Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino

Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Apoio ao Cálculo

Aula 01

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Conjuntos Numéricos

Números naturais

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

Subconjunto notável

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$ Naturais positivos

Números inteiros

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Subconjuntos notáveis

$\mathbb{Z}_- = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$ Inteiros não- positivos

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ Inteiros não- negativos

$\mathbb{Z}_-^* = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1\}$ Inteiros negativos

$\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ Inteiros positivos

$\mathbb{Z}^* = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ Inteiros não nulos

Conjuntos Numéricos

Números racionais

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Decimais exatas

Dízimas periódicas

Subconjuntos notáveis $\mathbb{Q}_- \quad \mathbb{Q}_+ \quad \mathbb{Q}_-^* \quad \mathbb{Q}_+^* \, \mathbb{Q}^*$

Números reais

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$

Irracionais

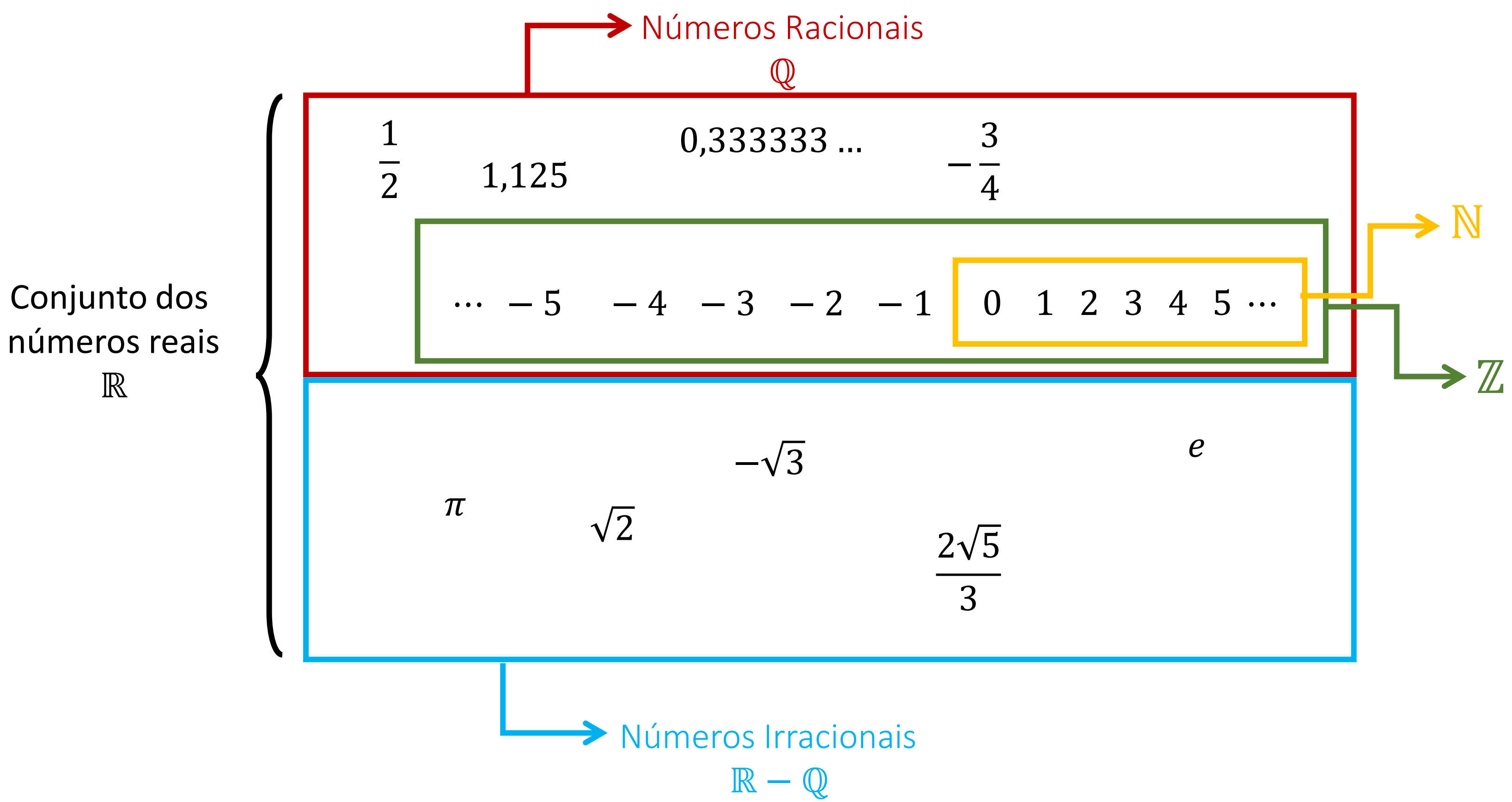
Todos os números reais
que não são racionais

Subconjuntos notáveis

$\mathbb{R}_- \quad \mathbb{R}_+ \quad \mathbb{R}_-^* \quad \mathbb{R}_+^* \quad \mathbb{R}^*$

Conjuntos Numéricos

Representação dos conjuntos numéricos por diagramas



Pertinência e inclusão

Pertinência		Inclusão			
Relaciona elemento e conjunto.		Relaciona dois conjuntos.			
$\in$	$\notin$	$\subset$	$\not\subset$	$\supset$	$\not\supset$
pertence	não pertence	está contido	não está contido	contém	não contém

O elemento x pertence ao conjunto A

$$x \in A$$

O elemento x não pertence ao conjunto A

$$x \notin A$$

A é subconjunto B

$$A \subset B$$

$$B \supset A$$

Todo elemento de A é também elemento de B

A não é subconjunto B

$$A \not\subset B$$

$$B \not\supset A$$

Nem todos elementos de A são elemento de B

Exemplos: Em cada caso, complete as lacunas com os símbolos $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$ $\supset$, $\not\supset$ da forma mais conveniente em

$$2 \ \underline{\in}\ \mathbb{N} \quad -5\ \underline{\in}\ \mathbb{Z} \quad -5\ \underline{\notin}\ \mathbb{N} \quad 0\ \underline{\notin}\ \mathbb{N}^*$$

$$\{1,2,3\}\ \underline{\subset}\ \{-1,0,1,2,3,4\} \qquad \mathbb{N}\ \underline{\subset}\ \mathbb{Z} \qquad \{-1,0,2\}\ \underline{\not\supset}\ \mathbb{N}$$

$$\mathbb{N}\ \underline{\subset}\ \mathbb{Z}\ \underline{\subset}\ \mathbb{Q}\ \underline{\subset}\ \mathbb{R} \qquad \mathbb{Z}\ \underline{\not\supset}\ \mathbb{Q} \qquad \mathbb{R}\ \underline{\supset}\ \mathbb{Q} \qquad \mathbb{N}\ \underline{\not\subset}\ \mathbb{Z}^*$$

Regra de sinais

Somas e subtrações:

Sinais iguais: soma-se e conserva o sinal.

Sinais diferentes: subtrai-se e conserva-se o sinal do maior (em módulo).

Exemplos:

$8 + 3 = 11 \qquad -7 - 3 = -10 \qquad 5 - 3 = 2 \qquad -10 + 4 = -6$

Multiplicações e divisões:

Sinais iguais: resulta em sinal positivo.

Sinais diferentes: resulta em sinal negativo.

Exemplos:

$(2) \cdot (3) = 6 \qquad (-5) \cdot (-3) = 15$

$(4) \cdot (-8) = -32 \qquad (-7) \cdot (2) = -14$

Intervalos reais

Intervalo aberto

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

Intervalo fechado

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

Intervalo semiaberto à esquerda

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

Intervalo semiaberto à direita

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

Intervalo ilimitado aberto à esquerda

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

Intervalo ilimitado fechado à esquerda

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

Intervalo ilimitado aberto à direita

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

Intervalo ilimitado fechado à direita

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$$

Operações com Intervalos

Exemplo: Represente os seguintes intervalos na reta real.

(a) $I_1 = (-2,1)$

(b) $I_2 = [-2,2]$

(c) $I_3 = (0,3]$

(d) $I_4 = [-1,3)$

(e) $I_5 = (-1,+\infty)$

(f) $I_6 = [1,+\infty)$

(g) $I_7 = (-\infty,3]$

(h) $I_8 = (-\infty,2)$

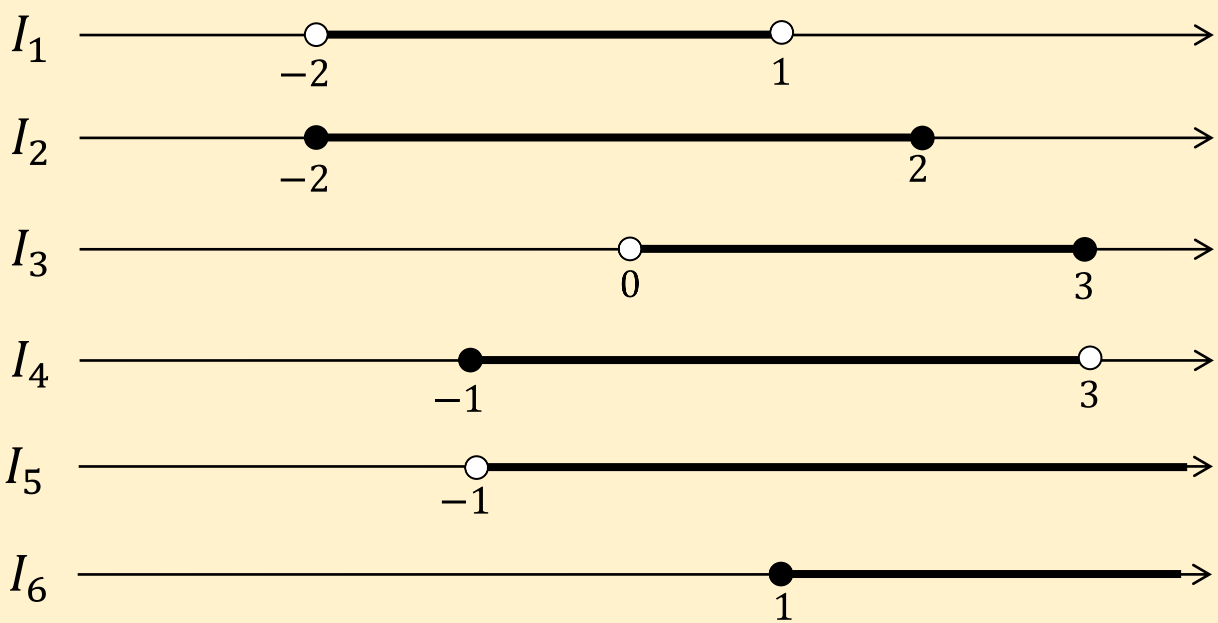
(i) $I_9 = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 0\}$

(j) $I_{10} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$

(k) $I_{11} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$

(l) $I_{12} = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 2\}$

Solução:



Operações com Intervalos

Exemplo: Represente os seguintes intervalos na reta real.

(a) $I_1 = (-2,1)$

(b) $I_2 = [-2,2]$

(c) $I_3 = (0,3]$

(d) $I_4 = [-1,3)$

(e) $I_5 = (-1,+\infty)$

(f) $I_6 = [1,+\infty)$

(g) $I_7 = (-\infty,3]$

(h) $I_8 = (-\infty,2)$

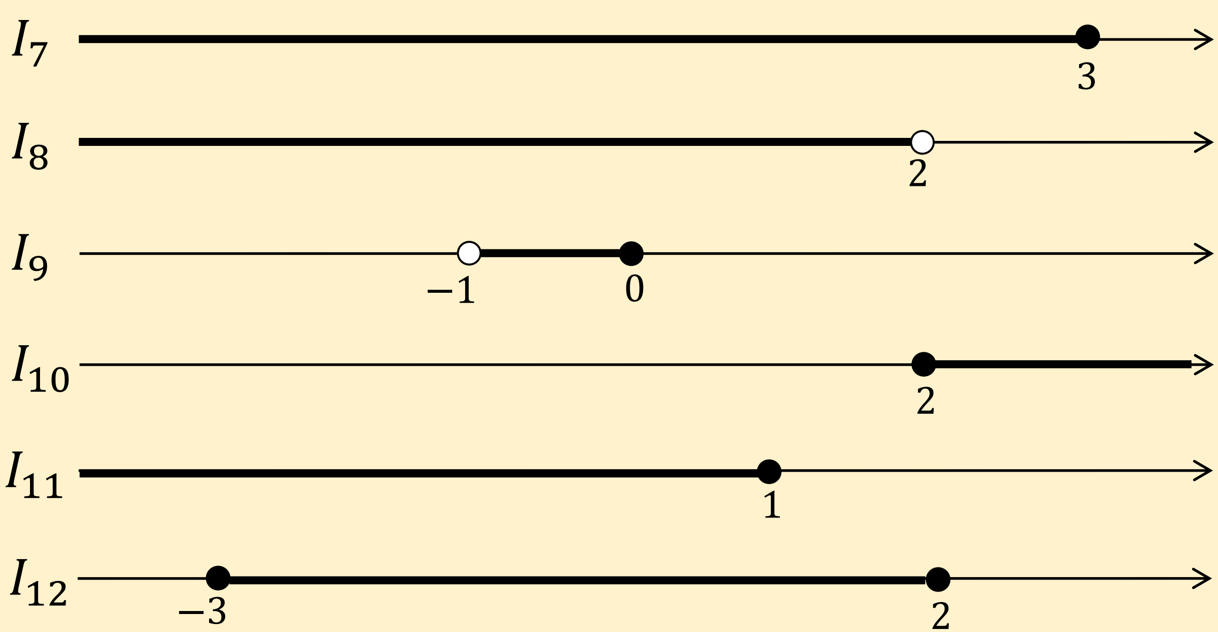
(i) $I_9 = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 0\}$

(j) $I_{10} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$

(k) $I_{11} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$

(l) $I_{12} = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 2\}$

Solução:



Operações com Intervalos

União

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$

Elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A ou B

Diferença

$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$

Elementos que pertencem ao conjuntos A e não pertencem ao conjunto B

Interseção

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$

Elementos que pertencem simultaneamente aos conjuntos A e B

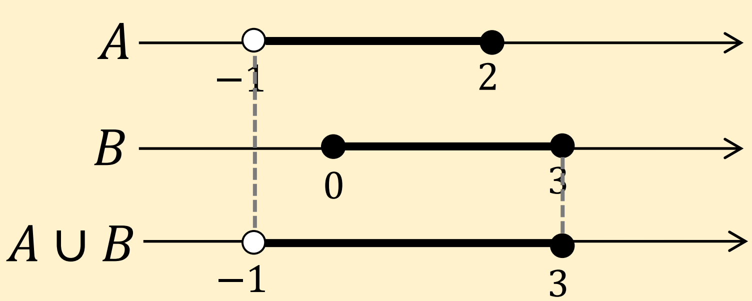
Complementar

$A' = \{x \mid x \notin A\}$

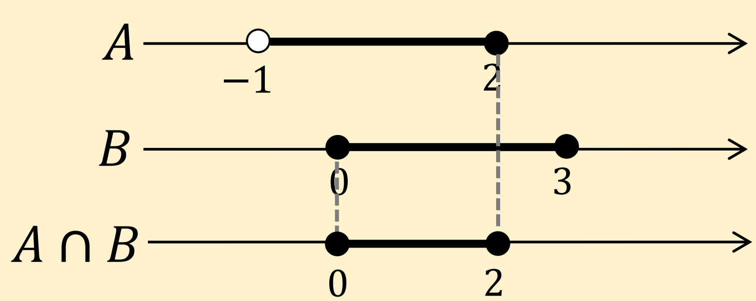
Elementos que não pertencem ao conjunto A

Exemplo: Sendo $A = (-1, 2]$ e $B = [0,3]$, determine $A \cup B$ e $A \cap B$.

Solução:



$A \cup B = (-1, 3]$



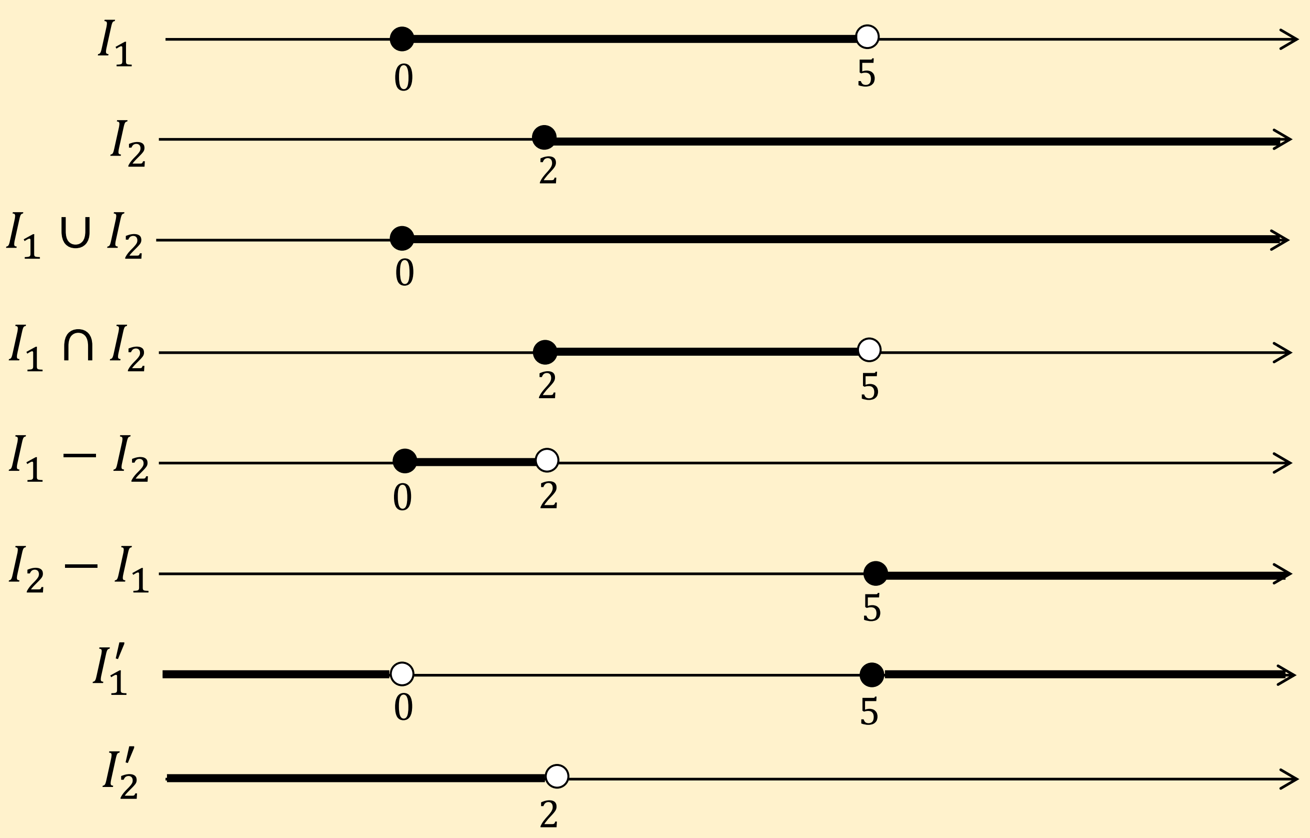
$A \cap B = [0, 2]$

Operações com Intervalos

Exemplo: Sendo $I_1 = [0, 5)$ e $I_2 = [2, +\infty)$, determine:

(a) $I_1 \cup I_2$ (b) $I_1 \cap I_2$ (c) $I_1 - I_2$ (d) $I_2 - I_1$ (e) I_1' (f) I_2'

Solução:



Decomposição em fatores primos

Definição: Um número natural p é chamado de **número primo** se $p \geq 2$ e p é divisível apenas por 1 e por p.

Exemplos:

2 é primo | 3 é primo | 4 não é primo | 5 é primo | 6 não é primo

$4 = 2 \cdot 2$
divisível por 2.

$6 = 2 \cdot 3$
divisível por 2 e por 3.

Exemplos: Em cada caso, decomponha o número dado como um produto de fatores primos.

(a) 12 (b) 125 (c) 232

Solução:

(a)
$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ \hline 1 & 2^2 \cdot 3 \end{array}$$

Decomposição em fatores primos
$12 = 2^2 \cdot 3$

(b)
$$\begin{array}{r|l} 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ \hline 1 & 5^3 \end{array}$$

Decomposição em fatores primos
$125 = 5^3$

(c)
$$\begin{array}{r|l} 232 & 2 \\ 116 & 2 \\ 58 & 2 \\ 29 & 29 \\ \hline 1 & 2^3 \cdot 29 \end{array}$$

Decomposição em fatores primos
$232 = 2^3 \cdot 29$

Mínimo múltiplo comum

Definição: O **mínimo múltiplo comum** de dois inteiros positivos a e b, denotado por $mmc(a, b)$ é o menor múltiplo comum de a e b.

Exemplos: Encontre

$$mmc(6, 15)$$

Solução: Note que os múltiplos positivos de 6 e de 15 são:

$$M(6) = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, \dots\} \text{ e } \quad M(15) = \{15, 30, 45, \dots\}$$

Portanto,

$$mmc(6, 15) = 30$$

Menor múltiplo comum de 6 e 15

Na prática, encontra-se o $mmc(a, b)$ utilizando-se o seguinte método prático, que utiliza a forma fatorada de a e b:

$$\begin{array}{rcr|l} 6 & - & 15 & 2 \\ 3 & - & 15 & 3 \\ 1 & - & 5 & 5 \\ \hline 1 & - & 1 & 2 \cdot 3 \cdot 5 \end{array}$$

Portanto,

$$mmc(6, 15) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

Mínimo múltiplo comum

Pode-se calcular o mínimo múltiplo comum entre três ou mais números utilizando-se um método parecido ao do exemplo anterior.

Exemplos: Encontre

$$mmc(10, 28, 35)$$

Solução: Utilizando a fatoração simultânea de $10, 28$ e 35, tem-se:

$$\begin{array}{ccccc|l} 10 & - & 28 & - & 35 & 2 \\ 5 & - & 14 & - & 35 & 2 \\ 5 & - & 7 & - & 35 & 5 \\ 1 & - & 7 & - & 7 & 7 \\ \hline 1 & - & 1 & - & 1 & 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \end{array}$$

Portanto,

$$mmc(10, 28, 35) = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 = 140$$

Operações e propriedades das frações

Igualdade de frações

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Duas frações são iguais sempre que a multiplicação cruzada resultar em números iguais.

Exemplo:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \quad \text{pois} \quad \underbrace{2 \cdot 6}_{12} = \underbrace{3 \cdot 4}_{12}$$

Exemplo:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{pois} \quad \underbrace{1 \cdot 2}_{2} = \underbrace{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}_{2}$$

Simplificação

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$$

Fatores comuns ao numerador e denominador podem ser simplificados.

Exemplo:

$$\frac{15}{12} = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{5}{4}$$

Exemplo:

$$\frac{25a}{5ab} = \frac{5 \cdot 5 \cdot a}{5 \cdot a \cdot b} = \frac{5}{b}$$

Operações e propriedades das frações

Soma/subtração

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{\frac{m}{b} \cdot a \pm \frac{m}{d} \cdot c}{m}$$

$m = m.m.c.(b,d)$ mínimo múltiplo comum entre b e d.

Exemplo:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{5} = \frac{\frac{10}{2} \cdot 1 + \frac{10}{5} \cdot 3}{10} = \frac{5+6}{10} = \frac{11}{10}.$$

$$\begin{array}{rr|l} 2 & -\ 5 & 2 \\ 1 & -\ 5 & 5 \\ \hline 1 & -\ 1 & 2 \cdot 5 \end{array}$$

$mmc(2,5) = 2 \cdot 5 = 10$

Exemplo:

$$\frac{3}{4} - \frac{7}{10} = \frac{\frac{20}{4} \cdot 3 - \frac{20}{10} \cdot 7}{20} = \frac{15-14}{20} = \frac{1}{20}.$$

$$\begin{array}{rr|l} 4 & -\ 10 & 2 \\ 2 & -\ 5 & 2 \\ 1 & -\ 5 & 5 \\ \hline 1 & -\ 1 & 2 \cdot 2 \cdot 5 \end{array}$$

$mmc(4,10) = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$

Operações e propriedades das frações

Multiplicação

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Multiplica-se o de cima pelo de cima e o de baixo pelo de baixo.

Exemplo:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 8} = \frac{3}{40}.$$

Exemplo:

$$\frac{a+1}{2a} \cdot \frac{b}{a} = \frac{(a+1) \cdot b}{(2a) \cdot a} = \frac{ab+b}{2a^2}.$$

Divisão

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Multiplica-se a primeira pelo inverso da segunda.

Exemplo:

$$\frac{5}{3} \div \frac{2}{7} = \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{2} = \frac{5 \cdot 7}{3 \cdot 2} = \frac{35}{6}.$$

Exemplo:

$$\frac{a^2}{2b} \div \frac{a}{b} = \frac{a^2}{2b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot a \cdot b}{2 \cdot b \cdot a} = \frac{a}{2}.$$

Operações com frações

Exemplos: Efetue as seguintes operações com frações

(a) $\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{3}$ (b) $\dfrac{1}{8}-\dfrac{5}{4}$ (c) $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{5}{2}$ (d) $\dfrac{4}{9}\div\dfrac{1}{2}$ (e) $\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{4}{15}$

Solução:

(a) $$\frac{1}{5}+\frac{2}{3}=\frac{\frac{15}{5}\cdot 1+\frac{15}{3}\cdot 2}{15}=\frac{3+10}{15}=\frac{13}{15}.$$

$$\begin{array}{l|l} 5\ -3 & 3 \\ 5\ -1 & 5 \\ \hline 1\ -1 & 3\cdot 5 \end{array}$$

$$mmc(5,3)=3\cdot 5=15$$

(b) $$\frac{1}{8}-\frac{5}{4}=\frac{\frac{8}{8}\cdot 1-\frac{8}{4}\cdot 5}{8}=\frac{1-10}{8}=-\frac{9}{8}.$$

$$\begin{array}{l|l} 8\ -4 & 2 \\ 4\ -2 & 2 \\ 2\ -1 & 2 \\ \hline 1\ -1 & 2\cdot 2\cdot 2 \end{array}$$

$$mmc(8,4)=2^3=8$$

(c) $$\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}=\frac{1\cdot 5}{3\cdot 2}=\frac{5}{6}.$$

(d) $$\frac{4}{9}\div\frac{1}{2}=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{1}=\frac{4\cdot 2}{9\cdot 1}=\frac{8}{9}.$$

(e) $$\frac{3}{4}+\frac{1}{3}-\frac{4}{15}=\frac{\frac{60}{4}\cdot 3+\frac{60}{3}\cdot 1-\frac{60}{15}\cdot 4}{60}$$

$$=\frac{15\cdot 3+20\cdot 1-4\cdot 4}{60}=\frac{45+20-16}{60}=\frac{49}{60}.$$

$$\begin{array}{l|l} 4\ -3\ -15 & 2 \\ 2\ -3\ -15 & 2 \\ 1\ -3\ -15 & 3 \\ 1\ -1\ -\ 5 & 5 \\ \hline 1\ -1\ -\ 1 & 2^2\cdot 3\cdot 5 \end{array}$$

$$mmc(4,3,15)=2^2\cdot 3\cdot 5=60$$

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Represente graficamente os intervalos a seguir e verifique se os números

$$5; \quad \pi; \quad \sqrt{5}; \quad -0{,}2; \quad \frac{5}{2};$$

pertencem a cada intervalo:

(a) $A = [-2{,}5)$ (b) $B = (2{,}7)$ (c) $C = (6, +\infty)$

2) Sendo: $A = [-2, 5]$, $B = (2, 7)$ e $C = (6, +\infty)$. Determine:

(a) $A \cap C$ (c) $A - B$ (e) $(A \cup C) \cup B$

(b) $A \cap B$ (d) $A \cup C$ (f) $(A - \mathrm{C}) \cap B$

3) Sendo $U = \mathbb{R}$ represente cada um dos intervalos indicados por compreensão e na reta real:

(a) conjunto dos números maiores que −3 e menores que 1;

(b) conjunto dos números menores ou iguais a −4;

(c) conjunto dos números maiores que -1 ou menores que -3.

Exercícios

4) Realize cada uma das operações envolvendo frações:

(a) $\dfrac{3}{5} - \dfrac{2}{15} + \dfrac{1}{3}$

(b) $-\dfrac{4}{7} \cdot \dfrac{2}{3}$

(c) $\left(-\dfrac{3}{5}\right) \cdot \left(-\dfrac{2}{4}\right)$

(d) $\dfrac{1}{\left(1 + \frac{1}{3}\right)}$

(e) $\dfrac{4}{3} \div 2$

(f) $\dfrac{-\frac{5}{3}}{\frac{15}{6}}$

5) Calcule:

(a) $\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{5} \div \dfrac{3}{10} + 1$

(b) $2 + 3 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)$

(c) $\dfrac{1}{3} + \left[\dfrac{1}{3} \div \left(\dfrac{1}{4} + 1\right)\right] \cdot \left(-\dfrac{1}{9}\right)$

Exercícios

6) Represente graficamente na reta real os seguintes intervalos:

(a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3\}$

(b) $(-\infty, 2]$

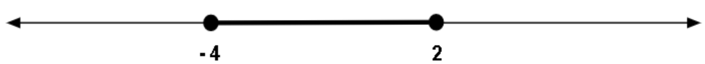
(c) $[-3, \frac{1}{2}]$

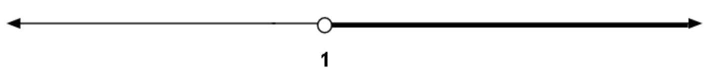
(d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 7\}$

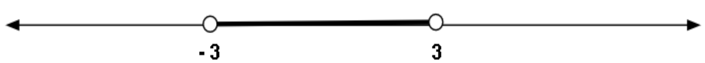
(e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$

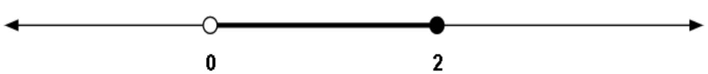
(f) $[0,6)$

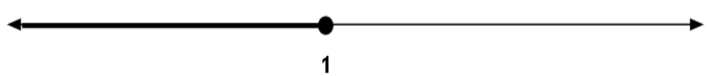
7) Escreva os intervalos representados graficamente:

(a)


(b)


(c)


(d)


(e)


Exercícios

8) Dados os conjuntos a seguir, determine o que se pede.

(a) $A = [2, 4]$ e $B = [3, 6]$:

$A \cap B$

$A \cup B$

$A - B$

$B - A$

(b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$: $A \cap B, A \cup B$.

$A \cap B$

$A \cup B$

9) Dados os intervalos $A = [-1, 4], B = [1, 5], C = [2, 4]$ e $D = [1, 3]$, verifique se 1 pertence ao conjunto $(A \cap B) - (C - D)$.

Exercícios

10) Realize as seguinte operações envolvendo frações:

(a) $\frac{25}{3} + \frac{5}{2} \div 2$

(b) $\left(-\frac{3}{4}\right) \div \left(-\frac{5}{2}\right) + \left(\frac{27}{16}\right)$

(c) $-1 + \frac{2}{3} . \frac{7}{8}$

(d) $\frac{12}{5} - \frac{24}{15}$

(e) $\frac{2}{100} + \frac{98}{10}$

(f) $\frac{27}{8} \div \frac{5}{16}$

(g) $-2 . \frac{23}{8} - \frac{1}{2}$

(h) $2 . \frac{1}{8} + \frac{2}{7} - \frac{81}{9}$

Respostas

Exercício 1:

a) π , $\sqrt{5}$, -0,2 , $\frac{5}{2}$

b) 5 , π , $\sqrt{5}$, $\frac{5}{2}$

c) Nenhum

Exercício 2:

a) $\emptyset$

b) $(2,5]$

c) $[-2,2]$

d) $[-2,5] \cup (6,+\infty)$

e) $[-2, ,+\infty)$

f) $(2,5]$

Exercício 3:

a) $\{x \in \mathbb{R} \,|{-3} < x < 1\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq -4\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x < -3 \text{ ou } x > -1\}$

Exercício 4:

a) $\frac{4}{5}$

b) $-\frac{8}{21}$

c) $\frac{3}{10}$

d) $\frac{3}{4}$

e) $\frac{2}{3}$

f) $-\frac{2}{3}$

Exercício 5:

a) $\frac{11}{6}$

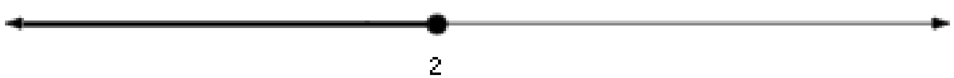
b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{41}{135}$

Respostas

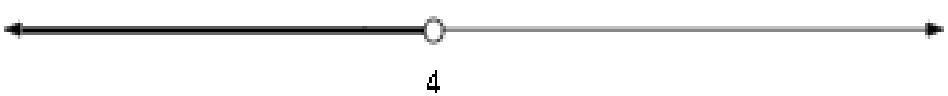
Exercício 6:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

Exercício 7:

a) $\{x \in \mathbb{R} | -4 \leq x \leq 2\}$ ou $[-4, 2]$

b) $\{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$ ou $(1, +\infty)$

c) $\{x \in \mathbb{R} | -3 < x < 3\}$ ou $(-3, 3)$

d) $\{x \in \mathbb{R} | 0 < x \leq 2\}$ ou $(0, 2]$

e) $\{x \in \mathbb{R} | x \leq 1\}$ ou $(-\infty, 1]$

Respostas

Exercício 8:

a) $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ $\{x \in \mathbb{R} | 3 \leq x \leq 4\}$ ou $[3, 4]$

$\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ $\{x \in \mathbb{R} | 2 \leq x \leq 6\}$ ou $[2, 6]$

$\mathrm{A} - \mathrm{B}$ $\{x \in \mathbb{R} | 2 \leq x < 3\}$ ou $[2, 3)$

$\mathrm{B} - \mathrm{A}$ $\{x \in \mathbb{R} | 4 < x \leq 6\}$ ou $(4, 6]$

b) $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ $\{x \in \mathbb{R} | x < 1\}$ ou $(-\infty, 1)$

$\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ $\{x \in \mathbb{R} | x < 4\}$ ou $(-\infty, 4)$

Exercício 9:

$\{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 3\}$ ou $[1,3]$, portanto $1 \in (A \cap B) - (C - D)$.

Exercício 10:

a) $\frac{115}{12}$

b) $\frac{159}{80}$

c) $-\frac{5}{12}$

d) $\frac{4}{5}$

e) $\frac{491}{50}$

f) $\frac{54}{5}$

g) $-\frac{25}{4}$

h) $-\frac{237}{28}$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA

O GAMA possui monitorias de:

- **Matemática Elementar, Cálulo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e equivalentes)
  - **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
    - **Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3** (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino

Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Apoio ao Cálculo

Aula 02

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Potências em $\mathbb{R}$

Dados $a \in \mathbb{R}^*$ e $n \in \mathbb{N}$, definimos a potência enésimacomo:

Expoente

$$\underset{\text{Base}}{a}^{n} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \; \ldots \; \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^0 = 1$$

Exemplo: Calcule as seguintes potências

(a) 2^3 (b) 5^{-2} (c) 3^0

Solução: Utilizando a definição de potência, tem-se:

(a) $2^3 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ fatores}} = 8$ (b) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{\underbrace{5 \cdot 5}_{2 \text{ fatores}}} = \frac{1}{25}$ (c) $3^0 = 1$

Propriedades das potências

Produto de potências de mesma base

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Exemplo:

$$2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$$

Exemplo:

$$3^{2a} \cdot 3^5 = 3^{2a+5}$$

Quociente de potências de mesma base

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Exemplo: $$\frac{3^5}{3^3} = 3^{5-3} = 3^2$$

Exemplo: $$\frac{a^{5+b}}{a^c} = a^{5+b-c}$$

Potência de potência

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Exemplo:

$$(5^3)^4 = 5^{3\cdot 4} = 5^{12}$$

Exemplo:

$$(a^2)^{2b} = a^{2\cdot 2b} = a^{4b}$$

Fração com expoente negativo

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

Exemplo: $$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

Exemplo: $$\left(\frac{1}{b}\right)^{-3} = b^3$$

Propriedades das potências

Produto de potências de mesmo expoente

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

Exemplo:

$$2^5 \cdot 3^5 = (2 \cdot 3)^5 = 6^5$$

Exemplo:

$$4 \cdot a^2 = (2 \cdot a)^2$$

Potência de base negativa e expoente par

$$(-a)^n = a^n$$

Exemplo:

$$(-2)^6 = 2^6 = 64$$

Exemplo:

$$(-2x)^2 = (2x)^2 = 4 \cdot x^2$$

Quociente de potências de mesmo expoente

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

Exemplo: $\frac{2^7}{5^7} = \left(\frac{2}{5}\right)^7$

Exemplo: $\frac{b^3}{27} = \left(\frac{b}{3}\right)^3$

Potência de base negativa e expoente ímpar

$$(-a)^n = -a^n$$

Exemplo:

$$(-2)^5 = -2^5 = -32$$

Exemplo: $\left(-\frac{1}{2a}\right)^3 = -\frac{1}{8a^3}$

Potências em $\mathbb{R}$

Exemplo: Calcule as seguintes potências

(a) $(-3)^4$ (b) $(-2)^5$ (c) $\left(\frac{1}{5}\right)^3$ (d) $\left(\frac{5}{2}\right)^0$ (e) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2}$ (f) $(2^4)^3$

Solução: Utilizando as propriedades de potência, tem-se:

(a) $(-3)^4 = 3^4 = 81$

(b) $(-2)^5 = -2^5 = -32$

(c) $\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1^3}{5^3} = \frac{1}{125}$

(d) $\left(\frac{5}{2}\right)^0 = 1$

(e) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{7^2}{2^2} = \frac{49}{4}$

(f) $(2^4)^3 = 2^{12} = 4096$

Potências de Base 10

Com o uso do sistema numérico decimal, as potências de base 10 são particularmente importantes! Note que:

Potência 2

$$10^2 = \overbrace{1\,00}^{2\text{ zeros}}$$

Potência 3

$$10^3 = \overbrace{1.000}^{3\text{ zeros}}$$

Potência 4

$$10^4 = \overbrace{10.000}^{4\text{ zeros}}$$

Potência 5

$$10^5 = \overbrace{100.000}^{5\text{ zeros}}$$

Potência -1

$$10^{-1} = \overbrace{0,1}^{1\text{ zero}}$$

Potência -2

$$10^{-2} = \overbrace{0,01}^{2\text{ zeros}}$$

Potência -3

$$10^{-3} = \overbrace{0,001}^{3\text{ zeros}}$$

Potência -4

$$10^{-4} = \overbrace{0,0001}^{4\text{ zeros}}$$

No caso geral:

Expoente positivo

Potência n

$$10^n = \overbrace{100 \ldots 0}^{n\text{ zeros}}$$

Expoente negativo

Potência $-n$

$$10^{-n} = \overbrace{0,0 \ldots 01}^{n\text{ zeros}}$$

Potências de Base 10

No geral, quando multiplicamos um número decimal por uma potência 10^n, onde n é um número inteiro, podemos dizer que,

"a vírgula anda n casas para a esquerda ou n casas para a direita"

de acordo com o sinal do expoente n.

✓ Se n é positivo, a vírgula se desloca n unidades para a direita;

✓ Se n é negativo, a vírgula se desloca $|n|$ unidades para a esquerda;

Exemplo: Efetue os seguintes produtos:

(a) $(12{,}5) \cdot 10^4$ (b) $(12{,}5) \cdot 10^{-4}$

Solução:

(a) $$(12{,}5) \cdot 10^4 = (12{,}50000000\ldots) \cdot 1\overbrace{0.000}^{4\text{ zeros}} = 125.000.$$

"A vírgula se desloca 4 casas para a direita"

(b) $$(12{,}5) \cdot 10^{-4} = (\ldots 00000012{,}5) \cdot \overbrace{0{,}000}^{4\text{ zeros}}1 = 0{,}00125.$$

"A vírgula se desloca 4 casas para a esquerda"

Unidades de medida

Prefixos das principais unidades de medida

Potências	Prefixo	Símbolo	metro (m)	grama (g)	litro (l)
10^{12}	*Tera*	T	Tm	Tg	Tl
10^{9}	*Giga*	G	Gm	Gg	Gl
10^{6}	*Mega*	M	Mm	Mg	Ml
10^{3}	*Kilo*	k	km	kg	kl
10^{2}	*Hecto*	h	hm	hg	hl
10	*Deca*	da	dam	dag	dal
10^{0}			m	g	l
10^{-1}	*Deci*	d	dm	dg	dl
10^{-2}	*Centi*	c	cm	cg	cl
10^{-3}	*Mili*	m	mm	mg	ml
10^{-6}	*Micro*	μ	μm	μg	μl
10^{-9}	*Nano*	n	nm	ng	nl
10^{-12}	*Pico*	ρ	ρm	ρg	ρl

Unidades de medida

Comprimento: a unidade padrão é o metro.

Quilômetro	Hectômetro	Decâmetro	Metro	Decímetro	Centímetro	Milímetro
km	hm	dam	m	dm	cm	mm
$10^3 m$	$10^2 m$	$10^1\, m$	$10^0 m$	$10^{-1} m$	$10^{-2} m$	$10^{-3} m$
$1.000m$	$100m$	$10m$	$1m$	$0{,}1m$	$0{,}01m$	$0{,}001m$

Múltiplos

Submúltiplos

Conversões

Da direita para a esquerda, divide-se por 10 em cada passo

$\div\, 10$ $\div\, 10$ $\div\, 10$ $\div\, 10$ $\div\, 10$ $\div\, 10$

km	hm	dam	m	dm	cm	mm

$\cdot\, 10$ $\cdot\, 10$ $\cdot\, 10$ $\cdot\, 10$ $\cdot\, 10$ $\cdot\, 10$

Da esquerda para a direita, multiplica-se por 10 em cada passo

Conversões de unidades de medida

Exemplo: Converta:

(a) $5{,}2$ hectômetros para centímetros

(b) 130 milímetros para metros

Solução:

(a)

Unidade informada ↓ (hm)

Unidade pretendida ↓ (cm)

km	hm	dam	m	dm	cm	mm

$hm \xrightarrow{\cdot 10} dam \xrightarrow{\cdot 10} m \xrightarrow{\cdot 10} dm \xrightarrow{\cdot 10} cm$

Hectômetros		Centímetros
$5{,}2$	$\longleftrightarrow$	$(5{,}2)\cdot 10^4$
$5{,}2$	$\longleftrightarrow$	$(5{,}2)\cdot 10.000$
$5{,}2$	$\longleftrightarrow$	52.000

Resposta: $5{,}2$ hectômetros equivalem a 52.000 centímetros

Conversões de unidades de medida

Exemplo: Converta:

(a) $5{,}2$ hectômetros para centímetros

(b) 130 milímetros para metros

Solução:

(b)

$\div 10$ $\div 10$ $\div 10$

km	hm	dam	m	dm	cm	mm

Unidade pretendida

Unidade informada

Milímetros		Metros
130	$\longleftrightarrow$	$130 \cdot 10^{-3}$
130	$\longleftrightarrow$	$130 \cdot 0{,}001$
130	$\longleftrightarrow$	$0{,}13$

Resposta: 130 milímetros equivalem a $0{,}13$ metros.

Conversões de unidades de área e volume

Conversão de área

$\div 10^2$ $\div 10^2$ $\div 10^2$ $\div 10^2$ $\div 10^2$ $\div 10^2$

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2

$\cdot 10^2$ $\cdot 10^2$ $\cdot 10^2$ $\cdot 10^2$ $\cdot 10^2$ $\cdot 10^2$

Conversão de volume

$\div 10^3$ $\div 10^3$ $\div 10^3$ $\div 10^3$ $\div 10^3$ $\div 10^3$

km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3

$\cdot 10^3$ $\cdot 10^3$ $\cdot 10^3$ $\cdot 10^3$ $\cdot 10^3$ $\cdot 10^3$

Conversões de unidades de medida

Exemplo: Converta:

(a) $1500m^2$ para km^2

(b) $230dam^3$ para mm^3

Solução:

(a)

$\div 10^2$ $\div 10^2$ $\div 10^2$

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2

Unidade pretendida

Unidade informada

Metros quadrados		Quilômetros quadrados
1500	$\longleftrightarrow$	$1500 \cdot 10^{-6}$
1500	$\longleftrightarrow$	$1500 \cdot 0{,}000001$
1500	$\longleftrightarrow$	$0{,}0015$

Resposta: 1500 metros quadrados equivalem a $0{,}0015$ quilômetros quadrados.

Conversões de unidades de medida

Exemplo: Converta:

(a) $1500m^2$ para km^2 (b) $230dam^3$ para mm^3

Solução:

(b)

		Unidade informada				Unidade pretendida
km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3

$$dam^3 \xrightarrow{\cdot 10^3} m^3 \xrightarrow{\cdot 10^3} dm^3 \xrightarrow{\cdot 10^3} cm^3 \xrightarrow{\cdot 10^3} mm^3$$

Decâmetros Cúbicos		Milímetros Cúbicos
230	$\longleftrightarrow$	$230 \cdot 10^{12}$
230	$\longleftrightarrow$	$230 \cdot 1000000000000$
230	$\longleftrightarrow$	$230.000.000.000.000$

Resposta: 230 decâmetros cúbicos equivalem a $230.000.000.000.000$ milímetros cúbicos.

Exercícios Propostos

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Exercícios

1) Calcule as seguintes potências:

(a) $(-2)^3$

(b) $(-2)^2$

(c) -2^2

(d) 2^{-2}

(e) $(-2)^{-2}$

(f) -3^{-3}

(g) 3^{2^3}

(h) $(3^2)^3$

2) Calcule as seguintes potências:

(a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$

(b) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$

(c) $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$

(d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

(e) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$

(f) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$

(g) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$

(h) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$

3) Efetue os seguintes produtos:

(a) $25 \cdot 10^5$

(b) $(3{,}2) \cdot 10^4$

(c) $(0{,}041) \cdot 10^2$

(d) $(0{,}0243) \cdot 10^7$

(e) $3 \cdot 10^{-2}$

(f) $452 \cdot 10^{-5}$

(g) $(7{,}02) \cdot 10^{-3}$

(h) $224{,}5 \cdot 10^{-1}$

Exercícios

4) Efetue as seguintes conversões:

(a)512 hectômetros para metros;

(b) 1255decímetros para decâmetros;

(c) $1{,}2$quilômetros para centímetros;

(d) $0{,}230$decâmetros para decímetros;

(e) $(1{,}7) \cdot 10^5$milímetros para metros;

(f) 1200metros quadrados para hectômetros quadrados;

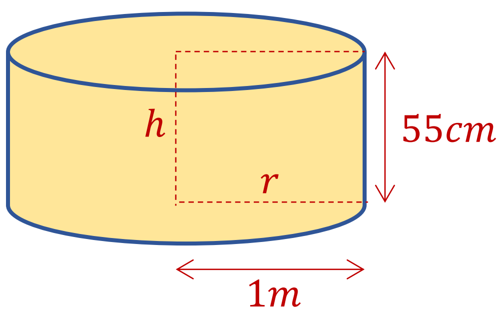
(g) $1{,}25$ decâmetros quadrados para metros quadrados;

(h) $3{,}42$metros cúbicos para decímetros cúbicos;

Exercícios

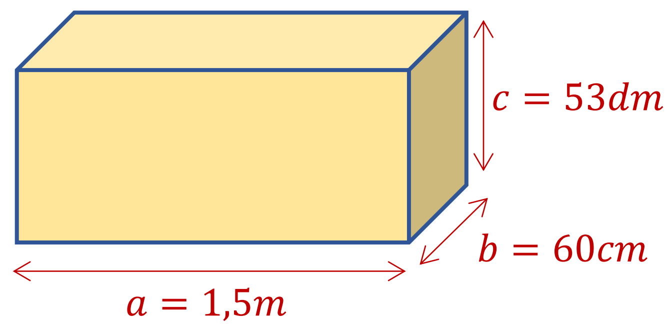
5) O **metro cúbico,** no Sistema Internacional de Unidade (SI), é a unidade fundamental para o cálculo do volume/capacidade. Sabendo que 1 litro equivale a 1 decímetro cúbico, determine a capacidade, em litros, dos seguintes reservatórios:

(a)

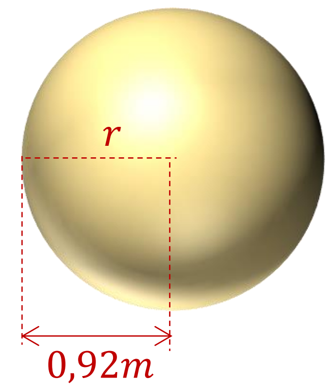


Utilizar $\pi \cong 3{,}14$

(b)



(c)



Utilizar $\pi \cong 3{,}14$

Exercícios

6) Calcule as seguintes potências:

(a) $3^5 . 3^{-3}$

(b) $(-5)^{2^3}$

(c) $(-4)^{2+5}$

(d) $(-\frac{1}{3})^4$

(e) $\left((-5)^2\right)^3$

(f) $(-5^2)^3$

(g) $\left(\left(-\frac{1}{5}\right)^3\right)^{2-3}$

(h) $\left(\frac{2^3}{5}\right)^3$

(i) $((-6)^3)^5 . (-216)^{-7+2}$

(j) $\left(\frac{5^3}{5^6}\right)$

Exercícios

7) Calcule os seguintes produtos:

(a) $3{,}75\ .\ 10^3$

(b) $49.10^3.\ 0{,}1.10^{-1}$

(c) $0{,}005.10^2$

(d) $10007{,}06.10^{-3}$

(e) $0{,}1005.10^4$

(f) $65345{,}7.10^{-5}$

(g) $0{,}120005.10^1$

(h)$0{,}007.10^{-2}$

(i) $2{,}504.10^7$

(j) 679.10^{-1}

8) Efetue as conversões de unidades como solicitado em cada letra:

(a) $25.10^{-3}\ hm\ \rightarrow m$

(b) $0{,}0000012Tm\ \rightarrow m$

(c) $2005\ cm\ \rightarrow km$

(d) $2\ dam\ \rightarrow cm$

(e) $37.10^3\ mm\ \rightarrow dm$

(f) $1.10^9\ pm\ \rightarrow \mu m$

(g) $342\ \mu m^2 \rightarrow nm^2$

(h) $100\ km^3\ \rightarrow m^3$

(i) $49.10^6\ Mm\ \rightarrow Gm$

(j) $999{,}8\ hm\ \rightarrow dam$

Exercícios

9) Sabendo que 1L (um litro) equivale a $1dm^3$, quantos litros possui um reservatório d'água de $50m^3$? Foram consumidos $25000cm^3$ de água do reservatório. Quantos litros restaram?

Respostas

Exercício 1:

a) -8

b) 4

c) -4

d) $\frac{1}{4}$

e) $\frac{1}{4}$

f) $-\frac{1}{27}$

g) 6561

h) 729

Exercício 2:

a) $\frac{8}{27}$

b) $-\frac{27}{64}$

c) $\frac{9}{16}$

d) $\frac{9}{4}$

e) $\frac{2}{3}$

f) 64

g) $-\frac{27}{8}$

h) 9

Exercício 3:

a) 2500000

b) 32000

c) $4{,}1$

d) 243000

e) $0{,}03$

f) $0{,}00452$

g) $0{,}00702$

h) $22{,}45$

Exercício 4:

a) 51.200

b) $12{,}55$

c) 120.000

d) 23

e) 170

f) $0{,}12$

g) 125

h) 3.420

Exercício 5:

a) Volume $\cong$ $1.727\ litros$

b) Volume $\cong$ $4.770\ litros$

c) Volume $\cong$ $3.260{,}11\ litros$

Exercício 6:

a) 9

b) 390625

c) -16384

d) $\frac{1}{81}$

e) 15625

f) -15625

g) -125

h) $\frac{512}{125}$

i) 1

j) $\frac{1}{125}$

Respostas

Exercício 7:

a) 3750

b) 490

c) $0,5$

d) $10,00706$

e) 1005

f) $0,653457$

g) $1,20005$

h) $0,00007$

i) 25040000

j) $67,9$

Exercício 8:

a) $2,5\ m$

b) $1200000\ m$

c) $0,02005\ km$

d) $2000\ cm$

e) $370\ dm$

f) $1000\ \mu m$

g) $342.10^6\ nm^2$

h) $1.10^{11}\ m^3$

i) $49.10^3\ Gm$

j) $9998\ dam$

Exercício 9:

$50000\ litros, 49975\ litros.$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA

O GAMA possui monitorias de:

- **Matemática Elementar, Cálulo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e equivalentes)
  - **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
    - **Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3** (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino

Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Apoio ao Cálculo

Aula 03

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Raízesem $\mathbb{R}$

Dados $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$, definimos a **raiz enésima**como:

Índice

$$\sqrt[n]{b} = a \quad \text{se, e somente se,} \quad a^n = b.$$

Radicando

Propriedades das Raízes

Raiz como expoente fracionário

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Exemplo:

$$\sqrt{6} = 6^{\frac{1}{2}}$$

Exemplo:

$$\sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$$

Potência de raiz

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Exemplo:

$$(\sqrt{x})^6 = \sqrt{x^6}$$

Exemplo:

$$\left(\sqrt[5]{3}\right)^2 = \sqrt[5]{9}$$

Produto de raízes de mesmo índice

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Exemplo:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10}$$

Exemplo:

$$\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{2b}$$

Raiz de raiz

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Exemplo:

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[12]{2}$$

Exemplo:

$$\sqrt[5]{\sqrt{x}} = \sqrt[10]{x}$$

Quociente de raízes de mesmo índice

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Exemplo:

$$\frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[4]{\frac{6}{5}}$$

Exemplo:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$$

Raízes em $\mathbb{R}$

Exemplo: Calcule:

(a) $\sqrt{1024}$ (b) $\sqrt[5]{32}$ (c) $(-8)^{\frac{1}{3}}$ (d) $16^{\frac{3}{2}}$ (e) $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}$

Solução: Utilizando a definição de raiz e suas propriedades, tem-se:

(a) $\sqrt{1024} = \sqrt{2^{10}} = 2^{\frac{10}{2}} = 2^5 = 32$

(b) $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

(c) $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

(d) $16^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{16^3} = \sqrt{(2^4)^3} = \sqrt{2^{12}} = 2^{\frac{12}{2}} = 2^6 = 64$

(e) $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}} = (81)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

Raízes em $\mathbb{R}$

Exemplo: Simplifique ao máximo:

(a) $\sqrt{24}$ (b) $\sqrt[3]{32}$ (c) $\sqrt[4]{512}$

Solução: Utilizando a definição de raiz e suas propriedades, tem-se:

(a) $\sqrt{24} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{2 \cdot 3} = 2\sqrt{6}$

(b) $\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^2} = 2\sqrt[3]{4}$

(c) $\sqrt[4]{512} = \sqrt[4]{2^9} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2^4 \cdot 2} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{2} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt[4]{2} = 4\sqrt[4]{2}$

Racionalização

Racionalizar uma fração *significa* multiplicar e dividir a fração por um fator racionalizante de modo a simplificar as raízes do denominador.

Os casos mais comuns de racionalização são os seguintes:

Caso 1: o denominador é uma raiz quadrada.

Neste caso, o fator racionalizante é a própria raiz quadrada que aparece no denominador.

Exemplo	Fator	Forma racionalizada
$\frac{1}{\sqrt{a}}$	$\sqrt{a}$	$\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^2}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{2}{\sqrt{6}}$	$\sqrt{6}$	$\frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6^2}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Racionalização

Caso 2: o denominador é uma raiz de índice n.

Neste caso, se no denominador há a raiz $\sqrt[n]{a^m}$, o fator racionalizante será $\sqrt[n]{a^{n-m}}$.

Exemplo	Fator	Forma racionalizada
$\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$	$\sqrt[n]{a^{n-m}}$	$\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \cdot \dfrac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}} = \dfrac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^n}} = \dfrac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$
$\dfrac{1}{\sqrt[5]{7^2}}$	$\sqrt[5]{7^3}$	$\dfrac{1}{\sqrt[5]{7^2}} \cdot \dfrac{\sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^3}} = \dfrac{\sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^5}} = \dfrac{\sqrt[5]{7^3}}{7} = \dfrac{\sqrt[5]{343}}{7}$
$-\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$	$\sqrt[3]{2^2}$	$-\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = -\dfrac{3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = -\dfrac{3\sqrt[3]{4}}{2}$
$\dfrac{5}{\sqrt[4]{8}}$	$\sqrt[4]{2}$	$\dfrac{5}{\sqrt[4]{8}} = \dfrac{5}{\sqrt[4]{2^3}} = \dfrac{5}{\sqrt[4]{2^3}} \cdot \dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}} = \dfrac{5\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^4}} = \dfrac{5\sqrt[4]{2}}{2}$

Racionalização

Caso 3: o denominador é uma soma/diferença envolvendo uma raiz quadrada.
Neste caso, o fator racionalizante será o "conjugado" do denominador.

Exemplo	Fator	Forma racionalizada
$\frac{1}{\sqrt{a}+b}$	$\sqrt{a}-b$	$\frac{1}{\sqrt{a}+b}\cdot\frac{\sqrt{a}-b}{\sqrt{a}-b}=\frac{\sqrt{a}-b}{(\sqrt{a})^2-\sqrt{a}\cdot b+\sqrt{a}\cdot b-b^2}=\frac{\sqrt{a}-b}{a-b^2}$
$\frac{1}{\sqrt{a}-b}$	$\sqrt{a}+b$	$\frac{1}{\sqrt{a}-b}\cdot\frac{\sqrt{a}+b}{\sqrt{a}+b}=\frac{\sqrt{a}+b}{(\sqrt{a})^2-\sqrt{a}\cdot b+\sqrt{a}\cdot b-b^2}=\frac{\sqrt{a}+b}{a-b^2}$
$\frac{3}{\sqrt{2}+1}$	$\sqrt{2}-1$	$\frac{3}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}=\frac{3(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2})^2-\sqrt{2}+\sqrt{2}-(1)^2}=\frac{3\sqrt{2}-3}{2-1}=3\sqrt{2}-3$
$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}-2}$	$\sqrt{7}+2$	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}-2}\cdot\frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}+2}=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7})^2-2\sqrt{7}+2\sqrt{7}-(2)^2}=\frac{\sqrt{35}+2\sqrt{5}}{3}$
$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$	$\sqrt{3}+\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-\sqrt{2}\sqrt{3}+-\sqrt{2}\sqrt{3}-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$

Racionalização

Exemplo: Racionalize as frações:

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{2}{3\sqrt{5}}$ (c) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$ (d) $\frac{2}{\sqrt[5]{9}}$ (e) $\frac{1}{3-\sqrt{2}}$ (f) $\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

Solução:

(a)

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(b)

$$\frac{2}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{3\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{3\cdot\sqrt{25}} = \frac{2\sqrt{5}}{3\cdot 5} = \frac{2\sqrt{5}}{15}.$$

(c)

$$\frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{2\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{2\sqrt[3]{2^2}}{2} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}.$$

(d)

$$\frac{2}{\sqrt[5]{9}} = \frac{2}{\sqrt[5]{3^2}} = \frac{2}{\sqrt[5]{3^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^3}} = \frac{2\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{2\sqrt[5]{3^3}}{3} = \frac{2\sqrt[5]{27}}{3}.$$

Racionalização

Exemplo: Racionalize as frações:

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\dfrac{2}{3\sqrt{5}}$ (c) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}$ (d) $\dfrac{2}{\sqrt[5]{9}}$ (e) $\dfrac{1}{3-\sqrt{2}}$ (f) $\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

Solução:

(e)

$$\frac{1}{3-\sqrt{2}} = \frac{1}{3-\sqrt{2}} \cdot \frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \frac{3+\sqrt{2}}{3^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3+\sqrt{2}}{9-2} = \frac{3+\sqrt{2}}{7}.$$

(f)

$$\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2})}{1^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}-2}{-1} = 2-\sqrt{2}.$$

Exercícios Propostos

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Exercícios

1) Simplifique os radicais.

(a) $\sqrt{576}$ (b) $\sqrt[3]{64}$ (c) $\sqrt{12}$ (d) $\sqrt[3]{2^7}$

2) Reduza os radicais a seguir e efetue as operações indicadas em cada caso.

(a) $\sqrt{2} - \sqrt{8}$

(b) $\sqrt{3} - 2\sqrt{12} + \sqrt{27}$

(c) $\sqrt{125} + \sqrt{20} - \sqrt{45}$

(d) $\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{250} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16}$

3) Calcule cada produto abaixo:

(a) $\left(2\sqrt{5} + 8\right)\left(\sqrt{5} - 1\right)$

(b) $\left(-5 + 3\sqrt{2}\right)\left(4 - \sqrt{2}\right)$

(c) $\left(\sqrt{6} - 2\right)\left(9 - \sqrt{6}\right)$

(d) $\left(1 - 2\sqrt{7}\right)\left(1 + 2\sqrt{7}\right)$

4) Calcule o valor numérico da expressão

$$8^{\frac{1}{2}} + \sqrt[4]{4} + \sqrt[6]{8} - 32^{\frac{1}{2}} + 128^{\frac{1}{2}} - \sqrt{32}$$

Exercícios

5) Efetue as operações com as raízes

(a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$

(b) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{6}$

(c) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{18}$

(d) $\sqrt{6} \div \sqrt{3}$

6) Introduza cada expressão a seguir em um só radical:

(a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{5}$

(b) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{2}$

(c) $\sqrt[3]{40} \div \sqrt{2}$

(d) $\sqrt{8} \div \sqrt[3]{16}$

7) Determine o valor de x na expressão

$$x = \sqrt{7 + \sqrt[3]{6 + \sqrt[4]{16}}}$$

Exercícios

8) Racionalize as frações abaixo:

(a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (b) $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ (c) $\frac{\sqrt{x}}{y\sqrt{y}}$

9) Racionalize as frações abaixo:

(a) $\frac{3}{\sqrt[3]{3}}$ (b) $\frac{2}{\sqrt[4]{8}}$ (c) $\frac{xy}{\sqrt[5]{x^2y^3}}$

10) Racionalize as frações abaixo:

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

(b) $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$

(c) $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}$

(d) $\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}$

Exercícios

11) Simplifique os radicais.

(a) $\sqrt{24}$ (b) $\sqrt{75}$ (c) $\sqrt[3]{250}$ (d) $\sqrt[5]{-972}$

12) Reduza os radicais e calcule o valor numérico das expressões.

(a) $\sqrt{3}+\sqrt{48}$

(b) $3\sqrt{32}+2\sqrt{8}-2\sqrt{18}$

(c) $\sqrt{28}-10\sqrt{7}$

(d) $6\sqrt{3}+\sqrt{75}$

(e) $\sqrt{98}+5\sqrt{18}$

(f) $\sqrt{75}-2\sqrt{12}+\sqrt{27}$

(g) $\sqrt{12}-9\sqrt{3}+\sqrt{75}$

(h) $5\sqrt{180}+\sqrt{245}-17\sqrt{5}$

13) Efetue as operações com raízes:

(a) $\sqrt{2}.\sqrt{7}$ (b) $\sqrt[3]{5}.\sqrt[3]{10}$ (c) $\sqrt[3]{30}\div\sqrt[3]{10}$

(d) $\sqrt[4]{15}\div\sqrt[4]{5}$ (e) $\left(\sqrt{2}-2\right).(3-\sqrt{2})$

(f) $\left(7\sqrt{7}+1\right).(\sqrt{7}-1)$

Exercícios

14) Para cada expressão reduza a um só radical.

(a) $\sqrt{2}.\sqrt[3]{16}$

(b) $\sqrt{5}.\sqrt[3]{15}$

(c) $\sqrt[3]{25} \div \sqrt[4]{2}$

(d) $\sqrt[3]{10} \div \sqrt[5]{3}$

15) Racionalize as frações abaixo:

(a) $\frac{5}{\sqrt{3}}$

(b) $\frac{2}{\sqrt{18}}$

(c) $\frac{1}{10\sqrt{7}}$

(d) $\frac{5}{\sqrt[5]{25}}$

(e) $\frac{1}{\sqrt{3}+5}$

(f) $\frac{2}{2\sqrt{2}-1}$

Respostas

Exercício 1:

a) 24

b) 4

c) $2\sqrt{3}$

d) $4\sqrt[3]{2}$

Exercício 2:

a) $-\sqrt{2}$

b) 0

c) $4\sqrt{5}$

d) $10\sqrt[3]{2}$

Exercício 3:

a) $2 + 6\sqrt{5}$

b) $17\sqrt{2} - 26$

c) $11\sqrt{6} - 24$

d) -27

Exercício 4:

$4\sqrt{2}$

Exercício 5:

a) 6

b) $2\sqrt[3]{3}$

c) 6

d) $\sqrt{2}$

Exercício 6:

a) $\sqrt[6]{3^3 5^2}$

b) $\sqrt[12]{2^{11}}$

c) $\sqrt[6]{2^3 5^2}$

d) $\sqrt[6]{2}$

Exercício 7:

$x = 3$

Exercício 8:

a) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

c) $\dfrac{\sqrt{xy}}{y^2}$

Exercício 9:

a) $\sqrt[3]{9}$

b) $\sqrt[4]{2}$

c) $\sqrt[5]{x^3 y^2}$

Exercício 10:

a) $\sqrt{2} + 1$

b) $\dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$

c) $\dfrac{-3\sqrt{2} - 4}{2}$

d) $\dfrac{4 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{2}$

Exercício 11:

a) $2\sqrt{6}$

b) $5\sqrt{3}$

c) $5\sqrt[3]{2}$

d) $-3\sqrt[5]{4}$

Respostas

Exercício 12:

a) $5\sqrt{3}$

b) $10\sqrt{2}$

c) $-8\sqrt{7}$

d) $11\sqrt{3}$

e) $22\sqrt{2}$

f) $4\sqrt{3}$

g) $-2\sqrt{3}$

h) $20\sqrt{5}$

Exercício 13:

a) $\sqrt{14}$

b) $\sqrt[3]{50}$

c) $\sqrt[3]{3}$

d) $\sqrt[4]{3}$

e) $5\sqrt{2} - 8$

f) $-6\sqrt{7} + 48$

Exercício 14:

a) $\sqrt[6]{2^3 . 16^2}$

b) $\sqrt[6]{5^3 . 15^2}$

c) $\sqrt[12]{\frac{25^4}{2^3}}$

d) $\sqrt[15]{\frac{10^5}{3^3}}$

Exercício 15:

a) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{\sqrt{18}}{9}$

c) $\frac{\sqrt{7}}{70}$

d) $\sqrt[5]{125}$

e) $\frac{-\sqrt{3}+5}{22}$

f) $\frac{4\sqrt{2}+2}{7}$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA

O GAMA possui monitorias de:

- **Matemática Elementar, Cálulo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e equivalentes)
  - **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
    - **Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3** (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino

Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Apoio ao Cálculo

Aula 04

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Fatoração

De maneira geral, fatorar uma expressão significa escreve-la como um produto de dois ou mais fatores.

Estudaremos a seguir os casos mais comuns de fatoração de expressões algébricas.

Fatoração por fator comum em evidência

$$mx \pm my = m(x \pm y)$$

Prova da fórmula:

$$m(x + y) = mx + my$$

Exemplo: Fatore as seguintes expressões:

(a) $7x + 7y$ (b) $10m - 25n$ (c) $2m - 4n + 10$ (d) $x^5 + 3x^2$

Solução:

(a) $7x + 7y = 7(x + y)$

(b) $10m - 25n = 5(2m - 5n)$

(c) $2m - 4n + 10 = 2(m - 2n + 5)$

(d) $x^5 + 3x^2 = x^2(x^3 + 3)$

Fatoração

Fatoração por agrupamento

$$mx + my + nx + ny = (m+n)(x+y)$$

Prova da fórmula:

$$(m+n)(x+y) = mx + my + nx + ny$$

Exemplo: Fatore as seguintes expressões:

(a) $xy + 2x + 5y + 10$

(b) $2xy^2 + 4xy - 6y^2 - 12y$

Solução:

(a)

$$xy + 2x + 5y + 10$$

$$= x(y+2) + 5(y+2) = (x+5)(y+2)$$

(b)

$$2xy^2 + 4xy - 6y^2 - 12y = 2[xy^2 + 2xy - 3y^2 - 6y]$$

$$= 2[x(y^2+2y) - 3(y^2+2y)]$$

$$= 2(x-3)(y^2+2y) = 2y(x-3)(y+2).$$

Produtos notáveis

Primeiro caso de produtos notáveis:

Quadrado da soma de dois termos

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Prova da fórmula:

$$(x+y)^2 = (x+y)\cdot(x+y) = x^2 + \underbrace{xy + yx}_{2xy} + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

quadrado da soma de dois termos

quadrado do primeiro

mais duas vezes o produto do primeiro pelo segundo

quadrado do segundo

Exemplo: Fatore as seguintes expressões:

(a) $x^2 + 4x + 4$ (b) $x^2 + 6xy + 9y^2$ (c) $4m^2 + 28m + 49$

Solução:

(a) $x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2x(2) + 2^2 = (x+2)^2$.

(b) $x^2 + 6xy + 9y^2 = x^2 + 2x(3y) + (3y)^2 = (x+3y)^2$.

(c) $4m^2 + 28m + 49 = (2m)^2 + 2(2m)(7) + (7)^2 = (2m+7)^2$.

Produtos notáveis

Segundo caso de produtos notáveis:

Quadrado da diferença de dois termos

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Prova da fórmula:

$$(x-y)^2 = (x-y)\cdot(x-y) = x^2 \underbrace{- xy - yx}_{-2xy} + y^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

quadrado da diferença de dois termos

quadrado do primeiro

menos duas vezes o produto do primeiro pelo segundo

quadrado do segundo

Exemplo: Fatore as seguintes expressões:

(a) $x^2 - 6x + 9$ (b) $x^2 - 4xy + 4y^2$ (c) $x^2 - 2x\sqrt{3} + 3$

Solução:

(a) $x^2 - 6x + 9 \;= x^2 - 2x(3) + 3^2 = (x-3)^2.$

(b) $x^2 - 4xy + 4y^2 \;= x^2 - 2x(2y) + (2y)^2 = (x-2y)^2.$

(c) $x^2 - 2x\sqrt{3} + 3 \;= x^2 - 2x\left(\sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(x-\sqrt{3}\right)^2.$

Produtos notáveis

Terceiro caso de produtos notáveis:

Diferença de dois quadrados

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Prova da fórmula:

$$(x+y)\cdot(x-y) = x^2 - \cancel{xy} + \cancel{yx} - y^2 = x^2 - y^2$$

Produto da soma pela diferença de dois termos

quadrado do primeiro

quadrado do segundo

Exemplo: Fatore as seguintes expressões:

(a) $x^2 - 9$ (b) $4y^2 - 25$ (c) $m^4 - 4$

Solução:

(a) $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$.

(b) $4y^2 - 25 = (2y+5)(2y-5)$.

(c) $m^4 - 4 = (m^2+2)(m^2-2) = (m^2+2)\left(m+\sqrt{2}\right)\left(m-\sqrt{2}\right)$.

Produtos notáveis

Quarto caso de produtos notáveis:

Diferença de dois cubos

$$x^3 - y^3 = (x - y).(x^2 + xy + y^2)$$

Prova da fórmula:

$$(x - y).(x^2 + xy + y^2) = x^3 + \cancel{x^2y} + \cancel{xy^2} - \cancel{yx^2} - \cancel{xy^2} - y^3 = x^3 - y^3$$

Exemplo: Fatore as seguintes expressões:

(a) $x^3 - 27$ (b) $8n^3 - 125$ (c) $y^3 - 2$

Solução:

(a) $x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$.

(b) $8n^3 - 125 = (2n - 5)(4n^2 + 10n + 25)$.

(c) $y^3 - 2 = \left(y - \sqrt[3]{2}\right)\left(y^2 + y\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)$.

Fatoração do trinômio do segundo grau

Um importante caso de fatoração é chamado de fatoração do **trinômio de segundo grau**.

$$ax^2 + bx + c$$

(trinômio pois há três termos na expressão e de segundo grau, pois o maior expoente é dois).

Fatoração do trinômio do segundo grau

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

x_1 e x_2 são as raízes da equação de segundo grau

Lembre que, para encontrar as raízes de uma equação de segundo grau, utiliza-se a **fórmula de Bháskara**.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

fórmula de Bháskara

Fatoração do trinômio do segundo grau

Exemplo: Fatore a expressão $x^2 + 3x - 4$.

Solução: Neste caso, tem-se $a = 1$, $b = 3$ e $c = -4$.

Aplicando a fórmula de Bháskara, tem-se

$$x = \frac{-(3) \pm \sqrt{(3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm 5}{2} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{-3+5}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\[2ex] x_2 = \dfrac{-3-5}{2} = \dfrac{-8}{2} = -4 \end{cases}$$

Obtém-se duas raízes reais e distintas dadas por $x_1 = 1$ e $x_2 = -4$.

Reescrevendo o trinômio dado na forma fatorada, tem-se

$$x^2 + 3x - 4 = \underbrace{1}_{a} \cdot \underbrace{(x - 1)}_{x - x_1}\underbrace{(x + 4)}_{x - x_2} = (x - 1)(x + 4).$$

Fatoração do trinômio do segundo grau

Exemplo: Fatore a expressão $x^2 - 6x + 9$.

Solução: Neste caso, tem-se $a = 1$, $b = -6$ e $c = 9$.

Aplicando a fórmula de Bháskara, tem-se

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (9)}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm 0}{2}$$

$$x_1 = \frac{6 + 0}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{6 - 0}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Obtém-se duas raízes e idênticas $x_{1,2} = 3$.

Reescrevendo o trinômio dado na forma fatorada, tem-se

$$x^2 - 6x + 9 = \underbrace{1}_{a} \cdot \underbrace{(x - 3)}_{x - x_1}\underbrace{(x - 3)}_{x - x_2} = (x - 3)^2$$

Observação: Note que esta fatoração é um caso de trinômio quadrado perfeito.

Fatoração e produtos notáveis

Fator comum em evidência

$$mx + my = m(x + y)$$

Agrupamento

$$mx + my + nx + ny = (m + n)(x + y)$$

Fatoração por produtos notáveis

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Quadrado da soma
de dois termos

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Quadrado da diferença
de dois termos

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

Produto da soma pela diferença
de dois termos

$$x^3 - y^3 = (x - y).(x^2 + xy + y^2)$$

Diferença de dois cubos

Fatoração do trinômio do segundo grau

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

x_1 e x_2 são as raízes da equação
de segundo grau

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Fatore cada expressão algébrica:

(a) $xy - x$

(b) $25xy - 5xy^2 + 15x^2y^2$

(c) $4y^6 + 4y^5 + y + 1$

(d) $2a^3 + 6ax - 3a^2b - 9bx$

(e) $3x^2y^2 - 12xy + 12$

(f) $y^4 - 6mxy^2 + 9m^2x^2$

(g) $9a^2x^2 - 6ab^3x + b^6$

(h) $100 - x^2y^2$

(i) $ax^2 - ay^2$

(j) $25x^3 - 16x$

(k) $x^2 - x - 12$

(l) $2x^2 - 6x + 4$

Exercícios

2) Fatore cada expressão algébrica:

(a) $4x - 3xy$

(b) $xy + y^2 - y$

(c) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y$

(d) $x^2 - 81$

(e) $100 - x^2$

(f) $x^2 - \frac{4}{25}$

(g) $1 - x^2y^2$

(h) $x^{10} - 100$

(i) $4x^2 - 12xy + 9y^2$

(j) $y^2 + 10y + 25$

(k) $121x^2y^2 + 44xy + 4$

(l) $a^4 - b^4$

Respostas

Exercício 1:

a) $x(y-1)$

b) $5xy(5-y+3xy)$

c) $(y+1)(4y^5+1)$

d) $(a^2+3x)(2a-3b)$

e) $3(xy-2)^2$

f) $(y^2-3mx)^2$

g) $(3ax-b^3)^2$

h) $(10-xy)(10+xy)$

i) $a(x-y)(x+y)$

j) $x(5x-4)(5x+4)$

k) $(x+3)(x-4)$

l) $2(x-1)(x-2)$

Exercício 2:

a) $x(4-3y)$

b) $y(x+y-1)$

c) $\frac{1}{3}(x+\frac{1}{2}y)$

d) $(x+9)(x-9)$

e) $(10+x)(10-x)$

f) $(x+\frac{2}{5})(x-\frac{2}{5})$

g) $(1+xy)(1-xy)$

h) $(x^5+10)(x^5-10)$

i) $(2x-3y)^2$

j) $(y+5)^2$

k) $(11xy+2)^2$

l) $(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA

O GAMA possui monitorias de:

- **Matemática Elementar, Cálulo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e equivalentes)
  - **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
    - **Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3** (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino

Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Apoio ao Cálculo

Aula 05

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Expressões algébricas

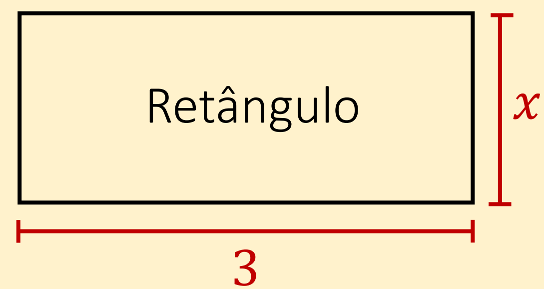
Definição: Chama-se **expressão algébrica** toda expressão na qual estão presentes letras ou símbolos que denotam grandezas genéricas ou desconhecidas, que são chamadas de incógnitas ou variáveis.

Exemplo: Considere um retângulo de base $3\ m$ e altura $x\ m$. Expresse a área e o perímetro desse retângulo.

Solução:

Neste caso, a área e o perímetro do retângulo são expressões algébricas com incógnita x.

$A = 3 \cdot x$ $\qquad$ $P = 2x + 6$



Exemplo: Se V é uma quantia de dinheiro que uma pessoa possui e o custo de um refrigerante é $R\$\ 2{,}00$ e de um pastel é $R\$\ 3{,}00$; escreva uma expressão que calcule o troco que ela receberá ao comprar x refrigerantes e y pastéis.

Solução:

$$T = V - 2x - 3y$$

Neste caso, o valor do troco é uma expressão algébrica com incógnitas V, x e y.

Valor numérico

Definição: O **valor numérico** de uma expressão algébrica é obtido quando se substitui a incógnita por um número em particular.

Exemplo: Considere a expressão algébrica:

$$y = \frac{2m - n}{n + 2}.$$

Calcule o valor numérico desta expressão para

$$m = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad n = -\frac{2}{5}.$$

Solução: Substituindo os valores atribuídos a m e n na expressão algébrica, obtém-se:

$$y = \frac{2m - n}{n + 2} = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{2}{5}\right)}{\left(-\frac{2}{5}\right) + 2} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{2}{5}}{\frac{-2 + 10}{5}} = \frac{\frac{10 + 6}{15}}{\frac{8}{5}} = \frac{16}{15} \cdot \frac{5}{8} = \frac{2}{3}.$$

Simplificação de frações algébricas

Um caso particularmente interessante de expressões algébricas são as **frações algébricas**.

Exemplo: São exemplos de frações algébricas:

(a) $\dfrac{y}{x}$ (b) $\dfrac{2}{xy}$ (c) $\dfrac{3x^2y^3}{z^3wt^5}$ (d) $\dfrac{x+y}{1+z}$ (e) $\dfrac{x^2+3xy-5}{2z-3}$

As **simplificações de frações algébricas** são efetuadas de forma similar às efetuadas com frações numéricas, ou seja, podem ser simplificados somente os fatores comuns ao numerador e ao denominador da fração.

Exemplo: Simplifique a expressão:

$$\frac{15xy^3w^2}{20x^4y}$$

Solução:

$$\frac{15xy^3w^2}{20x^4y} = \frac{3y^2w^2}{4x^3}.$$

Simplificação de frações algébricas

Em alguns casos pode ser extremamente útil utilizar fatoração e produtos notáveis para simplificar uma fração algébrica.

Exemplo: Simplifique as expressões:

(a) $\dfrac{x^2 - y^2}{4x + 4y}$ (b) $\dfrac{m^2 - 2mn + n^2}{m^2 - n^2}$ (c) $\dfrac{x^3y - 2x^2y^2}{x^2 - 4xy + 4y^2}$

Solução:

(a)

$$\frac{x^2 - y^2}{4x + 4y} = \frac{(x + y)(x - y)}{4(x + y)} = \frac{x - y}{4}.$$

(b)

$$\frac{m^2 - 2mn + n^2}{m^2 - n^2} = \frac{(m - n)(m - n)}{(m - n)(m + n)} = \frac{m - n}{m + n}.$$

(c)

$$\frac{x^3y - 2x^2y^2}{x^2 - 4xy + 4y^2} = \frac{x^2y(x - 2y)}{(x - 2y)(x - 2y)} = \frac{x^2y}{x - 2y}.$$

Multiplicação/divisão de frações algébricas

Assim como foi definida a multiplicação/divisão/potências de números racionais, efetua-se a multiplicação/divisão/potências de frações algébricas.

Exemplo. Calcule:

(a) $\dfrac{3x}{x+1} \cdot \dfrac{x-2}{3x+1}$ (b) $\dfrac{3-x}{x^2+x} \div \dfrac{2x^2}{x+1}$ (c) $\left(\dfrac{x+2}{2y}\right)^{-2}$

Solução:

(a)

$$\frac{3x}{x+1} \cdot \frac{x-2}{3x+1} = \frac{3x(x-2)}{(x+1)(3x+1)} = \frac{3x^2-6x}{3x^2+x+3x+1} = \frac{3x^2-6x}{3x^2+4x+1}.$$

(b)

$$\frac{3-x}{x^2+x} \div \frac{2x^2}{x+1} = \frac{3-x}{x^2+x} \cdot \frac{x+1}{2x^2} = \frac{3-x}{x(x+1)} \cdot \frac{x+1}{2x^2} = \frac{3-x}{2x^3}.$$

(c)

$$\left(\frac{x+2}{2y}\right)^{-2} = \left(\frac{2y}{x+2}\right)^{2} = \frac{(2y)^2}{(x+2)^2} = \frac{4y^2}{x^2+4x+4}.$$

Soma/subtração de frações algébricas

Assim como foi definida a soma/subtração de frações, efetua-se a soma/subtração de frações algébricas. Observe que o método para encontrar o mmc dos denominadores é bastante similar ao utilizado para números racionais.

Exemplo: Calcule:

(a) $\dfrac{2x-3}{x}-\dfrac{2}{3x}$ (b) $\dfrac{x+2}{2x}-\dfrac{x-1}{3x^2}+\dfrac{2x-1}{6x}$

Solução: (a) Como $mmc(x,3x)=3x$, tem-se

$$\frac{2x-3}{x}-\frac{2}{3x}=\frac{3(2x-3)-2}{3x}=\frac{6x-9-2}{3x}=\frac{6x-11}{3x}.$$

(b) Como $mmc(2x,3x^2,6x)=6x^2$, tem-se

$$\frac{x+2}{2x}-\frac{x-1}{3x^2}+\frac{2x-1}{6x}=\frac{3x(x+2)-2(x-1)+x(2x-1)}{6x^2}$$

$$=\frac{3x^2+6x-2x+2+2x^2-x}{6x^2}=\frac{5x^2+3x+2}{6x^2}.$$

Soma/subtração de frações algébricas

Exemplo. Calcule:

(a) $\dfrac{x+2}{2x}+\dfrac{3}{x-1}$ (b) $\dfrac{x+1}{x^2-4}-\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{5x-1}{3x}$

Solução:

(a) Como $mmc(2x, x-1) = 2x(x-1)$, tem-se

$$\frac{x+2}{2x}+\frac{3}{x-1}=\frac{(x+2)(x-1)+3(2x)}{2x(x-1)}=\frac{x^2+x-2+6x}{2x^2-2x}=\frac{x^2+7x-2}{2x^2-2x}.$$

(b) Como $mmc(x^2-4, x-2{,}3x) = 3x(x^2-4)$, tem-se

$$\frac{x+1}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}-\frac{5x-1}{3x}=\frac{3x(x+1)-2(3x)(x+2)-(5x-1)(x^2-4)}{3x(x^2-4)}$$

$$=\frac{3x^2+3x-6x^2-12x-5x^3+20x+x^2-4}{3x(x^2-4)}=\frac{-5x^3-2x^2+11x-4}{3x^3-12x}.$$

Exercícios Propostos

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Exercícios

1) Considere um pedaço de cartolina retangular de lados $x\ cm$ e $y\ cm$.
Deseja-se montar uma caixa, em forma de paralelepípedo retângulo, sem a tampa de cima com esta cartolina.
Para isto, de cada ponta do retângulo vai-se tirar um quadrado de lado 2 cm (estamos então considerando $x > 4$ e $y > 4$).
Com estas informações, monte a expressão que informa o volume dessa caixa.

2) Em cada caso, calcule o valor numérico:

(a) $M = 3xy - y$, para $x = -\frac{1}{2}$ e $y = -\frac{2}{5}$

(b) $M = \frac{x+2y}{y-x}$, para $x = \frac{2}{3}$ e $y = -\frac{1}{7}$

Exercícios

3) Simplifique cada fração algébrica:

(a) $\dfrac{20x^3y^2z^4}{15x^6y^6z}$

(b) $\dfrac{x-5}{x^2-25}$

(c) $\dfrac{x^2-y^2}{xy+y^2}$

(d) $\dfrac{xy+y+5x+5}{3y+15}$

(e) $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$

(f) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$

4) Efetue as operações seguintes e simplifique:

(a) $\left(\dfrac{-4m^2n^5p}{3r^2t^7}\right)^2$

(b) $\dfrac{x+3}{x-4}\cdot\dfrac{x^2-8x+16}{x^2-9}$

(c) $\dfrac{x+y}{7x-7y}\div\dfrac{x^2+xy}{7x}$

(d) $\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right)\div\left(\dfrac{x}{y}+1\right)$

Exercícios

5) Efetue as operações seguintes e simplifique:

(a) $\dfrac{4x^2-7xy}{3x^2}+\dfrac{8y^2-3x}{6x}-\dfrac{5}{12}$

(b) $\dfrac{5}{2x+2}-\dfrac{7}{3x-3}+\dfrac{1}{6x-6}$

(c) $\dfrac{x+1}{2x-2}-\dfrac{x-1}{2x+2}+\dfrac{4x}{x^2-1}$

(d) $\dfrac{4t^2}{t^2-s^2}-\dfrac{t-s}{t+s}+\dfrac{t+s}{t-s}$

6) Simplifique a seguinte expressão:

$$\dfrac{\dfrac{x^2}{y^2}-\dfrac{y^2}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{xy}+\dfrac{1}{y^2}}$$

Exercícios

7) Peça a um amigo para pensar em um número, multiplicá-lo por 3, somar 6, multiplicar por 4 e dividir por 12, dizendo para você o resultado final. Você pode então "adivinhar" qual o número em que seu amigo pensou. Parece mágica, não é? Como isto é possível?

8) Determine o valor da expressão $a^{-3} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot c^{-1}$, quando $a = -1, b = -8$ e $c = \frac{1}{4}$

9) Calcule o valor numérico de cada expressão abaixo:

(a) $M = x^2y - y^2$, para $x = 2$ e $y = -1$

(b) $M = \frac{(x+y)^{-1}}{x^{-1}+y^{-1}}$, para $x = -\frac{2}{5}$e$y = 5$

Exercícios

10) Simplifique cada fração algébrica:

(a) $\dfrac{a-2x}{2bx-ab}$

(b) $\dfrac{x^2-4xy+4y^2}{x^2-4y^2}$

(c) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}$

(d) $\dfrac{x^4-1}{x^4+2x^2+1}$

(e) $\dfrac{x^2-x-6}{2x^2+4x}$

(f) $\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-2x+1}$

Exercícios

11) Efetue as operações seguintes e simplifique:

(a) $\dfrac{x^4 - 256}{x^2 + xy + 4x + 4y} \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{2x - 8}$

(b) $\dfrac{x^2 + 2xy + y^2}{x - y} \div \dfrac{x + y}{x^2 - 2xy + y^2}$

(c) $\left(1 + \dfrac{x - a}{x + a}\right) \div \left(1 - \dfrac{x - a}{x + a}\right)$

(d) $\dfrac{m^2 - 36}{x^2 y^2} \div \dfrac{2m + 12}{xy^2}$

(e) $\left(\dfrac{3x^{\frac{3}{2}} y^3}{x^2 y^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-2}$

(f) $\dfrac{2}{a + b} \div \dfrac{4}{ax + bx}$

Exercícios

12) Calcule o valor numérico de cada expressão abaixo:

(a) $M = \frac{x^2-2x}{\sqrt{x}}$, para $x = 4$

(b) $M = x^2 - 2xy + y^2$, para $x = -1$ e $y = \frac{1}{4}$

(c) $M = \sqrt{\frac{a^2+ax}{y}}$, para $\alpha = 8, x = 10$ e $\mathrm{y} = 9$

(d) $M = \frac{y + \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{y}}$, para $x = 10$ e $\mathrm{y} = 5$

13) Simplifique cada fração algébrica

(a) $\frac{ac-c}{c^2-c}$

(b) $\frac{3x+3y}{3-3a}$

(c) $\frac{a^2-b^2}{a^3-a^2b}$

(d) $\frac{x^2-8x+16}{x^2-16}$

Exercícios

14) Efetue as operações seguintes e simplifique:

(a) $\frac{x+y}{y}-\frac{y}{x+y}-\frac{2x}{x+y}$

(b) $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}+\frac{2x}{x^2-1}$

(c) $\frac{x}{a+1}\div\frac{x^4}{a^2-1}$

(d) $\frac{a^2-1}{x^2-y^2}\div\frac{a^2-2a+1}{3x+3y}$

(e) $\frac{m^2-36}{x^2y^2}\div\frac{2m+12}{xy^2}$

(f) $\frac{3a^4}{x^7+x^6}\div\frac{9a^4}{2x+2}$

Respostas

Exercício 1:

$$V = 2 \cdot (x-4) \cdot (y-4)$$

Exercício 2:

a) $M = 1$

b) $M = -\frac{8}{17}$

Exercício 3:

a) $\frac{4z^3}{3x^3y^4}$

b) $\frac{1}{x+5}$

c) $\frac{x-y}{y}$

d) $\frac{x+1}{3}$

e) $\frac{x+y}{x-y}$

f) $\frac{x-2}{x+3}$

Exercício 4:

a) $\frac{16m^4n^{10}p^2}{9r^4t^{14}}$

b) $\frac{(x-4)}{(x-3)}$

c) $\frac{1}{x-y}$

d) $1-\frac{y}{x}$

Exercício 5:

a) $\frac{5x-28y+16y^2}{12x}$

b) $\frac{x-14}{3(x-1)(x+1)}$

c) $\frac{6x}{(x-1)(x+1)}$

d) $\frac{4t}{t-s}$

Exercício 6:

$$\frac{(x\ -\ y)(x^2+\ y^2)}{x\ +\ y}$$

Exercício 7:

O resultado é $y = x + 2$, então o número pensado é $x = y - 2$, pois $y = \frac{(3x+6)\cdot 4}{12}$

Exercício 8:

8

Exercício 9:

a) $M = -5$

b) $M = -\frac{50}{23^2}$

Respostas

GAMA – Grupo de Apoio em Matemática

Exercício 10:

a) $-\dfrac{1}{b}$

b) $\dfrac{x-2y}{x+2y}$

c) $\dfrac{x+y}{x-y}$

d) $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

e) $\dfrac{x-3}{2x}$

f) $\dfrac{x+5}{x-1}$

Exercício 11:

a) $\dfrac{(x^2+16)(x-y)}{2}$

b) $(x-y)(x+y)$

c) $\dfrac{x}{a}$

d) $\dfrac{m-6}{2x}$

e) $\dfrac{x}{9y^7}$

f) $\dfrac{x}{2}$

Exercício 12:

a) 4

b) $\dfrac{25}{16}$

c) 4

d) $\dfrac{1}{2}$

Exercício 13:

a) $\dfrac{a-1}{c-1}$

b) $\dfrac{x+y}{1-a}$

c) $\dfrac{a+b}{a^2}$

d) $\dfrac{x-4}{x+4}$

Exercício 14:

a) $\dfrac{x^2}{y(x+y)}$

b) $\dfrac{2}{x+1}$

c) $\dfrac{a-1}{x^3}$

d) $\dfrac{3(a+1)}{(x-y)(a-1)}$

e) $\dfrac{m-6}{2x}$

f) $\dfrac{2}{3x^6}$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA

O GAMA possui monitorias de:

- **Matemática Elementar, Cálulo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e equivalentes)
  - **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
    - **Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3** (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino

Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Apoio ao Cálculo

Aula 06

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Polinômios

Definição: Chama-se um polinômio de grau n na variável x a expressão $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, onde a_1, a_2, ...,a_n são os coeficientes do polinômio com $a_n \neq 0$.

Exemplos:

$p(x) = 3x^3 - 5x + 1$ polinômio de grau três, ou de terceiro grau.

$q(x) = -x^5 + 2x^2$ polinômio de grau cinco, ou de quinto grau.

$v(x) = 8$ polinômio de grau zero.

Operações com polinômios

Para **somar dois polinômios** somam-se os coeficientes dos termos de mesmo grau.

O mesmo é feito ao efetuar a **diferença de dois polinômios**.

Exemplo: Dados os polinômios

$$p(x) = 3x^4 - x^3 - 5x + 1 \text{ e } q(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 7$$

Calcule:

(a) a soma $p(x) + q(x)$ (b) a diferença $p(x) - q(x)$

Solução:

(a)

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (3x^4 - x^3 - 5x + 1) + (2x^3 - x^2 + 3x - 7) \\ &= 3x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 6. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} p(x) - q(x) &= (3x^4 - x^3 - 5x + 1) - (2x^3 - x^2 + 3x - 7) \\ &= (3x^4 - x^3 - 5x + 1) - 2x^3 + x^2 - 3x + 7 \\ &= 3x^4 - x^3 - 2x^3 + x^2 - 5x - 3x + 1 + 7 \\ &= 3x^4 - 3x^3 + x^2 - 8x + 8. \end{aligned}$$

Operações com polinômios

Já para efetuar o **produto de polinômios** usamos propriedades distributivas, regras de sinais e propriedades de potência dos expoentes de x.

Exemplo: Calcule:

(a) $x \cdot (x-1)$ (b) $(x+1)\cdot(2x-x^2)$ (c) $(x^2-3x+1)\cdot(x^2-x)$

Solução:

(a)

$$x \cdot (x-1) = x^2 - x.$$

(b)

$$(x+1)\cdot(2x-x^2) = 2x^2 - x^3 + 2x - x^2 = -x^3 + x^2 + 2x.$$

(c)

$$(x^2-3x+1)\cdot(x^2-x) = x^4 - x^3 - 3x^3 + 3x^2 + x^2 - x$$

$$= x^4 - 4x^3 + 4x^2 - x.$$

Operações com polinômios

Para efetuar a **divisão de polinômios** precisamos recorrer a um procedimento de divisão muito semelhante ao algoritmo para divisão de números inteiros, como no exemplo a seguir.

Exemplo: Em cada caso, efetue a divisão dos polinômios

(a) $(x^2 - 5x + 6) \div (x - 2)$ (b) $(x^4 - x^2 + 1) \div (x^2 - 2x + 3)$

Solução:

(a)

$$
\begin{array}{r|l}
\overbrace{x^2 - 5x + 6}^{\text{Dividendo}} & \overbrace{x - 2}^{\text{Divisor}} \\
\cline{2-2}
\underline{-x^2 + 2x } & \underbrace{x - 3}_{\text{Quociente}} \\
-3x + 6 & \\
\underline{3x - 6} & \\
\underbrace{0}_{\text{Resto}} &
\end{array}
$$

Portanto

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

(b)

$$
\begin{array}{r|l}
\overbrace{x^4 + 0x^3 - x^2 + 0x + 1}^{\text{Dividendo}} & \overbrace{x^2 - 2x + 3}^{\text{Divisor}} \\
\cline{2-2}
\underline{-x^4 + 2x^3 - 3x^2 } & \underbrace{x^2 + 2x}_{\text{Quociente}} \\
2x^3 - 4x^2 + 0x + 1 & \\
\underline{-2x^3 + 4x^2 - 6x } & \\
\underbrace{-6x + 1}_{\text{Resto}} &
\end{array}
$$

Portanto

$$(x^4 - x^2 + 1) = (x^2 - 2x + 3)(x^2 + 2x) - 6x + 1$$

Dispositivo Prático de Briot- Ruffini

O Dispositivo Prático de Briot-Ruffini é um método prático para efetuar a divisão de um polinômio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

por um binômio do primeiro grau

$$q(x) = x - a$$

O primeiro passo consiste em dispor os valores de a e os coeficientes do polinômio (em ordem decrescente em relação ao grau) da seguinte forma:

$$q(x) = x - a \qquad p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$\begin{array}{c|ccccc|c} a & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

Vamos mostrar como este dispositivo é aplicado por meio de um exemplo resolvido!

Dispositivo Prático de Briot- Ruffini

Exemplo: Efetue $(2x^3 + 3x^2 - 3x + 5) \div (x - 1)$.

Solução:

Passo 01

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 & 5 \\ \hline a & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{array}$$

Passo 02

Soma

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 & 5 \\ \hline & 2 & 5 & & \end{array}$$

multiplica

desce

resultado

Passo 03

Soma

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 & 5 \\ \hline & 2 & 5 & 2 & \end{array}$$

multiplica

resultado

Passo 04

Soma

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 & 5 \\ \hline & 2 & 5 & 2 & 7 \end{array}$$

multiplica

resultado

Passo 05

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 & 5 \\ \hline & 2 & 5 & 2 & 7 \end{array}$$

$\underbrace{2 \quad 5 \quad 2}_{\substack{2x^2 + 5x + 2 \\ \text{quociente}}}$ $\quad \underbrace{7}_{\text{resto}}$

Observação: O número de "passos" dependerá do grau do polinômio.

Dispositivo Prático de Briot- Ruffini

Exemplo: Efetue $(x^4 + 3x^3 - 2x - 6) \div (x + 3)$.

Solução:

Passo 01

$$\begin{array}{r|rrrr|r} -3 & 1 & 3 & 0 & -2 & -6 \\ \hline a & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{array}$$

Passo 02

Soma

$$\begin{array}{r|rrrr|r} -3 & 1 & 3 & 0 & -2 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & & & \end{array}$$

multiplica

desce resultado

Passo 03

Soma

$$\begin{array}{r|rrrr|r} -3 & 1 & 3 & 0 & -2 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & & \end{array}$$

multiplica

resultado

Passo 04

Soma

$$\begin{array}{r|rrrr|r} -3 & 1 & 3 & 0 & -2 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & -2 & \end{array}$$

multiplica

resultado

Passo 05

Soma

$$\begin{array}{r|rrrr|r} -3 & 1 & 3 & 0 & -2 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

multiplica

resultado

Passo 06

$$\begin{array}{r|rrrr|r} -3 & 1 & 3 & 0 & -2 & -6 \\ \hline & \underbrace{1 \quad 0 \quad 0 \quad -2}_{x^3 - 2} & & & & \underbrace{0}_{\text{resto}} \end{array}$$

quociente

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Efetue as seguintes operações com polinômios:

(a) $(x^3 - 3x^2 + 1) + (1 - 3x^2 - x^3)$

(b) $(2x^3 - 7x + 3) - (4x^3 - x^2 - 3x)$

(c) $(3x^2 - 4x + 2) \cdot (x^3 - 2x)$

(d) $(-2x^3 - 3x^2 + 4x + 1) \div (x^2 + 1)$

(e) $(2x^5 - x^4 - 14x^3 + 9x^2 - 4x + 1) \div (2x^3 + 5x^2 - x + 1)$

(f) $(x^2 - x - 12) \div (x - 4)$

(g) $(2x^5 - 3x^3 + 4x - 3) \div (x - 1)$

(h) $(2x^4 - 3x^3 - 3) \div (x + 1)$

Exercícios

2) Efetue as seguintes operações com polinômios:

(a) $(4x^5 - 3x^3 - x^2) + (7x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 2)$

(b) $(1 - x) - (x^3 - 4x^5 - x + 2)$

(c) $(x^2 - 4x + 1) \cdot (3x^2 - x - 1)$

(d) $(3x^5 + 2x^4 + x^2 - 5) \div (-x^2 + x - 1)$

(e) $(x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x - 3) \div (2x^2 + x + 1)$

(f) $(x^2 - x - 6) \div (x + 2)$

(g) $(x^5 + 1) \div (x + 1)$

(h) $(x^5 - 4x^4 - 2x^2 - 3x + 2) \div (x - 4)$

Respostas

Exercício 1:

a) $-6x^2 + 2$

b) $-2x^3 + x^2 - 4x + 3$

c) $3x^5 - 4x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 4x$

d) $-2x - 3$ e resto $6x + 4$

e) $x^2 - 3x + 1$

f) $x + 3$

g) $2x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 3$

h) $2x^3 - 5x^2 + 5x - 5$ e resto 2

Exercício 2:

a) $4x^5 + 7x^4 - 5x^3 + x^2 - x + 2$

b) $4x^5 - x^3 - 1$

c) $3x^4 - 13x^3 + 6x^2 + 3x - 1$

d) $-3x^3 - 5x^2 - 2x + 2$ e resto $-4x - 3$

e) $\frac{x^2}{2} - \frac{9x}{4} + \frac{15}{8}$ e resto $-\frac{5x + 39}{8}$

f) $x - 3$

g) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

h) $x^4 - 2x - 11$ e resto -42

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA

O GAMA possui monitorias de:

- **Matemática Elementar, Cálulo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e equivalentes)
  - **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
    - **Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3** (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino

Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Apoio ao Cálculo

Aula 07

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Inequações

Uma sentença matemática que envolve incógnitas e desigualdades é chamada de inequação. Neste curso, estudaremos inequações do primeiro e do segundo grau com uma variável.

Inequações do primeiro grau

Definição: Uma **inequação do primeiro grau** ou **inequação linear em x** pode ser escrita em uma das seguintes formas:

$ax + b < 0$ $\quad$ $ax + b \leq 0$ $\quad$ $ax + b > 0$ $\quad$ $ax + b \geq 0$

Observação: $y = ax + b$ é a função do primeiro grau associada à inequação.

Resolver uma inequação em x significa encontrar todos os valores de x para os quais a inequação é verdadeira.

O conjunto formado por todos esses valores é denominado **conjunto solução**.

Portanto, resolvemos uma inequação determinando o seu conjunto solução.

Inequações do primeiro grau

Exemplo: Resolva: $3(x-1)+2 \leq 5x+6$

Solução:

$$3(x-1)+2 \leq 5x+6$$

$$3x-3+2 \leq 5x+6$$

$$3x-1 \leq 5x+6$$

$$3x-5x \leq 6+1$$

$$-2x \leq 7$$

$$2x \geq -7$$

$$x \geq -\frac{7}{2}$$

Portanto, o conjunto solução é: $S = \left[-\frac{7}{2}, +\infty\right[$

Inequações do primeiro grau

Exemplo: Resolva: $\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{2}>\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{3}$

Solução:

$$\frac{x}{3}+\frac{1}{2}>\frac{x}{4}+\frac{1}{3}$$

$$\frac{4x}{12}+\frac{6}{12}>\frac{3x}{12}+\frac{4}{12}$$

$$4x+6>3x+4$$

$$4x-3x>-6+4$$

$$x>-2$$

Portanto, o conjunto solução é: $S=\left]-2,+\infty\right[$

Inequações duplas

As vezes duas inequações são combinadas em uma inequação dupla, que podem ser resolvidas simultaneamente ou separando-se as duas inequações envolvidas. Os exemplos a seguir ilustram esses casos.

Inequações duplas

Exemplo: Resolva: $-3 < \dfrac{2x+5}{3} \leq 5$

Solução:

$$-3 < \frac{2x+5}{3} \leq 5$$

$$-9 < 2x + 5 \leq 15$$

$$-9 - 5 < 2x \leq 15 - 5$$

$$-14 < 2x \leq 10$$

$$-7 < x \leq 5$$

Portanto, o conjunto solução é: $S =]-7{,}5]$

Inequações duplas

Exemplo: Resolva: $2 \leq 4x + 1 < 2x + 5$

Neste caso, a solução simultânea das duas inequações não é aconselhável, pois o membro direito da inequação envolve termos também na variável x e assim as operações não podem ser aplicadas simultaneamente a todos os membros.

Calcularemos então separadamente a solução de cada inequação, tomando como solução geral da inequação dupla a interseção dos conjuntos, pois desejamos valores de x que satisfaçam as duas inequações.

Inequações duplas

Exemplo: Resolva: $2 \leq 4x + 1 < 2x + 5$

Solução:

$2 \leq 4x + 1$	$4x + 1 < 2x + 5$
$2 - 1 \leq 4x$	$4x - 2x < -1 + 5$
$1 \leq 4x$	$2x < 4$
$\frac{1}{4} \leq x$	$x < \frac{4}{2}$
$x \geq \frac{1}{4}$	$x < 2$
$S_1 = \left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$	$S_2 =]-\infty, 2[$

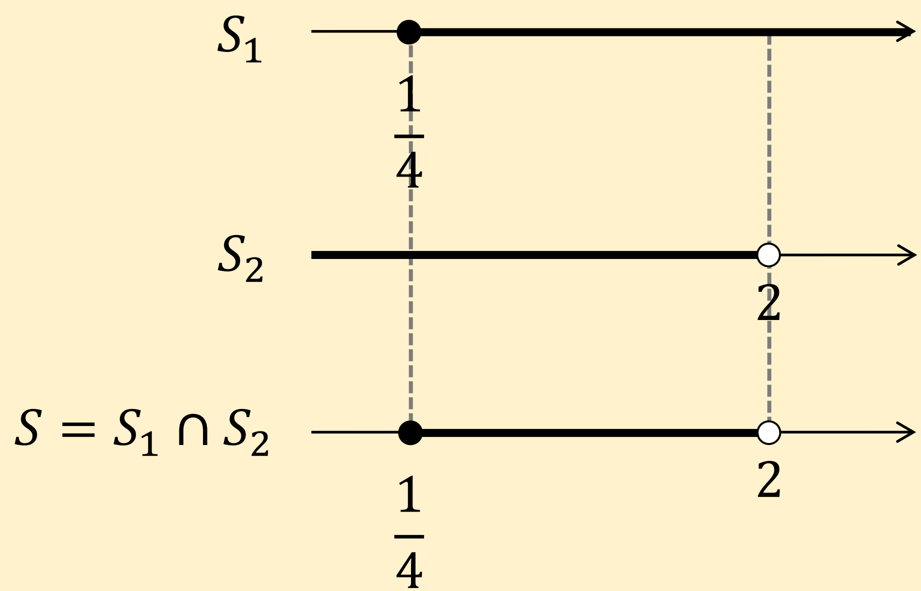
Inequações duplas

Exemplo: Resolva: $2 \leq 4x + 1 < 2x + 5$

Solução:

$$S_1 = \left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$$

$$S_2 = \left]-\infty, 2\right[$$



Portanto, o conjunto solução é: $S = \left[\frac{1}{4}, 2\right[$

Inequações modulares

Inequações que envolvem o valor absoluto ou módulo de um número são também inequações duplas, pois por definição:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{se} \quad x < 0 \\ x, & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Assim, ao trabalharmos com uma inequação $|\boldsymbol{ax+b}| \leq \boldsymbol{c}$, queremos determinar todos os valores possíveis de x para os quais

$$-\boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{ax+b} \leq \boldsymbol{c}$$

Observação: O mesmo raciocínio continua válido se trocarmos "$\leq$" por "$<$".

Inequações modulares

Inequações que envolvem o valor absoluto ou módulo de um número são também inequações duplas, pois por definição:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{se} \quad x < 0 \\ x, & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Se buscamos a solução de uma inequação $|\boldsymbol{ax+b}| \geq \boldsymbol{c}$, então queremos determinar todos os valores possíveis de $\boldsymbol{x}$ para os quais

$$\boldsymbol{ax+b \geq c} \quad \text{ou} \quad -(\boldsymbol{ax+b}) \geq \boldsymbol{c}$$

Observação: O mesmo raciocínio continua válido se trocarmos "$\geq$" por "$>$".

Inequações modulares

Exemplo: Resolva: $|x-1| \leq 4$

Solução:

$$|x-1| \leq 4 \implies -4 \leq x-1 \leq 4$$
$$\implies -4+1 \leq x \leq 4+1$$
$$\implies -3 \leq x \leq 5$$

Portanto, o conjunto solução é: $S = [-3{,}5]$

Inequações modulares

Exemplo: Resolva: $|2x+3| > 1$

Neste caso não poderemos resolver simultaneamente as inequações, pois resolver $|2x+3| > 1$ significa determinar todos os valores possíveis de x para os quais

$$2x+3 > 1 \quad \text{ou} \quad -(2x+3) > 1$$

Resolvemos então separadamente cada inequação e o conjunto solução será formado pela união dos dois resultados.

Inequações modulares

Exemplo: Resolva: $|2x+3| > 1$

Solução:

$2x+3>1$	$-(2x+3)>1$
$2x>1-3$	$2x+3<-1$
$2x>-2$	$2x<-1-3$
$x>\dfrac{-2}{2}$	$2x<-4$
$x>-1$	$x<\dfrac{-4}{2}$
	$x<-2$
$S_1 =]-1,+\infty[$	$S_2 =]-\infty,-2[$

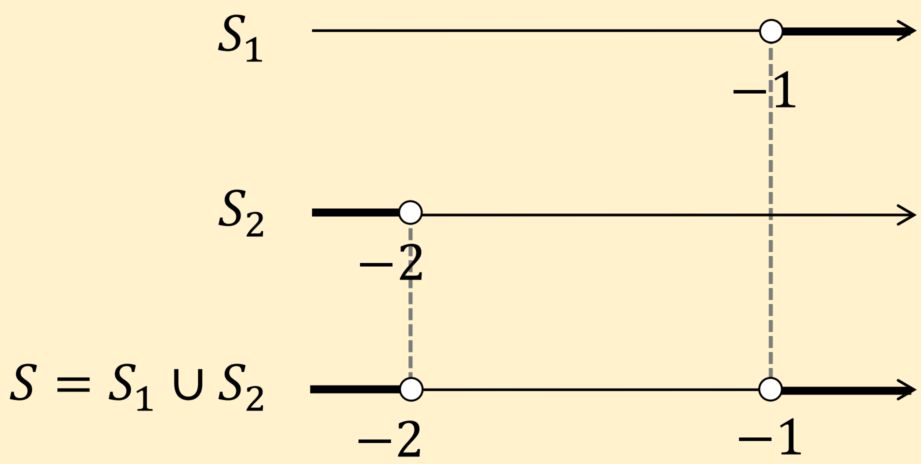
Inequações modulares

Exemplo: Resolva: $|2x+3| > 1$

Solução:

$S_1 =]-1, +\infty[$

$S_2 =]-\infty, -2[$



Portanto, o conjunto solução é:

$$S =]-\infty, -2[\ \cup \ ]-1, +\infty[$$

Inequações produto e inequações quociente

Nos próximos exemplos abordaremos inequações que envolvem produtos ou quocientes, cujos fatores são expressões do primeiro grau da forma $ax + b$ (cuja representação gráfica é uma reta).

Utilizaremos funções do primeiro grau para resolver estes tipos de inequações.

Inequações produto e inequações quociente

O procedimento que vamos utilizar para resolver inequações produto ou inequações quociente, consiste nos seguintes passos:

1^o Passo: Considerar cada fator da inequação como uma função do primeiro grau $y = ax + b$;

2^o Passo: Determinar a raiz da função, ou seja, o valor de x onde a função se anula, que é o valor onde a reta intercepta o eixo x;

3^o Passo: Verificar se o gráfico da função é uma reta crescente $(a > 0)$ ou decrescente $(a < 0)$;

4^o Passo: Fazer o estudo do sinal da função, determinando assim os intervalos onde a função é positiva e onde é negativa;

5^o Passo: Montar um quadro, colocando os valores das raízes de cada função e o seu respectivo sinal em cada intervalo, para estudar o sinal do produto ou do quociente das duas funções e chegar à solução da inequação.

Inequações produto e inequações quociente

Exemplo: Resolva: $(4-x)(2x-3)>0$

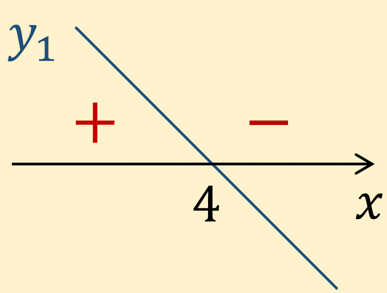
Solução:

$y_1 = 4 - x$

$0 = 4 - x$

$x = 4$ (raiz)

y_1 é decrescente pois $a = -1 < 0$

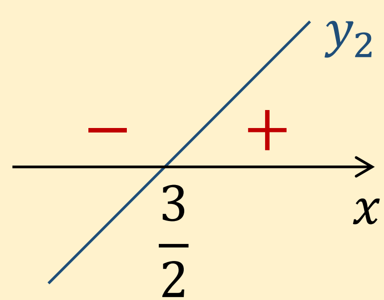


$y_2 = 2x - 3$

$0 = 2x - 3$

$x = \frac{3}{2}$ (raiz)

y_2 é crescente pois $a = 2 > 0$



	$\frac{3}{2}$	4	x
$y_1 = 4 - x$	+	+	−
$y_2 = 2x - 3$	−	+	+
$y_1 \cdot y_2$	−	+	−

Portanto, o conjunto solução é:

$$S = \left]\frac{3}{2}, 4\right[$$

Inequações produto e inequações quociente

Exemplo: Resolva: $$\frac{5x-3}{4-5x} \leq 0$$

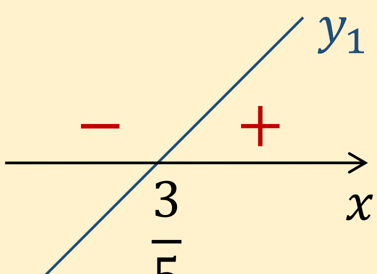
Solução:

$y_1 = 5x - 3$

$0 = 5x - 3$

$x = \frac{3}{5}$ (raiz)

y_1 é crescente pois $a = 5 > 0$

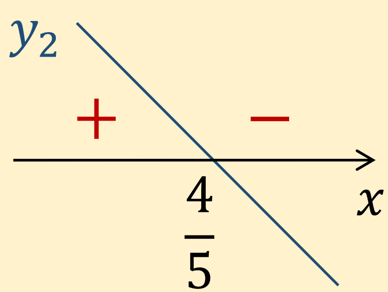


$y_2 = 4 - 5x$

$0 = 4 - 5x$

$x = \frac{4}{5}$ (raiz)

y_2 é decrescente pois $a = -5 < 0$



x		$\frac{3}{5}$		$\frac{4}{5}$	
$y_1 = 5x - 3$	$-$		$+$		$+$
$y_2 = 4 - 5x$	$+$		$+$		$-$
$\frac{y_1}{y_2} = \frac{5x-3}{4-5x}$	$-$		$+$		$-$

Note que $\frac{4}{5} \notin S$ pois zera o denominador da fração $\frac{5x-3}{4-5x}$.

Inequações produto e inequações quociente

Exemplo: Resolva: $$\frac{5x-3}{4-5x} \leq 0$$

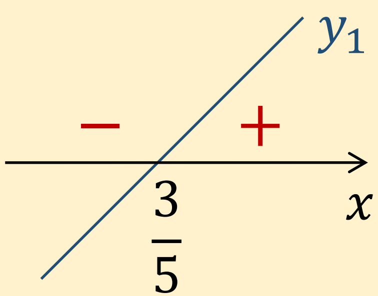
Solução:

$y_1 = 5x - 3$

$0 = 5x - 3$

$x = \frac{3}{5}$ (raiz)

y_1 é crescente pois $a = 5 > 0$

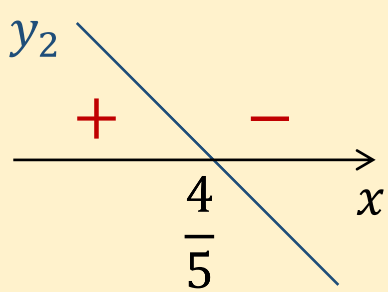


$y_2 = 4 - 5x$

$0 = 4 - 5x$

$x = \frac{4}{5}$ (raiz)

y_2 é decrescente pois $a = -5 < 0$



		$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	x
$y_1 = 5x - 3$	$-$	$+$	$+$	
$y_2 = 4 - 5x$	$+$	$+$	$-$	
$\frac{y_1}{y_2} = \frac{5x-3}{4-5x}$	$-$	$+$	$-$	

Portanto, o conjunto solução é:

$$S = \left]-\infty, \frac{3}{5}\right] \cup \left]\frac{4}{5}, +\infty\right[$$

Inequações produto e inequações quociente

Exemplo: Resolva: $\dfrac{x+3}{1-x} \leq 3$

Se multiplicarmos ambos os membros por $1-x$ (que pode ser positivo ou negativo, dependendo do valor de x), não saberemos se o sinal da desigualdade deverá ser mantido ou invertido. Por isso, utilizaremos um outro procedimento.

Solução:

$$\frac{x+3}{1-x} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{x+3}{1-x} - 3 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+3-3(1-x)}{1-x} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+3-3+3x}{1-x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4x}{1-x} \leq 0$$

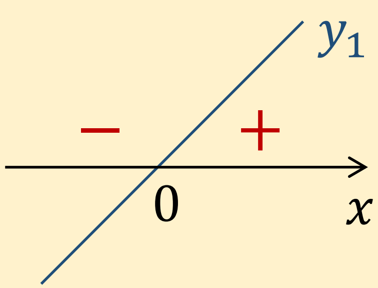
Inequações produto e inequações quociente

Exemplo: Resolva: $$\frac{x+3}{1-x} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{4x}{1-x} \leq 0$$

Solução:

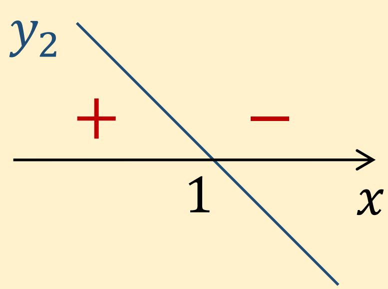
$$y_1 = 4x$$
$$0 = 4x$$
$x = 0$ (raiz)

y_1 é crescente pois $a = 4 > 0$



$$y_2 = 1 - x$$
$$0 = 1 - x$$
$x = 1$ (raiz)

y_2 é decrescente pois $a = -1 < 0$



x		0		1	
$y_1 = 4x$	$-$		$+$		$+$
$y_2 = 1 - x$	$+$		$+$		$-$
$\frac{y_1}{y_2} = \frac{4x}{1-x}$	$-$		$+$		$-$

Portanto, o conjunto solução é:

$$S =]-\infty, 0] \ \cup \ ]1, +\infty[$$

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Resolva as inequações abaixo e apresente o conjunto solução em notação de intervalo:

(a) $2x + 5 < 3x - 7$

(b) $3 \leq \dfrac{2x - 3}{5} < 7$

(c) $x^2 - x - 6 < 0$

(d) $x^2 - 2x - 5 > 3$

(e) $x(2x + 3) \geq 5$

(f) $|x + 3| < 0{,}01$

(g) $|2x + 5| < 4$

(h) $|6 - 5x| \leq 3$

(i) $|3x - 7| \geq 5$

(j) $|-11 - 7x| > 6$

(k) $-5 \leq 3x + 4 < 7$

(l) $|6x - 7| > 10$

(m) $0 < 3x + 1 \leq 4x - 6$

(n) $|5 - 2x| \geq 7$

Exercícios

1) Resolva as inequações abaixo e apresente o conjunto solução em notação de intervalo:

(o) $-6 < 3x + 3 \leq 3$

(p) $|x - 4| \leq 16$

(q) $1 < x - 2 < 6 - x$

(r) $x - 7 \geq -5$ ou $x - 7 \leq -6$

(s) $x < 6x - 10$ ou $x \geq 2x + 5$

(t) $2x - 1 > 1$ ou $x + 3 < 4$

(u) $1 \leq -2x + 1 < 3$

(v) $x + 3 < 6x + 10$

(w) $|2x - 3| > 4$

(x) $2 < 5x + 3 \leq 8x - 12$

(y) $|2x - 3| \leq 5$

Exercícios

2) Resolva as inequações abaixo e apresente o conjunto solução em notação de intervalo:

(a) $(4x + 2)(x + 1) \leq 0$

(b) $(x + 3)(3x + 1) \geq 0$

(c) $(2x - 1)(x + 4) < 0$

(d) $(x - 2)(x + 1) > 0$

(e) $(2x - 4)(x + 4) \geq 0$

(f) $\frac{2x+1}{x+2} \leq 0$

(g) $\frac{x+3}{5x-2} \geq 0$

(h) $\frac{x-1}{2x-3} \leq 0$

(i) $\frac{2x+7}{x+1} < 0$

(j) $\frac{x-2}{2x-5} > 0$

Respostas

Exercício 1:

(a) $S =]12, +\infty[$

(b) $S = [9{,}19[$

(c) $S =]-2{,}3[$

(d) $S =]-\infty, -2[\ \cup\ ]4, +\infty[$

(e) $S = \left]-\infty, -\frac{5}{2}\right]\ \cup\ [1, +\infty[$

(f) $S =]-3{,}01, -2{,}99[$

(g) $S = \left]-\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}\right[$

(h) $S = \left[\frac{3}{5}, \frac{9}{5}\right]$

(i) $S = \left]-\infty, \frac{2}{3}\right]\ \cup\ [4, +\infty[$

(j) $S = \left]-\infty, -\frac{17}{7}\right[\ \cup\ \left]-\frac{5}{7}, +\infty\right[$

(k) $S = [-3{,}1[$

(l) $S = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\ \cup\ \left]\frac{17}{6}, +\infty\right[$

(m) $S = [7, +\infty[$

(n) $S =]-\infty, -1]\ \cup\ [6, +\infty[$

Respostas

Exercício 1:

(o) $S =]-3,0]$

(p) $S = [-12,20]$

(q) $S =]3,4[$

(r) $S =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$

(s) $S =]-\infty, -5] \cup]2, +\infty[$

(t) $S =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

(u) $S =]-1,0]$

(v) $S = \left]-\frac{7}{5}, +\infty\right[$

(w) $S = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{7}{2}, +\infty\right[$

(x) $S = [5, +\infty[$

(y) $S = [-1,4]$

Respostas

Exercício 2:

(a) $S = [-1, -\frac{1}{2}]$

(b) $S =]-\infty, -3] \cup [-\frac{1}{3}, +\infty[$

(c) $S = \left]-4, \frac{1}{2}\right[$

(d) $S =]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$

(e) $S =]-\infty, -4[\cup]2, +\infty[$

(f) $S =]-2, -\frac{1}{2}]$

(g) $S =]-\infty, -3] \cup \left]\frac{2}{5}, +\infty\right[$

(h) $S = [1, \frac{3}{2}[$

(i) $S =]-\frac{7}{2}, -1[$

(j) $S =]-\infty, 2[\cup]\frac{5}{2}, +\infty[$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA

O GAMA possui monitorias de:

- **Matemática Elementar, Cálulo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e equivalentes)
  - **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
    - **Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3** (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino

Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Apoio ao Cálculo

Aula 08

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Função do segundo grau

Definição: Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $a \neq 0$, a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ é chamada de função do segundo grau ou função quadrática.

Exemplos:

1) $f(x) = x^2$ $\quad a = 1\,,\ b = 0\,,\ c = 0$

2) $f(x) = -x^2 + 1$ $\quad a = -1\,,\ b = 0\,,\ c = 1$

3) $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ $\quad a = 2\,,\ b = 3\,,\ c = -1$

Função do segundo grau

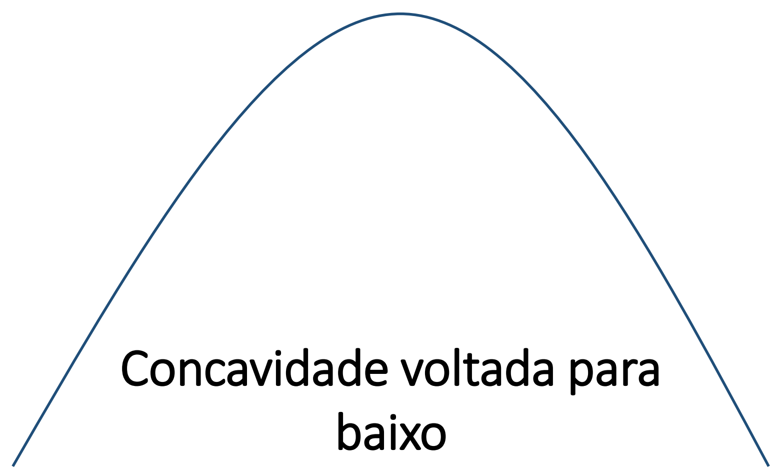
Teorema: O gráfico de uma função do segundo grau é uma **parábola**.

A parábola pode ter concavidade voltada para cima ou concavidade voltada para baixo, de acordo com o sinal do coeficiente a.

Concavidade:

$\boldsymbol{a > 0}$

$\boldsymbol{a < 0}$



Função do segundo grau

Os zeros da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ podem ser obtidos resolvendo a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ utilizando a fórmula de Bhaskara.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Observação: A quantidade de zeros reais obtidos para uma função quadrática depende do sinal de Δ.

$\Delta > 0$
Dois zeros

$\Delta = 0$
Um único zero

$\Delta < 0$
Nenhum zero

Função do segundo grau

O sinal da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ depende dos sinais de a (determina a concavidade) e de Δ (determina a quantidade de zeros).

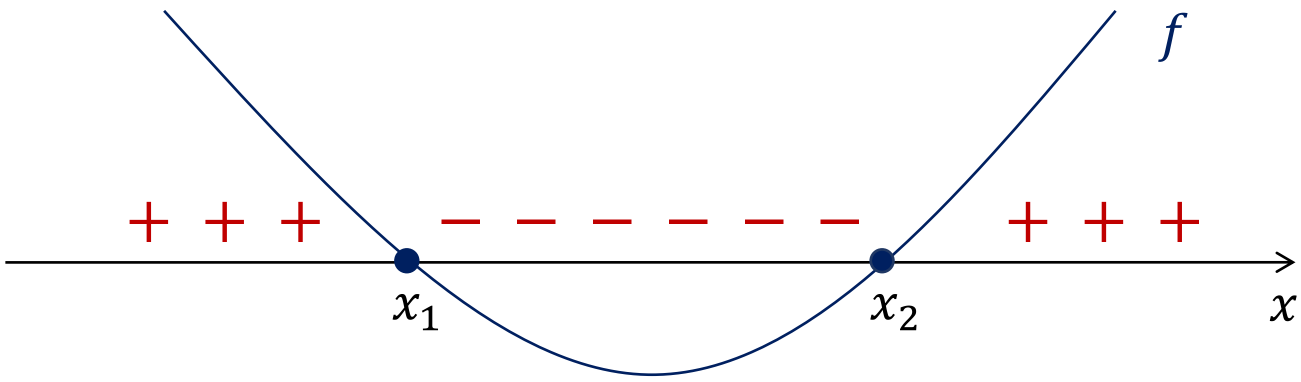
Como existem duas possibilidades para o coeficiente a ($a > 0$ ou $a < 0$) e três possibilidades para Δ ($\Delta > 0$ ou $\Delta = 0$ ou $\Delta < 0$), obtém-se seis combinações possíveis para o formato do gráfico da função quadrática.

Vamos fazer o estudo do sinal da função quadrática para cada um desses formatos.

Função do segundo grau

1^a Combinação: $a > 0$ e $\Delta > 0$

Concavidade voltada para cima e dois zeros

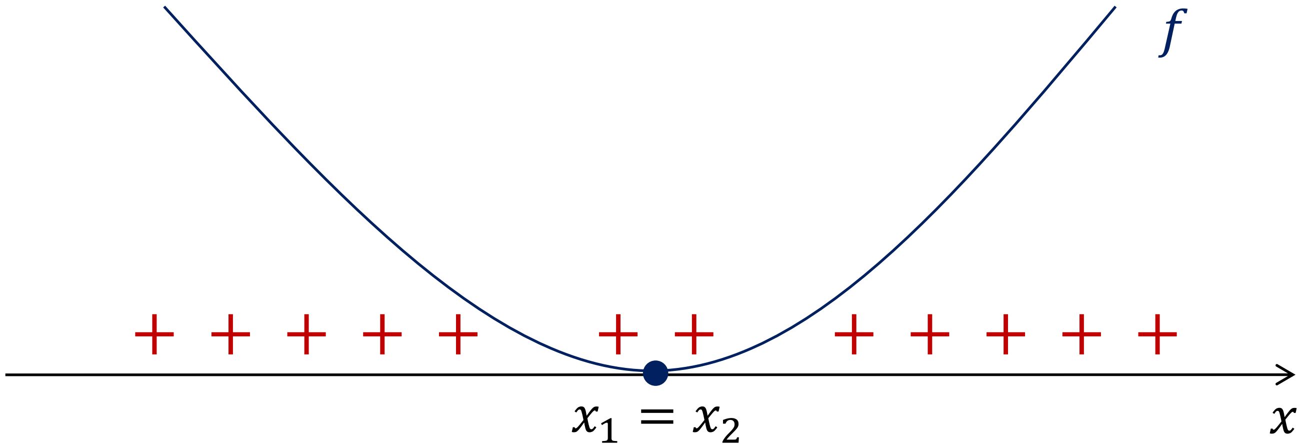


- $f(x) > 0$ em $]-\infty, x_1[\; \cup \;]x_2, +\infty[\; = \; \mathbb{R} - [x_1, x_2]$
- $f(x) = 0$ em $x = x_1$ e $x = x_2$
- $f(x) < 0$ em $]x_1, x_2[$

Função do segundo grau

$2^{\mathbf{a}}$ Combinação: $a > 0$ e $\Delta = 0$

Concavidade voltada para cima e um único zero

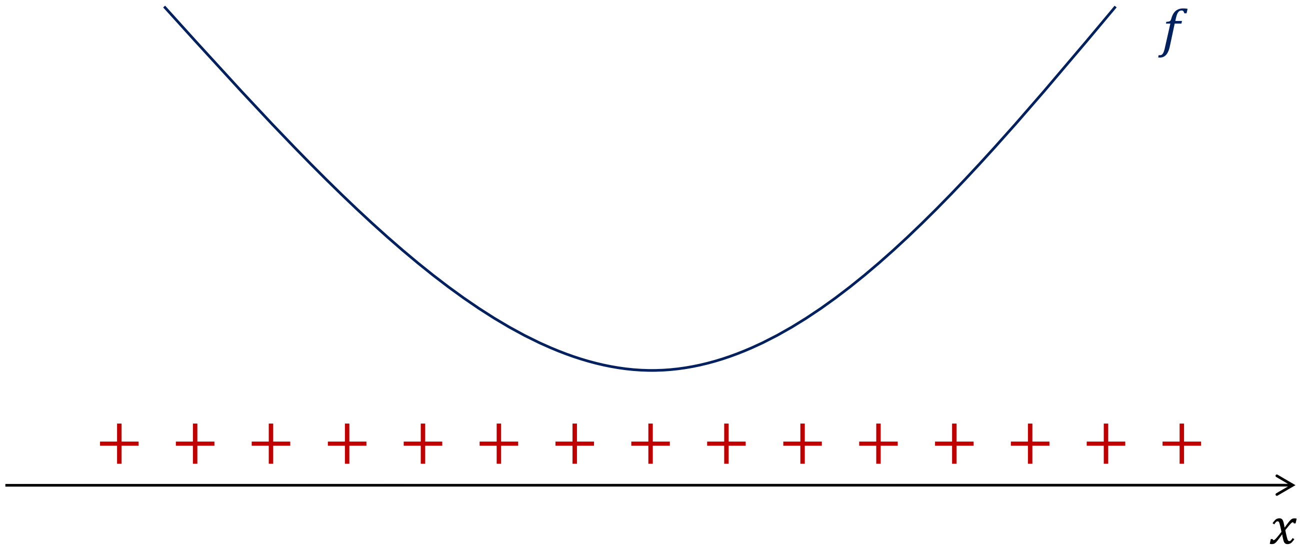


- $f(x) > 0$ em $]-\infty, x_1[\ \cup\ ]x_1, +\infty[\ =\ \mathbb{R} - \{x_1\}$
- $f(x) = 0$ em $x = x_1 = x_2$
- $\nexists\, x \in \mathbb{R} : f(x) < 0$

Função do segundo grau

3^{a} Combinação: $a > 0$ e $\Delta < 0$

Concavidade voltada para cima e nenhum zero

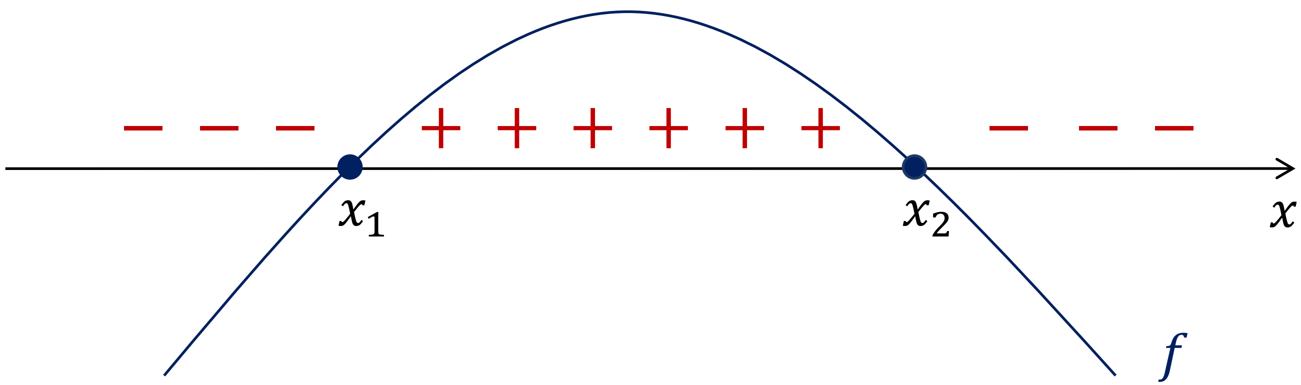


- $f(x) > 0$ em $\mathbb{R}$
- $\nexists\, x \in \mathbb{R} : f(x) = 0$
- $\nexists\, x \in \mathbb{R} : f(x) < 0$

Função do segundo grau

4ª Combinação: $a < 0$ e $\Delta > 0$

Concavidade voltada para baixo e dois zeros

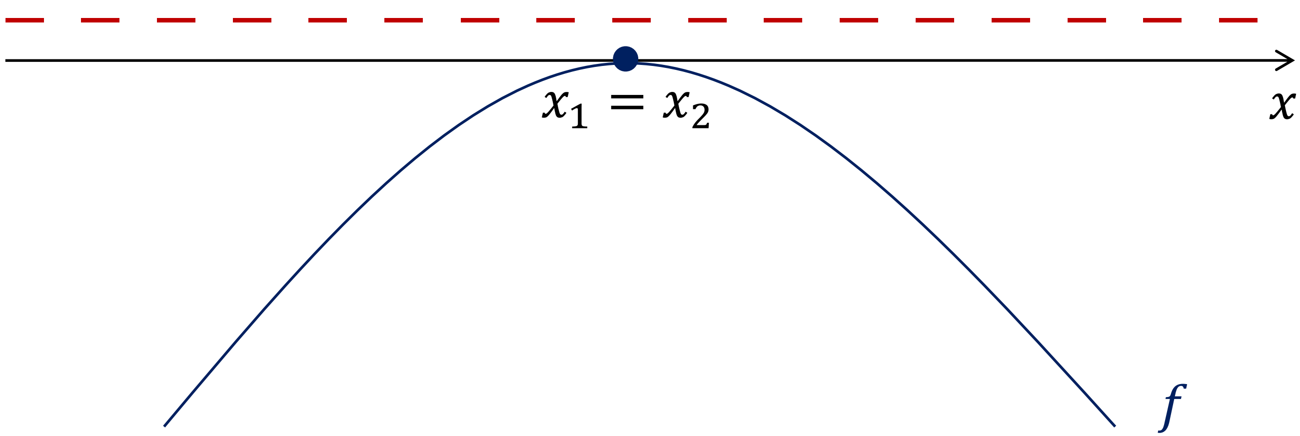


- $f(x) > 0$ em $]x_1, x_2[$
- $f(x) = 0$ em $x = x_1$ e $x = x_2$
- $f(x) < 0$ em $]-\infty, x_1[\ \cup\ ]x_2, +\infty[\ = \mathbb{R} - [x_1, x_2]$

Função do segundo grau

5ª Combinação: $a < 0$ e $\Delta = 0$

Concavidade voltada para baixo e um único zero

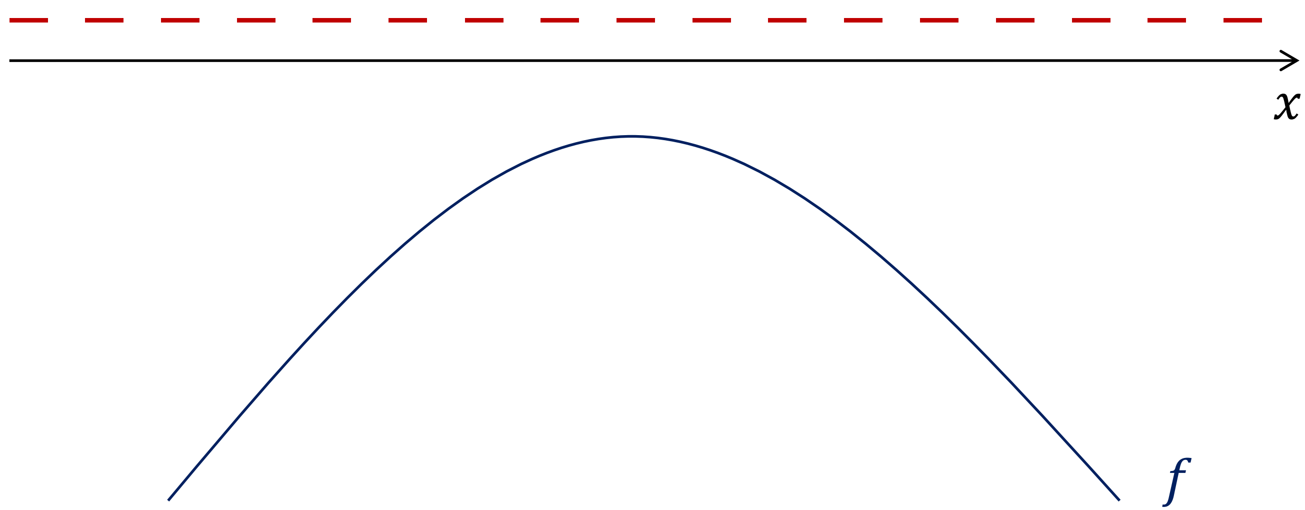


- $\nexists\, x \in \mathbb{R} : f(x) > 0$
- $f(x) = 0$ em $x = x_1 = x_2$
- $f(x) < 0$ em $]-\infty, x_1[\ \cup\ ]x_1, +\infty[\ =\ \mathbb{R} - \{x_1\}$

Função do segundo grau

6^{a} Combinação: $a < 0$ e $\Delta < 0$

Concavidade voltada para baixo e nenhum zero



- $\nexists\, x \in \mathbb{R} : f(x) > 0$
- $\nexists\, x \in \mathbb{R} : f(x) = 0$
- $f(x) < 0$ em $\mathbb{R}$

Inequações do segundo grau

Definição: Uma **inequação do segundo grau** pode ser escrita em uma das seguintes formas:

$$ax^2 + bx + c < 0 \qquad ax^2 + bx + c > 0$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0 \qquad ax^2 + bx + c \geq 0$$

Observação: $y = ax^2 + bx + c$ é a função do segundo grau associada à inequação.

Resolver uma inequação em x significa encontrar todos os valores de x para os quais a inequação é verdadeira.

O conjunto formado por todos esses valores é denominado **conjunto solução**.

Portanto, resolvemos uma inequação determinando o seu conjunto solução.

Inequações do segundo grau

O procedimento que vamos utilizar para resolver inequações do segundo grau, consiste nos seguintes passos:

1^{o} Passo: Reescrever a inequação dada (se for necessário) até que ela fique em alguma das seguintes formas: $ax^2 + bx + c < 0$ ou $ax^2 + bx + c \leq 0$ ou $ax^2 + bx + c > 0$ ou $ax^2 + bx + c \geq 0$.

2^{o} Passo: Considerar a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ associada à inequação.

3^{o} Passo: Determinar a quantidade de zeros através do sinal de Δ.

4^{o} Passo: Calcular os zeros da função (se existirem).

5^{o} Passo: Determinar a concavidade da parábola através do sinal do coeficiente a.

6^{o} Passo: Realizar o estudo do sinal da função e chegar à solução da inequação.

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $x^2 - 1 > x + 5$

Solução:

1º Passo: $x^2 - 1 > x + 5 \iff x^2 - 1 - x - 5 > 0$

$\iff x^2 - x - 6 > 0$

2º Passo: $f(x) = x^2 - x - 6 \qquad (a = 1,\ b = -1,\ c = -6)$

3º Passo: $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 1 + 24 = 25 > 0$

Portanto, f possui dois zeros.

4º Passo: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2(1)} = \dfrac{1 \pm 5}{2} \implies x_1 = \dfrac{1-5}{2} = -2$

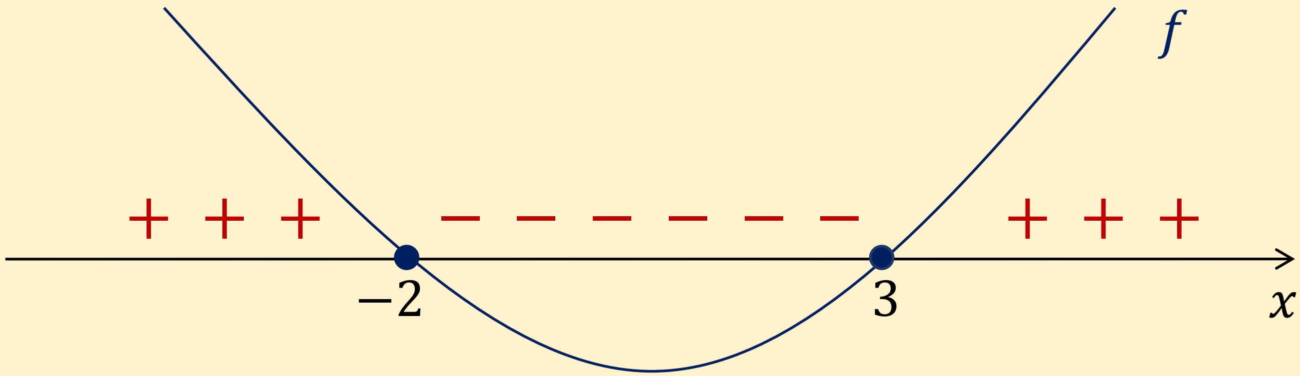
$\implies x_2 = \dfrac{1+5}{2} = 3$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $x^2 - 1 > x + 5$

Solução:

5º Passo: Como $a = 1 > 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.



6º Passo: Lembre que

$$x^2 - 1 > x + 5 \iff x^2 - x - 6 > 0 \iff f(x) > 0$$

Portanto, $S =]-\infty, -2[\ \cup \ ]3, +\infty[$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $2x^2 + x \leq 6$

Solução:

$$2x^2 + x \leq 6 \iff 2x^2 + x - 6 \leq 0$$

$$f(x) = 2x^2 + x - 6 \qquad (a = 2,\ b = 1,\ c = -6)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(2)(-6) = 1 + 48 = 49 > 0$$

Portanto, f possui dois zeros.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2(2)} = \frac{-1 \pm 7}{4} \implies x_1 = \frac{-1-7}{4} = -2$$

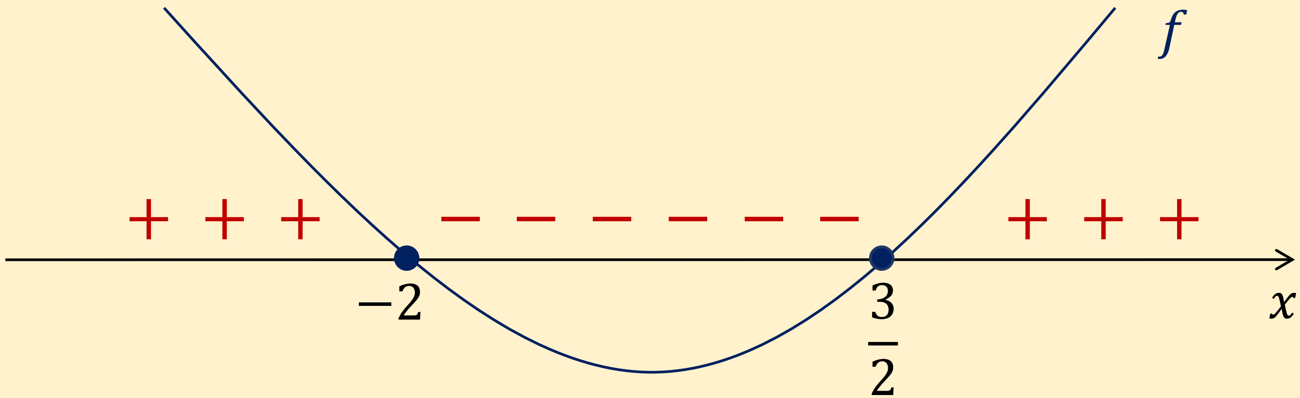
$$\implies x_2 = \frac{-1+7}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $2x^2 + x \leq 6$

Solução:

Como $a = 2 > 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.



Lembre que

$$2x^2 + x \leq 6 \iff 2x^2 + x - 6 \leq 0 \iff f(x) \leq 0$$

Portanto, $S = \left[-2, \frac{3}{2}\right]$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $x^2 + 3x + 3 \leq 0$

Solução:

$f(x) = x^2 + 3x + 3 \qquad (a = 1,\ b = 3,\ c = 3\ )$

$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(1)(3) = 9 - 12 = -3 < 0$

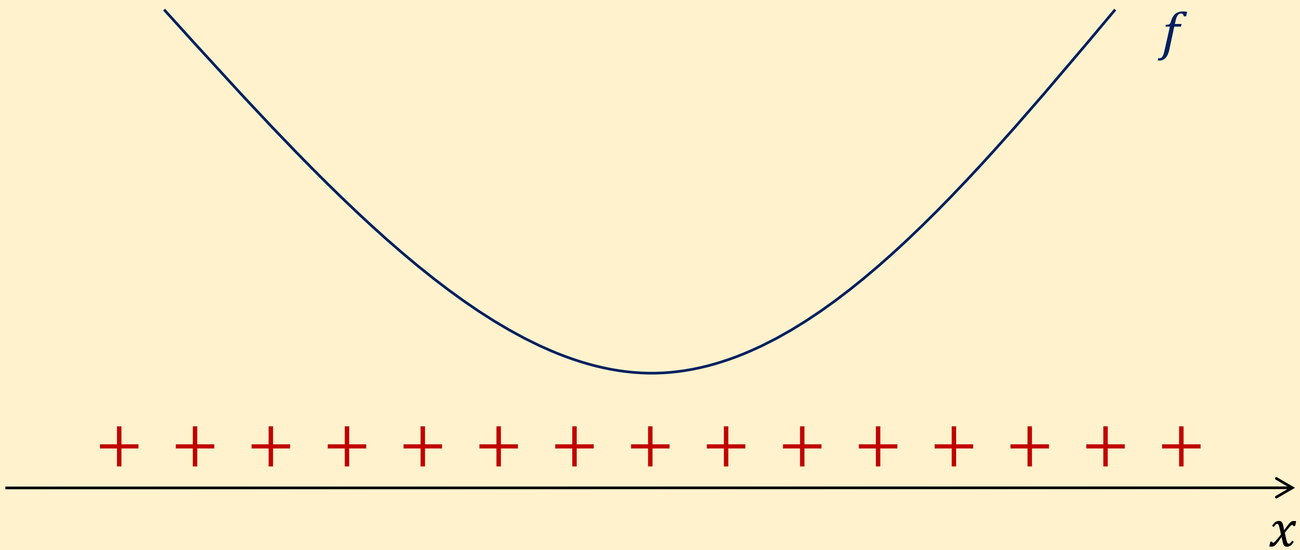
Portanto, f não possui zeros reais.

Como $a = 1 > 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $x^2 + 3x + 3 \leq 0$

Solução:



Lembre que $x^2 + 3x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 0$ e como

$\nexists\, x \in \mathbb{R} : f(x) \leq 0$ temos que: $S = \emptyset$

Observação: O conjunto solução da seguinte inequação $x^2 + 3x + 3 > 0$

é: $S = \mathbb{R}$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $x^2 - 6x + 9 \leq 0$

Solução:

$f(x) = x^2 - 6x + 9 \qquad (a = 1,\ b = -6,\ c = 9\ )$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(9) = 36 - 36 = 0$

Portanto, f possui um único zero.

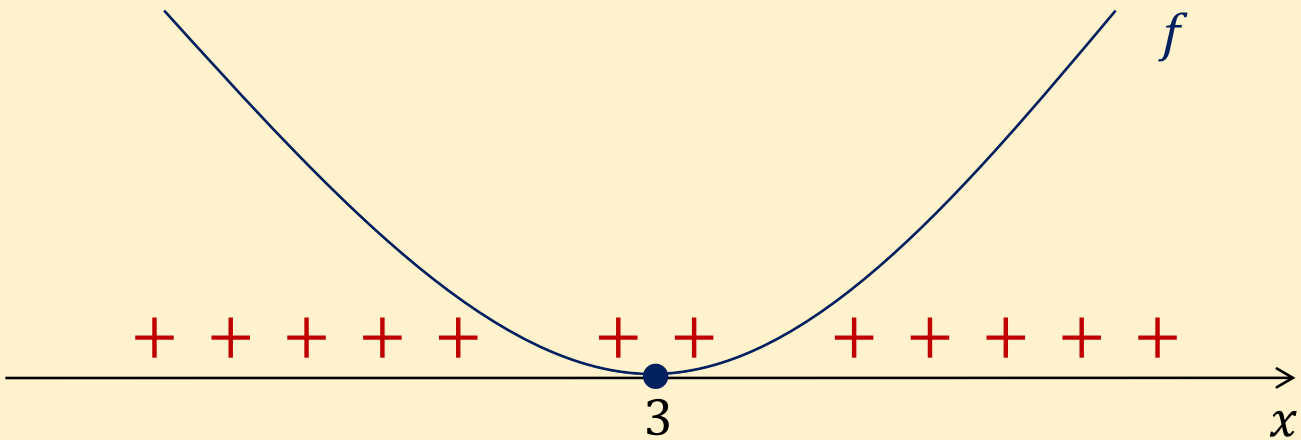
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2(1)} = \frac{6}{2} = 3$$

Como $a = 1 > 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $x^2 - 6x + 9 \leq 0$

Solução:



Lembre que $x^2 - 6x + 9 \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 0$ e como

$x = 3$ é o único valor que satisfaz $f(x) \leq 0$ temos que: $S = \{3\}$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $x^2 + 8x - 10 < 2(x^2 + 1)$

Solução:

$$x^2 + 8x - 10 < 2(x^2 + 1) \iff x^2 + 8x - 10 < 2x^2 + 2 \iff$$
$$\iff x^2 - 2x^2 + 8x - 10 - 2 < 0 \iff$$
$$\iff -x^2 + 8x - 12 < 0$$

$$f(x) = -x^2 + 8x - 12 \qquad (a = -1,\ b = 8,\ c = -12)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4(-1)(-12) = 64 - 48 = 16 > 0$$

Portanto, f possui dois zeros.

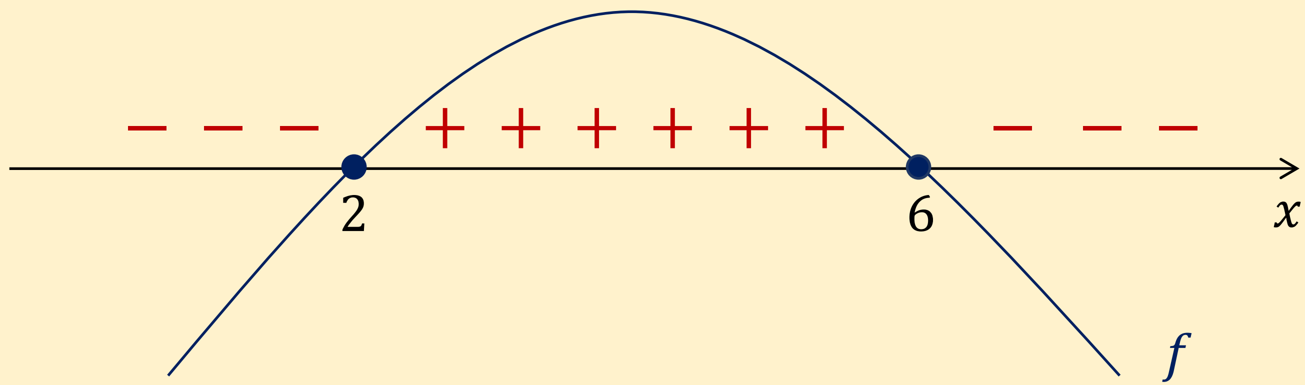
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{16}}{2(-1)} = \frac{-8 \pm 4}{-2} \implies x_1 = \frac{-8 + 4}{-2} = 2$$
$$\implies x_2 = \frac{-8 - 4}{-2} = 6$$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $x^2 + 8x - 10 < 2(x^2 + 1)$

Solução:

Como $a = -1 < 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para baixo.



Lembre que

$$x^2 + 8x - 10 < 2(x^2 + 1) \Leftrightarrow -x^2 + 8x - 12 < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0$$

Portanto, $S =]-\infty, 2[\, \cup \,]6, +\infty[$

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Resolva as inequações abaixo e apresente o conjunto solução em notação de intervalo:

(a) $x^2 > 9$

(b) $x^2 \leq 5$

(c) $(x-4)(x+2) > 0$

(d) $(x-3)(x+4) < 0$

(e) $x^2 - 9x + 20 \leq 0$

(f) $2 - 3x + x^2 \geq 0$

Exercícios

2) Resolva as inequações abaixo e apresente o conjunto solução na reta numérica:

(a) $(2x + 1)(-x + 2) \geq 0$

(b) $(x + 2)(-x - 2) \leq 0$

(c) $x^2 - 6x + 9 > 0$

(d) $x^2 - 4x \geq 0$

(e) $(x + 2)(-x - 2) < 0$

Respostas

Exercício 1:

(a) $S =]-\infty, -3[\ \cup\ ]3, +\infty[$

(b) $S = \left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right]$

(c) $S =]-\infty, -2[\ \cup\ ]4, +\infty[$

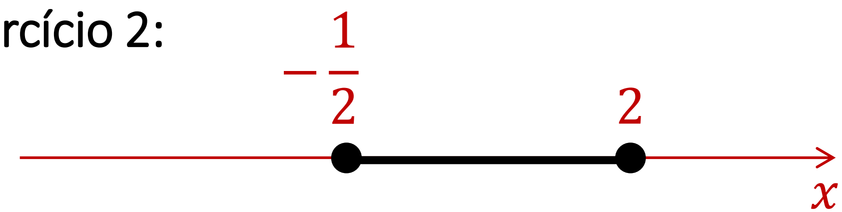
(d) $S =]-4,3[$

(e) $S = [4,5]$

(f) $S =]-\infty, 1]\ \cup\ [2, +\infty[$

Exercício 2:

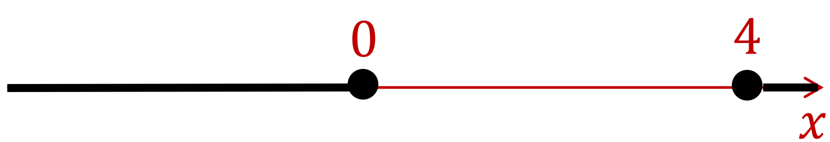
(a)



(b)

(c)

(d)



(e)

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA

O GAMA possui monitorias de:

- **Matemática Elementar, Cálulo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e equivalentes)
  - **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
    - **Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3** (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino

Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Apoio ao Cálculo

Aula 09

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Inequações do segundo grau

As vezes duas inequações são combinadas em uma inequação dupla, que pode ser resolvida separando-se as duas inequações envolvidas. O exemplo a seguir ilustra esse caso.

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $4 < x^2 \leq 9$

Calcularemos então separadamente a solução de cada inequação, tomando como solução geral da inequação dupla a interseção dos conjuntos, pois desejamos valores de x que satisfaçam as duas inequações.

Solução:

a) $4 < x^2 \iff 4 - x^2 < 0 \qquad f(x) = 4 - x^2 \qquad (a = -1,\ b = 0,\ c = 4)$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4(-1)(4) = 0 + 16 = 16 > 0$$

Portanto, f possui dois zeros.

$$4 - x^2 = 0 \implies 2^2 - x^2 = 0 \implies (2 + x)(2 - x) = 0$$

$$\implies 2 + x = 0 \quad \text{ou} \quad 2 - x = 0 \implies x = -2 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

$$\implies x_1 = -2 \quad \text{e} \quad x_2 = 2$$

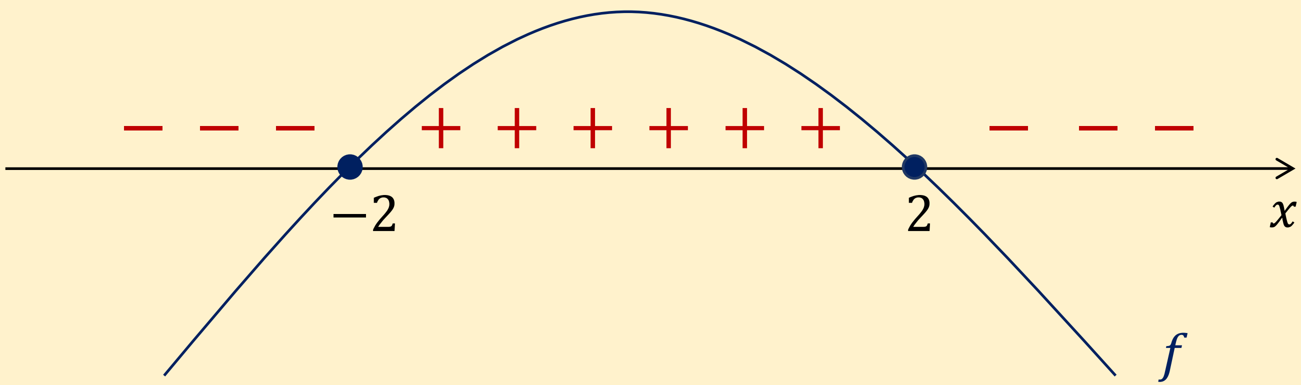
Como $a = -1 < 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para baixo.

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $4 < x^2 \leq 9$

Solução:

a)



Lembre que

$$4 < x^2 \iff 4 - x^2 < 0 \iff f(x) < 0$$

Portanto, $S_1 =]-\infty, -2[\; \cup \;]2, +\infty[$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $4 < x^2 \leq 9$

Solução:

b) $x^2 \leq 9 \Leftrightarrow x^2 - 9 \leq 0$ $\quad g(x) = x^2 - 9 \quad (a = 1,\ b = 0,\ c = -9)$

$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4(1)(-9) = 0 + 36 = 36 > 0$

Portanto, g possui dois zeros.

$$x^2 - 9 = 0 \Longrightarrow x^2 - 3^2 = 0 \Longrightarrow (x+3)(x-3) = 0$$

$$\Longrightarrow x + 3 = 0 \text{ ou } x - 3 = 0 \Longrightarrow x = -3 \text{ ou } x = 3$$

$$\Longrightarrow x_1 = -3 \text{ e } x_2 = 3$$

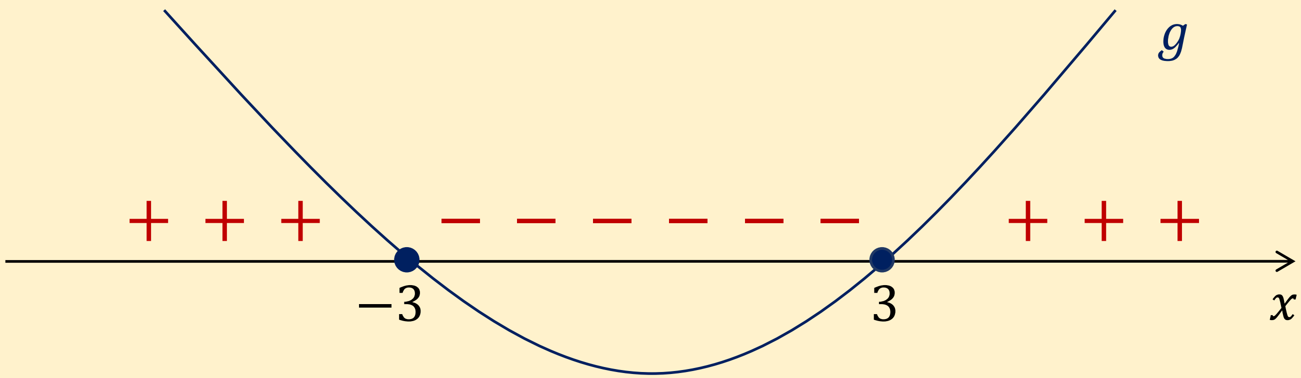
Como $a = 1 > 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $4 < x^2 \leq 9$

Solução:

b)



Lembre que

$$x^2 \leq 9 \Leftrightarrow x^2 - 9 \leq 0 \Leftrightarrow g(x) \leq 0$$

Portanto, $S_2 = [-3,3]$

Inequações do segundo grau

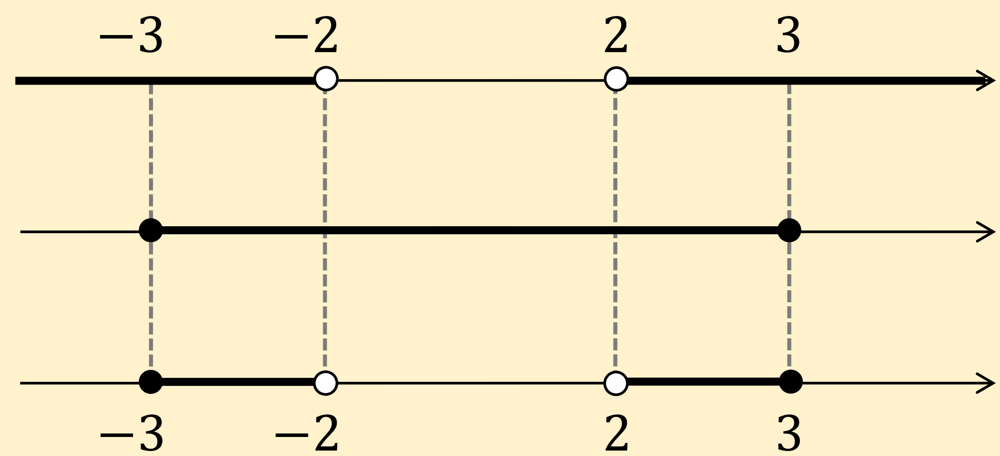
Exemplo: Resolva: $4 < x^2 \leq 9$

Solução:

$S_1 =]-\infty, -2[\ \cup \ ]2, +\infty[$

$S_2 = [-3,3]$

$S = S_1 \cap S_2$



Portanto, o conjunto solução é: $S = [-3, -2[\cup]2,3]$

Inequações do segundo grau

Nos próximos três exemplos abordaremos inequações que envolvem produtos ou quocientes, cujos fatores são expressões do segundo grau da forma $ax^2 + bx + c$ (cuja representação gráfica é uma parábola).

Utilizaremos funções do segundo grau para resolver estes tipos de inequações.

Exemplo: Resolva: $(2x^2 - 4x)(-x^2 + 3x + 4) < 0$

Solução:

a) $f(x) = 2x^2 - 4x \qquad (a = 2,\ b = -4,\ c = 0)$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(2)(0) = 16 - 0 = 16 > 0$$

Portanto, f possui dois zeros.

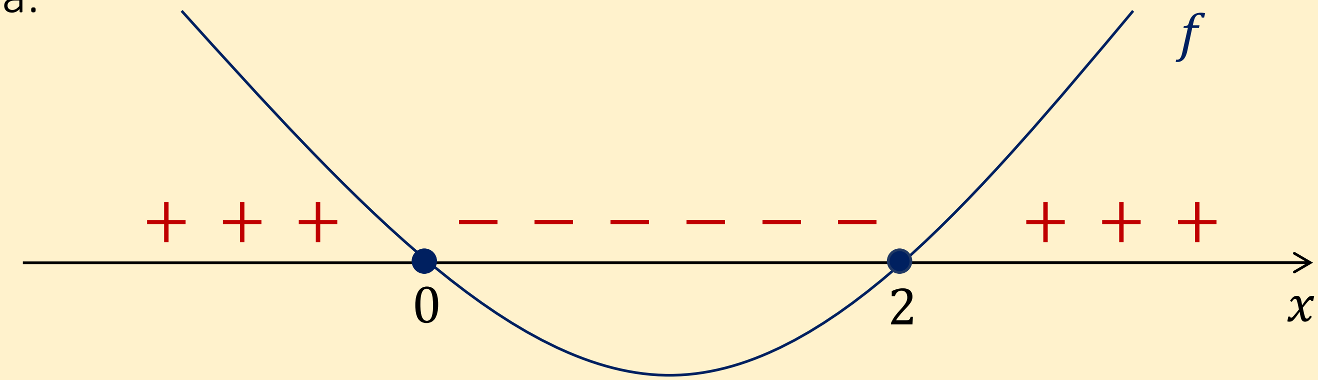
$$2x^2 - 4x = 0 \implies 2x(x-2) = 0 \implies 2x = 0 \text{ ou } x - 2 = 0$$
$$\implies x = 0 \text{ ou } x = 2$$
$$\implies x_1 = 0 \text{ e } x_2 = 2$$

Inequações do segundo grau

Exemplo: $(2x^2 - 4x)(-x^2 + 3x + 4) < 0$

Solução:

a) Como $a = 2 > 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.



- $f(x) > 0$ em $]-\infty, 0[\ \cup\ ]2, +\infty[$
- $f(x) = 0$ em $x = 0$ e $x = 2$
- $f(x) < 0$ em $]0,2[$

Inequações do segundo grau

Exemplo: $(2x^2 - 4x)(-x^2 + 3x + 4) < 0$

Solução: Vamos agora realizar o mesmo procedimento para a função:

$$g(x) = -x^2 + 3x + 4.$$

b) $g(x) = -x^2 + 3x + 4 \qquad (a = -1,\ b = 3,\ c = 4)$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(-1)(4) = 9 + 16 = 25 > 0$$

Portanto, g possui dois zeros.

$$-x^2 + 3x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2(-1)} = \frac{-3 \pm 5}{-2} \implies x_1 = \frac{-3+5}{-2} = -1$$

$$\implies x_2 = \frac{-3-5}{-2} = 4$$

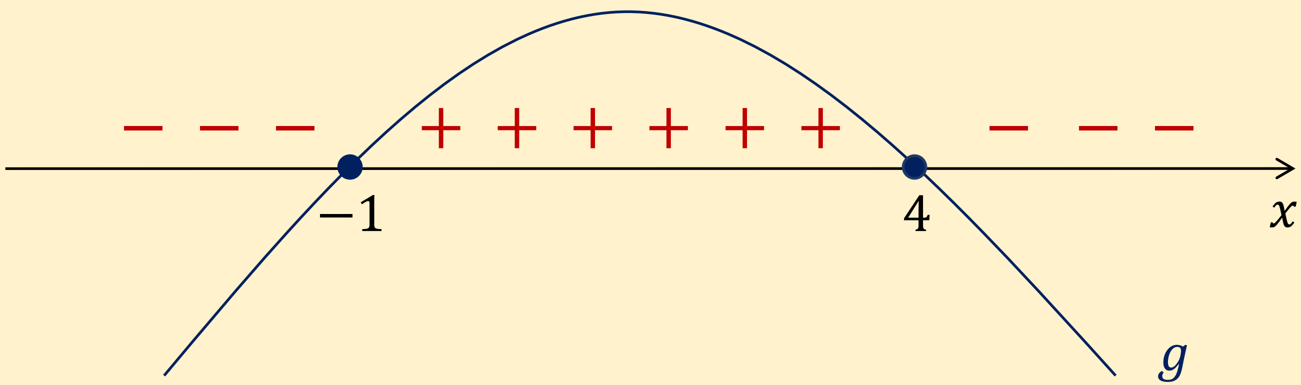
Como $a = -1 < 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para baixo.

Inequações do segundo grau

Exemplo: $(2x^2 - 4x)(-x^2 + 3x + 4) < 0$

Solução:

b)



- $g(x) > 0$ em $]-1{,}4[$
- $g(x) = 0$ em $x = -1$ e $x = 4$
- $g(x) < 0$ em $]-\infty, -1[\ \cup\ ]4, +\infty[$

Inequações do segundo grau

Exemplo: $(2x^2 - 4x)(-x^2 + 3x + 4) < 0$

Solução:

Logo, dos itens a) e b) segue que:

$-1 \quad 0 \quad 2 \quad 4 \quad x$

$f(x) = 2x^2 - 4x$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$
$g(x) = -x^2 + 3x + 4$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$
$f(x) \cdot g(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$

Portanto, $S =]-\infty, -1[\ \cup\ ]0,2[\ \cup\ ]4, +\infty[$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $$\frac{3x^2 - 7x + 5}{-x^2 + 6x - 8} \leq 0$$

Solução:

a) $y_1 = 3x^2 - 7x + 5 \qquad (a = 3,\ b = -7,\ c = 5)$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(3)(5) = 49 - 60 = -11 < 0$$

Portanto, y_1 não possui zeros reais.

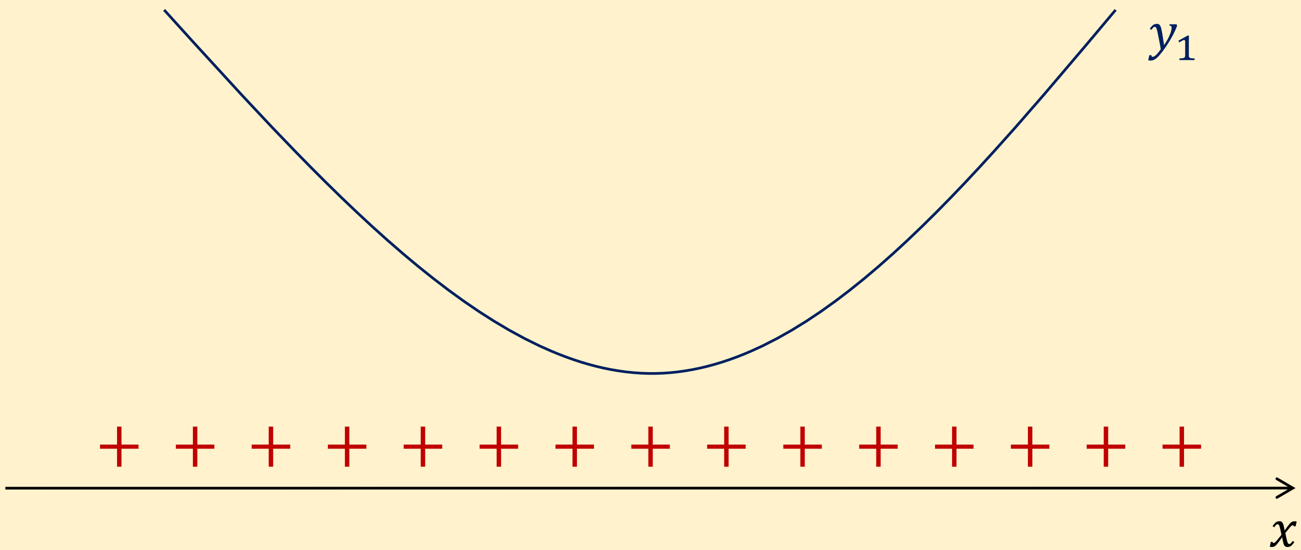
Como $a = 3 > 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $$\frac{3x^2 - 7x + 5}{-x^2 + 6x - 8} \leq 0$$

Solução:

a)



- $y_1 > 0$ em $\mathbb{R}$
- $\nexists\, x \in \mathbb{R} : y_1 = 0$
- $\nexists\, x \in \mathbb{R} : y_1 < 0$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $$\frac{3x^2 - 7x + 5}{-x^2 + 6x - 8} \leq 0$$

Solução: Vamos agora realizar o mesmo procedimento para a função $y_2 = -x^2 + 6x - 8$.

b) $y_2 = -x^2 + 6x - 8 \qquad (a = -1,\ b = 6,\ c = -8)$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(-1)(-8) = 36 - 32 = 4 > 0$$

Portanto, y_2 possui dois zeros.

$$-x^2 + 6x - 8 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{2(-1)} = \frac{-6 \pm 2}{-2} \implies x_1 = \frac{-6 + 2}{-2} = 2$$

$$\implies x_2 = \frac{-6 - 2}{-2} = 4$$

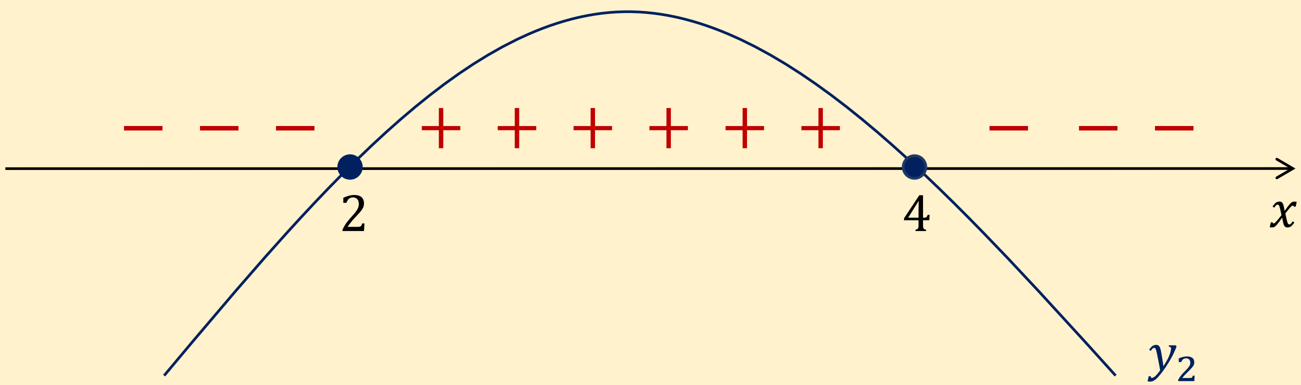
Como $a = -1 < 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para baixo.

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $$\frac{3x^2 - 7x + 5}{-x^2 + 6x - 8} \leq 0$$

Solução:

b)



- $y_2 > 0$ em $]2,4[$
- $y_2 = 0$ em $x = 2$ e $x = 4$
- $y_2 < 0$ em $]-\infty, 2[\ \cup\ ]4, +\infty[$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $$\frac{3x^2 - 7x + 5}{-x^2 + 6x - 8} \leq 0$$

Solução: Logo, dos itens a) e b) segue que:

$2 \qquad 4 \qquad x$

$y_1 = 3x^2 - 7x + 5$	$+$	$+$	$+$
$y_2 = -x^2 + 6x - 8$	$-$	$+$	$-$
$\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{3x^2 - 7x + 5}{-x^2 + 6x - 8}$	$-$	$+$	$-$

Note que $2 \notin S$ e $4 \notin S$ pois ambos os valores zeram o denominador da fração $\dfrac{3x^2 - 7x + 5}{-x^2 + 6x - 8}$.

Portanto, $S =]-\infty, 2[\ \cup \ ]4, +\infty[$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $x^4 < 625$

Solução:

$$x^4 < 625 \iff x^4 - 625 < 0 \iff (x^2)^2 - 25^2 < 0 \iff$$

$$\iff (x^2 + 25)(x^2 - 25) < 0$$

a) $f(x) = x^2 + 25$ $(a = 1,\ b = 0,\ c = 25)$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4(1)(25) = 0 - 100 = -100 < 0$$

Portanto, f não possui zeros reais.

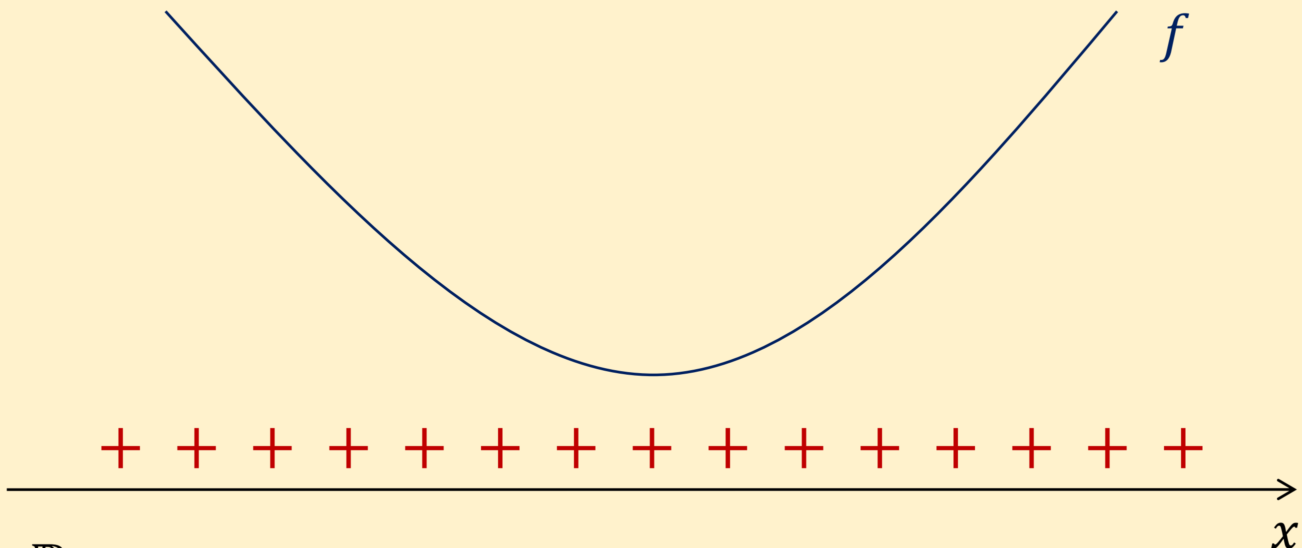
Como $a = 1 > 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $x^4 < 625$

Solução: $x^4 < 625 \iff (x^2 + 25)(x^2 - 25) < 0$

a) $f(x) = x^2 + 25$



- $f(x) > 0$ em $\mathbb{R}$
- $\nexists\, x \in \mathbb{R}: \; f(x) = 0$
- $\nexists\, x \in \mathbb{R}: \; f(x) < 0$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $x^4 < 625$

Solução: $x^4 < 625 \iff (x^2 + 25)(x^2 - 25) < 0$

Vamos agora realizar o mesmo procedimento para a função $g(x) = x^2 - 25$.

b) $g(x) = x^2 - 25 \qquad (a = 1,\ b = 0,\ c = -25)$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4(1)(-25) = 0 + 100 = 100 > 0$$

Portanto, g possui dois zeros.

$$x^2 - 25 = 0 \implies x^2 = 25 \implies \sqrt{x^2} = \sqrt{25} \implies |x| = 5 \implies x = \pm 5 \implies$$

$$\implies x_1 = -5 \text{ e } x_2 = 5$$

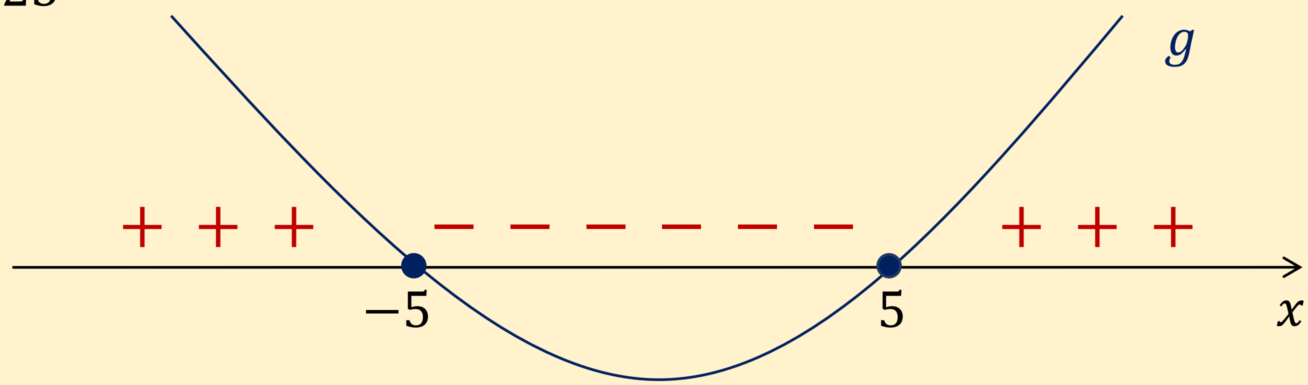
Como $a = 1 > 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $x^4 < 625$

Solução: $x^4 < 625 \iff (x^2 + 25)(x^2 - 25) < 0$

b) $g(x) = x^2 - 25$



- $g(x) > 0$ em $]-\infty, -5[\ \cup \ ]5, +\infty[$
- $g(x) = 0$ em $x = -5$ e $x = 5$
- $g(x) < 0$ em $]-5,5[$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $x^4 < 625$

Solução: $x^4 < 625 \iff (x^2+25)(x^2-25) < 0$

Logo, dos itens a) e b) segue que:

x		-5		5	
$f(x) = x^2 + 25$	$+$		$+$		$+$
$g(x) = x^2 - 25$	$+$		$-$		$+$
$f(x) \cdot g(x)$	$+$		$-$		$+$

Portanto, $S = \,]-5,5[$

Inequações do segundo grau

Observação: Podem ocorrer inequações que envolvem produtos ou quocientes cujos alguns fatores são expressões do segundo grau, alguns são expressões do primeiro grau e ainda outros fatores que são de outros tipos.

Exemplos:

1) $\dfrac{x^2+13}{x-1} \leq 1$ 2) $\dfrac{x(-3x^2+5)(-2x+3)}{(x+7)e^x} \geq 0$

O método para resolver este tipo de inequação é o mesmo que utilizamos aqui em exemplos anteriores, ou seja, associar a cada um desses fatores uma função, analisar o sinal destas funções, montar a tabela e determinar o conjunto solução.

Deixamos como exercício a resolução dos dois exemplos anteriores, cujas respostas finais são:

1) $\dfrac{x^2+13}{x-1} \leq 1$ 2) $\dfrac{x(-3x^2+5)(-2x+3)}{(x+7)e^x} \geq 0$

$S = \left]-\infty, 1\right[$ $S = \left]-7, -\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[0, \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$

Inequações do segundo grau

Vamos ilustrar através do exemplo a seguir que algumas vezes podemos resolver a mesma inequação de várias formas.

Exemplo: Resolva: $(x+9)(2x-2) \leq 0$

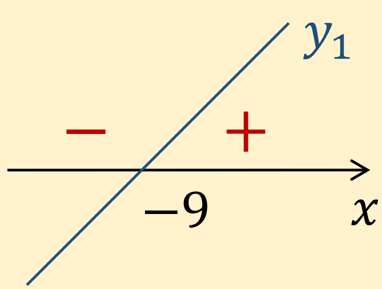
Solução 1:

$y_1 = x + 9$

$0 = x + 9$

$x = -9$ (raiz)

y_1 é crescente pois $a = 1 > 0$

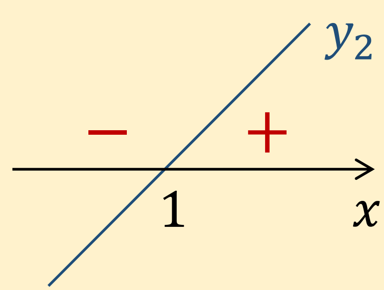


$y_2 = 2x - 2$

$0 = 2x - 2$

$x = 1$ (raiz)

y_2 é crescente pois $a = 2 > 0$



x		-9		1	
$y_1 = x + 9$	$-$		$+$		$+$
$y_2 = 2x - 2$	$-$		$-$		$+$
$y_1 \cdot y_2$	$+$		$-$		$+$

Portanto, o conjunto solução é:

$$S = [-9,1]$$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $(x+9)(2x-2) \leq 0$

Solução 2:

$$(x+9)(2x-2) \leq 0 \iff 2x^2+16x-18 \leq 0$$

$$f(x) = 2x^2+16x-18 \qquad (a=2,\ b=16,\ c=-18)$$

$$\Delta = b^2-4ac = (16)^2-4(2)(-18) = 256+144 = 400 > 0$$

Portanto, f possui dois zeros.

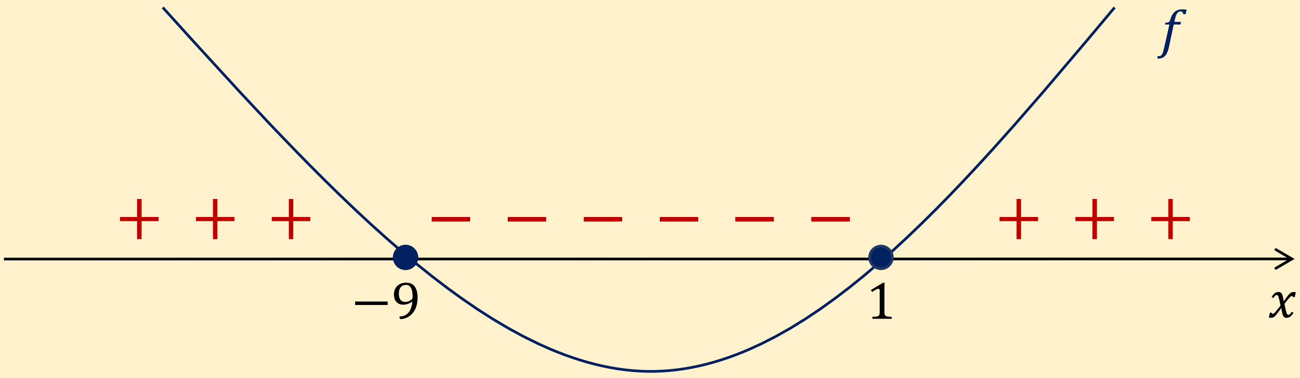
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 \pm \sqrt{400}}{2(2)} = \frac{-16 \pm 20}{4} \implies x_1 = \frac{-16-20}{4} = -9$$

$$\implies x_2 = \frac{-16+20}{4} = 1$$

Como $a = 2 > 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.

Exemplo: Resolva: $(x+9)(2x-2) \leq 0$

Solução 2:



Lembre que

$$(x+9)(2x-2) \leq 0 \iff 2x^2 + 16x - 18 \leq 0 \iff f(x) \leq 0$$

Portanto, $S = [-9,1]$

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Resolva as inequações abaixo e apresente o conjunto solução em notação de intervalo:

(a) $\dfrac{2}{x} < \dfrac{3}{x-4}$

(b) $\dfrac{1}{x+1} \geq \dfrac{3}{x-2}$

(c) $x^3 - x^2 - x - 2 > 0$

(d) $x^3 - 3x + 2 \leq 0$

2) Ache todos os valores de x para os quais a expressão dada resulte em um número real:

(a) $\sqrt{x^2 + x - 6}$

(b) $\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}$

Exercícios

3) Resolva as inequações abaixo e apresente o conjunto solução na reta numérica:

(a) $(x^2 + x - 2)(-x + 2) \leq 0$

(b) $x(1 - x)(x + 4) < 0$

(c) $\dfrac{2x + 1}{x - 2} < 1$

(d) $\dfrac{x - 2}{x + 3} > 0$

(e) $\dfrac{3x - 1}{x + 1} \leq 2$

(f) $-1 < 2x - 3 \leq x$

4) Determine o domínio das seguintes funções:

(a) $y = \sqrt{x(x - 5)}$

(b) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 15}$

(c) $\sqrt{\dfrac{x - 2}{x + 4}}$

(d) $y = \sqrt{\dfrac{x - 1}{-x + 3}} - \sqrt{\dfrac{-x^2 + 1}{x^2 - 4x}}$

Exercícios

5) Determine o conjunto solução das seguintes desigualdades:

(a) $m + \dfrac{3 - m^2}{m - 2} \geq -3$

(b) $\dfrac{(x-1)(x+3)}{x-5} > 0$

6) Dadas as funções $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-2}$ e $g(x) = 1$ determine os valores reais de x para que se tenha: $f(x) > g(x)$

Respostas

Exercício 1:

(a) $S =]-8,0[\; \cup \;]4, +\infty[$

(b) $S = \left]-\infty, -\frac{5}{2}\right] \cup \;]-1,2[$

(c) $S =]2, +\infty[$

(d) $S =]-\infty, -2] \; \cup \; \{1\}$

Exercício 2:

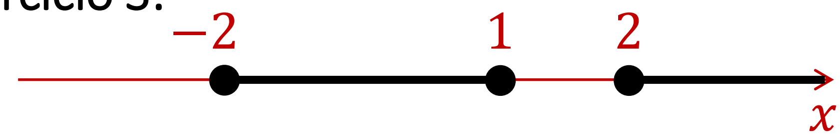
(a) $S =]-\infty, -3] \; \cup \; [2, +\infty[$

(b) $S =]-\infty, -2] \; \cup \;]1, +\infty[$

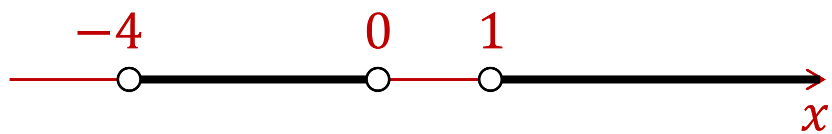
Respostas

Exercício 3:

(a)



(b)



(c)

(d)

(e)

(f)

Respostas

Exercício 4:

(a) $S =]-\infty, 0] \cup [5, +\infty[$

(b) $S =]-\infty, -3] \cup [5, +\infty[$

(c) $S =]-\infty, -4[\cup [2, +\infty[$

(d) $S = [1,3[$

Exercício 5:

(a) $S =]-\infty, 2[\cup [3, +\infty[$

(b) $S =]-3,1[\cup]5, +\infty[$

Exercício 6: $S =]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA

O GAMA possui monitorias de:

- **Matemática Elementar, Cálulo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e equivalentes)
    - **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
        - **Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3** (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino

Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Apoio ao Cálculo

Aula 10

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Função do primeiro grau

Definição: Dados a e $b \in \mathbb{R}$ tais que $a \neq 0$.

A função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$ é chamada de função do primeiro grau.

Exemplos

1) $f(x) = x$ $\quad a = 1 \;,\; b = 0$

2) $f(x) = 2x + 1$ $\quad a = 2 \;,\; b = 1$

3) $f(x) = -5x$ $\quad a = -5 \;,\; b = 0$

4) $f(x) = 4 - 3x$ $\quad a = -3 \;,\; b = 4$

Função do primeiro grau

Em uma função do primeiro grau o número a é chamado de coeficiente angular e o número b é chamado de coeficiente linear.

$$y = ax + b$$

Coeficiente angular

Coeficiente linear

Quando $b = 0$, a função $y = ax$ é chamada de função linear.

Gráfico da função do primeiro grau

Teorema: O gráfico de uma função do primeiro grau é uma **reta**.

Passos para o esboço do gráfico:

1) Escolha livremente um número x_1 e calcule $f(x_1)$.

2) Indique o $A(x_1, f(x_1))$ no plano cartesiano.

3) Escolha um número x_2, diferente de x_1, e calcule $f(x_2)$.

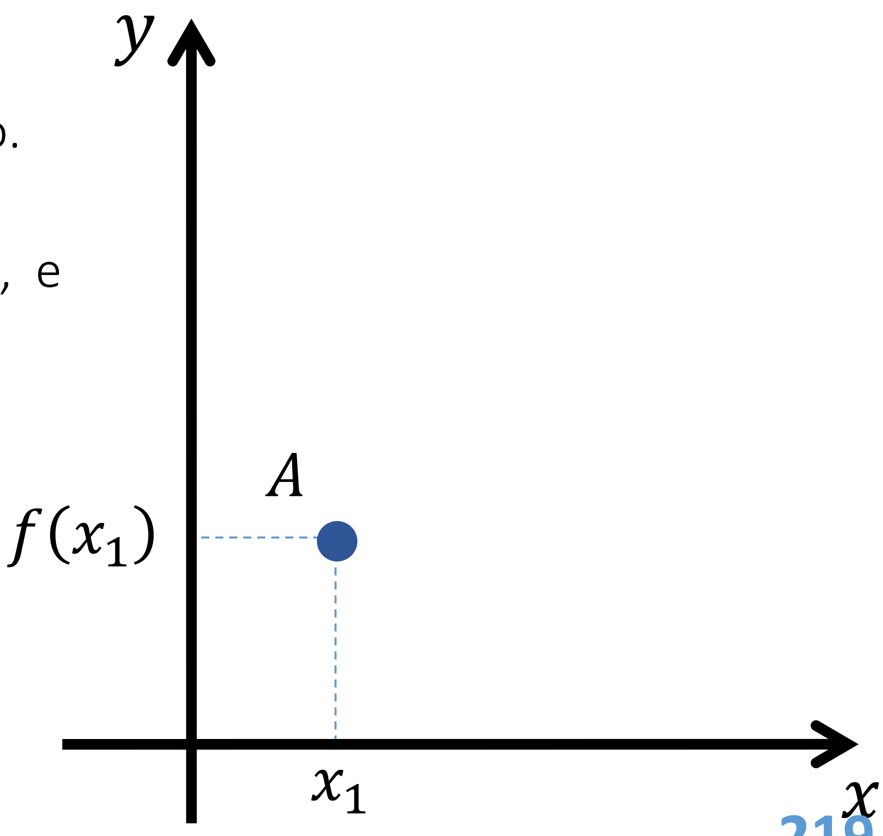


Gráfico da função do primeiro grau

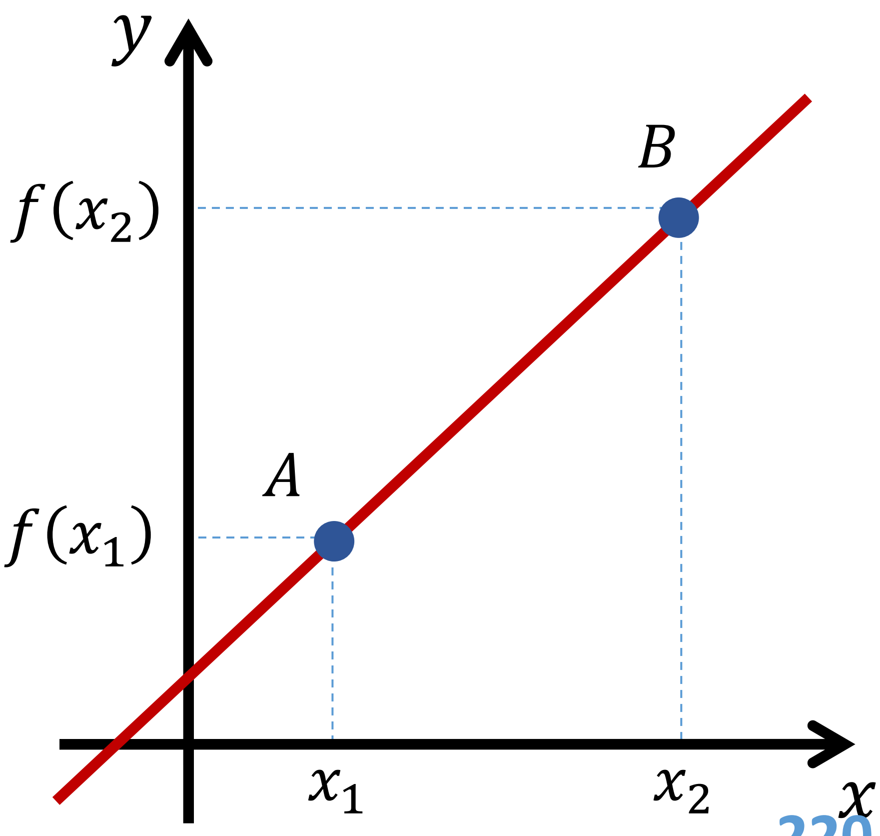
Teorema: O gráfico de uma função do primeiro grau é uma **reta**.

Passos para o esboço do gráfico:

4) Indique o $B(x_2, f(x_2))$ no plano cartesiano.

Por dois pontos distintos passa uma única reta!

5) Trace a reta passando pelos pontos A e B.



Exemplos

5) Esboce o gráfico da função $f(x) = x + 1$.

Solução:

Escolhendo $x_1 = 1$, tem-se

$$f(x_1) = f(1) = 1 + 1 = 2$$

e, portanto,

$A(-1, 0)$ (primeiro ponto)

Escolhendo $x_2 = 2$, tem-se

$$f(x_2) = f(2) = 2 + 1 = 3.$$

e, portanto,

$B(2, 3)$ (segundo ponto)

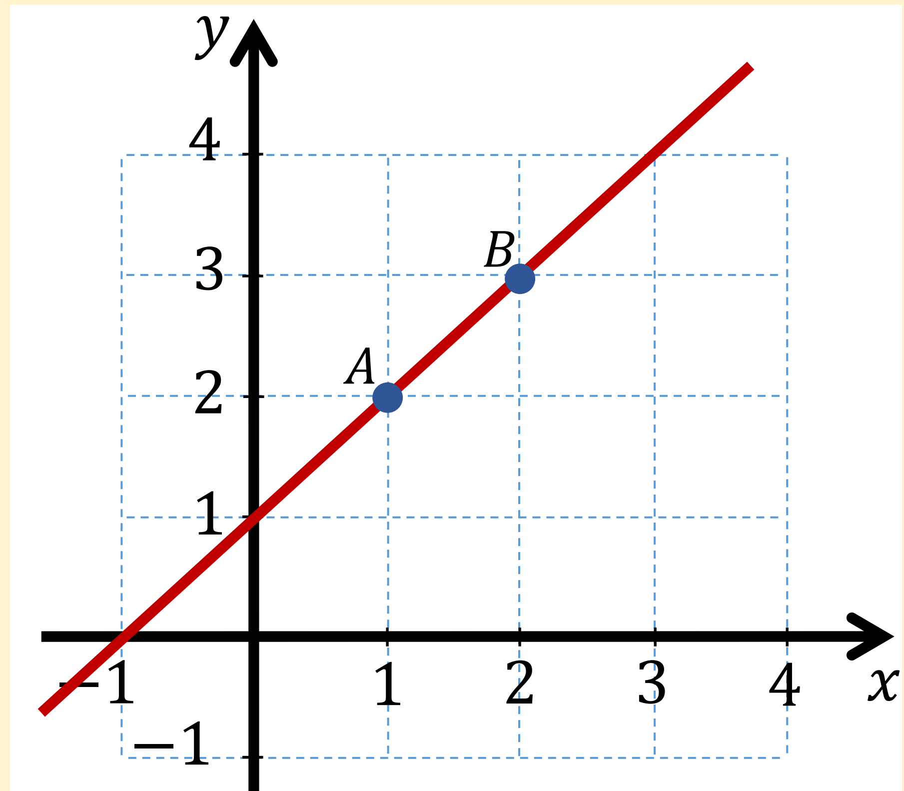


Gráfico da função

Observação: Se escolhermos $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$, por exemplo, o gráfico será o mesmo!

Exemplos

5) Esboce o gráfico da função $f(x) = x + 1$.

Solução:

Escolhendo $x_1 = -1$, tem-se

$$f(x_1) = f(-1) = -1 + 1 = 0$$

e, portanto,

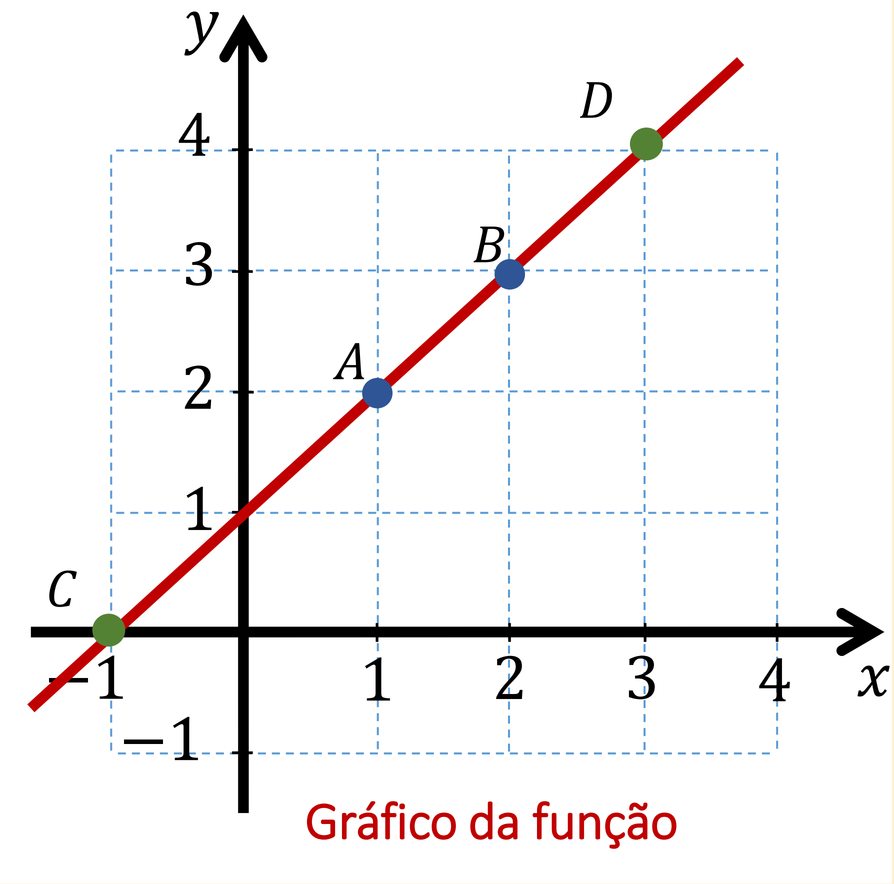
$C(-1, 0)$ (terceiro ponto)

Escolhendo $x_2 = 3$, tem-se

$$f(x_2) = f(3) = 3 + 1 = 4.$$

e, portanto,

$D(3, 4)$ (quarto ponto)



Exemplos

6) Esboce o gráfico da função $f(x) = -x + 3$.

Solução:

Escolhendo $x_1 = 0$, tem-se

$$f(x_1) = f(0) = -(0) + 3 = 3$$

e, portanto,

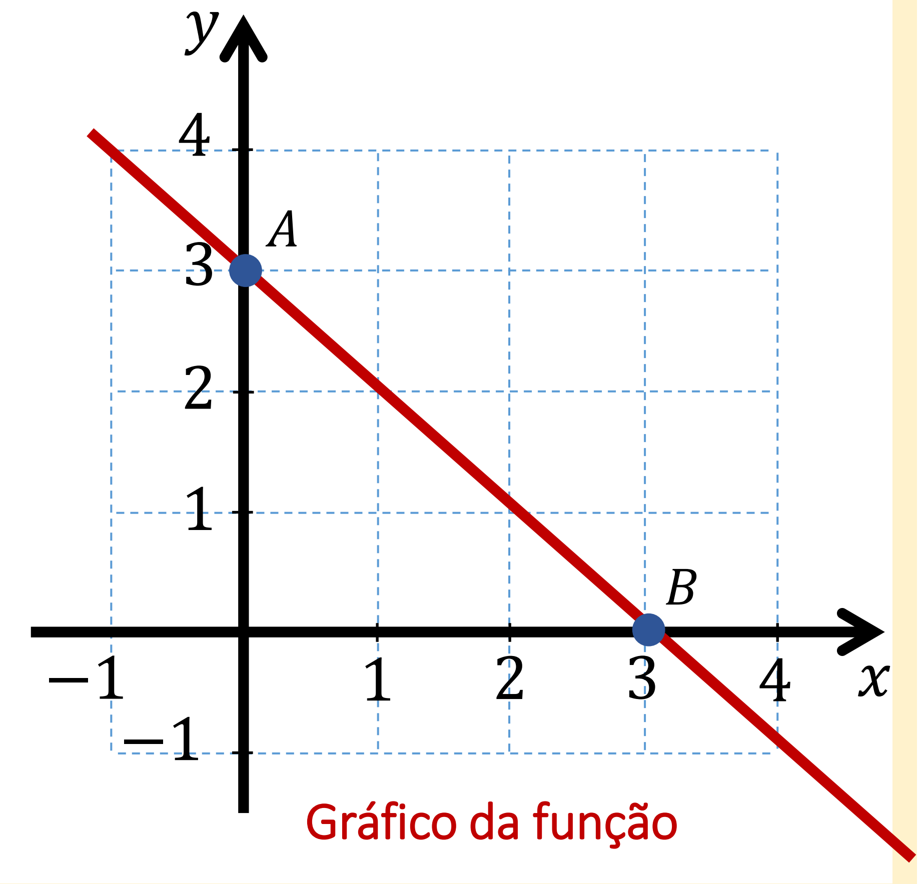
$A(0,3)$ (primeiro ponto)

Escolhendo $x_2 = 3$, tem-se

$$f(x_2) = f(3) = -(3) + 3 = 0$$

e, portanto,

$B(3,0)$ (segundo ponto)



Exemplos

7) Esboce o gráfico da função $f(x) = x$.

Solução:

Escolhendo $x_1 = 0$, tem-se

$$f(x_1) = f(0) = 0$$

e, portanto,

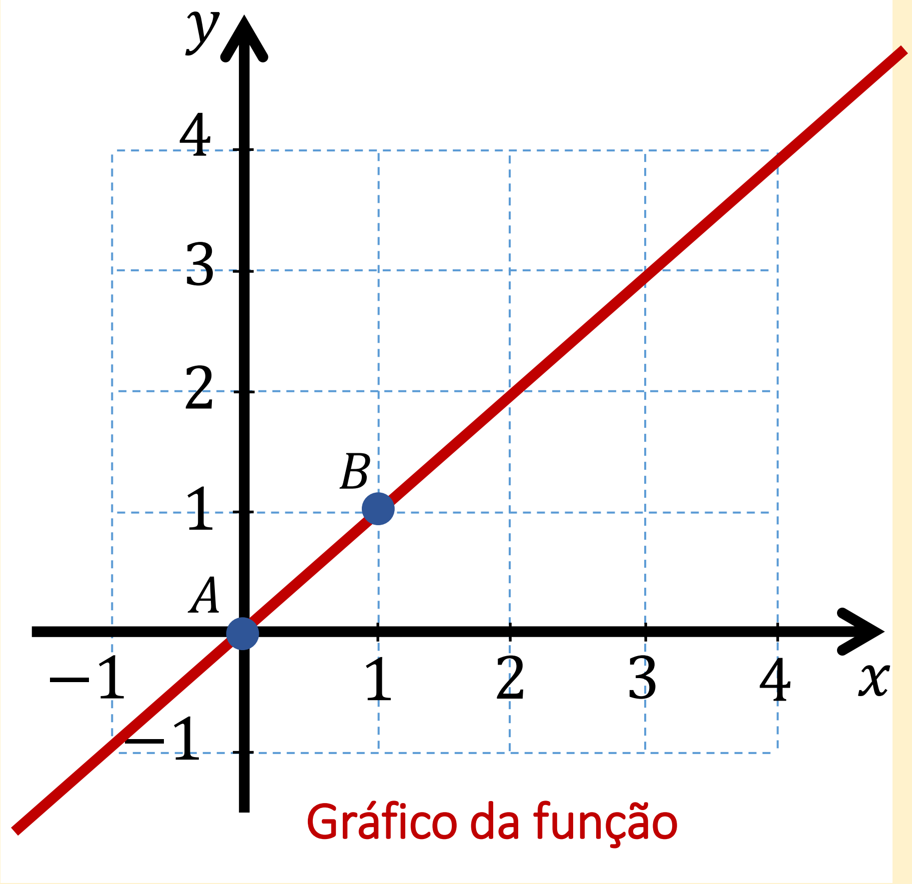
$A(0,0)$ (primeiro ponto)

Escolhendo $x_2 = 1$, tem-se

$$f(x_2) = f(1) = 1$$

e, portanto,

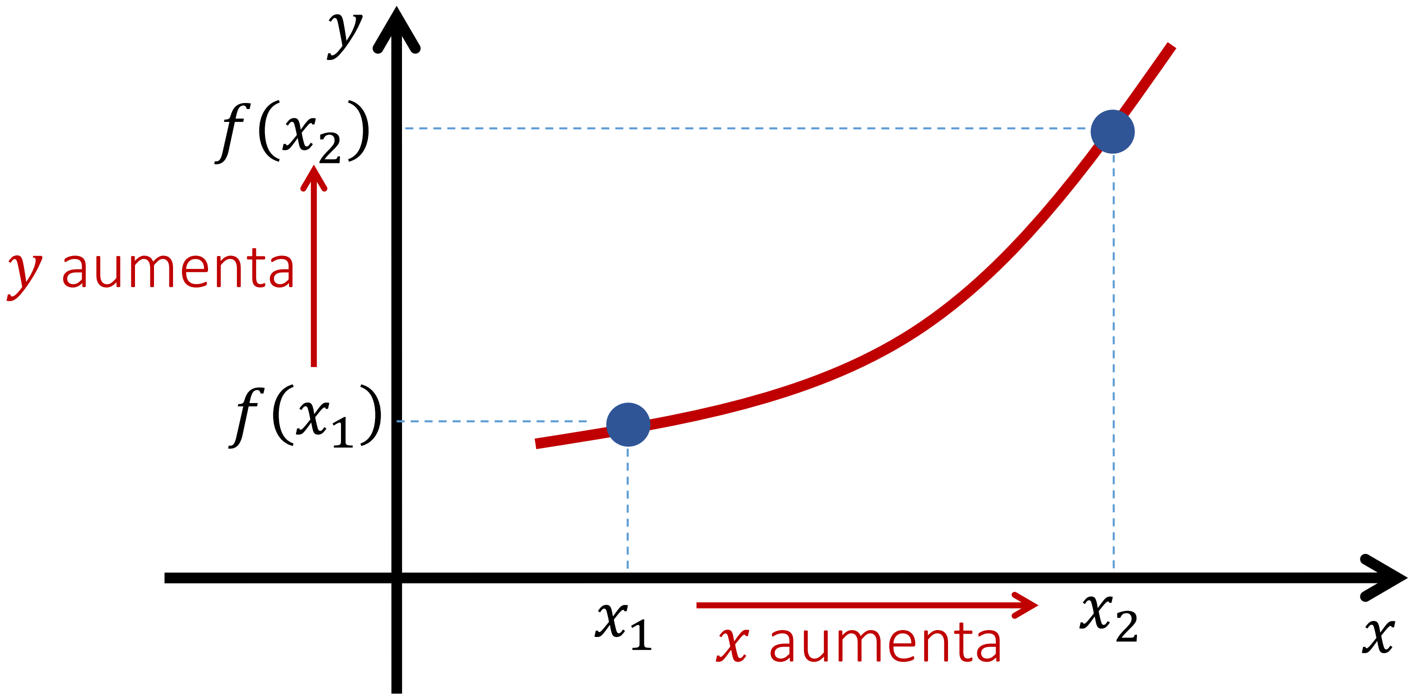
$B(1,1)$ (segundo ponto)



Monotonia (crescimento/decrescimento)

Definição: Uma função f é dita crescente em um intervalo I se, para quaisquer x_1, x_2 pertencentes a I, tais que $x_1 < x_2$ tem-se

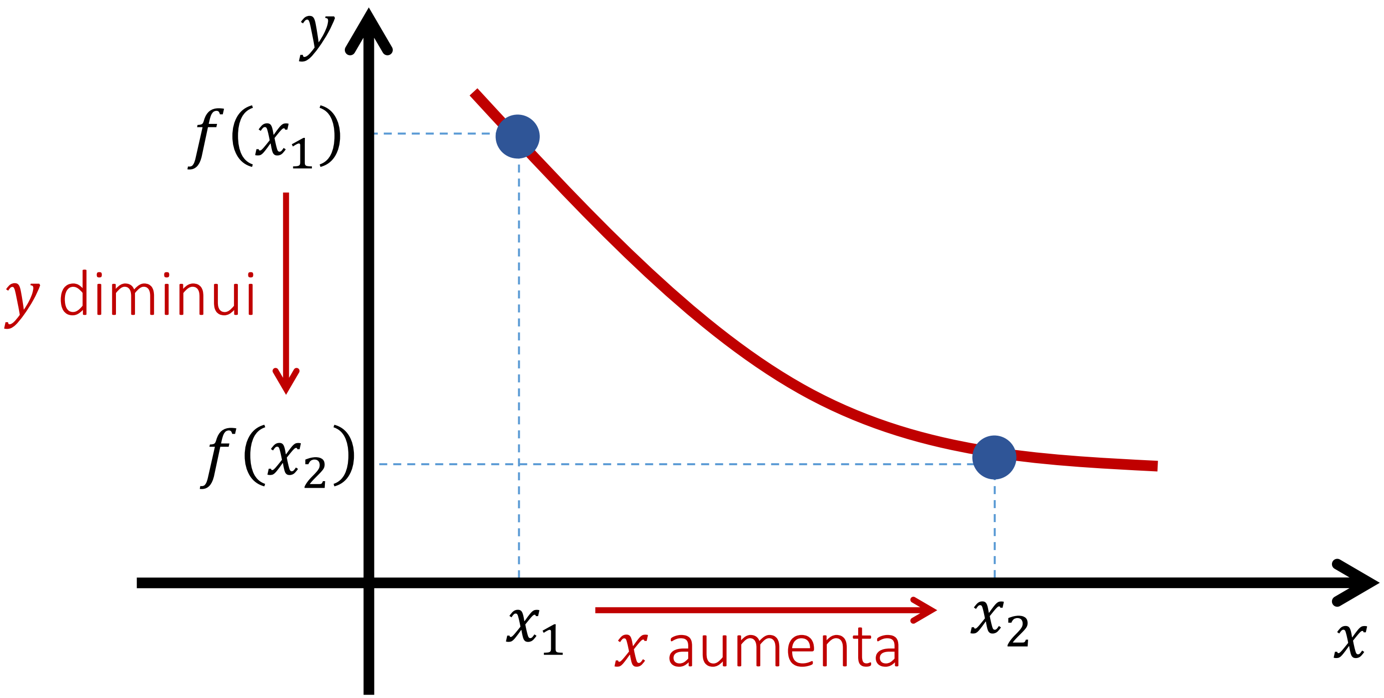
$$f(x_1) < f(x_2)$$



Monotonia (crescimento/decrescimento)

Definição: Uma função f é dita decrescente em um intervalo I se, para quaisquer x_1, x_2 pertencentes a I, tais que $x_1 < x_2$ tem-se

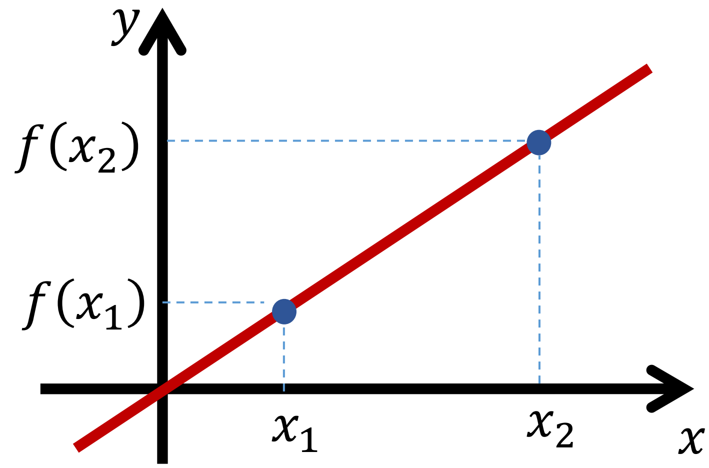
$$f(x_1) > f(x_2)$$



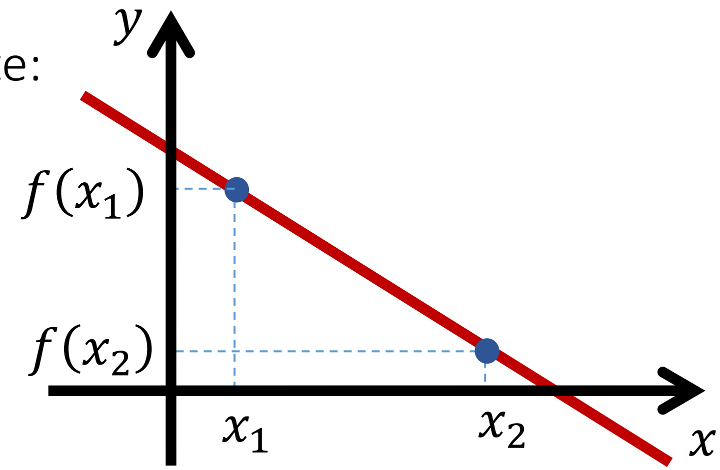
Monotonia (crescimento/decrescimento)

O crescimento e o decrescimento de uma função do primeiro grau dada por $y = ax + b$ está diretamente ligado ao sinal do coeficiente angular.

1) Se $a > 0$, então a função é crescente:



2) Se $a < 0$, então a função é decrescente:



Zeros de uma função

Definição: Um número c é chamado de zero da função se

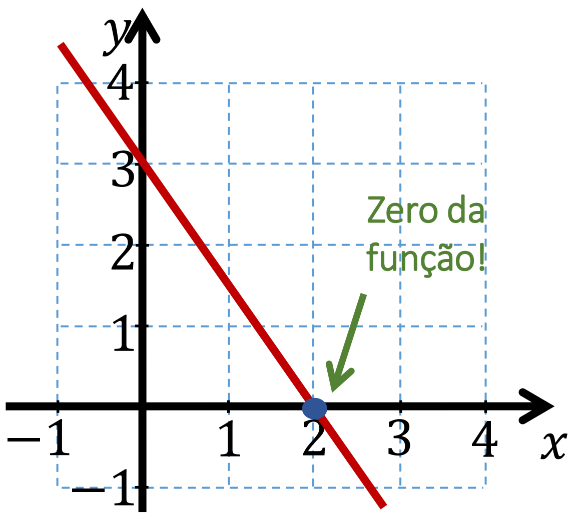
$$f(c) = 0$$

No gráfico, um zero de uma função pode ser interpretado como um intercepto da curva com o eixo x.

Exemplos

1) Determine os zeros da função dada.

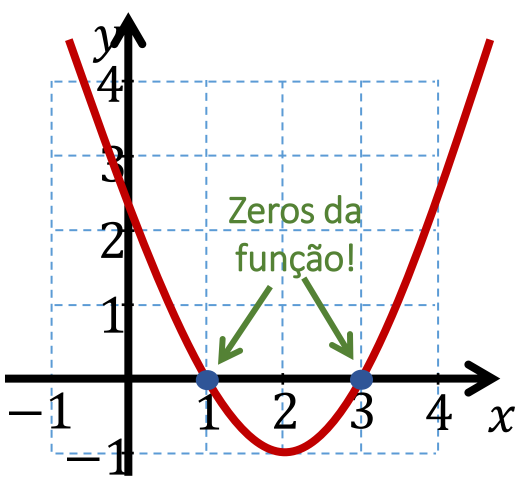
(a)



Solução:

Um único zero em $x = 2$.

(b)



Solução:

Dois zeros, em $x = 1$ e $x = 3$.

Zeros de uma função

Observação: Os zeros de uma função $y = f(x)$ podem ser obtidos resolvendo a equação $f(x) = 0$. Se obtém, assim, os valores de x para os quais $y = 0$, ou seja, os interceptos do gráfico da função com o eixo x.

Zeros da função do primeiro grau.

$$f(x) = ax + b$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0$$

$$\Rightarrow ax = -b$$

$$\Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Exemplos

8) Determine o zero da função $f(x) = 2x - 4$.

Solução:

1) Resolvendo a equação.

$$2x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

2) Utilizando diretamente a fórmula.

$$x = -\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{-4}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

Portanto, o gráfico desta função intercepta o eixo x no ponto $(2,0)$.

Sinal de uma função

Definição: Uma função f é **positiva** em um número c se

$$f(c) > 0.$$

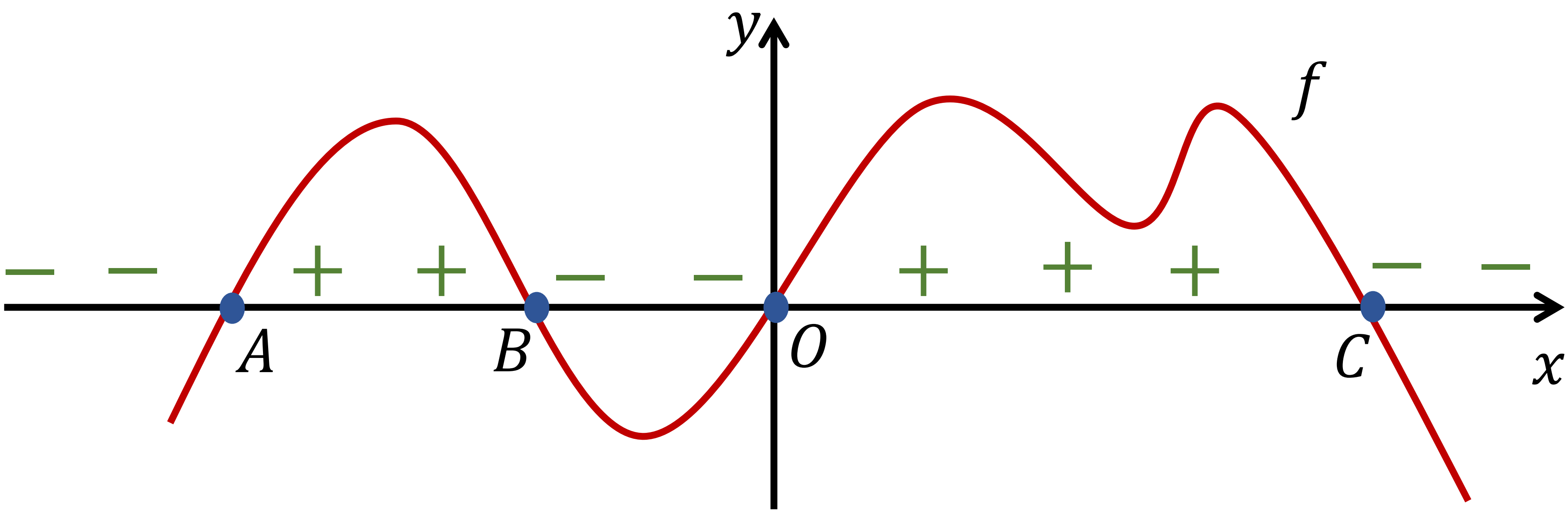
Uma função f é **negativa** em um número c se

$$f(c) < 0.$$

Observação: Determinar o sinal de uma função f significa encontrar todos os valores de x para os quais f é positiva e todos os valores de x para os quais f é negativa.

No gráfico, a função é positiva nos intervalos onde o gráfico está acima do eixo x e negativa nos intervalos onde o gráfico está abaixo do eixo x.

Sinal de uma função



- A função é positiva em: $(A, B) \cup (O, C)$.
- A função é negativa em: $(-\infty, A) \cup (B, O) \cup (C, +\infty)$.

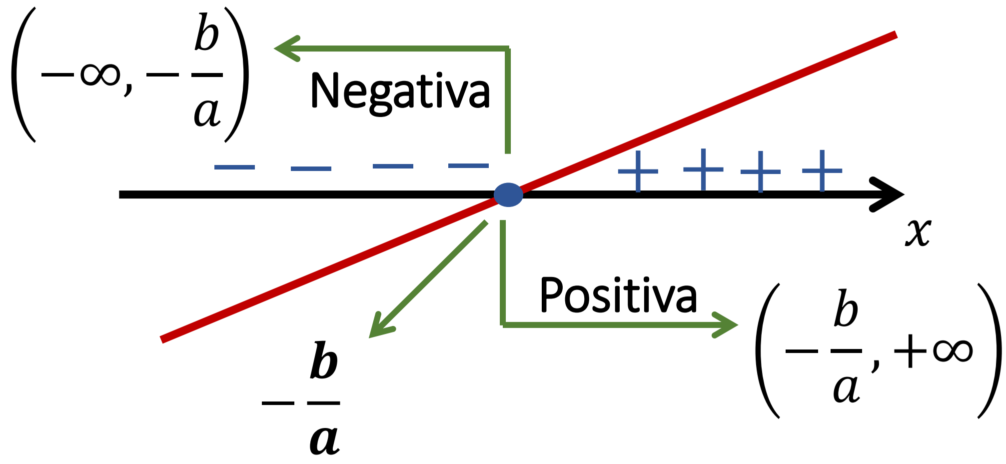
Para determinar o sinal de uma função do primeiro grau

$$y = ax + b$$

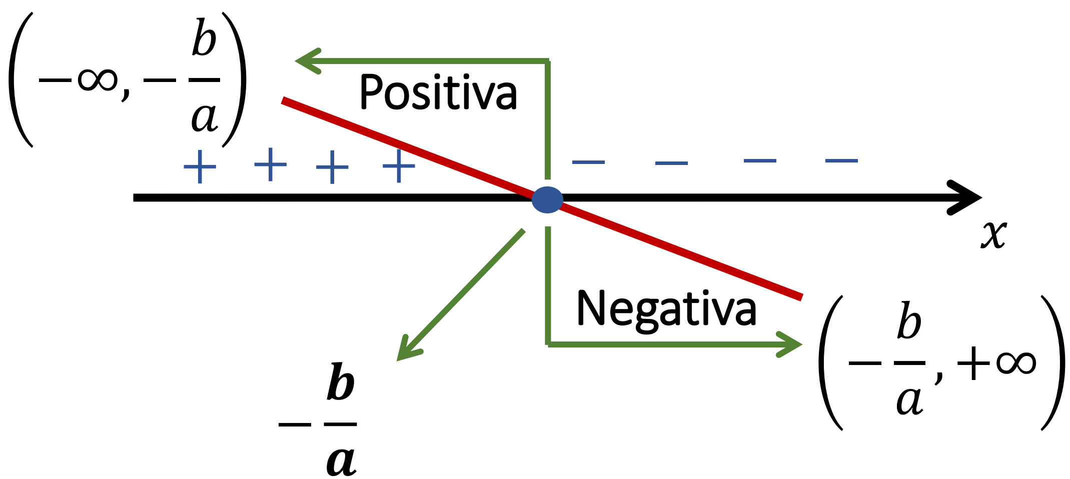
basta encontrar o zero da função e verificar se ela é crescente ou decrescente.

Sinal da função do primeiro grau

Crescente: $a > 0$



Decrescente: $a < 0$



Exemplos

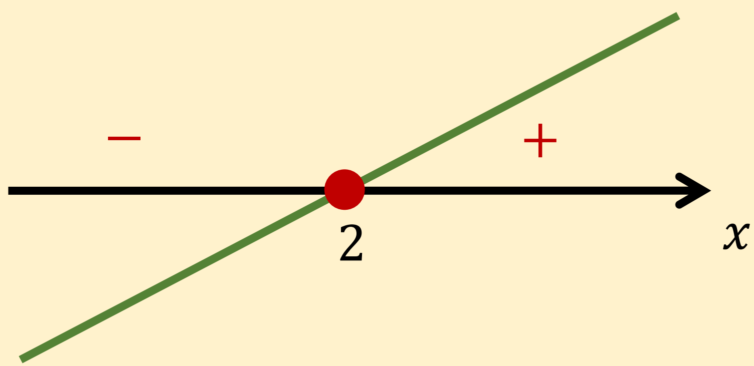
9) Determine o sinal da função $f(x) = 2x - 4$.

Solução:

Como $a = 2$ e $b = -4$ temos:

$$-\frac{b}{a} = -\frac{-4}{2} = 2$$ (Zero da Função)

$a = 2 > 0$ (crescente)



Negativa: $(-\infty, \mathbf{2})$

Positiva: $(\mathbf{2}, +\infty)$

Exemplos

10) Encontre o domínio da função $f(x) = \sqrt{1 - 3x}$.

Solução:

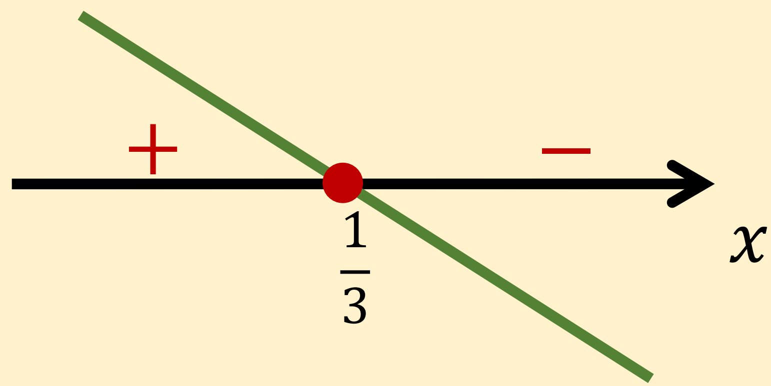
A função que está dentro da raiz deve ser não negativa, ou seja

$$y = 1 - 3x \geq 0$$

Como $a = -3$ e $b = 1$ temos:

$$-\frac{b}{a} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$$ (Zero da Função)

$a = -3 < 0$ (decrescente)



$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{3}\right\}$$

Exemplos

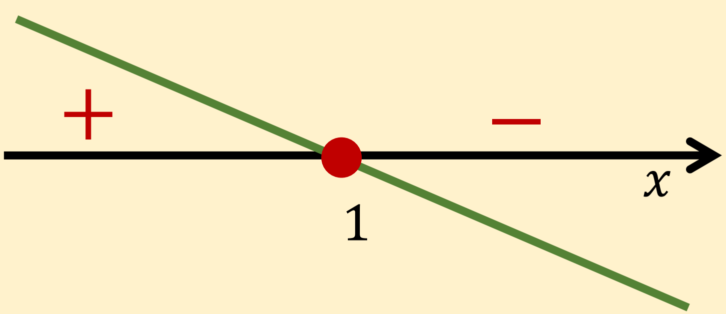
11) Determine o domínio da função $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{3x+6}}$.

Solução:

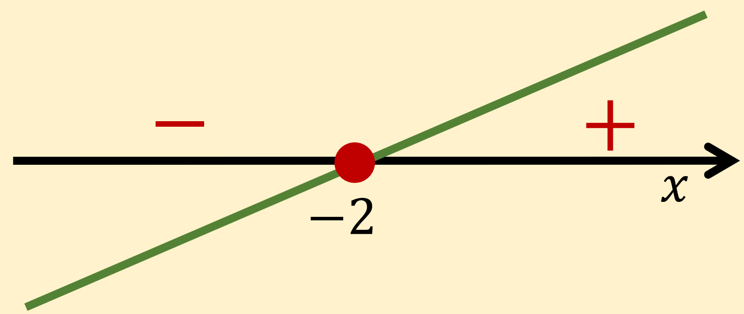
Neste caso, a condição imposta pela raiz quadrada é:

$$\frac{1-x}{3x+6} \geq 0$$

Sinal do fator $1 - x$:



Sinal do fator $3x + 6$:

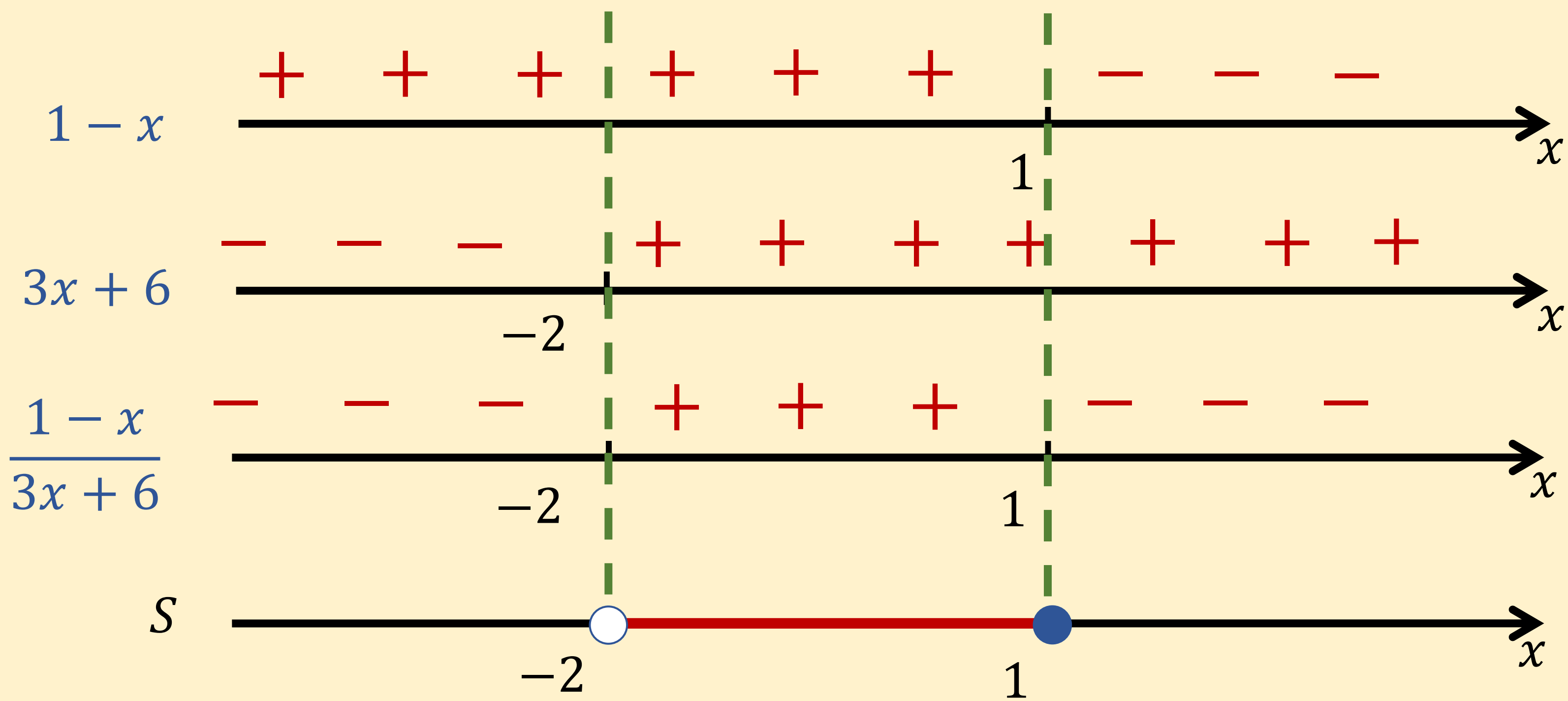


Exemplos

11) Determine o domínio da função $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{3x+6}}$.

Solução:

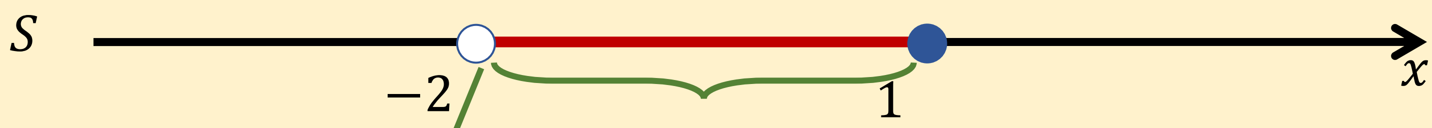
Analisando o sinal do quociente, tem-se:



Exemplos

11) Determine o domínio da função $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{3x+6}}$.

Solução:



Note que $-2 \notin D(f)$ pois -2 zera o denominador!!

Intervalo onde:

$$\frac{1-x}{3x+6} \geq 0$$

Portanto,

$$D(f) = (-2,1]$$

Função do segundo grau

Definição: Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $a \neq 0$.

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ é chamada de função do segundo grau ou função quadrática.

Exemplos

12) $f(x) = x^2$ $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$

13) $f(x) = -x^2 + 1$ $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$

14) $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ $a = 2$, $b = 3$, $c = -1$

Gráfico da função do segundo grau

Teorema: O gráfico de uma função do primeiro grau é uma parábola.

A parábola pode ter concavidade voltada para cima ou concavidade voltada para baixo, de acordo com o sinal do coeficiente a.

Concavidade:

$$\boldsymbol{a > 0}$$

$$\boldsymbol{a < 0}$$

Exemplos

15) Esboce o gráfico da função $f(x) = x^2$.

Solução:

$f(-3) = (-3)^2 = 9$

$f(-2) = (-2)^2 = 4$

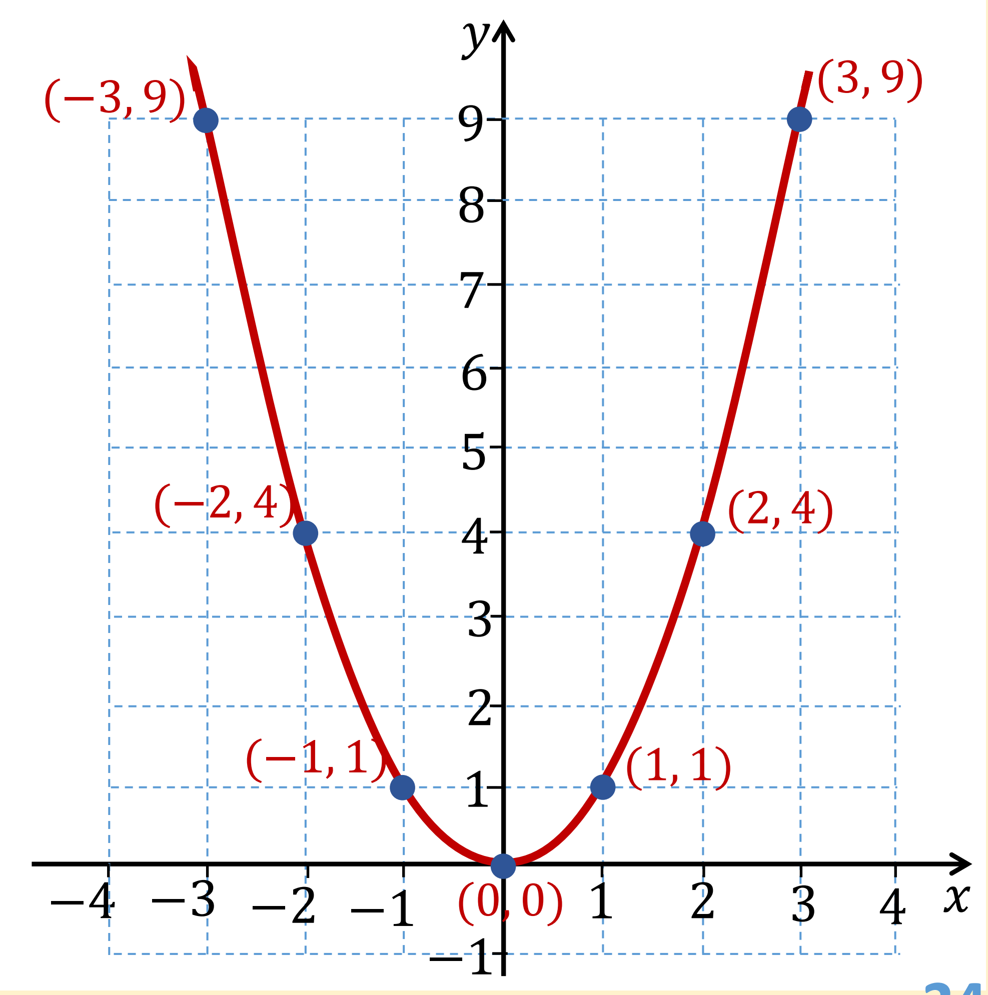
$f(-1) = (-1)^2 = 1$

$f(0) = 0^2 = 0$

$f(1) = (1)^2 = 1$

$f(2) = (2)^2 = 4$

$f(3) = (3)^2 = 9$



Zeros da função do segundo grau

Os zeros da função $y = ax^2 + bx + c$ podem ser obtidos resolvendo a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ utilizando a fórmula de Bháskara.

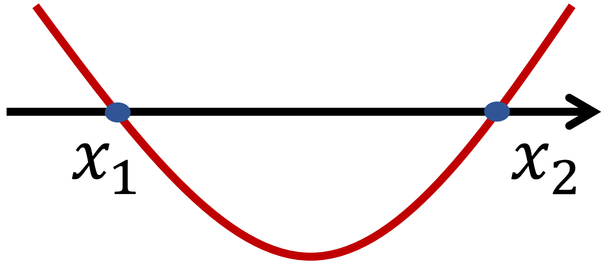
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

A quantidade de zeros reais obtidas para uma função quadrática depende do sinal de Δ.

$\Delta > 0$

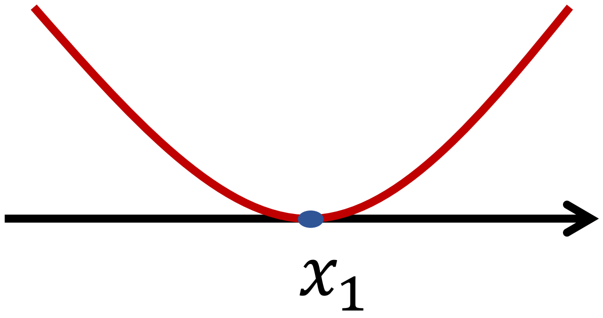
Dois zeros



Zeros da função do segundo grau

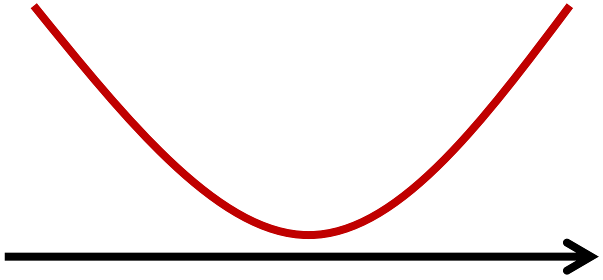
$\Delta = 0$

Um único zero



$\Delta < 0$

Nenhum zero

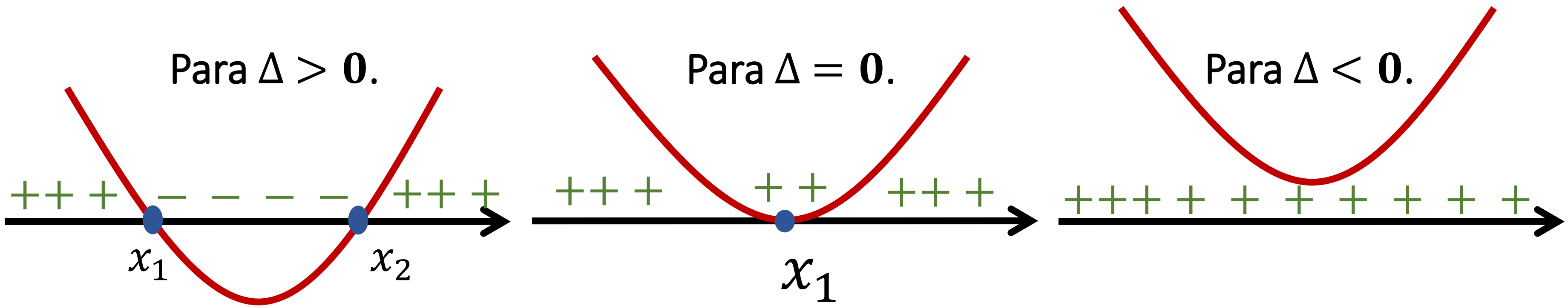


Sinal da função do segundo grau

O sinal da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ depende dos sinais de a (determina a concavidade) e de Δ (determina a quantidade de zeros).

Concavidade voltada para cima

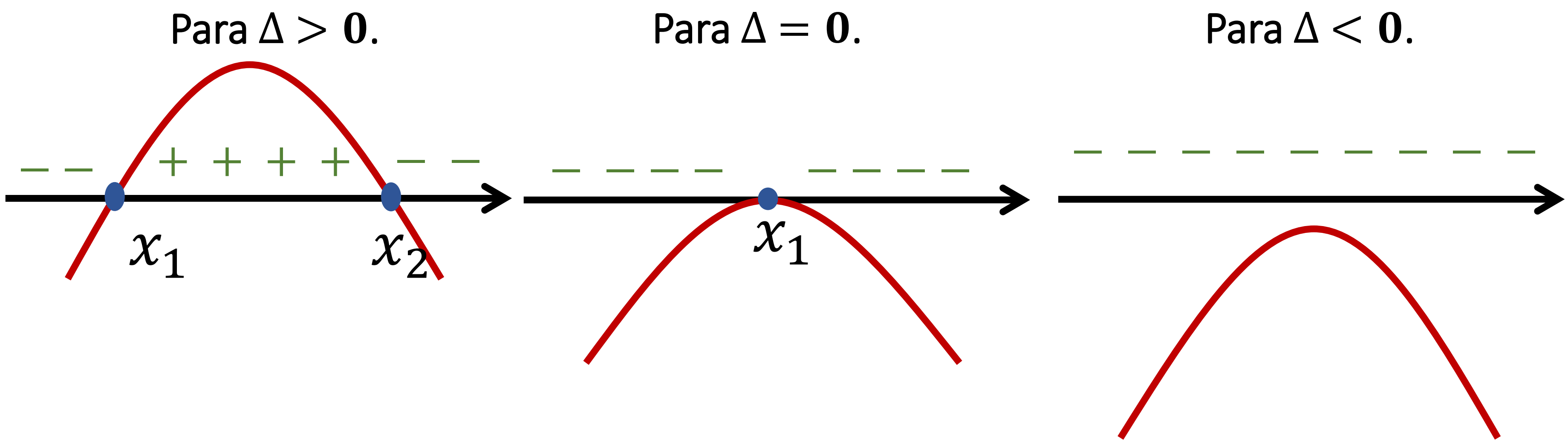
$(a > 0)$



Sinal da função do segundo grau

Concavidade voltada para baixo

$(a < 0)$



Exemplos

16) Esboce o gráfico, determine os zeros e o sinal da função quadrática $y = x^2 - 4x + 3$.

Solução:

Neste caso, tem-se

$$a = 1, \quad b = -4 \text{ e } c = 3.$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4.(1).(3) = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2(1)} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1.$$

Portanto,

$$x_1 = 1 \text{ e } x_2 = 3 \qquad \text{(Zeros de } f\text{)}$$

Exemplos

16) Esboce o gráfico, determine os zeros e o sinal da função quadrática $y = x^2 - 4x + 3$.

Solução:

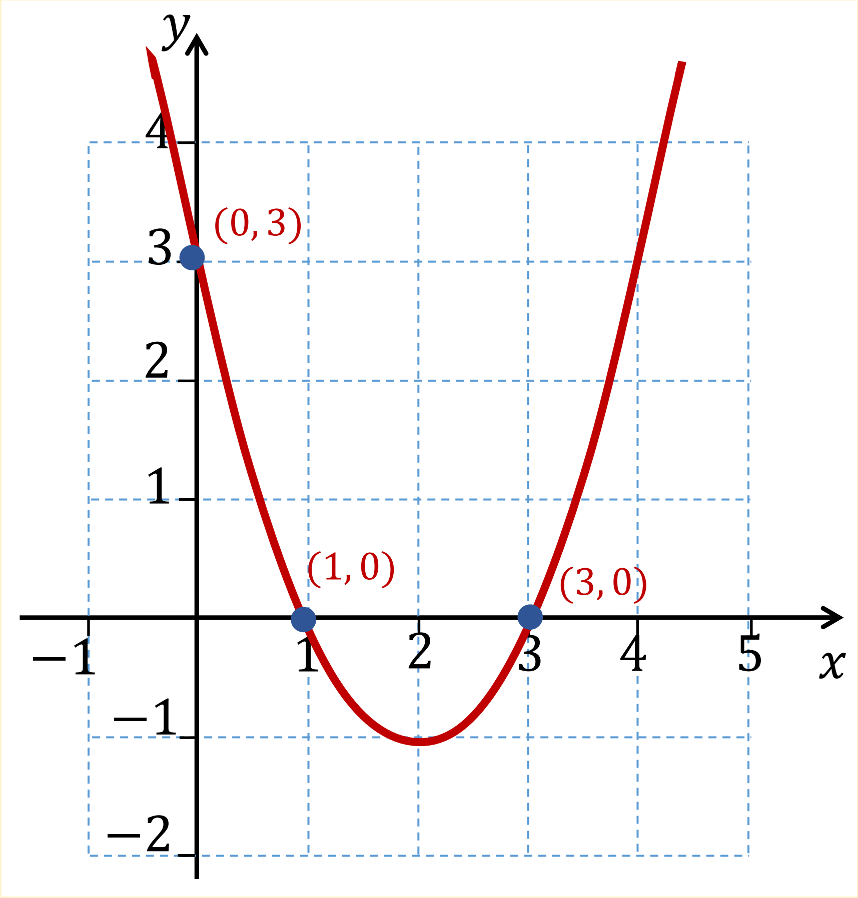
Como $c = 3$, tem-se que o gráfico intercepta o eixo y no ponto $(0, 3)$.

Como $a > 0$, a concavidade é voltada para cima.

Sinal

Positiva: $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

Negativa: $(1,3)$



Exemplos

17) Determine o domínio da função $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - x + 6}$.

Solução:

Será necessário determinar os valores de x para os quais a função $y = x^2 - x - 6$ é não negativa.

Para isso, será analisado o sinal desta função.

Usando a fórmula de Bháskara para encontrar os zeros desta função, tem-se:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

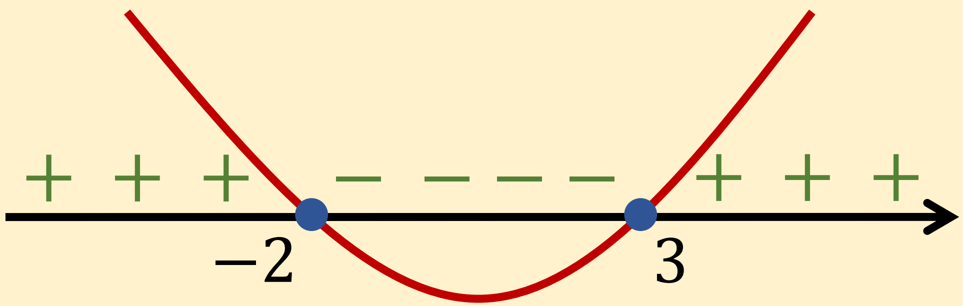
Exemplos

17) Determine o domínio da função $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - x + 6}$.

Solução:

$$x_1 = \frac{1+5}{2} = 3 \quad ; \quad x_2 = \frac{1-5}{2} = -2$$

Como $a > 0$, a parábola possui concavidade voltada para cima.



Sinal da função

Portanto, o conjunto solução da inequação:

$$x^2 - x - 6 \geq 0$$

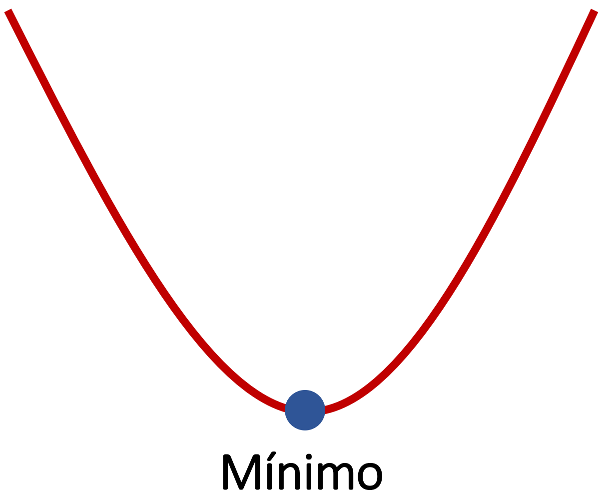
é dado por:

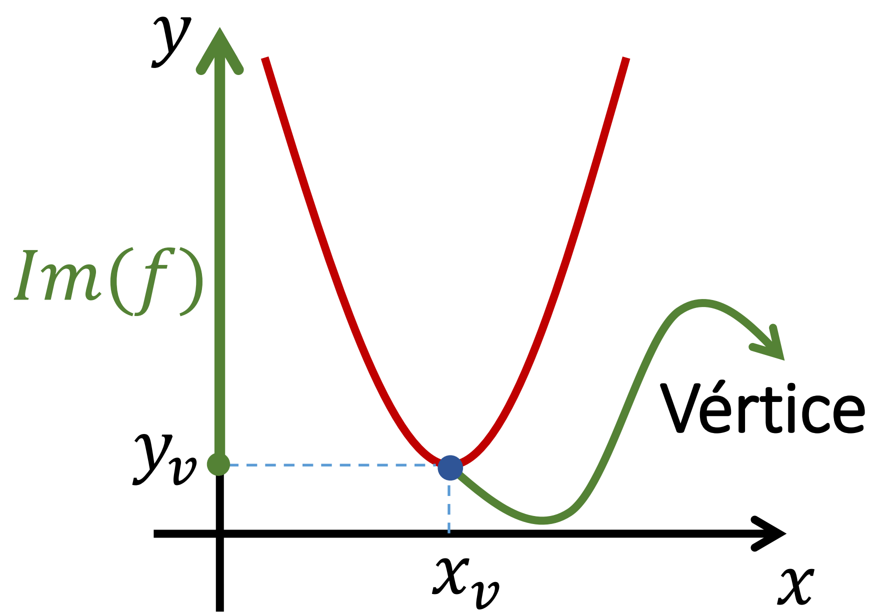
$$D(f) = (-\infty, -2] \cup [3, +\infty).$$

Coordenadas do vértice

No gráfico de uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, o ponto mínimo (quando $a > 0$) ou ponto máximo (quando $a < 0$) é chamado de vértice da parábola.

Quando $a > 0$:

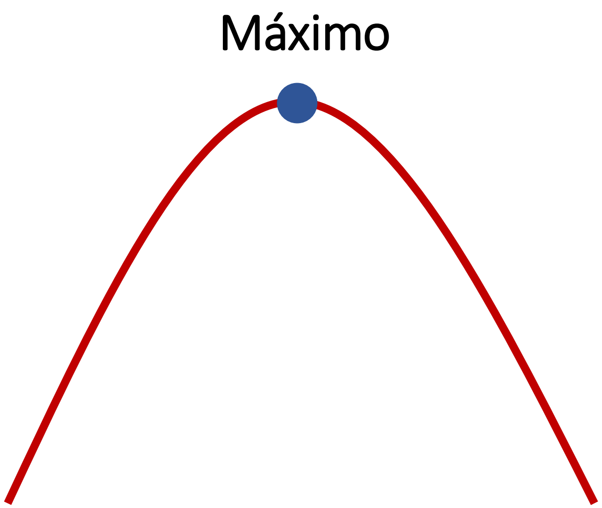


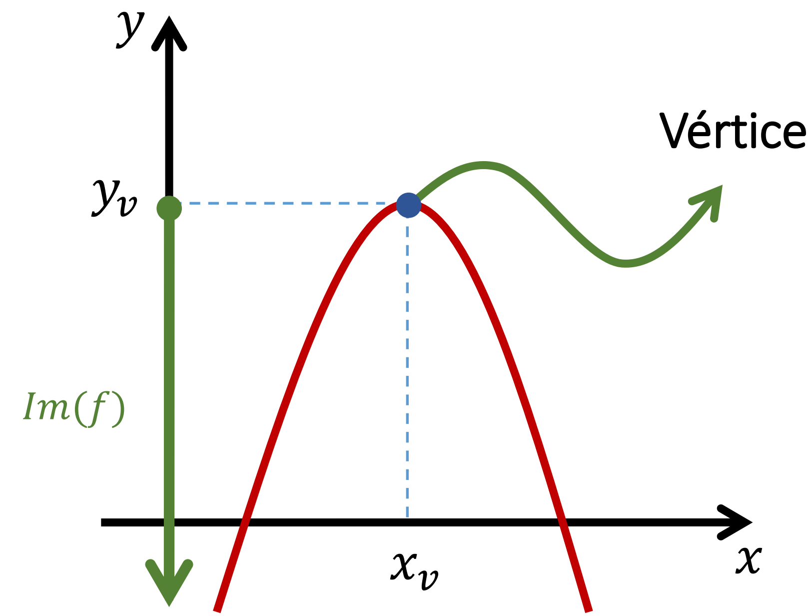


Se $a > 0$, então: $Im(f) = [y_v, +\infty)$.

Coordenadas do vértice

Quando $a < 0$:





Se $a < 0$, então: $Im(f) = (-\infty, y_v]$.

Coordenadas:

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

Exemplos

18) Esboce o gráfico da função $y = x^2 - 4x + 5$.

Solução:

Neste caso, tem-se:

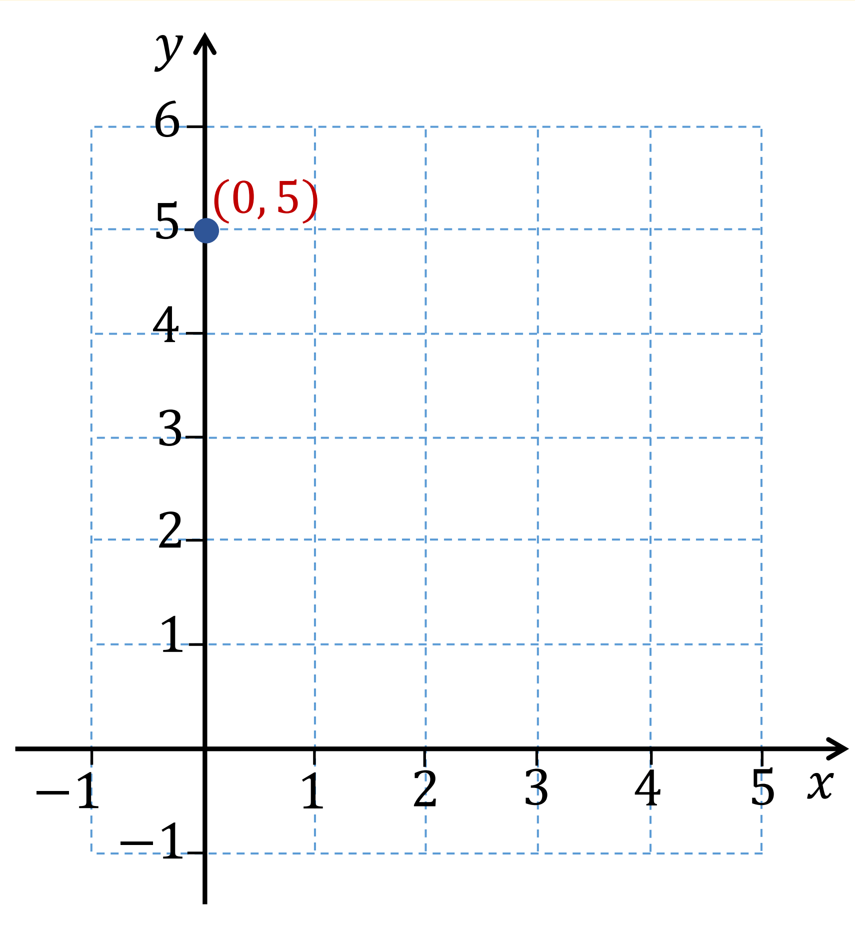
$$a = 1, \quad b = -4 \ \text{ e } \ c = 5.$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4.(1).(5) = -4$$

Portanto, f não possui zeros.

Como $c = 5$, tem-se que o gráfico intercepta o eixo y no ponto $(0, 5)$.



Exemplos

19) Esboce o gráfico da função $y = x^2 - 4x + 5$.

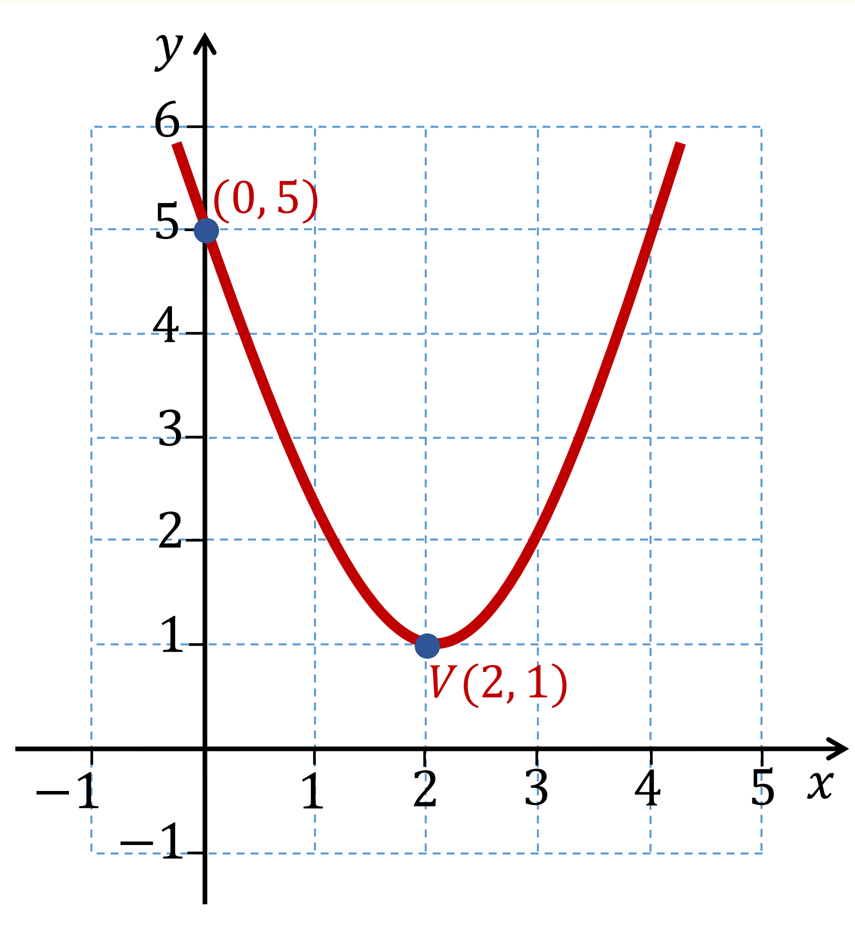
Solução:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2.(1)} = 2$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-4)}{4.(1)} = 1$$

Portanto, o vértice da parábola é dado por $V(2,1)$.

Como $a > 0$, a concavidade é voltada para cima.



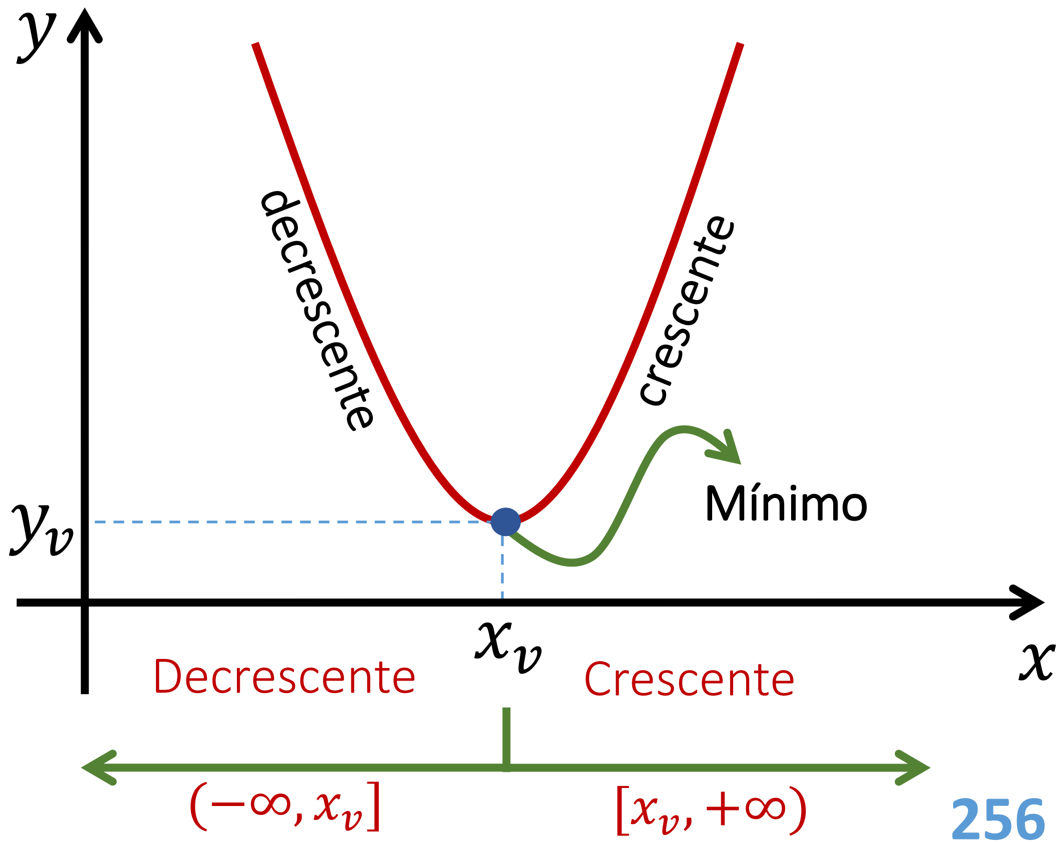
Monotonia (crescimento/decrescimento)

A abscissa do vértice (x_v) na função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, delimita onde ocorre uma mudança de comportamento no gráfico da função.

Mínimo

Muda de decrescente para crescente.

$(a > 0)$

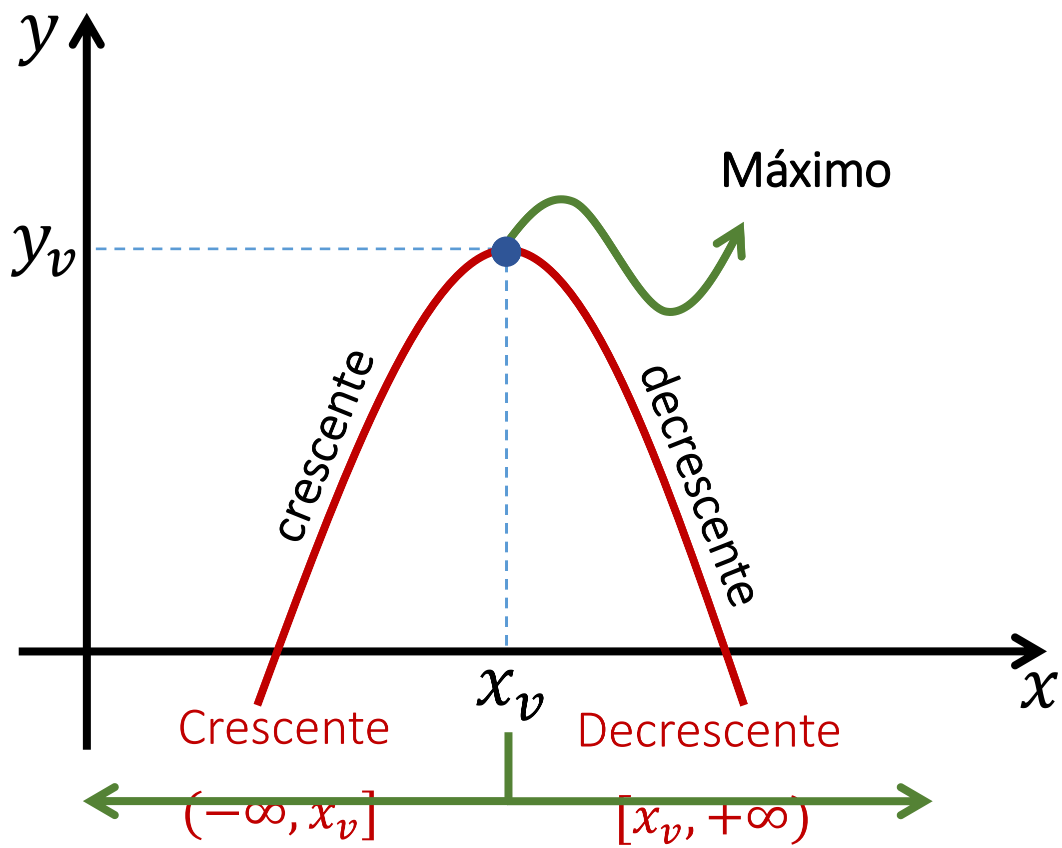


Monotonia (crescimento/decrescimento)

Máximo

Muda de crescente para decrescente.

$(a < 0)$



Exemplos

20) Determine os intervalos de crescimento e decrescimento da função $y = x^2 - 4x + 5$.

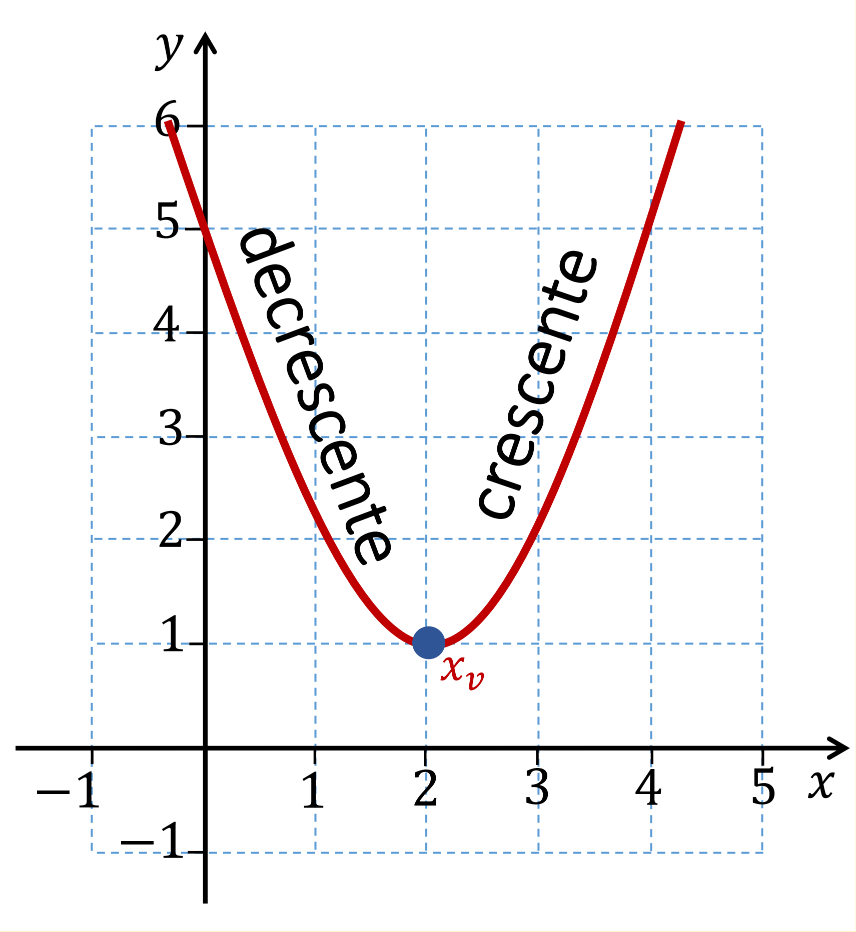
Solução:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2.(1)} = 2$$

$(a > 0) \Rightarrow$ Função côncava para cima!

Decrescente: $(-\infty, 2]$

Crescente: $[2, +\infty)$



Exemplos

21) Determine o domínio da função $y = \sqrt{\frac{2x-2}{x^2-9}}$.

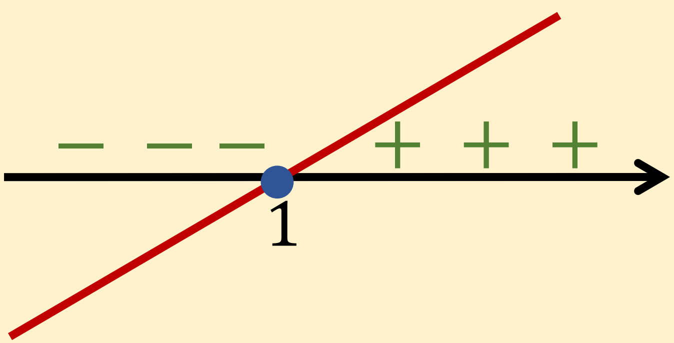
Solução:

O domínio da função é formado pelos valores de x nos quais:

$$\frac{2x-2}{x^2-9} \geq 0$$

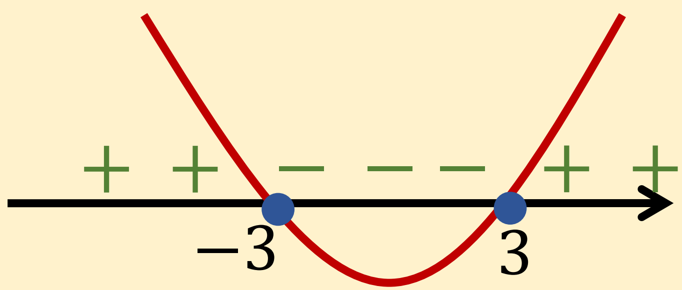
Sinal do numerador

$2x - 2$



Sinal do denominador

$x^2 - 9$

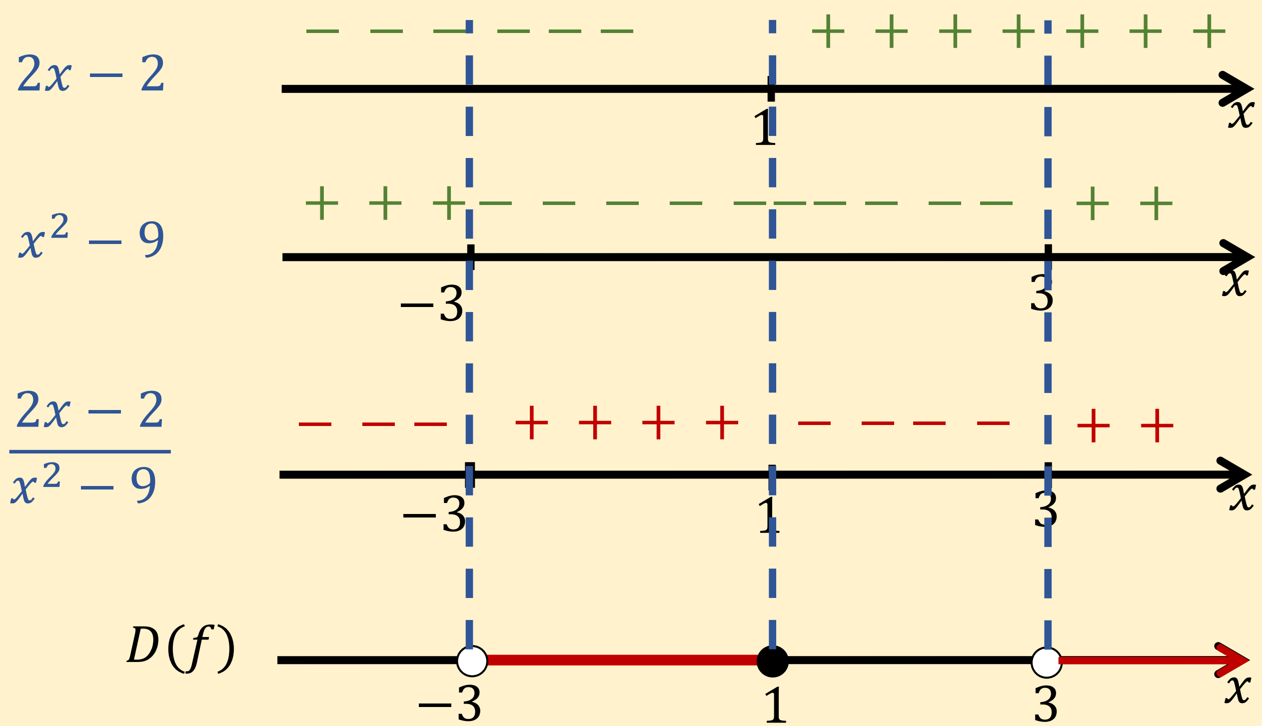


Exemplos

21) Determine o domínio da função $y = \sqrt{\frac{2x-2}{x^2-9}}$.

Solução:

Analisando o sinal do quociente, tem-se:



Portanto $D(f) = (-3, 1] \cup (3, +\infty)$.

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Para cada uma das funções de 1º grau abaixo, classifique-as em crescente ou decrescente, encontre o zero da função e esboce o gráfico.

(a) $y = 2x + 3$

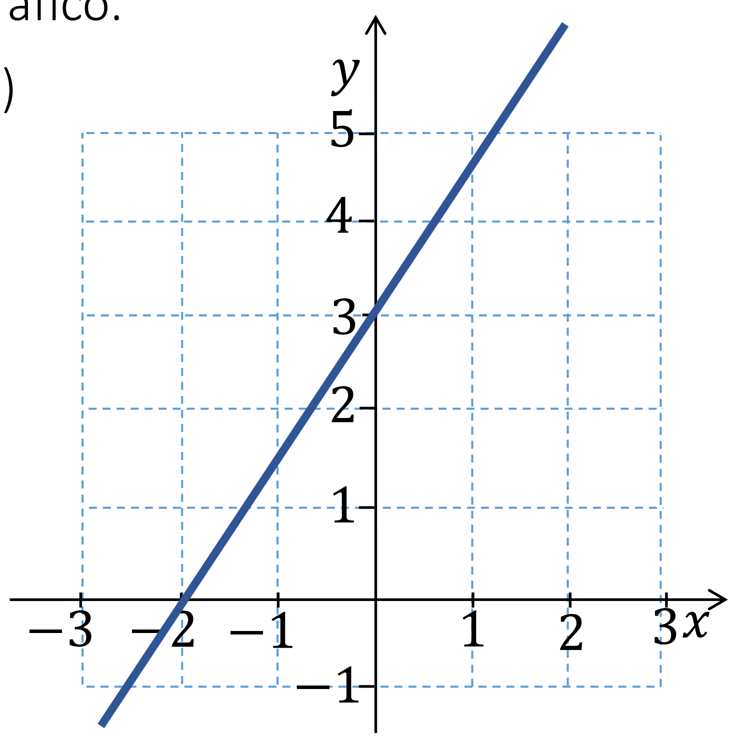
(b) $y = -x + 3$

(c) $y = 2x - 1$

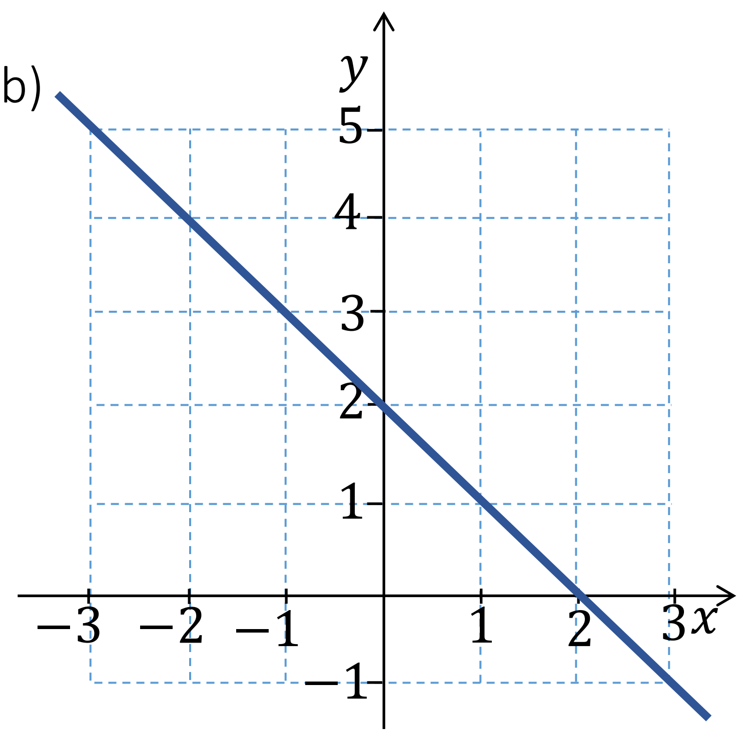
(d) $y = -3x + 4$

2) Em cada caso, determine a lei de formação da função representada pelo gráfico.

a)



b)



Exercícios

3) Para cada uma das funções de 2º grau a seguir, determine os zeros (se existirem), as coordenadas do vértice, o conjunto imagem e esboce o gráfico.

(a) $y = x^2 - 2x$

(b) $y = -x^2 + 2x + 3$

(c) $y = -x^2 - 1$

(d) $y = x^2 - 4x + 4$

4) Determine o domínio de cada uma das funções dadas:

(a) $y = \sqrt{x+3}$

(b) $y = \sqrt{5-x}$

(c) $f(x) = \sqrt{5x - x^2}$

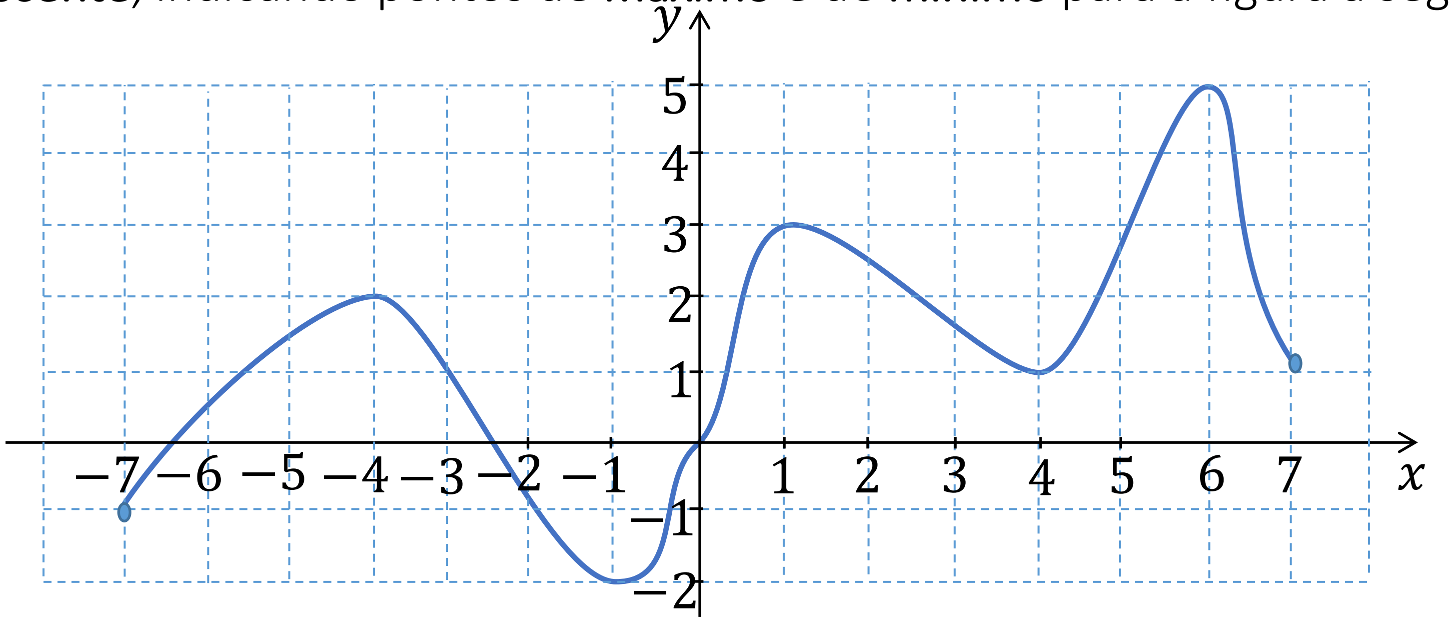
(d) $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x-6}}$

(e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+2x-8}{-x^2+9}}$

(f) $y = \dfrac{2x+1}{\sqrt[3]{2-x}}$

Exercícios

5) Obtenha os intervalos nos quais a função dada é **crescente** e nos quais é **decrescente**, indicando pontos de **máximo** e de **mínimo** para a figura a seguir:



6) Obtenha a equação da reta que passa pelos pontos A e B nos seguintes casos e esboce o gráfico:

(a) $A(1\,,2)\;\; B(2\,,3)$ (b) $A(-1\,,0)\;\; B(4\,,2)$ (c) $A(2\,,1)\;\; B(0\,,4)$

7) Construa os gráficos das funções definidas em $\mathbb{R}$ e faça o estudo de sinal.

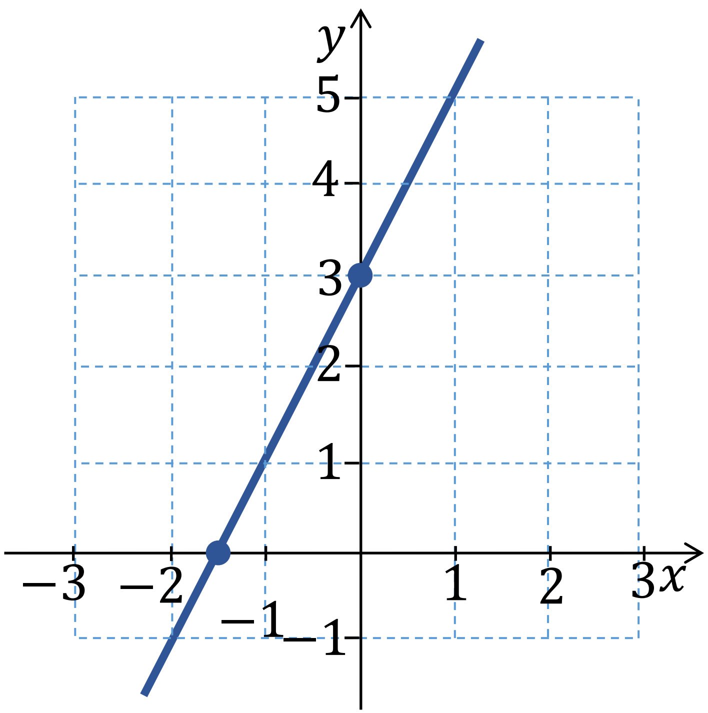
(a) $y = x^2 - 3x + 2$ (b) $y = -x^2 + 7x - 10$ (c) $y = x^2 + 2x + 1$

Exercícios

Exercício 1:

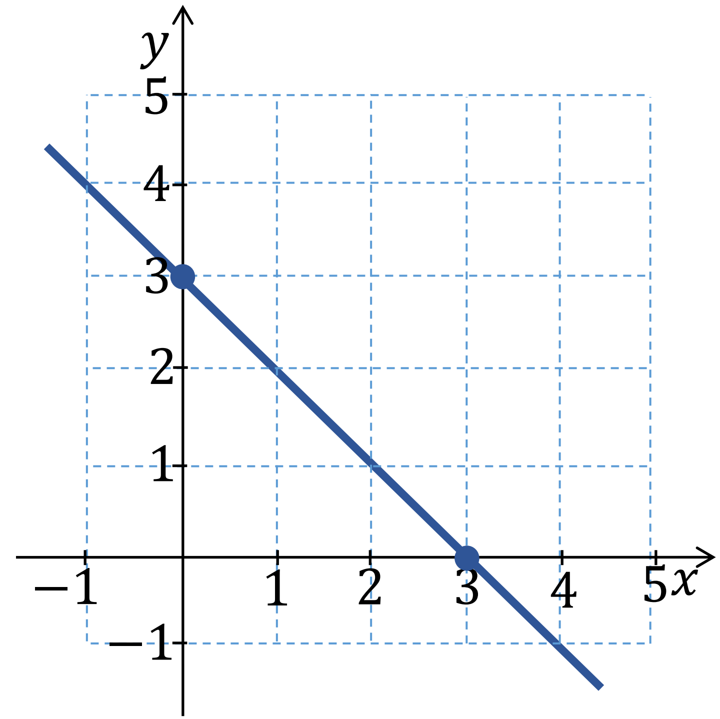
a) Crescente

zero: $x = -\frac{3}{2}$



b) Decrescente

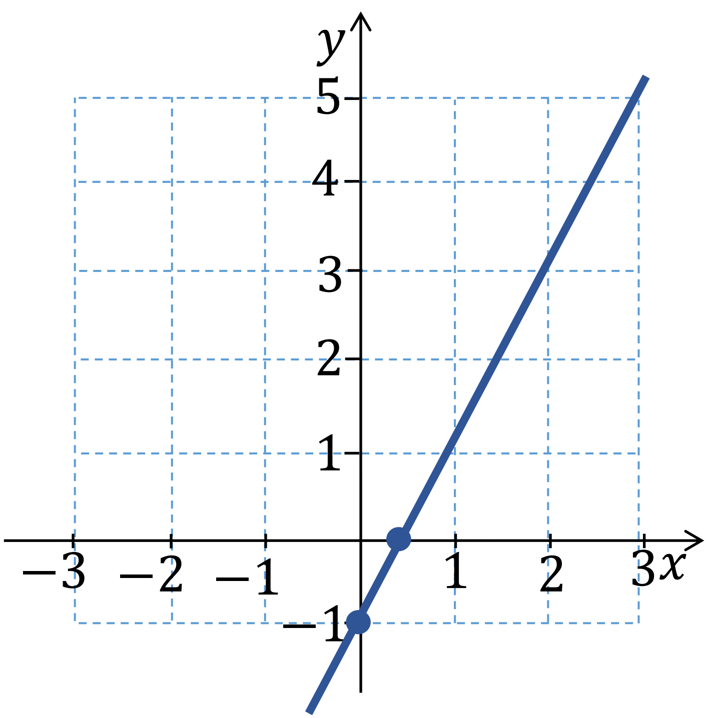
zero: $x = 3$



Respostas

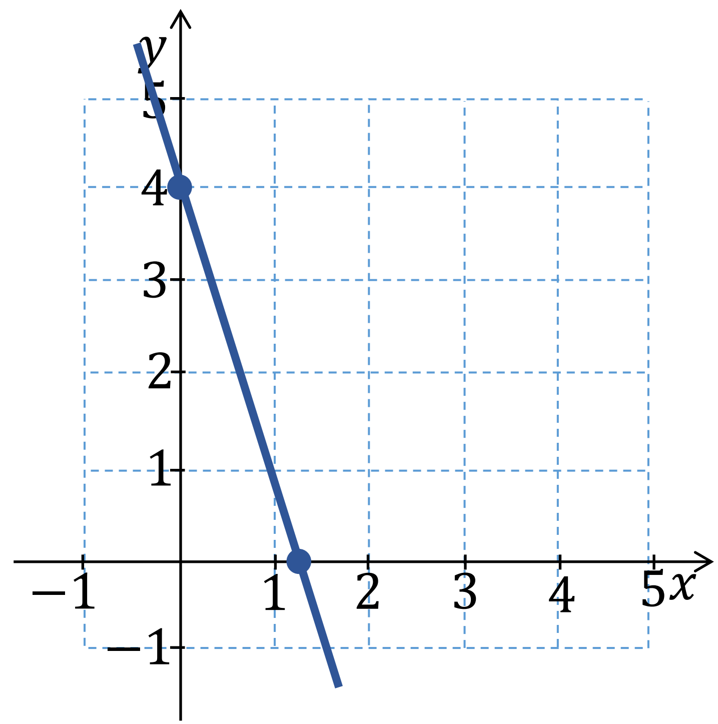
c) Crescente

zero: $x = \frac{1}{2}$



d) Decrescente

zero: $x = \frac{4}{3}$



Respostas

Exercício 2:

$$y = \frac{3x}{2} + 3$$

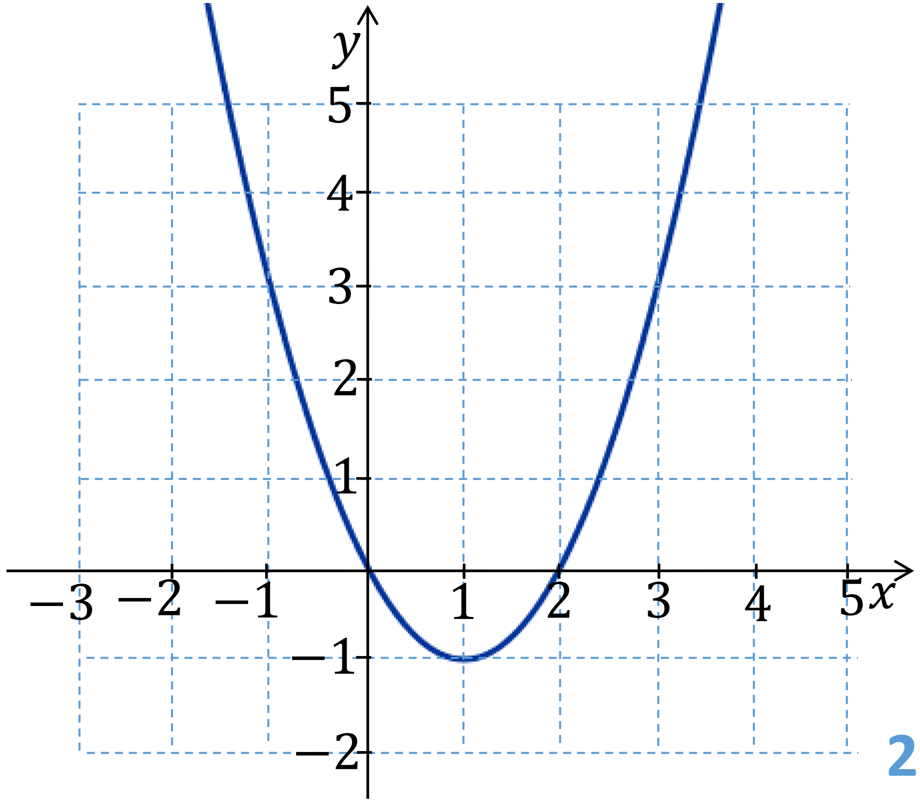
$$y = -x + 2$$

Exercício 3:

a) Zeros: $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$

Vértice: $V(1, -1)$

Imagem: $Im(f) = [-1, +\infty)$

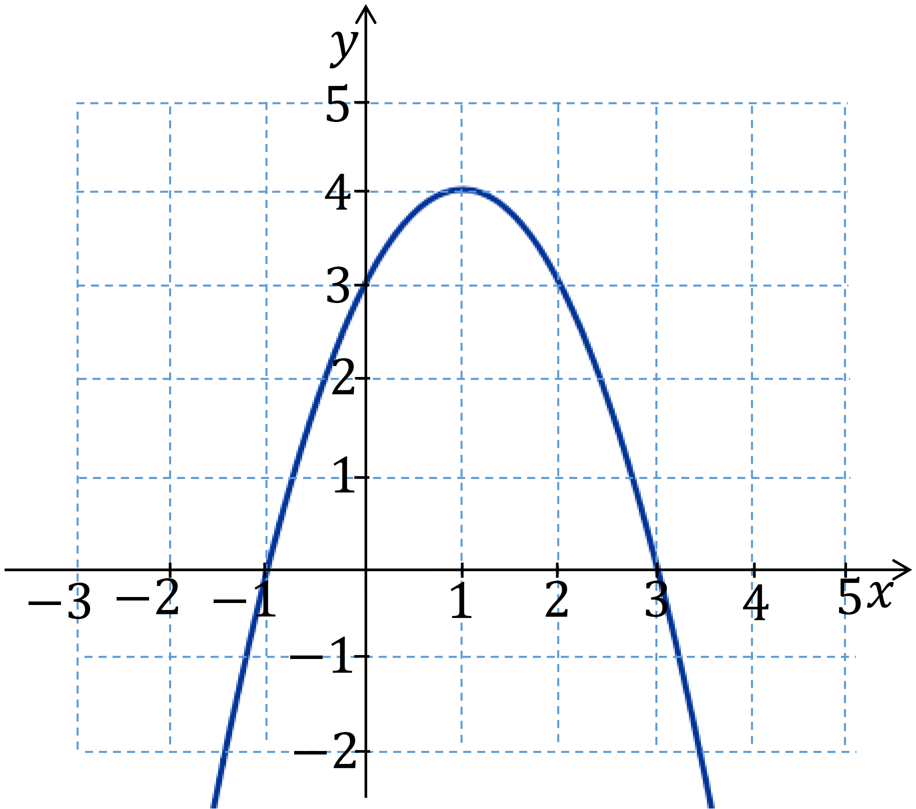


Respostas

b) Zeros: $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$

Vértice: $V(1, 4)$

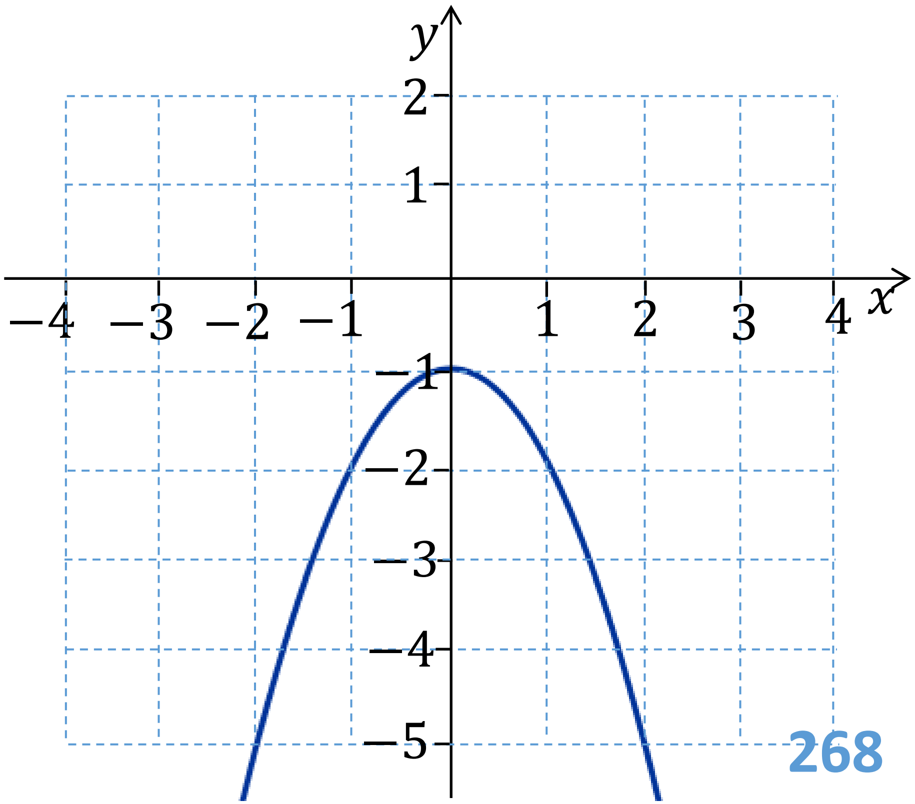
Imagem: $Im(f) = (-\infty, 4]$



c) Zeros: Não existem.

Vértice: $V(0, -1)$

Imagem: $Im(f) = (-\infty, -1]$

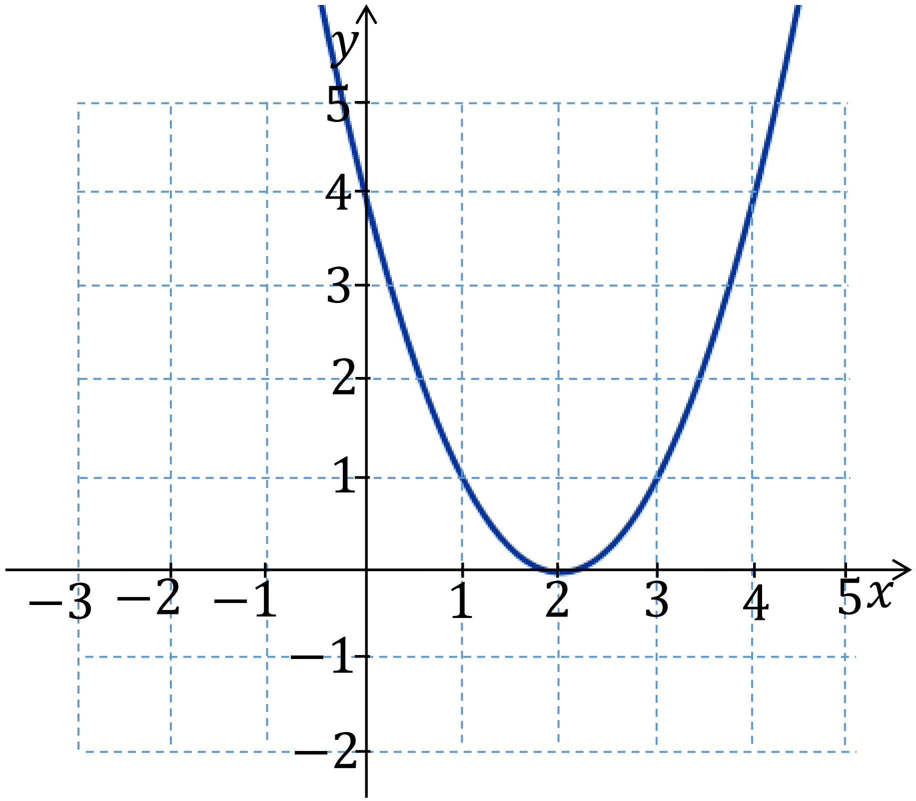


Respostas

d) Zeros: 2

Vértice: $V(2,0)$

Imagem: $Im(f) = [0, +\infty)$



Exercício 3:

a) $D(f) = [-3, +\infty)$

b) $D(f) = (-\infty, 5]$

c) $D(f) = [0,5]$

d) $D(f) = (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$

e) $D(f) = [-4, -3) \cup [2,3)$

f) $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

Respostas

Exercício 5:

Intervalos crescentes: (-7 , -4) U (-1 , 1) U (4 , 6)

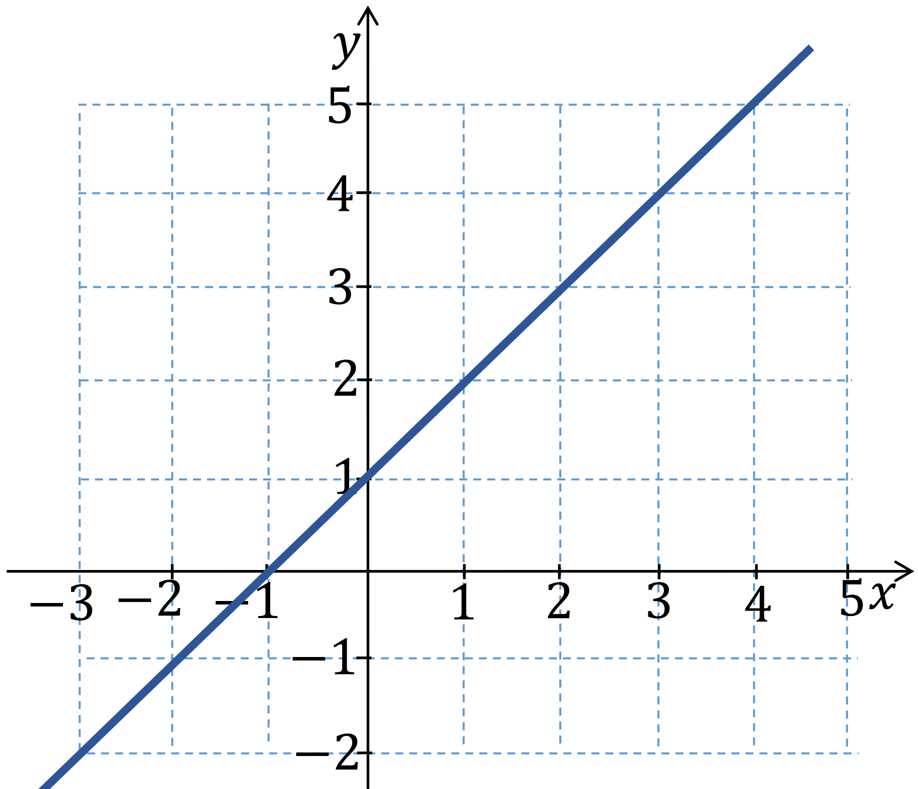
Intervalos decrescentes: (-4 , -1) U (1 , 4) U (6 , 7)

Pontos de máximos: { (-4 , 2), (1 , 3), (6 , 5) }

Pontos de mínimo: { (-1 , -2), (4 , 1) }

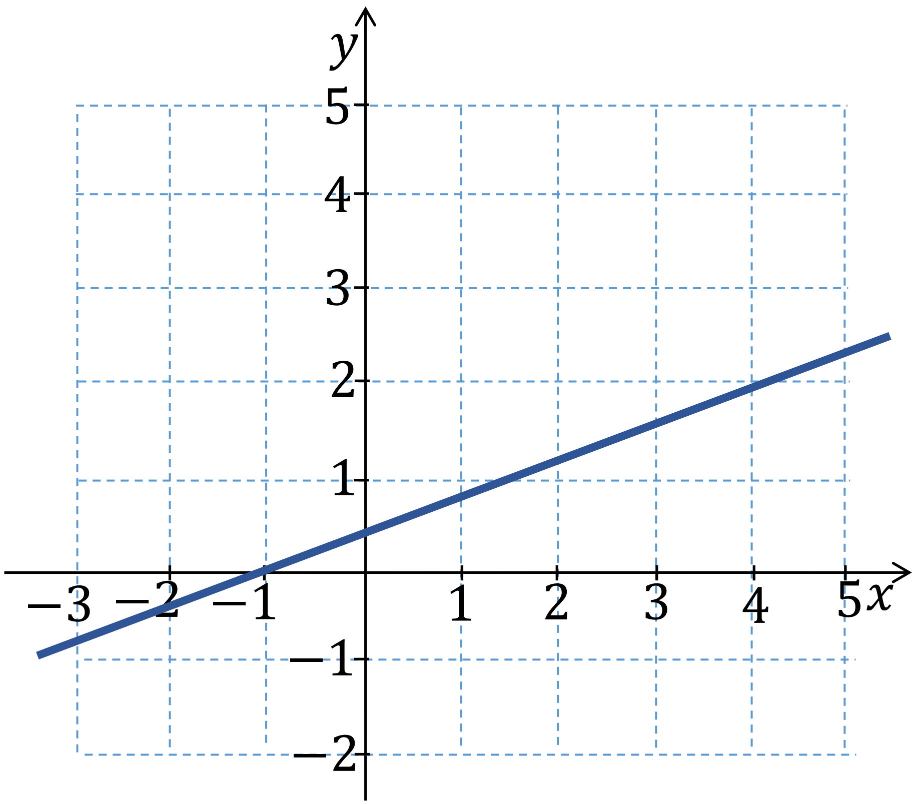
Exercício 6:

a) $y = x + 1$

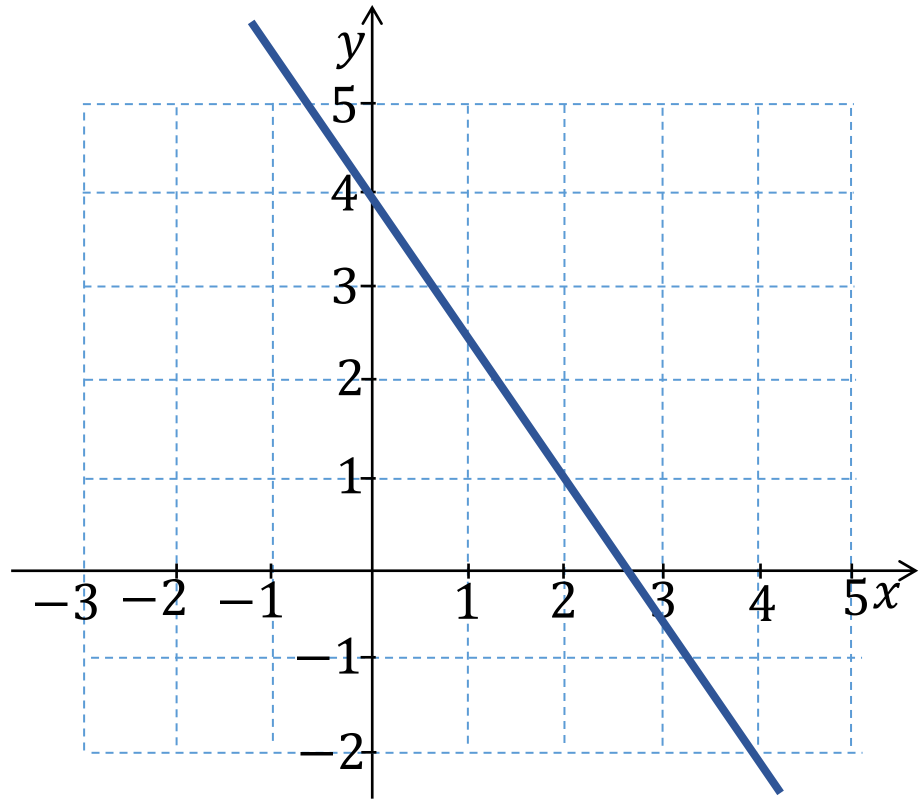


Respostas

b) $y = \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}$



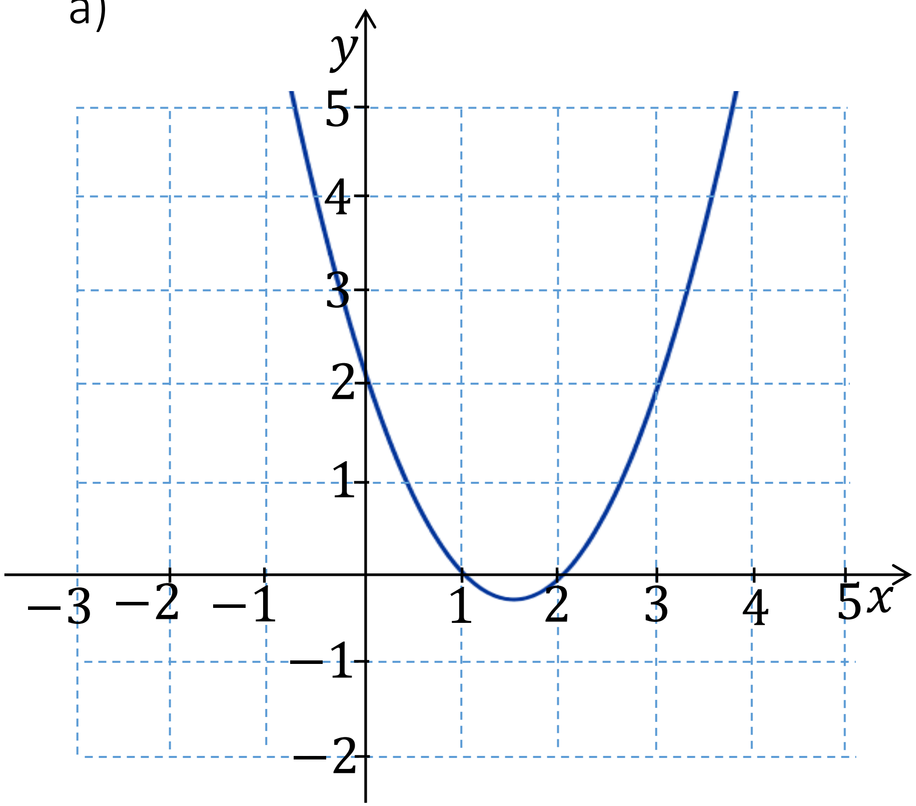
b) $y = -\frac{3}{2}x + 4$



Respostas

Exercício 7:

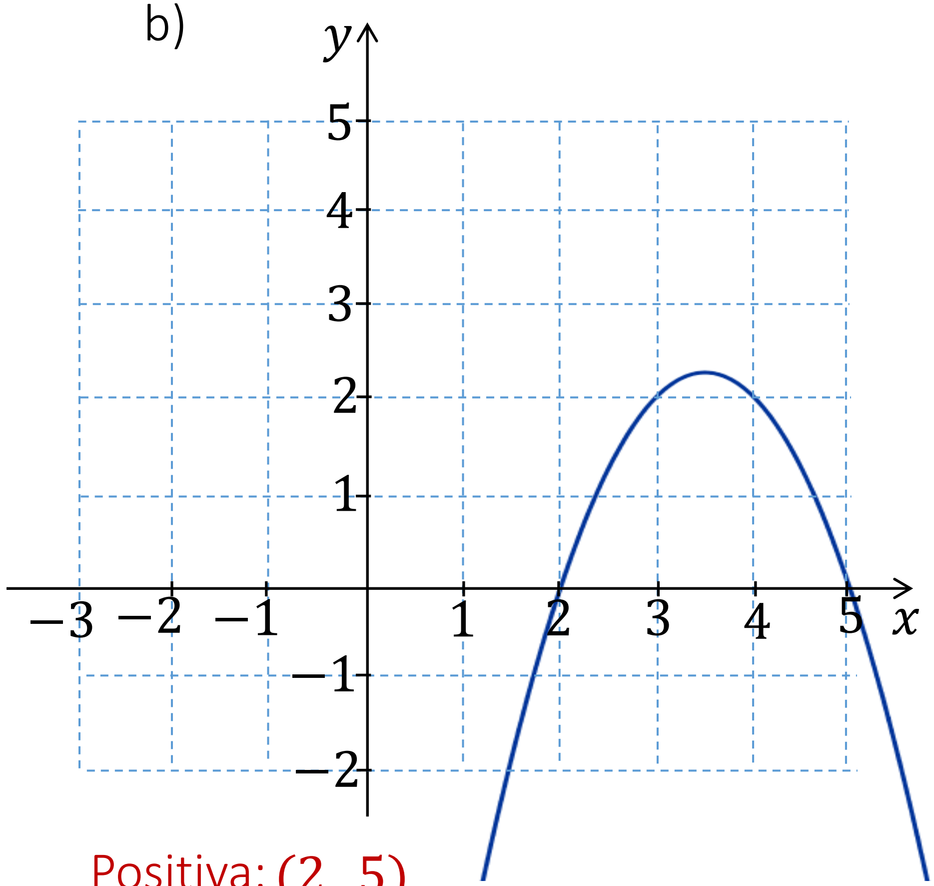
a)



Positiva: $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

Negativa: $(1\,,2)$

b)

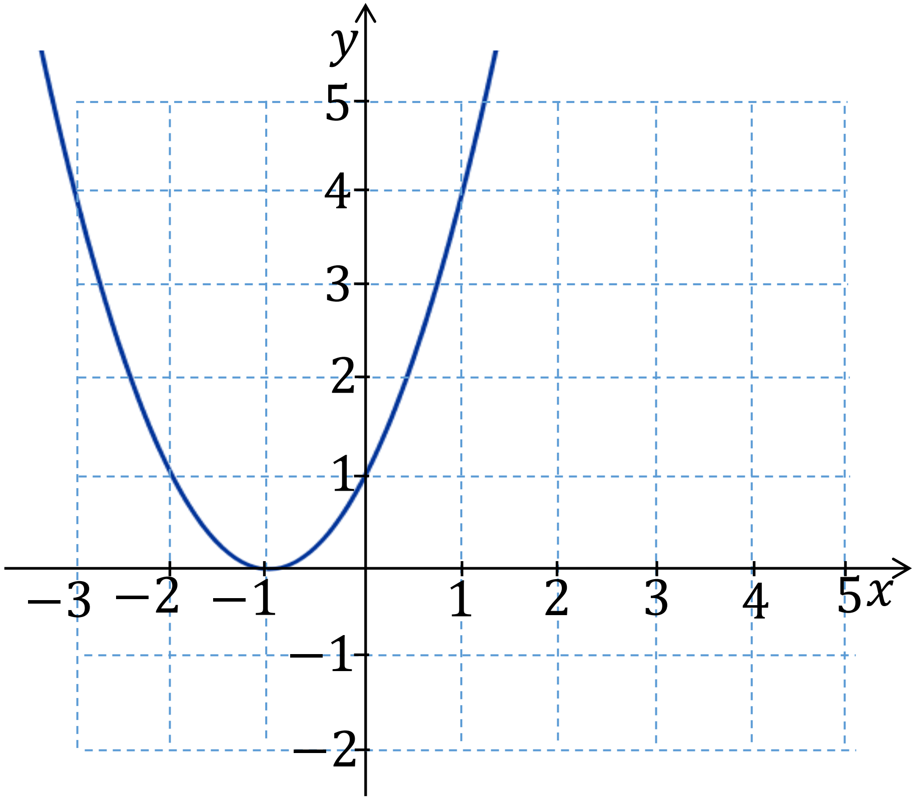


Positiva: $(2\,,5)$

Negativa: $(-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$

Respostas

c)



Positiva: $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA

O GAMA possui monitorias de:

- **Matemática Elementar, Cálulo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e equivalentes)
  - **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
    - **Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3** (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.