Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino

Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Matemática Básica II

Aula 01

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Inequações

Uma sentença matemática que envolve incógnitas e desigualdades é chamada de inequação. Neste curso, estudaremos inequações do primeiro e do segundo grau com uma variável.

Inequações do primeiro grau

Definição: Uma **inequação do primeiro grau** ou **inequação linear em x** pode ser escrita em uma das seguintes formas:

$ax + b < 0$ $ax + b \leq 0$ $ax + b > 0$ $ax + b \geq 0$

Observação: $y = ax + b$ é a função do primeiro grau associada à inequação.

Resolver uma inequação em x significa encontrar todos os valores de x para os quais a inequação é verdadeira.

O conjunto formado por todos esses valores é denominado **conjunto solução**.

Portanto, resolvemos uma inequação determinando o seu conjunto solução.

Inequações do primeiro grau

Exemplo: Resolva: $3(x-1)+2 \leq 5x+6$

Solução:

$$3(x-1)+2 \leq 5x+6$$

$$3x-3+2 \leq 5x+6$$

$$3x-1 \leq 5x+6$$

$$3x-5x \leq 6+1$$

$$-2x \leq 7$$

$$2x \geq -7$$

$$x \geq -\frac{7}{2}$$

Portanto, o conjunto solução é: $S = \left[-\frac{7}{2}, +\infty\right[$

Inequações do primeiro grau

Exemplo: Resolva: $\frac{x}{3}+\frac{1}{2}>\frac{x}{4}+\frac{1}{3}$

Solução:

$$\frac{x}{3}+\frac{1}{2}>\frac{x}{4}+\frac{1}{3}$$

$$\frac{4x}{12}+\frac{6}{12}>\frac{3x}{12}+\frac{4}{12}$$

$$4x+6>3x+4$$

$$4x-3x>-6+4$$

$$x>-2$$

Portanto, o conjunto solução é: $S=\left]-2,+\infty\right[$

Inequações duplas

As vezes duas inequações são combinadas em uma inequação dupla, que podem ser resolvidas simultaneamente ou separando-se as duas inequações envolvidas. Os exemplos a seguir ilustram esses casos.

Inequações duplas

Exemplo: Resolva: $$-3 < \frac{2x+5}{3} \leq 5$$

Solução:

$$-3 < \frac{2x+5}{3} \leq 5$$

$$-9 < 2x + 5 \leq 15$$

$$-9 - 5 < 2x \leq 15 - 5$$

$$-14 < 2x \leq 10$$

$$-7 < x \leq 5$$

Portanto, o conjunto solução é: $S =]-7,5]$

Inequações duplas

Exemplo: Resolva: $2 \leq 4x + 1 < 2x + 5$

Neste caso, a solução simultânea das duas inequações não é aconselhável, pois o membro direito da inequação envolve termos também na variável x e assim as operações não podem ser aplicadas simultaneamente a todos os membros.

Calcularemos então separadamente a solução de cada inequação, tomando como solução geral da inequação dupla a interseção dos conjuntos, pois desejamos valores de x que satisfaçam as duas inequações.

Inequações duplas

Exemplo: Resolva: $2 \leq 4x + 1 < 2x + 5$

Solução:

$2 \leq 4x + 1$	$4x + 1 < 2x + 5$
$2 - 1 \leq 4x$	$4x - 2x < -1 + 5$
$1 \leq 4x$	$2x < 4$
$\frac{1}{4} \leq x$	$x < \frac{4}{2}$
$x \geq \frac{1}{4}$	$x < 2$
$S_1 = \left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$	$S_2 = \left]-\infty, 2\right[$

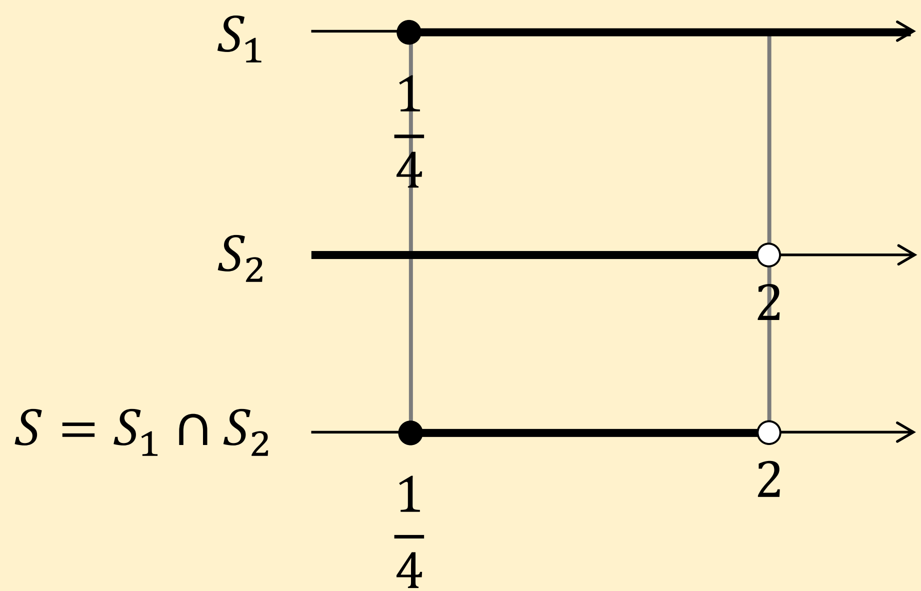
Inequações duplas

Exemplo: Resolva: $2 \leq 4x + 1 < 2x + 5$

Solução:

$S_1 = \left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$

$S_2 = \left]-\infty, 2\right[$



Portanto, o conjunto solução é: $S = \left[\frac{1}{4}, 2\right[$

Inequações modulares

Inequações que envolvem o valor absoluto ou módulo de um número são também inequações duplas, pois por definição:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{se} \quad x < 0 \\ x, & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Assim, ao trabalharmos com uma inequação $|\boldsymbol{ax+b}| \leq \boldsymbol{c}$, queremos determinar todos os valores possíveis de $\boldsymbol{x}$ para os quais

$$-\boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{ax+b} \leq \boldsymbol{c}$$

Observação: O mesmo raciocínio continua válido se trocarmos "$\leq$" por "$<$".

Inequações modulares

Inequações que envolvem o valor absoluto ou módulo de um número são também inequações duplas, pois por definição:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{se} \quad x < 0 \\ x, & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Se buscamos a solução de uma inequação $|\boldsymbol{ax+b}| \geq \boldsymbol{c}$, então queremos determinar todos os valores possíveis de $\boldsymbol{x}$ para os quais

$$\boldsymbol{ax+b \geq c} \quad \text{ou} \quad -(\boldsymbol{ax+b}) \geq \boldsymbol{c}$$

Observação: O mesmo raciocínio continua válido se trocarmos "≥" por ">".

Inequações modulares

Exemplo: Resolva: $|x - 1| \leq 4$

Solução:

$$|x - 1| \leq 4 \implies -4 \leq x - 1 \leq 4$$

$$\implies -4 + 1 \leq x \leq 4 + 1$$

$$\implies -3 \leq x \leq 5$$

Portanto, o conjunto solução é: $S = [-3,5]$

Inequações modulares

Exemplo: Resolva: $|2x+3|>1$

Neste caso não poderemos resolver simultaneamente as inequações, pois resolver $|2x+3|>1$ significa determinar todos os valores possíveis de x para os quais

$$2x+3>1 \quad \text{ou} \quad -(2x+3)>1$$

Resolvemos então separadamente cada inequação e o conjunto solução será formado pela união dos dois resultados.

Inequações modulares

Exemplo: Resolva: $|2x+3| > 1$

Solução:

$2x+3 > 1$

$2x > 1-3$

$2x > -2$

$x > \frac{-2}{2}$

$x > -1$

$S_1 =]-1, +\infty[$

$-(2x+3) > 1$

$2x+3 < -1$

$2x < -1-3$

$2x < -4$

$x < \frac{-4}{2}$

$x < -2$

$S_2 =]-\infty, -2[$

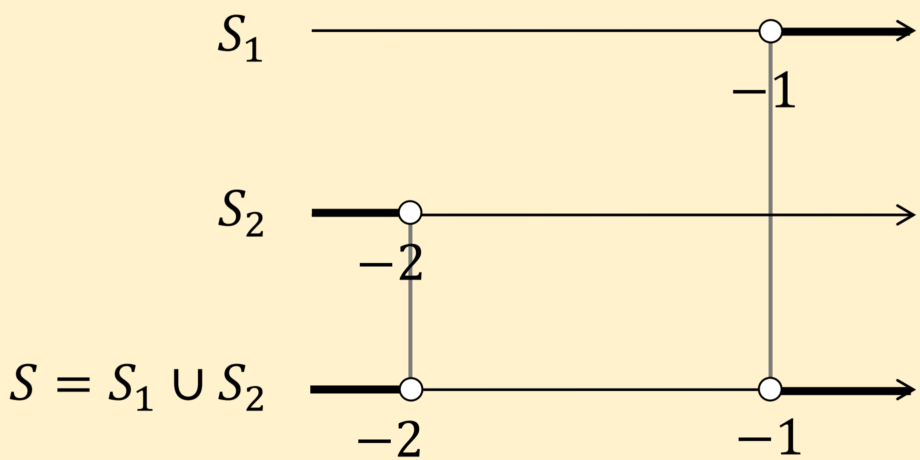
Inequações modulares

Exemplo: Resolva: $|2x+3| > 1$

Solução:

$S_1 =]-1, +\infty[$

$S_2 =]-\infty, -2[$



Portanto, o conjunto solução é:

$$S =]-\infty, -2[\; \cup \;]-1, +\infty[$$

Inequações produto e inequações quociente

Nos próximos exemplos abordaremos inequações que envolvem produtos ou quocientes, cujos fatores são expressões do primeiro grau da forma $ax + b$ (cuja representação gráfica é uma reta).

Utilizaremos funções do primeiro grau para resolver estes tipos de inequações.

Inequações produto e inequações quociente

O procedimento que vamos utilizar para resolver inequações produto ou inequações quociente, consiste nos seguintes passos:

1^{o} Passo: Considerar cada fator da inequação como uma função do primeiro grau $y = ax + b$;

2^{o} Passo: Determinar a raiz da função, ou seja, o valor de x onde a função se anula, que é o valor onde a reta intercepta o eixo x;

3^{o} Passo: Verificar se o gráfico da função é uma reta crescente $(a > 0)$ ou decrescente $(a < 0)$;

4^{o} Passo: Fazer o estudo do sinal da função, determinando assim os intervalos onde a função é positiva e onde é negativa;

5^{o} Passo: Montar um quadro, colocando os valores das raízes de cada função e o seu respectivo sinal em cada intervalo, para estudar o sinal do produto ou do quociente das duas funções e chegar à solução da inequação.

Inequações produto e inequações quociente

Exemplo: Resolva: $(4 - x)(2x - 3) > 0$

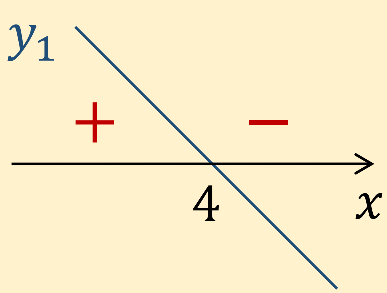
Solução:

$y_1 = 4 - x$

$0 = 4 - x$

$x = 4$ (raiz)

y_1 é decrescente pois $a = -1 < 0$

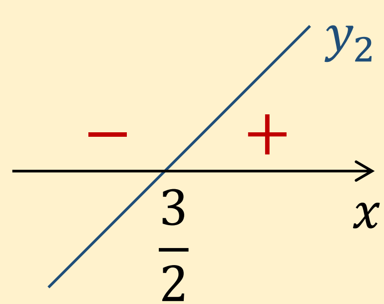


$y_2 = 2x - 3$

$0 = 2x - 3$

$x = \frac{3}{2}$ (raiz)

y_2 é crescente pois $a = 2 > 0$



	$x < \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} < x < 4$	$x > 4$
$y_1 = 4 - x$	+	+	−
$y_2 = 2x - 3$	−	+	+
$y_1 \cdot y_2$	−	+	−

Portanto, o conjunto solução é:

$$S = \left]\frac{3}{2}, 4\right[$$

Inequações produto e inequações quociente

Exemplo: Resolva: $\dfrac{5x-3}{4-5x} \leq 0$

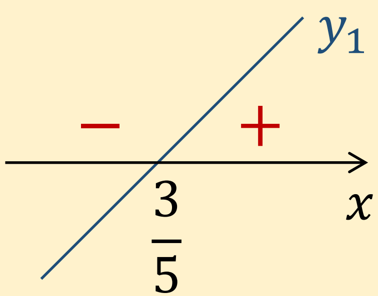
Solução:

$y_1 = 5x - 3$

$0 = 5x - 3$

$x = \dfrac{3}{5}$ (raiz)

y_1 é crescente pois $a = 5 > 0$

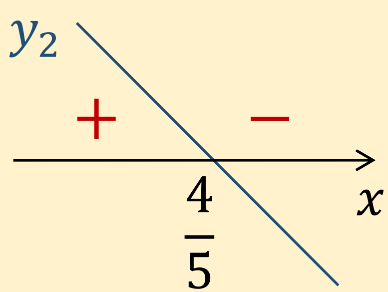


$y_2 = 4 - 5x$

$0 = 4 - 5x$

$x = \dfrac{4}{5}$ (raiz)

y_2 é decrescente pois $a = -5 < 0$



	$x < \frac{3}{5}$	$\frac{3}{5} < x < \frac{4}{5}$	$x > \frac{4}{5}$
$y_1 = 5x - 3$	$-$	$+$	$+$
$y_2 = 4 - 5x$	$+$	$+$	$-$
$\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{5x-3}{4-5x}$	$-$	$+$	$-$

Note que $\dfrac{4}{5} \notin S$ pois zera o denominador da fração $\dfrac{5x-3}{4-5x}$.

Inequações produto e inequações quociente

Exemplo: Resolva: $$\frac{5x-3}{4-5x} \leq 0$$

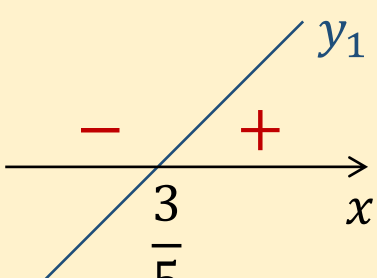
Solução:

$y_1 = 5x - 3$

$0 = 5x - 3$

$x = \frac{3}{5}$ (raiz)

y_1 é crescente pois $a = 5 > 0$

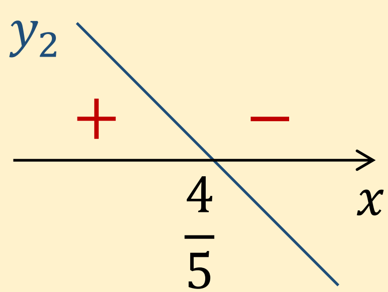


$y_2 = 4 - 5x$

$0 = 4 - 5x$

$x = \frac{4}{5}$ (raiz)

y_2 é decrescente pois $a = -5 < 0$



x		$\frac{3}{5}$		$\frac{4}{5}$	
$y_1 = 5x - 3$	$-$		$+$		$+$
$y_2 = 4 - 5x$	$+$		$+$		$-$
$\frac{y_1}{y_2} = \frac{5x-3}{4-5x}$	$-$		$+$		$-$

Portanto, o conjunto solução é:

$$S = \left]-\infty, \frac{3}{5}\right] \cup \left]\frac{4}{5}, +\infty\right[$$

Inequações produto e inequações quociente

Exemplo: Resolva: $$\frac{x+3}{1-x} \leq 3$$

Se multiplicarmos ambos os membros por $1-x$ (que pode ser positivo ou negativo, dependendo do valor de x), não saberemos se o sinal da desigualdade deverá ser mantido ou invertido. Por isso, utilizaremos um outro procedimento.

Solução:

$$\frac{x+3}{1-x} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{x+3}{1-x} - 3 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+3-3(1-x)}{1-x} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+3-3+3x}{1-x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4x}{1-x} \leq 0$$

Inequações produto e inequações quociente

Exemplo: Resolva: $$\frac{x+3}{1-x} \le 3 \Leftrightarrow \frac{4x}{1-x} \le 0$$

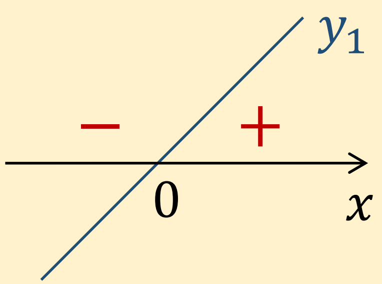
Solução:

$y_1 = 4x$

$0 = 4x$

$x = 0$ (raiz)

y_1 é crescente pois $a = 4 > 0$

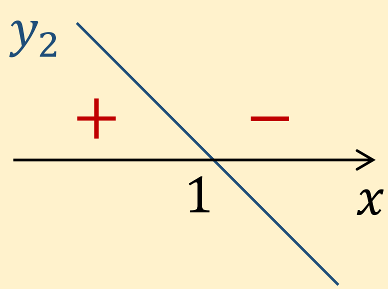


$y_2 = 1 - x$

$0 = 1 - x$

$x = 1$ (raiz)

y_2 é decrescente pois $a = -1 < 0$



x		0		1	
$y_1 = 4x$	−		+		+
$y_2 = 1 - x$	+		+		−
$\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{4x}{1-x}$	−		+		−

Portanto, o conjunto solução é:

$$S = \,]-\infty, 0] \;\cup\;]1, +\infty[$$

Exercícios Propostos

Grupo de Apoio em Matemática

Exercícios

1) Resolva as inequações abaixo e apresente o conjunto solução em notação de intervalo:

(a) $2x + 5 < 3x - 7$

(b) $3 \leq \dfrac{2x - 3}{5} < 7$

(c) $x^2 - x - 6 < 0$

(d) $x^2 - 2x - 5 > 3$

(e) $x(2x + 3) \geq 5$

(f) $|x + 3| < 0{,}01$

(g) $|2x + 5| < 4$

(h) $|6 - 5x| \leq 3$

(i) $|3x - 7| \geq 5$

(j) $|-11 - 7x| > 6$

(k) $-5 \leq 3x + 4 < 7$

(l) $|6x - 7| > 10$

(m) $0 < 3x + 1 \leq 4x - 6$

(n) $|5 - 2x| \geq 7$

Exercícios

1) Resolva as inequações abaixo e apresente o conjunto solução em notação de intervalo:

(o) $-6 < 3x + 3 \leq 3$

(p) $|x - 4| \leq 16$

(q) $1 < x - 2 < 6 - x$

(r) $x - 7 \geq -5$ ou $x - 7 \leq -6$

(s) $x < 6x - 10$ ou $x \geq 2x + 5$

(t) $2x - 1 > 1$ ou $x + 3 < 4$

(u) $1 \leq -2x + 1 < 3$

(v) $x + 3 < 6x + 10$

(w) $|2x - 3| > 4$

(x) $2 < 5x + 3 \leq 8x - 12$

(y) $|2x - 3| \leq 5$

Exercícios

2) Resolva as inequações abaixo e apresente o conjunto solução em notação de intervalo:

(a) $(4x + 2)(x + 1) \leq 0$

(b) $(x + 3)(3x + 1) \geq 0$

(c) $(2x - 1)(x + 4) < 0$

(d) $(x - 2)(x + 1) > 0$

(e) $(2x - 4)(x + 4) \geq 0$

(f) $\frac{2x+1}{x+2} \leq 0$

(g) $\frac{x+3}{5x-2} \geq 0$

(h) $\frac{x-1}{2x-3} \leq 0$

(i) $\frac{2x+7}{x+1} < 0$

(j) $\frac{x-2}{2x-5} > 0$

Respostas

Exercício 1:

(a) $S =]12, +\infty[$

(b) $S = [9,19[$

(c) $S =]-2,3[$

(d) $S =]-\infty, -2[\ \cup\ ]4, +\infty[$

(e) $S = \left]-\infty, -\frac{5}{2}\right]\ \cup\ [1, +\infty[$

(f) $S =]-3{,}01, -2{,}99[$

(g) $S = \left]-\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}\right[$

(h) $S = \left[\frac{3}{5}, \frac{9}{5}\right]$

(i) $S = \left]-\infty, \frac{2}{3}\right]\ \cup\ [4, +\infty[$

(j) $S = \left]-\infty, -\frac{17}{7}\right[\ \cup\ \left]-\frac{5}{7}, +\infty\right[$

(k) $S = [-3,1[$

(l) $S = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\ \cup\ \left]\frac{17}{6}, +\infty\right[$

(m) $S = [7, +\infty[$

(n) $S =]-\infty, -1]\ \cup\ [6, +\infty[$

Respostas

Exercício 1:

(o) $S =]-3,0]$

(p) $S = [-12,20]$

(q) $S =]3,4[$

(r) $S =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$

(s) $S =]-\infty, -5] \cup]2, +\infty[$

(t) $S =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

(u) $S =]-1,0]$

(v) $S = \left]-\frac{7}{5}, +\infty\right[$

(w) $S = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{7}{2}, +\infty\right[$

(x) $S = [5, +\infty[$

(y) $S = [-1,4]$

Respostas

Exercício 2:

(a) $S = [-1, -\frac{1}{2}]$

(b) $S =]-\infty, -3] \cup [-\frac{1}{3}, +\infty[$

(c) $S = \left]-4, \frac{1}{2}\right[$

(d) $S =]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$

(e) $S =]-\infty, -4[\cup]2, +\infty[$

(f) $S =]-2, -\frac{1}{2}]$

(g) $S =]-\infty, -3] \cup \left]\frac{2}{5}, +\infty\right[$

(h) $S = [1, \frac{3}{2}[$

(i) $S =]-\frac{7}{2}, -1[$

(j) $S =]-\infty, 2[\cup]\frac{5}{2}, +\infty[$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA

O GAMA possui monitorias de:

- **Matemática Elementar, Cálulo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e equivalentes)
- **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
- **Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3** (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino

Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Matemática Básica II

Aula 02

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Função do segundo grau

Definição: Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $a \neq 0$, a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ é chamada de função do segundo grau ou função quadrática.

Exemplos:

1) $f(x) = x^2$ $\quad a = 1\,,\ b = 0\,,\ c = 0$

2) $f(x) = -x^2 + 1$ $\quad a = -1\,,\ b = 0\,,\ c = 1$

3) $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ $\quad a = 2\,,\ b = 3\,,\ c = -1$

Função do segundo grau

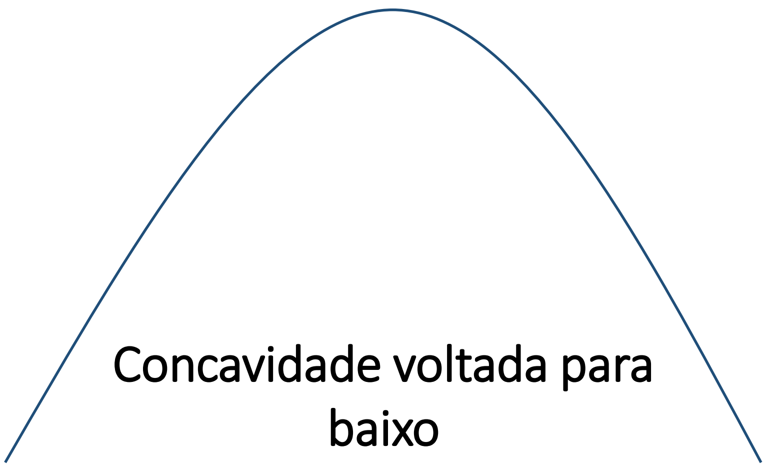
Teorema: O gráfico de uma função do segundo grau é uma **parábola**.

A parábola pode ter concavidade voltada para cima ou concavidade voltada para baixo, de acordo com o sinal do coeficiente a.

Concavidade:

$$\boldsymbol{a > 0}$$

$$\boldsymbol{a < 0}$$



Função do segundo grau

Os zeros da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ podem ser obtidos resolvendo a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ utilizando a fórmula de Bhaskara.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Observação: A quantidade de zeros reais obtidos para uma função quadrática depende do sinal de Δ.

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Dois zeros	Um único zero	Nenhum zero

Função do segundo grau

O sinal da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ depende dos sinais de a (determina a concavidade) e de Δ (determina a quantidade de zeros).

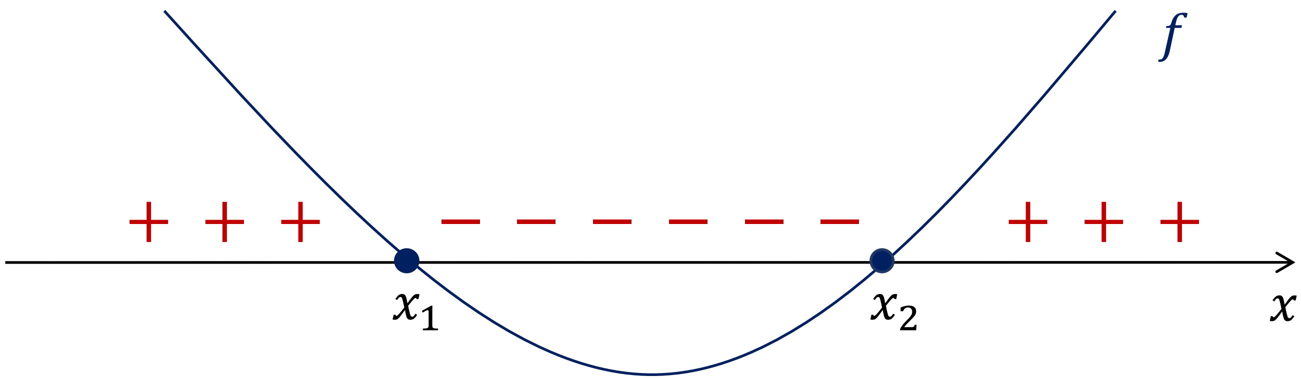
Como existem duas possibilidades para o coeficiente a ($a > 0$ ou $a < 0$) e três possibilidades para Δ ($\Delta > 0$ ou $\Delta = 0$ ou $\Delta < 0$), obtém-se seis combinações possíveis para o formato do gráfico da função quadrática.

Vamos fazer o estudo do sinal da função quadrática para cada um desses formatos.

Função do segundo grau

1^{a} Combinação: $a > 0$ e $\Delta > 0$

Concavidade voltada para cima e dois zeros

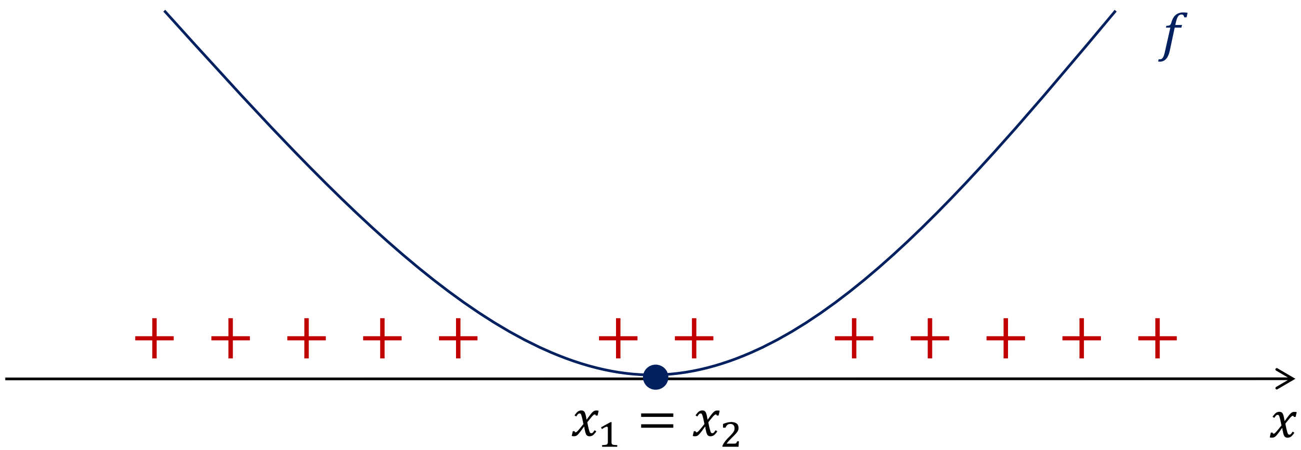


- $f(x) > 0$ em $]-\infty, x_1[\ \cup\ ]x_2, +\infty[\ =\ \mathbb{R} - [x_1, x_2]$
- $f(x) = 0$ em $x = x_1$ e $x = x_2$
- $f(x) < 0$ em $]x_1, x_2[$

Função do segundo grau

$2^{\mathbf{a}}$ Combinação: $a > 0$ e $\Delta = 0$

Concavidade voltada para cima e um único zero

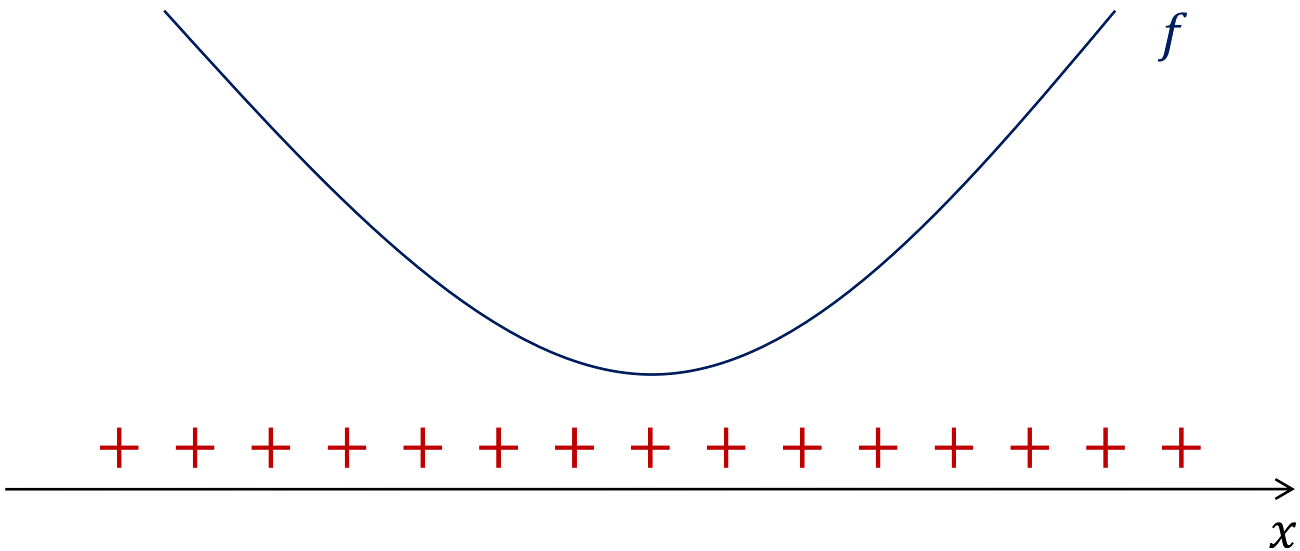


- $f(x) > 0$ em $]-\infty, x_1[\ \cup\ ]x_1, +\infty[\ = \mathbb{R} - \{x_1\}$
- $f(x) = 0$ em $x = x_1 = x_2$
- $\nexists\, x \in \mathbb{R} : f(x) < 0$

Função do segundo grau

$3^{\mathbf{a}}$ Combinação: $a > 0$ e $\Delta < 0$

Concavidade voltada para cima e nenhum zero

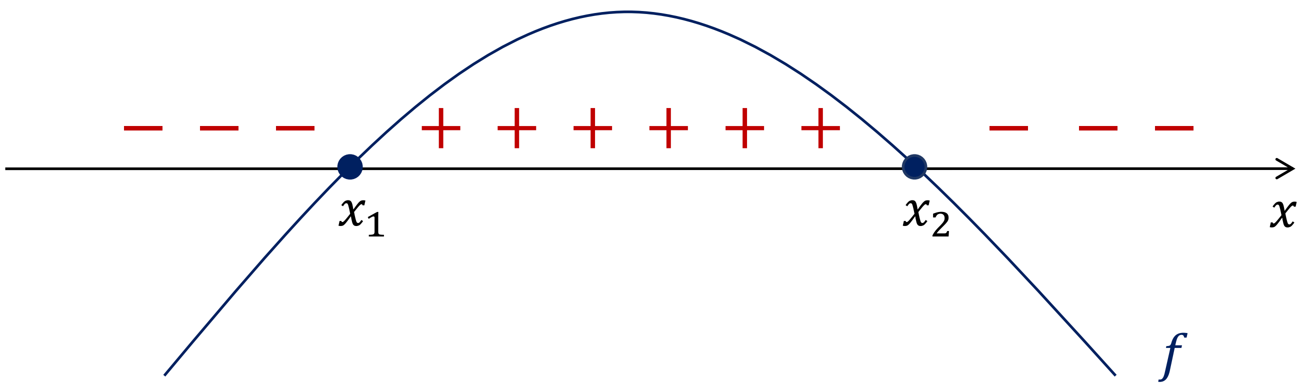


- $f(x) > 0$ em $\mathbb{R}$
- $\nexists\, x \in \mathbb{R} : f(x) = 0$
- $\nexists\, x \in \mathbb{R} : f(x) < 0$

Função do segundo grau

$4^{\mathbf{a}}$ Combinação: $a < 0$ e $\Delta > 0$

Concavidade voltada para baixo e dois zeros

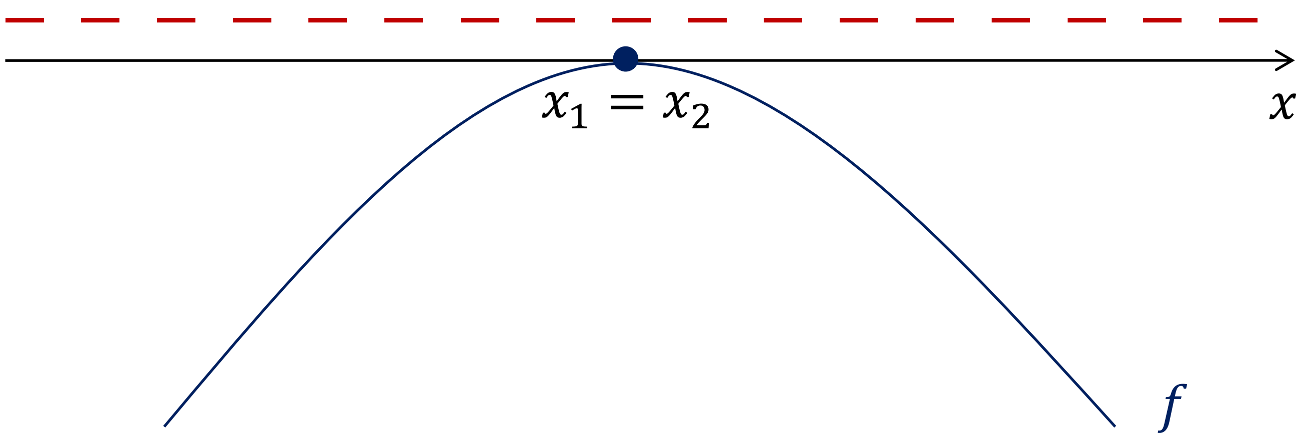


- $f(x) > 0$ em $]x_1, x_2[$
- $f(x) = 0$ em $x = x_1$ e $x = x_2$
- $f(x) < 0$ em $]-\infty, x_1[\ \cup\ ]x_2, +\infty[\ = \mathbb{R} - [x_1, x_2]$

Função do segundo grau

5^{a} Combinação: $a < 0$ e $\Delta = 0$

Concavidade voltada para baixo e um único zero

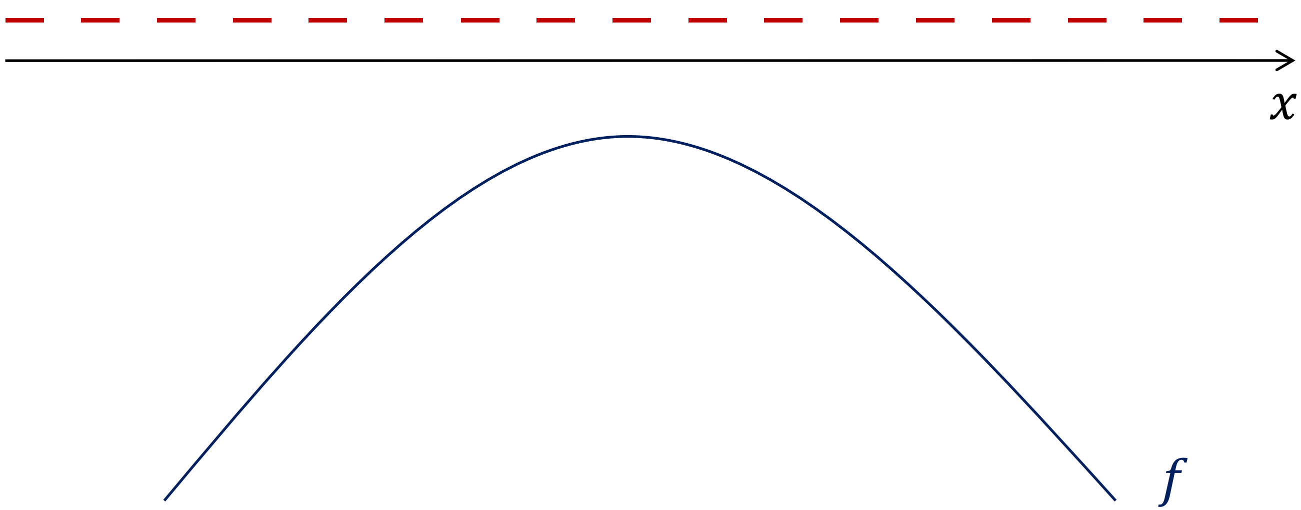


- $\nexists\, x \in \mathbb{R} : f(x) > 0$
- $f(x) = 0$ em $x = x_1 = x_2$
- $f(x) < 0$ em $]-\infty, x_1[\ \cup\ ]x_1, +\infty[\ =\ \mathbb{R} - \{x_1\}$

Função do segundo grau

$6^{\mathbf{a}}$ Combinação: $a < 0$ e $\Delta < 0$

Concavidade voltada para baixo e nenhum zero



- $\nexists\, x \in \mathbb{R} : f(x) > 0$
- $\nexists\, x \in \mathbb{R} : f(x) = 0$
- $f(x) < 0$ em $\mathbb{R}$

Inequações do segundo grau

Definição: Uma **inequação do segundo grau** pode ser escrita em uma das seguintes formas:

$$ax^2 + bx + c < 0 \qquad ax^2 + bx + c > 0$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0 \qquad ax^2 + bx + c \geq 0$$

Observação: $y = ax^2 + bx + c$ é a função do segundo grau associada à inequação.

Resolver uma inequação em x significa encontrar todos os valores de x para os quais a inequação é verdadeira.

O conjunto formado por todos esses valores é denominado **conjunto solução**.

Portanto, resolvemos uma inequação determinando o seu conjunto solução.

Inequações do segundo grau

O procedimento que vamos utilizar para resolver inequações do segundo grau, consiste nos seguintes passos:

$\mathbf{1^o}$ **Passo:** Reescrever a inequação dada (se for necessário) até que ela fique em alguma das seguintes formas: $ax^2+bx+c<\ 0$ ou $ax^2+bx+c\leq\ 0$ ou $ax^2+bx+c>\ 0$ ou $ax^2+bx+c\geq\ 0$.

$\mathbf{2^o}$ **Passo:** Considerar a função $f(x)=ax^2+bx+c$ associada à inequação.

$\mathbf{3^o}$ **Passo:** Determinar a quantidade de zeros através do sinal de Δ.

$\mathbf{4^o}$ **Passo:** Calcular os zeros da função (se existirem).

$\mathbf{5^o}$ **Passo:** Determinar a concavidade da parábola através do sinal do coeficiente a.

$\mathbf{6^o}$ **Passo:** Realizar o estudo do sinal da função e chegar à solução da inequação.

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $x^2 - 1 > x + 5$

Solução:

1º Passo: $x^2 - 1 > x + 5 \iff x^2 - 1 - x - 5 > 0$

$\iff x^2 - x - 6 > 0$

2º Passo: $f(x) = x^2 - x - 6 \qquad (a = 1,\ b = -1,\ c = -6\,)$

3º Passo: $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 1 + 24 = 25 > 0$

Portanto, f possui dois zeros.

4º Passo: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2(1)} = \dfrac{1 \pm 5}{2} \implies x_1 = \dfrac{1-5}{2} = -2$

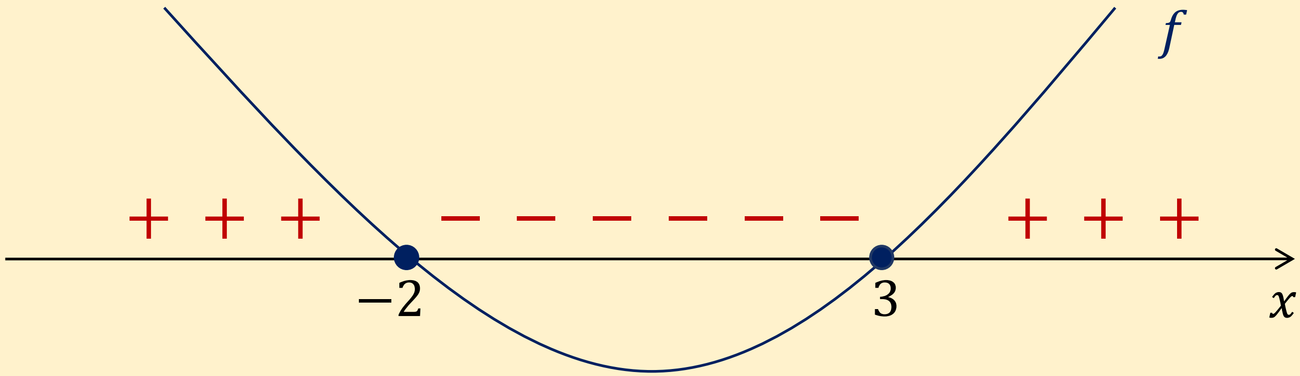
$\implies x_2 = \dfrac{1+5}{2} = 3$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $x^2 - 1 > x + 5$

Solução:

5^{o} Passo: Como $a = 1 > 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.



6^{o} Passo: Lembre que

$$x^2 - 1 > x + 5 \iff x^2 - x - 6 > 0 \iff f(x) > 0$$

Portanto, $S = \left]-\infty, -2\right[\ \cup \ \left]3, +\infty\right[$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $2x^2 + x \leq 6$

Solução:

$$2x^2 + x \leq 6 \iff 2x^2 + x - 6 \leq 0$$

$$f(x) = 2x^2 + x - 6 \qquad (a = 2,\ b = 1,\ c = -6)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(2)(-6) = 1 + 48 = 49 > 0$$

Portanto, f possui dois zeros.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2(2)} = \frac{-1 \pm 7}{4} \implies x_1 = \frac{-1-7}{4} = -2$$

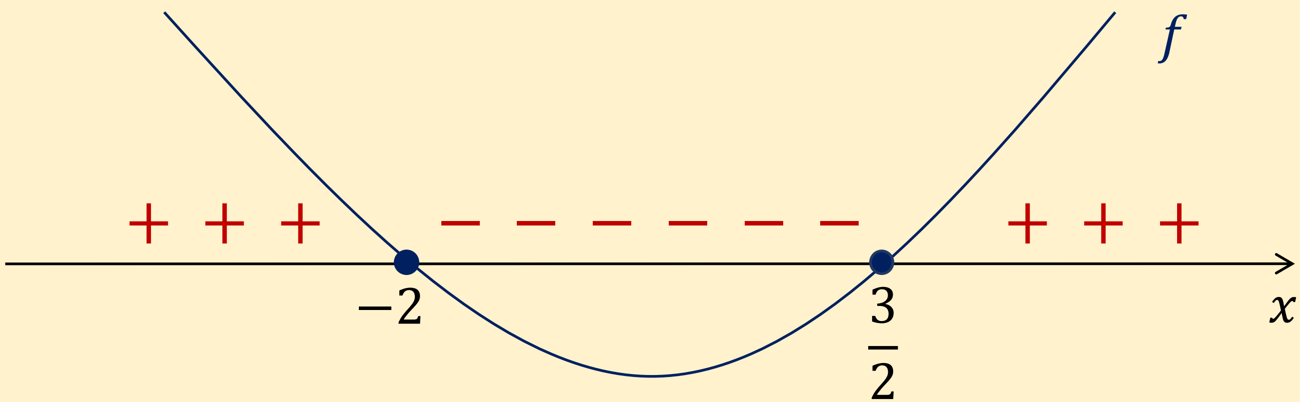
$$\implies x_2 = \frac{-1+7}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $2x^2 + x \leq 6$

Solução:

Como $a = 2 > 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.



Lembre que

$$2x^2 + x \leq 6 \iff 2x^2 + x - 6 \leq 0 \iff f(x) \leq 0$$

Portanto, $S = \left[-2, \frac{3}{2}\right]$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $x^2 + 3x + 3 \leq 0$

Solução:

$f(x) = x^2 + 3x + 3 \qquad (a = 1,\ b = 3,\ c = 3\,)$

$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(1)(3) = 9 - 12 = -3 < 0$

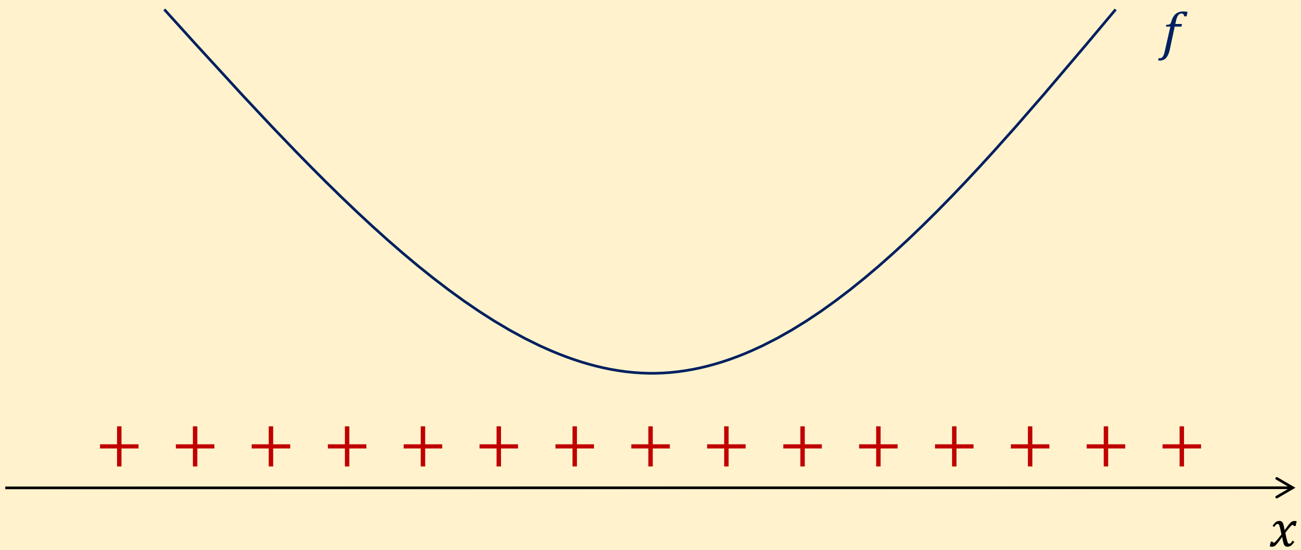
Portanto, f não possui zeros reais.

Como $a = 1 > 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $x^2 + 3x + 3 \leq 0$

Solução:



Lembre que $x^2 + 3x + 3 \leq 0 \iff f(x) \leq 0$ e como

$\nexists\, x \in \mathbb{R} : f(x) \leq 0$ temos que: $S = \emptyset$

Observação: O conjunto solução da seguinte inequação $x^2 + 3x + 3 > 0$

é: $S = \mathbb{R}$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $x^2 - 6x + 9 \leq 0$

Solução:

$f(x) = x^2 - 6x + 9 \qquad (a = 1,\ b = -6,\ c = 9\ )$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(9) = 36 - 36 = 0$

Portanto, f possui um único zero.

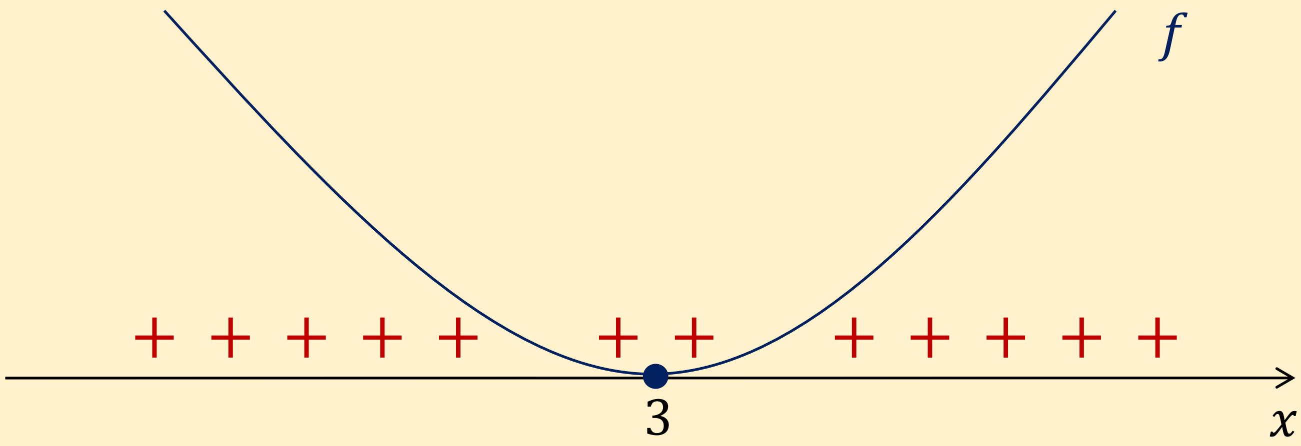
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2(1)} = \frac{6}{2} = 3$$

Como $a = 1 > 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $x^2 - 6x + 9 \leq 0$

Solução:



Lembre que $x^2 - 6x + 9 \leq 0 \iff f(x) \leq 0$ e como

$x = 3$ é o único valor que satisfaz $f(x) \leq 0$ temos que: $S = \{3\}$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $x^2 + 8x - 10 < 2(x^2 + 1)$

Solução:

$$x^2 + 8x - 10 < 2(x^2 + 1) \iff x^2 + 8x - 10 < 2x^2 + 2 \iff$$
$$\iff x^2 - 2x^2 + 8x - 10 - 2 < 0 \iff$$
$$\iff -x^2 + 8x - 12 < 0$$

$$f(x) = -x^2 + 8x - 12 \qquad (a = -1,\ b = 8,\ c = -12)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4(-1)(-12) = 64 - 48 = 16 > 0$$

Portanto, f possui dois zeros.

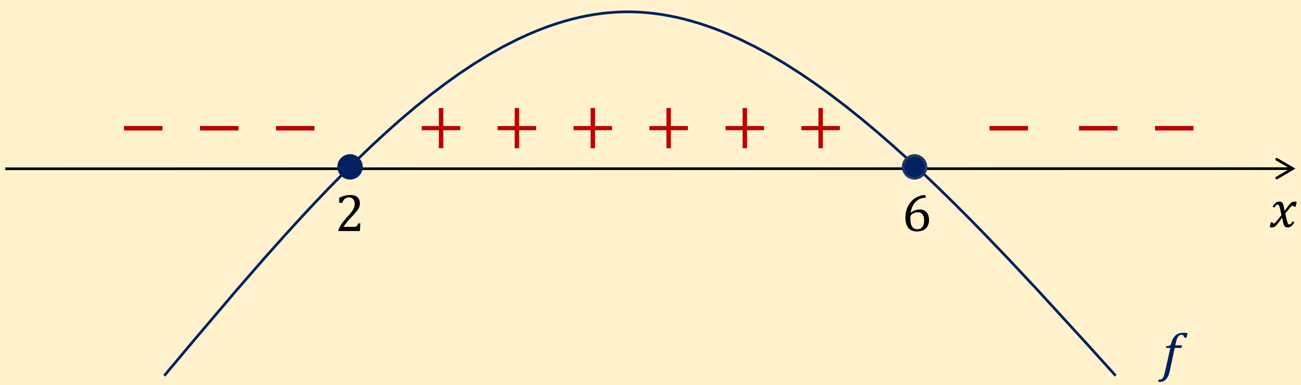
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{16}}{2(-1)} = \frac{-8 \pm 4}{-2} \implies x_1 = \frac{-8 + 4}{-2} = 2$$
$$\implies x_2 = \frac{-8 - 4}{-2} = 6$$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $x^2 + 8x - 10 < 2(x^2 + 1)$

Solução:

Como $a = -1 < 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para baixo.



Lembre que

$$x^2 + 8x - 10 < 2(x^2 + 1) \Leftrightarrow -x^2 + 8x - 12 < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0$$

Portanto, $S =]-\infty, 2[\cup]6, +\infty[$

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Resolva as inequações abaixo e apresente o conjunto solução em notação de intervalo:

(a) $x^2 > 9$

(b) $x^2 \leq 5$

(c) $(x-4)(x+2) > 0$

(d) $(x-3)(x+4) < 0$

(e) $x^2 - 9x + 20 \leq 0$

(f) $2 - 3x + x^2 \geq 0$

Exercícios

2) Resolva as inequações abaixo e apresente o conjunto solução na reta numérica:

(a) $(2x+1)(-x+2) \geq 0$

(b) $(x+2)(-x-2) \leq 0$

(c) $x^2 - 6x + 9 > 0$

(d) $x^2 - 4x \geq 0$

(e) $(x+2)(-x-2) < 0$

Respostas

Exercício 1:

(a) $S =]-\infty, -3[\ \cup \ ]3, +\infty[$

(b) $S = \left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right]$

(c) $S =]-\infty, -2[\ \cup \ ]4, +\infty[$

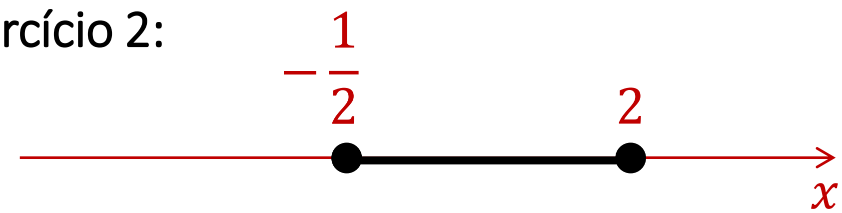
(d) $S =]-4,3[$

(e) $S = [4,5]$

(f) $S =]-\infty, 1] \ \cup \ [2, +\infty[$

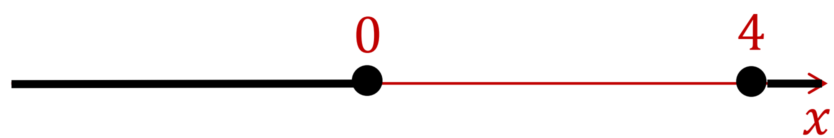
Respostas

Exercício 2:

(a)


(b)


(c)


(d)


(e)


Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA

O GAMA possui monitorias de:

- **Matemática Elementar, Cálulo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e equivalentes)
    - **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
        - **Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3** (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino

Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Matemática Básica II

Aula 03

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Inequações do segundo grau

As vezes duas inequações são combinadas em uma inequação dupla, que pode ser resolvida separando-se as duas inequações envolvidas. O exemplo a seguir ilustra esse caso.

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $4 < x^2 \leq 9$

Calcularemos então separadamente a solução de cada inequação, tomando como solução geral da inequação dupla a interseção dos conjuntos, pois desejamos valores de x que satisfaçam as duas inequações.

Solução:

a) $4 < x^2 \iff 4 - x^2 < 0$ $\qquad f(x) = 4 - x^2$ $\qquad (a = -1,\ b = 0,\ c = 4)$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4(-1)(4) = 0 + 16 = 16 > 0$$

Portanto, f possui dois zeros.

$$4 - x^2 = 0 \implies 2^2 - x^2 = 0 \implies (2 + x)(2 - x) = 0$$

$$\implies 2 + x = 0 \text{ ou } 2 - x = 0 \implies x = -2 \text{ ou } x = 2$$

$$\implies x_1 = -2 \text{ e } x_2 = 2$$

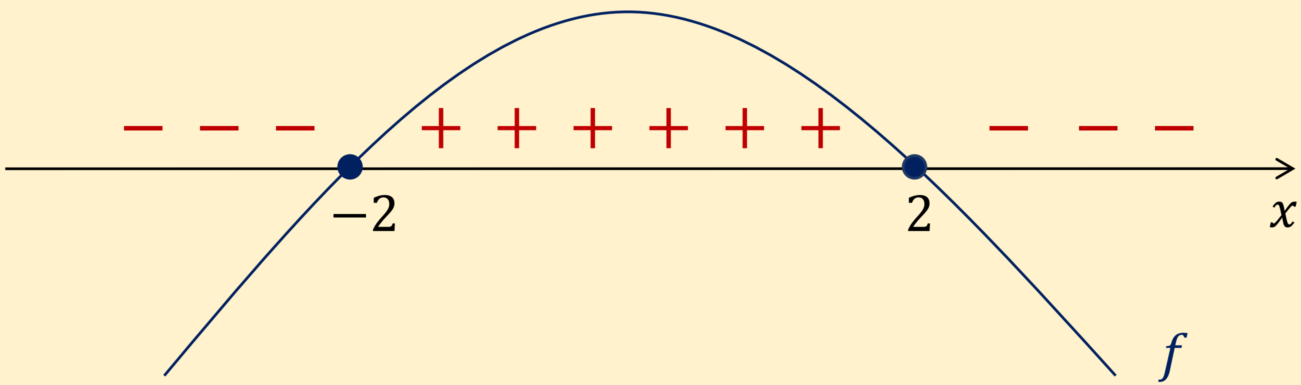
Como $a = -1 < 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para baixo.

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $4 < x^2 \leq 9$

Solução:

a)



Lembre que

$$4 < x^2 \iff 4 - x^2 < 0 \iff f(x) < 0$$

Portanto, $S_1 = \left]-\infty, -2\right[\cup \left]2, +\infty\right[$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $4 < x^2 \leq 9$

Solução:

b) $x^2 \leq 9 \iff x^2 - 9 \leq 0$ $\quad g(x) = x^2 - 9$ $\quad (a = 1,\ b = 0,\ c = -9)$

$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4(1)(-9) = 0 + 36 = 36 > 0$

Portanto, g possui dois zeros.

$x^2 - 9 = 0 \implies x^2 - 3^2 = 0 \implies (x+3)(x-3) = 0$

$\implies x + 3 = 0$ ou $x - 3 = 0 \implies x = -3$ ou $x = 3$

$\implies x_1 = -3$ e $x_2 = 3$

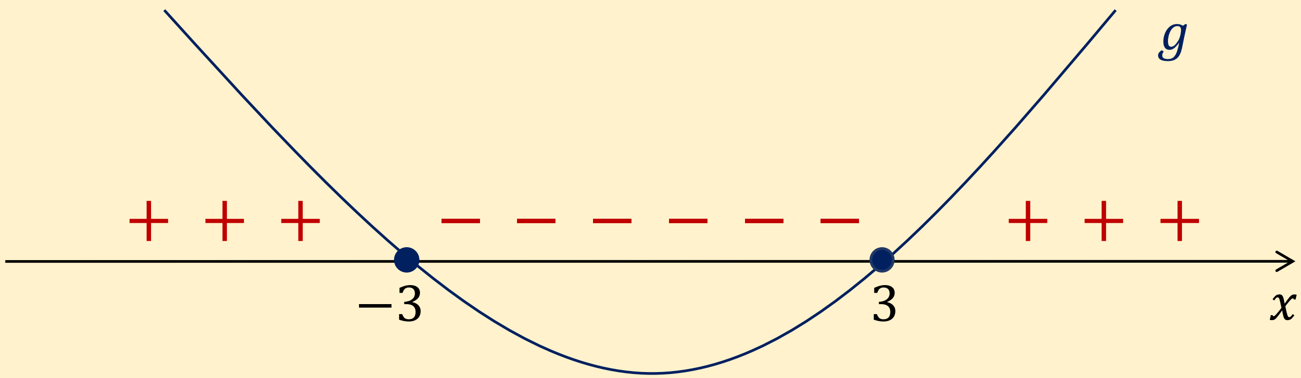
Como $a = 1 > 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $4 < x^2 \leq 9$

Solução:

b)



Lembre que

$$x^2 \leq 9 \Leftrightarrow x^2 - 9 \leq 0 \Leftrightarrow g(x) \leq 0$$

Portanto, $S_2 = [-3,3]$

Inequações do segundo grau

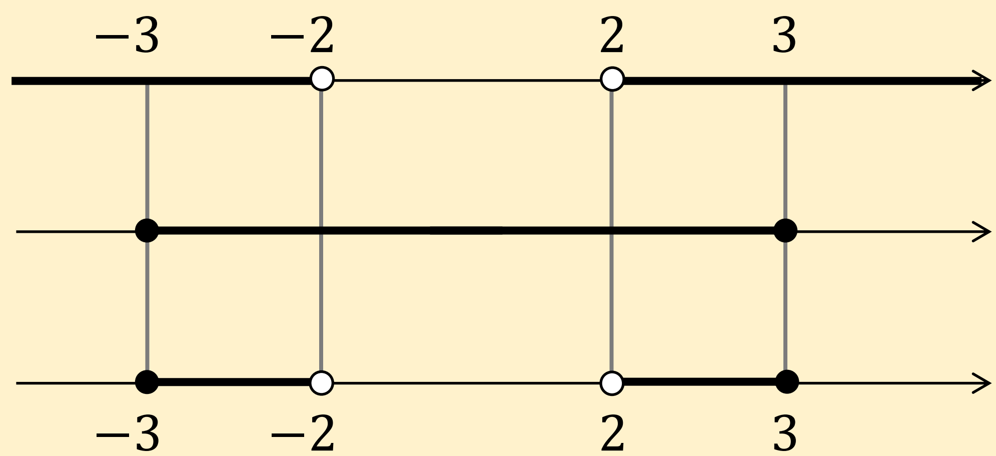
Exemplo: Resolva: $4 < x^2 \leq 9$

Solução:

$S_1 =]-\infty, -2[\ \cup \ ]2, +\infty[$

$S_2 = [-3,3]$

$S = S_1 \cap S_2$



Portanto, o conjunto solução é: $S = [-3, -2[\cup]2,3]$

Inequações do segundo grau

Nos próximos três exemplos abordaremos inequações que envolvem produtos ou quocientes, cujos fatores são expressões do segundo grau da forma $ax^2 + bx + c$ (cuja representação gráfica é uma parábola).

Utilizaremos funções do segundo grau para resolver estes tipos de inequações.

Exemplo: Resolva: $(2x^2 - 4x)(-x^2 + 3x + 4) < 0$

Solução:

a) $f(x) = 2x^2 - 4x \qquad (a = 2,\ b = -4,\ c = 0)$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(2)(0) = 16 - 0 = 16 > 0$$

Portanto, f possui dois zeros.

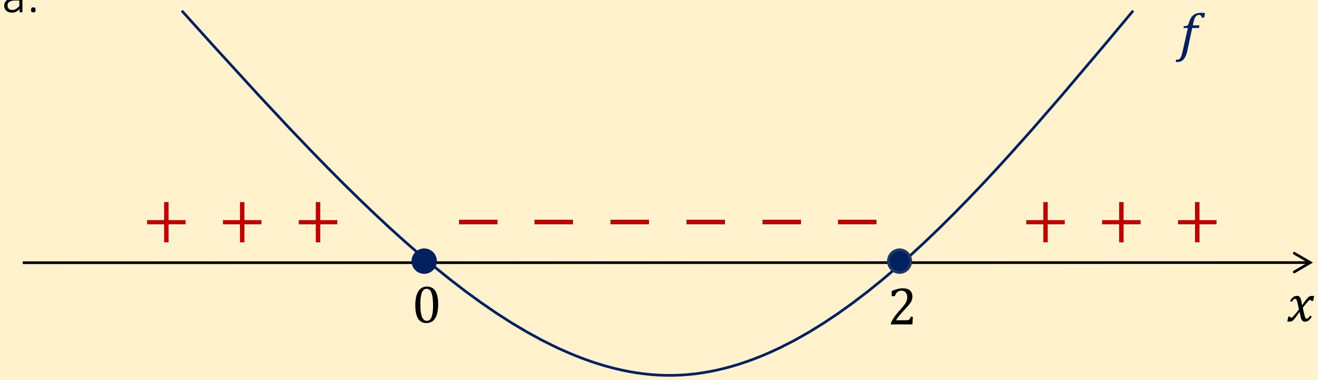
$$\begin{aligned} 2x^2 - 4x = 0 \implies 2x(x-2) = 0 &\implies 2x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 2 = 0 \\ &\implies x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 2 \\ &\implies x_1 = 0 \quad \text{e} \quad x_2 = 2 \end{aligned}$$

Inequações do segundo grau

Exemplo: $(2x^2 - 4x)(-x^2 + 3x + 4) < 0$

Solução:

a) Como $a = 2 > 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.



- $f(x) > 0$ em $]-\infty, 0[\ \cup \ ]2, +\infty[$
- $f(x) = 0$ em $x = 0$ e $x = 2$
- $f(x) < 0$ em $]0,2[$

Inequações do segundo grau

Exemplo: $(2x^2 - 4x)(-x^2 + 3x + 4) < 0$

Solução: Vamos agora realizar o mesmo procedimento para a função:

$$g(x) = -x^2 + 3x + 4.$$

b) $g(x) = -x^2 + 3x + 4$ $\quad (a = -1,\ b = 3,\ c = 4)$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(-1)(4) = 9 + 16 = 25 > 0$$

Portanto, g possui dois zeros.

$$-x^2 + 3x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2(-1)} = \frac{-3 \pm 5}{-2} \implies x_1 = \frac{-3+5}{-2} = -1$$

$$\implies x_2 = \frac{-3-5}{-2} = 4$$

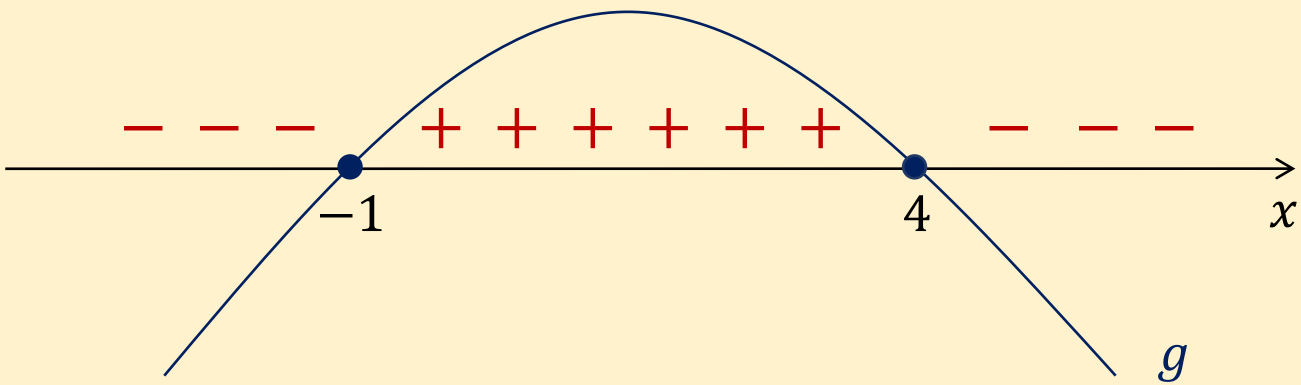
Como $a = -1 < 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para baixo.

Inequações do segundo grau

Exemplo: $(2x^2 - 4x)(-x^2 + 3x + 4) < 0$

Solução:

b)



- $g(x) > 0$ em $]-1,4[$
- $g(x) = 0$ em $x = -1$ e $x = 4$
- $g(x) < 0$ em $]-\infty, -1[\ \cup\ ]4, +\infty[$

Inequações do segundo grau

Exemplo: $(2x^2 - 4x)(-x^2 + 3x + 4) < 0$

Solução:

Logo, dos itens a) e b) segue que:

x		-1		0		2		4	
$f(x) = 2x^2 - 4x$	$+$		$+$		$-$		$+$		$+$
$g(x) = -x^2 + 3x + 4$	$-$		$+$		$+$		$+$		$-$
$f(x) \cdot g(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$		$-$

Portanto, $S =]-\infty, -1[\ \cup\ ]0,2[\ \cup\ ]4, +\infty[$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $$\frac{3x^2 - 7x + 5}{-x^2 + 6x - 8} \leq 0$$

Solução:

a) $y_1 = 3x^2 - 7x + 5$ $\quad (a = 3,\ b = -7,\ c = 5)$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(3)(5) = 49 - 60 = -11 < 0$$

Portanto, y_1 não possui zeros reais.

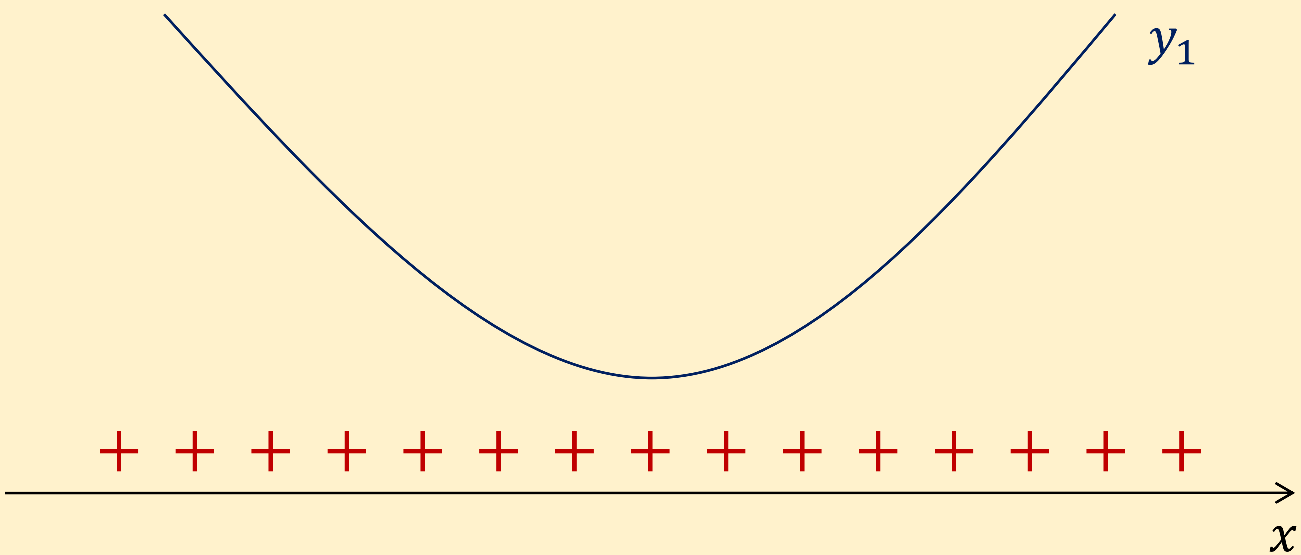
Como $a = 3 > 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $$\frac{3x^2 - 7x + 5}{-x^2 + 6x - 8} \leq 0$$

Solução:

a)



- $y_1 > 0$ em $\mathbb{R}$
- $\nexists\, x \in \mathbb{R} : y_1 = 0$
- $\nexists\, x \in \mathbb{R} : y_1 < 0$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $$\frac{3x^2 - 7x + 5}{-x^2 + 6x - 8} \leq 0$$

Solução: Vamos agora realizar o mesmo procedimento para a função $y_2 = -x^2 + 6x - 8$.

b) $y_2 = -x^2 + 6x - 8 \qquad (a = -1,\ b = 6,\ c = -8)$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(-1)(-8) = 36 - 32 = 4 > 0$$

Portanto, y_2 possui dois zeros.

$$-x^2 + 6x - 8 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{2(-1)} = \frac{-6 \pm 2}{-2} \implies x_1 = \frac{-6+2}{-2} = 2$$

$$\implies x_2 = \frac{-6-2}{-2} = 4$$

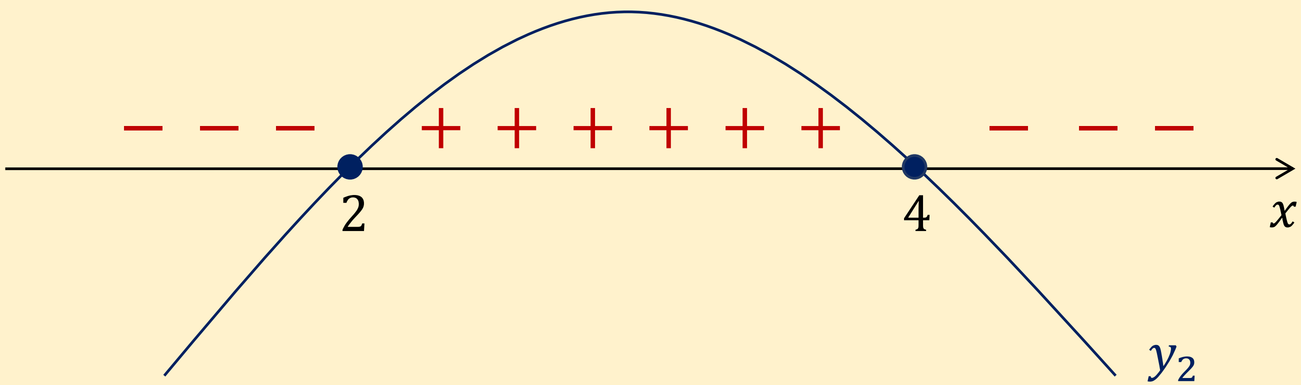
Como $a = -1 < 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para baixo.

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $\dfrac{3x^2 - 7x + 5}{-x^2 + 6x - 8} \leq 0$

Solução:

b)



- $y_2 > 0$ em $]2,4[$
- $y_2 = 0$ em $x = 2$ e $x = 4$
- $y_2 < 0$ em $]-\infty, 2[\ \cup\ ]4, +\infty[$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $$\frac{3x^2 - 7x + 5}{-x^2 + 6x - 8} \leq 0$$

Solução: Logo, dos itens a) e b) segue que:

		2		4		x
$y_1 = 3x^2 - 7x + 5$	$+$		$+$		$+$	
$y_2 = -x^2 + 6x - 8$	$-$		$+$		$-$	
$\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{3x^2 - 7x + 5}{-x^2 + 6x - 8}$	$-$		$+$		$-$	

Note que $2 \notin S$ e $4 \notin S$ pois ambos os valores zeram o denominador da fração $\dfrac{3x^2 - 7x + 5}{-x^2 + 6x - 8}$.

Portanto, $S = \left]-\infty, 2\right[\,\cup\, \left]4, +\infty\right[$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $x^4 < 625$

Solução:

$$x^4 < 625 \iff x^4 - 625 < 0 \iff (x^2)^2 - 25^2 < 0 \iff$$
$$\iff (x^2 + 25)(x^2 - 25) < 0$$

a) $f(x) = x^2 + 25 \qquad (a = 1,\ b = 0,\ c = 25)$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4(1)(25) = 0 - 100 = -100 < 0$$

Portanto, f não possui zeros reais.

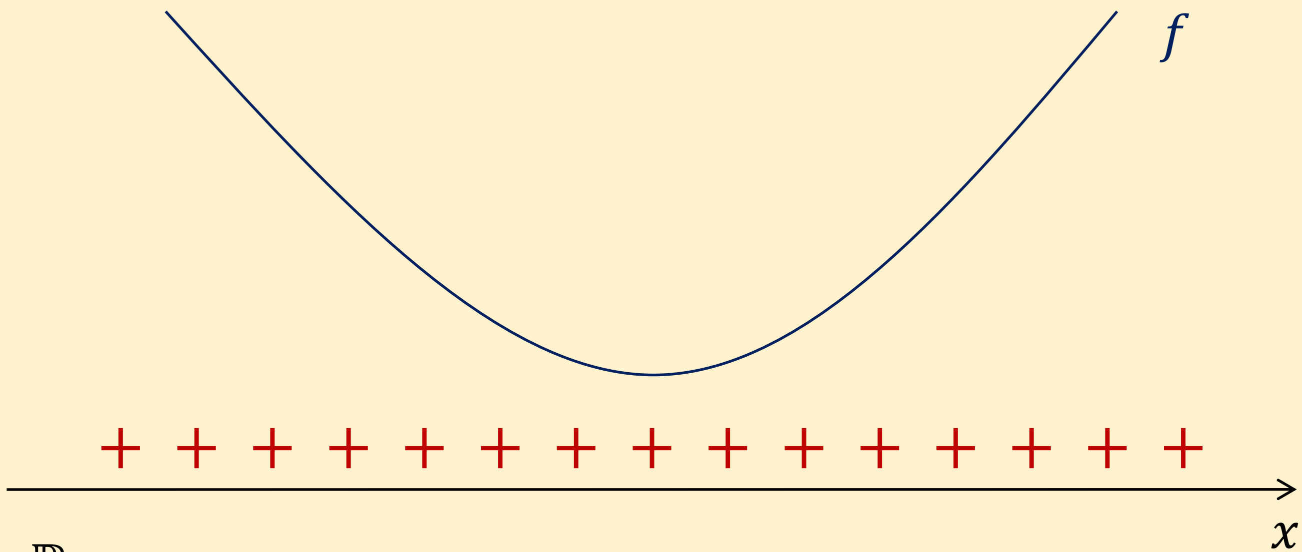
Como $a = 1 > 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $x^4 < 625$

Solução: $x^4 < 625 \iff (x^2 + 25)(x^2 - 25) < 0$

a) $f(x) = x^2 + 25$



- $f(x) > 0$ em $\mathbb{R}$
- $\nexists\, x \in \mathbb{R}: \; f(x) = 0$
- $\nexists\, x \in \mathbb{R}: \; f(x) < 0$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $x^4 < 625$

Solução: $x^4 < 625 \iff (x^2+25)(x^2-25) < 0$

Vamos agora realizar o mesmo procedimento para a função $g(x) = x^2 - 25$.

b) $g(x) = x^2 - 25 \qquad (a = 1,\ b = 0,\ c = -25)$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4(1)(-25) = 0 + 100 = 100 > 0$$

Portanto, g possui dois zeros.

$$x^2 - 25 = 0 \implies x^2 = 25 \implies \sqrt{x^2} = \sqrt{25} \implies |x| = 5 \implies x = \pm 5 \implies$$

$$\implies x_1 = -5 \text{ e } x_2 = 5$$

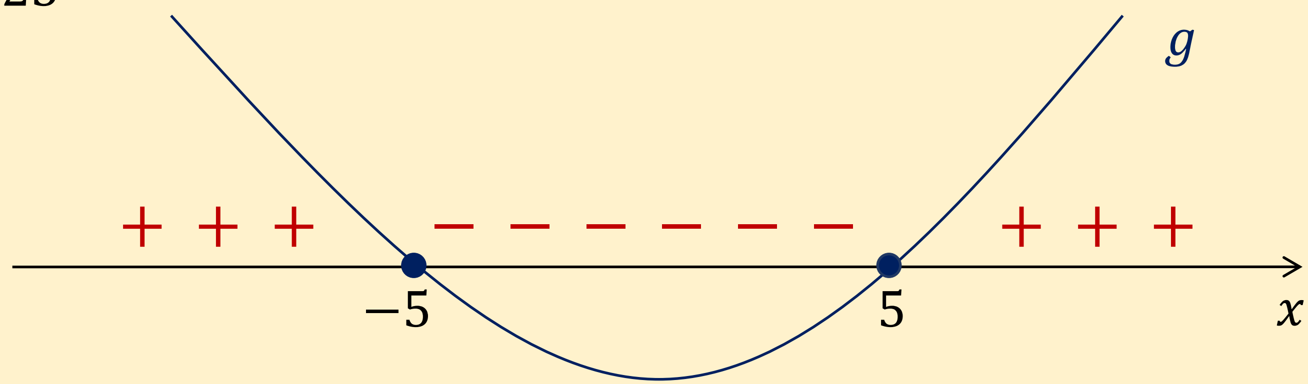
Como $a = 1 > 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $x^4 < 625$

Solução: $x^4 < 625 \iff (x^2+25)(x^2-25) < 0$

b) $g(x) = x^2 - 25$



- $g(x) > 0$ em $]-\infty, -5[\ \cup\ ]5, +\infty[$
- $g(x) = 0$ em $x = -5$ e $x = 5$
- $g(x) < 0$ em $]-5, 5[$

Exemplo: Resolva: $x^4 < 625$

Solução: $x^4 < 625 \iff (x^2+25)(x^2-25) < 0$

Logo, dos itens a) e b) segue que:

x		-5		5	
$f(x) = x^2 + 25$	$+$		$+$		$+$
$g(x) = x^2 - 25$	$+$		$-$		$+$
$f(x) \cdot g(x)$	$+$		$-$		$+$

Portanto, $S =]-5{,}5[$

Inequações do segundo grau

Observação: Podem ocorrer inequações que envolvem produtos ou quocientes cujos alguns fatores são expressões do segundo grau, alguns são expressões do primeiro grau e ainda outros fatores que são de outros tipos.

Exemplos:

1) $\dfrac{x^2+13}{x-1} \leq 1$ 2) $\dfrac{x(-3x^2+5)(-2x+3)}{(x+7)e^x} \geq 0$

O método para resolver este tipo de inequação é o mesmo que utilizamos aqui em exemplos anteriores, ou seja, associar a cada um desses fatores uma função, analisar o sinal destas funções, montar a tabela e determinar o conjunto solução.

Deixamos como exercício a resolução dos dois exemplos anteriores, cujas respostas finais são:

1) $\dfrac{x^2+13}{x-1} \leq 1$ 2) $\dfrac{x(-3x^2+5)(-2x+3)}{(x+7)e^x} \geq 0$

$S =]-\infty, 1[$ $S = \left]-7, -\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[0, \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$

Inequações do segundo grau

Vamos ilustrar através do exemplo a seguir que algumas vezes podemos resolver a mesma inequação de várias formas.

Exemplo: Resolva: $(x+9)(2x-2) \leq 0$

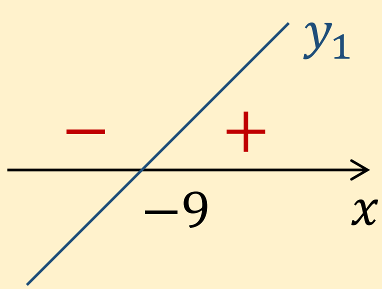
Solução 1:

$y_1 = x + 9$

$0 = x + 9$

$x = -9$ (raiz)

y_1 é crescente pois $a = 1 > 0$

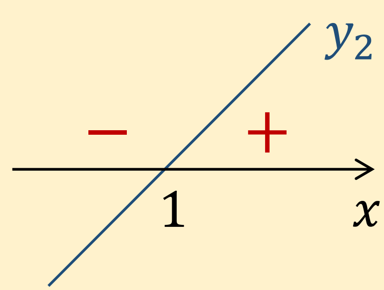


$y_2 = 2x - 2$

$0 = 2x - 2$

$x = 1$ (raiz)

y_2 é crescente pois $a = 2 > 0$



	-9	1	x
$y_1 = x + 9$	$-$	$+$	$+$
$y_2 = 2x - 2$	$-$	$-$	$+$
$y_1 \cdot y_2$	$+$	$-$	$+$

Portanto, o conjunto solução é:

$$S = [-9,1]$$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $(x+9)(2x-2) \leq 0$

Solução 2:

$$(x+9)(2x-2) \leq 0 \iff 2x^2 + 16x - 18 \leq 0$$

$$f(x) = 2x^2 + 16x - 18 \qquad (a = 2,\ b = 16,\ c = -18)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (16)^2 - 4(2)(-18) = 256 + 144 = 400 > 0$$

Portanto, f possui dois zeros.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 \pm \sqrt{400}}{2(2)} = \frac{-16 \pm 20}{4} \implies x_1 = \frac{-16 - 20}{4} = -9$$

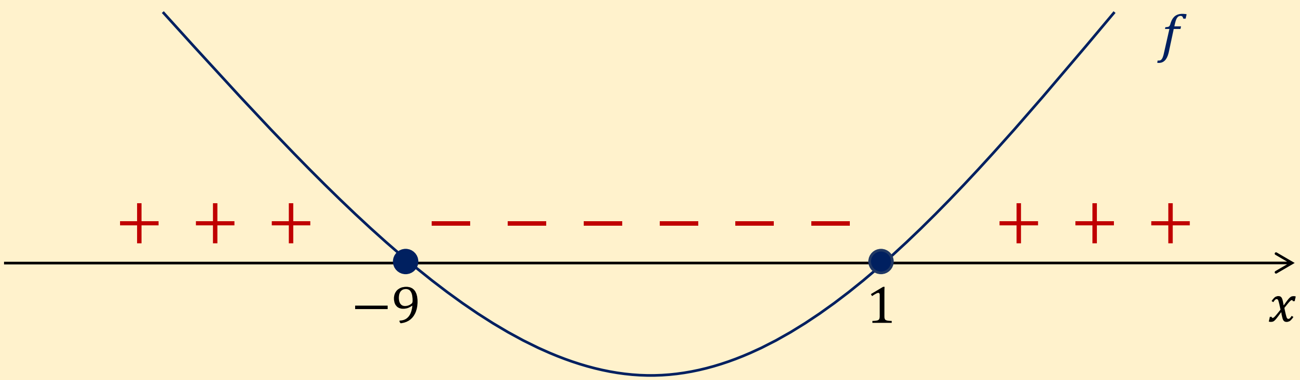
$$\implies x_2 = \frac{-16 + 20}{4} = 1$$

Como $a = 2 > 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $(x+9)(2x-2) \leq 0$

Solução 2:



Lembre que

$$(x+9)(2x-2) \leq 0 \iff 2x^2+16x-18 \leq 0 \iff f(x) \leq 0$$

Portanto, $S = [-9,1]$

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Resolva as inequações abaixo e apresente o conjunto solução em notação de intervalo:

(a) $\dfrac{2}{x} < \dfrac{3}{x-4}$

(b) $\dfrac{1}{x+1} \geq \dfrac{3}{x-2}$

(c) $x^3 - x^2 - x - 2 > 0$

(d) $x^3 - 3x + 2 \leq 0$

2) Ache todos os valores de x para os quais a expressão dada resulte em um número real:

(a) $\sqrt{x^2 + x - 6}$

(b) $\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}$

Exercícios

3) Resolva as inequações abaixo e apresente o conjunto solução na reta numérica:

(a) $(x^2 + x - 2)(-x + 2) \leq 0$

(b) $x(1 - x)(x + 4) < 0$

(c) $\dfrac{2x + 1}{x - 2} < 1$

(d) $\dfrac{x - 2}{x + 3} > 0$

(e) $\dfrac{3x - 1}{x + 1} \leq 2$

(f) $-1 < 2x - 3 \leq x$

4) Determine o domínio das seguintes funções:

(a) $y = \sqrt{x(x - 5)}$

(b) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 15}$

(c) $\sqrt{\dfrac{x - 2}{x + 4}}$

(d) $y = \sqrt{\dfrac{x - 1}{-x + 3}} - \sqrt{\dfrac{-x^2 + 1}{x^2 - 4x}}$

Exercícios

5) Determine o conjunto solução das seguintes desigualdades:

(a) $m + \dfrac{3 - m^2}{m - 2} \geq -3$

(b) $\dfrac{(x-1)(x+3)}{x-5} > 0$

6) Dadas as funções $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x - 2}$ e $g(x) = 1$ determine os valores reais de x para que se tenha: $f(x) > g(x)$

Respostas

Exercício 1:

(a) $S =]-8,0[\ \cup \ ]4,+\infty[$

(b) $S = \left]-\infty,-\frac{5}{2}\right] \cup \ ]-1,2[$

(c) $S =]2,+\infty[$

(d) $S =]-\infty,-2] \ \cup \ \{1\}$

Exercício 2:

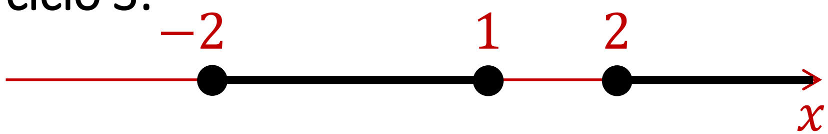
(a) $S =]-\infty,-3] \ \cup \ [2,+\infty[$

(b) $S =]-\infty,-2] \ \cup \ ]1,+\infty[$

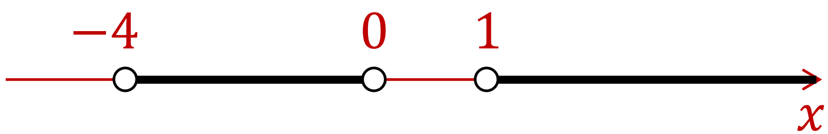
Respostas

Exercício 3:

(a)



(b)



(c)

(d)

(e)

(f)

Respostas

Exercício 4:

(a) $S =]-\infty, 0] \cup [5, +\infty[$

(b) $S =]-\infty, -3] \cup [5, +\infty[$

(c) $S =]-\infty, -4[\cup [2, +\infty[$

(d) $S = [1,3[$

Exercício 5:

(a) $S =]-\infty, 2[\cup [3, +\infty[$

(b) $S =]-3,1[\cup]5, +\infty[$

Exercício 6: $S =]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA

O GAMA possui monitorias de:

- **Matemática Elementar, Cálulo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e equivalentes)
    - **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
        - **Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3** (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino

Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Matemática Básica II

Aula 04

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Matrizes

Definição: Chamamos de **matriz** uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas.

Definição: Uma **matriz** é um agrupamento regular de números. Os números neste agrupamento são chamados de entradas da matriz.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} e & \pi & -\sqrt{4} \\ 0 & \dfrac{2}{4} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Os elementos de uma matriz podem ser números (reais ou complexos), funções ou ainda matrizes.

Matrizes

Representamos uma matriz de *m* linhas e *n* colunas por:

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

<u>Notação</u>

1) $\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$

2) $\left[a_{ij}\right]$

A entrada que ocorre na i-ésima linha e na j-ésima coluna de uma matriz A é denotada por a_{ij}

Matrizes

Definição 3 : Duas matrizes são definidas como iguais se têm o mesmo tamanho e suas entradas são iguais, ou seja, se $A_{m\times n} = B_{r\times s}$ são iguais, $A = B$, se elas tem o mesmo número de linhas $(m = r)$ e colunas $(n = s)$ e todos os seus elementos correspondentes são iguais $(a_{ij} = b_{ij})$.

Considere uma matriz denotada por $A_{m\times n}$:

i) Matriz quadrada : o número de linhas é igual ao número de colunas $(m = n)$

Exemplos

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad [21]_{1\times 1}$$

Matrizes: Tipos de matrizes

ii) Matriz nula : aquela em que $a_{ij} = 0$, para todo i e j.

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

iii) Matriz coluna : aquela que possui uma única coluna $(n = 1)$.

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 7 \\ -8 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

Matrizes: Tipos de matrizes

iv) Matriz linha : aquela que possui uma única linha ($m = 1$).

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 8 \end{bmatrix}_{1\times 3}$$

v) Matriz diagonal : é uma matriz quadrada ($m = n$) onde $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$.

Exemplo

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Matrizes: Tipos de matrizes

vi) Matriz identidade quadrada : aquela em que $a_{ii} = 1$ e $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$.

Exemplo

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

vii) Matriz triangular superior: é uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal são nulos, ou seja, $m = n$, $a_{ij} = 0$, para $i > j$.

Exemplo

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

Matrizes: Tipos de matrizes

viii) Matriz triangular inferior: é uma matriz quadrada onde todos os elementos acima da diagonal são nulos, ou seja, $m = n$, $a_{ij} = 0$, para $i < j$.

<u>Exemplo</u>

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 8 & -2 & 0 \\ -1 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

ix) Matriz simétrica: é uma matriz onde $m = n$ e $a_{ij} = a_{ji}$.

<u>Exemplo</u>

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & -1 \\ 6 & 5 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Matrizes: Operações com matrizes

Adição: Seja as matrizes $A_{m \times n}$ e $B_{m \times n}$, de mesma ordem, $A + B$ é uma matriz $m \times n$ cujos elementos são as somas dos elementos correspondentes de A e B.

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 4 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

Multiplicação por escalar: Seja $A_{m \times n}$ e k um escalar.

Definimos uma nova matriz $m \times n$ por:

$$k \cdot A = \left[k \cdot a_{ij}\right]_{m \times n}.$$

Exemplo:

$$-2\begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -20 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Matrizes: Operações com matrizes

Transposição: Dada uma matriz $A\left[a_{ij}\right]_{m \times n}$, podemos obter uma outra matriz $A'\left[b_{ij}\right]_{n \times m}$, cujas linhas são as colunas de A, ou seja, $b_{ij} = a_{ji}$.

A' é denominada transposta de A.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2} \qquad A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Matrizes: Operações com matrizes

Multiplicação de matrizes: Sejam $A\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ e $B\left[b_{rs}\right]_{n\times p}$, definimos $A\cdot B=\left[c_{uv}\right]_{m\times p}$, onde

$$c_{uv}=\sum_{k=1}^{n} a_{uk}b_{kv}=a_{u1}b_{1v}+a_{u2}b_{2v}+\cdots+a_{un}b_{nv}$$

Exemplo:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\\ 5 & 3\end{bmatrix}_{3\times 2} \quad \text{e}$$

$$B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 4\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Observações:

1) o produto de duas matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{l\times p}$ só pode ser efetuado se $n=l$;

2) a matriz resultado $C=AB$ será de ordem $m\times p$.

Matrizes: Operações com matrizes

<u>Multiplicação de Matrizes:</u>

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 \\ 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 4(-1) + 2 \cdot 4 \\ 5 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 5 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Exercícios Propostos

Grupo de Apoio em Matemática

Exercícios:

1) Sejam A $= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ $e\ D = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}$. Calcule:

(a) A + B (b) AC (c) CD (d) 2A + B (e) -A

2) Seja A $= \begin{bmatrix} 2 & x^2 \\ 2x-1 & 0 \end{bmatrix}, Se\ A^t = A$, então qual o valor de x ?

3) Dadas A $= \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ $e\ C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

(a) Mostre que $AB = BA = 0, AC = A\ e\ CA = C$.

(b) Use os resultados de a) para mostrar que $ACB = CBA\ e\ A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

Exercícios:

4) Calcular o valor da expressão $X + Y + Z$ sabendo que:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ X & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & Y \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & Z \end{bmatrix}$$

5) Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 2 & 1 \\ -1 & 3 & a \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 16 \\ 13 & 1 \end{bmatrix}$$

Sendo "a" um número real, para que tenhamos $A \times B = C$, o valor da variável "a" deve ser :

(a) Um número inteiro, ímpar e primo.
(b) Um número inteiro, par, maior que 1 e menor que 5.
(c) Um número racional, par, maior que 5 e menor que 10.
(d) Um número natural, ímpar, maior que 5 e menor que 10.

Exercícios:

6) Qual o único valor para x satisfazer a equação:

$$\begin{bmatrix} x^2 - 6x + 9 & 0 \\ x^2 - 3x - 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) -4 (b) 6 (c) 4 (d) 8

7) Sejam a e b números reais tais que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ satisfaz a equação $A^2 = aA + bI$,em que I é a matriz identidade de ordem 2, logo o produto ab é igual a:

(a) -2 (b) -1 (c)1 (d) 2

8) São dadas as matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, quadradas de ordem 2, com $a_{ij} = 3i + 4j$ e $b_{ij} = -4i - 3j$. Se $C = A + B$ então C^2 é igual a :

(a)$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b)$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (c)$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d)$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (e)$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Respostas:

Exercício 1:

a) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 15 \\ -4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 7 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Exercício 2: $x = 1$

Exercício 4: $X + Y + Z = 3$

Exercício 5: Letra (a)

Exercício 6: Letra (c)

Exercício 7: Letra (a)

Exercício 8: Letra (e)

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA

O GAMA possui monitorias de:

- **Matemática Elementar, Cálulo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e equivalentes)
  - **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
    - **Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3** (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino

Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Matemática Básica II

Aula 05

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Determinantes

Definição: Dada uma permutação dos inteiros $1,2,\ldots,n$, existe uma inversão quando um inteiro precede outro menor que ele.

Exemplo: Nº de inversões considerando as permutações de 1,2 e 3.

Permutação			Nº de inversões
1	2	3	0
1	3	2	1
2	1	3	1
2	3	1	2
3	1	2	2
3	2	1	3

Observação: O nº de permutações de n objetos é dada por $n!$, onde $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1$ caso $n > 0$. Define-se $0! = 1$.

Determinantes

- Ao número associado a uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ chamamos de determinante.
- Representamos por $\det(A)$, $|A|$ ou $\det[a_{ij}]$.

<u>Exemplos</u>:

$$\det[a] \;=\; a$$

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{matrix}$$

Determinantes

Observações:

- Para o cálculo do $\det(A_{3x3})$, aparecem todos os produtos $a_{1j1}a_{2j2}a_{3j3}$, onde j_1, j_2 e j_3 são as permutações de $1,2$ e 3.
- O sinal do termo é negativo se o número de inversões é ímpar.

Permutação			Nº de inversões	Sinal	Produto $a_{1j1}a_{2j2}a_{3j3}$
1	2	3	0	$+$	$a_{11}a_{22}a_{33}$
1	3	2	1	$-$	$a_{11}a_{23}a_{32}$
2	1	3	1	$-$	$a_{12}a_{21}a_{33}$
2	3	1	2	$+$	$a_{12}a_{23}a_{31}$
3	1	2	2	$+$	$a_{13}a_{21}a_{32}$
3	2	1	3	$-$	$a_{13}a_{22}a_{31}$

Determinantes

Definição: $\det[a_{ij}] = \sum_{\rho}(-1)^J a_{1j1}a_{2j2} \ldots an_{jn}$, onde $J = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ é o número de inversões da permutação $(j_1 j_2 \ldots j_n)$ e ρ indica que a soma é estendida a todas $n!$ permutações de $(1,2,\ldots,n)$.

Logo, o $\det[a_{ij}]_{3x3} = \displaystyle\sum_{\rho}^{3!}(-1)^J a_{1j1}a_{2j2}a_{3j3}$

$$= (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32} +$$
$$(-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} +$$
$$(-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31}$$

Propriedades

i. Se todos os elementos de uma linha/coluna de uma matriz A são nulas, $\det(A) = 0$.

ii. $\det(A) = \det(A')$.

iii. Se multiplicarmos um linha da matriz por uma constante, o determinante fica multiplicado por esta constante.

iv. Uma vez trocada a posição de duas linhas, o determinante troca de sinal.

v. O determinante de uma matriz que tem duas linhas ou colunas iguais é zero.

vi. $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.

vii. O determinante não se altera se somarmos a uma linha outra linha multiplicada por uma constante: $L_i \leftarrow L_i + kL_j$.

viii. $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Desenvolvimento de Laplace

Sabe-se que

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Podemos reescrever a soma de outra forma:

$$\det A = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}|$$

A_{ij} é a submatriz (da matriz inicial) em que a i-ésima linha e a j-ésima coluna foram retiradas.

Logo, o determinante pode ser expresso em função dos determinantes das submatrizes 2x2, ou seja,

Desenvolvimento de Laplace

Define-se $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ o que caracteriza a expressão $\det A = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}$, ou seja,

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}|A_{11}| = 1 \cdot |A_{11}|$$
$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2}|A_{11}| = -1 \cdot |A_{12}|$$
$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3}|A_{11}| = 1 \cdot |A_{13}|$$

Para o cálculo de determinantes de ordem n, expressamos da seguinte forma:

$$\det A_{nxn} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \Delta_{ij}$$

Ao número Δ_{ij} chamamos de **cofator** ou **complemento algébrico** do elemento a_{ij}.

Desenvolvimento de Laplace

Exemplo: Realizando o desenvolvimento de Laplace pela linha 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solução :

$$\det(A) = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{11} =$$

$$1(-1)^{1+1}.\,|A_{11}| + (-2)(-1)^{1+2}|A_{12}| + 3(-1)^{1+3}|A_{13}| =$$

$$1(-1)^{2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^{4}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$1(2-1) + 2(4-2) + 3(-2+2) = 5$$

Matriz Adjunta e Invesa

Da definição de cofator Δ_{ij} de a_{ij}, podemos formar uma nova matriz A, denominada **matriz dos cofatores** de A.

$$\bar{A} = [\Delta_{ij}]$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix} \qquad \bar{A} = \begin{bmatrix} -19 & 19 & -19 \\ -5 & 10 & -11 \\ 4 & -8 & 5 \end{bmatrix}$$

Definição: dada uma matriz quadrada A, chamaremos de **matriz adjunta** de A, a matriz transposta dos cofatores de A, isto é, $adj\ A = \bar{A}'$.

$$adj\ A = \bar{A}' = \begin{bmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriz Adjunta e Inversa

Teorema: $A \cdot \bar{A}' = A \cdot (\text{adj}\, A) = (\det A) \cdot In$.

Definição: Dada uma matriz quadrada A de ordem n, chamamos de inversa de A a uma matriz B tal que $A \cdot B = B \cdot A = In$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n.

A inversa de A é representada por A^{-1}.

Matriz Adjunta e Inversa

Exemplo: Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, encontre A^{-1}.

Solução :

Da definição anterior temos que $A \cdot A^{-1} = In = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ então,

$$\begin{bmatrix} (2a_{11} + 3a_{21}) & (2a_{12} + 3a_{22}) \\ (a_{11} + 4a_{21}) & (a_{12} + 4a_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dessa igualdade podemos obter dois sistemas:

(1) $\begin{cases} 2a_{11} + 3a_{21} = 1 \\ a_{11} + 4a_{21} = 0 \end{cases}$ e (2) $\begin{cases} 2a_{12} + 3a_{22} = 0 \\ a_{12} + 4a_{22} = 1 \end{cases}$

De (1) obtemos, $a_{11} = \frac{4}{5}$ e $a_{21} = -\frac{1}{5}$, de (2) $a_{12} = -\frac{3}{5}$ e $a_{22} = \frac{2}{5}$, logo temos que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Matriz Adjunta e Inversa

Observações:

i. Se A e B são matrizes quadradas, de mesma ordem, ambas inversíveis (existe A^{-1} e B^{-1}), então $A \cdot B$ é inversível e $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

ii. Se A é uma matriz quadrada e existe uma matriz B tal que $B \cdot A = I$, então A é inversível, isto é, A^{-1} existe e $B = A^{-1}$.

iii. Nem toda matriz tem inversa.

Matrizes elementares

Observação: Cada operação com linhas de uma matriz corresponde a uma multiplicação dessa matriz por uma matriz especial.

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$,

a) $L_1 \leftarrow 2L_1 : \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

b) $L_1 \leftrightarrow L_2 : \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

c) $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 : \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

Matrizes

Definição: Uma matriz elementar é uma matriz obtida a partir da identidade, através da aplicação de uma operação elementar com linhas.

Teorema: Se A é uma matriz, o resultado da aplicação de uma operação com as linhas de A é o mesmo que o resultado da multiplicação da matriz elementar E correspondente a operação com linhas pela matriz A.

Teorema: Sistemas associados a matrizes linha equivalente são equivalentes.

Teorema: Se A é uma matriz inversível, sua matriz linha reduzida a forma escada R é a identidade. Além disso, A é dada por um produto de matrizes elementares.

Teorema: Se uma matriz A pode ser reduzida a matriz identidade por uma sequencia de operações elementares com linhas, então A é inversível e a matriz inversa de A é obtida aplicando-se a mesma sequencia de operações com linhas.

$$(A \vdots I) \rightarrow (I \vdots A^{-1})$$

Procedimento para inversão de matrizes

Teorema: Uma matriz quadrada A admite inversa se, e somente se,

$$\det A \neq 0.$$

Neste caso,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \bar{A}'$$

Exemplo: Determine a inversa de $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$.

Exemplo

Determine a inversa de $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$.

Solução:

Vamos encontrar A^{-1} a partir da matriz adjunta de A.

O teorema nos diz que $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \bar{A}'$, $\det(A) = 6 \cdot 4 \; - 11 \cdot 2 = 2$, logo $\frac{1}{\det A} = \frac{1}{2}$

Primeiro iremos encontrar a matriz dos cofatores de A:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} (-1)^2 \cdot 4 & (-1)^3 \cdot 11 \\ (-1)^3 \cdot 2 & (-1)^4 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -11 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \; \bar{A}' = adj\; A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -11 & 6 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o teorema temos que

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -11 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{-11}{2} & 3 \end{bmatrix}.$$

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Dadas as matrizes A $= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $e\ B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule:

(a) $\det(A) + \det(B)$

(b) $\det(A + B)$.

2) Dadas as matrizes A $= \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $e\ B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, calcule:

(a) $\det(AB)$

(b) $\det(BA)$

3) Calcule det $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}$

(a) Pela regra de Sarrus.

(b) Em relação à segunda coluna, usando o desenvolvimento de Laplace.

Exercícios

4) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, calcule:

(a) $adj(A)$

(b) $\det(A)$

(c) A^{-1}

5) Determine A^{-1} sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

6) Calcule o conjunto solução de x para que o determinante da matriz A seja nulo ou positivo:

$$A = \begin{bmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ x-1 & -\dfrac{1}{3x} & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Respostas

Exercício 1:

(a) 1

(b) 3

Exercício 2:

(a) $\det(AB) = 0$

(b) $\det(BA) = -231$

Exercício 3:

(a) e (b) 21

Exercício 4:

(a) $\begin{bmatrix} 5 & -6 & 7 \\ 5 & 21 & -2 \\ -10 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

(b) 45

(c) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{2}{15} & \frac{7}{45} \\ \frac{1}{9} & \frac{7}{15} & -\frac{2}{45} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{15} & \frac{4}{45} \end{bmatrix}$

Exercício 5:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 6 & -4 \\ 4 & -5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 6

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{6} \leq x \leq 1 \right\}$$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA

O GAMA possui monitorias de:

- **Matemática Elementar, Cálulo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e equivalentes)
  - **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
    - **Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3** (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino

Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Matemática Básica II

Aula 06

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Sistemas e Matrizes

Um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações do tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

com $a_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, números reais (ou complexos).

Uma solução para o sistema é uma n-upla de números $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que satisfaça simultaneamente estas m equações.

Sistemas e Matrizes

Ainda, podemos escrever o sistema na forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{B}$$

ou $A \cdot X = B$

matriz dos termos independentes
matriz das incógnitas
matriz dos coeficientes

Sistemas e Matrizes

Outra matriz que podemos associar ao sistema é a matriz ampliada:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Sistemas e Matrizes

Dado o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$$

representena forma matricial e apresente a matriz amplida.

$\underline{\text{Forma matricial}}: A \cdot X = B$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$\underline{\text{Matriz ampliada}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Resolução do sistema

Em termos de matrizes ampliadas aplicadas a resolução de sistemas,

partimos de $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

Como realizar este procedimento?

e chegamos a $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

que é a matriz ampliada do sistema

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\qquad = 3 \\ \qquad x_2 \qquad\quad = -2 \\ \qquad\qquad x_3 \quad = 2 \end{cases}$$

Sistemas e Matrizes: Operações elementares

São definidas três operações elementares sobre as linhas de uma matriz:

1) Permuta da i-ésima e j-ésima linhas: $L_i \leftrightarrow L_j$

<u>Exemplo</u>: $L_2 \leftrightarrow L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Sistemas e Matrizes: Operações elementares

2) Multiplicação da i-ésima linha por um escalar não nulo: $L_i \leftarrow k \cdot L_i$

<u>Exemplo</u>: $L_2 \leftarrow -3L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

3) Substituição da i-ésima linha pela i-ésima mais k vezes a j-ésima linha: $L_i \leftarrow L_i + k \cdot L_j$

<u>Exemplo</u>: $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Se A e B são matrizes $m \times n$, dizemos que B é linha equivalente a A, se B for obtida de A através de um número finito de operações elementares sobre as linhas de A.

Notação

$A \to B$ ou $A \sim B$

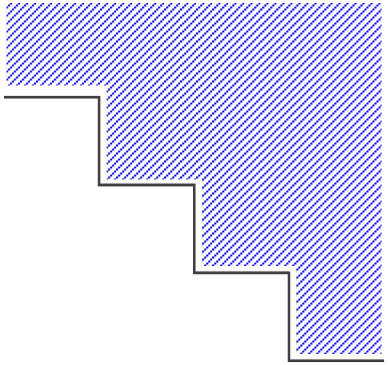
Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \text{ é linha equivalente a } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sistemas e Matrizes: Forma escada

Definição: Uma matriz *m* x *n* é linha reduzida à forma escada se:

a. O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1.
b. Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero.
c. Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas.
d. Se as linhas 1, ..., *r* são linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha *i* ocorre na coluna k_i, então $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$.



Obs.: o número de zeros precedendo o primeiro elemento não nulo de uma linha aumenta a cada linha, até que sobrem somente linhas nulas (se houver).

Sistemas e Matrizes: Forma escada

Definição: Dada uma matriz $A_{m\times n}$, seja $B_{m\times n}$ a matriz linha reduzida à forma escada linha equivalente a A.

Chamamos de posto de A, denotado por p, o número de linhas não nulas de B.

Chamamos de nulidade de A o número $n - p$.

Exemplo

Determine o posto e a nulidade de A, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

- posto de A: $p = 3$
- nulidade: $n - p = 3 - 3 = 0$

Sistemas e Matrizes: Forma escada

Se a matriz A for interpretada como sendo a matriz ampliada de um sistema linear, temos:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 0x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix}$$

A matriz-linha reduzida à forma escada é linha equivalente à matriz A. Logo, o sistema que ela representa é dado por:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{8} \\ x_2 = -\frac{1}{4} \\ x_3 = \frac{11}{8} \end{cases}$$

Solução de sistemas lineares

Se tivermos um sistema de uma equação e uma incógnita

$ax = b$, existirão três possibilidades:

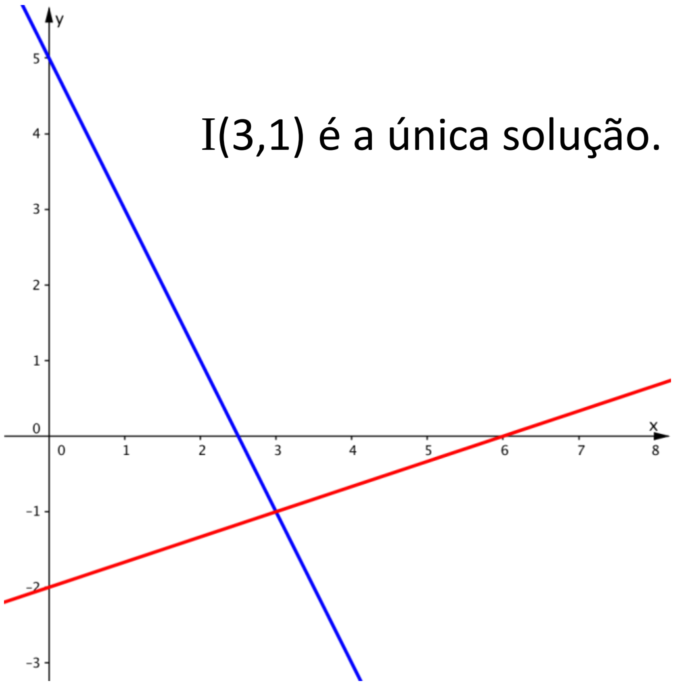
i) $a \neq 0$ — A equação tem uma única solução $x = \dfrac{b}{a}$

ii) $a = 0$ e $b = 0$ — Temos $0x = 0$. Qualquer número real será solução da equação.

iii) $a = 0$ e $b \neq 0$ — Temos $0x = b$. Não existe solução para esta equação.

Exemplo 1 – Sistema possível e determinado:

Resolva o sistema linear: $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$



I(3,1) é a única solução.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} x + 0y = 3 \\ 0x + y = -1 \end{cases}$$

Matriz dos coeficientes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Posto $p_c = 2$

Matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

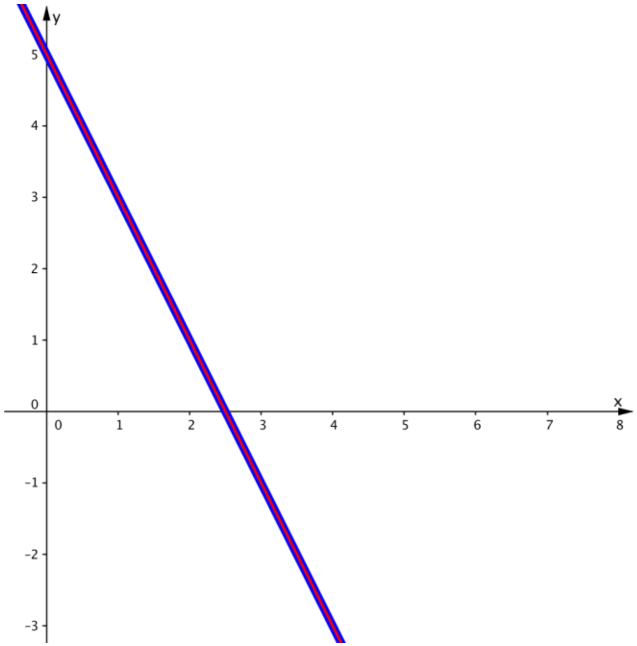
Posto $p_a = 2$

Nulidade

n - p = 2 – 2 = 0

Exemplo 2 – Sistema possível e indeterminado:

Resolva o sistema linear: $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$



As retas que formam o sistema são coincidentes. Qualquer ponto de uma das retas é solução deste sistema.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{2}y = \frac{5}{2} \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

Matriz dos coeficientes

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Posto $p_c = 1$

Matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Posto $p_a = 1$

Nulidade

n - p = 2 – 1 = 1

Também chamada de grau de liberdade do sistema, ou seja, o sistema apresenta uma variável livre.

Exemplo 3 – Sistema impossível:

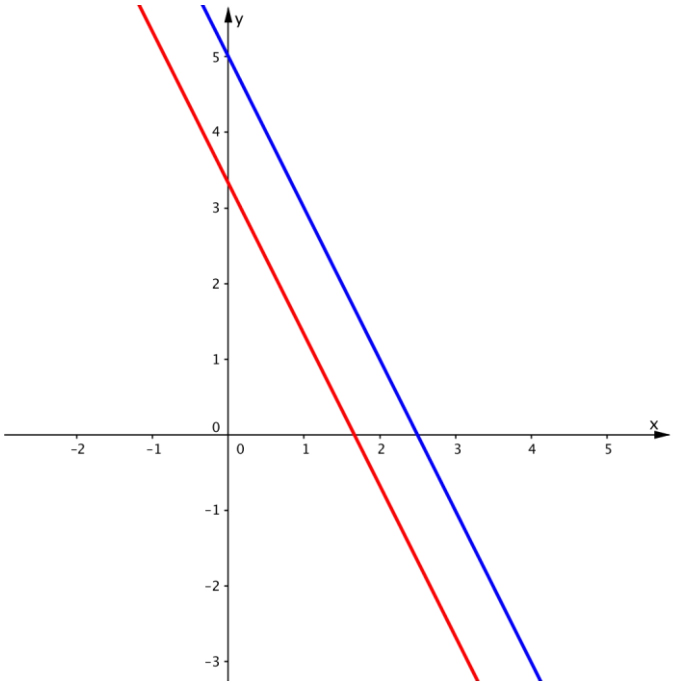
Resolva o sistema linear: $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 6x + 3y = 10 \end{cases}$

As retas não apresentam nenhum ponto em comum. O sistema **não** tem solução.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{2}y = \frac{5}{2} \\ 0x + 0y = 1 \end{cases}$$



<u>Matriz dos coeficientes</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Posto $p_c = 1$

<u>Matriz ampliada</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Posto $p_a = 2$

Não existe nenhum valor de x ou y capaz de satisfazer a segunda equação.

Caso Geral

Seja um sistema de m equações lineares e n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

com coeficientes a_{ij} e termos independentes b_i números reais (ou complexos).

Caso Geral

Este sistema poderá ter:

i) uma única solução: $\begin{cases} x_1 = k_1 \\ x_2 = k_2 \\ \vdots \\ x_n = k_n \end{cases}$ → sistema possível (compatível) e determinado

ii) infinitas soluções → sistema possível e indeterminado

iii) nenhuma solução → sistema impossível (incompatível)

Caso Geral

Teorema

i) Um sistema de m equações e n incógnitas admite solução se, e somente se, o posto da matriz ampliada (p_a) é igual ao posto da matriz dos coeficientes (p_c), ou seja, $p_a = p_c$.

ii) Se as duas matrizes tem o mesmo posto p e $p = n$, a solução será única.

iii) Se as duas matrizes tem o mesmo posto p e $p < n$, podemos escolher $n - p$ incógnitas, e outras p incógnitas serão escritas em função destas.

n - p é denominado de grau de liberdade do sistema.

Exemplos:

Resolva os sistemas lineares dados na forma matricial:

1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -10 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -10 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 & -2 & -10 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Exemplos:

Solução:

1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$p_a = 3; p_c = 3; m = 3; n = 3$

Como, $p_a = p_c = n$, o sistema admite solução única: $x = 3$; $y = -2$ e $z = 2$

2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -10 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \end{bmatrix}$

$p_a = 2; p_c = 2; m = 2; n = 3$

Como, $p_a = p_c = p$, mas $p < n$ o sistema possui grau de liberdade $n - p = 1$. Logo, $x = -10-7z$ e $y = -6-5z$

Exemplos

Resolva os sistemas lineares dados na forma matricial:

3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -10 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$p_a = 3; p_c = 2; m = 3; n = 3$

Como, $p_a \neq p_c$, o sistema é impossível.

4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 & -2 & -10 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$p_a = 2; p_c = 2; m = 3; n = 4$

Como, $p_a = p_c = p$, mas $p < n$ o sistema possui grau de liberdade $n - p = 2$. Logo, $x = -10+10z+2w$ e $y = 4-7z-w$.

Exemplo

Resolva o sistema linear: $\begin{cases} x+2y+z+t=0 \\ x+3y-z+2t=0 \end{cases}$

Resposta :

A matriz reduzida à forma escada é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e

o sistema incial é equivalente a $\begin{cases} x+0y+5z-t=0 \\ 0x+y-2z+t=0 \end{cases}$

Como $m=2, n=4,\ p_a = p_c = p = 2$, temos que $p < n$ e o sistema

apresenta grau de liberdade n - $p = 4 - 2 = 2 : x = -5z + t$ e $y = 2z - t$

Portanto, o sistema admite infinitas soluções e o conjunto de soluções

será dado atribuindo - se valores arbitrários para as incógnitas z e t.

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Resolva os sistemas, mostre o conjunto solução quando houver e sua forma matricial:

$$\begin{aligned} x_1 + 7x_2 &= 4 \\ -2x_1 - 9x_2 &= 16 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 &= -6 \\ 5x_1 + 7x_2 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 4 \\ -3x_1 + 9x_2 &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x_2 &= 6 \\ x_1 - 6x_2 &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 4x_1 - 9x_2 &= 1 \\ 8x_1 - 18x_2 &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 4x_1 - 9x_2 &= 1 \\ 16x_1 - 36x_2 &= 4 \end{aligned}$$

2) Determine os valores de λ para que a matriz dada seja a matriz completa associada a um sistema possível.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & \lambda \\ -2 & 6 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & \lambda & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & -2 \\ -4 & 2 & 10 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -6 & -3 \\ -4 & 12 & \lambda \end{bmatrix}$$

Exercícios

3) Determine quais opções são solução para o sistema dado:

$$2x_1 - 4x_2 - x_3 = 1$$
$$x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$$
$$3x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 1$$

(a) $(3, 1, 1)$ (b) $(3, -1, 1)$ (c) $(13, 5, 2)$ (d) $(\frac{13}{2}, \frac{5}{2}, 2)$ (e) $(17, 7, 5)$

4) Escreva um sistema de equações lineares constituído de três equações em três incógnitas com:

(a) Nenhuma solução

(b) Exatamente uma solução

(c) Um infinidades de soluções

Respostas

Exercício 1:

(a) $x_1 = -\frac{148}{5}$ e $x_2 = \frac{24}{5}$

(b) $x_1 = 3\ e\ x_2 = -2$

(c) Impossível.

(d) $x_1 = 12\ \ e\ x_2 = 3/2$

(e) Sistema possível e indeterminado

(f) Sistema possível e ideterminado

Exercício 2:

(a) $\wedge = -\frac{5}{2}$

(b) $\wedge \neq -\frac{1}{2}$

(c) $\wedge = 12$

(d) $\wedge = 6$

Exercício 3:

(a), (d) e (e)

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA

O GAMA possui monitorias de:

- **Matemática Elementar, Cálulo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e equivalentes)
  - **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
    - **Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3** (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.