Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino

Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Integrais

Aula 01

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Integral definida

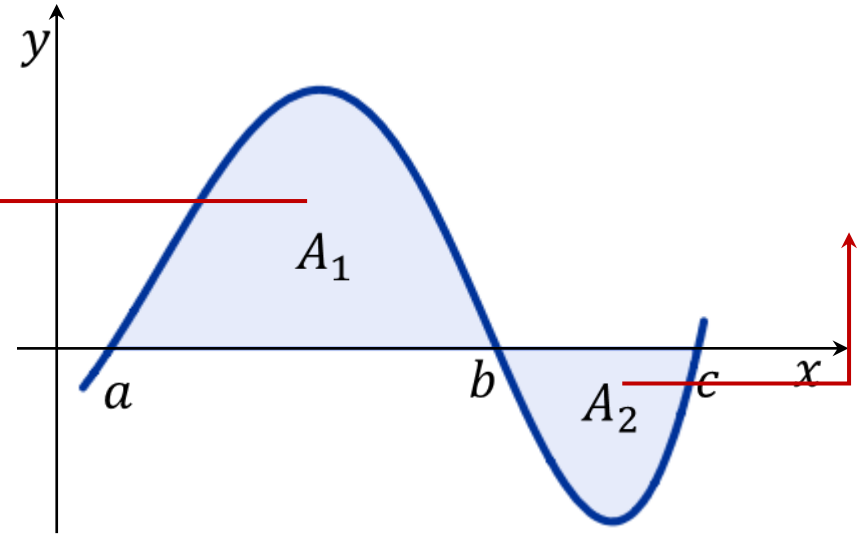
Simbologia e nomenclatura

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

- Sinal de integração
- limite superior
- integrando
- variável de integração
- limite inferior

Interpretação geométrica

$$\int_a^b f(x)\,dx$$



$$-\int_b^c f(x)\,dx$$

Propriedades da integral definida

1) Se a existir no domínio da f, então:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

2) Se f for integrável em $[a, b]$, então:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

3) Se c for uma constante, então:

$$\int_a^b c dx = c(b - a)$$

Propriedades da integral definida

4) Se f for integrável em $[a, b]$ e c for uma constante, então:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

5) Se f e g forem integráveis em $[a, b]$, então a integral da soma/diferença é igual a soma/diferença das integrais:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

6) Se f for integrável em um intervalo fechado contendo os três pontos a, b e c, então

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Antiderivada

Definição: Seja f uma função definida num intervalo $[a, b]$. Uma antiderivada de f em $[a, b]$ é uma função F definida em $[a, b]$, tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Exemplo: Determine uma antiderivada para a função $f(x) = 12x^2 + 2x$.

Solução: Uma antiderivada para a função f dada é:

$$F(x) = 4x^3 + x^2$$

Pois

$$F'(x) = (4x^3 + x^2)' = 12x^2 + 2x.$$

Note que outras antiderivadas para a função f são dadas por:

$$F_1(x) = 4x^3 + x^2 + 5 \quad F_2(x) = 4x^3 + x^2 - 100 \quad F_3(x) = 4x^3 + x^2 + \pi - e$$

Mais precisamente, f possui infinitas antiderivadas, todas da forma:

$$F(x) = 4x^3 + x^2 + C$$

onde C é uma constante.

Antiderivada

Antiderivada de algumas funções elementares

Função	Antiderivada	Justificativa
$f(x) = k$ função constante	$F(x) = kx + C$	$(kx + C)' = k$
$f(x) = x^n$ $(n \neq -1)$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' = x^n$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln\lvert x\rvert + C$	$(\ln\lvert x\rvert + C)' = \dfrac{1}{x}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + C$	$(\sin x + C)' = \cos x$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + C$	$(-\cos x + C)' = \sin x$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$	$(e^x + C)' = e^x$

Teorema Fundamental do Cálculo

Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 1 : Se f for contínua em $[a, b]$, então f tem uma antiderivada em $[a, b]$. Então a função F definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

é uma antiderivada de f em$[a, b]$; isto é, $F'(x) = f(x)$ para cada $x \in [a, b]$.

Além disso, F é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b).

Na notação de Leibniz, o Teorema acima afirma que

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$$

"A derivada é a operação inversa da integral, e vice-versa".

Teorema Fundamental do Cálculo

Exemplo: Calcule a derivada das seguintes funções:

(a) $F(x) = \int_0^x \cos t \, dt$ (b) $G(y) = \int_0^y (s^2+2s-1)ds$

Solução: Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 01, temos:

(a) $F'(x) = \left[\int_0^x \cos t \, dt\right]' = \cos x$

(b) $G'(y) = \left[\int_0^y (s^2+2s-1)ds\right]' = y^2 + 2y - 1$

Exemplo: Calcule a seguinte derivada:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^x \tan w \, dw\right]$$

Solução: Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 01, temos:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^x \tan w \, dw\right] = \tan x$$

Teorema Fundamental do Cálculo

Exemplo: Calcule a seguinte derivada:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^{x^3} \sqrt{t}dt\right]$$

Solução: Note que, neste caso, o limite superior não é x, mas x^3.

Portanto, utiliza-se a regra da cadeia no cálculo da derivada, da seguinte forma:

$$y = \int_1^{x^3} \sqrt{t}dt \qquad \text{e} \qquad u = x^3$$

Portanto, utilizando a regra da cadeia, temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}\left[\int_1^{u} \sqrt{t}dt\right] \cdot \frac{du}{dx} = \sqrt{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \sqrt{x^3} \cdot (3x^2) = 3x^2\sqrt{x^3} = 3x^3\sqrt{x}.$$

Teorema Fundamental do Cálculo

Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 2

Se f é contínua em $[a, b]$ e se F é uma antiderivada de f em (a, b), então:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Ou seja,

Antiderivada de f calculada no limite superior

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Antiderivada de f calculada no limite inferior

Notação: É comum se escrever o Teorema acima de uma forma mais resumida:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

onde

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Teorema Fundamental do Cálculo

Exemplo: Calcule as seguintes integrais definidas:

(a) $\int_{-2}^{5} x dx$ (b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos y \, dy$ (c) $\int_{-1}^{\sqrt{7}} (2s+3) ds$ (d) $\int_{0}^{1} (t^3 - \sqrt{t}) dt$

Solução: Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 2, temos:

(a) $$\int_{-2}^{5} x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{5} = \frac{(5)^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2} = \frac{25}{2} - \frac{4}{2} = \frac{21}{2}.$$

(b) $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos y \, dy = \sin y\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \sin \pi - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 - 1 = -1.$$

(c) $$\int_{-1}^{\sqrt{7}} (2s+3) ds = 2\int_{-1}^{\sqrt{7}} s ds + 3\int_{-1}^{\sqrt{7}} ds = 2\frac{s^2}{2}\Big|_{-1}^{\sqrt{7}} + 3\, s\Big|_{-1}^{\sqrt{7}}$$

$$= 2\left(\frac{(\sqrt{7})^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2}\right) + 3(\sqrt{7}+1) = 7 - 1 + 3\sqrt{7} + 3 = 3(3+\sqrt{7}).$$

Teorema Fundamental do Cálculo

(d)

$$\int_0^1 \left(t^3 - \sqrt{t}\right)dt = \int_0^1 t^3 dt - \int_0^1 \sqrt{t}dt = \left.\frac{t^4}{4}\right|_0^1 - \left.\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1$$

$$= \left(\frac{(1)^4}{4} - \frac{(0)^4}{4}\right) - \left(\frac{(1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{(0)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} = -\frac{5}{12}.$$

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Aplicando o TFC-1, encontre as seguintes derivadas:

a) $\dfrac{d}{dx}\left[\displaystyle\int_1^x t^3 dt\right]$

b) $\dfrac{d}{dx}\left[\displaystyle\int_0^x \sqrt{4+t^6}\, dt\right]$

c) $\dfrac{d}{dx}\left[\displaystyle\int_1^{x^3} \sqrt[3]{t^2+1} dt\right]$

d) $\dfrac{d}{dx}\left[\displaystyle\int_2^{\tan x} \frac{1}{1+t^2} dt\right]$

e) $y = \displaystyle\int_0^{\tan x} \sqrt{t+\sqrt{t}}\ dt$

f) $y = \displaystyle\int_2^{1/x} \arctan t\ dt$

g) $y = \displaystyle\int_{1-3x}^{1} \frac{u^3}{1+u^2} du$

h) $y = \displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{1}{3+t^2} dt$

Exercícios

2) Calcule as seguintes integrais definidas aplicando o TFC – 2:

a) $\int_{2}^{3} x^2 dx$

b) $\int_{-1}^{2} |x| dx$

c) $\int_{1}^{2} (6x - 2) dx$

d) $\int_{1}^{9} \sqrt{x} dx$

e) $\int_{1}^{3} (3x^2 - 4) dx$

f) $\int_{1}^{3} e^x dx$

g) $\int_{3}^{6} \frac{1}{x} dx$

h) $\int_{\pi}^{2\pi} \cos\theta \, d\theta$

i) $\int_{1}^{4} (5 - 2t - 3t^2) dt$

j) $\int_{1}^{2} \frac{3}{t^4} dt$

k) $\int_{1}^{2} (1 + 2y)^2 dy$

l) $\int_{-2}^{3} |2x - 1| dx$

m) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 3 \sec^2 x \, dx$

Respostas

Exercício 1:

a) $Resp.: x^3$

b) $Resp.: \sqrt{4+x^6}$

c) $Resp.: 3x^2\sqrt[3]{x^6+1}$

d) $Resp.: 1$

e) $Resp.: y' = \sqrt{\tan x + \sqrt{\tan x}\, sec^2\, x}$

f) $Resp.: y' = -\dfrac{\arctan(1/x)}{x^2}$

g) $Resp.: y' = \dfrac{3(1-3x)^3}{1+(1-3x)^2}$

h) $Resp.: y' = \dfrac{2}{3+x^2}$

Exercício 2:

a) $R: \dfrac{19}{3}$

b) $R: \dfrac{5}{2}$

c) $R: 7$

d) $R: \dfrac{52}{3}$

e) $R: 18$

f) $R: e^3 - e$

g) $R: \ln 2$

h) $R: 0$

i) $R: -63$

j) $R: \dfrac{7}{8}$

k) $R: \dfrac{49}{3}$

l) $R: \dfrac{25}{2}$

m) $R: 3$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA

O GAMA possui monitorias de:

- **Matemática Elementar, Cálulo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e equivalentes)
  - **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
    - **Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3** (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino

Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Integrais

Aula 02

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Método da substituição

Seja F uma antiderivada de f (ou seja, $F' = f$) e suponha que a função composta $F\big(g(x)\big)$ seja derivável. Então, pela regra da cadeia, tem-se:

$$\Big(F\big(g(x)\big)\Big)' = F'\big(g(x)\big)g'(x) = f\big(g(x)\big)g'(x)$$

Na forma integral

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

Fazendo a seguinte mudança de variável

$$u = g(x) \quad \text{então} \quad \frac{du}{dx} = g'(x)$$

Podemos reescrever da seguinte forma

$$\int f(\underbrace{g(x)}_{u})\,\underbrace{g'(x)dx}_{du} = \int f(u)du = F(u) + C = F(\underbrace{g(x)}_{u}) + C$$

método da substituição para integral indefinida

Método da substituição

Exemplo: Calcule as seguintes integrais usando o método da substituição:

(a) $\int e^{2x}\,dx$ (b) $\int \frac{cos\theta}{sen^2\theta}\,d\theta$ (c) $\int \frac{t}{\sqrt{1+2t^2}}\,dt$

Solução:

Substituição

$u = 2x$ $du = 2dx \iff dx = \frac{du}{2}$ $u = 2x$

(a) $$\int e^{2x}\,dx = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{e^u}{2} + C = \frac{e^{2x}}{2} + C$$

(b) $$\int \frac{cos\theta}{sen^2\theta}\,d\theta = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2}du = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{\sin\theta} + C = -\csc\theta + C$$

Substituição

$u = \sin\theta$ $du = \cos\theta\,d\theta$ $u = \sin\theta$

(c) $$\int \frac{t}{\sqrt{1+2t^2}}\,dt = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\frac{du}{4} = \frac{1}{4}\int u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\sqrt{u} + C = \frac{\sqrt{1+2t^2}}{2} + C$$

Substituição

$u = 1 + 2t^2$ $du = 4tdt \iff tdt = \frac{du}{4}$ $u = 1 + 2t^2$

Método da substituição

Exemplo: Calcule a integral

$$\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx$$

Solução:

$\cos^2 x + sin^2 x = 1 \iff sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx = \int \sin x \, (\sin^2 x)^2 \cos^2 x \, dx$$

$$= \int \sin x (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \, dx = \int \sin x \cos^2 x \, (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) dx$$

$$= \int \sin x \, (\cos^2 x - 2\cos^4 x + \cos^6 x) \; dx = -\int (u^2 - 2u^4 + u^6) \, du$$

Substituição

$u = \cos x$

$du = -\sin x \; dx$

$\Updownarrow$

$-du = \sin x \; dx$

$$= -\int u^2 \, du + 2\int u^4 \; du - \int u^6 \; du = -\frac{1}{3}u^3 + C_1 + \frac{2}{5}u^5 + C_2 - \frac{1}{7}u^7 + C_3$$

$$= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C$$

onde

$C_1 + C_2 + C_3 = C$

Método da substituição – Integral definida

Lembre que um método muito útil para resolver algumas integrais é o método da substituição.

Para utilizar o método da substituição em integrais definidas é necessário realizar algumas adequações nos limites de integração

Adequação no limite superior

$x = b \iff u = g(b)$

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

$u = g(x)$

Substituição

Adequação no limite inferior

$x = a \iff u = g(a)$

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = F(u)\Big|_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$

Estamos supondo que g' é contínua em $[a, b]$ e que f é contínua na imagem de $u = g(x)$

Método da substituição – Integral definida

Exemplo: Calcule a seguinte integral definida

$$\int_1^2 (x+2)^5 dx$$

fazendo uma substituição conveniente e ajustando os limites de integração.

Solução: Neste caso, teremos:

Adequação no limite superior

$x = 2 \iff u = g(2) = 2 + 2 = 4$

$$\int_1^2 (x+2)^5 dx = \int_3^4 u^5 du = \left[\frac{u^6}{6}\right]_3^4 = \frac{1}{6}[(4)^6 - (3)^6] = \frac{3367}{6}.$$

Substituição

$u = g(x) = x + 2 \quad du = dx$

Adequação no limite inferior

$x = 1 \iff u = g(1) = 1 + 2 = 3$

Observação: Uma forma de resolver uma integral definida utilizando o método da substituição, sem modificar limites de integração, é a seguinte:

1) Resolva a integral indefinida utilizando o método da substituição.

2) Volte na variável original e substitua os limites da integral inicial.

Método da substituição – Integral definida

Exemplo: Calcule a seguinte integral definida

$$\int_0^2 x(x^2+1)^3 dx$$

Solução 1: Fazendo uma substituição conveniente e ajustando os limites de integração, teremos:

$$\int_0^2 x(x^2+1)^3 dx = \int_1^5 u^3 \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int_1^5 u^3\, du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^5 = \frac{1}{8}[(5)^4-(1)^4] = 78.$$

Substituição

$u = x^2+1$ $\quad du = 2xdx \iff xdx = \frac{du}{2}$

Novos limites:

$x = 0 \implies u = 1$

$x = 2 \implies u = 5$

Solução 2: Primeiro resolvemos a integral indefinida:

$$\int x(x^2+1)^3 dx = \int u^3 \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^3\, du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right] = \frac{1}{8}u^4 = \frac{1}{8}(x^2+1)^4$$

Substituindo os limites de integração:

$$\int_0^2 x(x^2+1)^3 dx = \left[\frac{1}{8}(x^2+1)^4\right]_0^2 = \frac{1}{8}[625-1] = \frac{624}{8} = 78$$

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Calcule as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_0^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \sin(3\pi t)dt$

(d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan t)^3.\sec^2 t\,dt$

(e) $\displaystyle\int_0^3 x.|x^2-4|dx$

(f) $\displaystyle\int_0^1 y.(y^2+1)^5\,dy$

Exercícios

2) Calcule as seguintes integrais utilizando o método da substituição:

(a) $\int \frac{\ln v}{v} dv$

(b) $\int e^{5s} ds$

(c) $\int \frac{dx}{x\,(\ln x)^2}$

(d) $\int 2x\sqrt{1+x^2}dx$

(e) $\int \frac{2rdr}{(1-r)^7}$

(f) $\int 2\sin(y)\sqrt[3]{1+\cos(y)}dy$

Exercícios

3) Encontre as integrais indefinidas:

(a) $\displaystyle\int \frac{\cos 3u}{\sqrt{1-2\sin 3u}}\,du$

(b) $\displaystyle\int \sqrt{t}\cos\sqrt{t^3}\,dt$

(c) $\displaystyle\int (2\cot^2\theta - 3\tan^2\theta)\,d\theta$

(d) $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{x-1}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{(1+\cot^2 z)\cot z}{\csc z}\,dz$

(f) $\displaystyle\int \frac{3\tan\theta - 4\cos^2\theta}{\cos\theta}\,d\theta$

Exercícios

4) Calcule a integral

$$\int x^2\sqrt{x-1}dx$$

por dois métodos:

(a) $u = x - 1$

(b) $u = \sqrt{x-1}$

5) Calcule as integrais por meio da substituição indefinida:

(a) $\int x(x^2+1)\sqrt{4-2x^2-x^4}dx$

(b) $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}dx$

Exercícios

6) Calcule as integrais por meio da substituição indefinida

(a) $\int cos^3 x \ dx$

(b) $\int sin^5 x \, cos^2 \, x \, dx$

(c) $\int sin^6 \theta \, cos^5 \theta \ d\theta$

(d) $\int tg^6 x \, sec^4 x \ dx$

(e) $\int tg^5 \theta \, sec^7 \theta \ d\theta$

Respostas

Exercício 1:

a) $Resp.: 2.(e^2 - 1)$

b) $Resp.: \frac{1}{14}$

c) $Resp.: \frac{2}{3\pi}$

d) $Resp.: \frac{15}{4}$

e) $Resp.: \frac{41}{4}$

f) $Resp.: \frac{21}{4}$

Exercício 2:

a) $Resp.: \frac{(\ln v)^2}{2} + C$

b) $Resp.: \frac{e^{5s}}{5} + C$

c) $Resp.: -\frac{1}{\ln x} + C$

d) $Resp.: \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2} + C$

e) $Resp.: -\frac{2}{5}(1 - r)^{-5} + \frac{1}{3}(1 - r)^{-6} + C$

f) $Resp.: -\frac{3}{2}(1 + \cos y)^{4/3} + C$

Respostas

Exercício 3:

a) $Resp.: -\frac{1}{3}\sqrt{1-2\sin 3u}+C$

b) $Resp.: \frac{2}{3}\sin\sqrt{t^3}+C$

c) $Resp.: -2\cot\theta-3\tan\theta+\theta+C$

d) $Resp.: \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+C$

e) $Resp.: -\csc z+C$

f) $Resp.: 3\sec\theta-4\sin\theta+C$

Exercício 4:

$Resp.: \frac{2}{7}(x-1)^{7/2}+\frac{4}{5}(x-1)^{5/2}+\frac{2}{3}(x-1)^{3/2}+C$

Exercício 5:

a) $Resp.: -\frac{1}{6}(4-2x^2-x^4)^{3/2}+C$

b) $Resp.: \frac{1}{2}(1+\sqrt{x})^4+C$

Respostas

Exercício 6:

a) $Resp.: \sin x - \frac{1}{3} sin^3 x + C$

b) $Resp.: -\frac{1}{3} cos^3 x + \frac{2}{5} cos^5 x - \frac{1}{7} cos^7 x + C$

c) $Resp.: \frac{1}{7} sin^7 \theta - \frac{2}{9} sin^9 \theta + \frac{1}{11} sin^{11} \theta + C$

d) $Resp.: \frac{1}{7} tg^7 x + \frac{1}{9} tg^9 x + C$

e) $Resp.: \frac{1}{11} sec^{11} \theta - \frac{2}{9} sec^9 \theta + \frac{1}{7} sec^7 \theta + C$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA

O GAMA possui monitorias de:

- **Matemática Elementar, Cálulo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e equivalentes)
  - **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
    - **Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3** (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino

Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Integrais

Aula 03

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Integração por partes

Estudaremos a seguir uma importante ferramenta no cálculo de algumas integrais, chamada de **método da integração por partes**.

Lembre que, a regra da derivada do produto nos diz que se f e g são duas funções deriváveis em relação à variável x, e digamos que

$$u = f(x) \qquad \text{e} \qquad v = g\,(x)$$

então

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Derivada do produto

Lembrando que a integral e a derivada são operações inversas uma da outra, e que a integral da soma é igual a soma das integrais, obtemos:

$$u \cdot v = \int v \cdot du + \int u \cdot dv$$

Portanto, chegamos na **fórmula de integração por partes**:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Integração por partes

Observações Importantes:

1) Note que, durante este processo, se obtém uma nova integral.

$$\underbrace{\int u\,dv}_{\text{Integral dada}} = uv - \underbrace{\int v\,du}_{\text{Integral obtida}}$$

O método de integração por partes se torna eficiente quando a integral obtida é mais simples do que a integral dada.

2) Em termos das funções f e g, o método de integração por partes fica escrito da seguinte forma:

$$\int \underbrace{f(x)}_{u} \cdot \underbrace{g'(x)dx}_{dv} = \underbrace{f(x)}_{u} \cdot \underbrace{g(x)}_{v} - \int \underbrace{g(x)}_{v} \cdot \underbrace{f'(x)dx}_{du}$$

3) O método de integração por partes para integrais definidas é dado por:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x) \cdot f'(x)dx$$

Integração por partes

Exemplo: Calcule as integrais

(a) $\int x \cdot \cos x \, dx$ (b) $\int_1^e t^2 \ln t \, dt$

Solução:

(a)
$$\int x \cdot \cos x \, dx = x \cdot \sin x - \int \sin x \, dx = x \cdot \sin x + \cos x + C.$$

$$u = x \implies du = dx \qquad dv = \cos x \, dx \implies v = \int \cos x \, dx \implies v = \sin x$$

(b)
$$\int_1^e t^2 \ln t \, dt = \ln t \frac{t^3}{3}\Big|_1^e - \int_1^e \frac{t^3}{3} \cdot \frac{1}{t} dt = \frac{t^3 \cdot \ln t}{3}\Big|_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e t^2 dt$$

$$u = \ln t \implies du = \frac{1}{t} dt \qquad dv = t^2 \, dt \implies v = \int t^2 \, dt \implies v = \frac{t^3}{3}$$

$$= \frac{e^3 \cdot \ln e}{3} - \frac{1^3 \cdot \ln 1}{3} - \frac{t^3}{9}\Big|_1^e = \frac{e^3}{3} - \left(\frac{e^3}{9} - \frac{1^3}{9}\right) = \frac{2e^3+1}{9}.$$

Regra do LIATE

Na regra de integração por partes, precisamos escolher u e dv de maneira conveniente.

Uma boa sugestão para a escolha de u é conhecida como regra do

LIATE

que funciona da seguinte forma:

Prioridade na escolha de u

Logarítmica ($u = \ln x$, $u = \log_2 x$, etc...)

Inversa Trigonométrica ($u = \arcsin x$, $u = \arccos x$, $\arctan x$, etc...)

Algébrica ($u = x^n$, $u = \sqrt{x}$, funções polinomiais, funções racionais, etc...)

Trigonométrica ($u = \sin x$, $u = \cos x$, $u = \tan x$, etc...)

Exponencial ($u = e^x$, $u = 2^x$, etc...)

Observação: A regra do LIATE fornece apenas uma SUGESTÃO.
Não é garantia de que esta escolha de u será a mais eficiente!!

Integração por partes

Exemplo: Calcule a seguinte integral:

$$\int x \cdot e^{3x}\, dx$$

Solução: Note que

$$\int x \cdot e^{3x}\, dx$$

Função exponencial

Função algébrica

De acordo com a regra do LIATE, temos:

$$u = x \implies du = dx \qquad dv = e^{3x}\, dx \implies v = \int e^{3x}\, dx \implies v = \frac{e^{3x}}{3}$$

Portanto

$$\int x \cdot e^{3x}\, dx = x\frac{e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3} dx = x\frac{e^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\, dx$$

$$= \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\frac{e^{3x}}{3} + C = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{e^{3x}}{9} + C.$$

Integração por partes

Exemplo: Calcule a seguinte integral:

$$\int (t^2+1)\cdot \cos t\, dt$$

Solução: Note que

$$\int (t^2+1)\cdot \cos t\ \ dt$$

Função trigonométrica

Função algébrica

De acordo com a regra do LIATE, temos:

$$u = t^2+1 \Longrightarrow du = 2tdt \qquad\qquad dv = \cos t\ \ dt \Longrightarrow v = \sin t$$

Portanto

$$\int (t^2+1)\cdot \cos t\ \ dt = (t^2+1)\cdot \sin t - 2\int t\sin t\, dt \qquad (1)$$

Note que, podemos novamente utilizar o método da integração por partes para resolver a integral

$$\int t\sin t\, dt$$

Integração por partes

Continuação...

$$\int t \sin t \, dt$$

Função trigonométrica

Função algébrica

De acordo com a regra do LIATE, temos:

$$u = t \implies du = dt \qquad dv = \sin t \; dt \implies v = -\cos t$$

Portanto

$$\int t \sin t \, dt = t \cdot (-\cos t) - \int (-\cos t) dt$$

$$= -t \cdot \cos t + \int \cos t \, dt = -t \cdot \cos t + \sin t \qquad (2)$$

De (1) e (2) obtemos

$$\int (t^2 + 1) \cdot \cos t \; dt = (t^2 + 1) \cdot \sin t - 2(-t \cdot \cos t + \sin t) + C$$

$$= (t^2 + 1) \cdot \sin t + 2t \cdot \cos t - 2 \sin t + C$$

Integração por partes

Observação: Do exemplo anterior, obtivemos:

$$\int (t^2+1)\cdot \cos t\, dt = (t^2+1)\cdot \sin t + 2t\cdot \cos t - 2\sin t + C.$$

Depois de resolver uma integral indefinida, pode ser importante "tirar a prova real" para saber se seus cálculos estão corretos!

Lembre que a derivada da resposta deve ser igual ao integrando!!

No exemplo acima, como

$$[(t^2+1)\cdot \sin t + 2t\cdot \cos t - 2\sin t + C\,]'$$

$$= [(t^2+1)\cdot \sin t]' + 2[t\cdot \cos t]' - 2[\sin t]' + C'$$

$$= 2t\cdot \sin t + (t^2+1)\cdot \cos t + 2(\cos t - t\cdot \sin t) - 2\cos t$$

$$= 2t\cdot \sin t + (t^2+1)\cdot \cos t + 2\cos t - 2t\cdot \sin t - 2\cos t = (t^2+1)\cdot \cos t$$

temos então a certeza de que **a resposta encontrada está correta**!

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Calcule as seguintes integrais:

(a) $\int \ln(2x+1)\,dx$

(b) $\int x^2 \cos 3x \;\; dx$

(c) $\int e^{2\theta} \sin 3\theta \;\; d\theta$

2) Calcule as seguintes integrais:

(a) $\int_0^2 x^2 e^x \; dx$

(b) $\int_0^1 \frac{y}{e^{2y}} dy$

(c) $\int_0^{\pi/4} e^{3x} \sin 4x \;\; dx$

(d) $\int_1^2 \frac{\ln t}{t^2} dt$

(e) $\int_0^{\pi/3} \sin 3y \cos y \;\; dy$

(f) $\int_0^2 x e^{2x} dx$

Exercícios

3) Calcule as seguintes integrais:

(a) $\int_0^{\pi/8} sin^5 2x \cos 2x \, dx$

(b) $\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5 dx$

(c) $\int_0^2 xe^{-x^2} \, dx$

(d) $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$

(e) $\int_0^{\pi/3} tg^5 x \, sec^4 x \, dx$

(f) $\int_{\pi/2}^{3\pi/4} sin^5 x \, cos^3 x \, dx$

(g) $\int_0^{\pi/8} \sin 3x \cos 5x \;\; dx$

(h) $\int_0^2 \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{16-x^2}}$

(i) $\int_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{9+x^2}}$

Respostas

Exercício 1:

a) $Resp.: \frac{1}{2}(2x+1)\ln(2x+1) - x + C$

b) $Resp.: \frac{1}{3}x^2 \sin 3x + \frac{2}{9}x\cos 3x - \frac{2}{27}\sin 3x + C$

c) $Resp.: \frac{1}{13}e^{2\theta}(2\sin 3\theta - 3\cos 3\theta) + C$

Exercício 2:

a) $Resp.: 2(e^2 - 1)$

b) $Resp.: \frac{1}{4} - \frac{3}{4}e^{-2}$

c) $Resp.: \frac{4}{25}\left(e^{3\pi/4} + 1\right)$

d) $Resp.: \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$

e) $Resp.: \frac{9}{16}$

f) $Resp.: \frac{1}{4}(3e^4 + 1)$

Exercício 3:

a) $Resp.: \frac{1}{96}$

b) $Resp.: \frac{182}{9}$

c) $Resp.: \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^4}$

d) $Resp.: e - \sqrt{e}$

e) $Resp.: \frac{117}{8}$

f) $Resp.: -\frac{11}{384}$

g) $Resp.: \frac{1}{8}(\sqrt{2} - 1)$

h) $Resp.: \frac{128}{3} - 24\sqrt{3}$

i) $Resp.: \frac{2}{27}(3 - \sqrt{3})$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA

O GAMA possui monitorias de:

- **Matemática Elementar, Cálulo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e equivalentes)
  - **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
    - **Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3** (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino

Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Integrais

Aula 04

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Área entre curvas

Definição: A área A da região limitada pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$, onde f e g são contínuas e $f(x) \geq g(x)$, para todo $x \in [a, b]$ é:

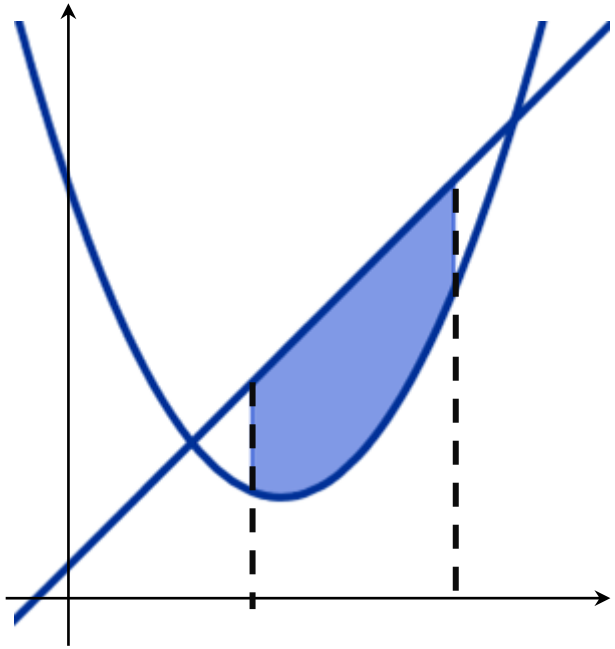
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Observação: Antes de calcular a área, pode ser importante esboçar os gráficos das funções f e g para identificar qual função delimita a área superiormente (*função de cima*) e qual delimita a área inferiormente (*função de baixo*):

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Função de cima

Função de baixo



Área entre curvas

Exemplo: Calcule a área compreendida pelas curvas $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ e $g(x) = x^2$ e pelas retas $x = 0$ e $x = 1$.

Solução: Neste caso, temos:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

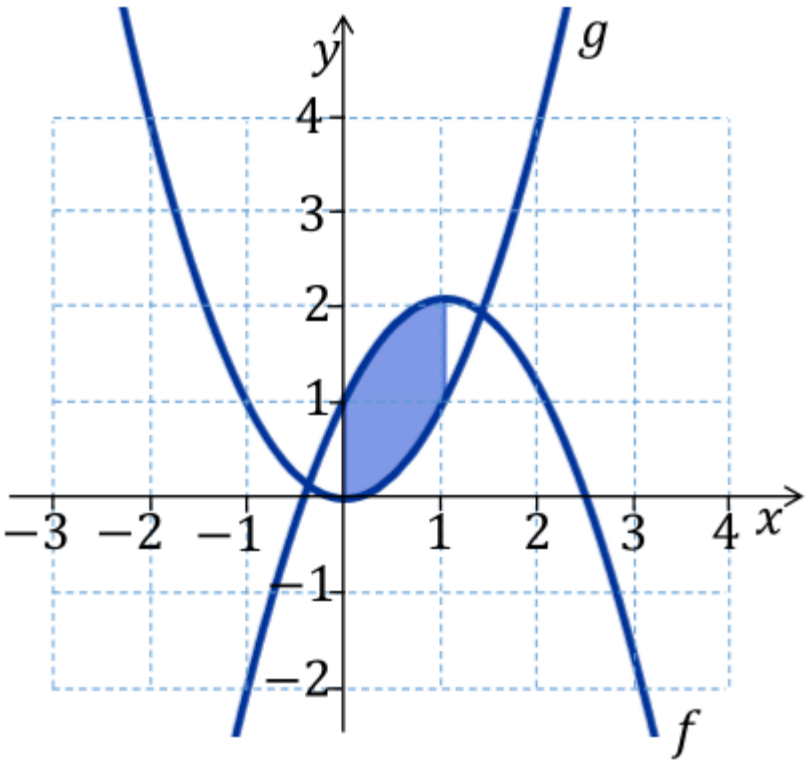
$$= \int_0^1 [-x^2 + 2x + 1 - x^2]dx$$

$$= \int_0^1 [-2x^2 + 2x + 1]dx$$

$$= \left[-2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1$$

$$= -\frac{2}{3} + 1 + 1 = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}\ u.a.$$

Gráficos



$f(x) = -x^2 + 2x + 1$ Função de cima

$g(x) = x^2$ Função de baixo

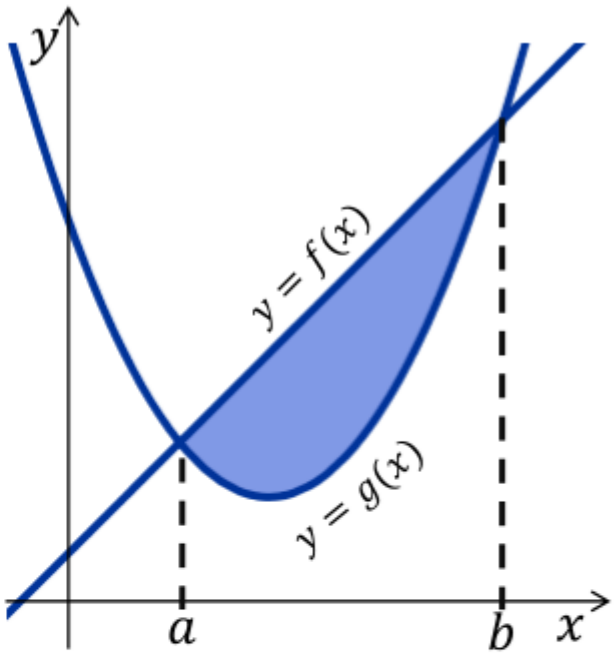
Limites de integração: $a = 0$ $b = 1$

Área entre curvas

Observação: Quando for necessário calcular a área entre os gráficos das funções f e g, pode ser necessário encontrar os extremos a e b resolvendo o sistema formado pelas equações que definem f e g:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

Sistema para encontrar os limites de integração!



Exemplo: Calcule a área entre as curvas $y = x^2$ e $y = x + 2$.

Solução: Neste caso, precisaremos encontrar primeiramente os limites de integração através da resolução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases} \Longrightarrow x^2 = x + 2 \Longrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Longrightarrow \begin{matrix} x = -1 \\ \text{ou} \\ x = 2 \end{matrix}$$

Portanto, $a = -1$ e $b = 2$.

Área entre curvas

Continuação...

$$A = \int_{-1}^{2} [(x+2) - x^2]dx$$

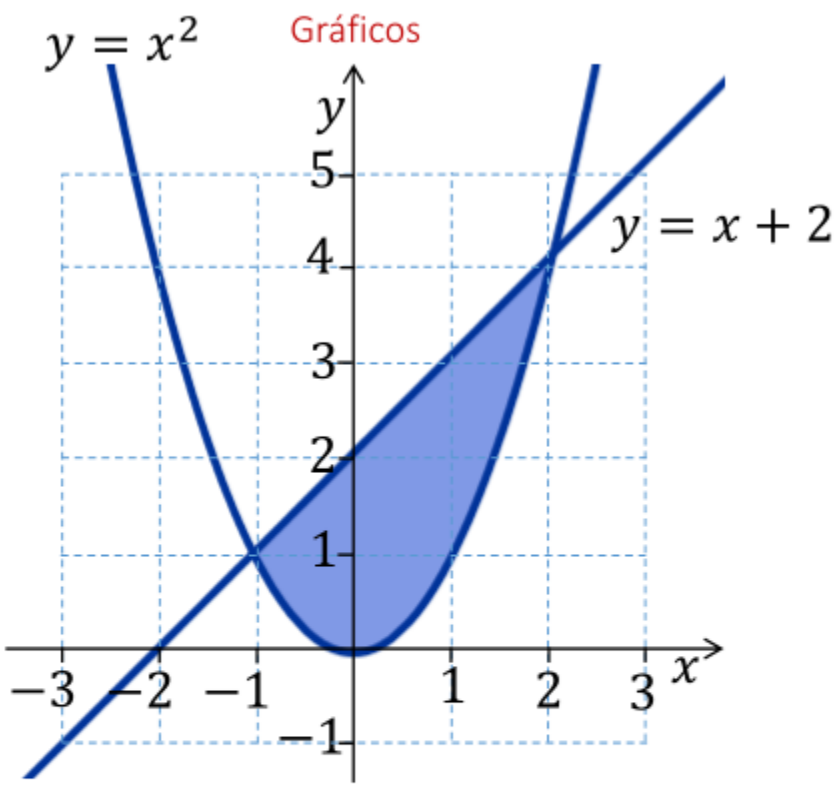
$$= \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left[-\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4\right] - \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right]$$

$$= \left[\frac{-16 + 12 + 24}{6}\right] - \left[\frac{2 + 3 - 12}{6}\right]$$

$$= \frac{20}{6} + \frac{7}{6} = \frac{27}{6}\ u.a.$$



$y = x + 2$ Função de cima

$y = x^2$ Função de baixo

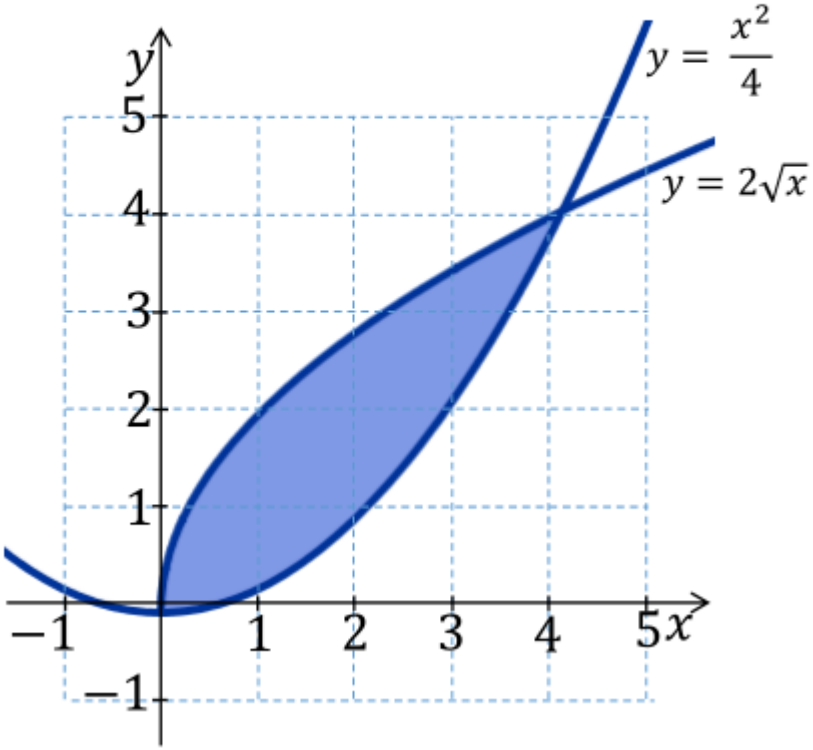
Limites de integração: $a = -1$ $b = 2$

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Calcule a área entre as curvas dadas:

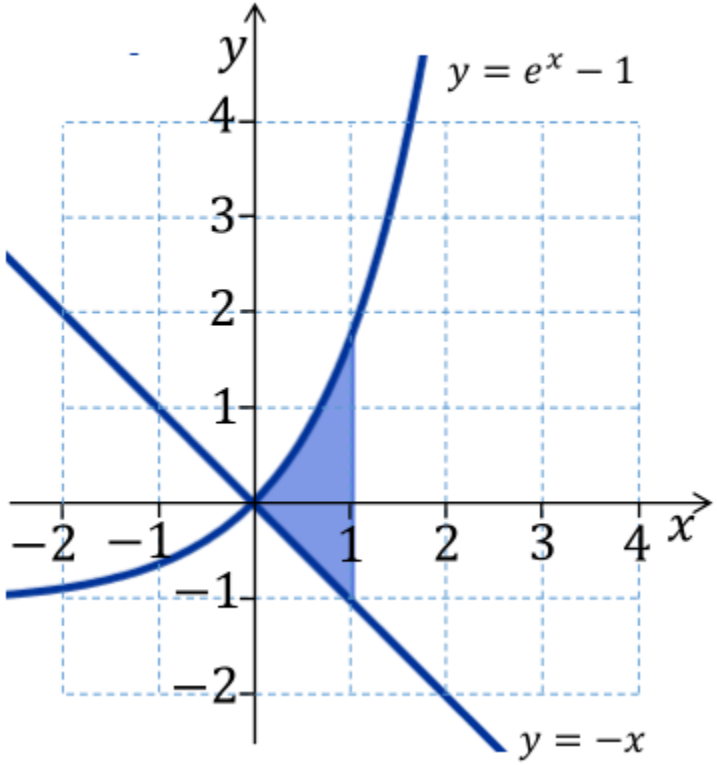
(a) $y = \dfrac{x^2}{4}$ e $y = 2\sqrt{x}$



Exercícios

1) Calcule a área entre as curvas dadas:

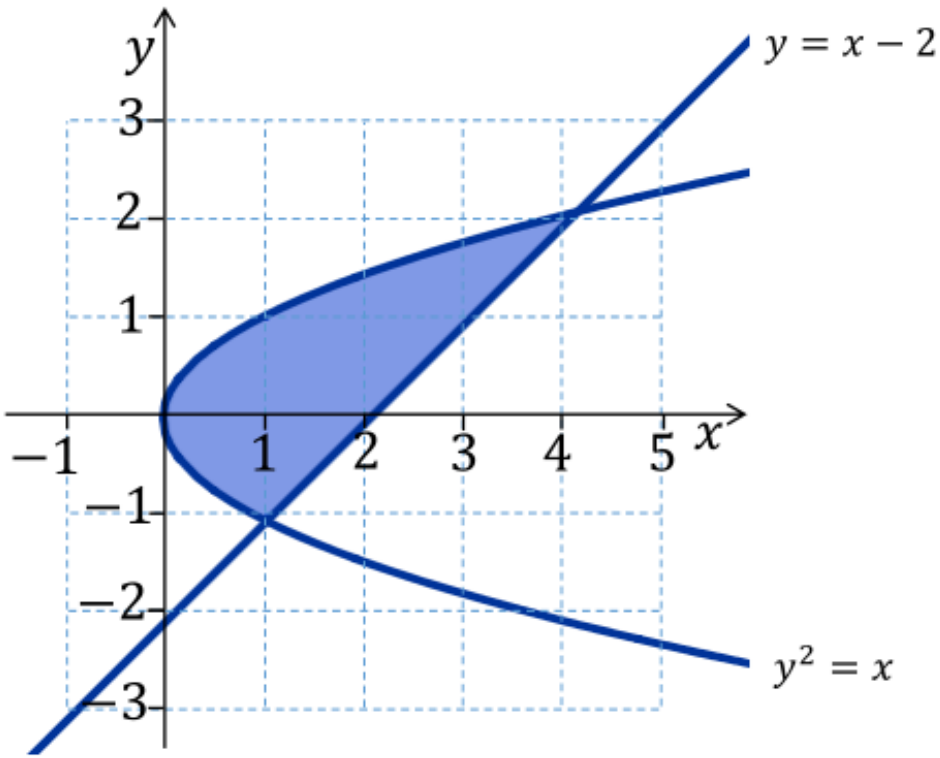
(b) $y = e^x - 1$ e $y = -x$ e $x = 1$



Exercícios

1) Calcule a área entre as curvas dadas:

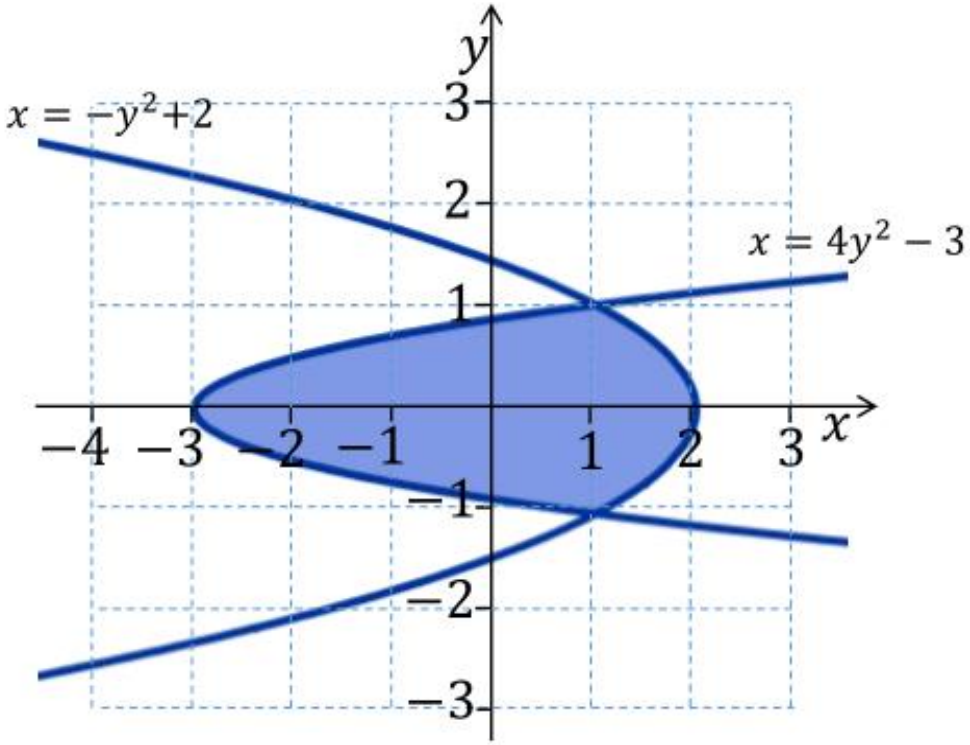
(c) $y^2 = x$ e $y = x - 2$



Exercícios

1) Calcule a área entre as curvas dadas:

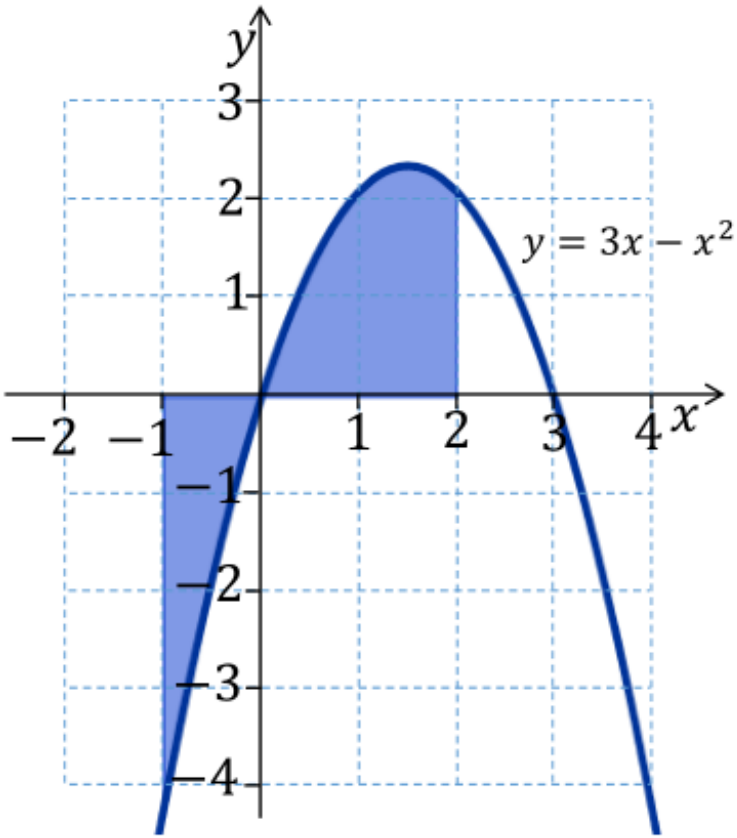
(d) $y^2 = -x + 2$ e $4y^2 = x + 3$



Exercícios

1) Calcule a área entre as curvas dadas:

(e) $y = 3x - x^2$, eixo x, $x = -1$ e $x = 2$



Respostas

Exercício 1:

a) $A = \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}\right) dx = \frac{16}{3}\ u.a.$

b) $A = \int_0^1 [e^x - 1 - (-x)]\, dx = e - \frac{3}{2} u.a.$

c) Podemos calcular a área de duas maneiras:

1) Integrando na variável x

$$A = \int_0^1 [\sqrt{x} - (-\sqrt{x})]dx + \int_1^4 [\sqrt{x} - (x-2)]dx = \frac{9}{2}\ u.a.$$

2) Integrando na variável y

$$A = \int_{-1}^2 [(y+2) - y^2]dy = \frac{9}{2}\ u.a.$$

d) $A = \int_{-1}^1 [(-y^2 + 2) - (4y^2 - 3)]dy = \frac{20}{3}\ u.a.$

e) $A = -\int_{-1}^0 (3x - x^2)dx + \int_0^2 (3x - x^2)dx = \frac{11}{6} + \frac{10}{3} = \frac{31}{6}\ u.a.$

Comprimento de arco

Definição: Se f' for contínua em $[a, b]$, então o comprimento da curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, é:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx$$

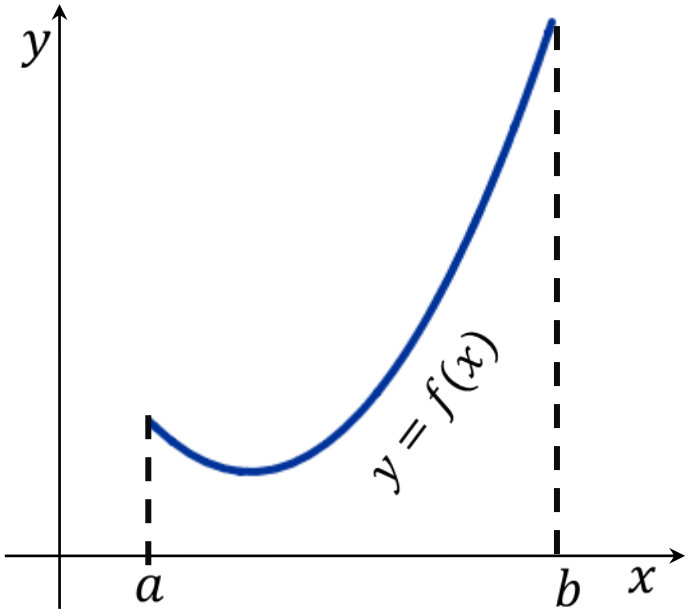
Observação: Em resumo, para calcular o comprimento de arco de uma curva, você deverá seguir os passos abaixo:

1º passo: derivar a função

2º passo: calcular $1 + (f')^2$

3º passo: calcular a integral

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx$$



Comprimento de arco

Exemplo: Encontre o comprimento da seguinte curva.

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+2)^3} \qquad 0 \le x \le 4$$

Solução:

1º passo:

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+2)^3} \quad \Longrightarrow \quad y' = x\sqrt{x^2+2}$$

2º passo:

$$1 + (y')^2 = 1 + \left(x\sqrt{x^2+2}\right)^2 = 1 + x^2(x^2+2)$$

$$= x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2+1)^2.$$

3º passo:

$$L = \int_0^4 \sqrt{(x^2+1)^2}\,dx = \int_0^4 (x^2+1)dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^4$$

$$= \frac{(4)^3}{3} + (4) = \frac{64+12}{3} = \frac{76}{3}.$$

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Encontre os comprimentos das seguintes curvas:

(a) $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}, \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1$

(b) $y = \ln(\sin x), \quad \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

(c) $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad [0,2]$

(d) $y = x^{2/3}, \quad [1,8]$

Respostas

Exercício 1:

a) $Resp.: \dfrac{31}{48}$

b) $Resp.: \ln\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$

c) $Resp.: \dfrac{1}{2}\left(e^2 - \dfrac{1}{e^2}\right)$

d) $Resp.: \dfrac{80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}}{27}$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA

O GAMA possui monitorias de:

- **Matemática Elementar, Cálulo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e equivalentes)
  - **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
    - **Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3** (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino

Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Integrais

Aula 05

Projeto

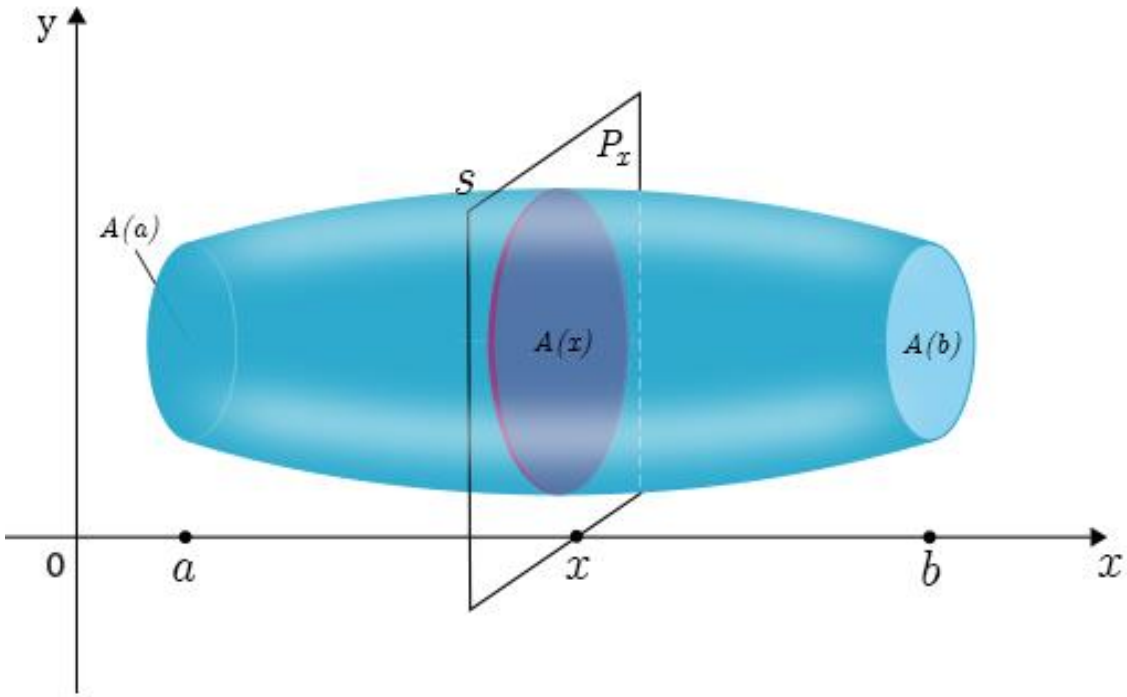
GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Volumes

Definição: Seja S um sólido que está entre $x = a$ e $x = b$. Se a área da secção transversal de S no plano P_x, passando por x e perpendicular ao eixo x, é $A(x)$, onde A é uma função contínua, então o volume de S é

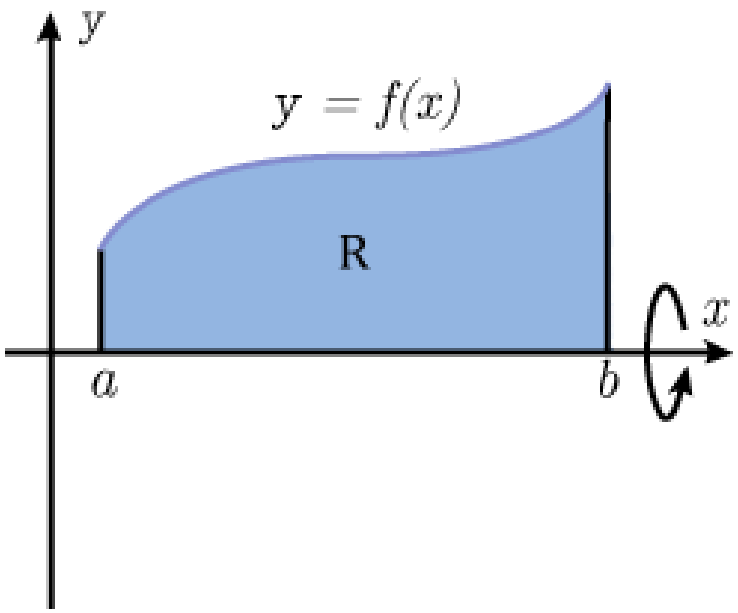
$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x = \int_a^b A(x)dx$$

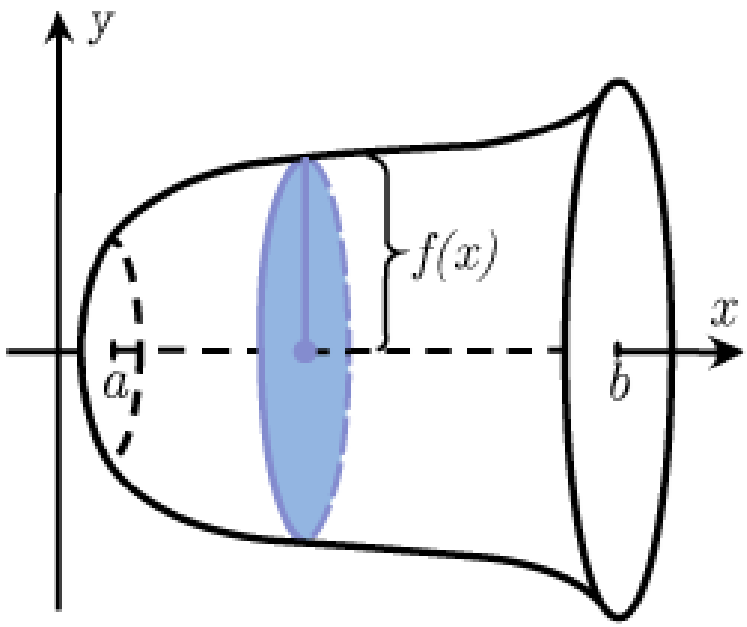


Método dos discos

Definição: Método dos discos é dado por

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\, dx$$





Método dos discos

Exemplo: Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada por $y = \sqrt{3-x}$ e $x = -1$, ao redor do eixo x.

Solução:

$$V = \int_{-1}^{3} \pi\left[\sqrt{3-x}\right]^2 dx =$$

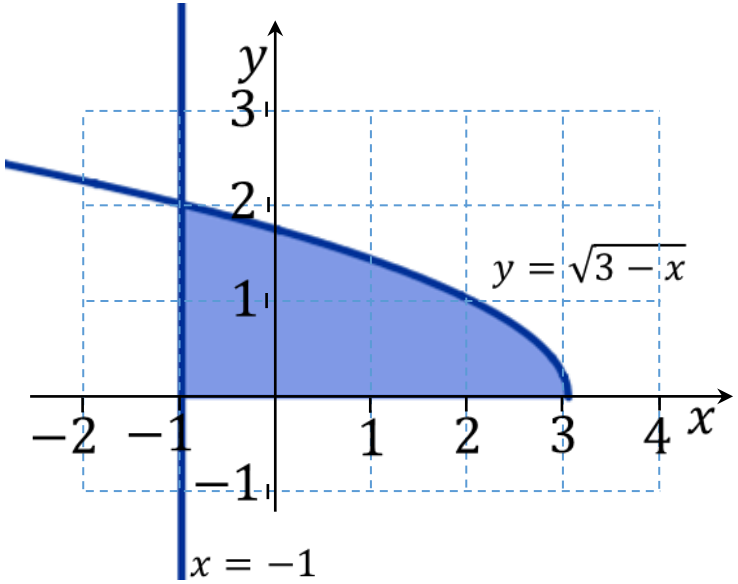
$$= \pi \int_{-1}^{3} (3-x)dx = \pi\left[3x - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{3}$$

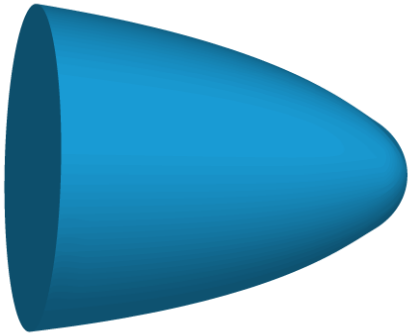
$$= \pi\left[\left(3(3) - \frac{(3)^2}{2}\right) - \left(3(-1) - \frac{(-1)^2}{2}\right)\right]$$

$$= \pi\left[\left(9 - \frac{9}{2}\right) - \left(-3 - \frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= \pi\left[\frac{9}{2} - \left(-\frac{7}{2}\right)\right] = \pi\left[\frac{9}{2} + \frac{7}{2}\right]$$

$$= \frac{16}{2}\pi = 8\pi\ u.v.$$



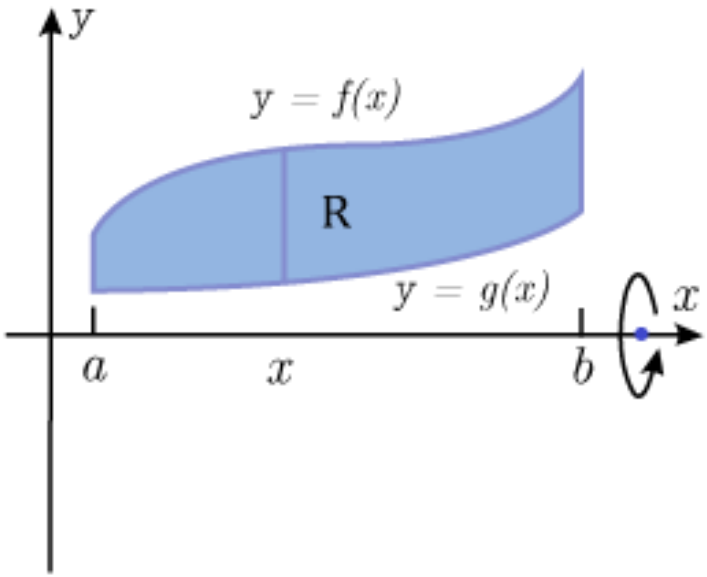


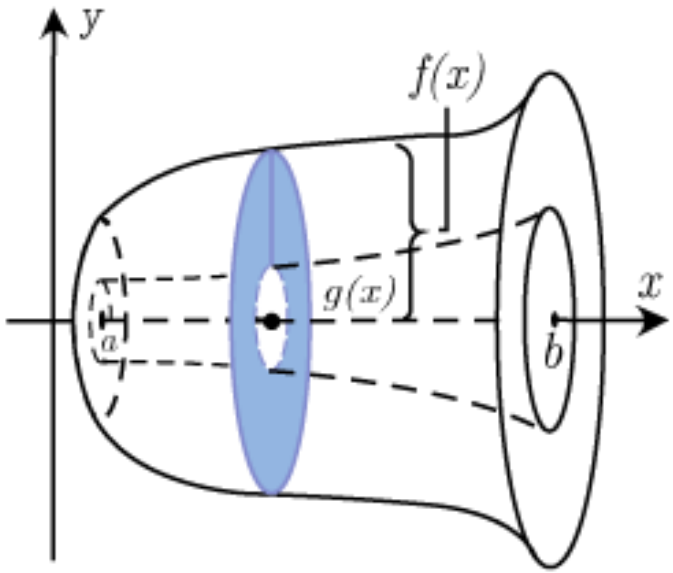
Sólido gerado

Método do anel circular ou das arruelas

Definição: Método do anel ou arruelas é dado por

$$V = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\, dx$$





Método do anel circular ou das arruelas

Exemplo: Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas $y = 2\sqrt{x}$ e $4y = x^2$ em torno do eixo x.

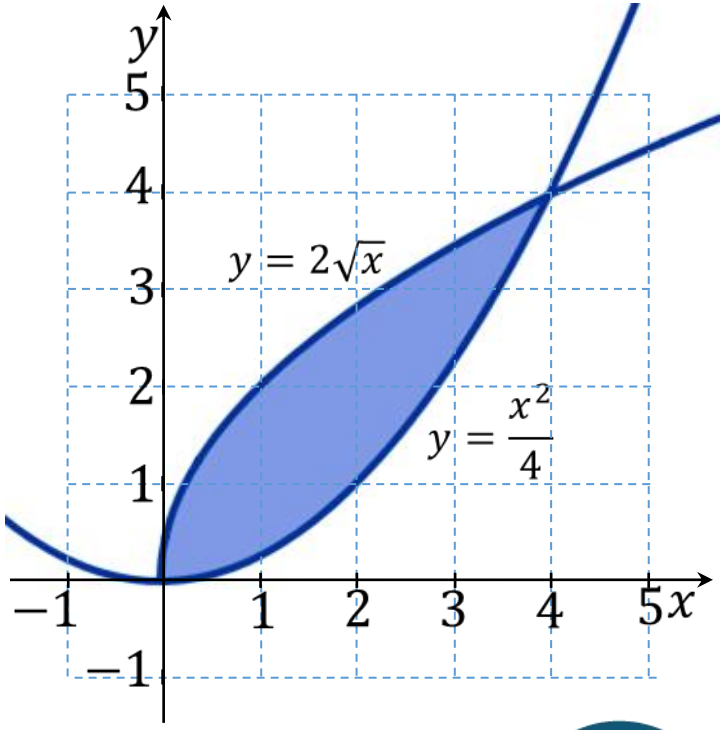
Solução:

$$V = \int_0^4 \pi \left[(2\sqrt{x})^2 - \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 \right] dx$$

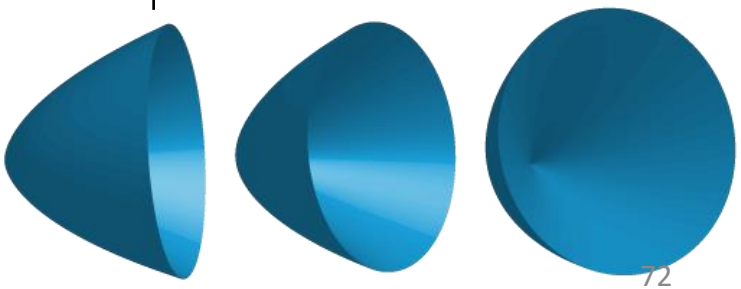
$$= \pi \int_0^4 \left[4x - \frac{x^4}{16} \right] dx = \pi \left[4\frac{x^2}{2} - \frac{1}{16}\frac{x^5}{5} \right]_0^4$$

$$= \pi \left[4\frac{4^2}{2} - \frac{1}{16}\frac{4^5}{5} \right] = \pi \left[32 - \frac{64}{5} \right]$$

$$= \pi \left[\frac{160 - 64}{5} \right] = \frac{96}{5}\pi \; u.v.$$



Sólido gerado



Método das cascas cilíndricas

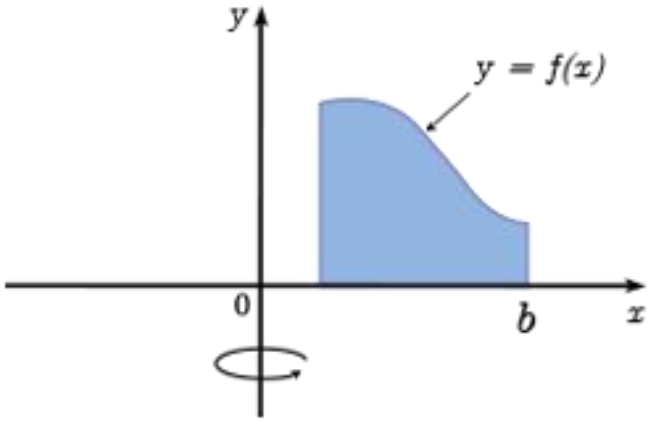
Definição: Método das cascas cilíndricas

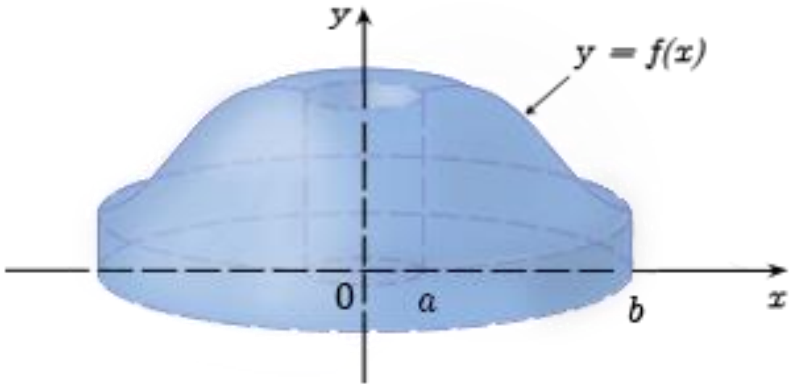
Quando o eixo de revolução é o eixo y se integra em x

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

Quando o eixo de revolução é o eixo x se integra em y

$$V = \int_a^b 2\pi y f(y) dy$$





Método das cascas cilíndricas

Exemplo: Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada por $x = y^2 - 2,\ x = 6 - y^2$ em torno do eixo x.

Solução:

$$V = \int_0^2 2\pi y[(6 - y^2) - (y^2 - 2)]dy$$

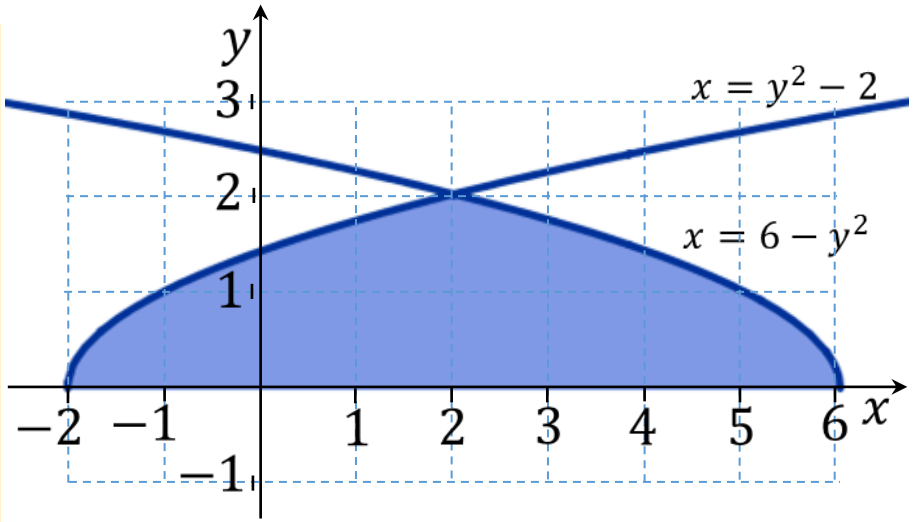
$$= 2\pi \int_0^2 y[8 - 2y^2]dy$$

$$= 2\pi \int_0^2 (8y - 2y^3)dy$$

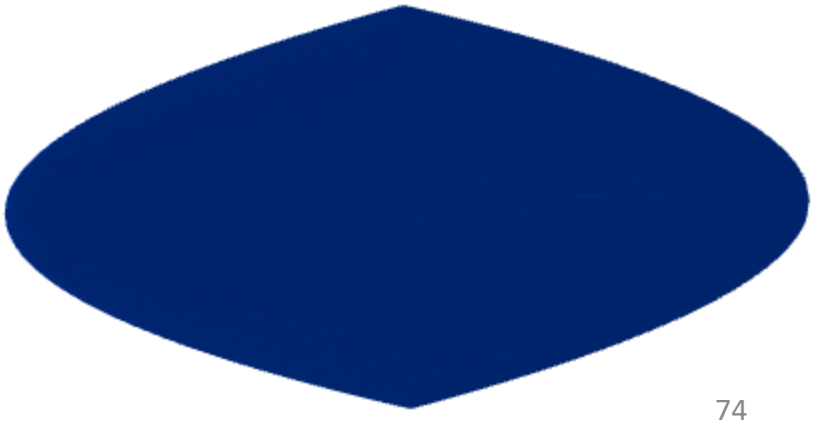
$$= 2\pi \left[\frac{8y^2}{2} - \frac{2y^4}{4}\right]_0^2$$

$$= 2\pi \left[4(2)^2 - \frac{2(2)^4}{4}\right]$$

$$= 2\pi[16 - 8] = 16\pi\ u.v.$$



Sólido gerado



Exercícios Propostos

Exercícios

1) Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas em torno dos eixos dados.

(a) $y = e^x, y = 0, x = 0, x = \ln 3$, ao redor do eixo x

b) $y = \sqrt{x+2},\ y = 2\sqrt{x-1},\ y = 0$, em torno do eixo x

c) $y = 2x - 1,\ y = -2x + 3,\ x = 2$, em torno do eixo y.

d) $y = 3x - x^3$, eixo x, $x = 1$ em torno do eixo y.

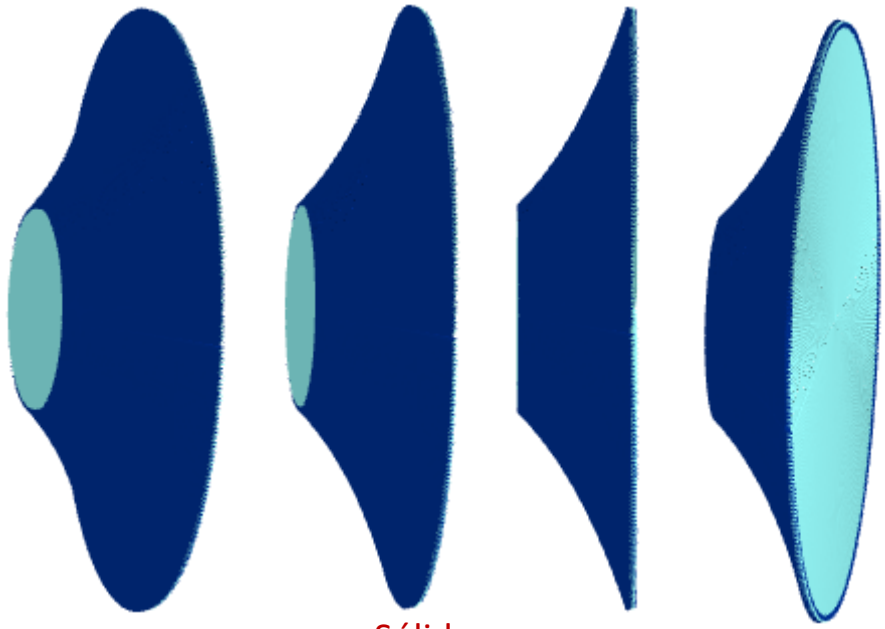
Respostas

Exercício 1:

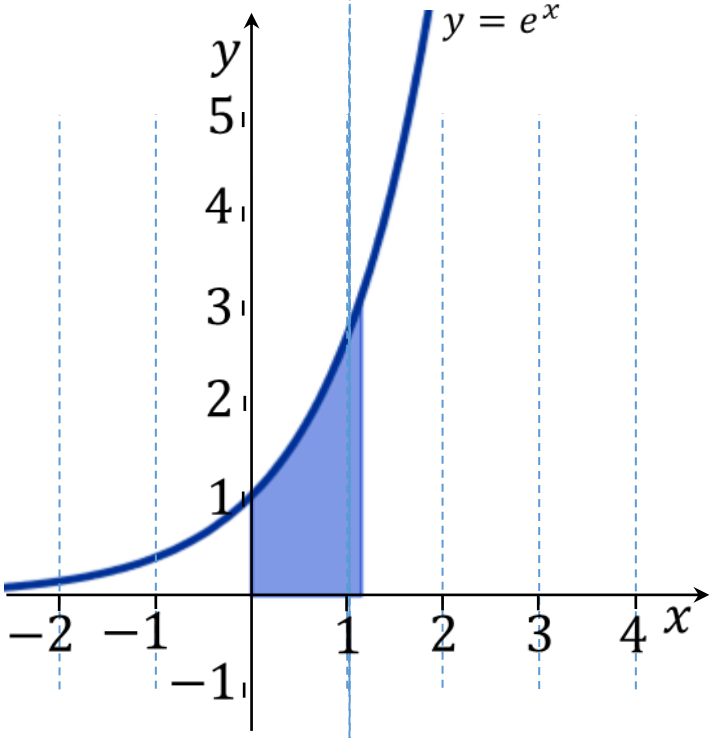
(a) $y = e^x, y = 0, x = 0, x = \ln 3$, ao redor do eixo x

Método dos discos

$$V = \int_0^{\ln 3} \pi [e^x]^2 dx = \pi \int_0^{\ln 3} e^{2x} dx = 4\pi \; u.v$$



Sólido gerado



Respostas

Exercício 1:

b) $y = \sqrt{x+2},\ y = 2\sqrt{x-1},\ y = 0$, em torno do eixo x

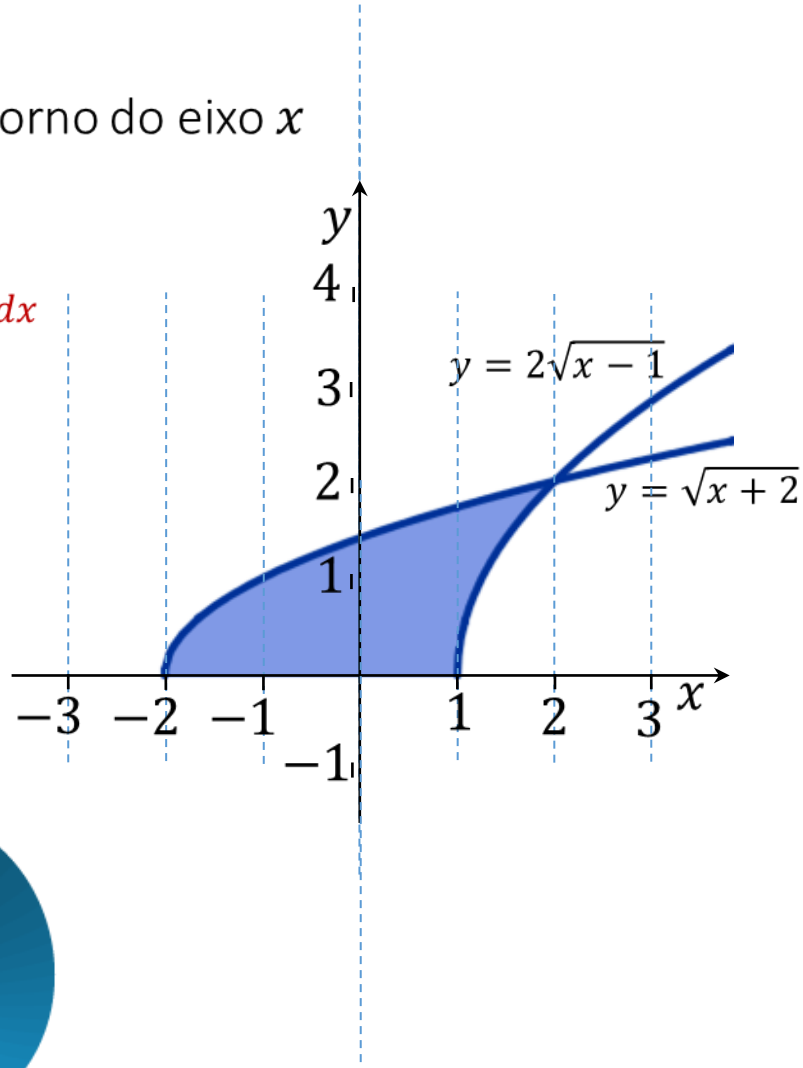
Método dos discos

$$V = \int_{-2}^{1} \pi\left[\sqrt{x+2}\right]^2 dx + \int_{1}^{2} \pi\left[\left(\sqrt{x+2}\right)^2 - \left(2\sqrt{x-1}\right)^2\right] dx$$

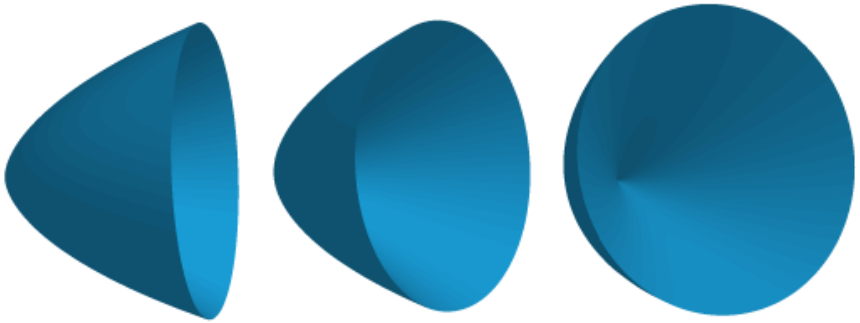
$$= \frac{9\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 6\pi\ u.v.$$

Método das cascas cilíndricas

$$V = \int_{0}^{2} 2\pi y\left[\left(\frac{y^2}{4}+1\right) - (y^2-2)\right] dy = 6\pi\ u.v$$



Sólido gerado



Respostas

Exercício 1:

c) $y = 2x - 1,\ \ y = -2x + 3,\ \ x = 2$, em torno do eixo y.

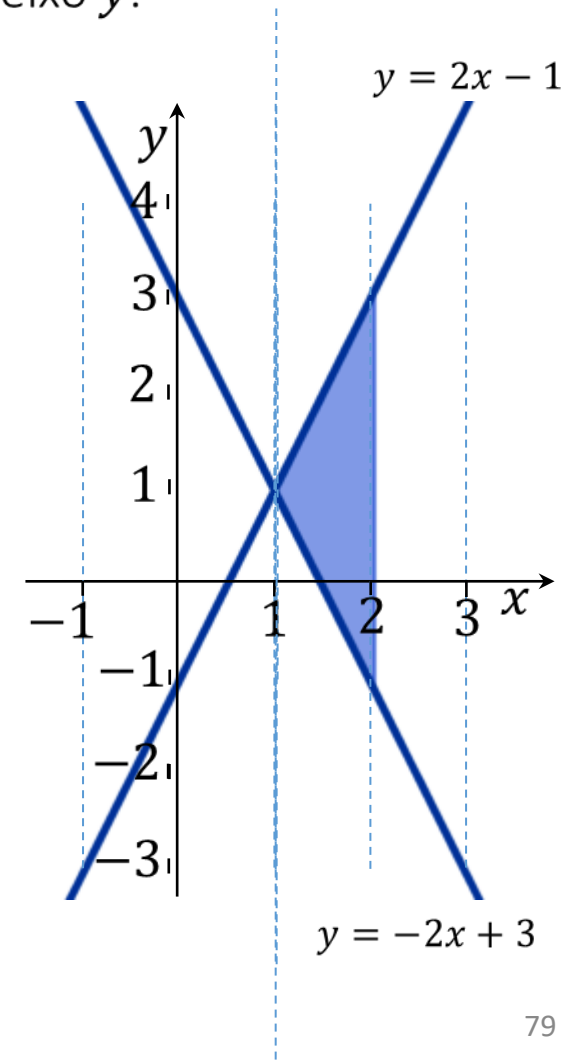
Método das arruelas

$$V = \int_{-1}^{1} \pi \left[(2)^2 - \left(\frac{3-y}{2} \right)^2 \right] dy + \int_{1}^{3} \pi \left[(2)^2 - \left(\frac{y+1}{2} \right)^2 \right] dy$$

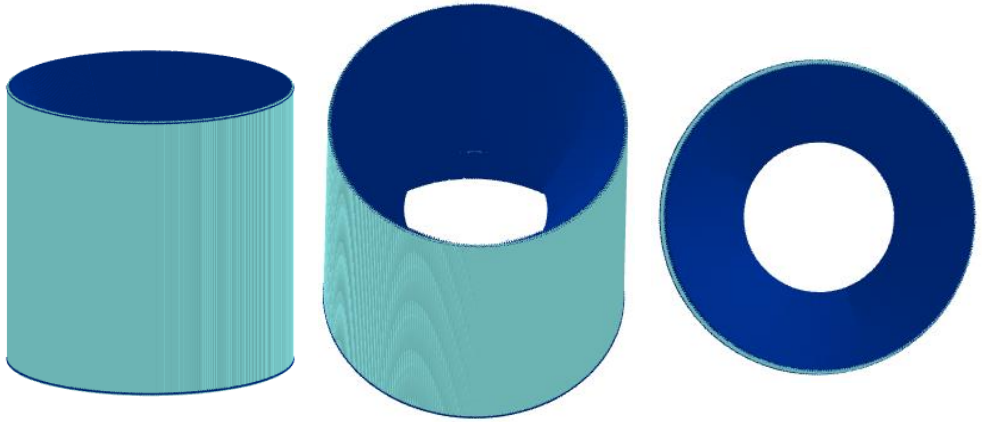
$$= \frac{10\pi}{3} + \frac{10\pi}{3} = \frac{20\pi}{3} u.v.$$

Método das cascas cilíndricas

$$V = \int_{1}^{2} 2\pi x[(2x-1) - (-2x+3)]dx = \frac{20\pi}{3} u.v.$$



Sólido gerado



Respostas

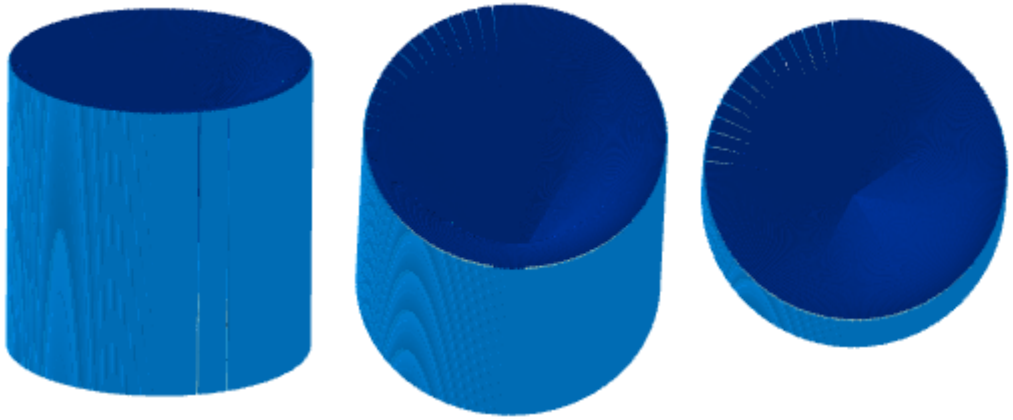
Exercício 1:

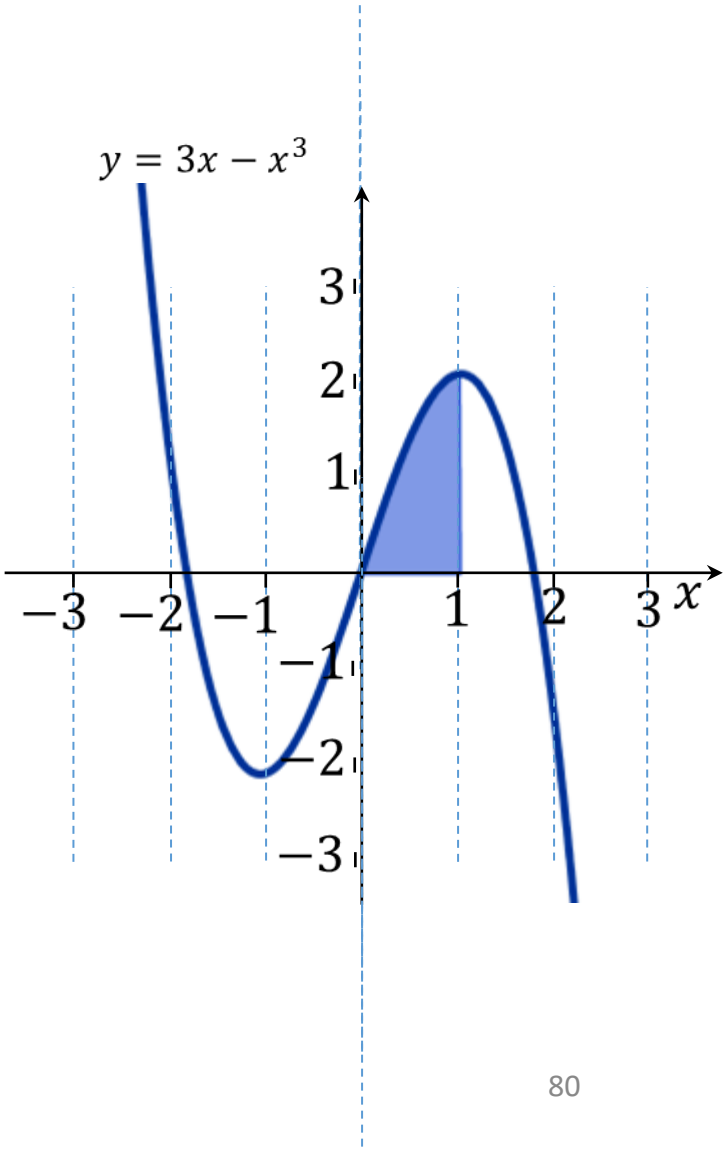
d) $y = 3x - x^3$, eixo x, $x = 1$ em torno do eixo y.

Método das cascas cilíndricas

$$V = \int_0^1 2\pi x(3x - x^3)dx = \frac{8\pi}{5} u.v.$$

Sólido gerado





Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA

O GAMA possui monitorias de:

- **Matemática Elementar, Cálulo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e equivalentes)
  - **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
    - **Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3** (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino

Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Integrais

Aula 06

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Integrais por substituição trigonométrica

As substituições trigonométricas podem servir para transformar integrais que envolvam

$$\sqrt{a^2 + x^2} \qquad \sqrt{a^2 - x^2} \qquad \sqrt{x^2 - a^2}$$

em integrais que podem ser calculadas diretamente.

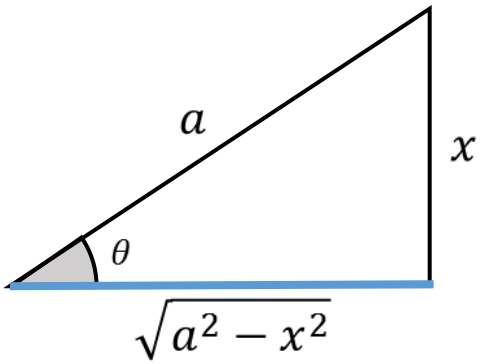
As substituições mais comuns são:

$$x = a\, tg\, \theta \qquad x = a\, sen\, \theta \qquad x = a\, sec\, \theta$$

Podemos visualizar geometricamente como podem ser feitas essas substituições básicas, a partir de triângulos retângulos. Vejamos os casos a seguir.

Integrais por substituição trigonométrica

Caso 1. $\sqrt{a^2 - x^2}$



Para as variáveis apresentadas, sabemos que

$$sen\,\theta = \frac{x}{a}$$

logo,

$$x = a\,sen\,\theta$$

Para $x = a\,sen\,\theta$, temos:

$$a^2 - x^2 = a^2 - a^2\,sen^2\,\theta$$

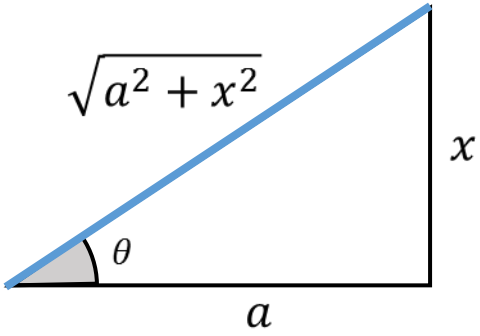
$$= a^2(1 - sen^2\,\theta)$$

$$= a^2\cos^2\theta$$

Então, $\sqrt{a^2 - x^2} = a\,|\cos\theta|$.

Integrais por substituição trigonométrica

Caso 2. $\sqrt{a^2 + x^2}$



Para as variáveis apresentadas, sabemos que

$$tg\,\theta = \frac{x}{a}$$

logo,

$$x = a\,tg\,\theta$$

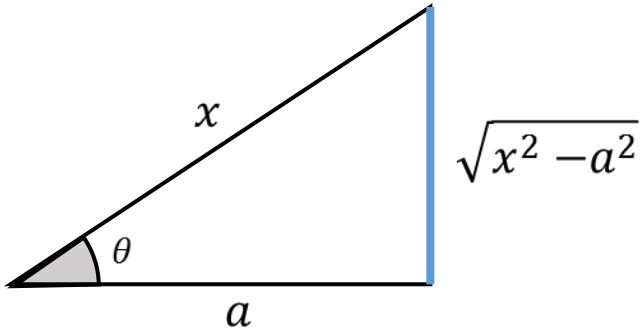
Para $x = a\,tg\,\theta$, temos:

$$\begin{aligned} a^2 + x^2 &= a^2 + a^2 tg^2\,\theta \\ &= a^2(1 + tg^2\,\theta) \\ &= a^2\,sec^2\,\theta \end{aligned}$$

Então, $\sqrt{a^2 + x^2} = a\,|\sec\theta|$.

Integrais por substituição trigonométrica

Caso 3. $\sqrt{x^2 - a^2}$



Para as variáveis apresentadas, sabemos que

$$sec\ \theta = \frac{x}{a}$$

logo,

$$x = a\ sec\ \theta$$

Para $x = a\ sec\ \theta$, temos:

$$\begin{aligned} x^2 - a^2 &= a^2\ sec^2\ \theta - a^2 \\ &= a^2(sec^2\ \theta - 1) \\ &= a^2\ tg^2\ \theta \end{aligned}$$

Então, $\sqrt{x^2 - a^2} = a\ |\mathrm{tg}\ \theta|$.

Substituição trigonométrica

Exemplo 1: Calcule

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$$

Solução: para eliminar o radical, fazemos a substituição

$x = 2\ sen\ \theta$

$dx = 2\ cos\ \theta\ d\theta$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{2\ cos\ \theta\ d\theta}{(2\ sen\ \theta)^2\sqrt{4-4\ sen^2\ \theta}}$$

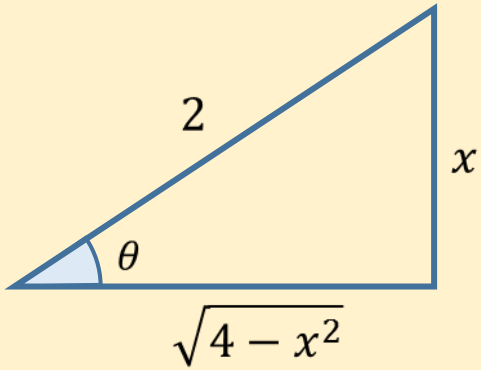
$$= \int \frac{2\ cos\ \theta\ d\theta}{(2\ sen\ \theta)^2(2\ cos\theta)} = \frac{1}{4}\int \frac{d\theta}{sen^2\theta}$$

$$= \frac{1}{4}\int cossec^2\theta\ d\theta = -\frac{1}{4}cotg\ \theta + C$$

Devemos expressar $cotg\ \theta$ em termos de x. Para isso substituímos $x = 2\ sen\ \theta$ como $sen\ \theta = {}^{x}/_{2}$

Substituição trigonométrica

Representando esses valores geometricamente



$$x = 2\,sen\,\theta$$

obtemos:

$$cotg\,\theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

e, fazendo as devidas substituições

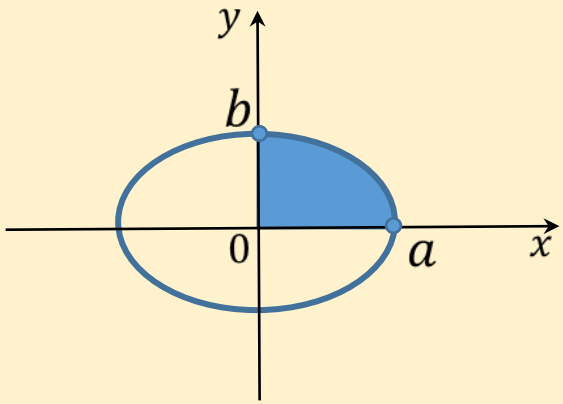
$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{1}{4}cotg\,\theta + C \quad = -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + C$$

Substituição trigonométrica

Exemplo 2: Encontre a área da elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Solução: a elipse é simétrica em torno dos eixos, logo sua área é 4 vezes a área do primeiro quadrante.



Resolvendo a equação da elipse em termos de x:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

Assim, a área é dada por:

$$A=4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=\frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

Fazendo a substituição

$$\boxed{x=a\,sen\,\theta}$$

$$\boxed{dx=a\,cos\theta\,d\theta}$$

Substituição trigonométrica

Convertendo os limites de integração em x para os limites de integração em θ:

$$x = 0 \Rightarrow \theta = arc\ sen\ (0) = 0$$

$$x = a \Rightarrow \theta = arc\ sen\ (1) = \frac{\pi}{2}$$

Obtemos:

$$A = \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{4b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos\theta \cdot a\cos\theta\ d\theta$$

$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2\theta\, d\theta$$

$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 + cos2\theta)\, d\theta$$

$$= 2ab\left[\theta + \frac{1}{2}\ sen2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2ab\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \pi ab$$

Substituição trigonométrica

Exemplo 3: Calcule $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx$, supondo que $x \geq 5$.

Solução: fazendo a substituição

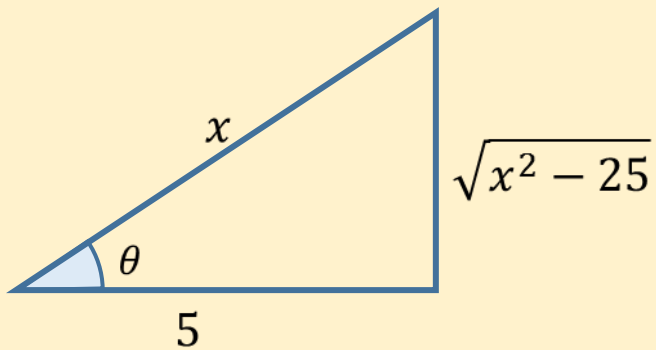
$$\boxed{x = 5\sec\theta, \qquad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}} \qquad \boxed{dx = 5\sec\theta \ tg\theta \ d\theta}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx &= \int \frac{\sqrt{25\,sec^2\theta - 25}}{5\,sec\theta}(5\sec\theta \ tg\theta)\,d\theta \\
&= \int \frac{5\,|tg\,\theta|}{5\,sec\theta}(5\sec\theta \ tg\theta)\,d\theta \\
&= 5\int tg^2\theta \ d\theta \\
&= 5\int (sec^2\theta - 1)\ d\theta = 5\,tg\,\theta - 5\,\theta + C
\end{aligned}$$

Substituição trigonométrica

Para expressar a solução em termos de x, vamos representar geometricamente



$$\boxed{x = 5\sec\theta}$$

$$\boxed{\theta = arc\sec\left(\frac{x}{5}\right)}$$

O que nos dá

$$tg\,\theta = \frac{\sqrt{x^2-25}}{5}$$

Disso, obtemos:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx \quad = \sqrt{x^2-25} - 5arc\sec\left(\frac{x}{5}\right) + C$$

Integrais envolvendo $ax^2 + bx + c$

Integrais envolvendo polinômios também podem ser calculadas a partir deste método, primeiro completando os quadrados e, depois, fazendo uma substituição apropriada. Veja o exemplo:

Exemplo 4 : Calcule

$$\int \frac{x}{x^2 - 4x + 8} dx$$

Solução: Completando os quadrados, temos

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 8 &= (x^2 - 4x + 8) + 4 - 4 \\ &= (x - 2)^2 + 4 \end{aligned}$$

A substituição $u = x - 2,\ du = dx$, fornece

$$\int \frac{x}{x^2 - 4x + 8} = \int \frac{x}{(x-2)^2 + 4} dx = \int \frac{u + 2}{u^2 + 4} du$$

Integrais envolvendo $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$

Solução:

$$= \int \frac{u}{u^2 + 4} du + 2 \int \frac{du}{u^2 + 4} = \frac{1}{2} \int \frac{2u}{u^2 + 4} du + 2 \int \frac{du}{u^2 + 4}$$

$$= \frac{1}{2} \ln(u^2 + 4) + 2 \left(\frac{1}{2}\right) arc\ tg\ \frac{u}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln[(x - 2)^2 + 4] + arc\ tg \left(\frac{x - 2}{2}\right) + C$$

Tabela Resumo

Em resumo, as três substituições básicas estão apresentadas na tabela abaixo, bem como os valores de θ que satisfazem a reversibilidade das funções.

EXPRESSÃO NO INTEGRANDO	*SUBSTITUIÇÃO*		*SIMPLIFICAÇÃO*
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\ sen\ \theta$	$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$a^2 - x^2 = a^2\ cos^2\ \theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a\ tg\ \theta$	$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$a^2 + x^2 = a^2\ sec^2\ \theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\ sec\ \theta$	$\begin{cases} 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} & (se\ x \geq a) \\ \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi & (se\ x \leq -a) \end{cases}$	$x^2 - a^2 = a^2\ tg^2\ \theta$

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Calcule as seguintes integrais fazendo as devidas substituições

$$(a)\ \int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$$

$$(b)\ \int \sqrt{1-4x^2}\ dx$$

$$(c)\ \int_{-2}^{2} \frac{dx}{4+x^2}$$

$$(d)\ \int_{0}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} dx$$

$$(e)\ \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-2x^2}}$$

Respostas

Exercício 1:

(a) $ln(\frac{1}{3}|x+\sqrt{x^2+9}|)+C$

(b) $\frac{1}{4}\left[arc\ sen\,(2x)+2x\sqrt{1-4x^2}\right]+C$

(c) $\frac{\pi}{4}$

(d) $\frac{\pi}{6}$

(e) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[arc\ sen\ \sqrt{\frac{2}{7}}(x+1)\right]+C$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA

O GAMA possui monitorias de:

- **Matemática Elementar, Cálulo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e equivalentes)
  - **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
    - **Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3** (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.