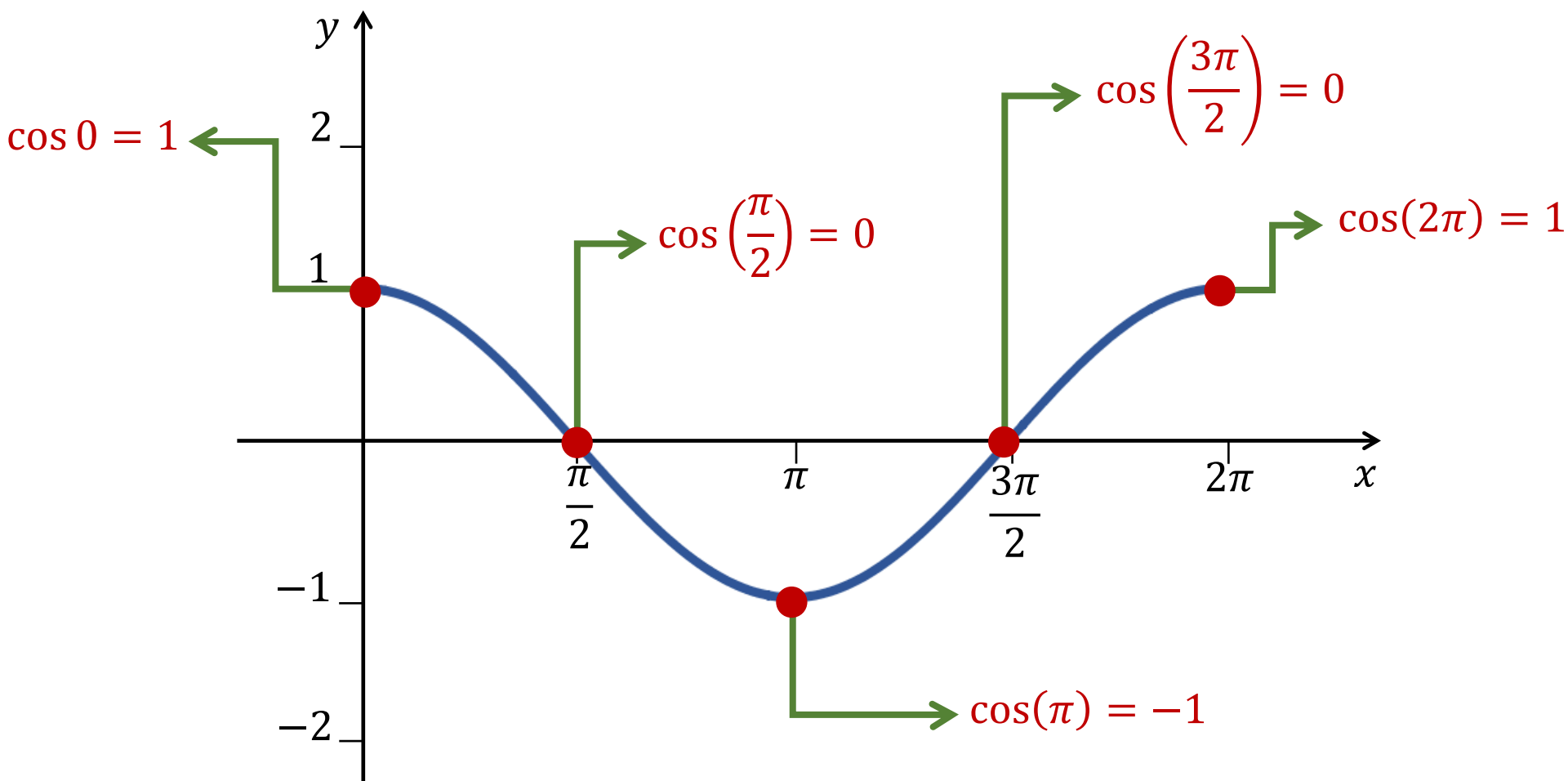
3º quadrante:

- ✓ Função negativa.
- ✓ Função crescente.

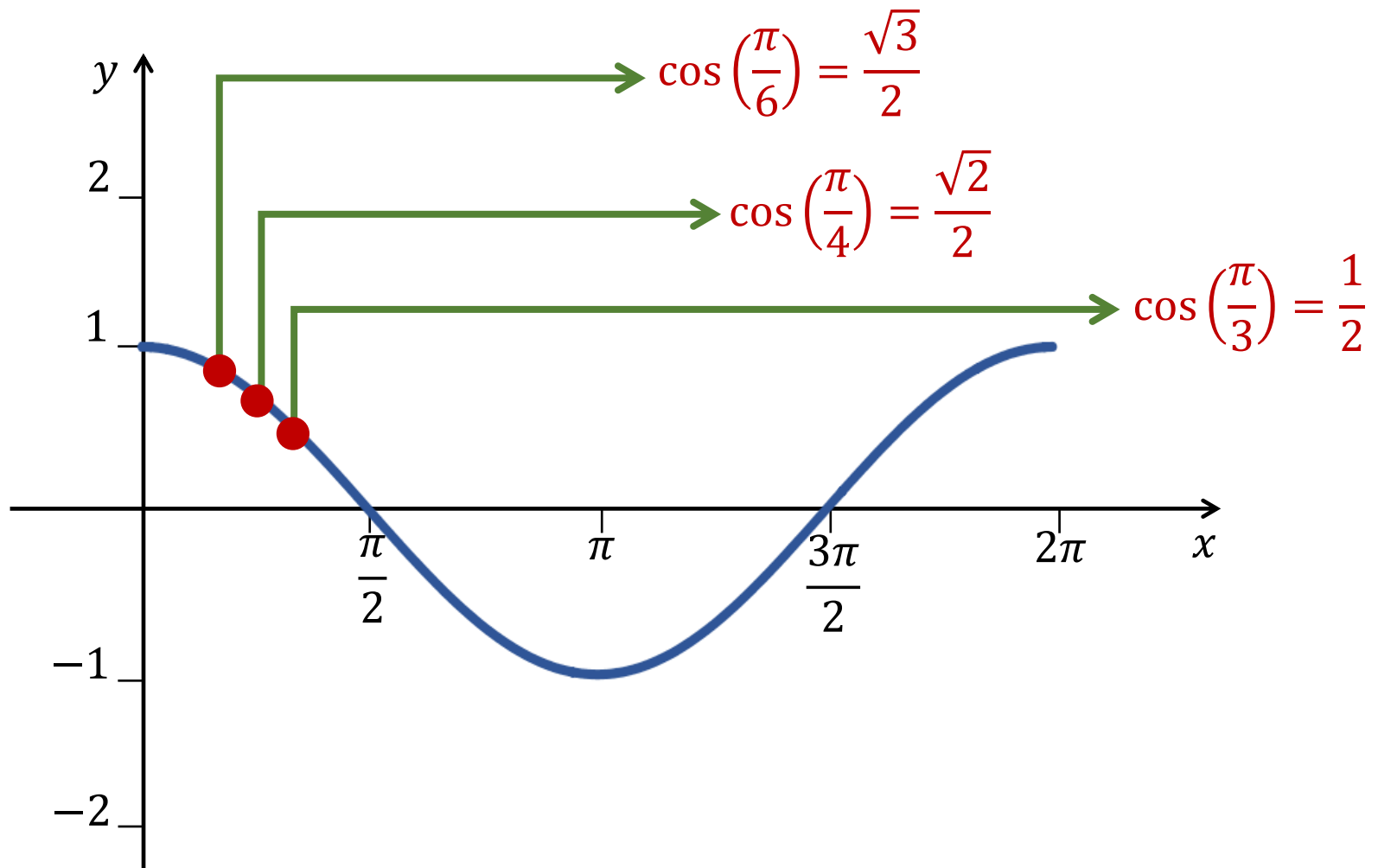
4º quadrante:

- ✓ Função positiva.
- ✓ Função crescente.

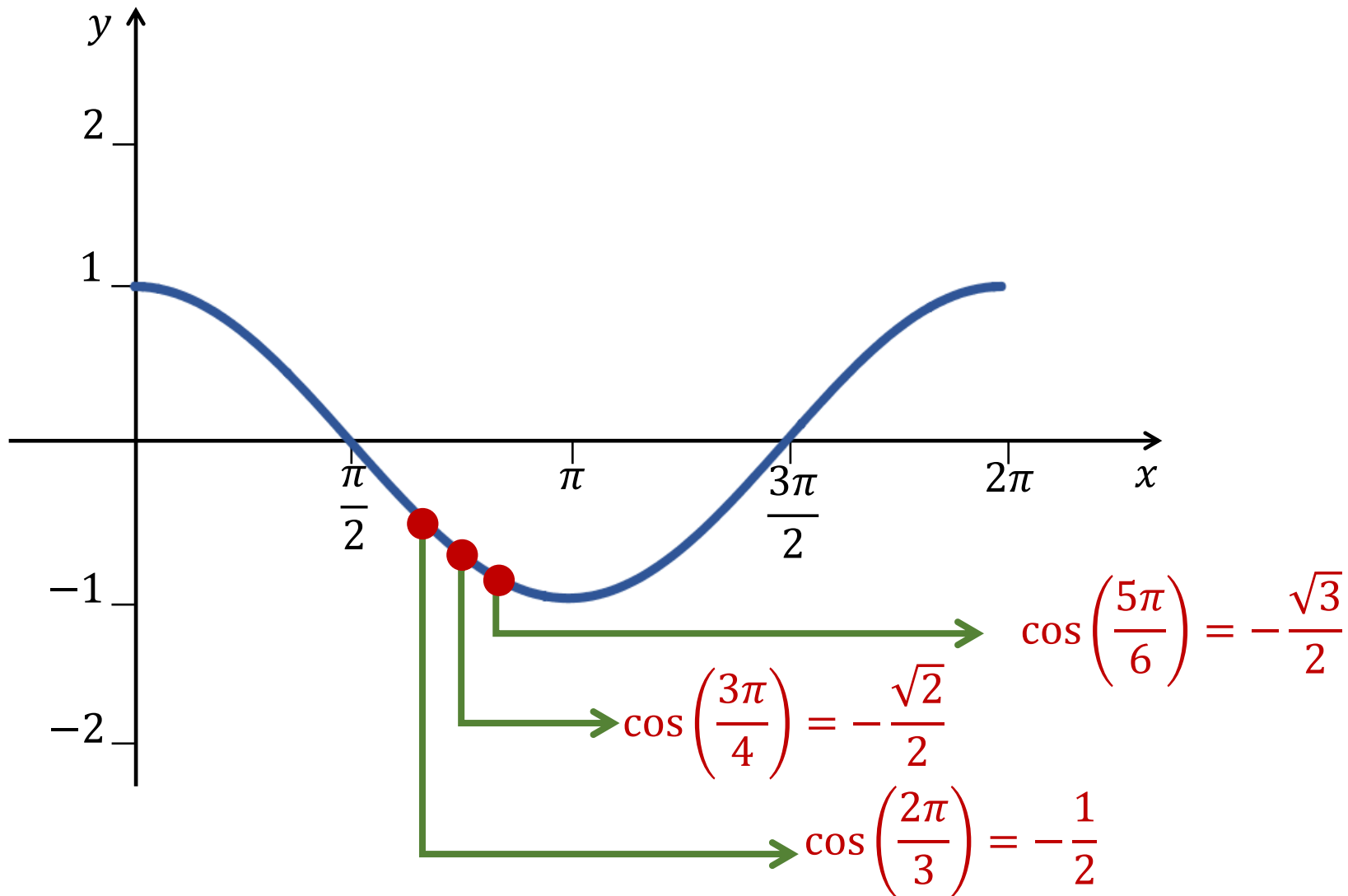
Função Cosseno



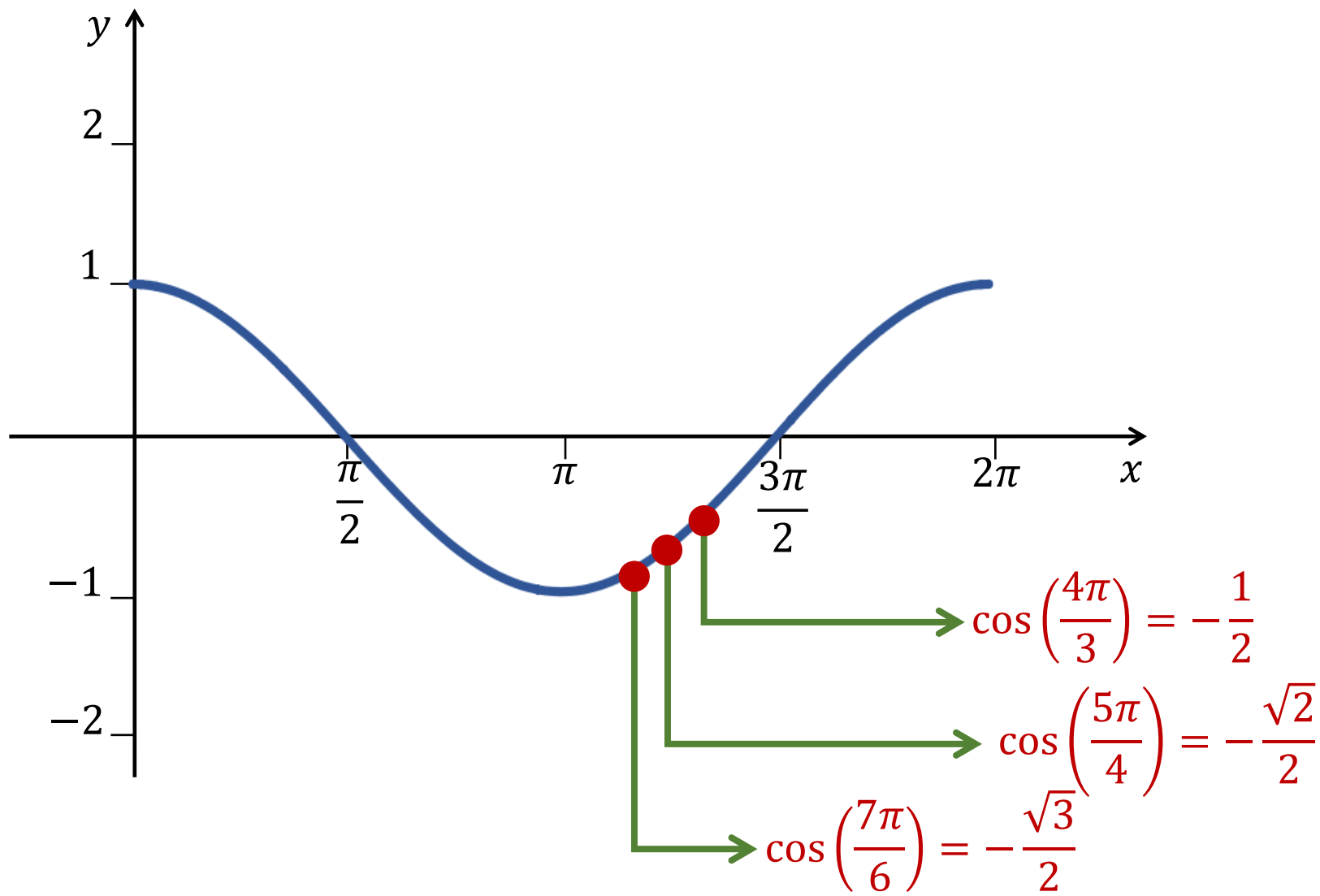
Função Cosseno: primeiro quadrante



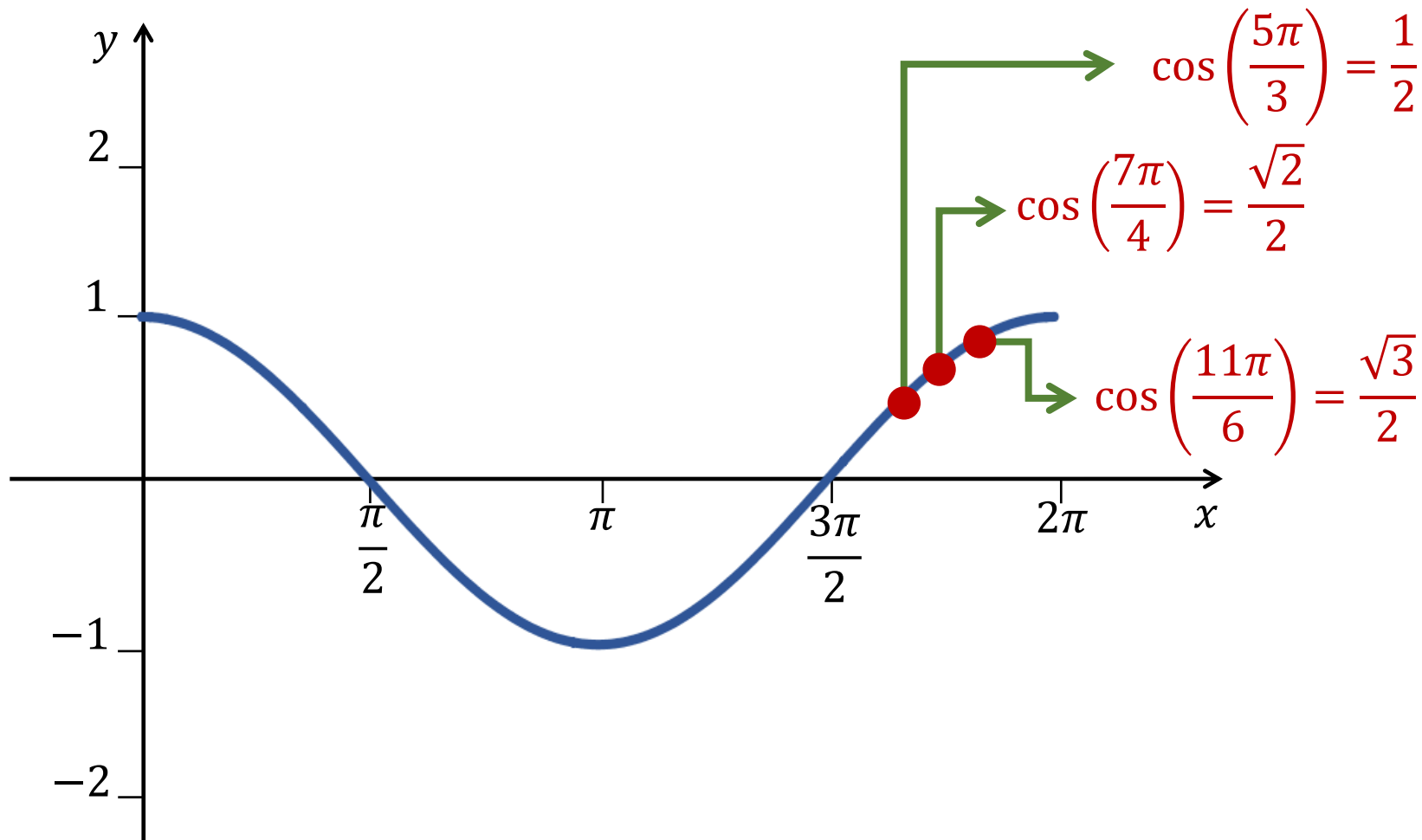
Função Cosseno: segundo quadrante



Função Cosseno: terceiro quadrante



Função Cosseno: quarto quadrante



Exemplos

1) Esboce o gráfico da função $f(x) = -\cos(2x) - 1$.

Solução:

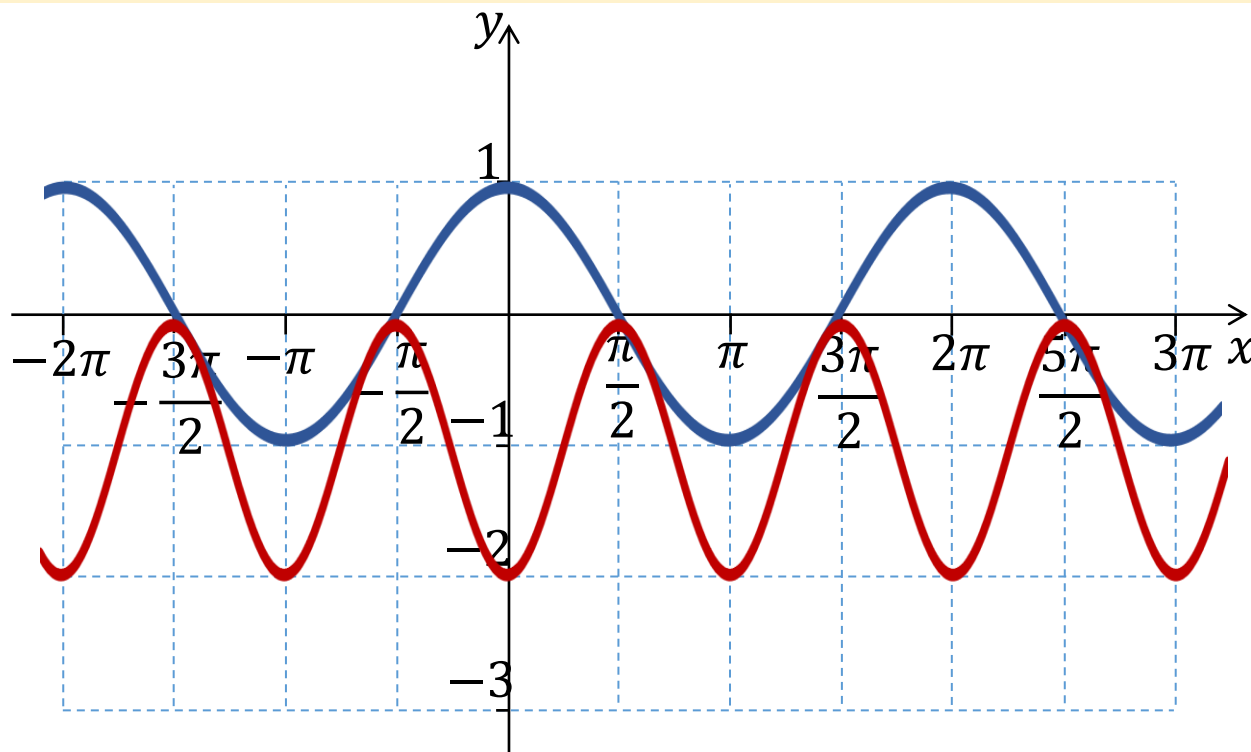
$$y = \cos x$$

$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$Im(f) = [-2, 0]$$

$$P(f) = \pi$$

$$y = -\cos(2x) - 1$$



Exercícios Propostos



Exercícios

1) Esboce o gráfico das funções trigonométricas, e determine o período (T), amplitude (A), domínio e imagem das funções:

(a) $y = 2 + \sin x$

(b) $y = 2 \sin 4x$

(c) $y = -3 \cos(0,5x)$

(d) $y = 3 \sin 2\pi x$

(e) $y = 3 \cos \left(2x + \frac{\pi}{2} \right)$

Respostas

Exercício 1:

a) $T = 2\pi$ $A = 1$ $D(f) = \mathbb{R}$ $Im(f) = [1,3]$

b) $T = 4\pi$ $A = 3$ $D(f) = \mathbb{R}$ $Im(f) = [-3,3]$

c) $T = \frac{\pi}{2}$ $A = 2$ $D(f) = \mathbb{R}$ $Im(f) = [-2,2]$

d) $T = 1$ $A = 3$ $D(f) = \mathbb{R}$ $Im(f) = [-3,3]$

e) $T = \pi$ $A = 3$ $D(f) = \mathbb{R}$ $Im(f) = [-3,3]$

88 Monitorias!!



Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

<http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias>

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

<http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA>

O GAMA possui monitorias de:

- ☐ Matemática Elementar, Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e equivalentes)
 - ☐ ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
 - ☐ Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3 (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.



Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino



Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas

Aula 03

Projeto

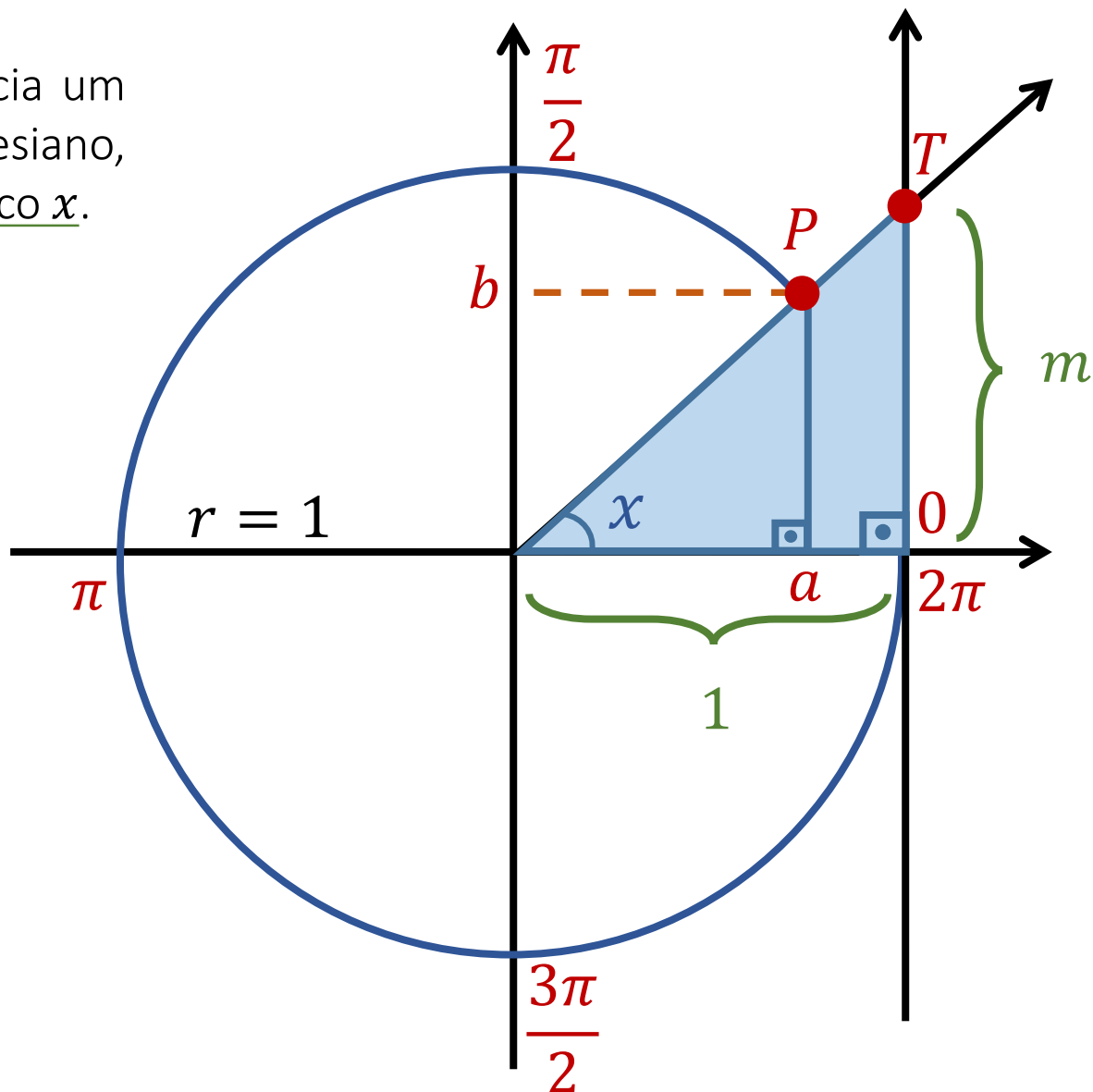
GAMA

Grupo de Apoio em
Matemática

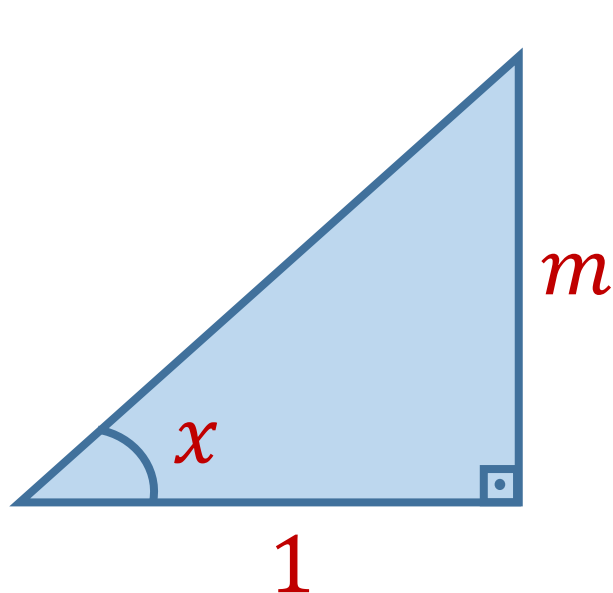
Tangente no Ciclo Trigonométrico

Lembrando...

Para cada arco x , o ciclo associa um ponto $P(a, b)$ do plano cartesiano, chamado de extremidade do arco x .



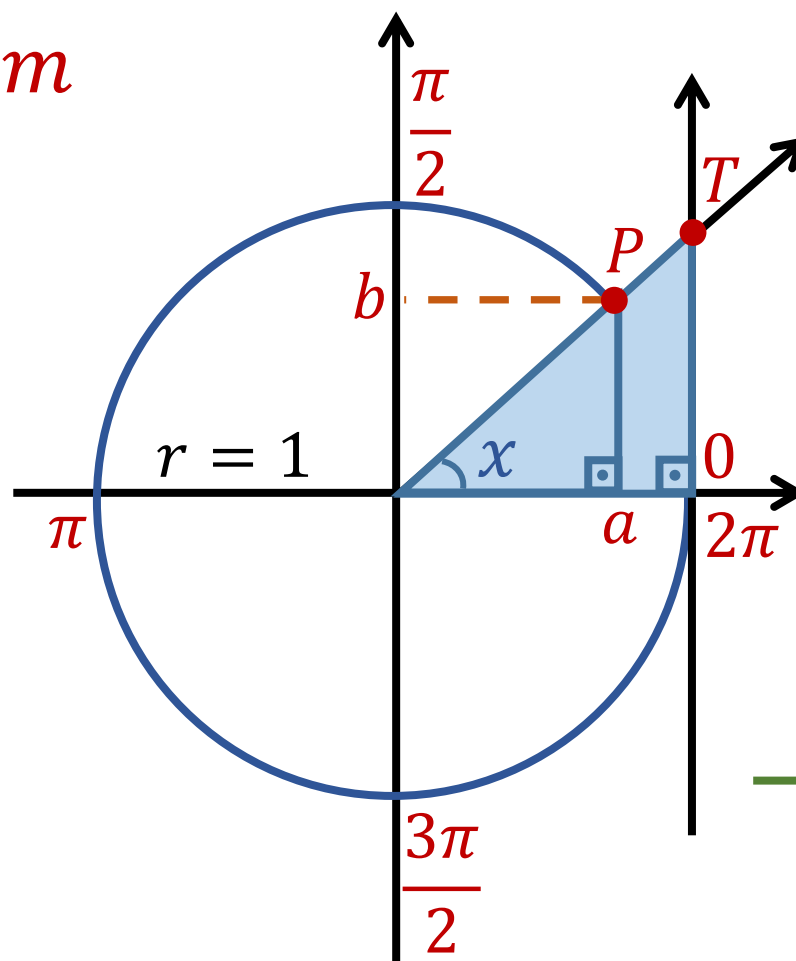
Tangente no Ciclo Trigonométrico



$$\tan x = \frac{m}{1} = m$$

Ordenada de T .

Ou seja...

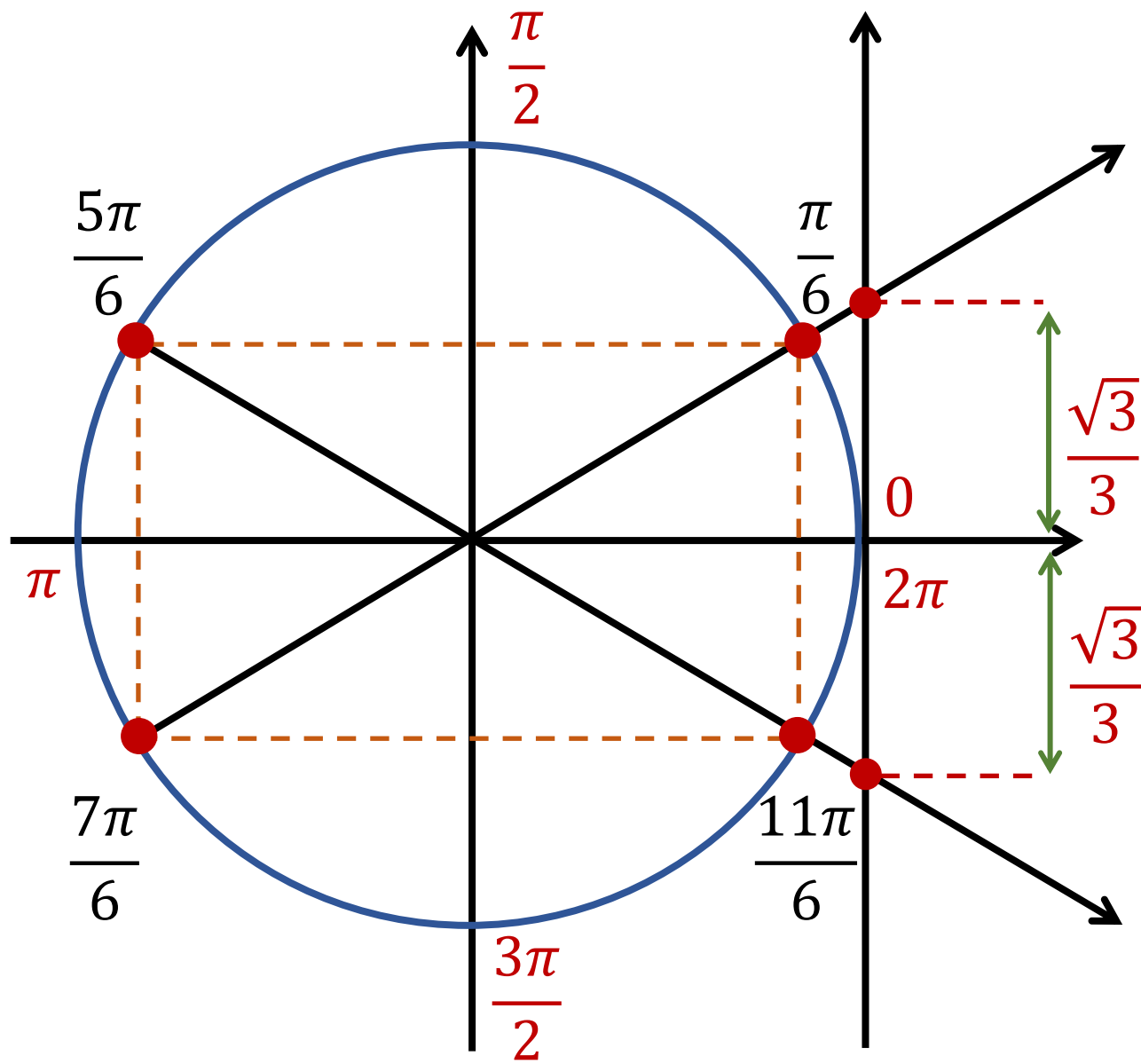


Eixo das
tangentes.

Tangente dos arcos notáveis

Arco $\frac{\pi}{6}$

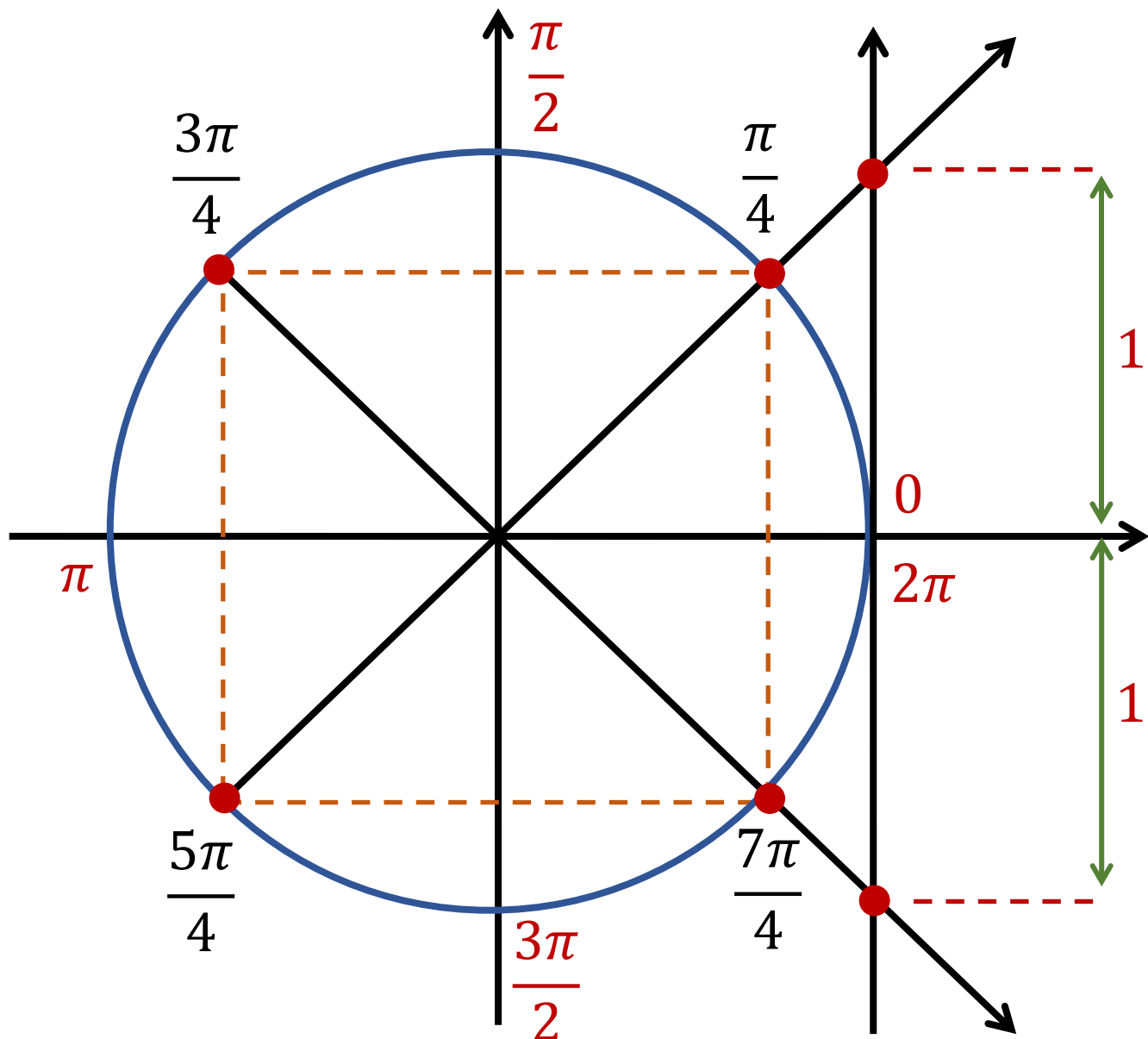
	Tangente
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$



Tangente dos arcos notáveis

Arco $\frac{\pi}{4}$

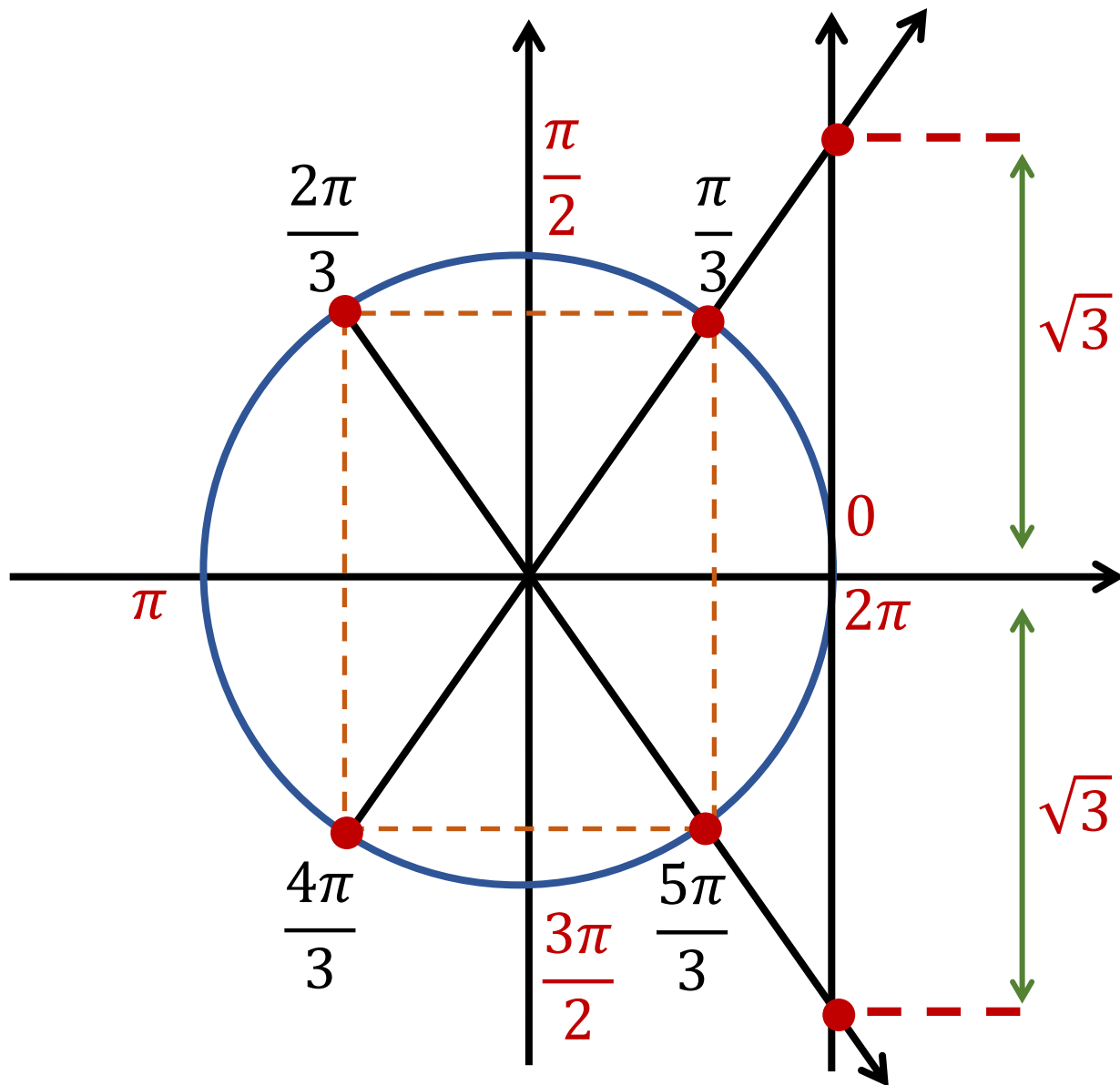
	Tangente
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{3\pi}{4}$	-1
$\frac{5\pi}{4}$	1
$\frac{7\pi}{4}$	-1



Tangente dos arcos notáveis

Arco $\frac{\pi}{3}$

	Tangente
$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{2\pi}{3}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{4\pi}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{3}$	$-\sqrt{3}$



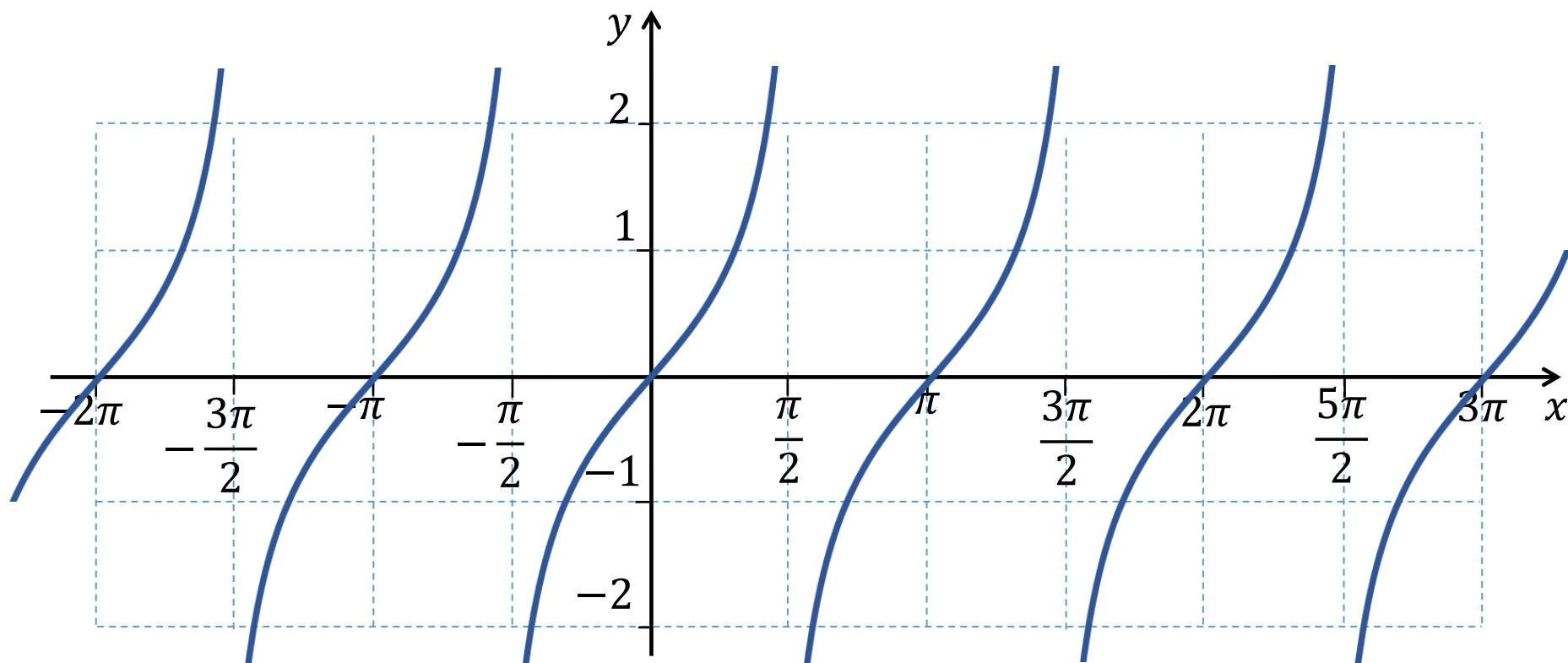
Função Tangente

Definição:

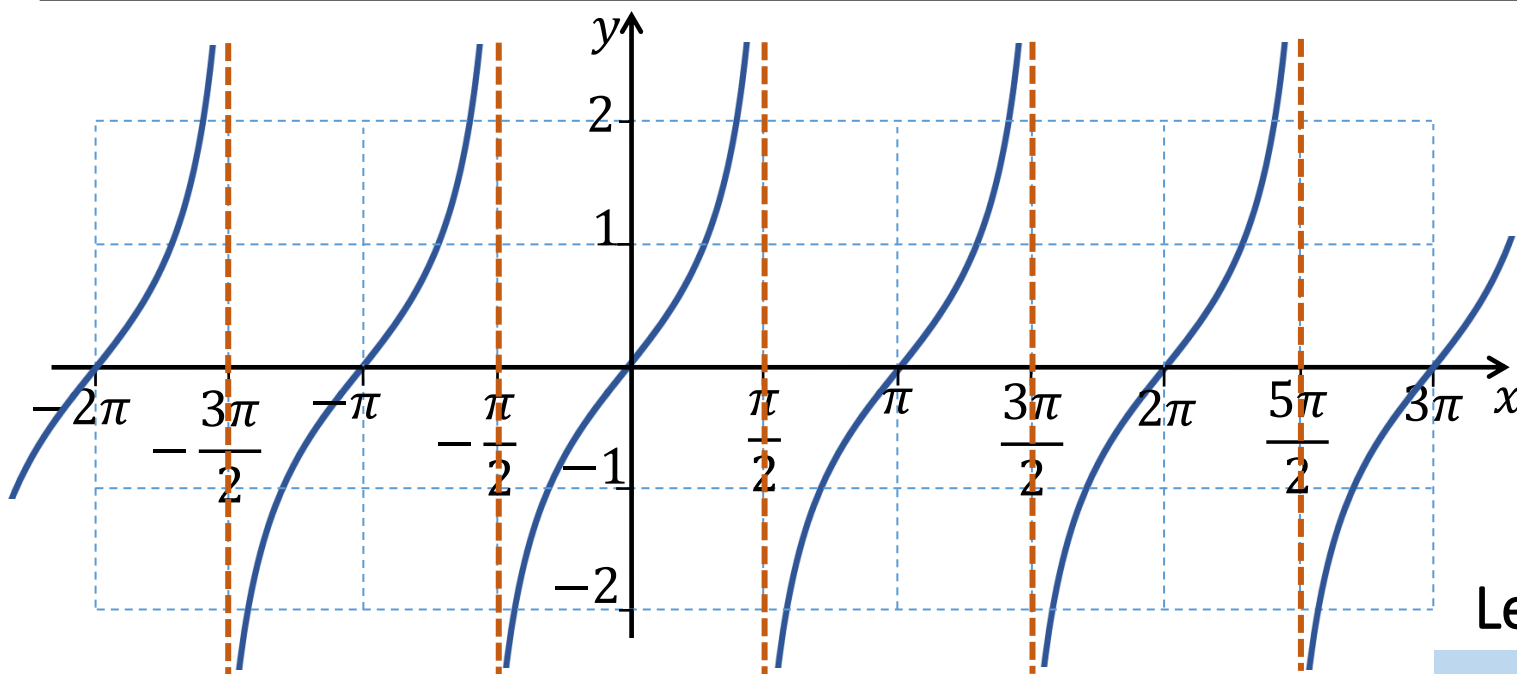
A função f dada por $f(x) = \tan x$ é chamada de função tangente.

Gráfico da função tangente

$$y = \tan x$$



Função Tangente



Domínio

$$D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Imagem

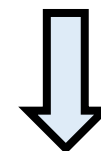
$$Im(f) = \mathbb{R}$$

Período

$$P(f) = \pi$$

Lembre que:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$



Assíntotas

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

Função Tangente

1º quadrante:

- ✓ Função positiva.
- ✓ Função crescente.

2º quadrante:

- ✓ Função negativa.
- ✓ Função crescente.

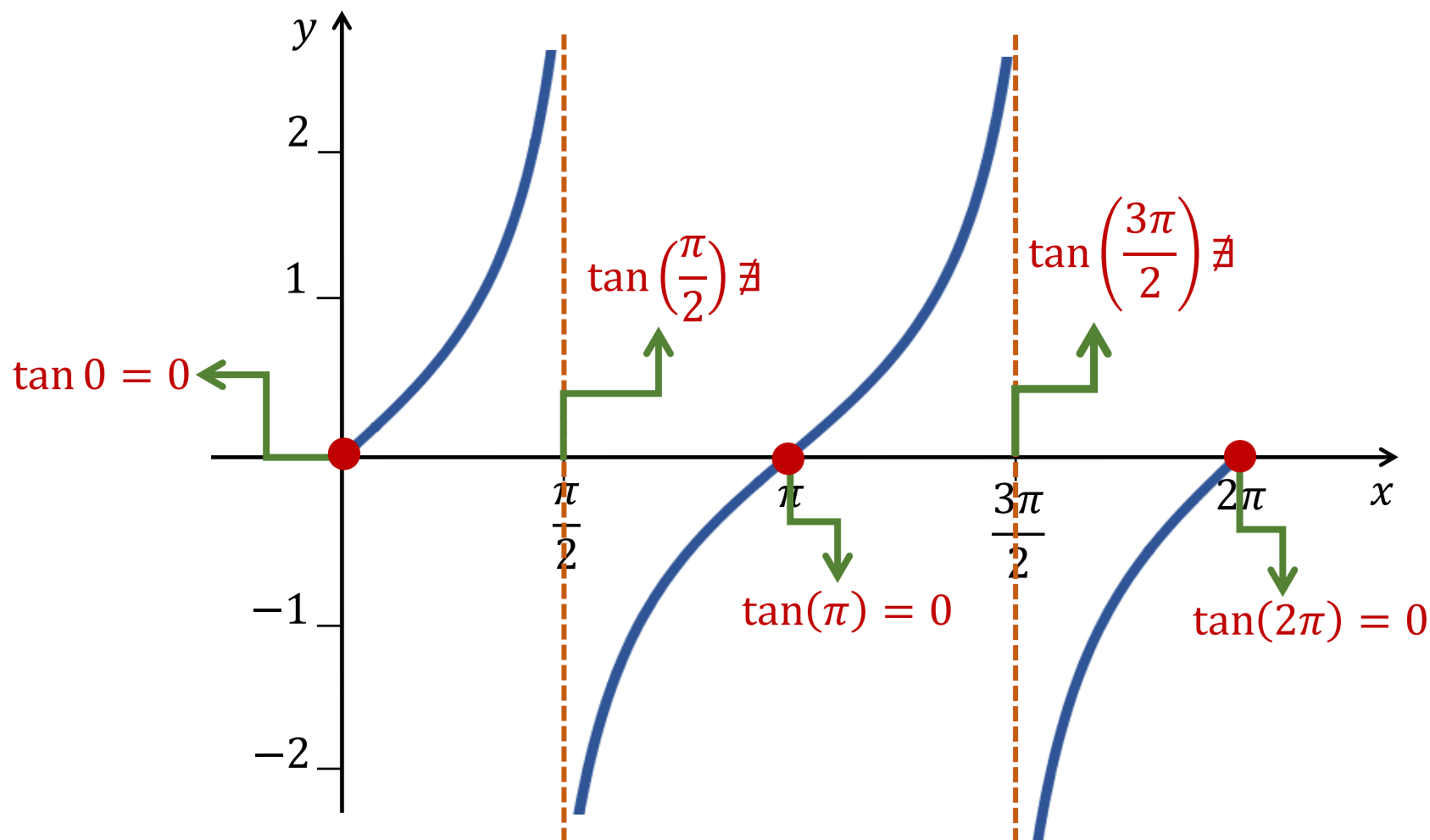
3º quadrante:

- ✓ Função positiva.
- ✓ Função crescente.

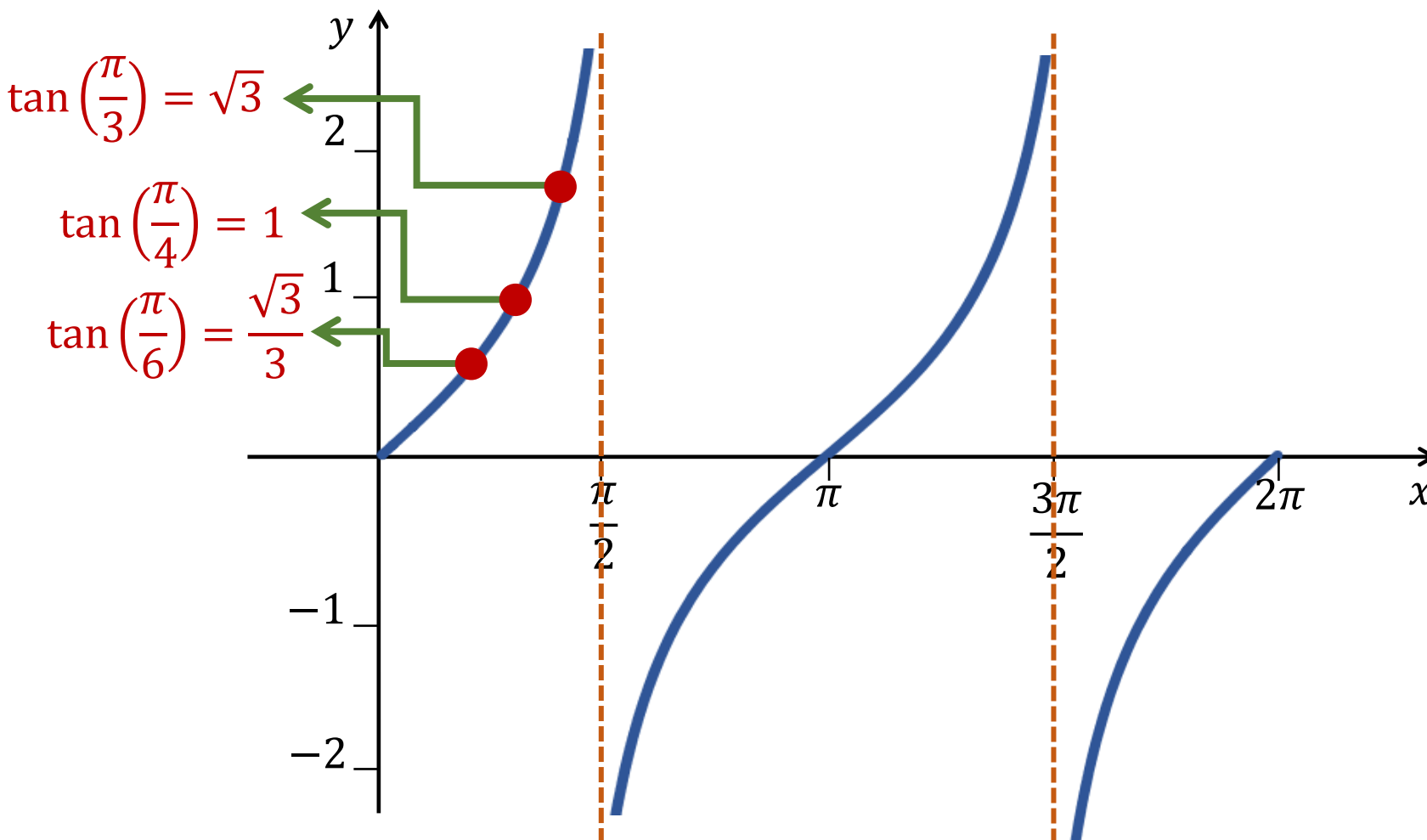
4º quadrante:

- ✓ Função negativa.
- ✓ Função crescente.

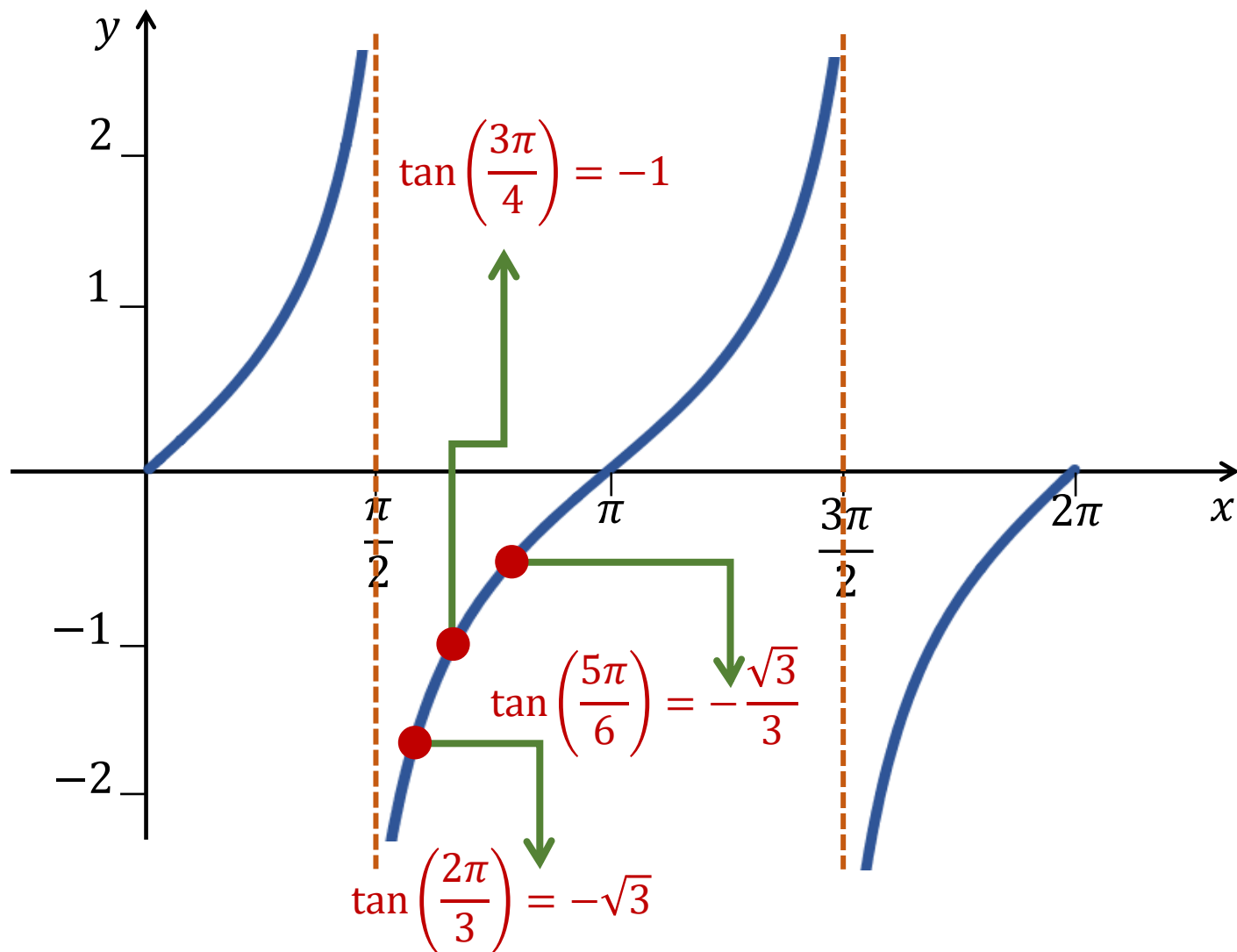
Função Tangente



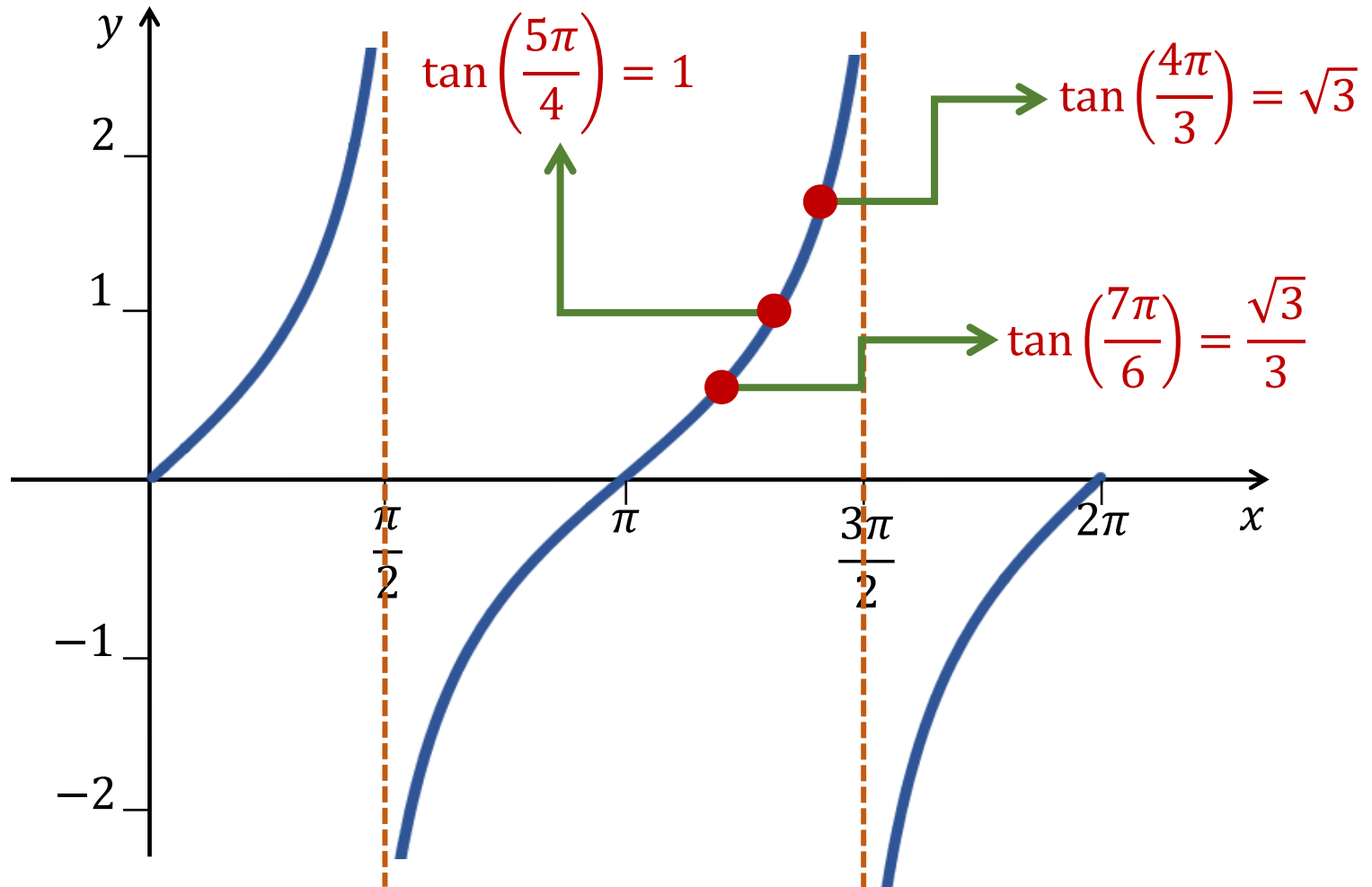
Função Tangente: primeiro quadrante



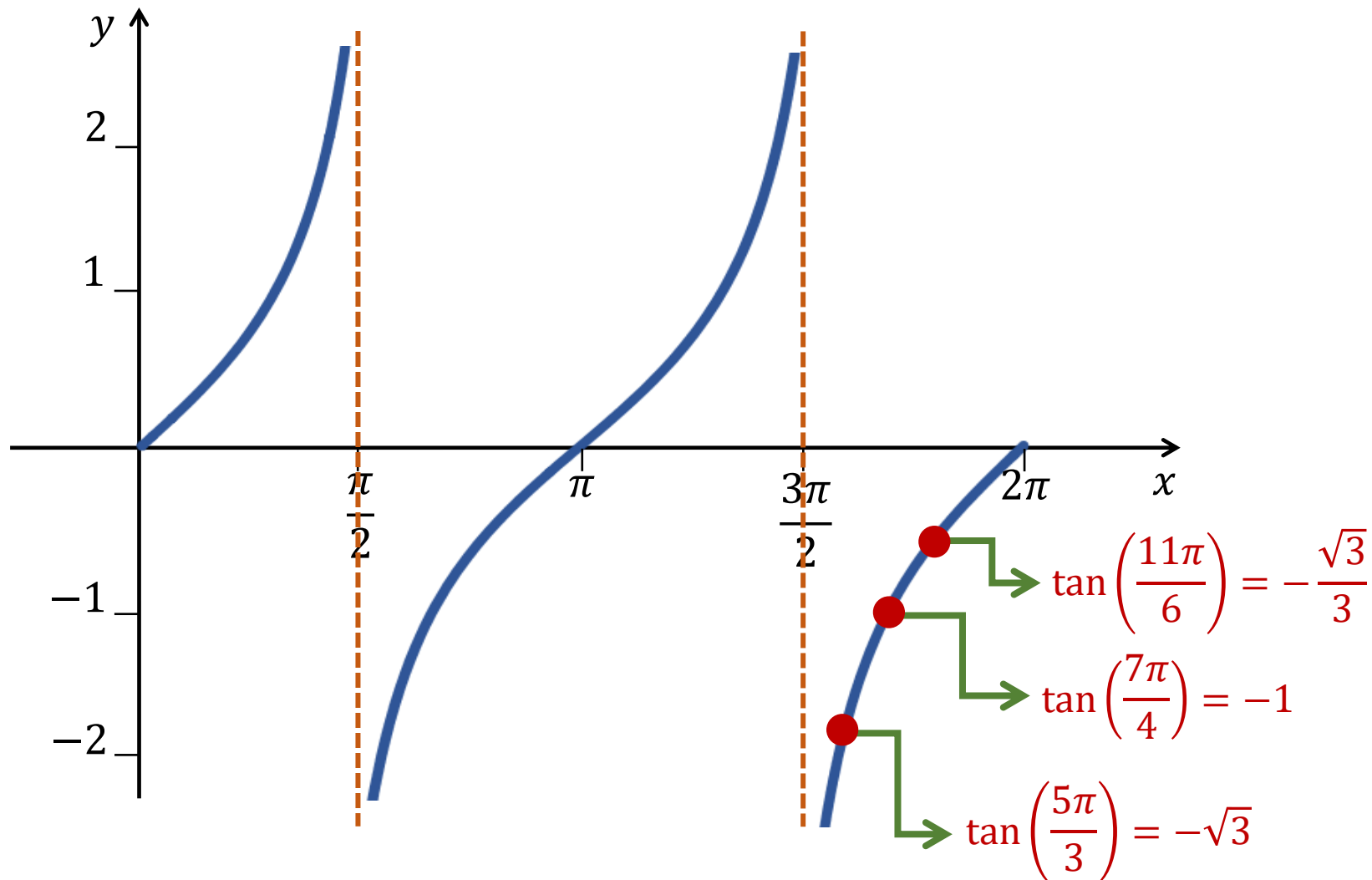
Função Tangente: segundo quadrante



Função Tangente: terceiro quadrante



Função Tangente: quarto quadrante



Exemplos

1) Esboce o gráfico, determine o domínio, a imagem e o período e as assíntotas da função $f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

$$y = \tan x$$

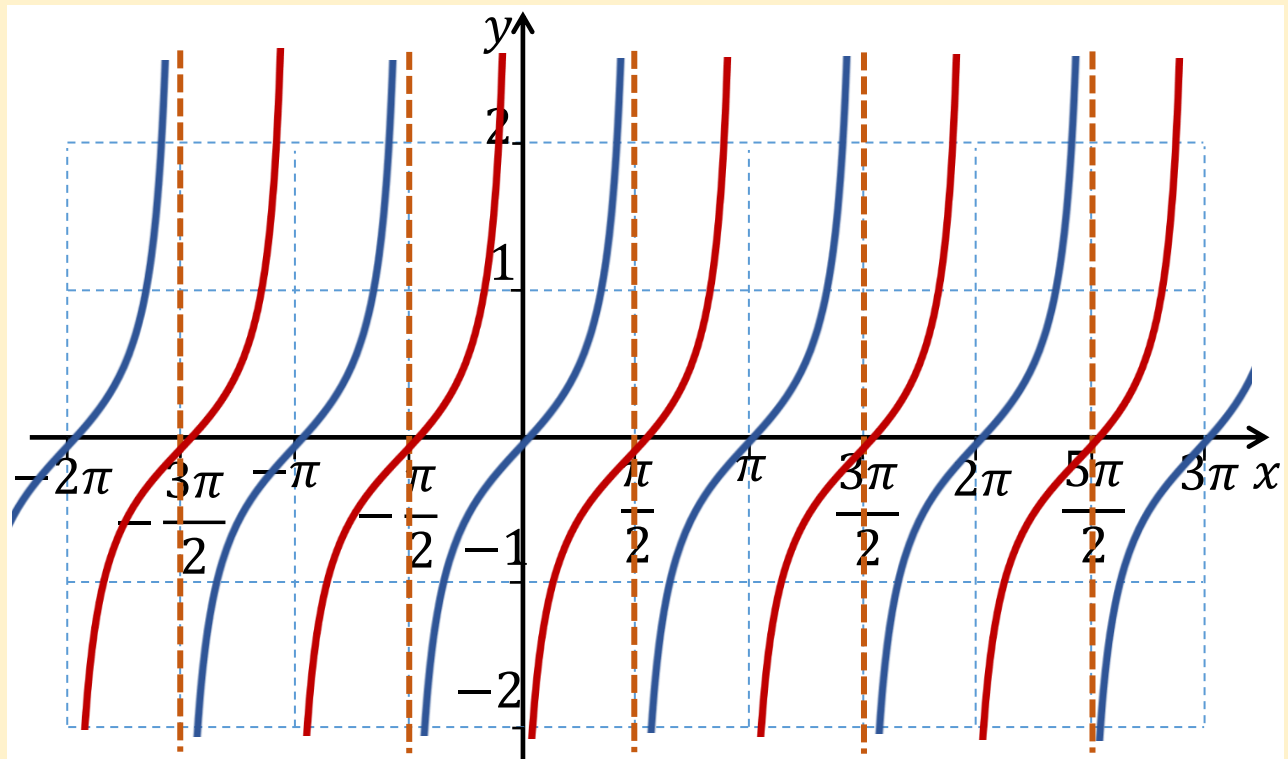
$$y = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Solução:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$$

$$Im(f) = \mathbb{R}$$

$$P(f) = \pi$$

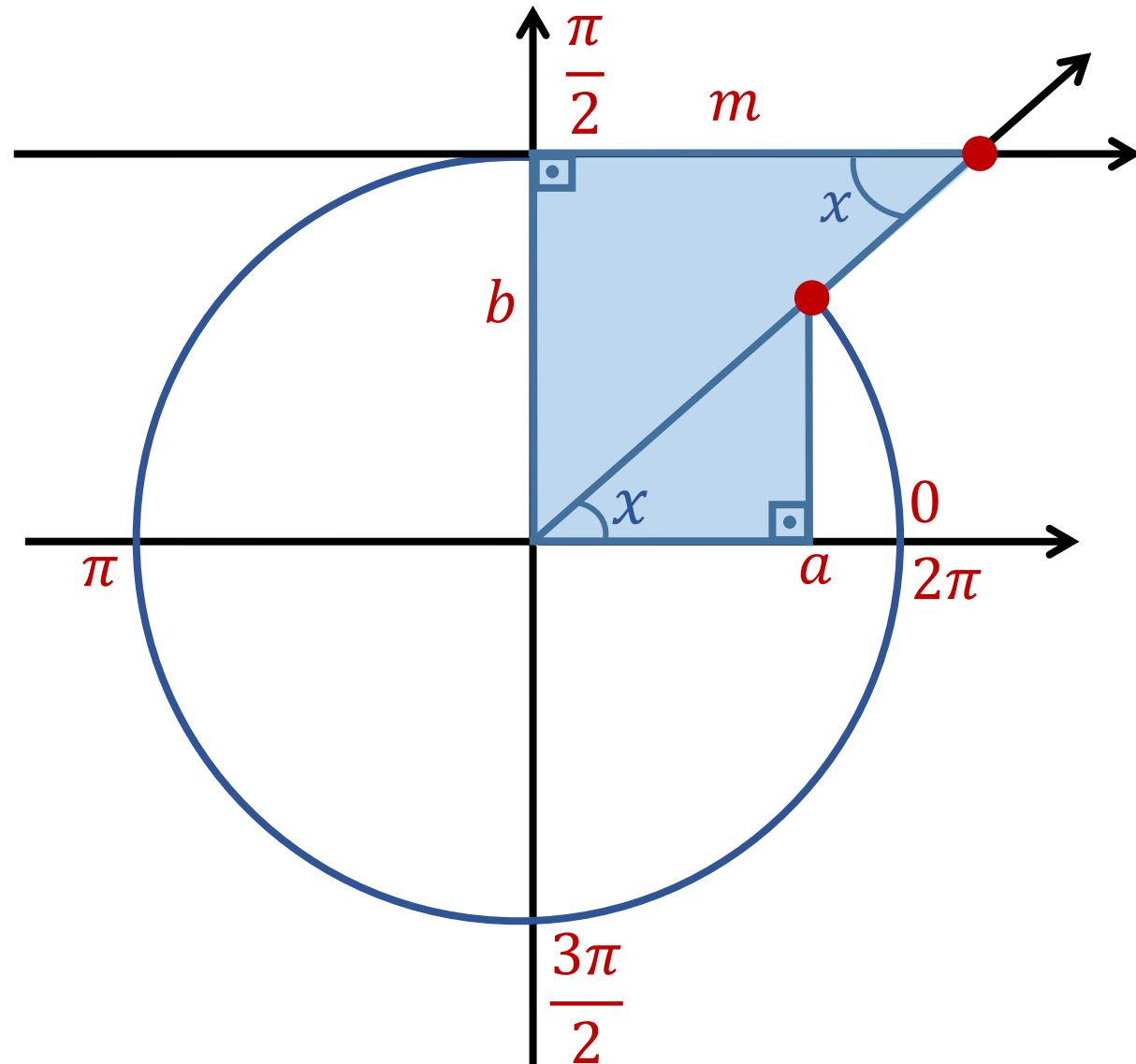


Lembrando...

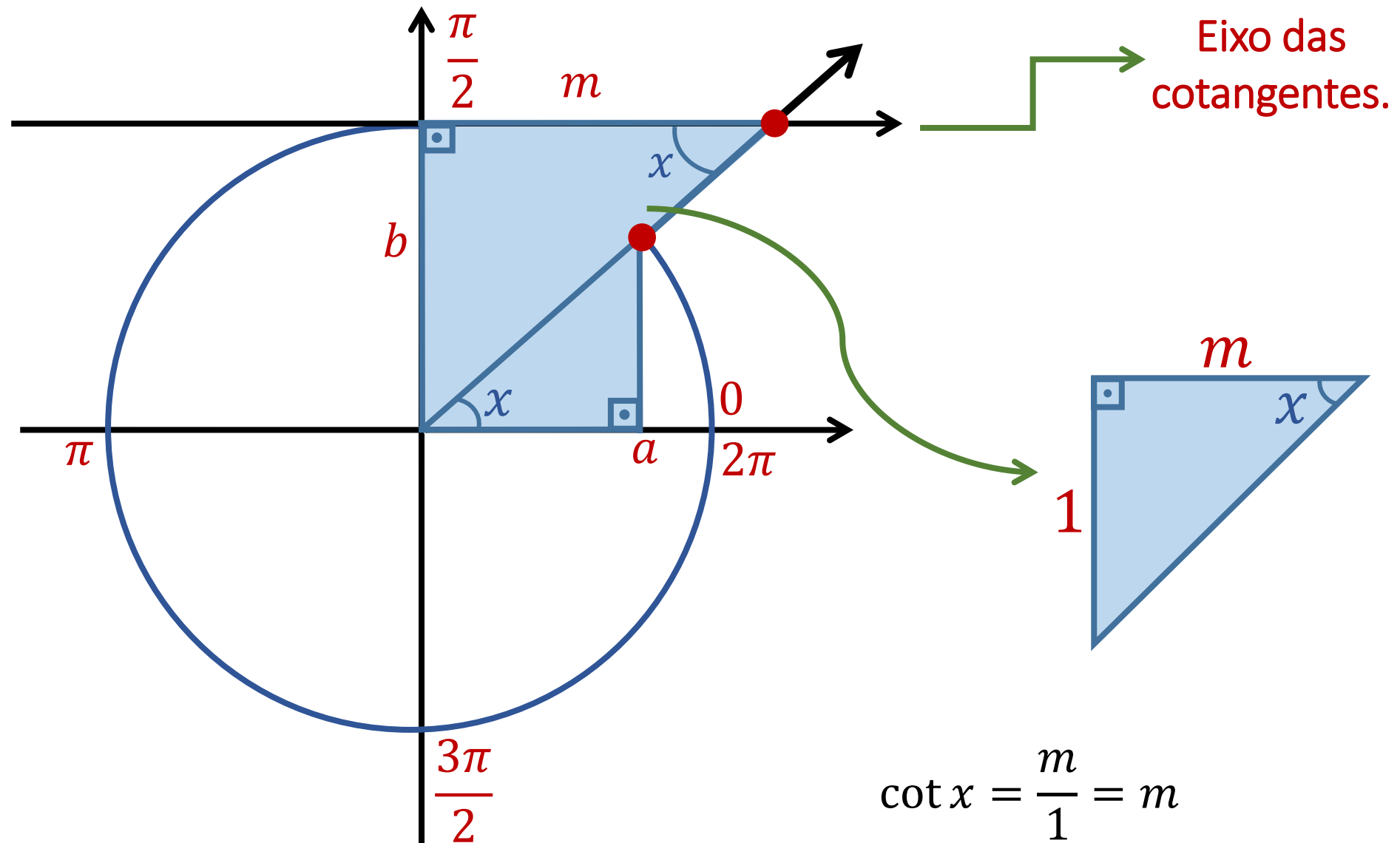
Cotangente no Ciclo Trigonométrico

Lembrando...

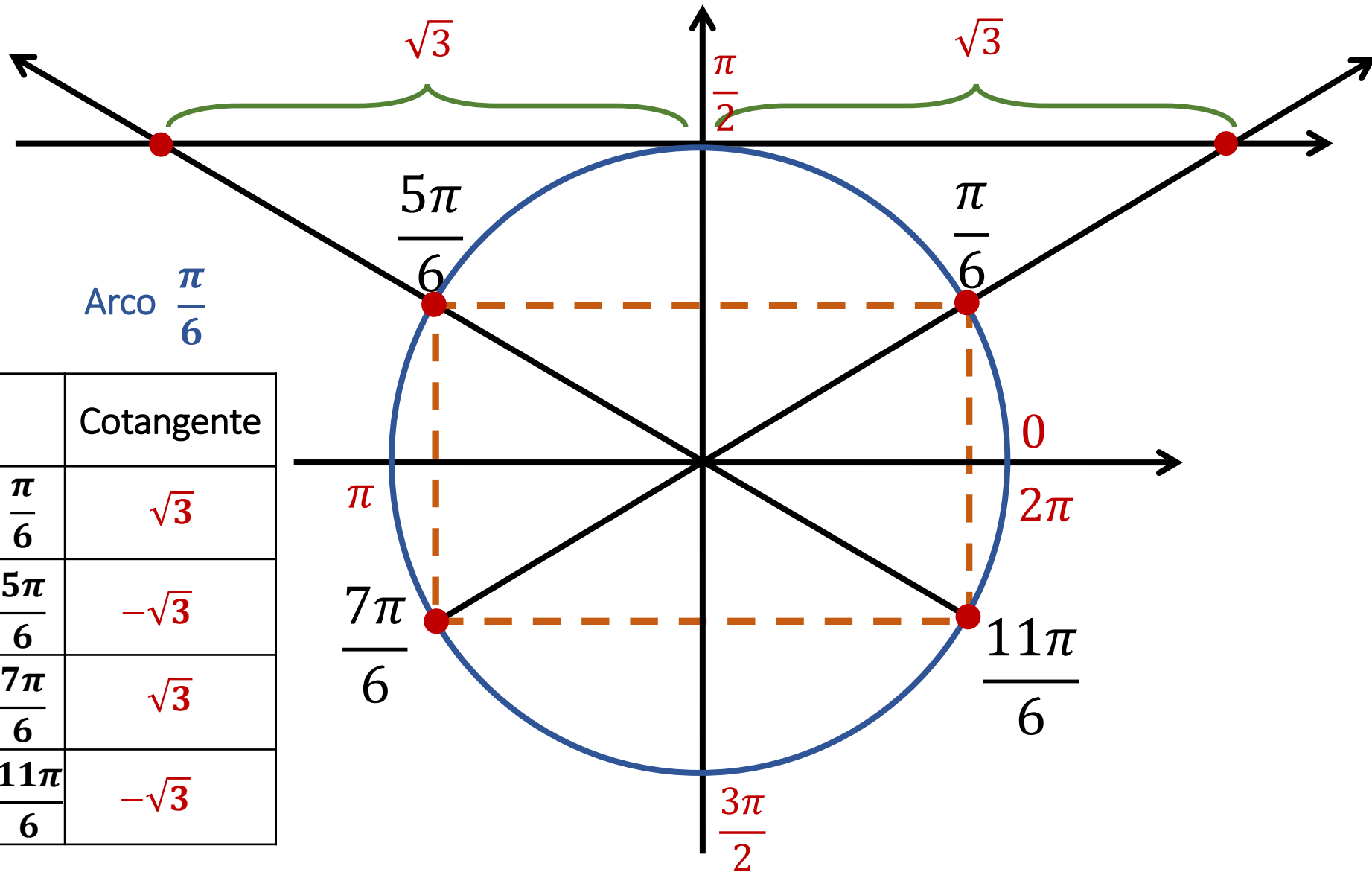
Para cada arco x , o ciclo associa um ponto $P(a, b)$ do plano cartesiano, chamado de extremidade do arco x .



Cotangente no Ciclo Trigonométrico



Cotangente dos arcos notáveis



Cotangente dos arcos notáveis

Arco $\frac{\pi}{4}$

Cotangente

$\frac{\pi}{4}$

1

$\frac{3\pi}{4}$

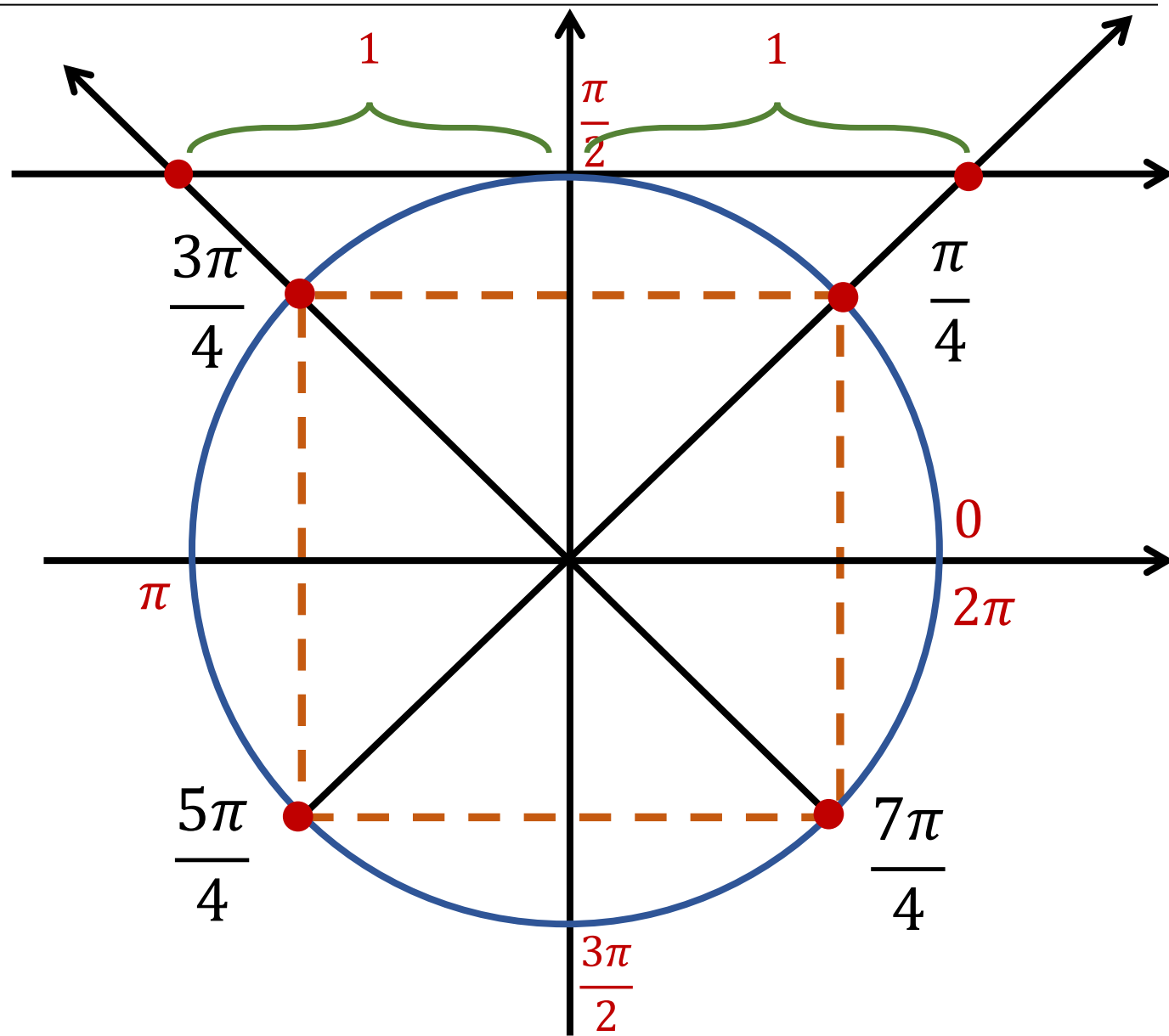
-1

$\frac{5\pi}{4}$

1

$\frac{7\pi}{4}$

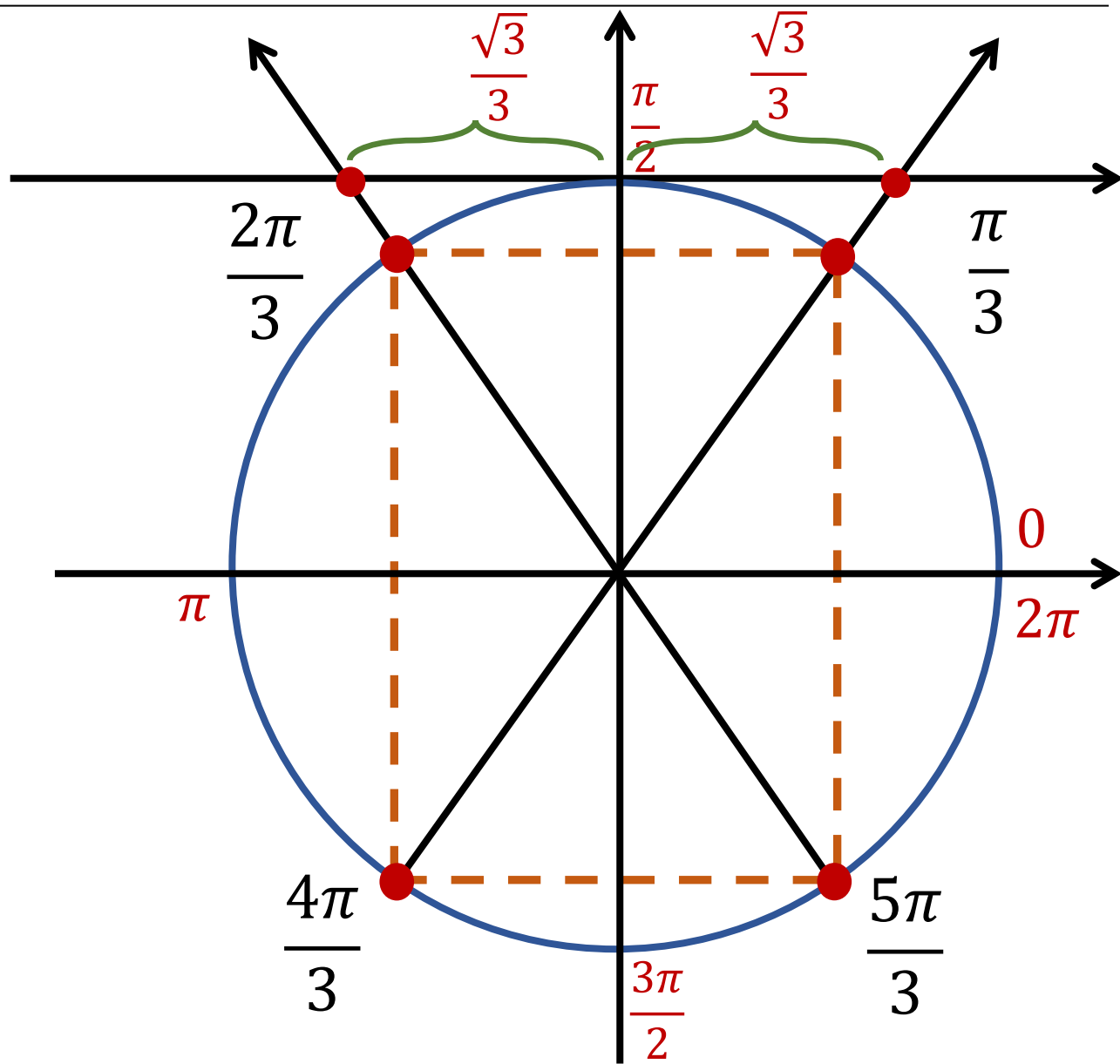
-1



Cotangente dos arcos notáveis

Arco $\frac{\pi}{3}$

	Cotangente
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$



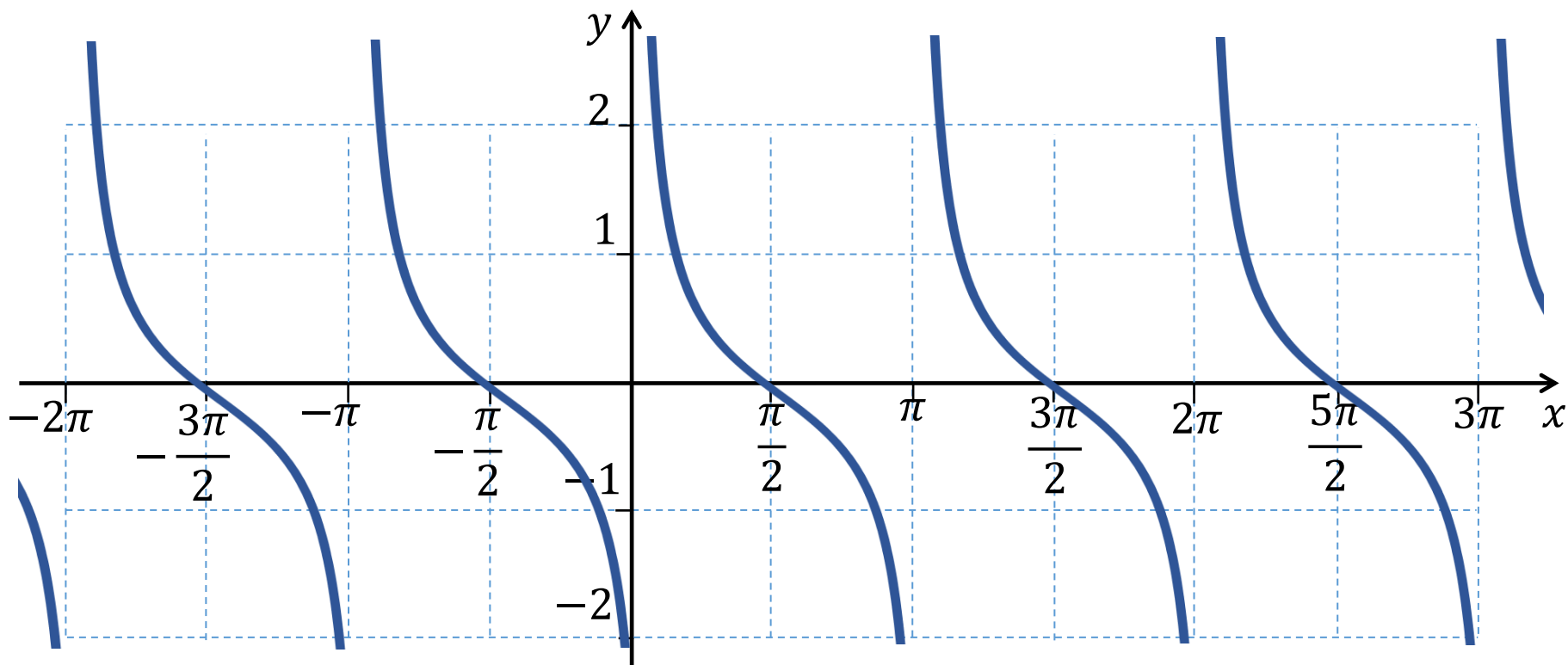
Função Cotangente

Definição:

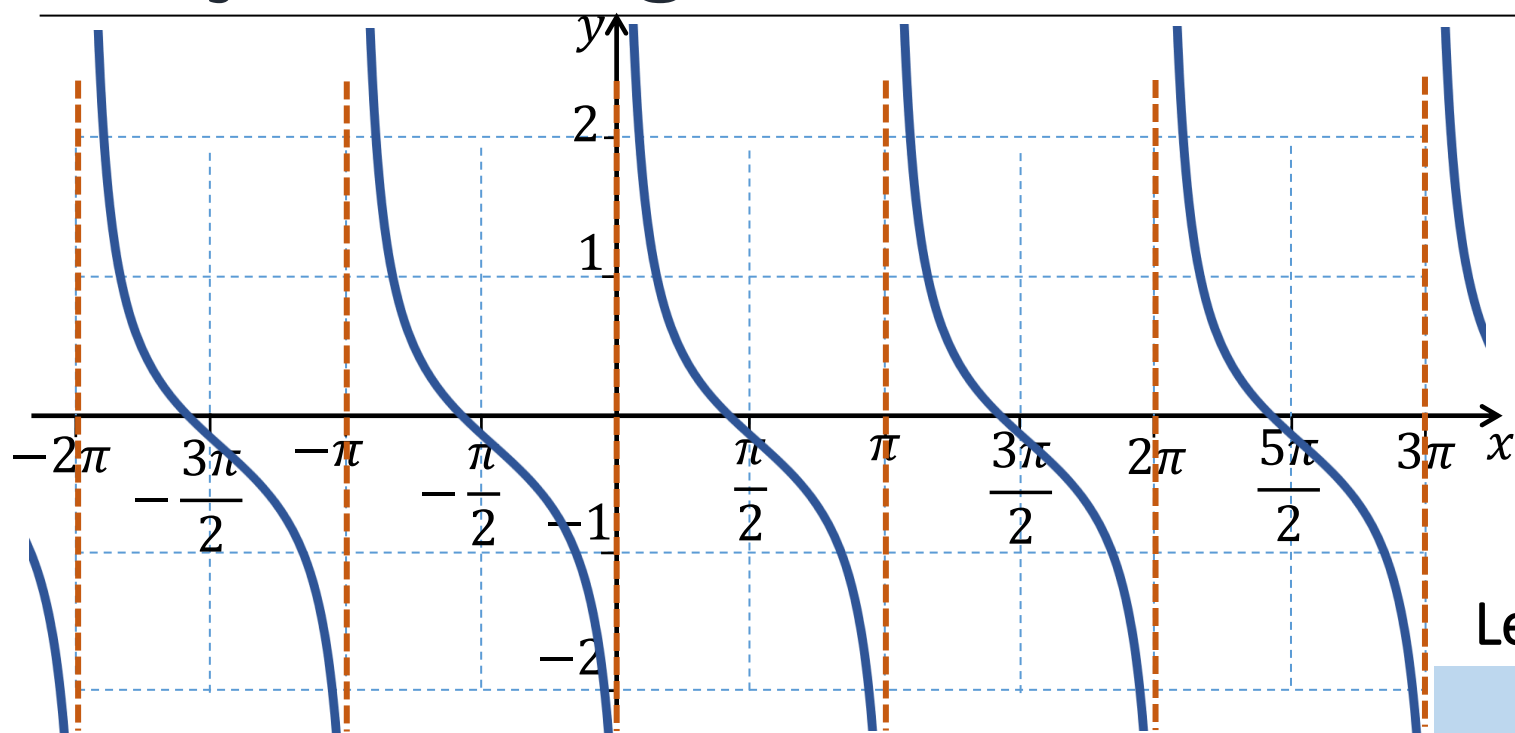
A função f dada por $f(x) = \cot x$ é chamada de função cotangente.

Gráfico da função cotangente

$$y = \cot x$$



Função Cotangente



Domínio

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$$

Imagem

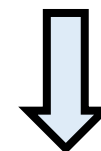
$$Im(f) = \mathbb{R}$$

Período

$$P(f) = \pi$$

Lembre que:

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$



Assíntotas

$$x = k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

Função Cotangente

1º quadrante:

- ✓ Função positiva.
- ✓ Função decrescente.

2º quadrante:

- ✓ Função negativa.
- ✓ Função decrescente.

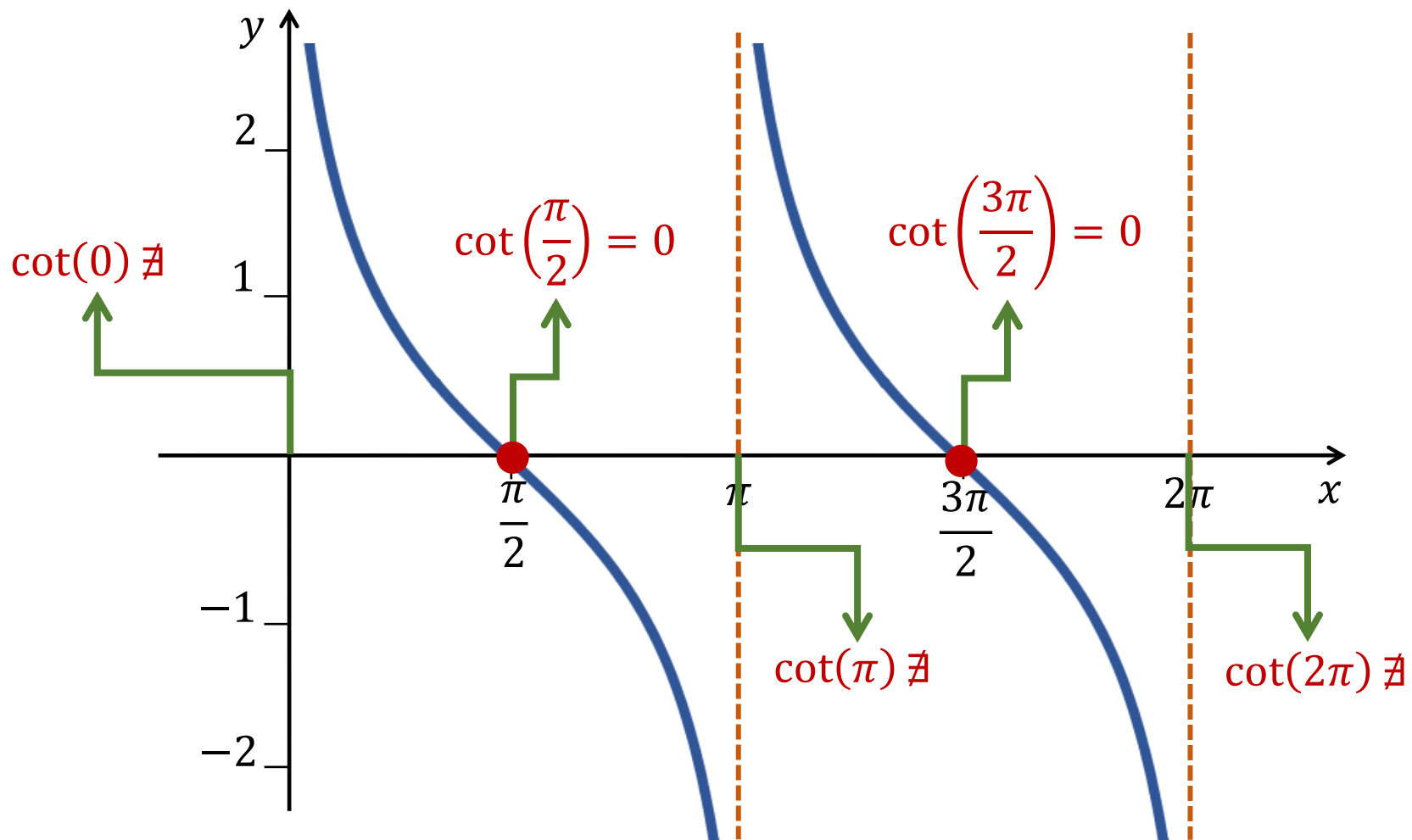
3º quadrante:

- ✓ Função positiva.
- ✓ Função decrescente.

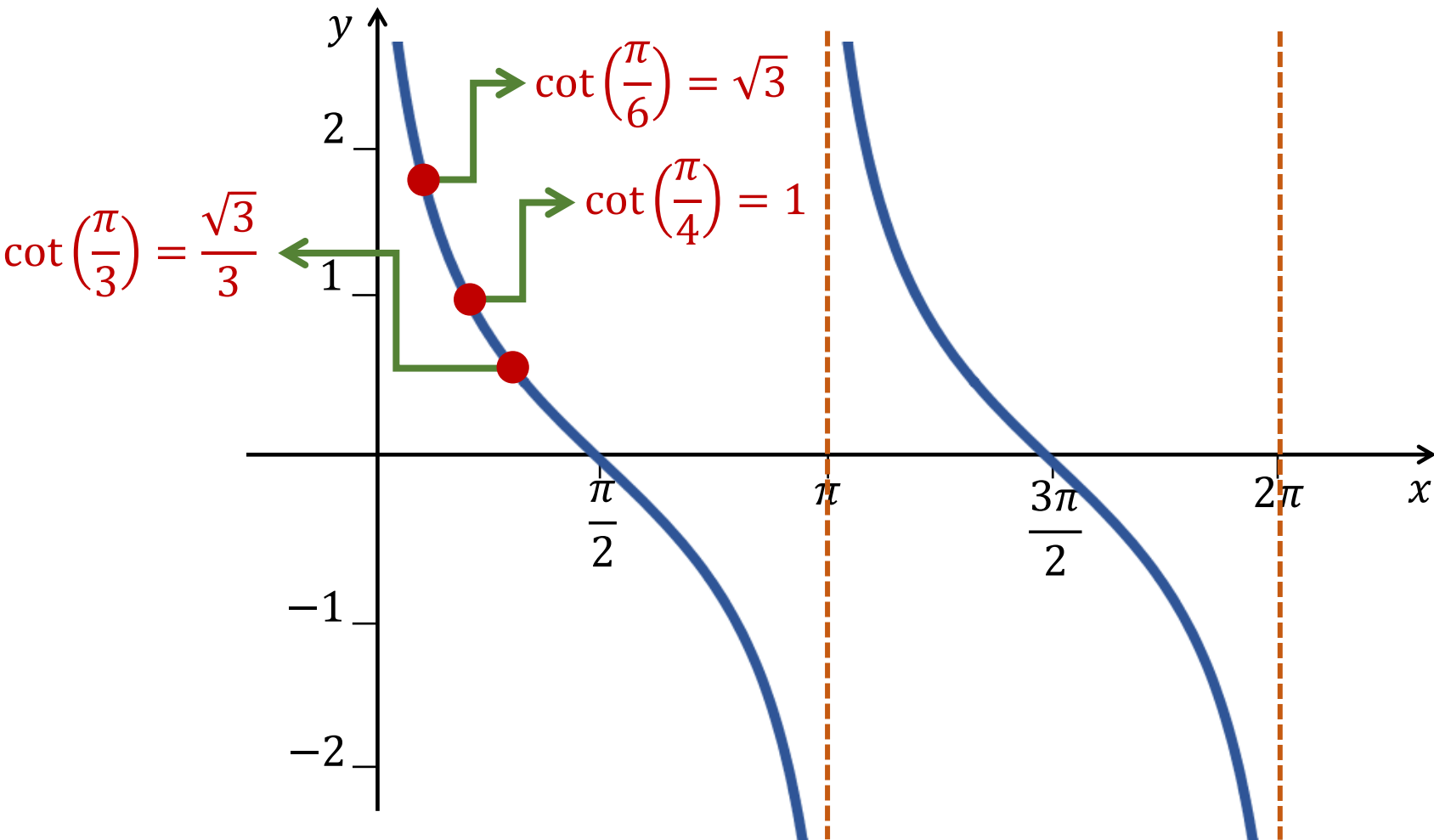
4º quadrante:

- ✓ Função negativa.
- ✓ Função decrescente.

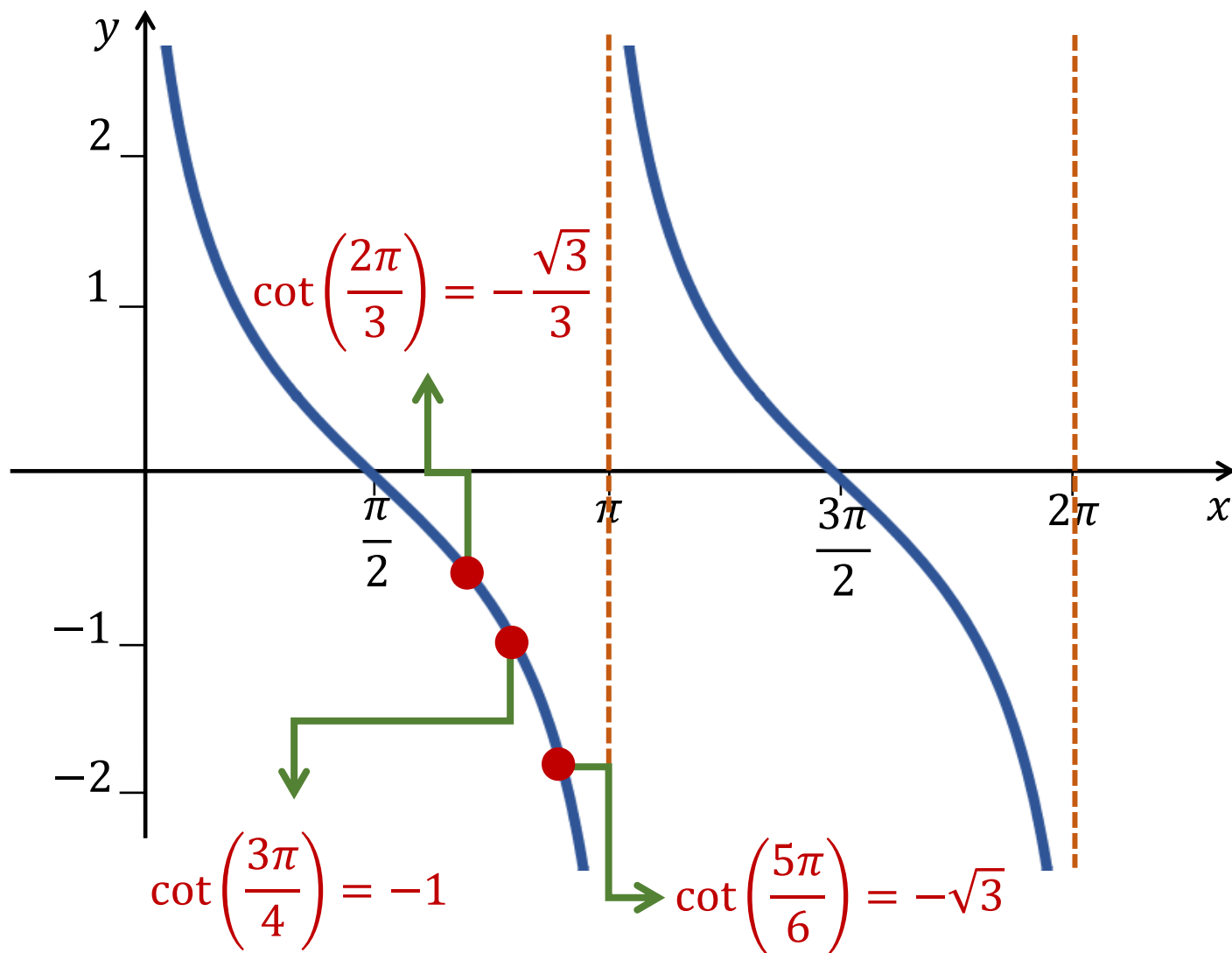
Função Cotangente



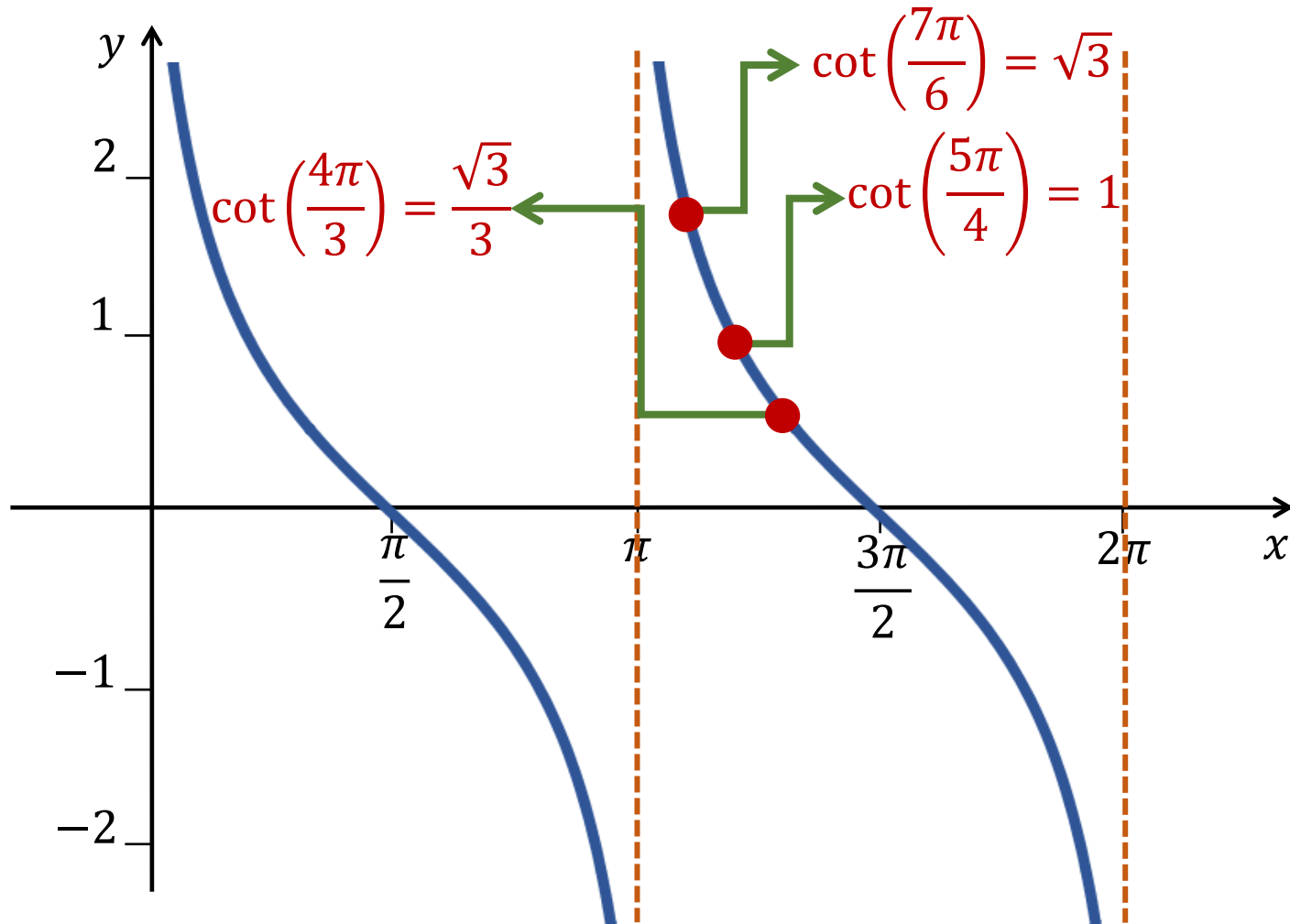
Função Cotangente: primeiro quadrante



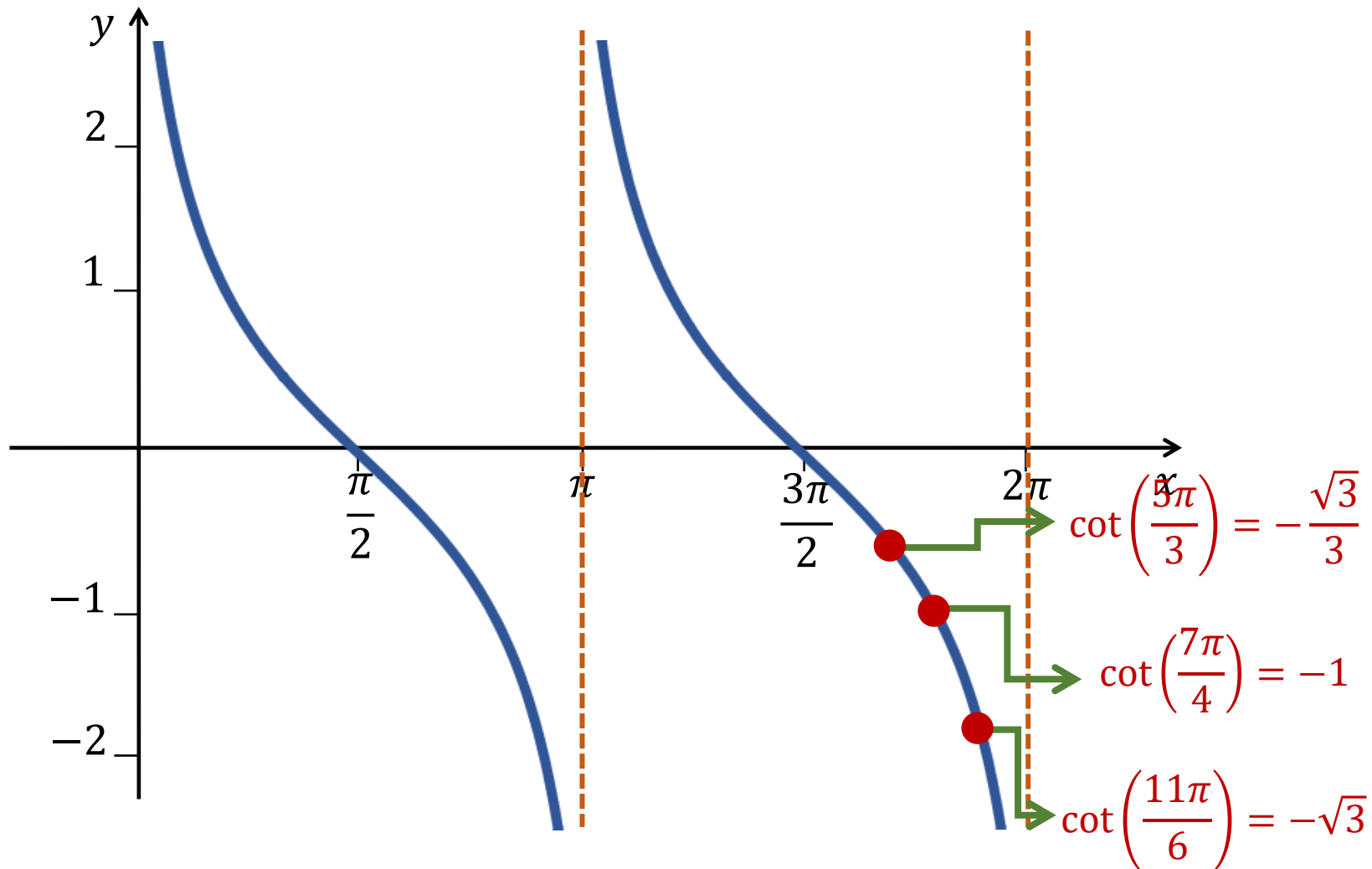
Função Cotangente: segundo quadrante



Função Cotangente: terceiro quadrante



Função Cotangente: quarto quadrante



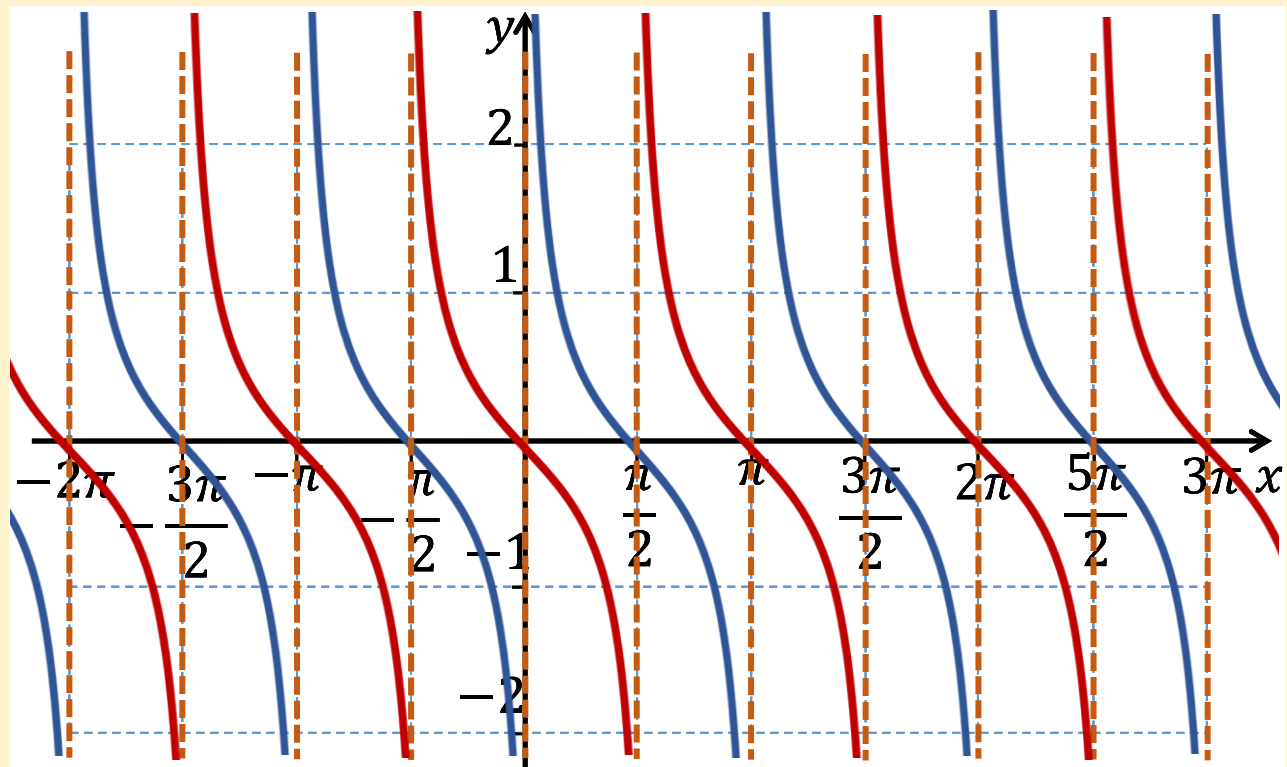
Exemplos

1) Esboce o gráfico, determine o domínio, a imagem e o período e as assíntotas da função $f(x) = \cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Solução:

$$y = \cot x$$

$$y = \cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$



Exercícios Propostos



Exercícios

1) Esboce o gráfico das funções trigonométricas, e determine o período (T), o domínio e imagem das funções:

(a) $y = \tan(2x) + 1$

(b) $y = 2 \tan(3x)$

(c) $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

(d) $y = \frac{1}{2} \cot(x - \pi)$

Respostas

Exercício 1:

$$\text{a) } T = \frac{\pi}{2} \quad D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{Im}(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{b) } T = \frac{\pi}{3} \quad D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{Im}(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{c) } T = \pi \quad D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{Im}(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{d) } T = \pi \quad D(f) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z} \} \quad \text{Im}(f) = \mathbb{R}$$

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

<http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias>

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

<http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA>

O GAMA possui monitorias de:

- ☐ Matemática Elementar, Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e equivalentes)
 - ☐ ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
 - ☐ Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3 (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.



Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino



Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas

Aula 04

Projeto

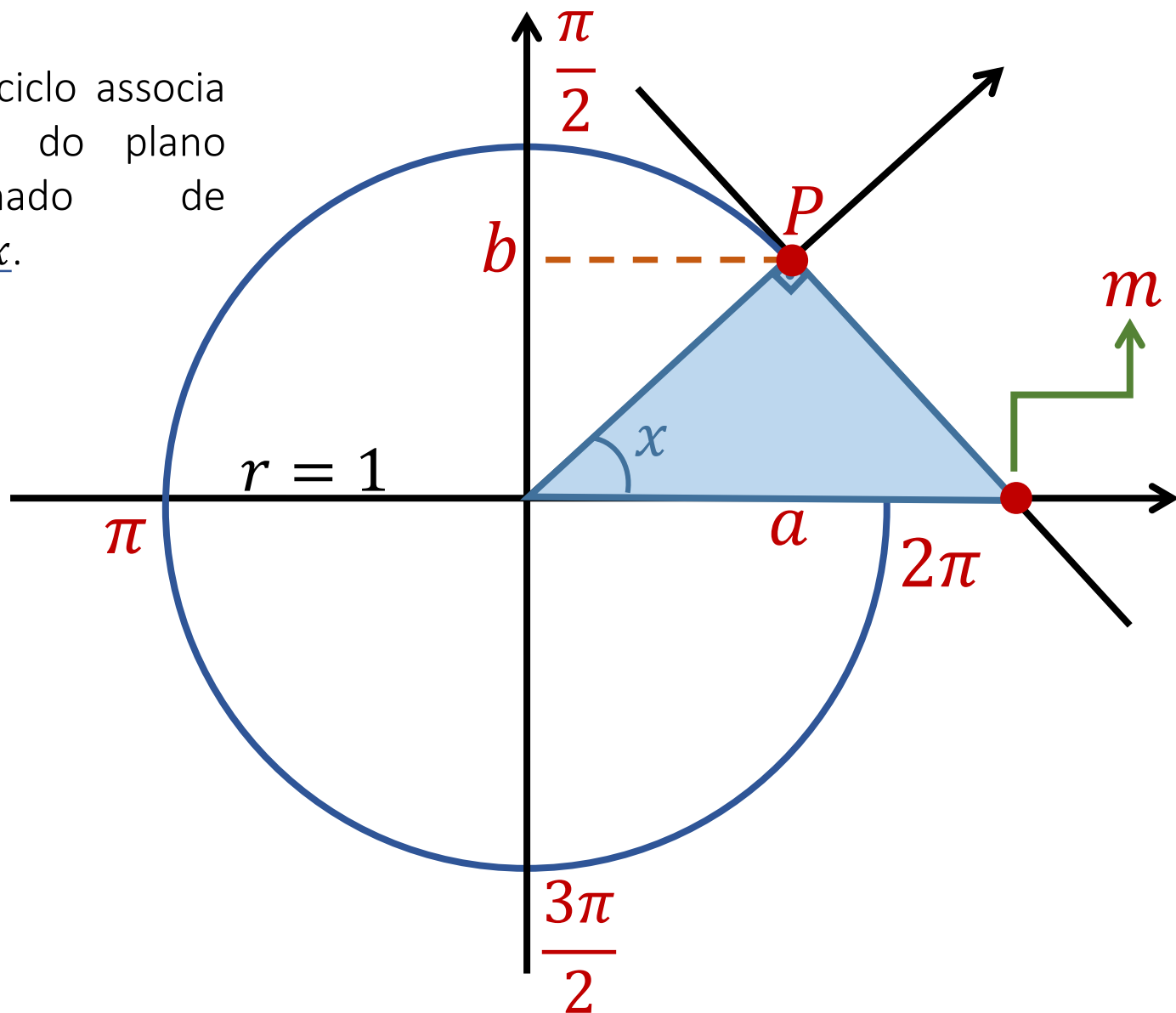
GAMA

Grupo de Apoio em
Matemática

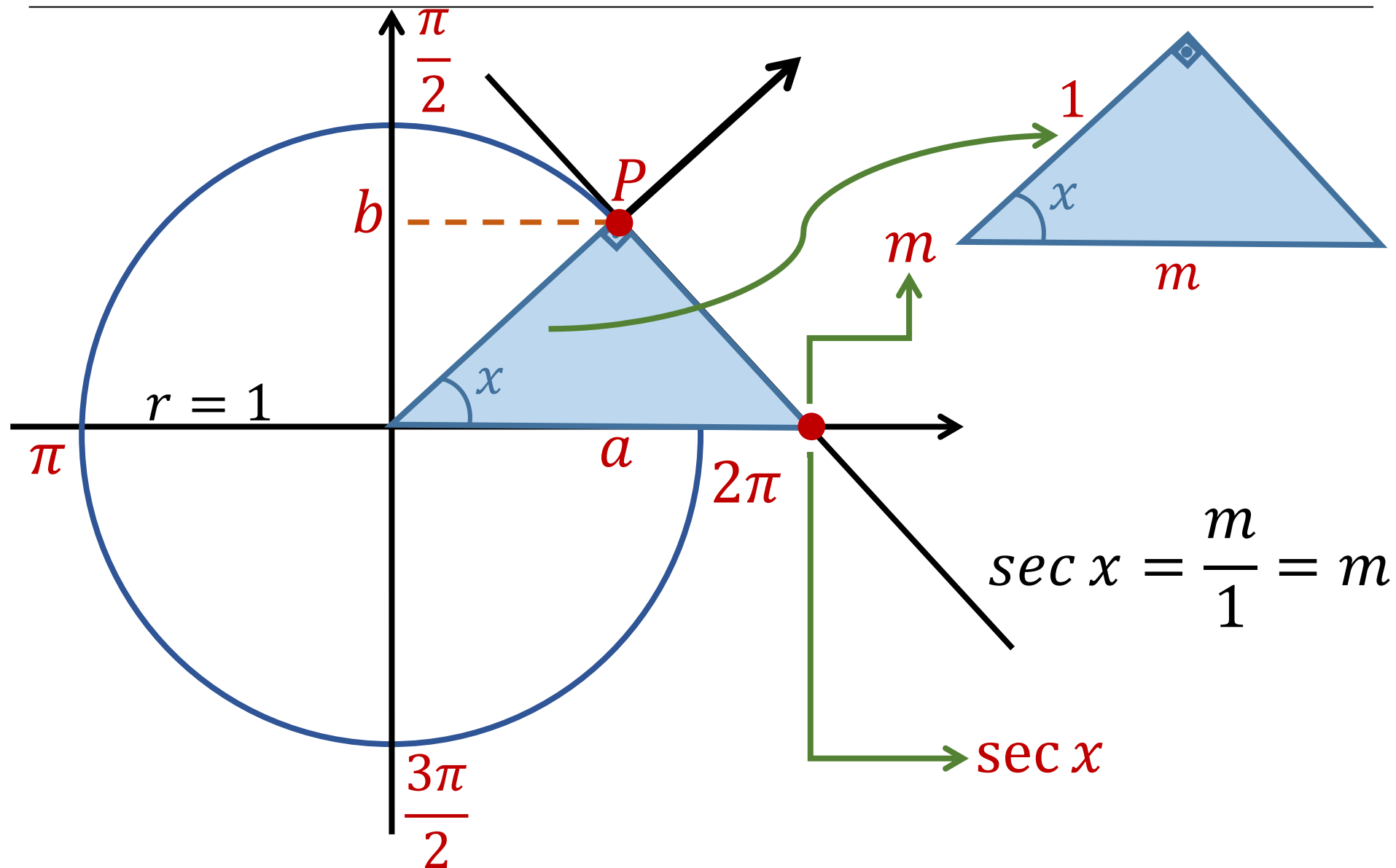
Secante no Ciclo Trigonométrico

Lembrando...

Para cada arco x , o ciclo associa um ponto $P(a, b)$ do plano cartesiano, chamado de extremidade do arco x .



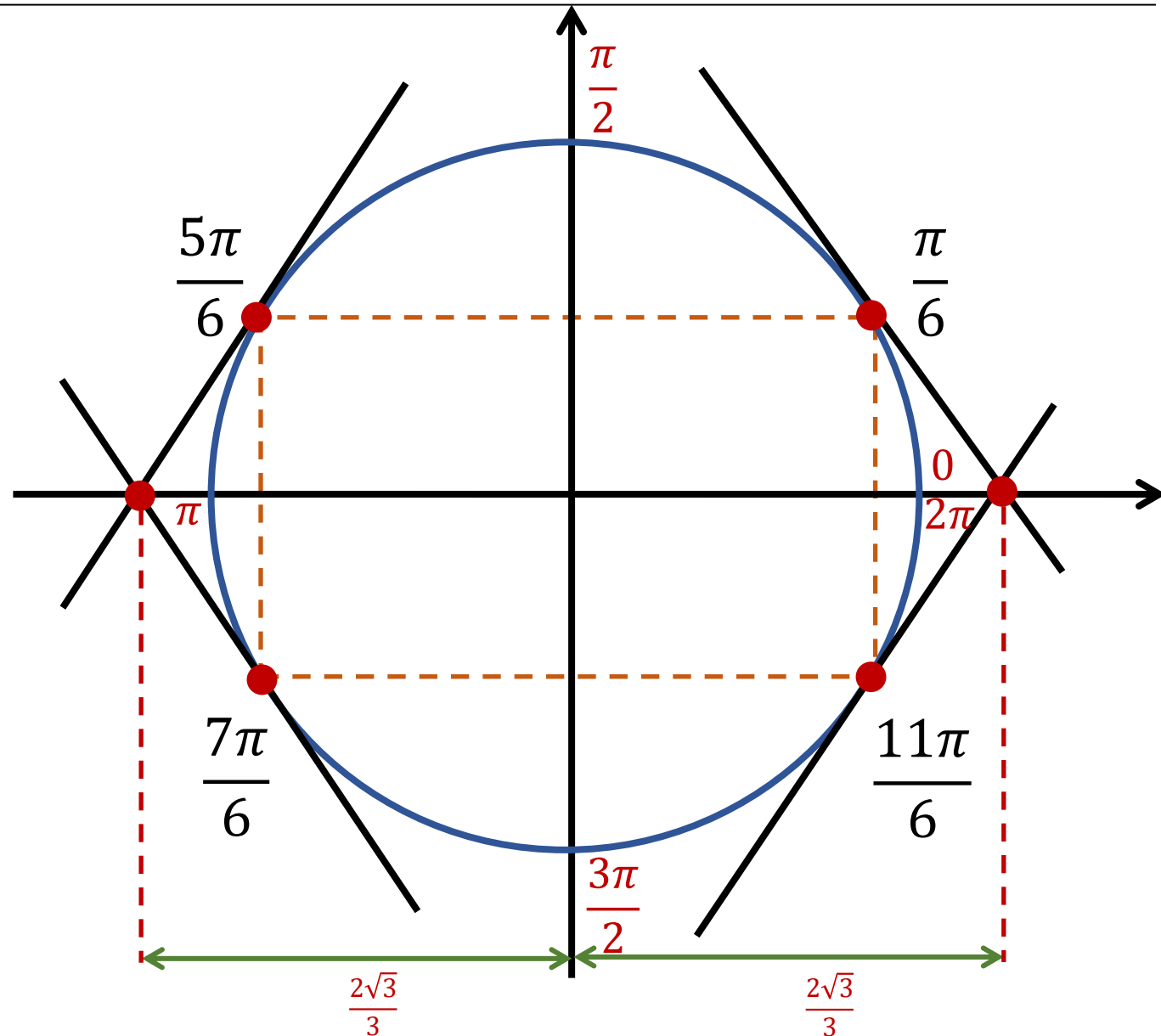
Secante no Ciclo Trigonométrico



Secante dos arcos notáveis

Arco $\frac{\pi}{6}$

	Secante
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

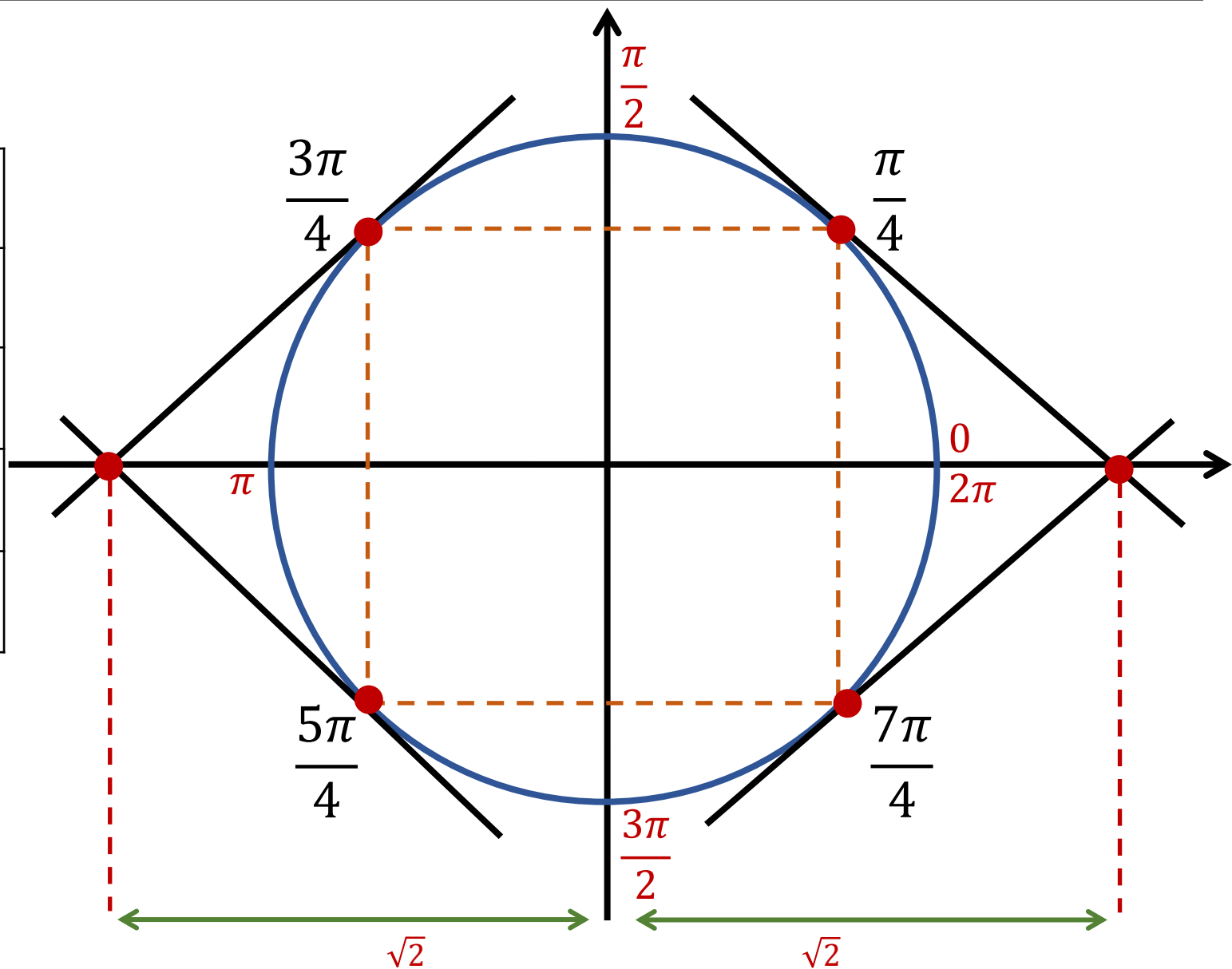


Secante dos arcos notáveis

Arco $\frac{\pi}{4}$

Secante

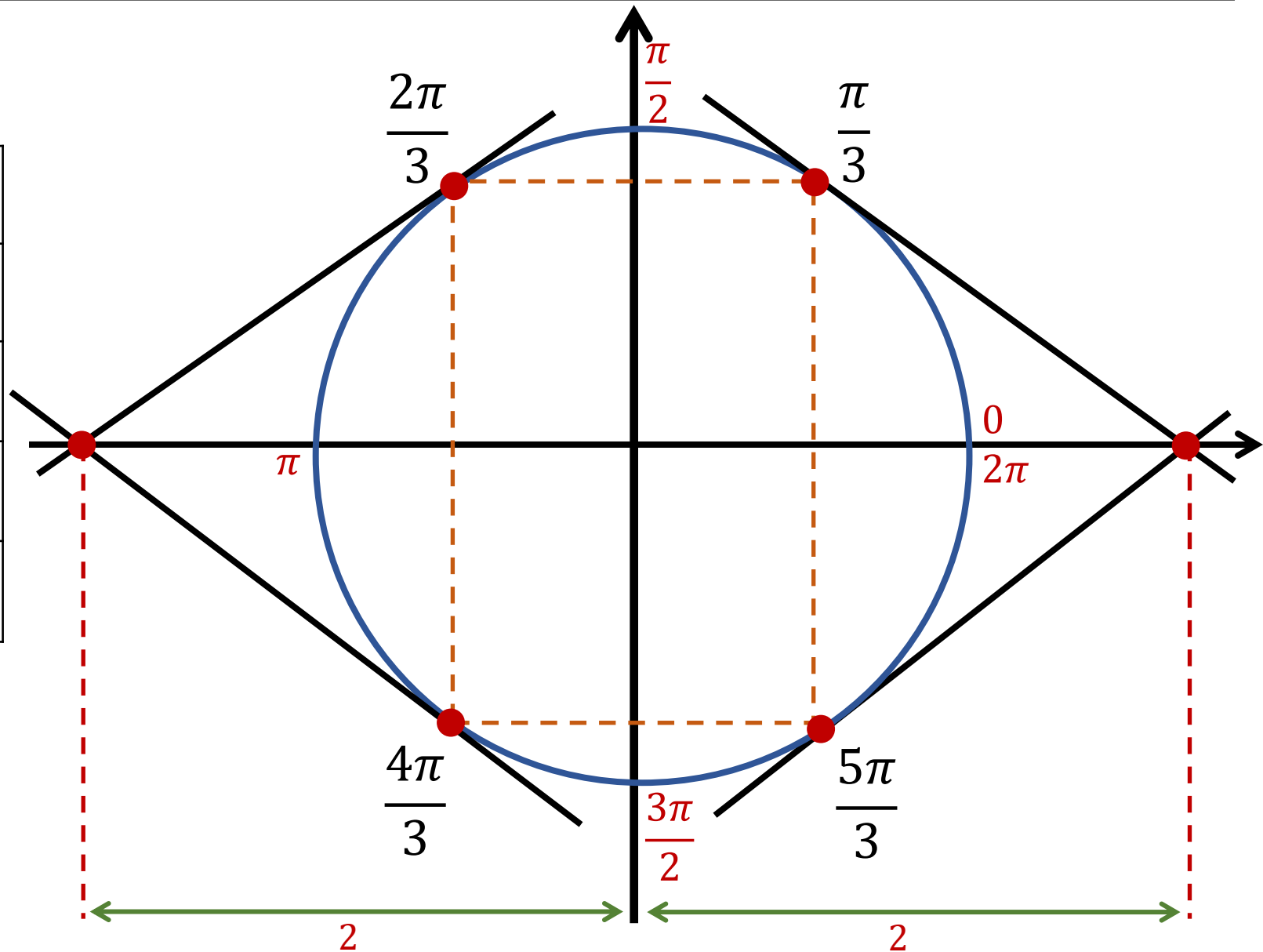
	Secante
$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$-\sqrt{2}$
$\frac{5\pi}{4}$	$-\sqrt{2}$
$\frac{7\pi}{4}$	$\sqrt{2}$



Secante dos arcos notáveis

Arco $\frac{\pi}{3}$

	Secante
$\frac{\pi}{3}$	2
$\frac{2\pi}{3}$	-2
$\frac{4\pi}{3}$	-2
$\frac{5\pi}{3}$	2



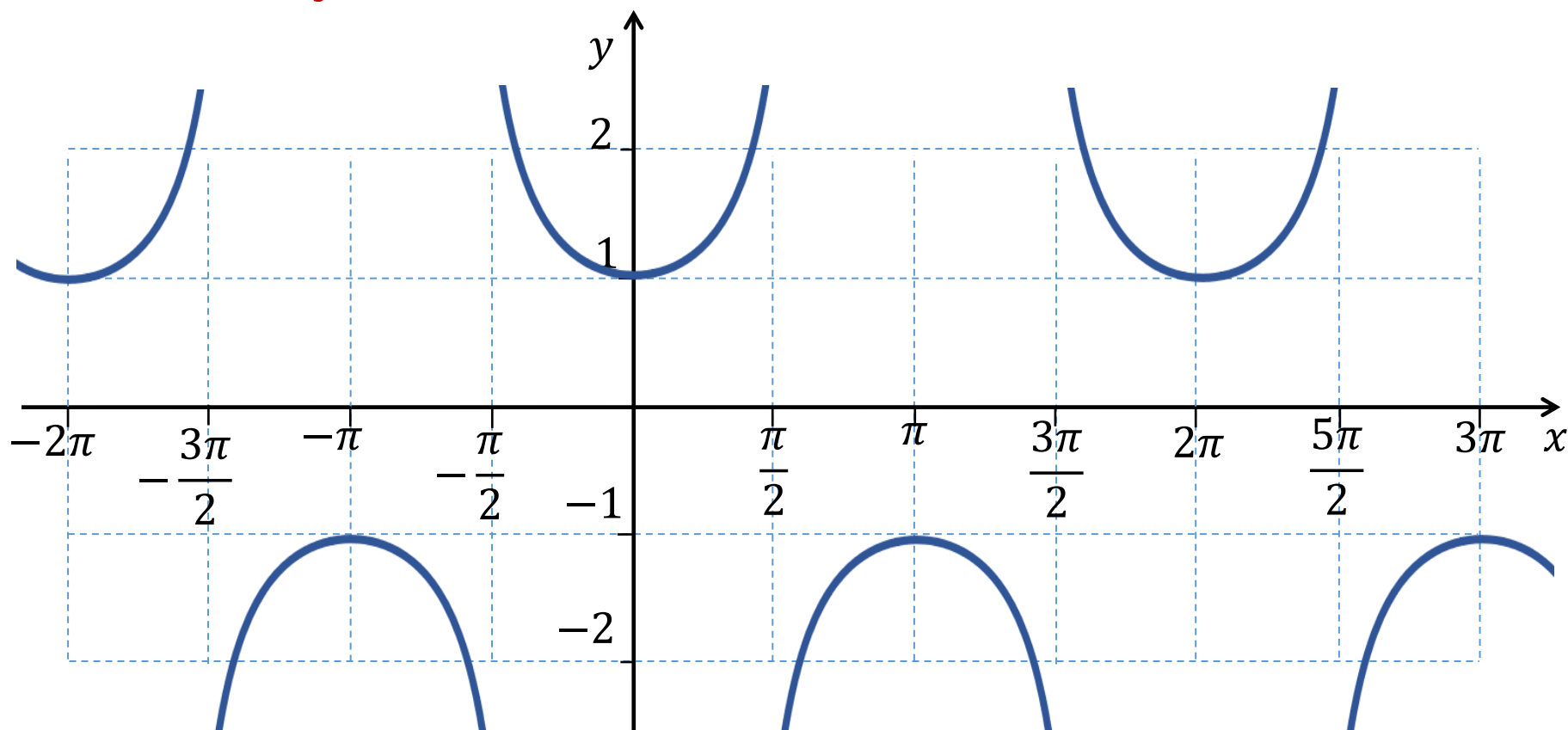
Função Secante

Definição:

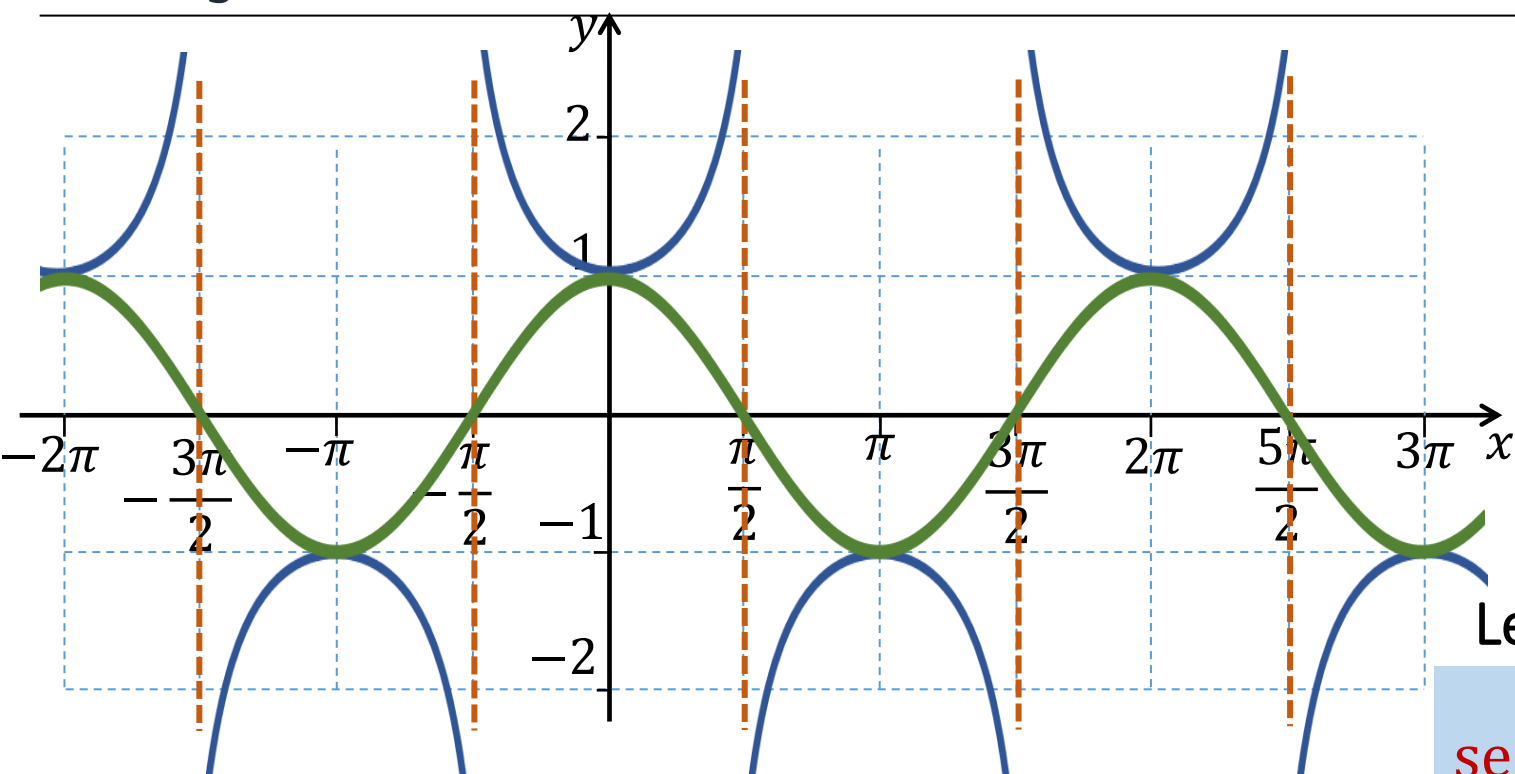
A função f dada por $f(x) = \sec x$ é chamada de **função secante**.

Gráfico da função secante

$$y = \sec x$$



Função Secante



Domínio

$$D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Imagem

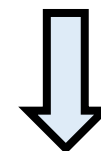
$$Im(f) = \mathbb{R} - (-1, 1)$$

Período

$$P(f) = 2\pi$$

Lembre que:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$



Assíntotas

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

Função Secante

1º quadrante:

- ✓ Função positiva.
- ✓ Função crescente.

2º quadrante:

- ✓ Função negativa.
- ✓ Função crescente.

3º quadrante:

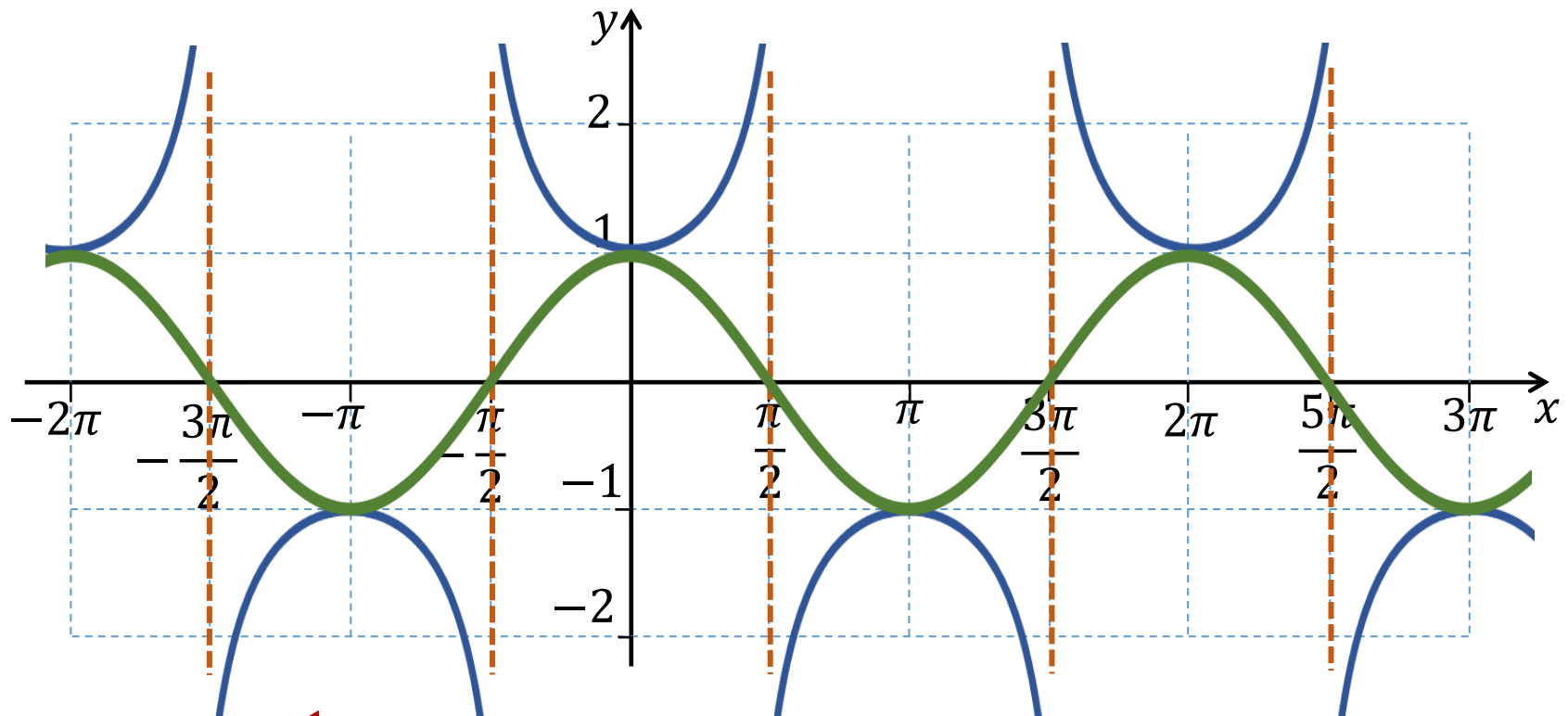
- ✓ Função negativa.
- ✓ Função decrescente.

4º quadrante:

- ✓ Função positiva.
- ✓ Função decrescente.

Função Secante

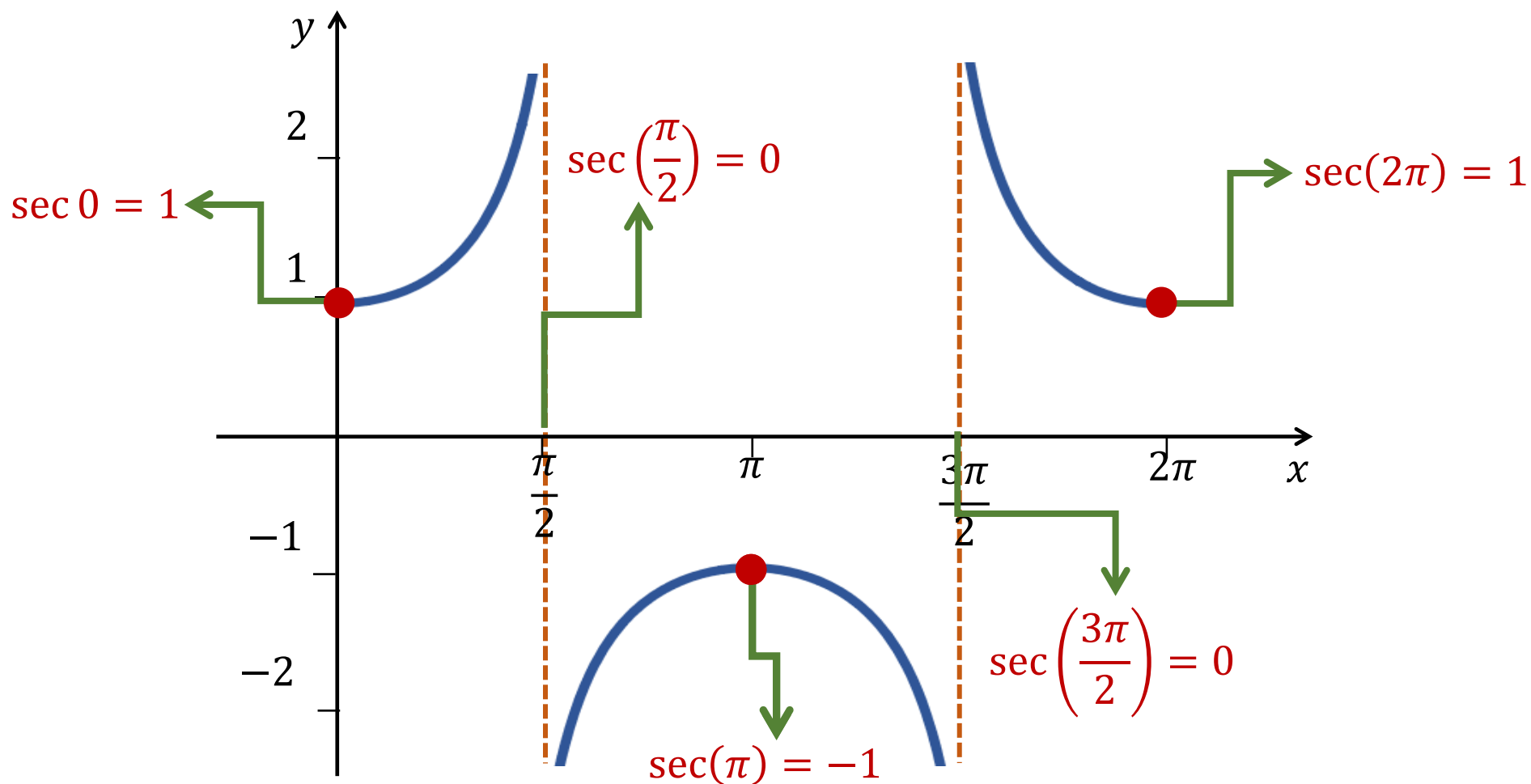
Relação gráfica entre as funções secante e cosseno:



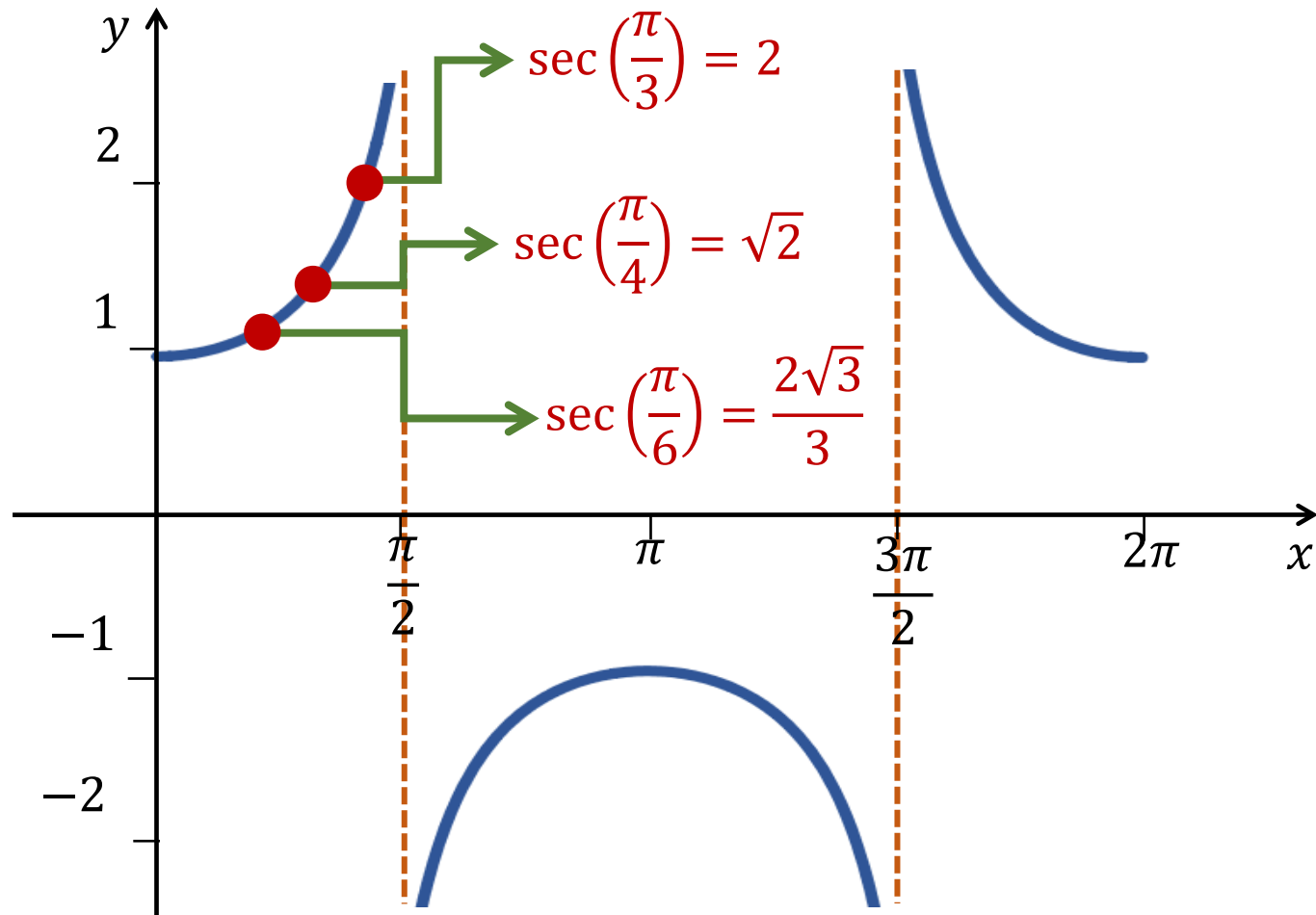
$$f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

- ✓ Onde o cosseno cresce, a secante decresce, e vice-versa;
- ✓ Onde o cosseno se anula, a secante não está definida;
- ✓ O sinal da secante acompanha o sinal do cosseno, em cada quadrante.

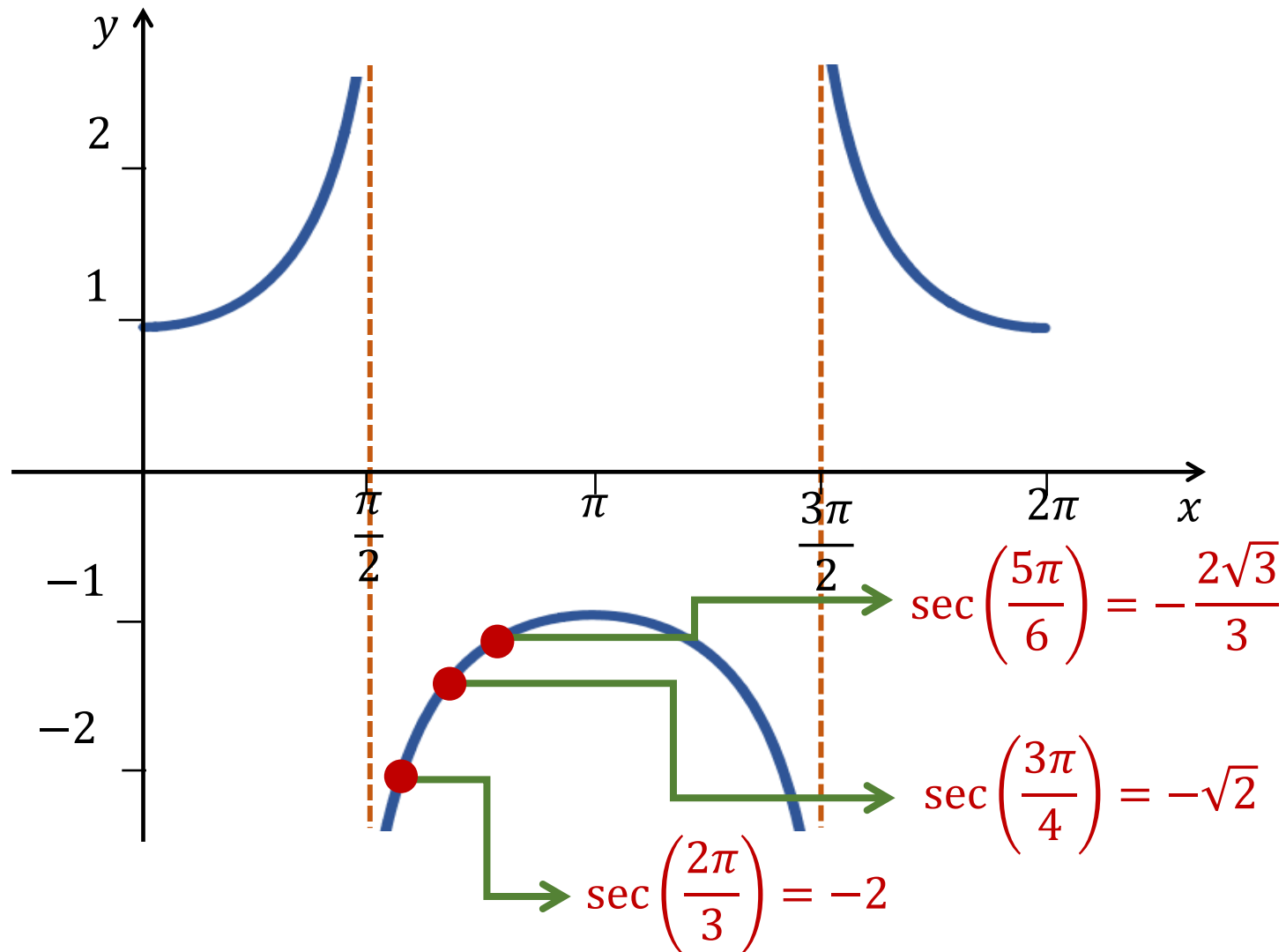
Função Secante



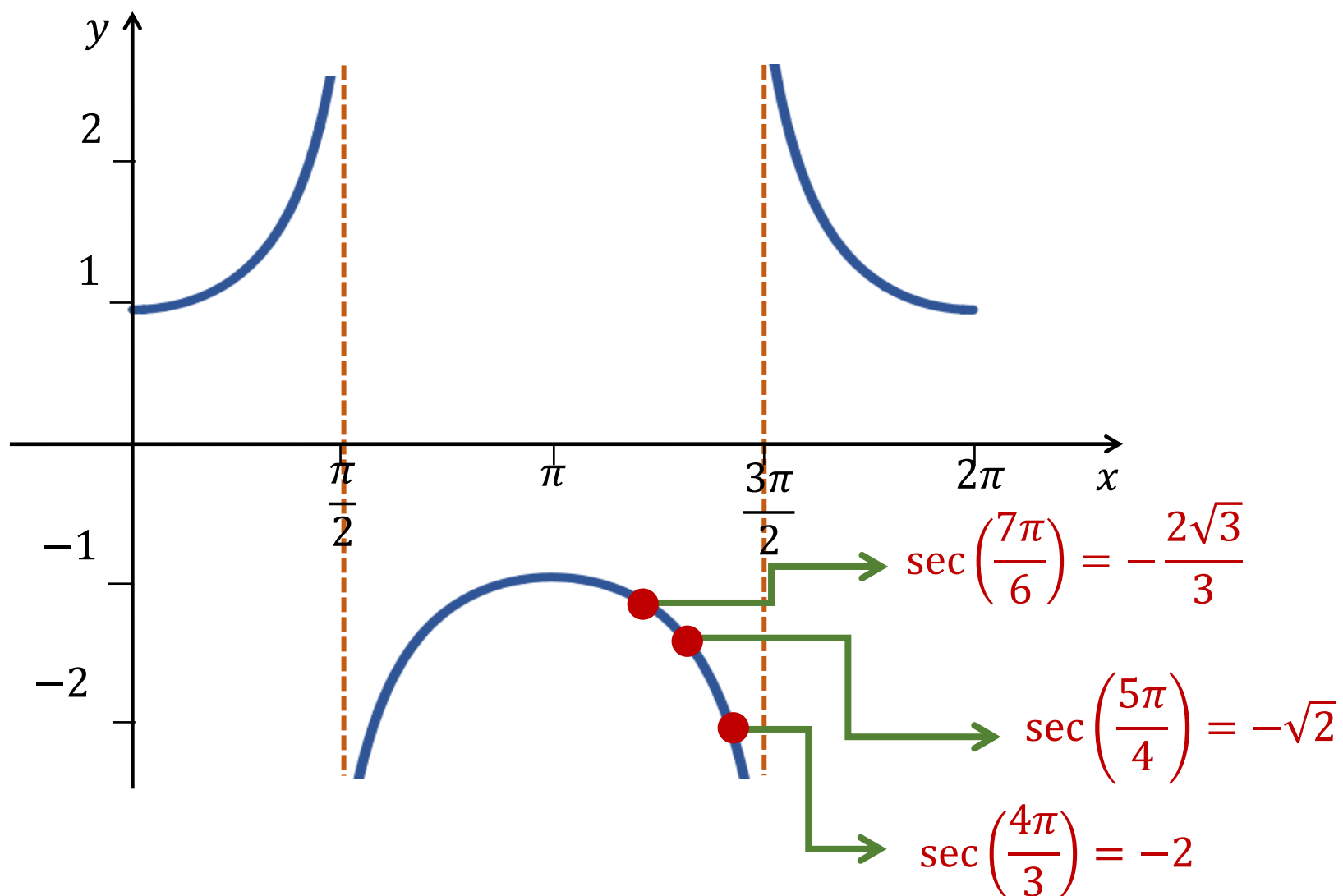
Função Secante: primeiro quadrante



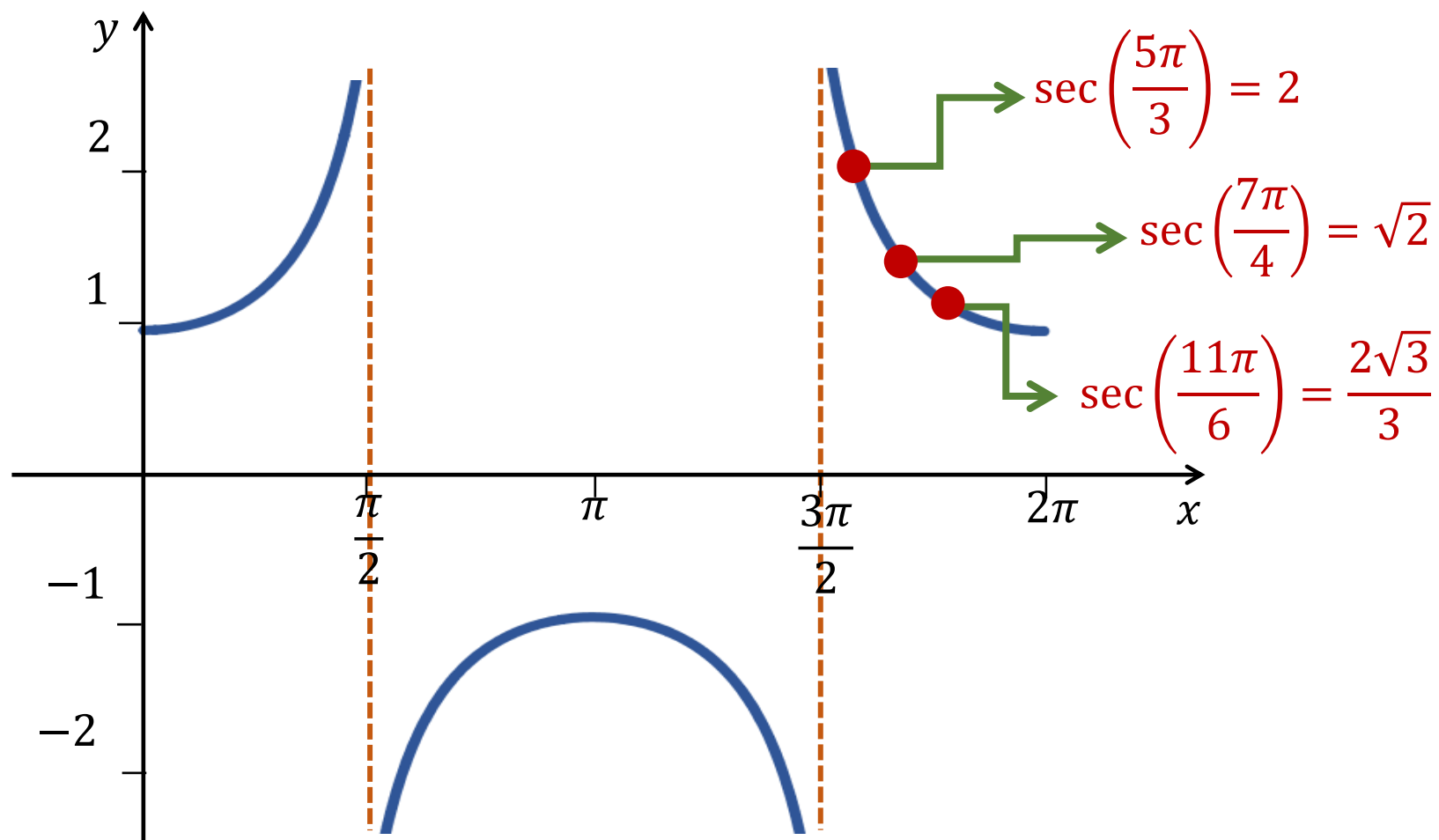
Função Secante: segundo quadrante



Função Secante: terceiro quadrante



Função Secante: quarto quadrante



Exemplos

1) Esboce o gráfico, determine o domínio, a imagem e o período e as assíntotas da função $f(x) = -\sec\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Solução:

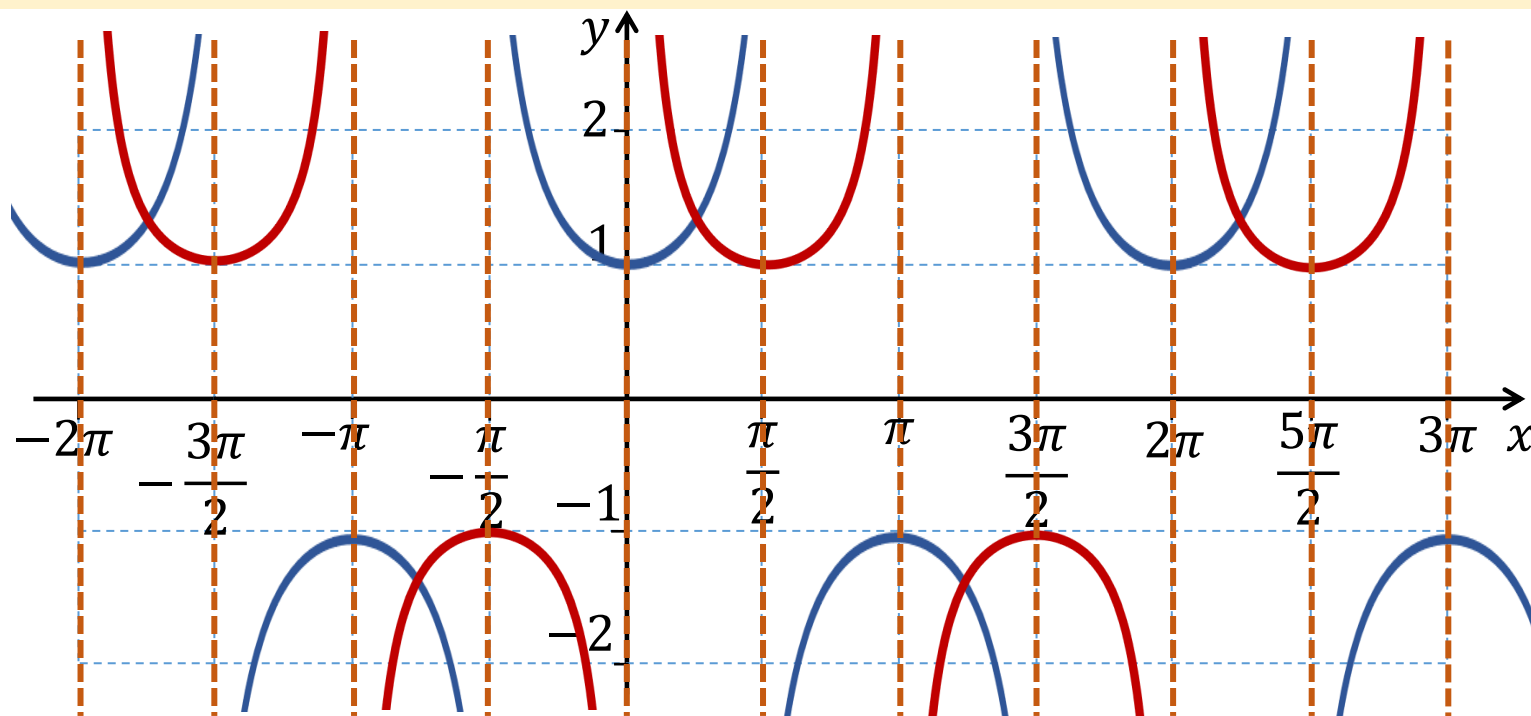
$$y = \sec x$$

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$$

$$Im(f) = \mathbb{R} - (-1, 1)$$

$$P(f) = 2\pi$$

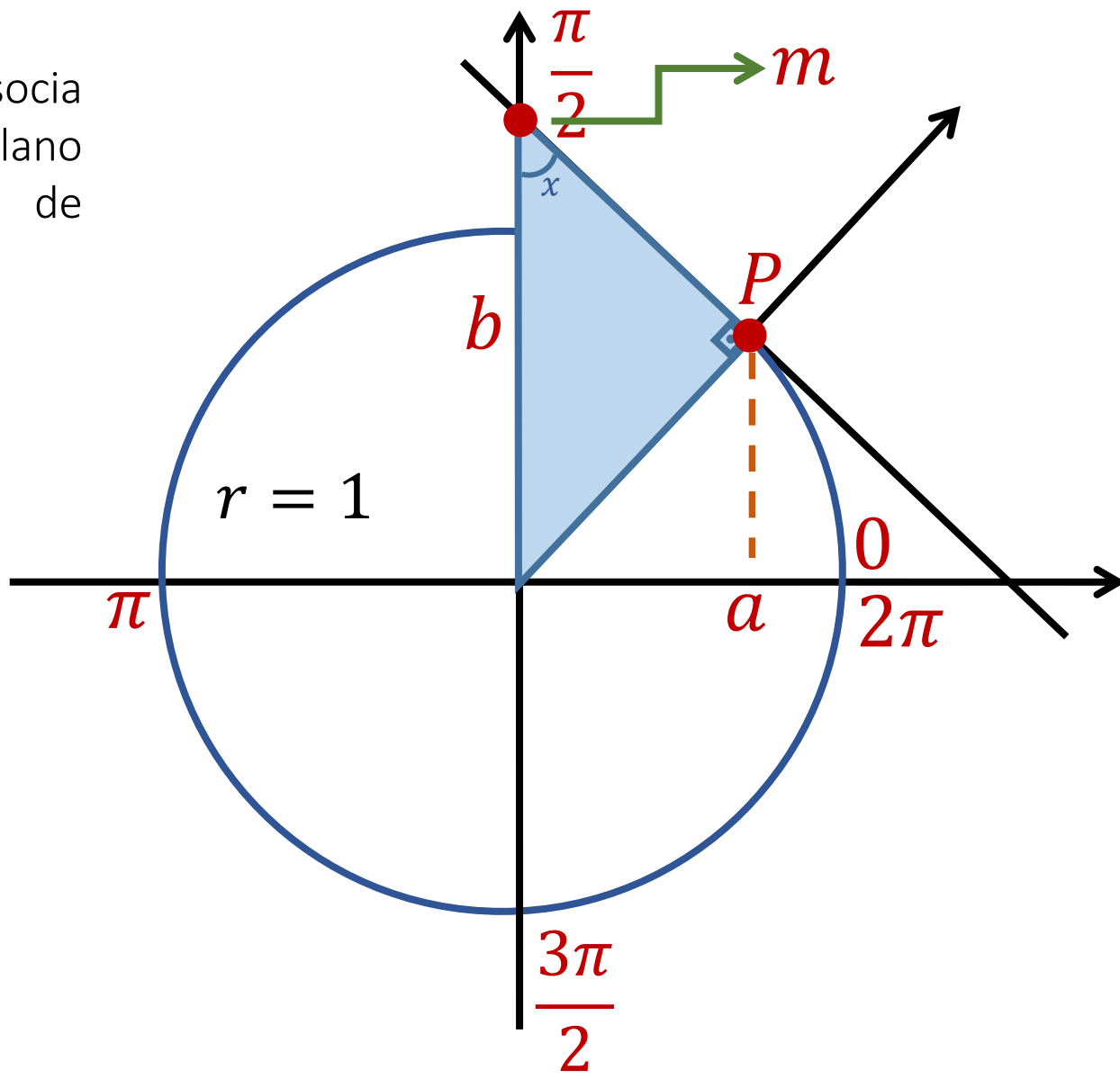
$$y = -\sec\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$



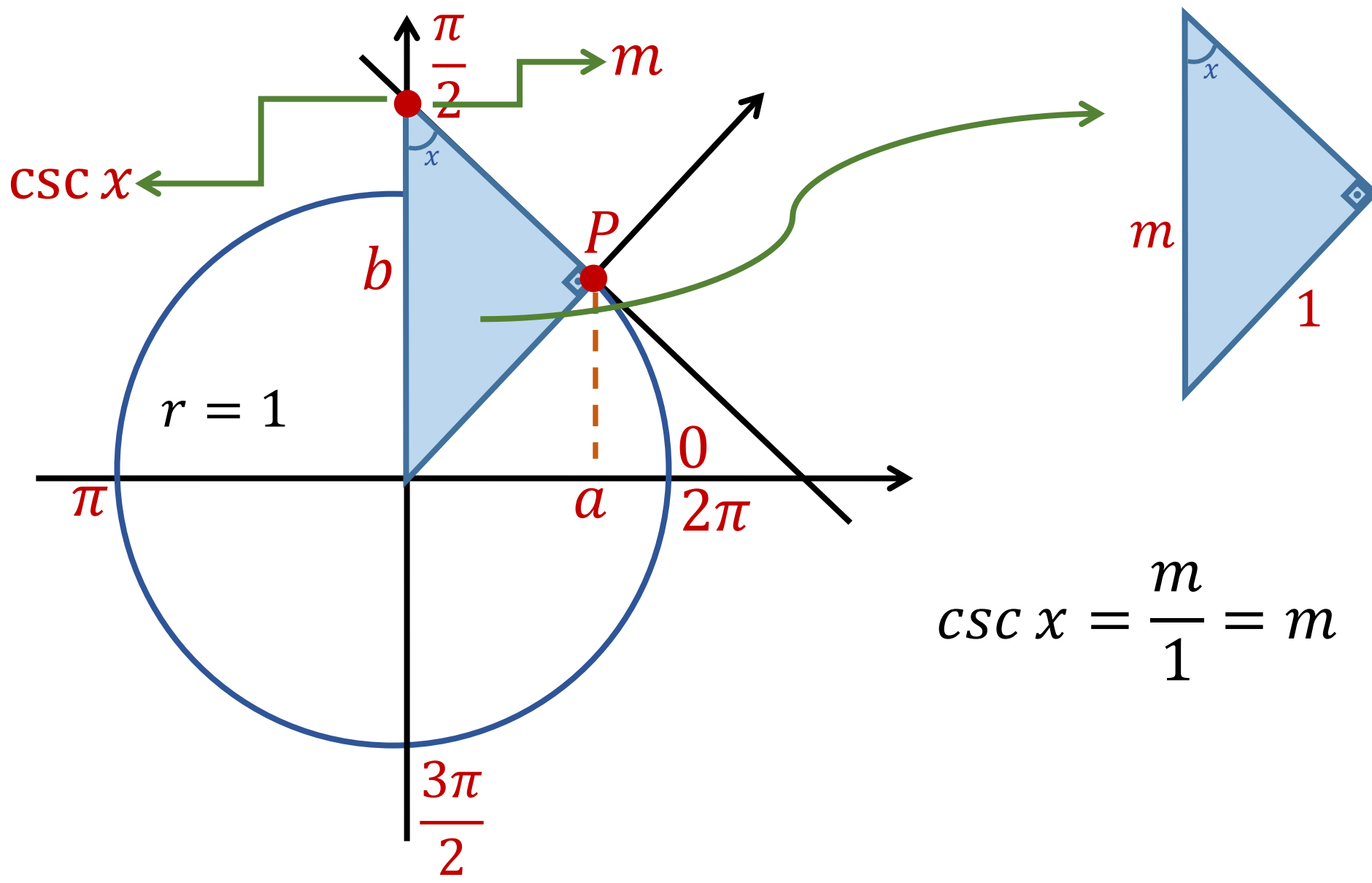
Cossecante no Ciclo Trigonométrico

Lembrando...

Para cada arco x , o ciclo associa um ponto $P(a, b)$ do plano cartesiano, chamado de extremidade do arco x .



Cossecante no Ciclo Trigonométrico

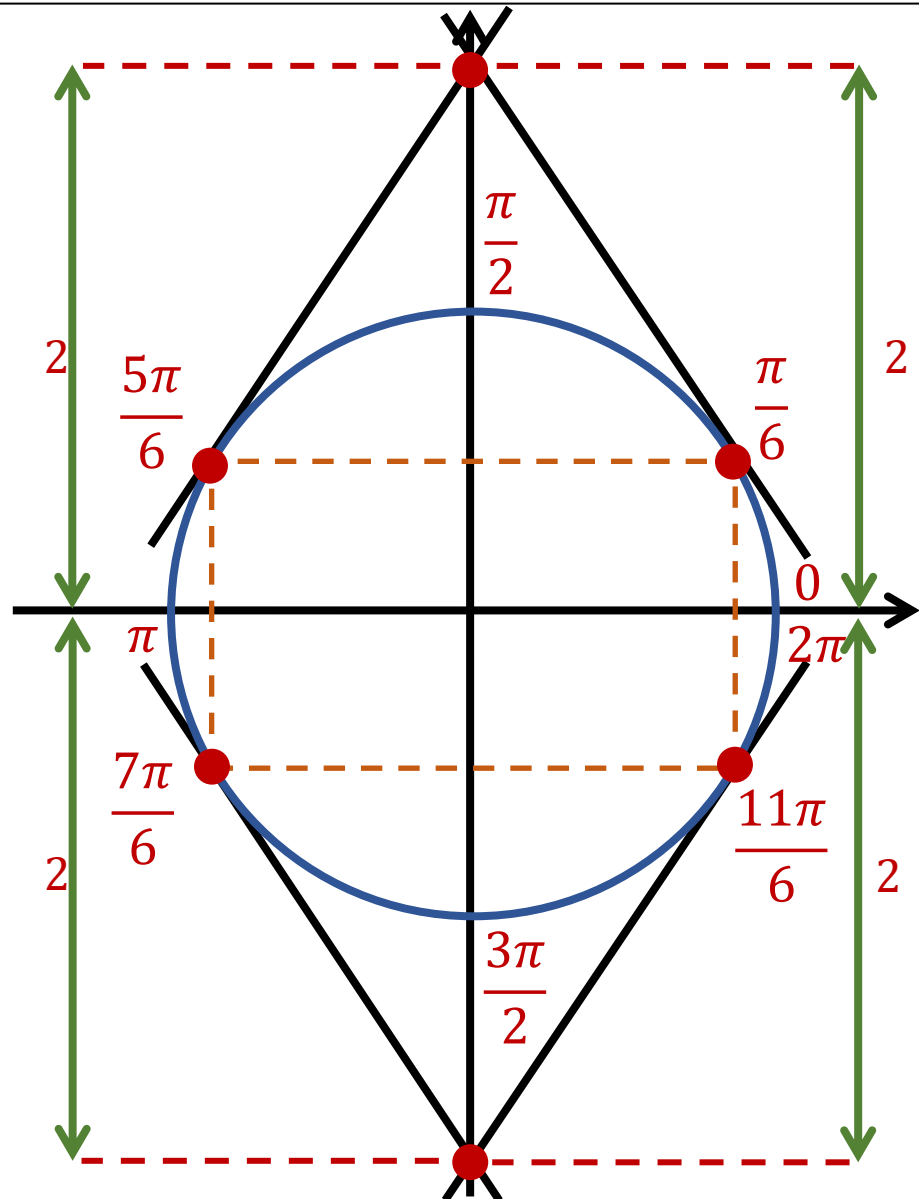


Cossecante dos arcos notáveis

Arco $\frac{\pi}{6}$

Cossecante

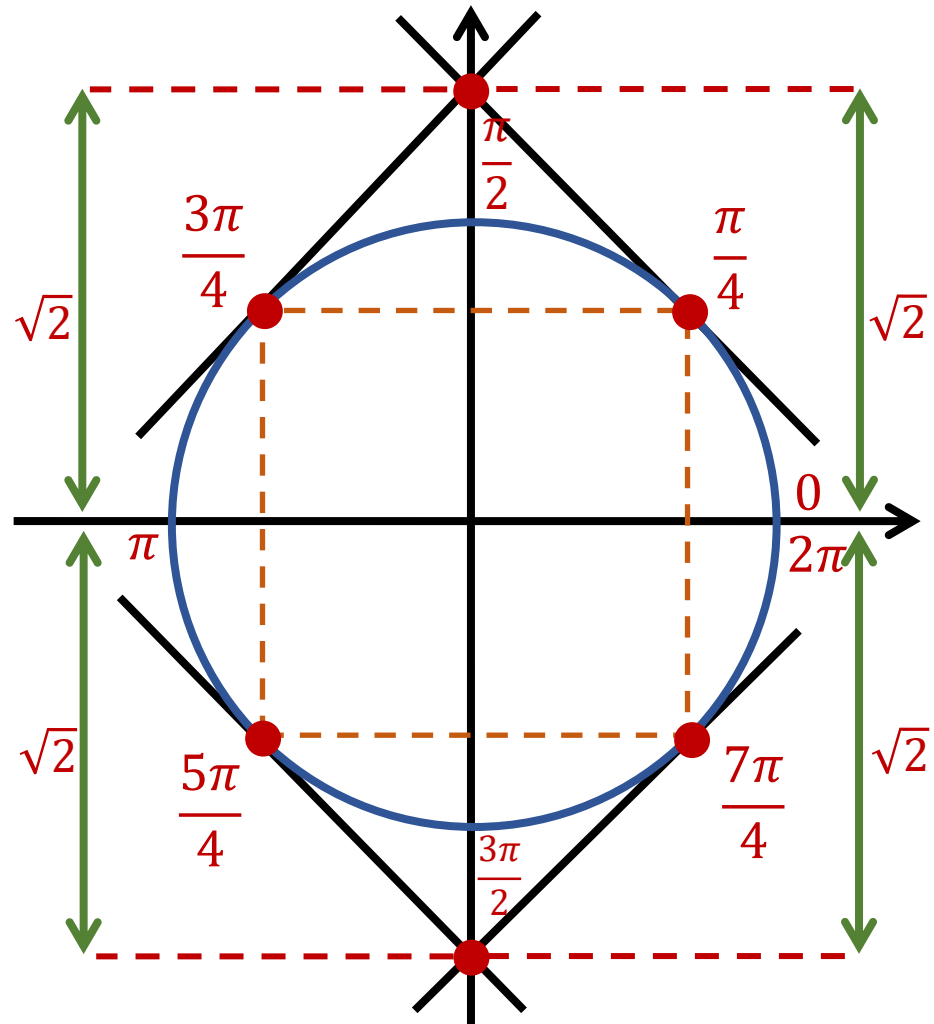
	Cossecante
$\frac{\pi}{6}$	2
$\frac{5\pi}{6}$	2
$\frac{7\pi}{6}$	-2
$\frac{11\pi}{6}$	-2



Cossecante dos arcos notáveis

Arco $\frac{\pi}{4}$

	Cossecante
$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\sqrt{2}$
$\frac{5\pi}{4}$	$-\sqrt{2}$
$\frac{7\pi}{4}$	$-\sqrt{2}$

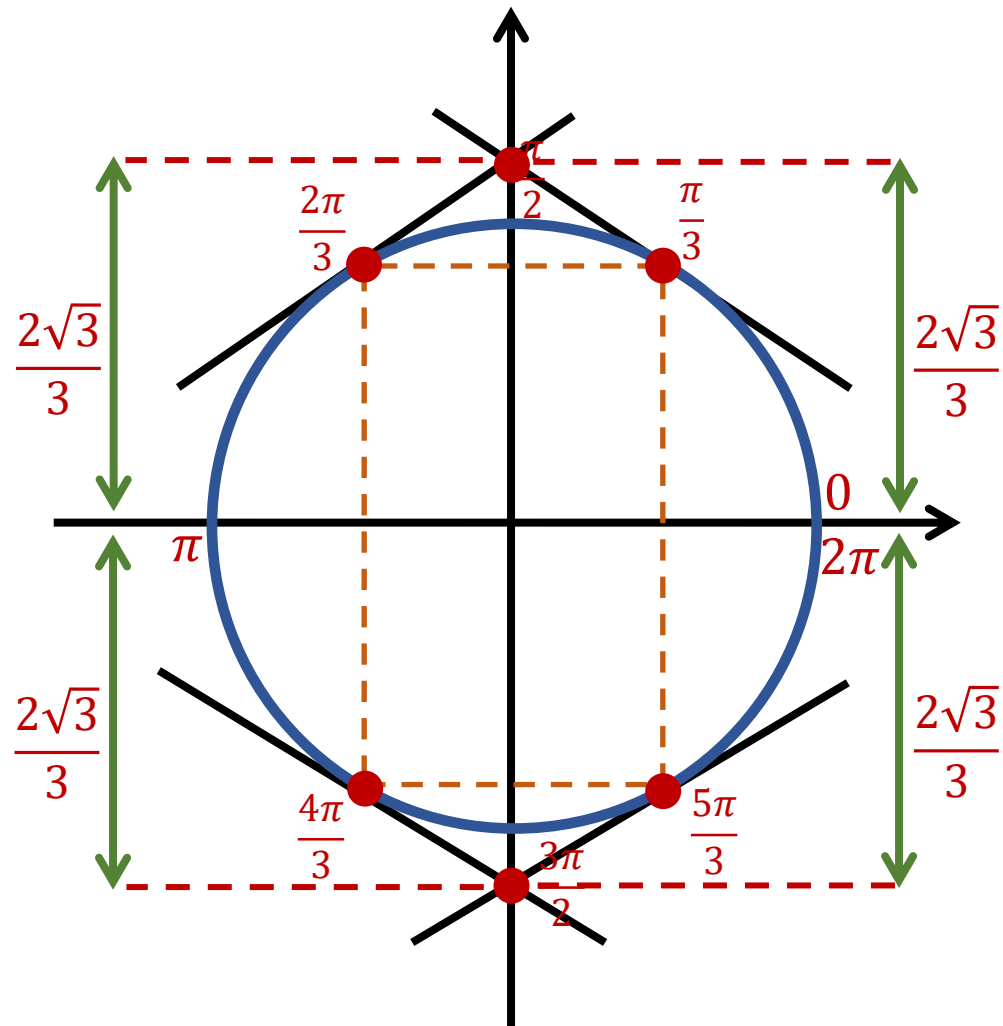


Cossecante dos arcos notáveis

Arco $\frac{\pi}{3}$

Cossecante

	Cossecante
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$



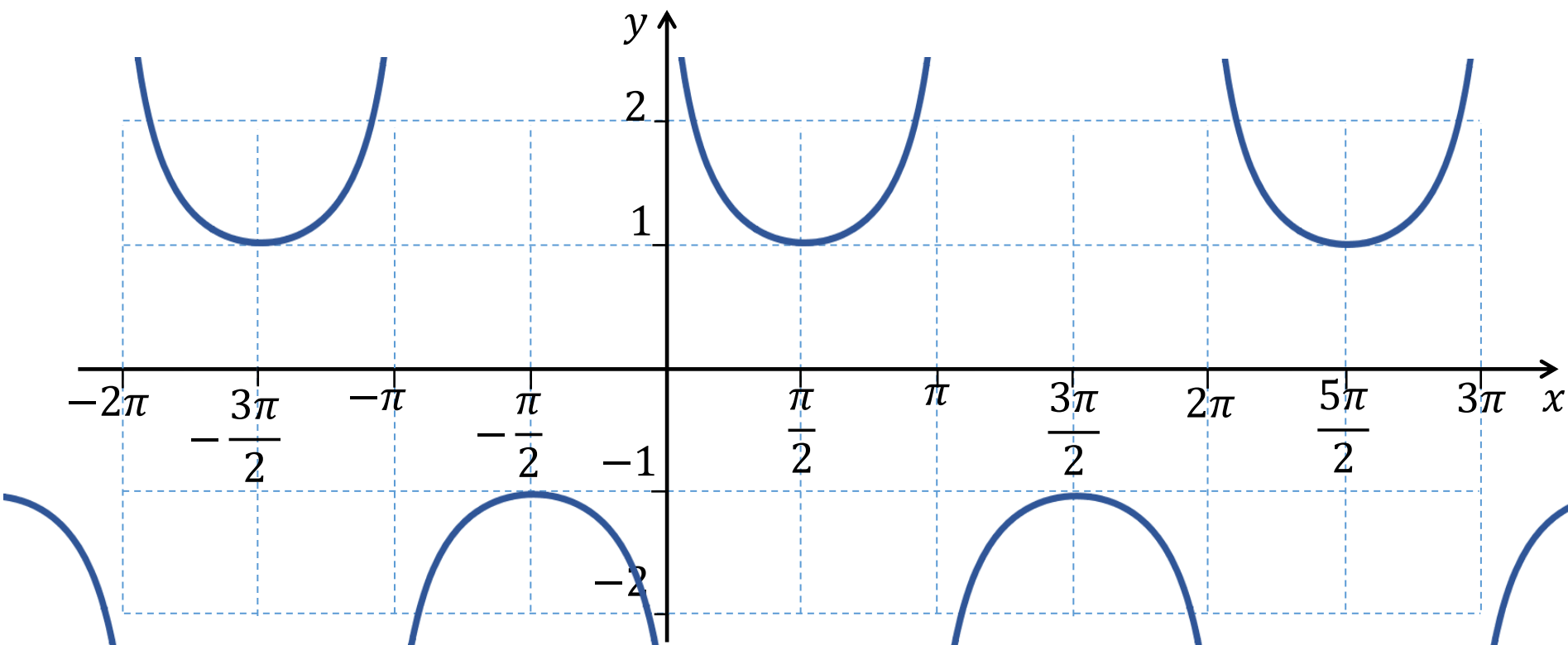
Função Cossecante

Definição:

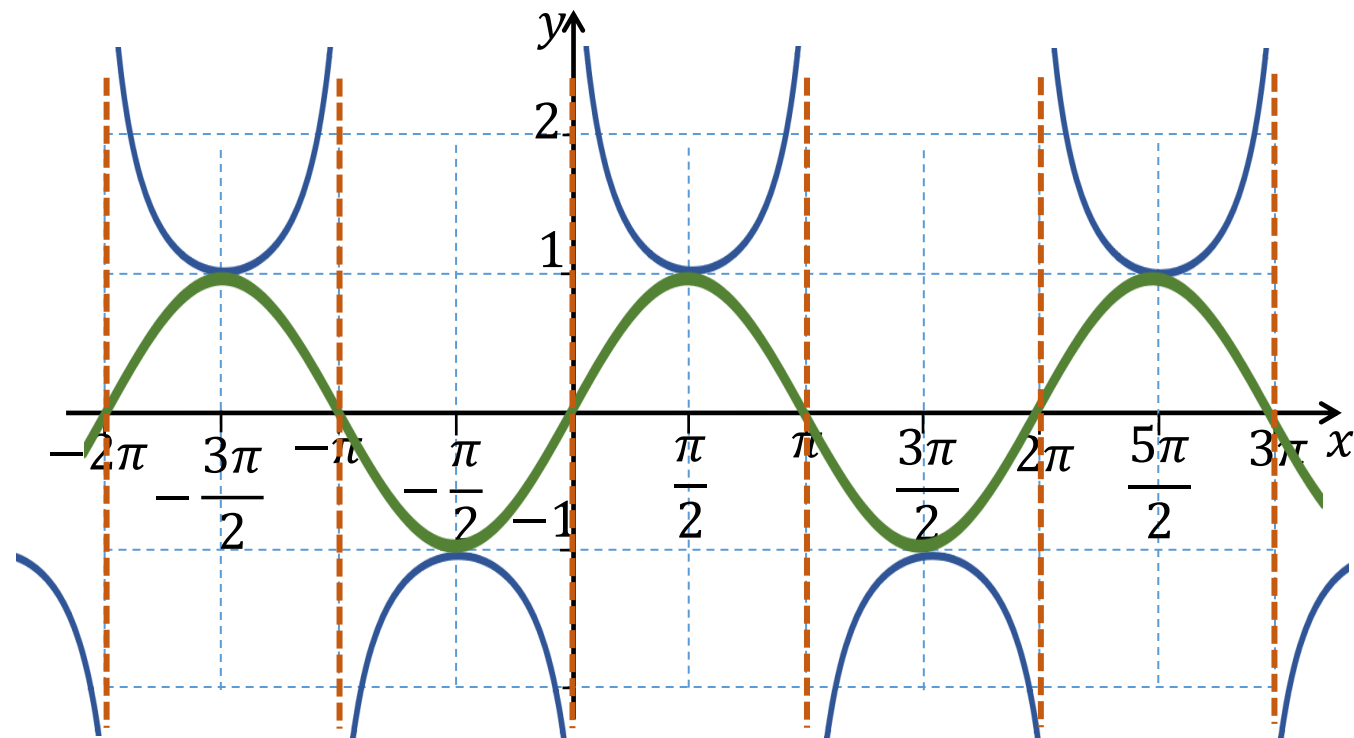
A função f dada por $f(x) = \csc x$ é chamada de função cossecante.

Gráfico da função cossecante

$$y = \csc x$$



Função Cossecante



Domínio

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$$

Imagem

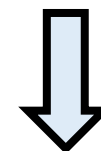
$$Im(f) = \mathbb{R} - (-1, 1)$$

Período

$$P(f) = 2\pi$$

Lembre que:

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$



Assíntotas

$$x = k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

Função Cossecante

1º quadrante:

- ✓ Função positiva.
- ✓ Função decrescente.

2º quadrante:

- ✓ Função positiva.
- ✓ Função crescente.

3º quadrante:

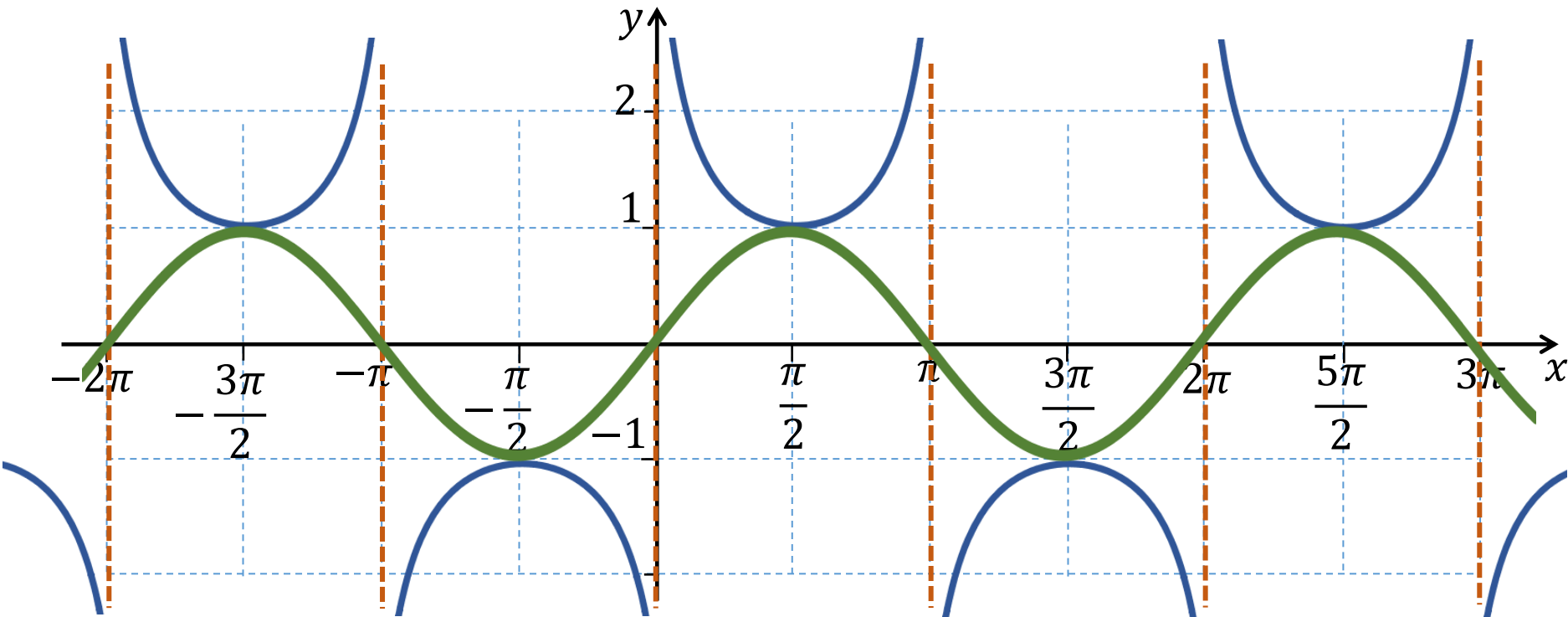
- ✓ Função negativa.
- ✓ Função crescente.

4º quadrante:

- ✓ Função negativa.
- ✓ Função decrescente.

Função Cossecante

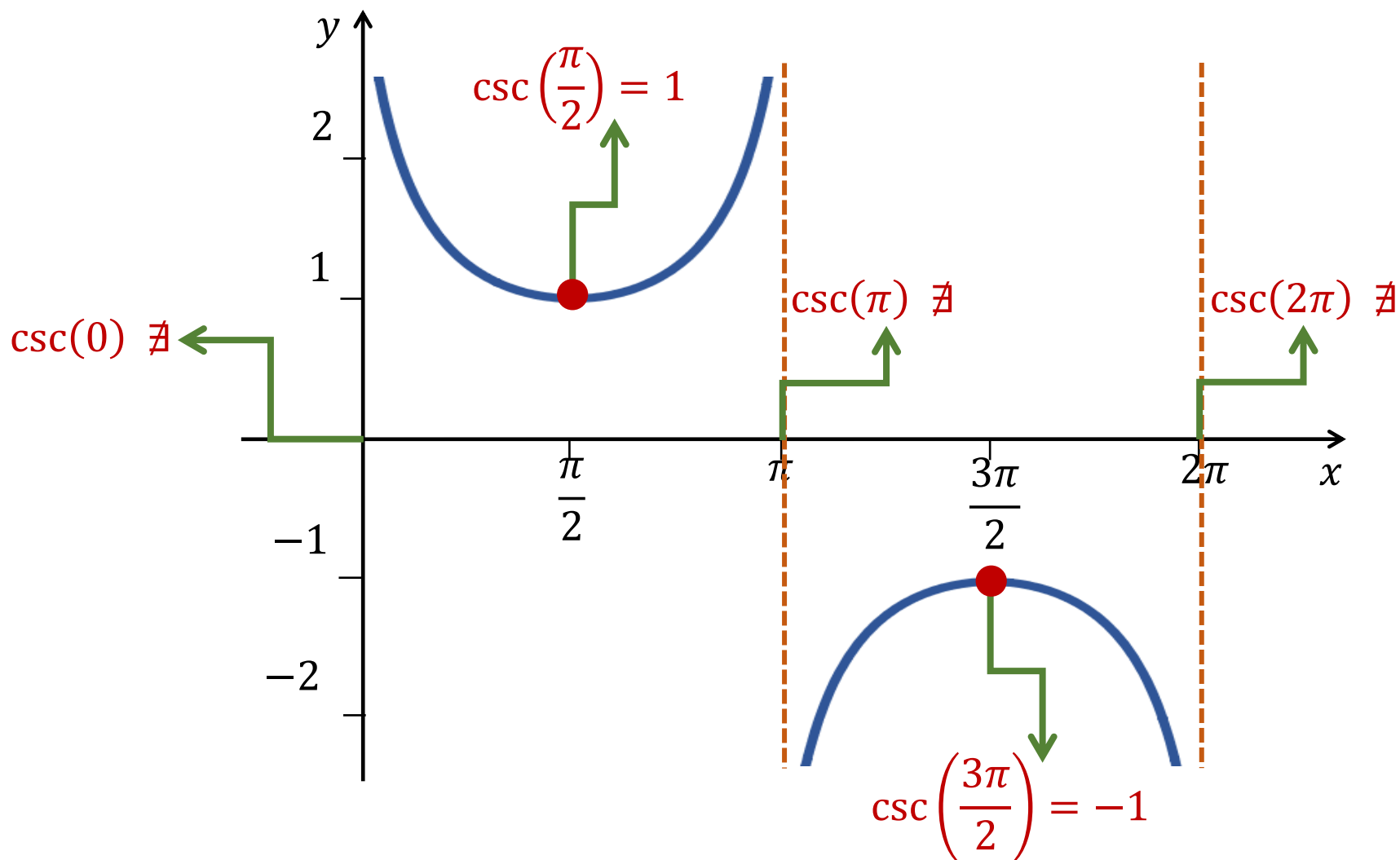
Relação gráfica entre as funções cossecante e seno:



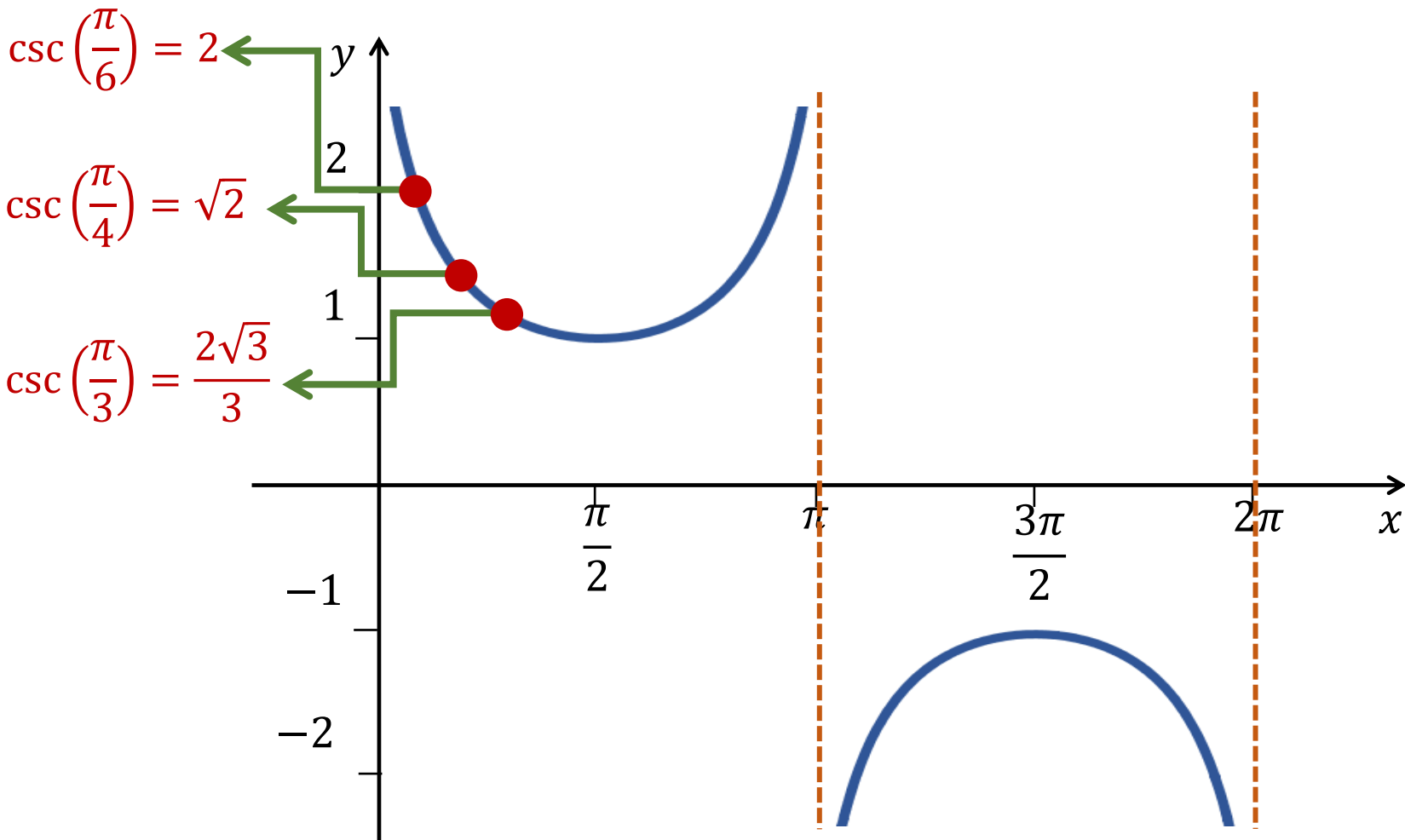
$$f(x) = \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

- ✓ Onde o seno cresce, a cossecante decresce, e vice-versa;
- ✓ Onde o seno se anula, a cossecante não está definida;
- ✓ O sinal da cossecante acompanha o sinal do seno, em cada quadrante.

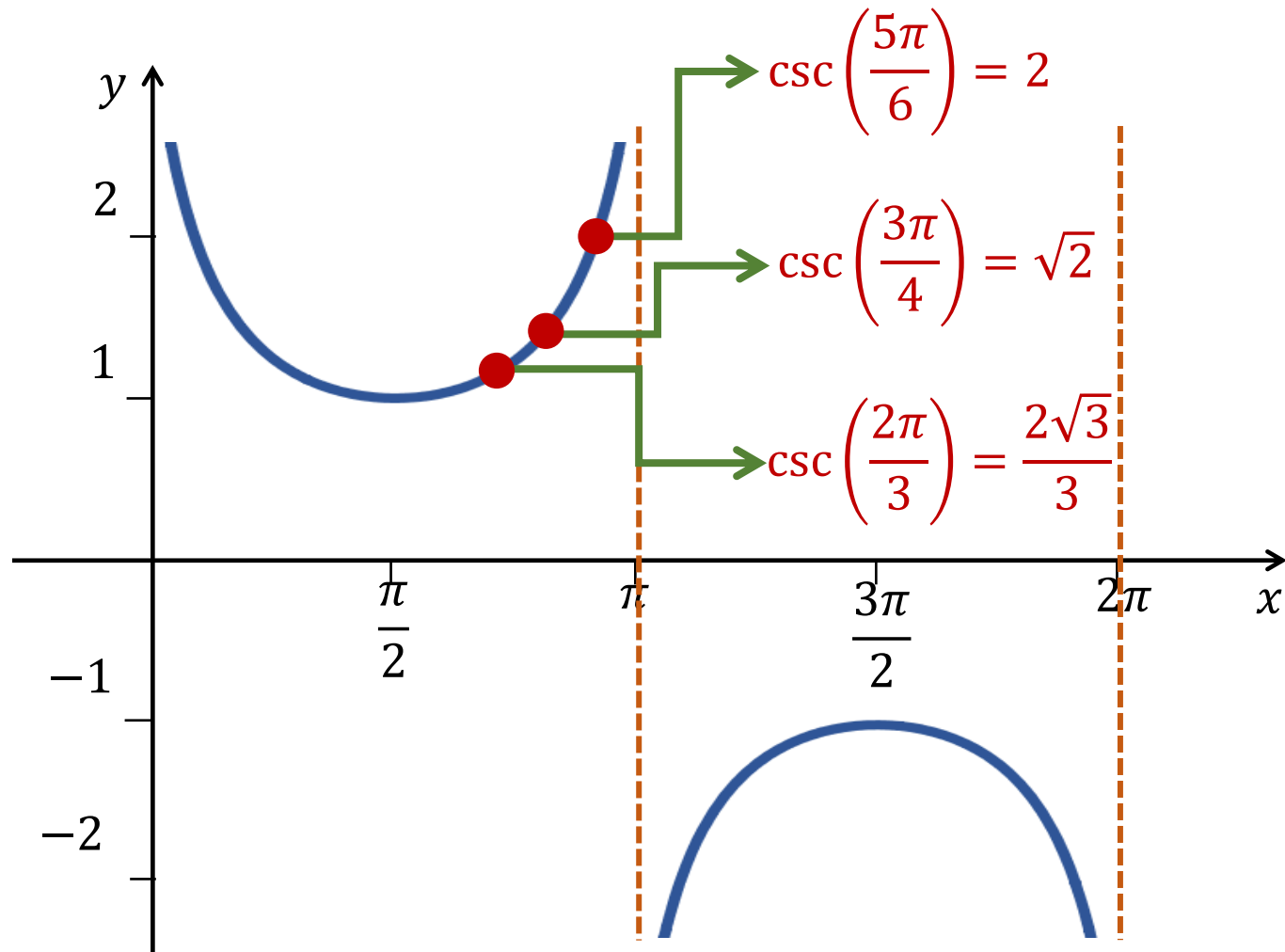
Função Cossecante



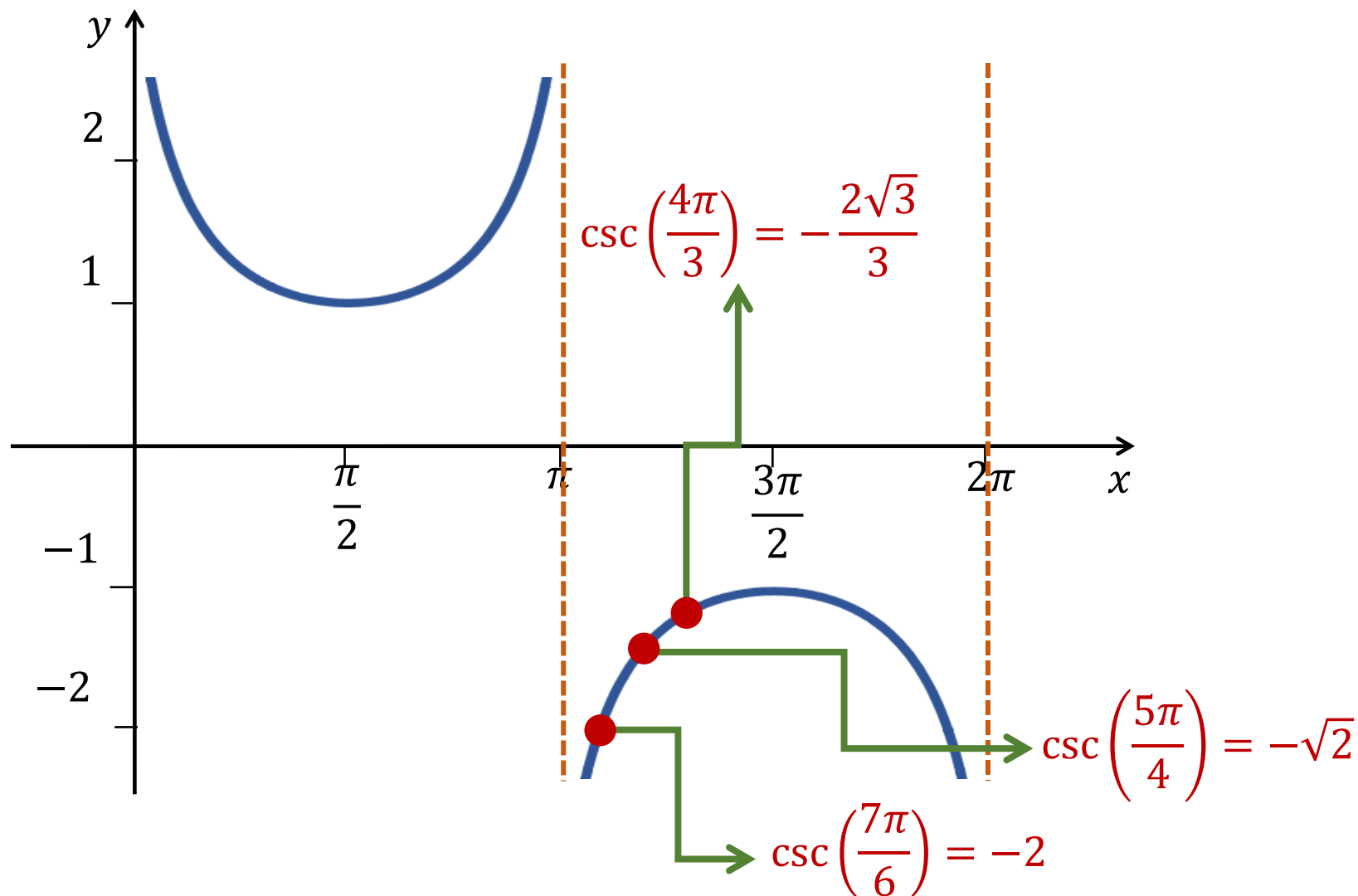
Função Cossecante: primeiro quadrante



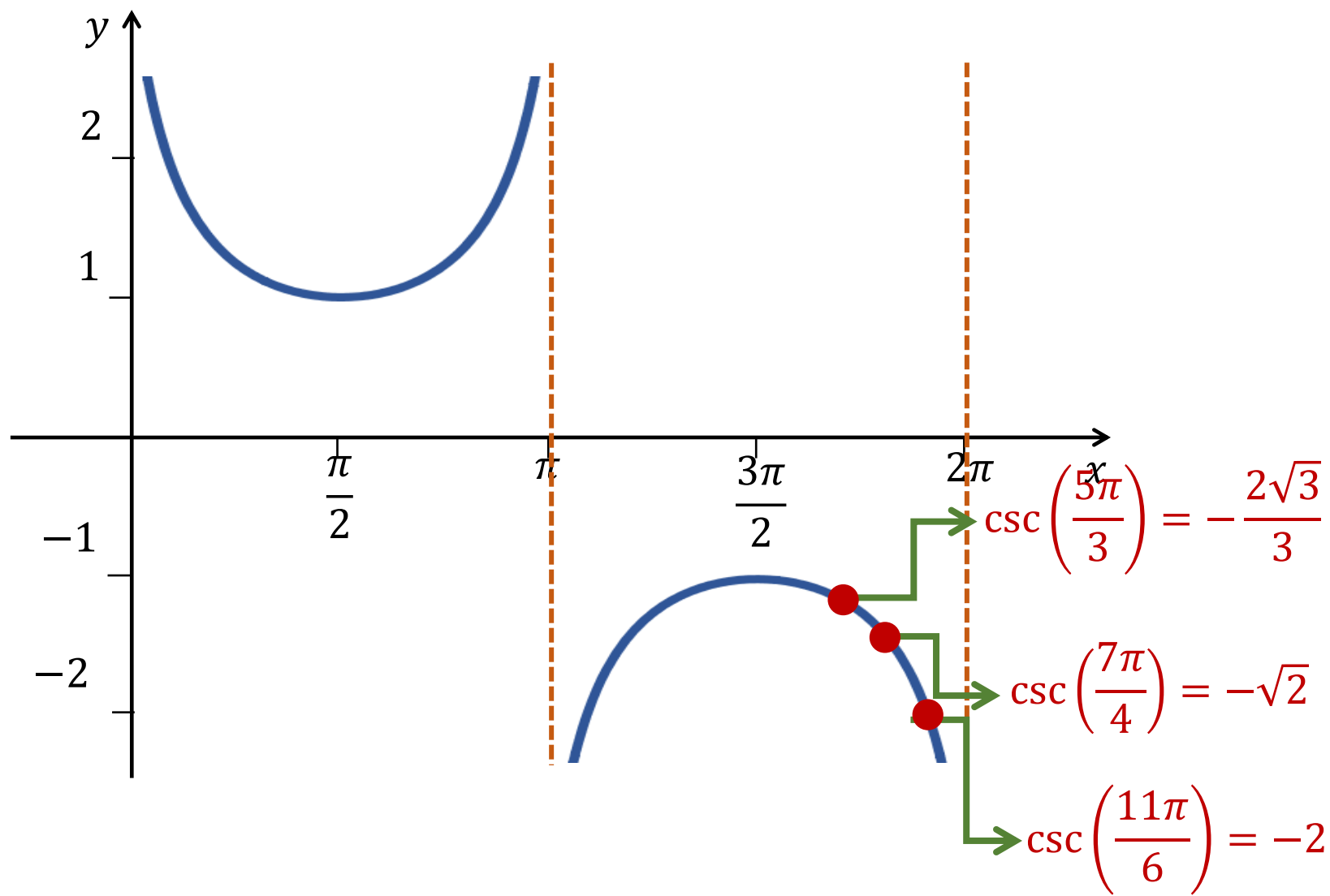
Função Cossecante: segundo quadrante



Função Cossecante: terceiro quadrante



Função Cossecante: quarto quadrante



Exemplos

1) Esboce o gráfico, determine o domínio, a imagem e o período e as assíntotas da função $f(x) = \csc(x + \pi)$.

$$y = \csc x$$

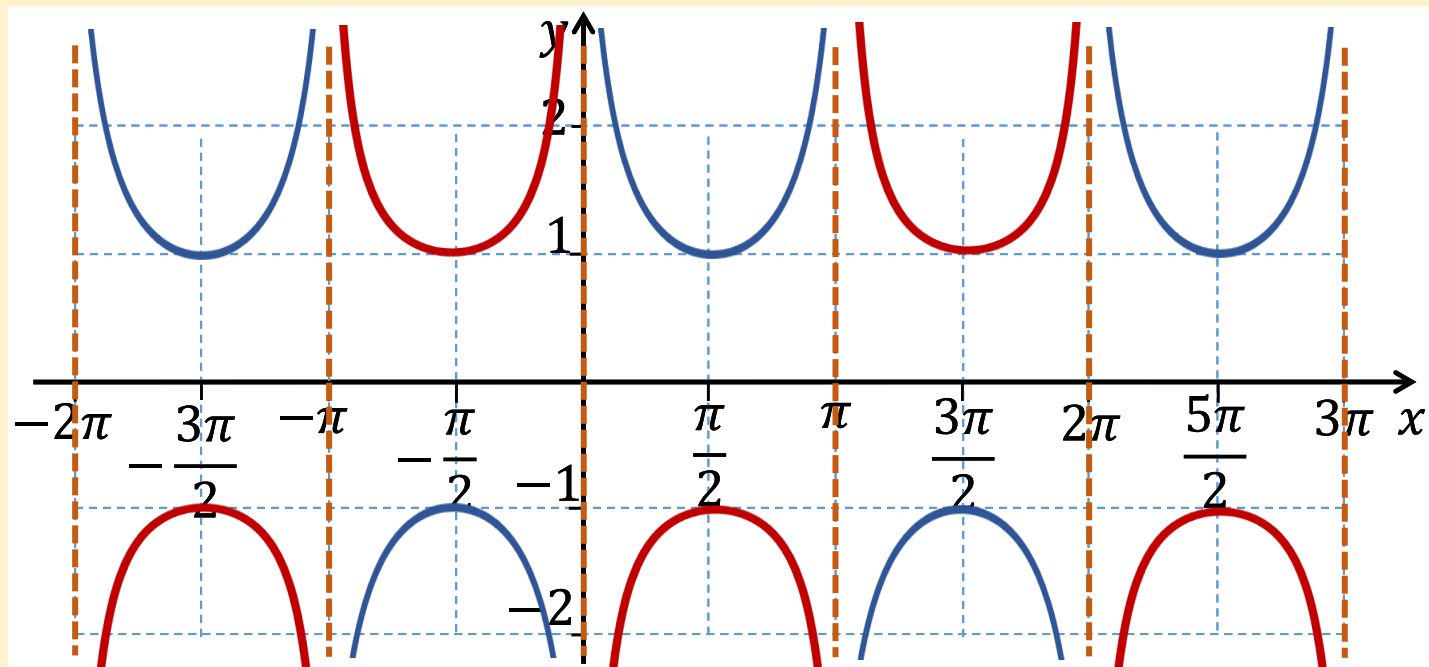
$$y = \csc(x + \pi)$$

Solução:

$$Im(f) = \mathbb{R} - (-1, 1)$$

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$$

$$P(f) = 2\pi$$



Exercícios Propostos



Exercícios

1) Esboce o gráfico das funções trigonométricas, e determine o período (T), o domínio e imagem das funções:

(a) $y = \sec(2x)$

(b) $y = 2 \sec(3x)$

(c) $y = -\sec\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

(d) $y = 3 \csc(3x)$

(e) $y = -\csc(2\pi x)$

(f) $y = 2 - \csc(x)$

Respostas

Exercício 1:

a) $T = \pi$ $D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$ $Im(f) = \mathbb{R} - (-1, 1)$

b) $T = \frac{2\pi}{3}$ $D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\}$ $Im(f) = \mathbb{R} - (-2, 2)$

c) $T = 2\pi$ $D(f) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z} \}$ $Im(f) = \mathbb{R} - (-1, 1)$

Respostas

Exercício 1:

$$\text{d)} \quad T = \frac{2\pi}{3} \quad D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\} \quad Im(f) = \mathbb{R} - (-3, 3)$$

$$\text{e)} \quad T = 1 \quad D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\} \quad Im(f) = \mathbb{R} - (-1, 1)$$

$$\text{f)} \quad T = 2\pi \quad D(f) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z} \} \quad Im(f) = \mathbb{R} - (1, 3)$$

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

<http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias>

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

<http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA>

O GAMA possui monitorias de:

- ☐ Matemática Elementar, Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e equivalentes)
 - ☐ ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
 - ☐ Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3 (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.



Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino



Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas

Aula 05

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em
Matemática

Função Exponencial

Definição:

Dado $a \in \mathbb{R}$ tal que $a > 0$ e $a \neq 1$, função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = a^x$$

é chamada de **função exponencial de base a** .

Exemplos

1) $y = 2^x$

Função exponencial de base 2.

2) $y = 3^x$

Função exponencial de base 3.

3) $y = 10^x$

Função exponencial de base 10.

Exemplos

4) $y = \pi^x$

Função exponencial de base π .



Número Pi, seu valor aproximado com duas casas decimais é 3,14.

5) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Função exponencial de base $\frac{1}{2}$.

6) $y = e^x$

Função exponencial de base e .



Número de Euler, seu valor aproximado com três casas decimais é 2,718.

Gráfico

Esboce o gráfico da função $f(x) = 2^x$.

Obs: função crescente.

Solução: Destacando alguns pontos, tem-se:

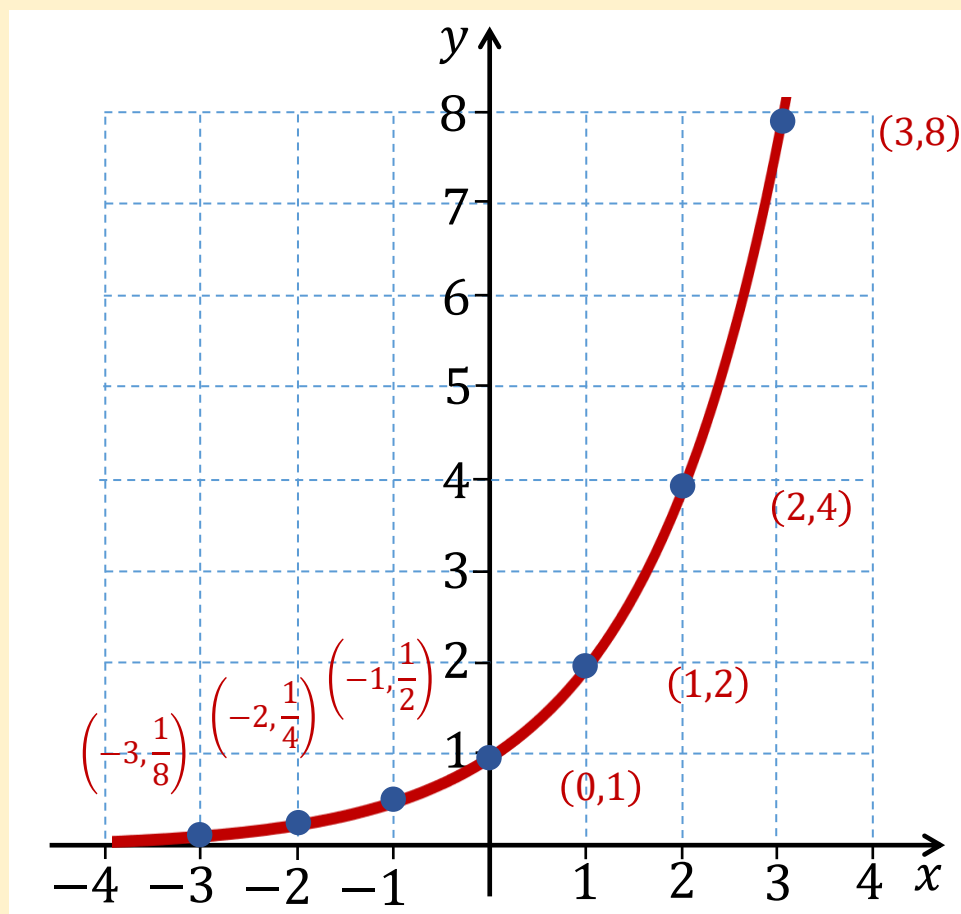
$$f(-3) = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$$

$$f(0) = 2^0 = 1 \qquad f(2) = 2^2 = 4$$

$$f(1) = 2^1 = 2 \qquad f(3) = 2^3 = 8$$



Gráfico

Esboce o gráfico da função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Obs: função decrescente.

Solução: Destacando alguns pontos, tem-se:

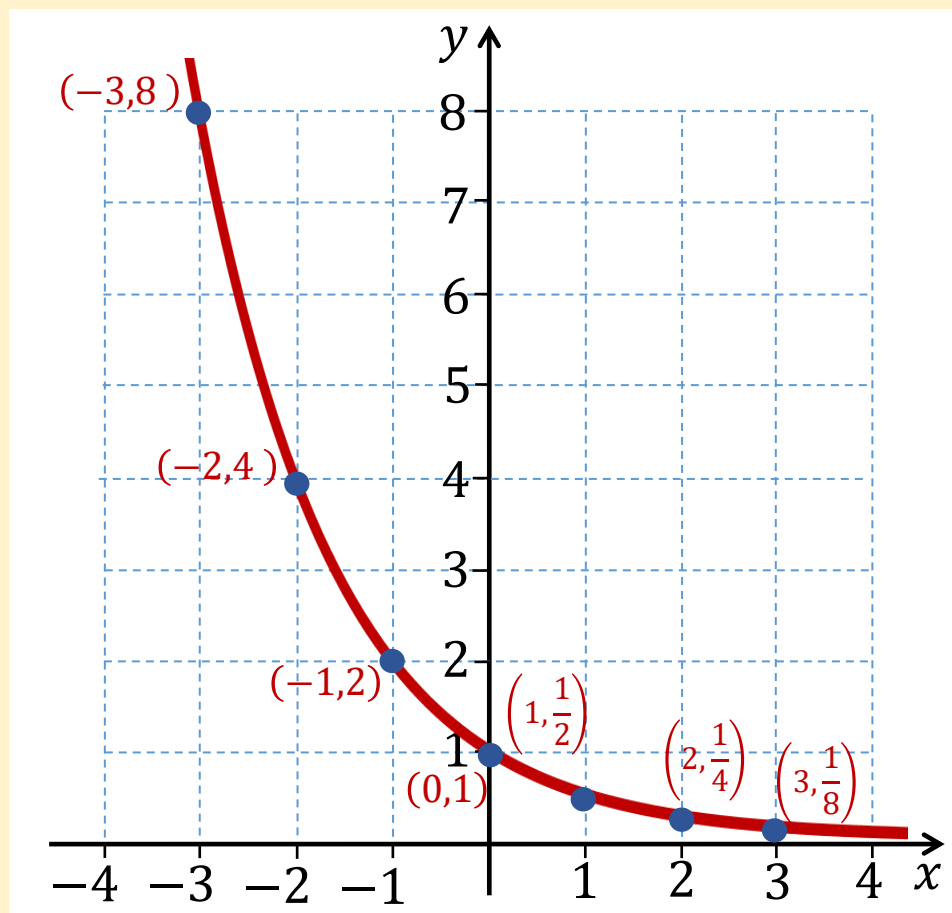
$$f(-3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$$

$$f(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$$

$$f(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2^1 = 2$$

$$f(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \quad f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$f(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} \quad f(3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$



Gráfico, Domínio e Imagem

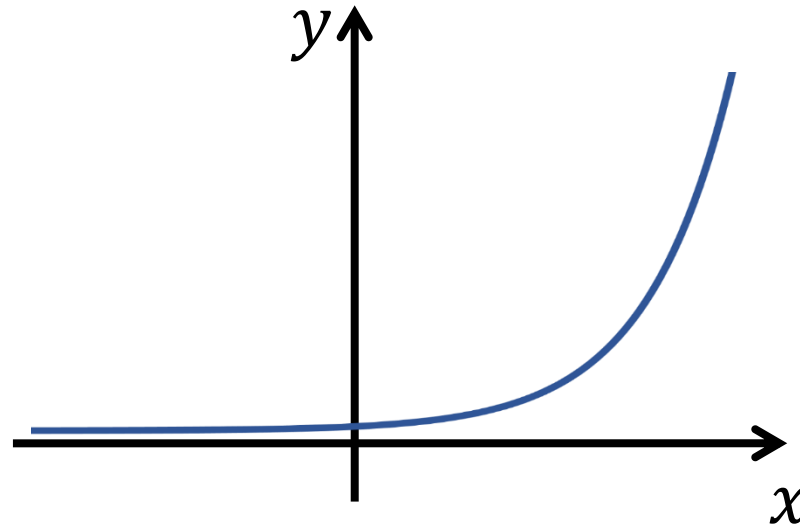
O gráfico de uma função exponencial pode assumir dois formatos distintos:

Primeiro caso: $a > 1$

Função Crescente

$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$Im(f) = \mathbb{R}_+^*.$$

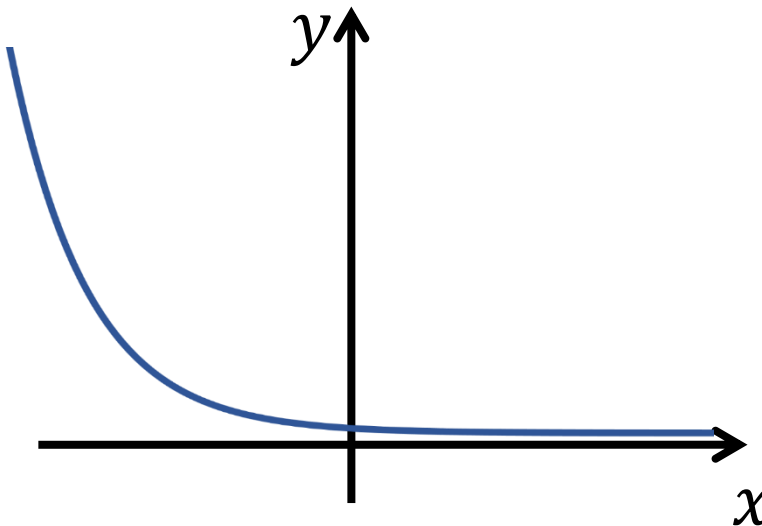


Segundo caso: $0 < a < 1$

Função Decrescente

$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$Im(f) = \mathbb{R}_+^*.$$



Gráfico, Domínio e Imagem

Em ambos os casos (crescente ou decrescente), a reta $y = 0$ é chamada de **assíntota horizontal** do gráfico da função.

Observação:

Para esboçar o gráfico de uma função $f(x) = a^x$, basta:

- i. identificar o comportamento do gráfico (crescente ou decrescente)
- ii. lembrar que os pontos $(0,1)$ e $(1,a)$ sempre pertencem ao gráfico destas funções, pois:

$$f(0) = a^0 = 1 \Rightarrow (0,1) \in f$$

$$f(1) = a^1 = a \Rightarrow (1,a) \in f$$

Exemplos

1) Esboce os gráficos das funções:

$$(a) f(x) = 3^x \quad (b) f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x \quad (c) f(x) = 2^x + 1 \quad (d) f(x) = 4^{x-2}$$

Solução:

a) $f(x) = 3^x$

$3 > 1 \Rightarrow f(x)$ é crescente

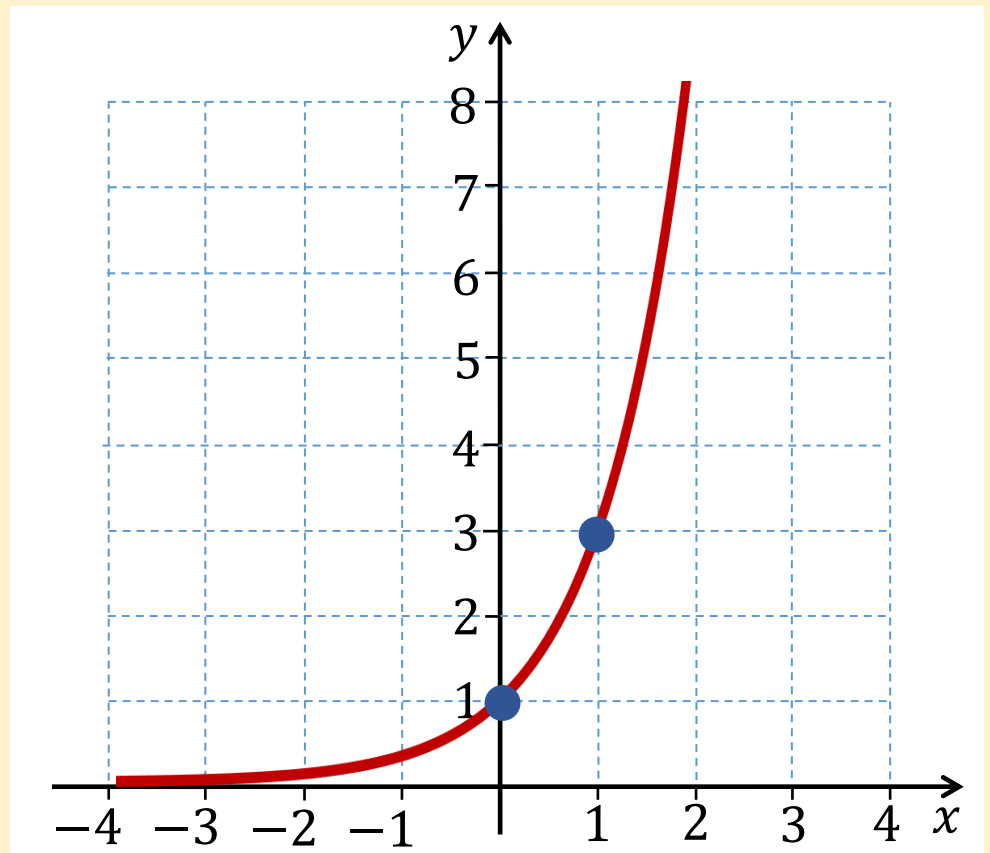
Definindo os pontos:

$$(0, 1) \text{ e } (1, a)$$

Temos,

$$(0, 1) \text{ e } (1, 3)$$

$$D(f) = \mathbb{R} \quad Im(f) = \mathbb{R}_+^*$$



Exemplos

1) Esboce os gráficos das funções:

$$(a) f(x) = 3^x \quad (b) f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x \quad (c) f(x) = 2^x + 1 \quad (d) f(x) = 4^{x-2}$$

Solução:

$$b) f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

$0 < \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow f(x)$ é decrescente

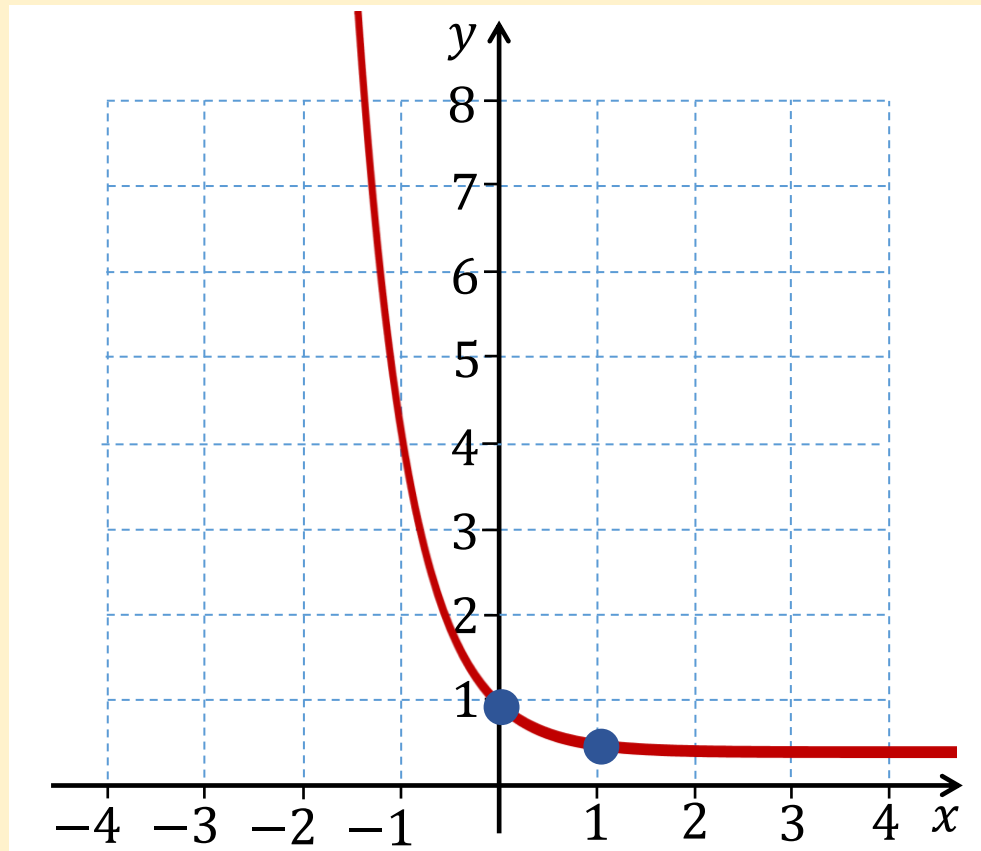
Definindo os pontos:

$$(0, 1) \text{ e } (1, a)$$

Temos,

$$(0, 1) \text{ e } \left(1, \frac{1}{4}\right)$$

$$D(f) = \mathbb{R} \quad Im(f) = \mathbb{R}_+^*$$



Exemplos

1) Esboce os gráficos das funções:

$$(a) f(x) = 3^x \quad (b) f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

$$(c) f(x) = 2^x + 1$$

$$(d) f(x) = 4^{x-2}$$

Solução:

$$c) f(x) = 2^x + 1$$

$2 > 1 \Rightarrow f(x)$ é crescente

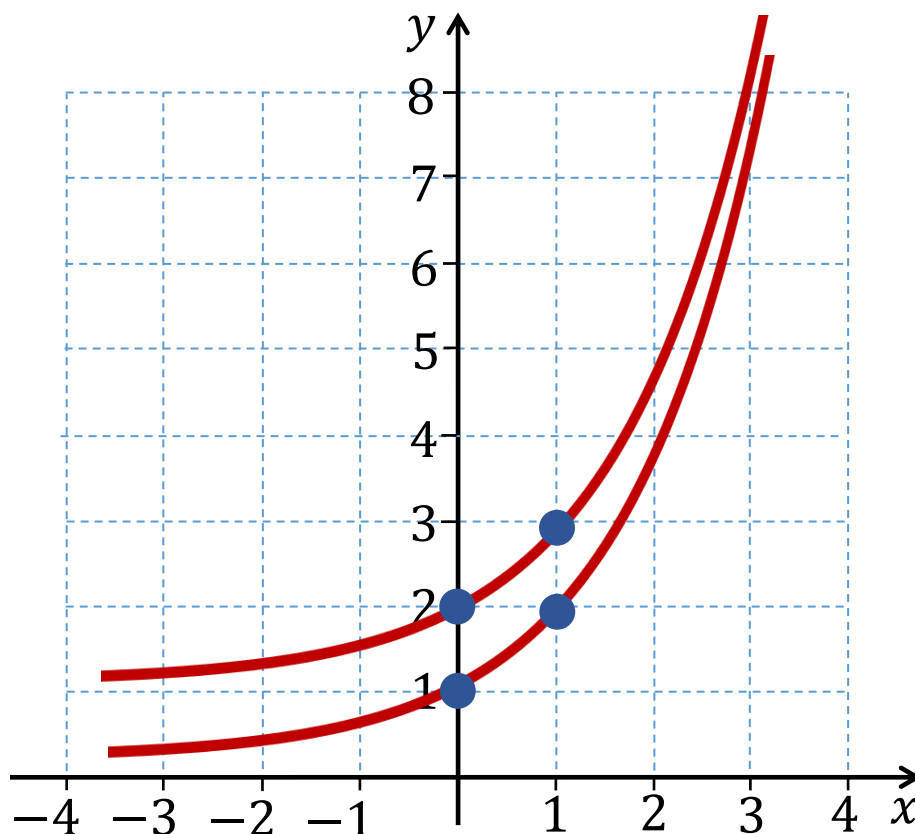
Definindo os pontos:

$(0, 1)$ e $(1, a)$

Temos,

$(0, 1)$ e $(1, 2)$

$$D(f) = \mathbb{R} \quad Im(f) = (1, +\infty)$$



Exemplos

1) Esboce os gráficos das funções:

$$(a) f(x) = 3^x$$

$$(b) f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

$$(c) f(x) = 2^x + 1$$

$$(d) f(x) = 4^{x-2}$$

Solução:

$$d) f(x) = 4^{x-2}$$

$4 > 1 \Rightarrow f(x)$ é crescente

Definindo os pontos:

$(0, 1)$ e $(1, a)$

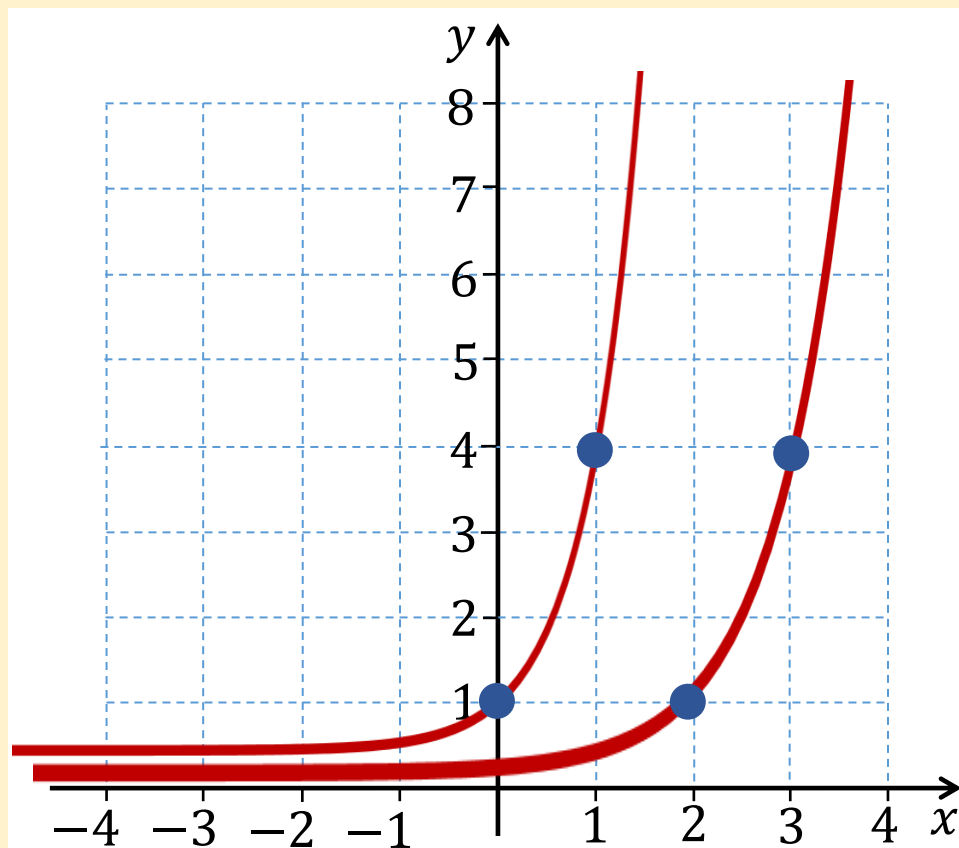
Temos,

$(0, 1)$ e $(1, 4)$

Deslocamos 2 unidades para esquerda!

$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$Im(f) = \mathbb{R}_+^*$$



Exercícios Propostos



Exercícios

1) Em cada caso, esboce o gráfico da função dada e determine o domínio, a imagem e a equação da assíntota horizontal.

(a) $f(x) = 2^x + 2$

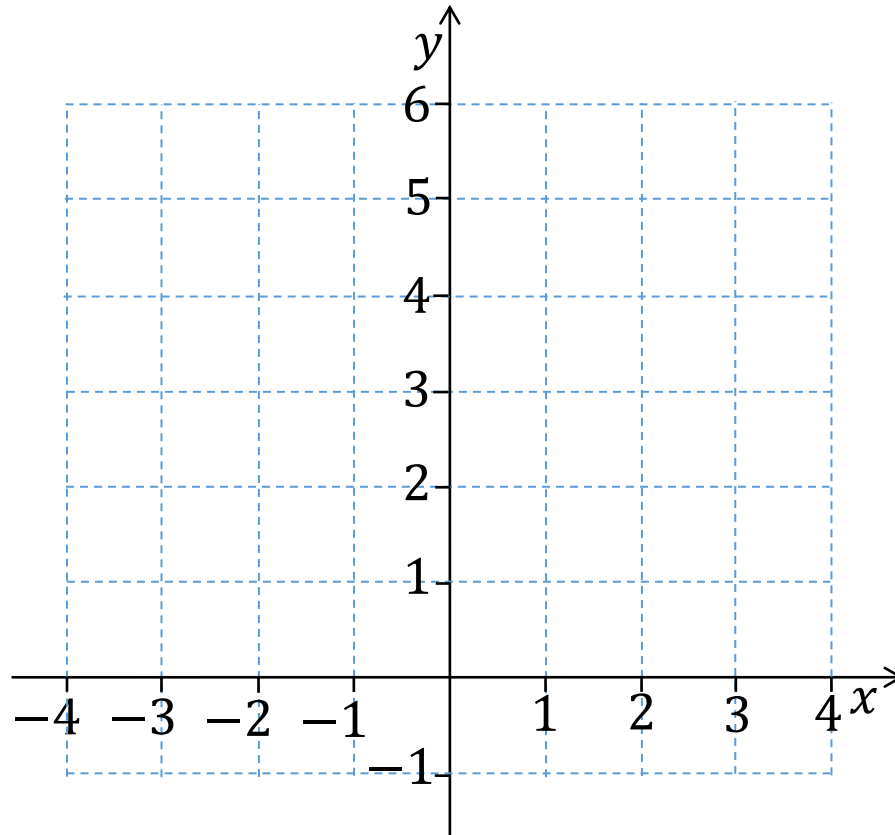
(b) $f(x) = 3^x - 1$

(c) $f(x) = 2^{x-1}$

(d) $f(x) = 4^{x+2}$

(e) $f(x) = -2^x$

(f) $f(x) = 2^{-x}$



Exercícios

2) Em cada caso, determine a composta $f \circ g$.

(a) $f(x) = 2x + 5$ e $g(x) = 3^x$

(b) $f(x) = 5^x$ e $g(x) = x^2 + 3x$

(c) $f(x) = x^2 - x$ e $g(x) = 2^x$

3) Em cada caso, escreva a função dada como uma composta de duas funções.

a) $f(x) = 3^{x^2 - 2x + 1}$

b) $f(x) = 2^{\sqrt{x}}$

4) A função exponencial é injetora? É sobrejetora? É bijetora? Justifique.

5) Esboce o gráfico das funções inversas das seguintes funções exponenciais:

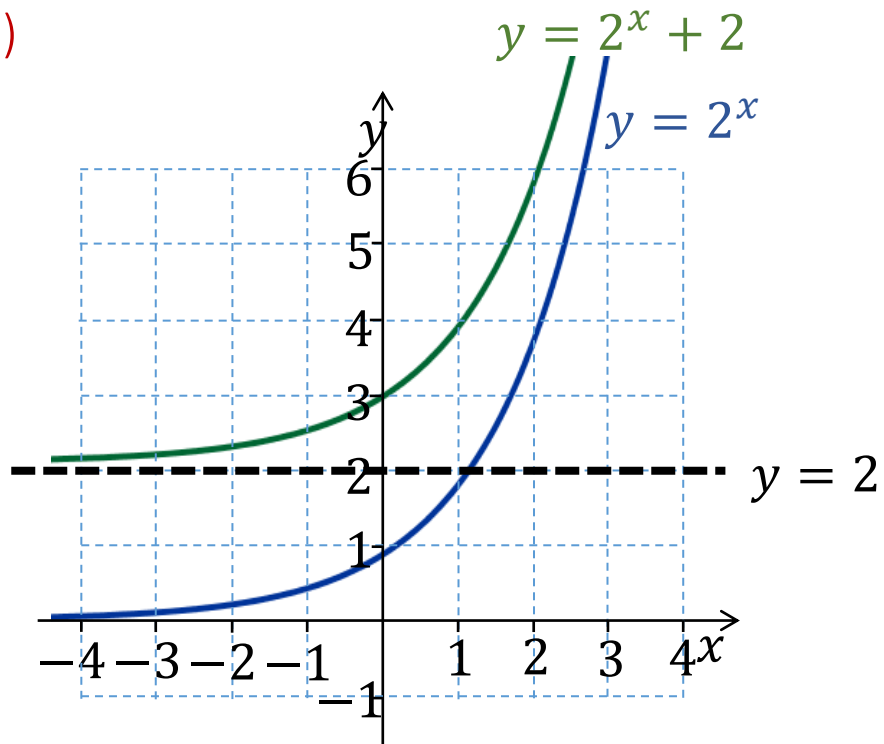
(a) $f(x) = 2^x$

(b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Respostas

Exercício 1:

a)



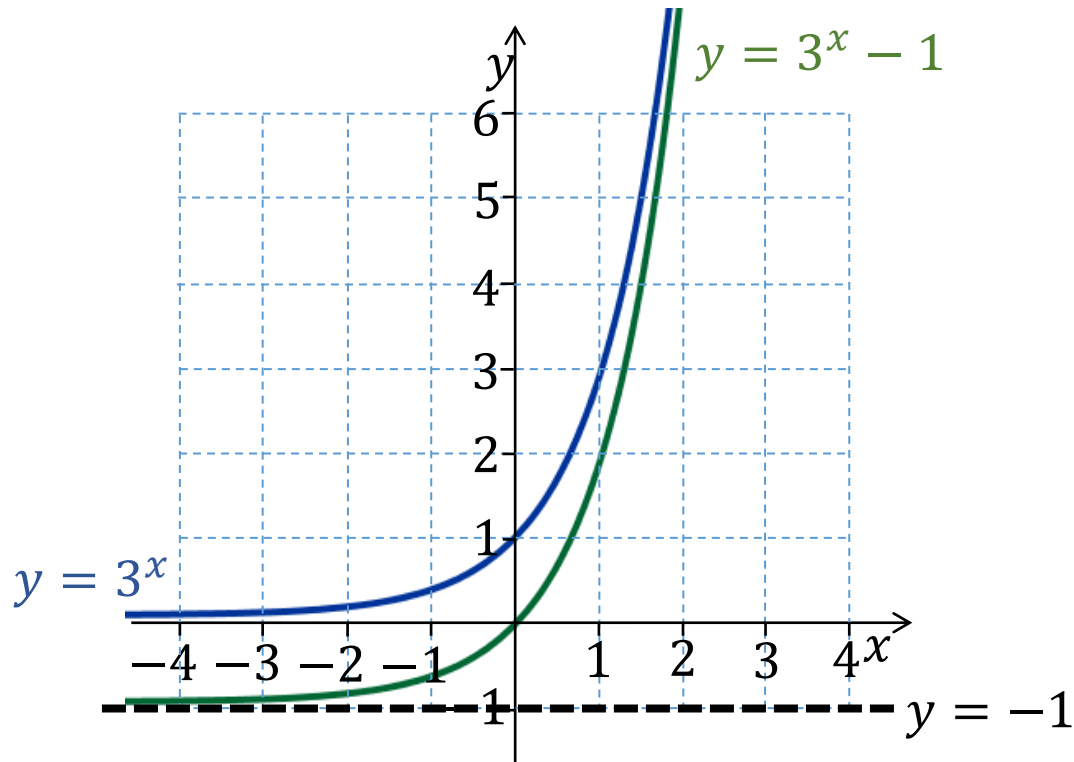
$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$Im(f) = (2, +\infty)$$

$$\text{Assíntota: } y = 2$$

Respostas

b)



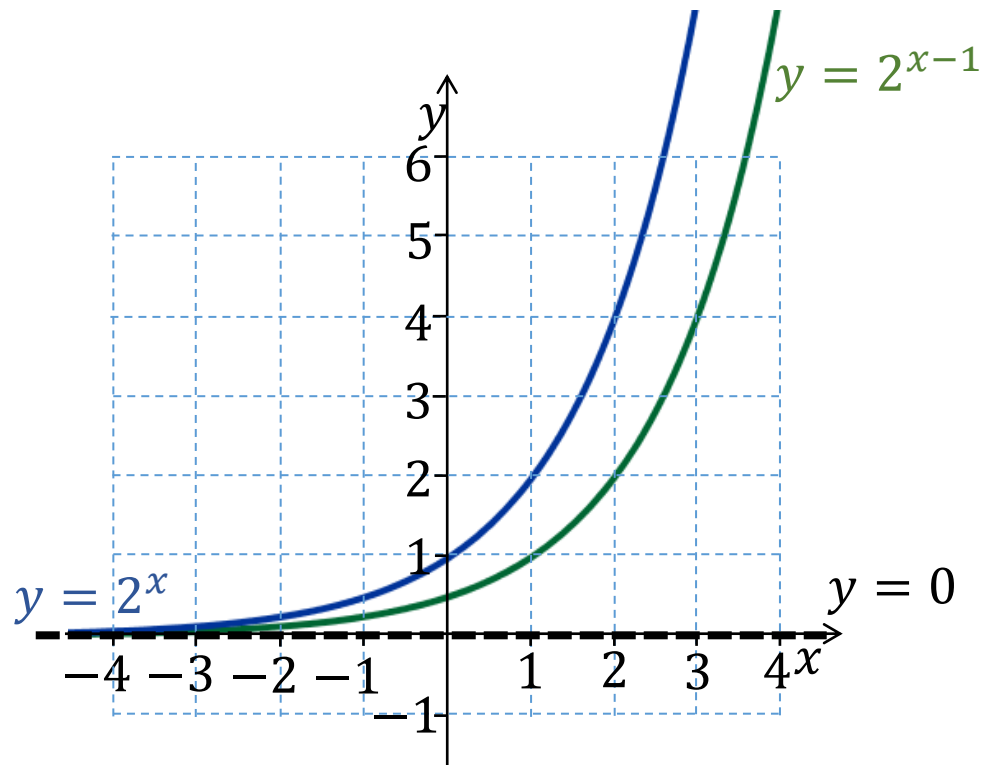
$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$Im(f) = (-1, +\infty)$$

$$\text{Assíntota: } y = -1$$

Respostas

c)



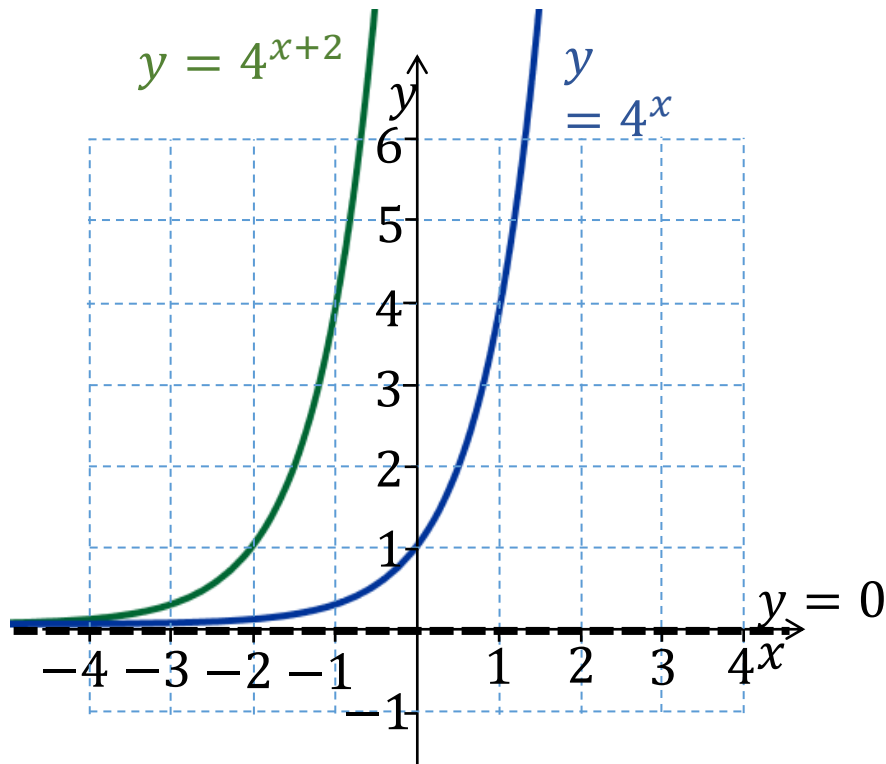
$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$Im(f) = \mathbb{R}_+^*$$

Assíntota: $y = 0$

Respostas

d)



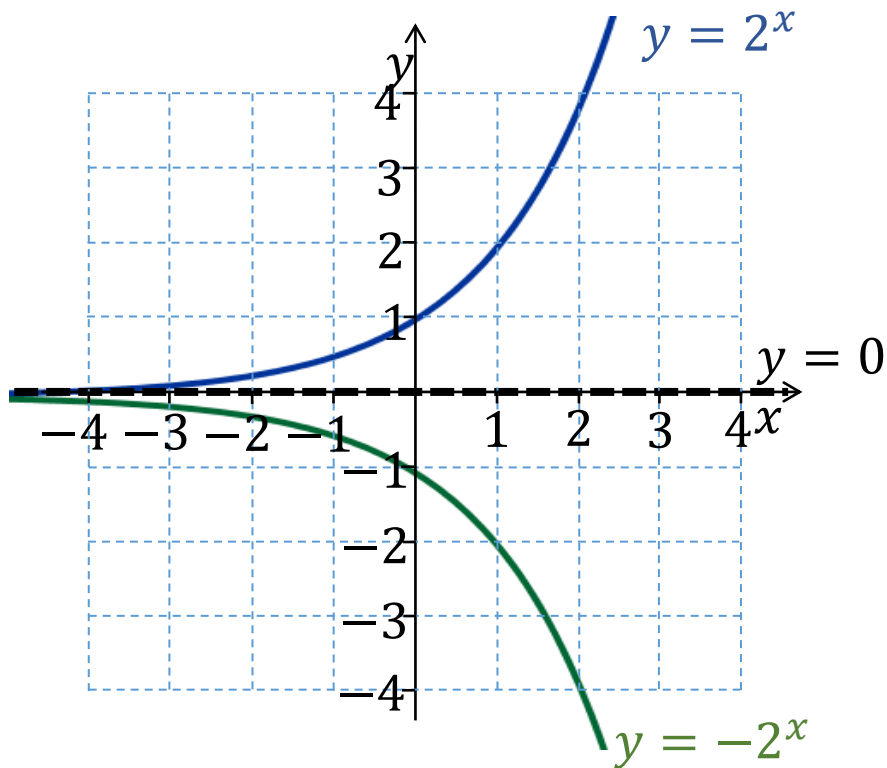
$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$Im(f) = \mathbb{R}_+^*$$

Assíntota: $y = 0$

Respostas

e)



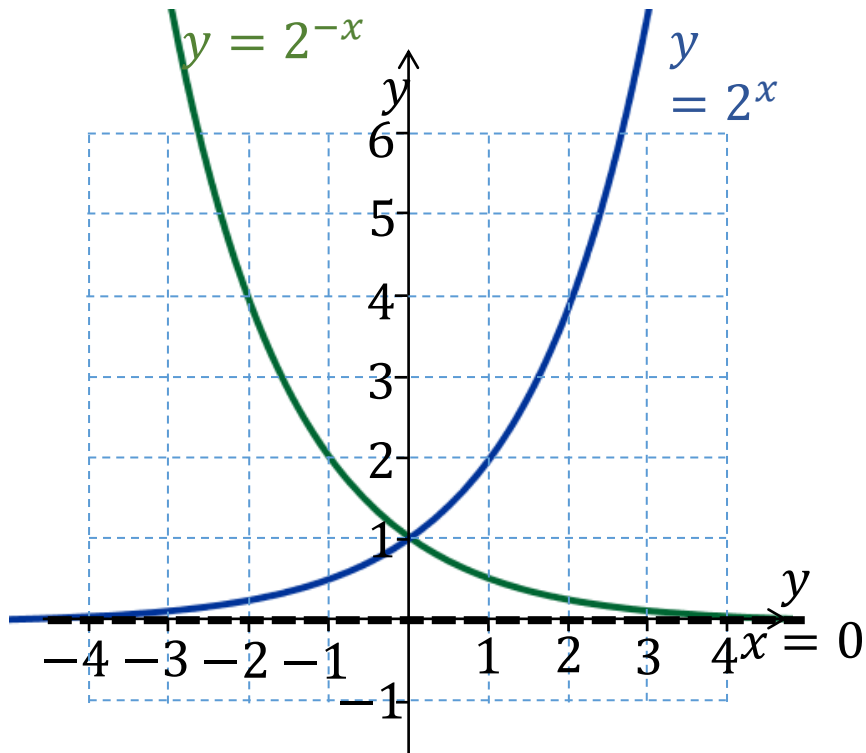
$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$Im(f) = \mathbb{R}_-^*$$

Assíntota: $y = 0$

Respostas

f)



$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$Im(f) = \mathbb{R}_+^*$$

Assíntota: $y = 0$

Respostas

Exercício 2:

a) $(f \circ g)(x) = 2 \cdot 3^x + 5$

b) $(f \circ g)(x) = 5^{x^2+3x}$

c) $(f \circ g)(x) = 2^{2x} - 2^x$

Exercício 3:

a) $f = f_2 \circ f_1$ $f_1(x) = x^2 - 2x + 1$ $f_2(x) = 3^x$

b) $f = f_2 \circ f_1$ $f_1(x) = \sqrt{x}$ $f_2(x) = 2^x$

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

<http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias>

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

<http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA>

O GAMA possui monitorias de:

- ☐ Matemática Elementar, Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e equivalentes)
 - ☐ ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
 - ☐ Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3 (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.



Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino



Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas

Aula 06

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em
Matemática

Logaritmos

Definição:

Chamamos de **logaritmo** o número $x = \log_a b$, o número x que satisfaz a equação exponencial,

$$a^x = b$$

tal que $a > 0$, $b > 0$ e $a \neq 1$ ambos números reais.

Notação:

$$x = \log_a b.$$

Da definição acima segue que

$$\log_a b = x \iff a^x = b.$$

Logaritmos

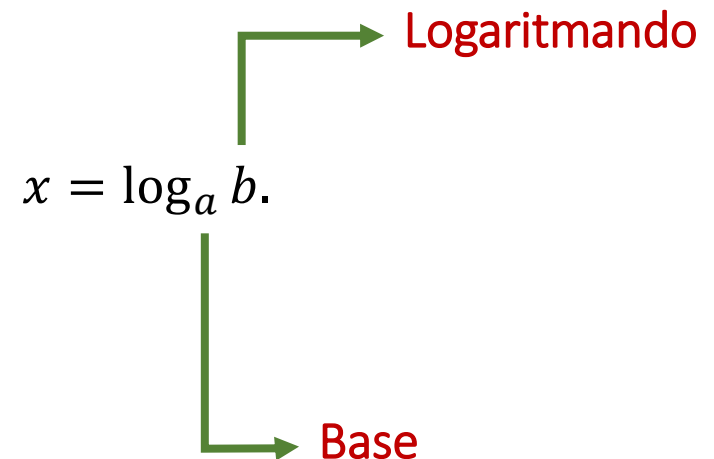
Observação:

$$\log_{10} a = \log a$$

(Quando a base do logaritmo é 10, se escreve $\log a$ para representar $\log_{10} a$)

$$\log_e a = \ln a$$

(Quando a base do logaritmo é e , se escreve $\ln e$ para representar $\log_e a$)



Exemplos

1) Resolva a equação exponencial $2^x = 8$.

Solução:

$$2^x = 8.$$

Igualando as bases, tem-se:

$$2^x = 2^3 \quad \Rightarrow x = 3,$$

portanto, se diz que 3 é o logaritmo de 8 na base 2.

Ou seja,

$$\log_2 8 = 3.$$

Exemplos

2) Calcule $\log_2 64$.

Solução:

Usando a definição de logaritmo, tem-se:

$$\log_b a = x \iff b^x = a.$$

Então,

$$\log_2 64 = x \iff 2^x = 64.$$

Resolvendo a equação $2^x = 64$, tem-se:

$$2^x = 64 \implies 2^x = 2^6 \implies x = 6.$$

Portanto, $\log_2 64 = 6$.

Exemplos

3) Calcule $\log_4 0,25$.

Solução:

Usando a definição de logaritmo, tem-se:

$$\log_4 0,25 = x \iff 4^x = 0,25 \iff 4^x = \frac{1}{4} \iff 4^x = 4^{-1} \iff x = -1$$

Portanto,

$$\log_4 0,25 = -1.$$

4) Calcule $\log_2 1$.

Solução:

Usando a definição de logaritmo, tem-se:

$$\log_2 1 = x \iff 2^x = 1 \iff 2^x = 2^0 \iff x = 0.$$

Portanto,

$$\log_2 1 = 0.$$

Exemplos

5) Calcule $\log_5 5$.

Solução:

Usando a definição de logaritmo, tem-se:

$$\log_5 5 = x \quad \Leftrightarrow \quad 5^x = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 5^x = 5^1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

Portanto,

$$\log_5 5 = 1.$$

Consequências da definição de Logaritmo

Primeira consequência:

O logaritmo de 1, em qualquer base, é sempre igual a 0.

$$\log_a 1 = 0.$$

Para todo $a > 0$ e $a \neq 1$.

Segunda consequência:

O logaritmo de um número na própria base, é sempre igual a 1.

$$\log_a a = 1.$$

Para todo $a > 0$ e $a \neq 1$.

Consequências da definição de Logaritmo

Terceira consequência:

Quando temos uma potência com expoente logarítmico de base igual a base dessa potência, o resultado será o logaritmando do expoente.

$$a^{\log_a n} = n.$$

Para todo $a > 0$, $a \neq 1$ e $n > 0$.

Quarta consequência:

Dois logaritmos de mesma base serão iguais se, e somente se, seus logaritmandos forem iguais.

$$\log_a n = \log_a m \Leftrightarrow n = m.$$

Para todo $a > 0$, $a \neq 1$, $n > 0$ e $m > 0$.

Exemplos

6) Calcule $\log_2 1$.

Solução:

$$\log_2 1 = 0,$$

pois: $2^0 = 1.$

7) Calcule $\log_2 2$.

Solução:

$$\log_2 2 = 1,$$

pois: $2^1 = 2.$

Exemplos

8) Calcule $2^{\log_2 4}$.

Solução:

$$2^{\log_2 4} = 4,$$

Pois se considerarmos $\log_2 4 = x$, teremos $x = 2$,

$$\text{logo:} \quad 2^{\log_2 4} = 2^x = 2^2 = 4.$$

9) Encontre a solução da equação $\log_2(2x + 4) = \log_2(3x + 1)$.

Solução:

$$\log_2(2x + 4) = \log_2(3x + 1)$$

$$2x + 4 = 3x + 1$$

$$2x - 3x = 1 - 4$$

$$-x = -3$$

$$x = 3$$

Logo,

$$S = \{3\}$$

Propriedades logarítmicas

Logaritmo do produto: logaritmo do produto é a soma dos logaritmos.

$$\log_a(m.n) = \log_a m + \log_a n.$$

Logaritmo do quociente: logaritmo do quociente é a diferença dos logaritmos.

$$\log_a \left(\frac{m}{n} \right) = \log_a m - \log_a n.$$

Exemplos

10) Represente as expressões abaixo como um único logaritmo:

(a) $\log_6 4 + \log_6 8$

(b) $\log_5 3 - \log_5 8$

Solução:

(a) $\log_6 4 + \log_6 8 = \log_6(4 \cdot 8) = \log_6 32.$

(b) $\log_5 3 - \log_5 8 = \log_5 \left(\frac{3}{8}\right).$

Propriedades logarítmicas

Logaritmo da potência: o expoente do logaritmando passa para frente do logaritmo multiplicando o mesmo.

$$\log_a n^m = m \cdot \log_a n.$$

Exemplos

11) Calcule:

(a) $\log_2 8^4$

(b) $\log_2 \sqrt[3]{4}$

Solução:

(a) $\log_2 8^4 = 4 \cdot \log_2 8 = 4 \cdot 3 = 12.$

(b) $\log_2 \sqrt[3]{4} = \log_2 4^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \log_2 4 = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}.$

Propriedades logarítmicas

Mudança de base: dados um logaritmo de b na base a , fazemos a sua mudança para uma base c da seguinte forma.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Exemplos

12) Passe $\log_2 16$, para base 10.

Solução:

$$\log_2 16 = \frac{\log 16}{\log 2}.$$

Função Logarítmica

Definição:

Dado $a \in \mathbb{R}$ tal que $a > 0$ e $a \neq 1$, a função $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \log_a x$$

é chamada de **função logarítmica de base a** .

Exemplos

$$13) \quad y = \log_2 x$$

Função logarítmica de base 2.

$$14) \quad y = \log x$$

Função logarítmica de base 10.

$$15) \quad y = \log_{\frac{1}{2}} x$$

Função logarítmica de base $\frac{1}{2}$.

Exemplos

16) $y = \log_3 x$

Função logarítmica de base 3.

17) $y = \log_\pi x$

Função logarítmica de base π .



Número Pi, seu valor aproximado com duas casas decimais é 3,14.

18) $y = \ln x$

Função logarítmica de base e .



Número de Euler, seu valor aproximado com três casas decimais é 2,718.

Gráfico

Esboce o gráfico da função $f(x) = \log_2 x$.

Obs: função crescente.

Solução: Destacando alguns pontos do gráfico, tem-se:

$$f\left(\frac{1}{8}\right) = \log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$$

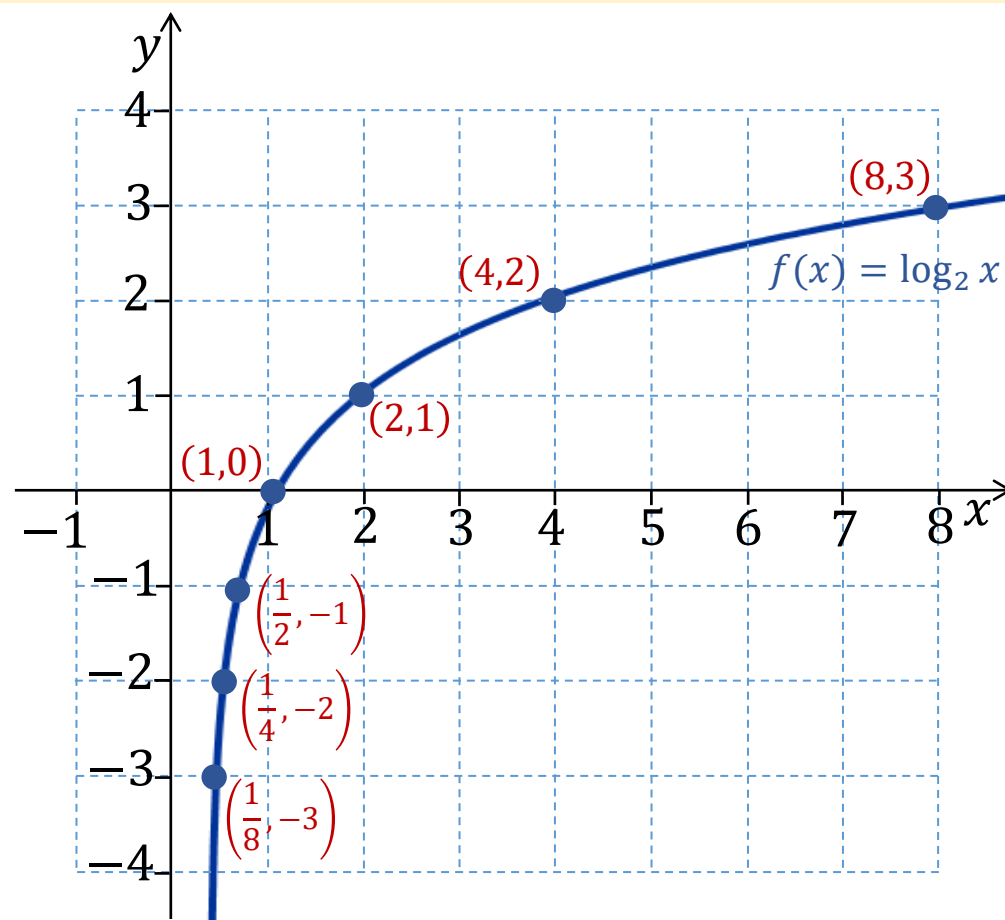
$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2\left(\frac{1}{4}\right) = -2$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$f(1) = \log_2(1) = 0$$

$$f(2) = \log_2(2) = 1$$

$$f(4) = \log_2(4) = 2$$



Gráfico

Esboce o gráfico da função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Obs: função decrescente.

Solução: Destacando alguns pontos do gráfico, tem-se:

$$f\left(\frac{1}{8}\right) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{8}\right) = 3$$

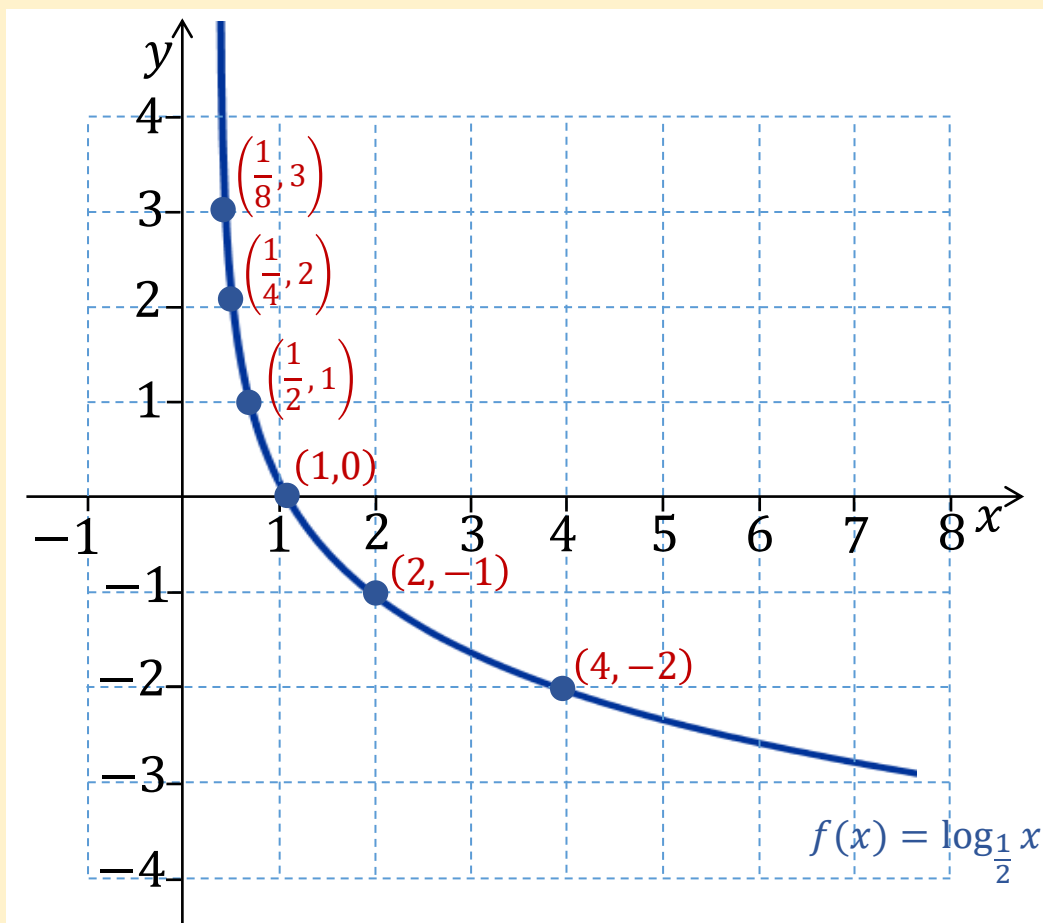
$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right) = 2$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$f(1) = \log_{\frac{1}{2}}(1) = 0$$

$$f(2) = \log_{\frac{1}{2}}(2) = -1$$

$$f(4) = \log_{\frac{1}{2}}(4) = -2$$



Gráfico, Domínio e Imagem

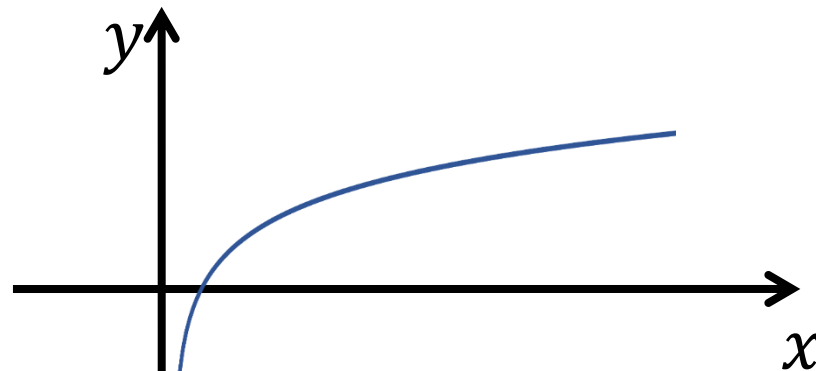
O gráfico de uma função exponencial pode assumir dois formatos distintos:

Primeiro caso: $a > 1$

Função Crescente

$$D(f) = \mathbb{R}_+^*$$

$$Im(f) = \mathbb{R}.$$

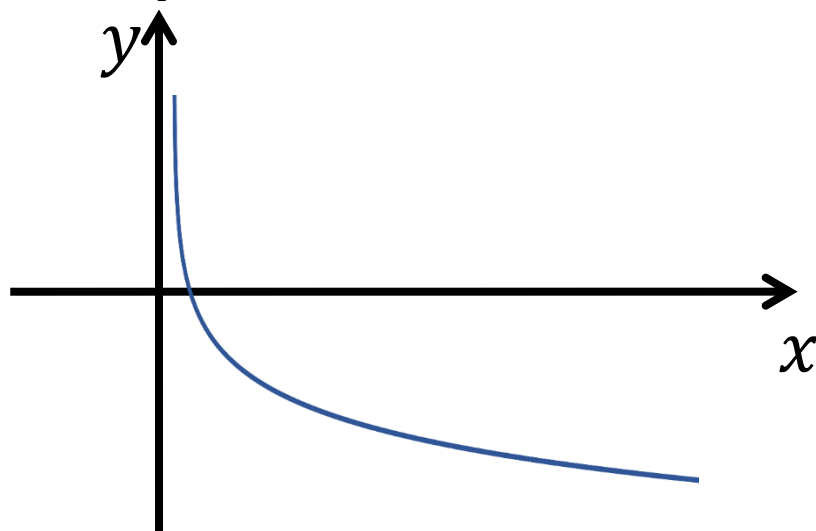


Segundo caso: $0 < a < 1$

Função Decrescente

$$D(f) = \mathbb{R}_+^*$$

$$Im(f) = \mathbb{R}.$$



Gráfico, Domínio e Imagem

Em ambos os casos (crescente ou decrescente), a reta $x = 0$ é chamada de **assíntota vertical** do gráfico da função.

Observação:

Para esboçar o gráfico de uma função $f(x) = \log_a x$, basta:

- i. identificar o comportamento do gráfico (crescente ou decrescente)
- ii. lembrar que os pontos $(1,0)$ e $(a,1)$ sempre pertencem ao gráfico destas funções, pois:

$$f(1) = \log_a 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (1,0) \in f$$

$$f(a) = \log_a a = 1 \quad \Rightarrow \quad (a,1) \in f$$

Exemplos

19) Esboce os gráficos das funções:

$$(a) f(x) = \log_{\frac{5}{2}} x$$

$$(b) f(x) = \ln x$$

$$(c) f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$$

$$(d) f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$$

Solução:

$$(a) f(x) = \log_{\frac{5}{2}} x$$

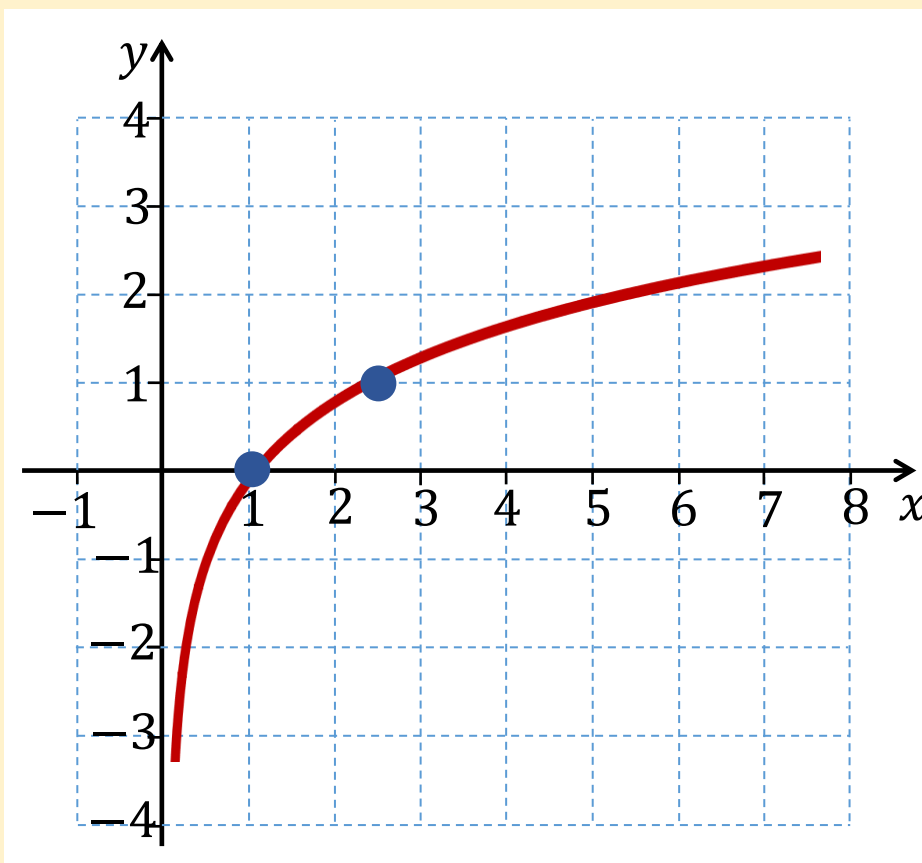
$\frac{5}{2} > 1 \Rightarrow f(x)$ é crescente

Definindo os pontos:

$(1, 0)$ e $(a, 1)$

Temos,

$(1, 0)$ e $(\frac{5}{2}, 1)$



Exemplos

20) Esboce os gráficos das funções:

$$(a) f(x) = \log_{\frac{5}{2}} x$$

$$(b) f(x) = \ln x$$

$$(c) f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$$

$$(d) f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$$

Solução:

$$(b) f(x) = \ln x$$

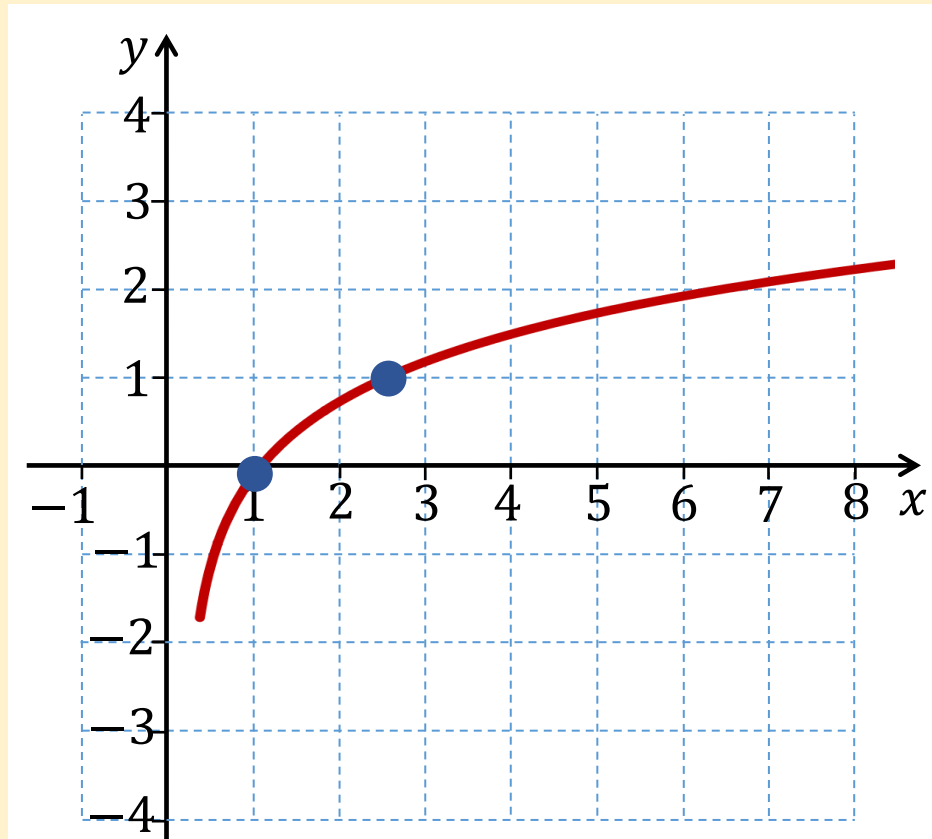
$e > 1 \Rightarrow f(x)$ é crescente

Definindo os pontos:

$$(1, 0) \text{ e } (e, 1)$$

Temos,

$$(1, 0) \text{ e } (e, 1)$$



Exemplos

21) Esboce os gráficos das funções:

$$(a) f(x) = \log_{\frac{5}{2}} x$$

$$(b) f(x) = \ln x$$

$$(c) f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$$

$$(d) f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$$

Solução:

$$(c) f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$$

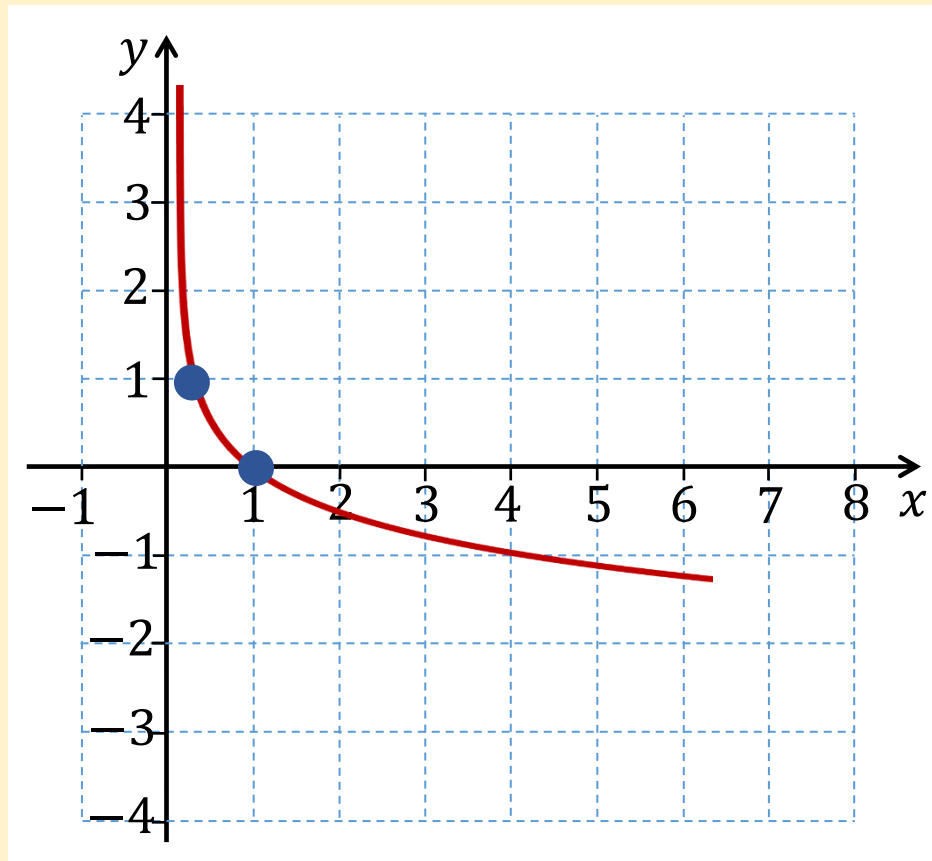
$0 < \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow f(x)$ é decrescente

Definindo os pontos:

$(1, 0)$ e $(a, 1)$

Temos,

$(1, 0)$ e $(\frac{1}{3}, 1)$



Exemplos

22) Esboce os gráficos das funções:

$$(a) f(x) = \log_{\frac{5}{2}} x$$

$$(b) f(x) = \ln x$$

$$(c) f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$$

$$(d) f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$$

Solução:

$$(d) f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$$

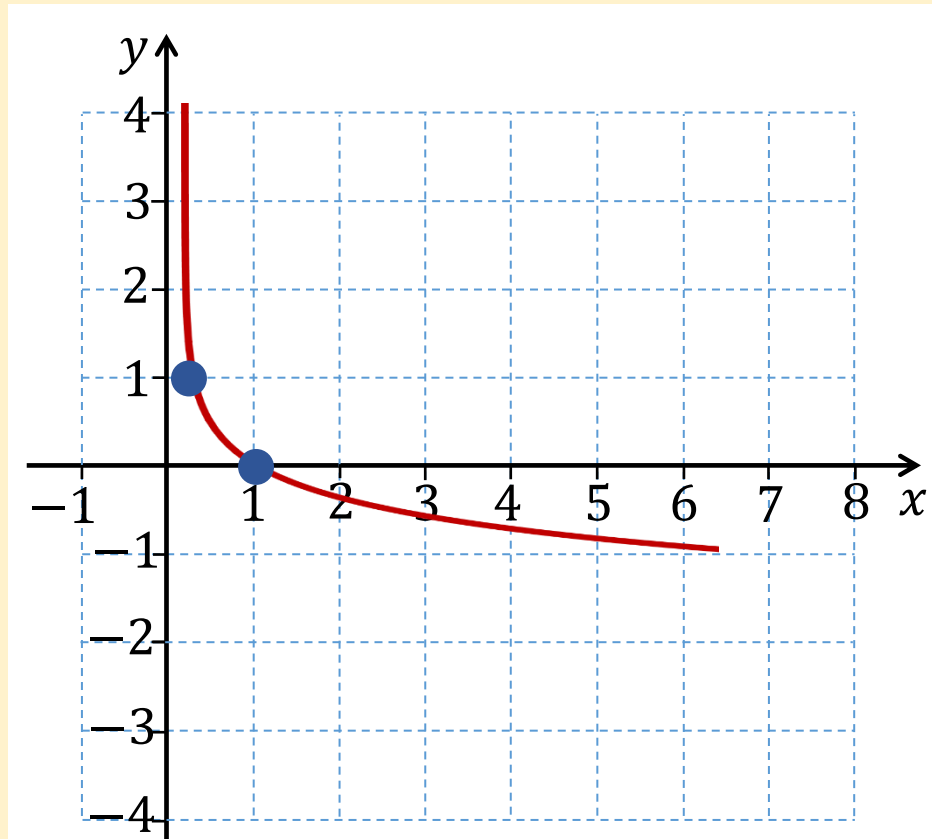
$0 < \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow f(x)$ é decrescente

Definindo os pontos:

$(1, 0)$ e $(a, 1)$

Temos,

$(1, 0)$ e $(\frac{1}{4}, 1)$



Gráfico, Domínio e Imagem

Observação:

A inversa da função exponencial é uma função bijetora!

Logo, a função inversa da função exponencial de base a é a função logarítmica de mesma base.

Ou seja,

$$f(x) = a^x$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$$

$$f^{-1}(x) = \log_a x$$

$$f^{-1}: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$$

Exemplos

23) Em cada caso, determine a função inversa da função dada.

a) $f(x) = \log_5 x$

b) $f(x) = 4^x$

Solução:

a) $f(x) = \log_5 x$

A função inversa de $f(x)$ é a função exponencial de base 5.

Logo,

$$f^{-1}(x) = 5^x$$

b) $f(x) = 4^x$

A função inversa de $f(x)$ é a função logarítmica de base 4.

Logo,

$$f^{-1}(x) = \log_4 x$$

Gráfico, Domínio e Imagem

Observação:

Lembre que existe simetria , em relação à reta $y = x$, entre os gráficos de uma função f e de sua inversa f^{-1} .

Exemplos

24) Determine a função inversa da função exponencial 2^x e esboce os gráficos de ambas.

Solução:

A função inversa de $f(x)$ é a função logarítmica de base 2.

Logo,

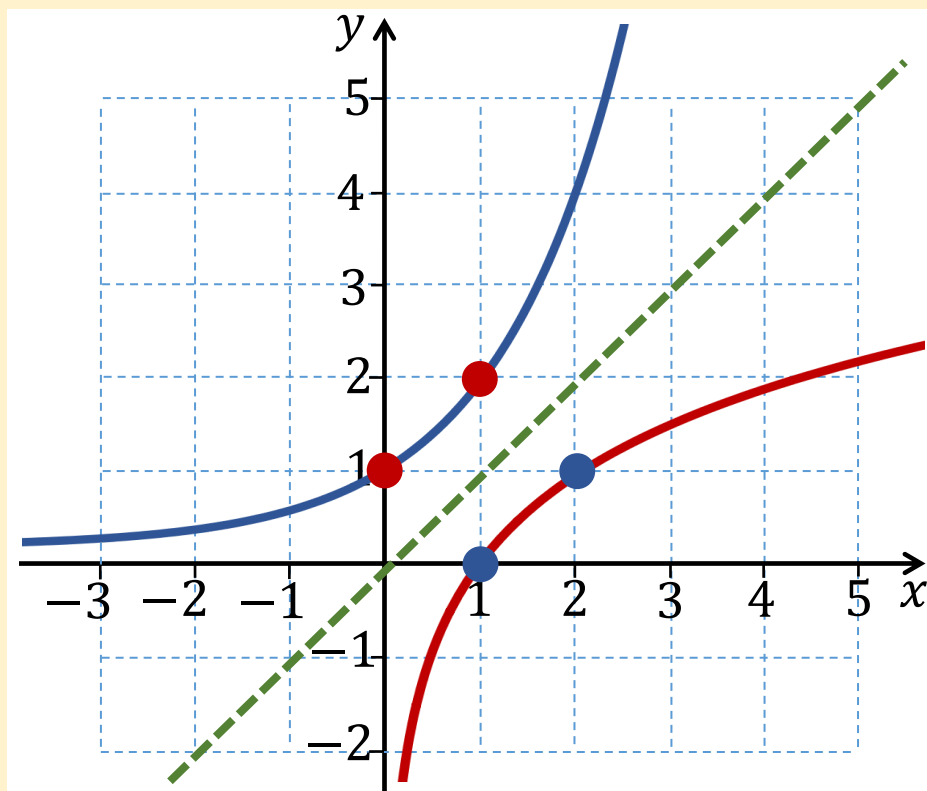
$$f^{-1}(x) = \log_2 x.$$

Definindo os pontos de $f(x) = 2^x$:

$$(0, 1) \quad (1, 2)$$

Definindo os pontos de $f^{-1}(x) = \log_2 x$:

$$(0, 1) \quad (1, 2)$$



Exercícios Propostos



Exercícios

1) Calcule:

(a) $\log_4 64$

(b) $\log_{\frac{1}{4}} 16$

2) Calcule o valor de y em cada equação:

(a) $\log_4 y = 3$

(b) $\log_y 36 = 2$

3) Calcule o valor de y em cada equação:

(a) $\log_4 5 + \log_4 9$

(c) $8\log 1 + \log 0,777 - \log 0,11$

(b) $3\log_8 4 - \log_8 16$

(d) $\frac{1}{3}\log_3 8 - \log_3 10 + 4\log_3 2$

4) Considerando $\log 2 = 0,3$, $\log 3 = 0,5$ e $\log 5 = 0,7$ determine:

(a) $\log 15$

(c) $\log 45$

(e) $(\log 1,5)^2$

(b) $\log 30$

(d) $\log 1,2$

(f) $\log \sqrt{0,3}$

Exercícios

5) Calcule:

(a) $\log_4 x + \log_4(x + 3) = 1$

(b) $\log(x - 3) + \log x = 1$

(c) $\log_6(x - 1)^2 - \log_6(x - 1) = 0$

(d) $\log_4 2x + \log_4(9 - x) = 2$

Exercícios

6) Em cada caso, esboce o gráfico da função dada e determine o domínio, a imagem e a equação da assíntota vertical.

(a) $f(x) = 1 + \log_2 x$

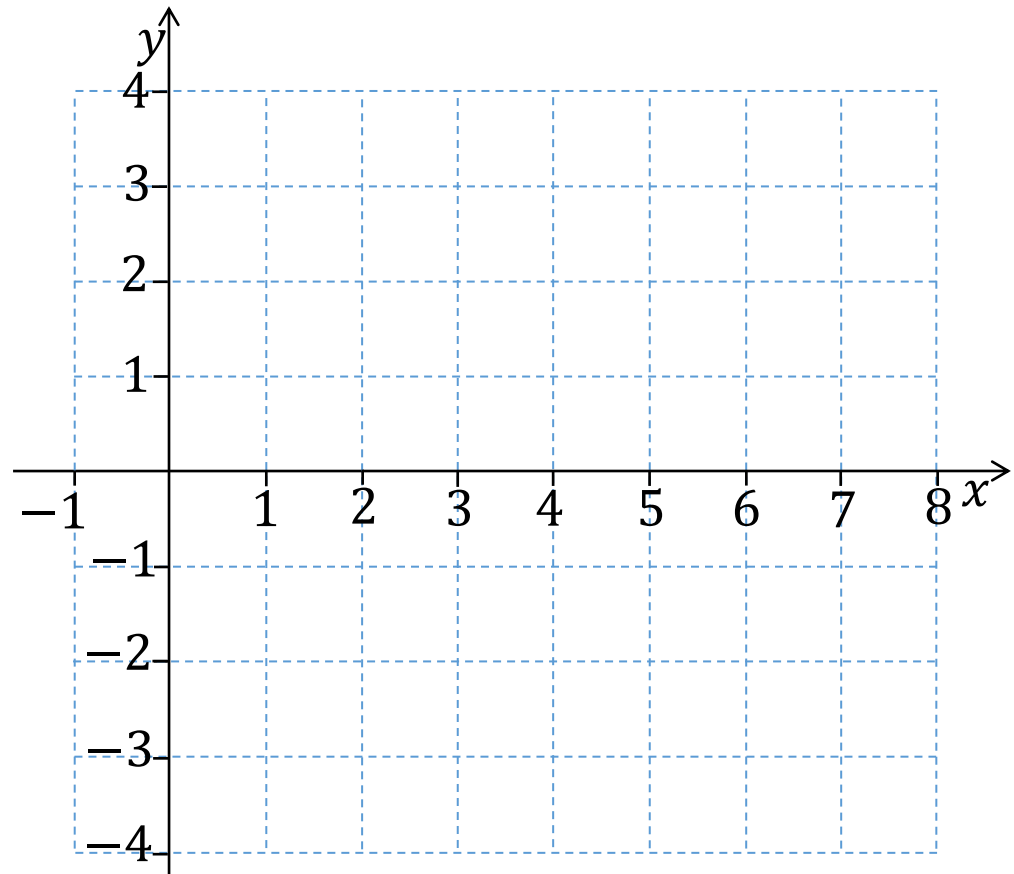
(b) $f(x) = 2 \log_2 x$

(c) $f(x) = \log_3(x - 2)$

(d) $f(x) = 2 + \log_3(x + 1)$

(e) $f(x) = -\ln x$

(f) $f(x) = -\ln(-x)$



Exercícios

7) Determine o domínio das seguintes funções:

(a) $f(x) = 1 + 3 \log_2(x - 5)$

(b) $f(x) = \log(x^2 - 1)$

(c) $f(x) = \log_5(x^2 - x - 12) + \ln(x + 2)$

8) Em cada caso, determine a composta $f \circ g$.

(a) $f(x) = \log_2(x)$ e $g(x) = 12 - 3x$

(b) $f(x) = \log_5(x)$ e $g(x) = 5^x$

(c) $f(x) = 5^x$ e $g(x) = \log_5(x)$

(d) $f(x) = \ln x$ e $g(x) = e^{x^2 + \sqrt{x}}$

9) Em cada caso, escreva a função dada como uma composta de duas funções.

a) $f(x) = \log(x^3 + 2x)$

b) $f(x) = \sqrt{\ln x}$

Respostas

Exercício 1:

a) $x = 3$

b) $x = -2$

Exercício 2:

a) $y = 64$

b) $y = 6$

Exercício 3:

a) $\log_4 45$

c) $\log\left(\frac{777}{110}\right)$

b) $\log_8 4$

d) $\log_3\left(\frac{16}{5}\right)$

Exercício 4:

a) 0,8

b) 1,5

c) 1,7

d) 0,1

e) 0,04

f) $-0,25$

Exercício 5:

a) $S = \{-4, 1\}$

b) $S = \{-2, 5\}$

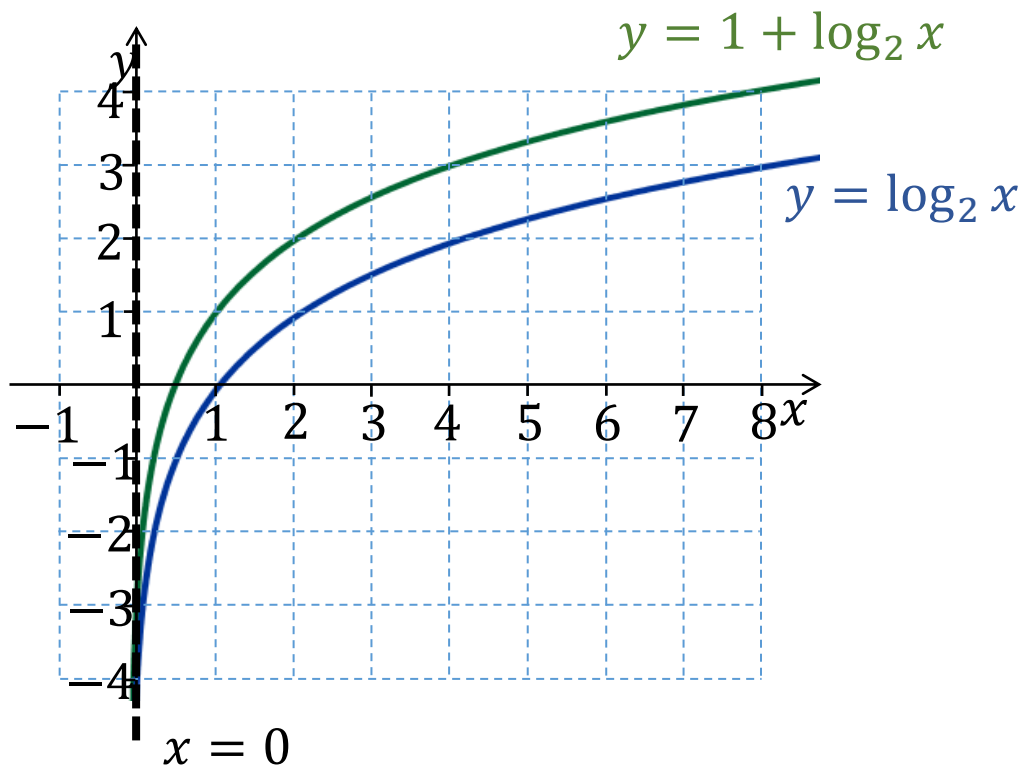
c) $S = \{2\}$

d) $S = \{1, 8\}$

Respostas

Exercício 6:

a)



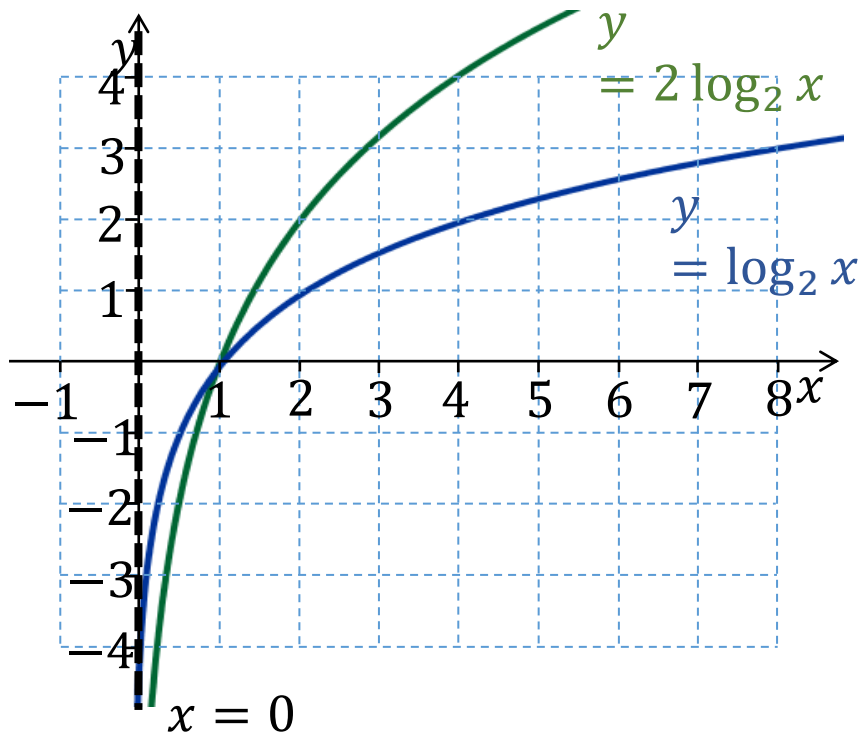
$$D(f) = \mathbb{R}_+^*$$

$$Im(f) = \mathbb{R}$$

Assíntota: $x = 0$

Respostas

b)



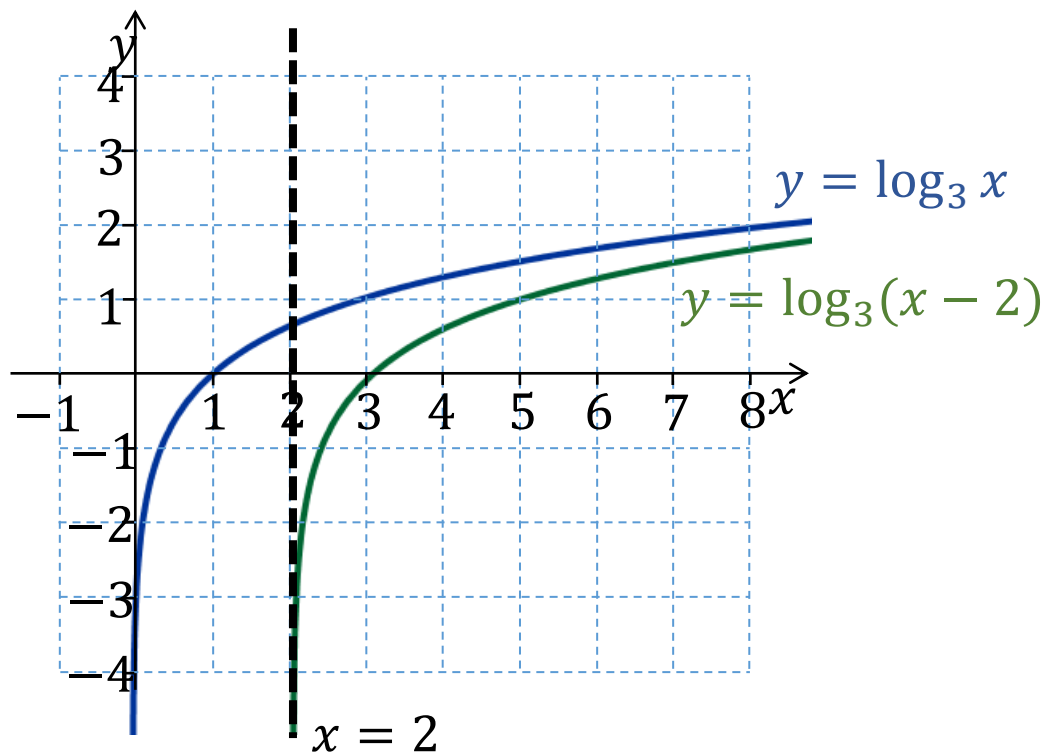
$$D(f) = \mathbb{R}_+^*$$

$$Im(f) = \mathbb{R}$$

Assíntota: $x = 0$

Respostas

c)



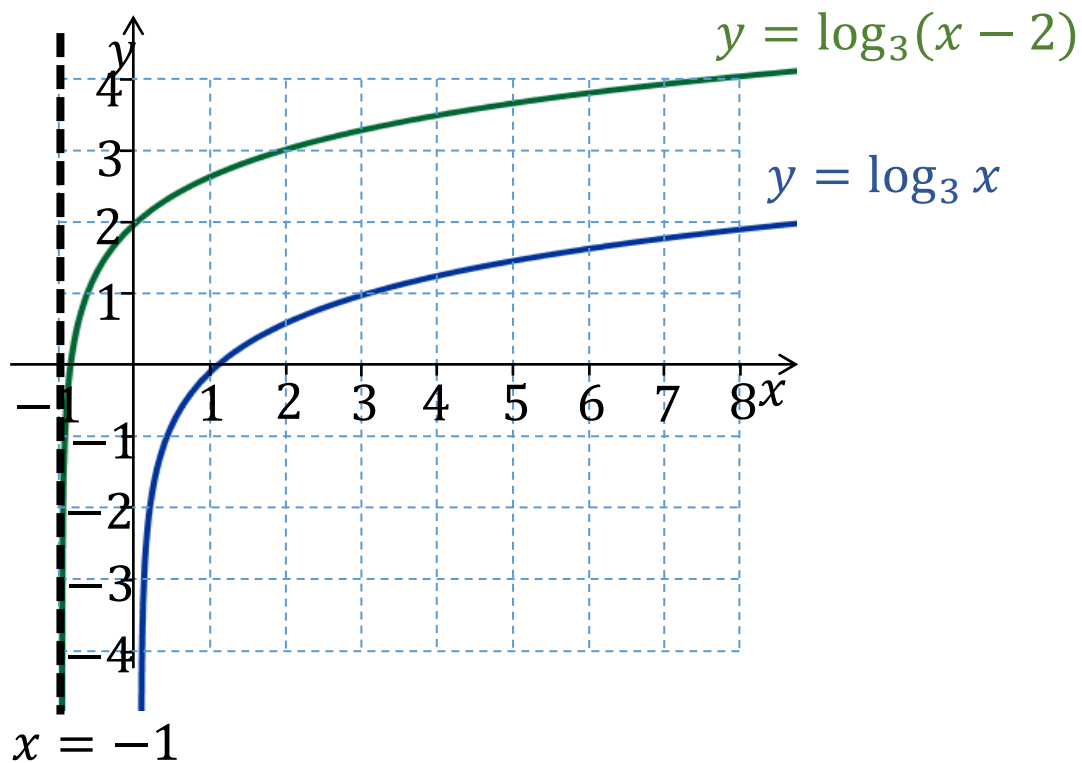
$$D(f) = (2, +\infty)$$

$$Im(f) = \mathbb{R}$$

Assíntota: $x = 2$

Respostas

d)



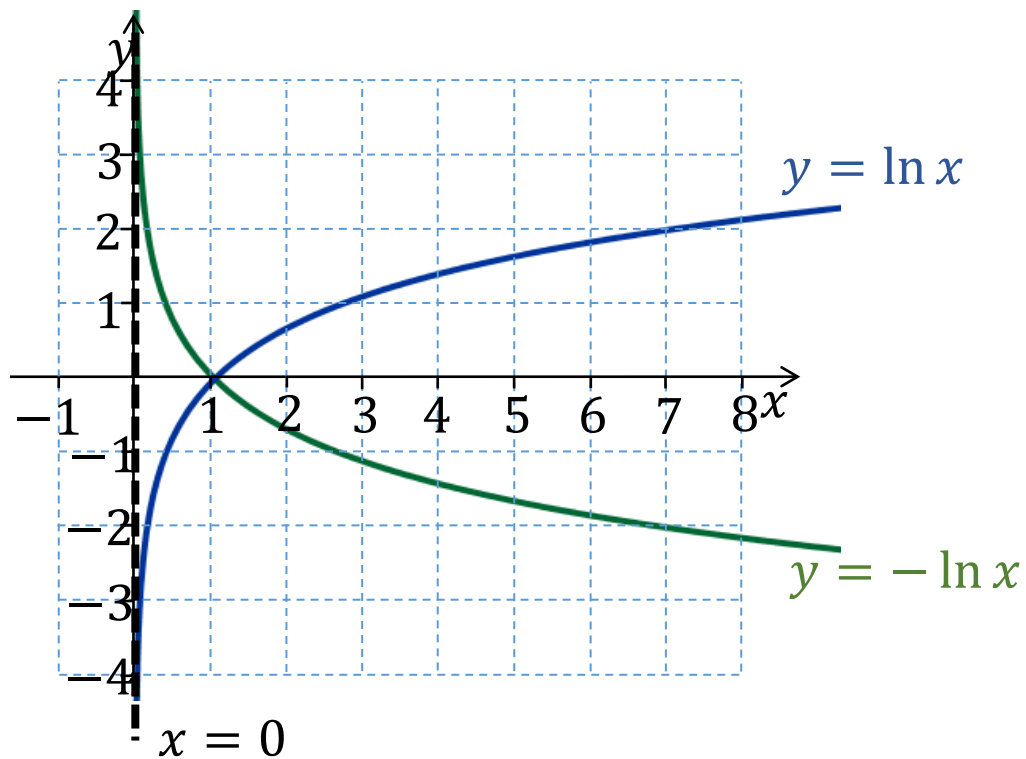
$$D(f) = (-1, +\infty)$$

$$Im(f) = \mathbb{R}$$

Assíntota: $x = -1$

Respostas

e)



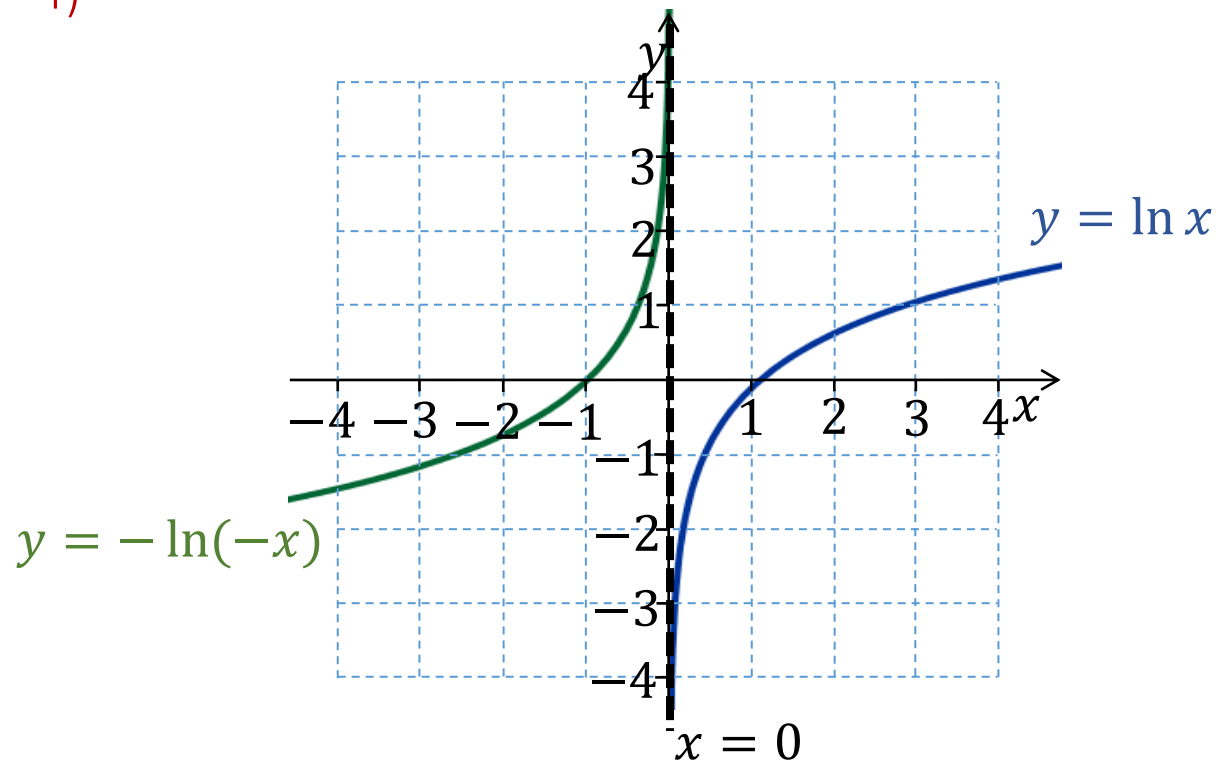
$$D(f) = (0, +\infty)$$

$$Im(f) = \mathbb{R}$$

Assíntota: $x = 0$

Respostas

f)



$$D(f) = (-\infty, 0)$$

$$Im(f) = \mathbb{R}$$

Assíntota: $x = 0$

Respostas

Exercício 7:

a) $D(f) = (5, +\infty)$

b) $D(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

c) $D(f) = (4, +\infty)$

Exercício 8:

a) $(f \circ g)(x) = \log_2(12 - 3x)$

b) $(f \circ g)(x) = x$

c) $(f \circ g)(x) = x$

d) $(f \circ g)(x) = x^2 + \sqrt{x}$

Exercício 9:

a) $f = f_2 \circ f_1 \quad f_1(x) = x^3 + 2x$

$f_2(x) = \log(x)$

b) $f = f_2 \circ f_1 \quad f_1(x) = \ln x$

$f_2(x) = \sqrt{x}$

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

<http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias>

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

<http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA>

O GAMA possui monitorias de:

- ☐ Matemática Elementar, Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e equivalentes)
 - ☐ ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
 - ☐ Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3 (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.