Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino

Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas

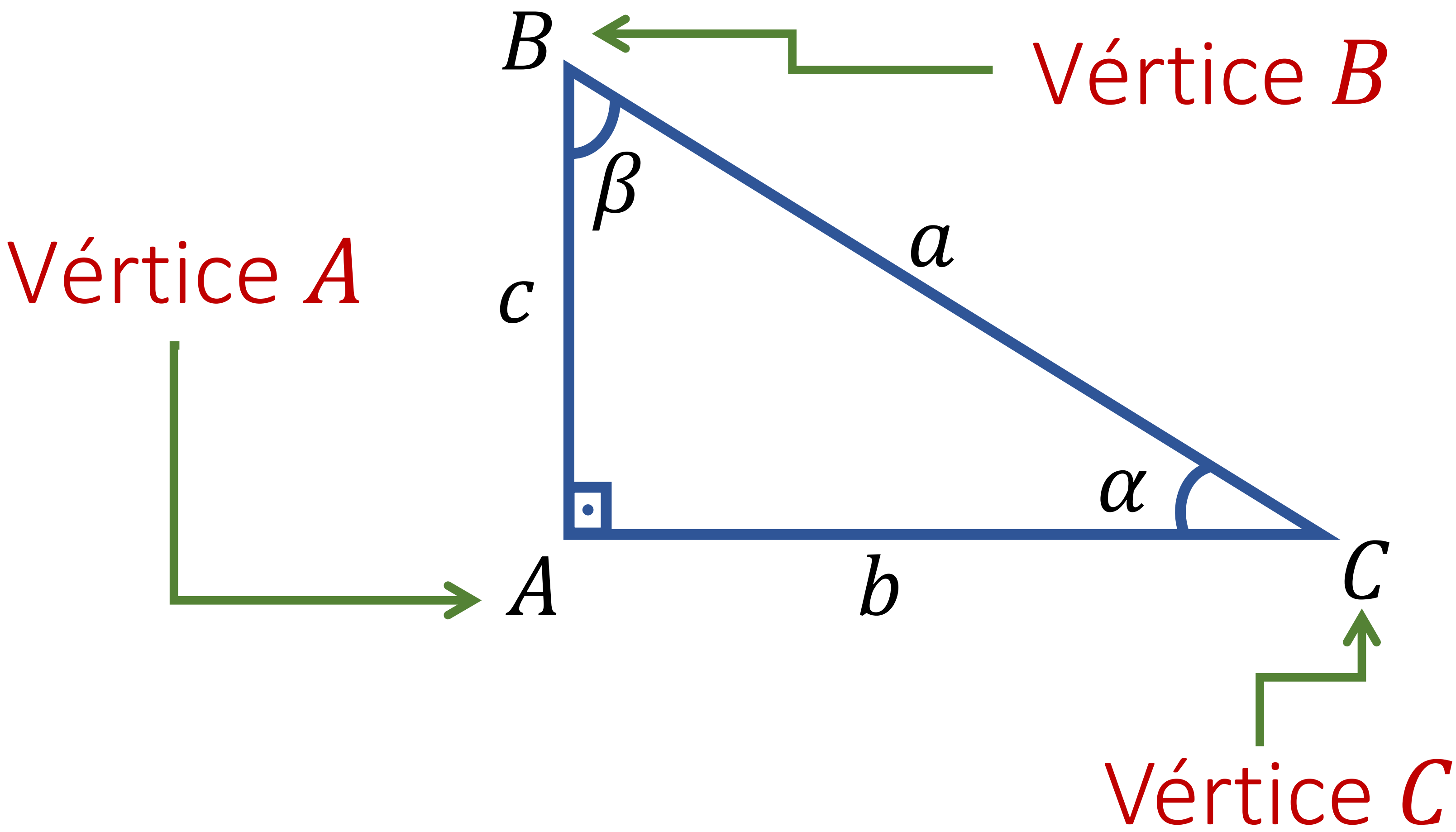
Aula 01

Projeto

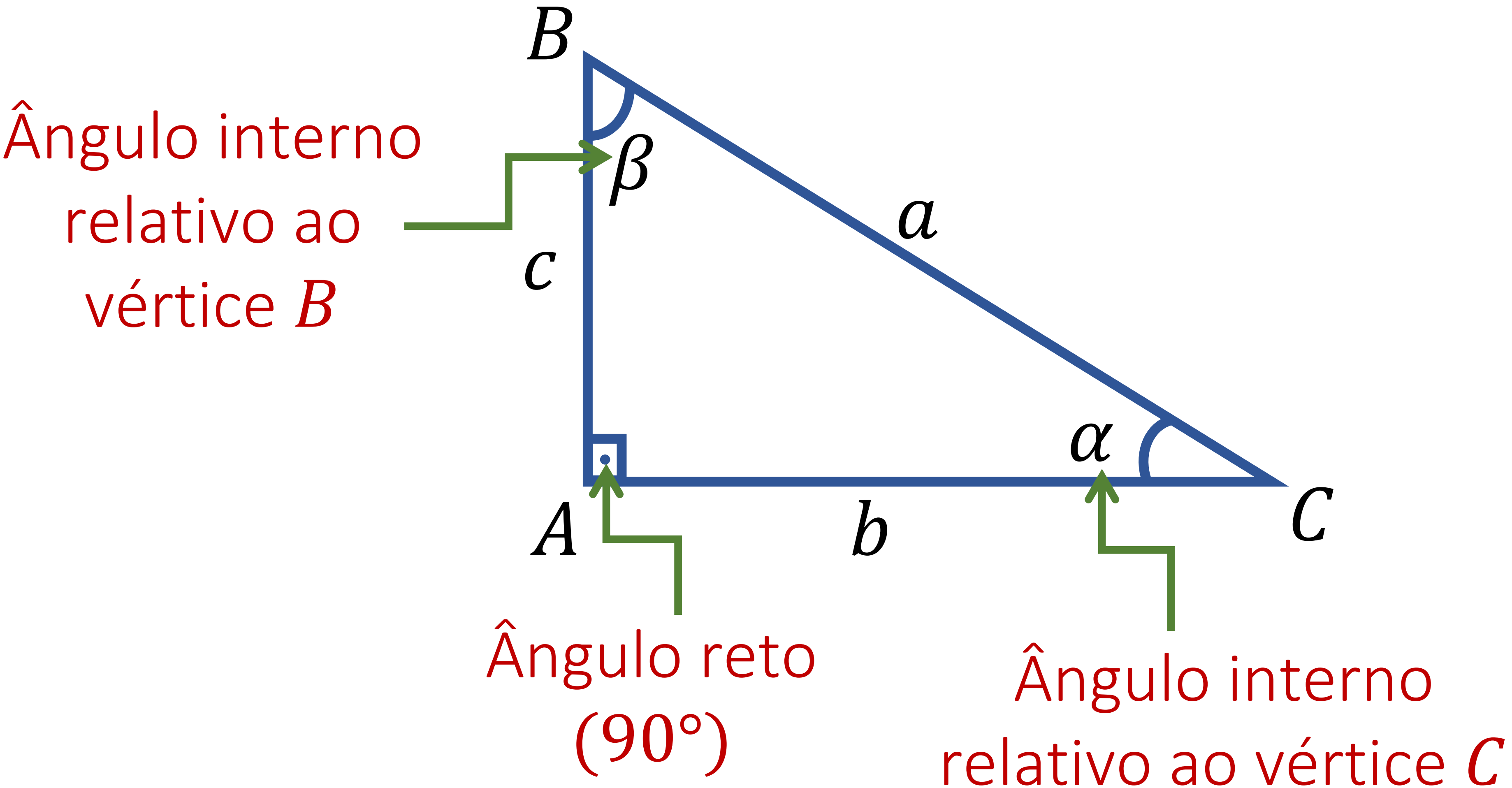
GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

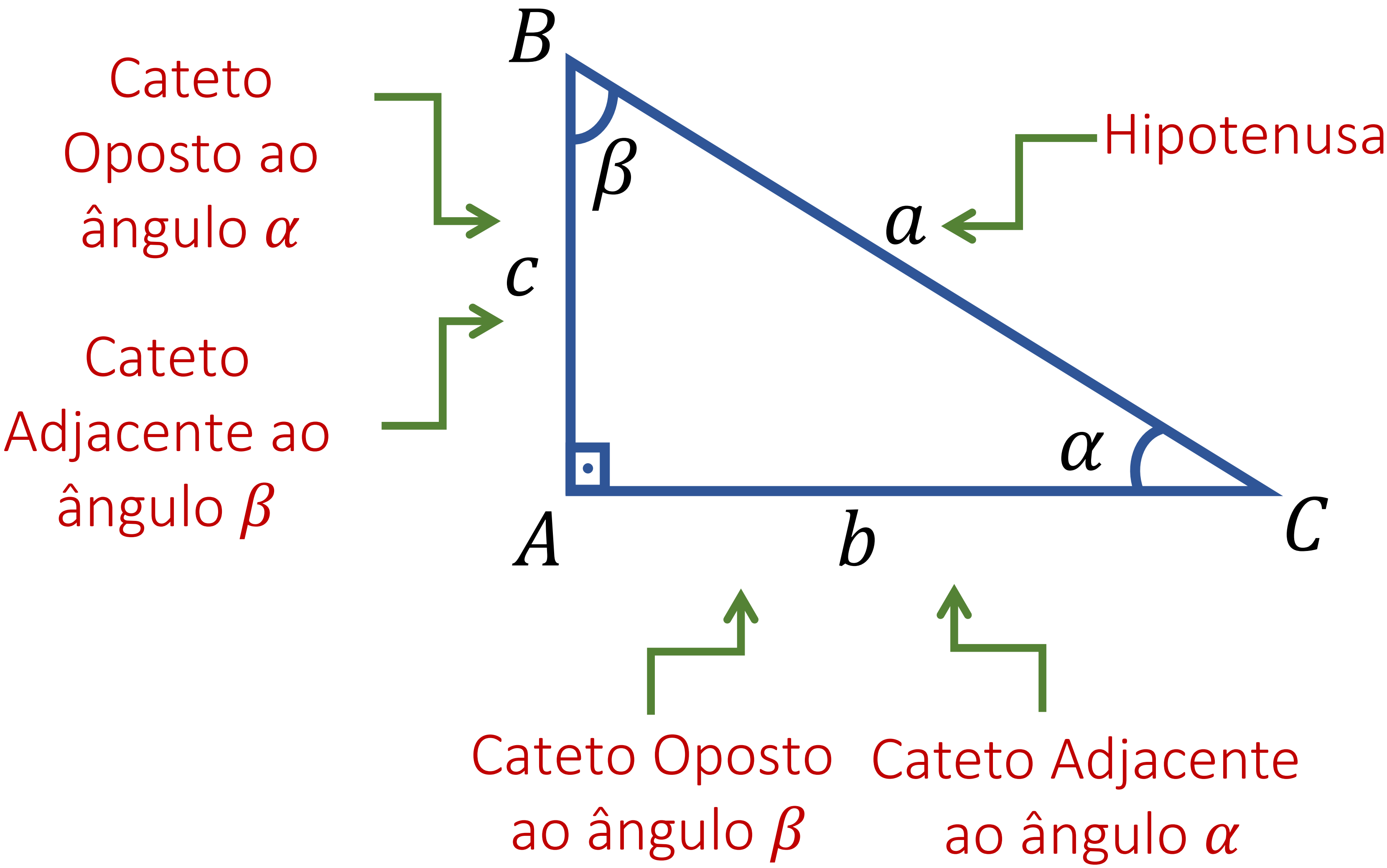
Triângulo Retângulo



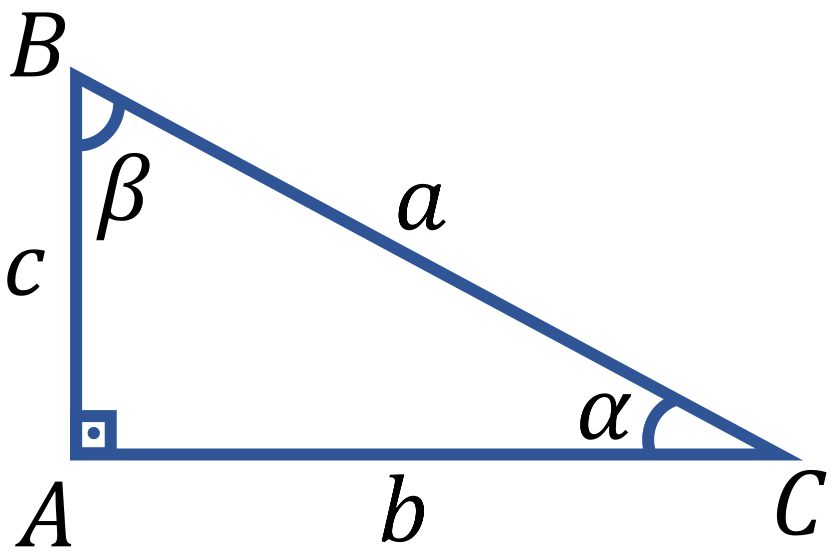
Triângulo Retângulo



Triângulo Retângulo



Razões Trigonométricas



Razão Seno

Divisão do cateto oposto pela hipotenusa.

$$\sin\alpha = \frac{c}{a}$$ $$\sin\beta = \frac{b}{a}$$

Razão Cosseno

Divisão do cateto adjacente pela hipotenusa.

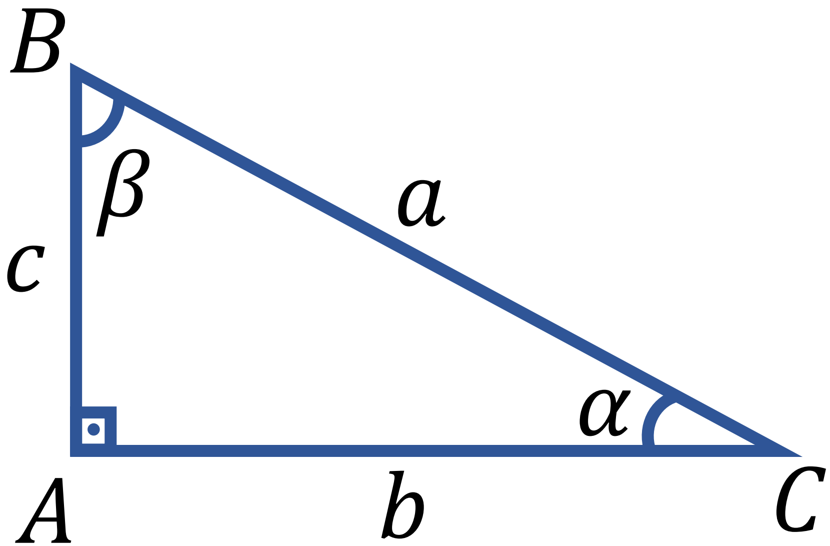
$$\cos\alpha = \frac{b}{a}$$ $$\cos\beta = \frac{c}{a}$$

Razão Tangente

Divisão do cateto oposto pelo cateto adjacente.

$$\tan\alpha = \frac{c}{b}$$ $$\tan\beta = \frac{b}{c}$$

Razões Trigonométricas



Razão Cossecante

Divisão da hipotenusa pelo cateto oposto.

$$\csc\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\csc\beta = \frac{a}{b}$$

Razão Secante

Divisão da hipotenusa pelo cateto adjacente.

$$\sec\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\sec\beta = \frac{a}{c}$$

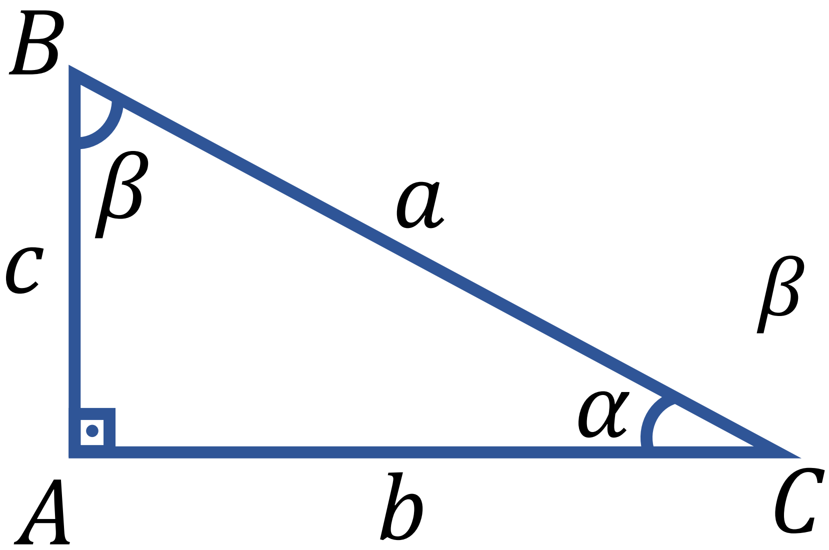
Razão Cotangente

Divisão do cateto adjacente pelo cateto oposto.

$$\cot\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\cot\beta = \frac{c}{b}$$

Razões Trigonométricas



$$\alpha + \beta = 90°$$

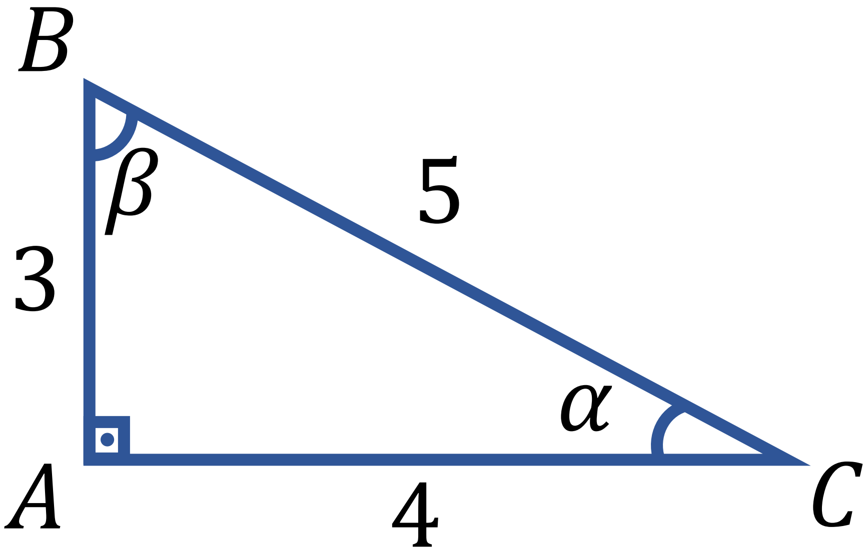
$$\beta = 90° - \alpha \qquad \alpha = 90° - \beta$$

$$\sin\alpha = \cos\beta$$
$$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$$

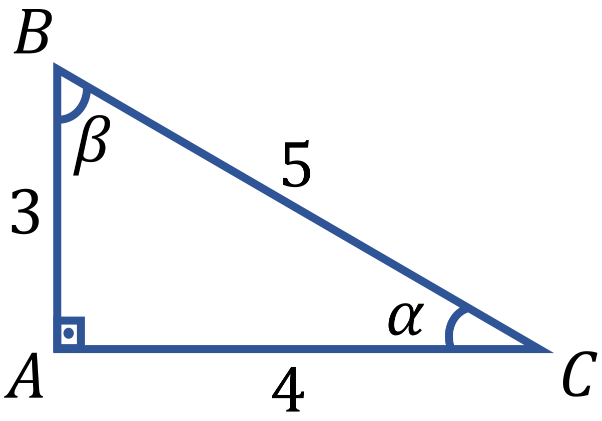
$$\cos\alpha = \sin\beta$$
$$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$$

Exemplos

1) Considerando o triângulo abaixo, determine as suas razões trigonométricas para α e β.



Exemplos



$$Seno = \frac{Cateto\ oposto}{Hipotenusa}$$

$$\sin\alpha = \frac{3}{5} \qquad \sin\beta = \frac{4}{5}$$

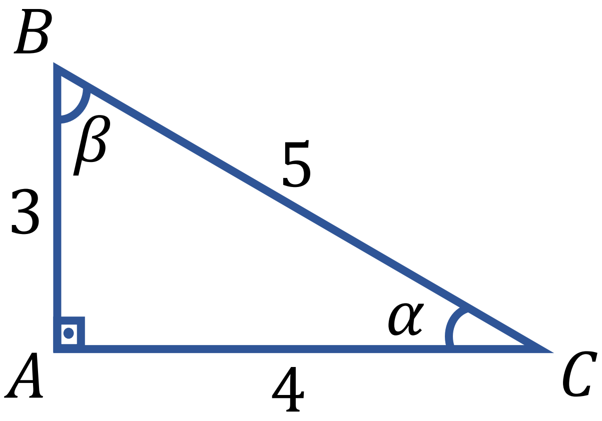
$$Cosseno = \frac{Cateto\ adjacente}{Hipotenusa}$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5} \qquad \cos\beta = \frac{3}{5}$$

$$Tangente = \frac{Cateto\ oposto}{Cateto\ adjacente}$$

$$\tan\alpha = \frac{3}{4} \qquad \tan\beta = \frac{4}{3}$$

Exemplos



$$Cossecante = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ oposto}$$

$$\csc\alpha = \frac{5}{3} \qquad \csc\beta = \frac{5}{4}$$

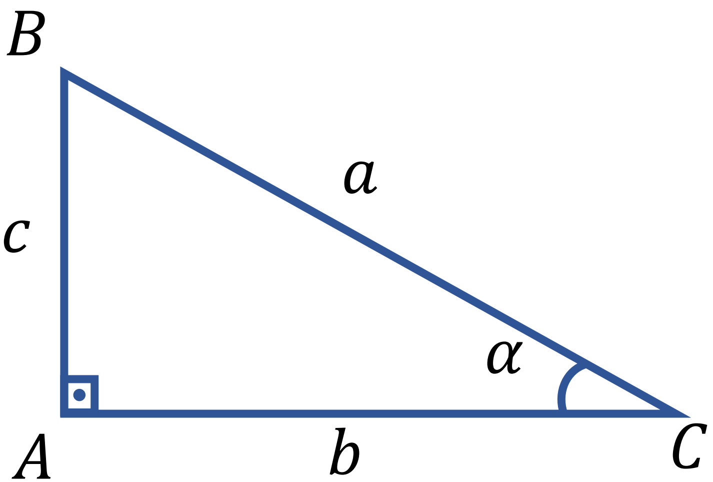
$$Secante = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ adjacente}$$

$$\sec\alpha = \frac{5}{4} \qquad \sec\beta = \frac{5}{3}$$

$$Cotangente = \frac{Cateto\ adjacente}{Cateto\ oposto}$$

$$\cot\alpha = \frac{4}{3} \qquad \cot\beta = \frac{3}{4}$$

Relação entre as Razões Trigonométricas



Razão Tangente

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{c}{\cancel{a}} \cdot \frac{\cancel{a}}{b} = \frac{c}{b} = \tan\alpha$$

Razão Cossecante

$$\boxed{\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}}$$

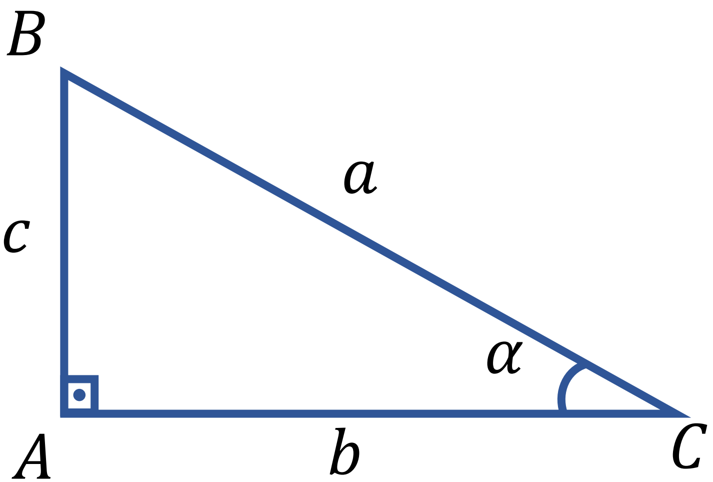
$$\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\frac{c}{a}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{a}{c} = \frac{a}{c} = \csc\alpha$$

Razão Secante

$$\boxed{\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}}$$

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} = \sec\alpha$$

Relação entre as Razões Trigonométricas



Razão Cotangente

$$\boxed{\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{\cancel{a}} \cdot \frac{\cancel{a}}{c} = \frac{b}{c} = \cot\alpha$$

Razão Cotangente

$$\boxed{\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}}$$

$$\frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{\frac{c}{b}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{b}{c} = \frac{b}{c} = \cot\alpha$$

Exemplos

1) Sabendo que para um ângulo β em um triângulo retângulo, temos $\sin\beta = \frac{4}{5}$ e $\cos\beta = \frac{3}{5}$ calcule:

(a) $\tan\beta$ (c) $\sec\beta$

(b) $\csc\beta$ (d) $\cot\beta$

Solução:

(a) $$Tangente = \frac{Seno}{Cosseno}$$

$$\tan\beta = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{3} = \frac{4}{3}$$

(b) $$Cossecante = \frac{1}{Seno}$$

$$\csc\beta = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$$

Exemplos

1) Sabendo que para um ângulo β em um triângulo retângulo, temos $\sin\beta = \frac{4}{5}$ e $\cos\beta = \frac{3}{5}$ calcule:

(a) $\tan\beta$ (c) $\sec\beta$

(b) $\csc\beta$ (d) $\cot\beta$

Solução:

(c) $Secante = \dfrac{1}{Cosseno}$

$$\sec\beta = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

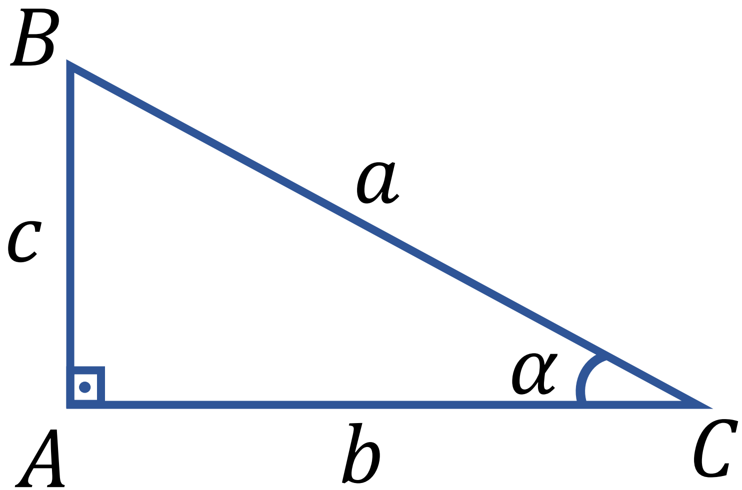
(d) $Cotangente = \dfrac{1}{Tangente}$

$$\cot\beta = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

$Cotangente = \dfrac{Cosseno}{Seno}$

$$\cot\beta = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{4} = \frac{3}{4}$$

Identidades Trigonométricas



Teorema de Pitágoras:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Dividindo os lados da igualdade por a^2:

$$\cos\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\sin\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} \Longrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1$$

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Identidades Trigonométricas

$$sin^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

Dividindo os lados da igualdade por $\sin^2\alpha$:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Longrightarrow 1 + \left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sin\alpha}\right)^2$$

$$\cot^2\alpha + 1 = \csc^2\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

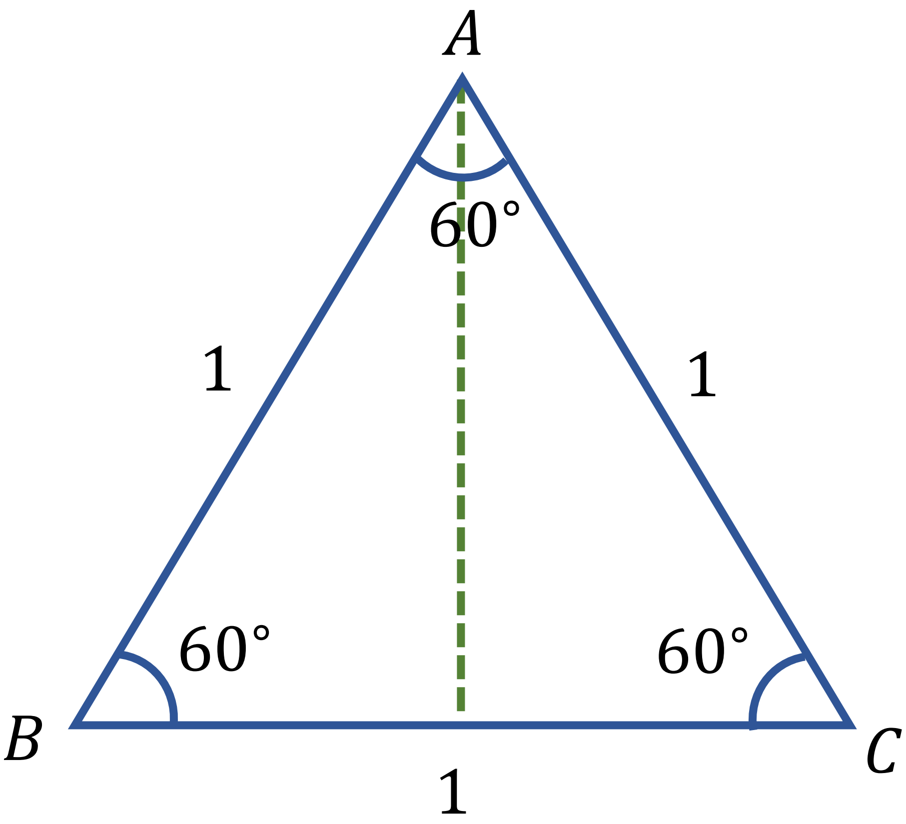
Dividindo os lados da igualdade por $\cos^2\alpha$:

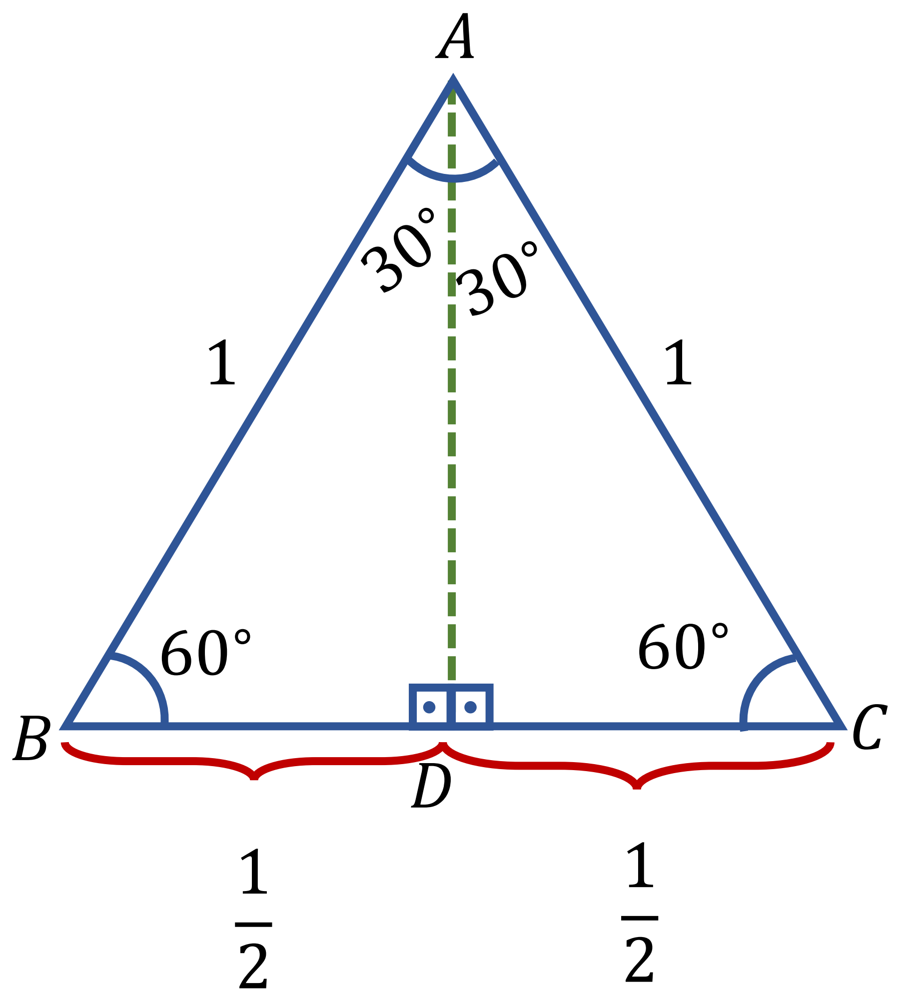
$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Longrightarrow \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2$$

$$\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$$

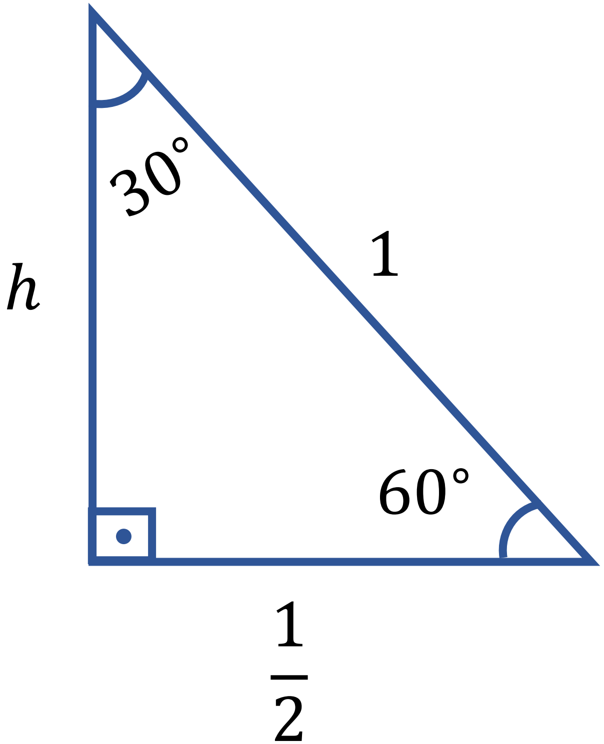
Seno, Cosseno e Tangente de $30°$, $45°$ e $60°$

Considerando o triângulo equilátero:





Seno, Cosseno e Tangente de $30°$, $45°$ e $60°$



Calculando a altura do triângulo:

Por Pitágoras:

$$1^2 = h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

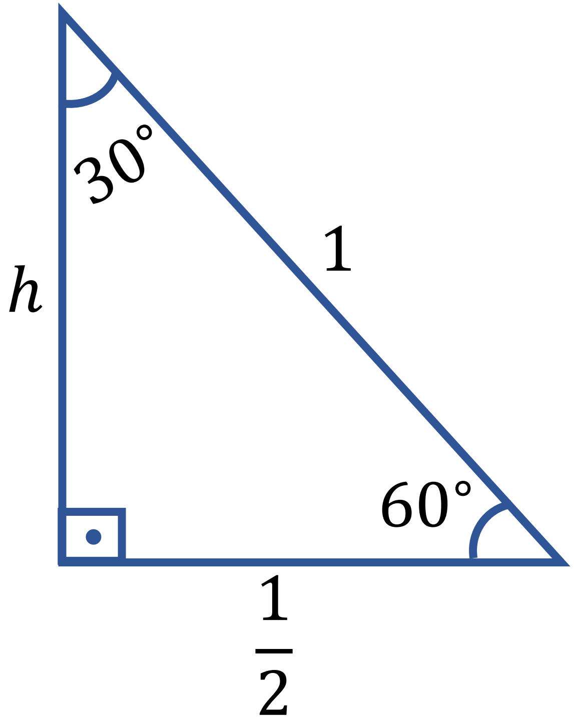
$$h^2 = 1 - \frac{1}{4} \Longrightarrow h^2 = \frac{4-1}{4} \Longrightarrow h^2 = \frac{3}{4}$$

$$h = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} \Longrightarrow h = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como o valor de h se trata da medida de uma distância, então:

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Seno, Cosseno e Tangente de 30°, 45°e 60°

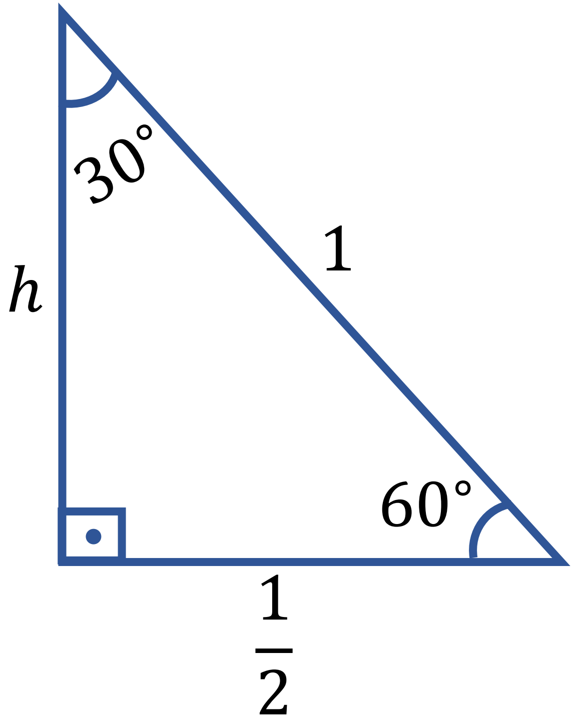


$$Seno = \frac{Cateto\ oposto}{Hipotenusa}$$

$$\sin 30° = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1} \qquad \sin 60° = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1}$$

$$\sin 30° = \frac{1}{2} \qquad \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Seno, Cosseno e Tangente de 30°, 45°e 60°



$$Cosseno = \frac{Cateto\ adjacente}{Hipotenusa}$$

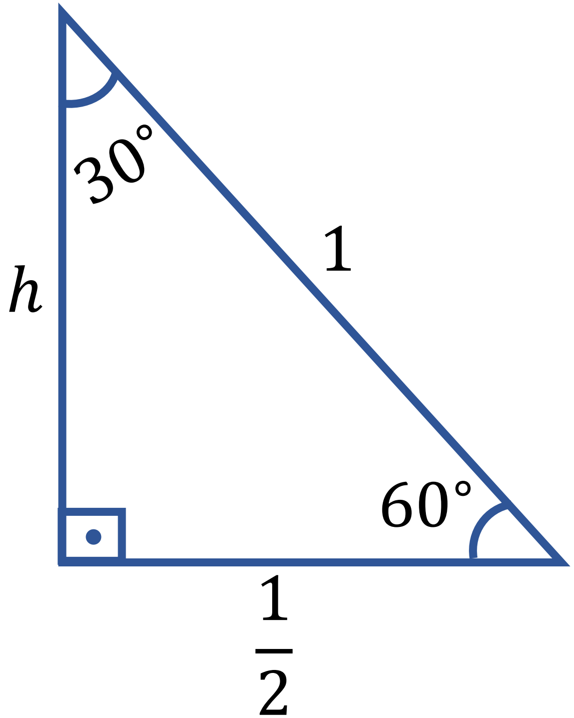
$$\cos 30° = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1}$$

$$\cos 60° = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1}$$

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{1}{2}$$

Seno, Cosseno e Tangente de 30°, 45°e 60°



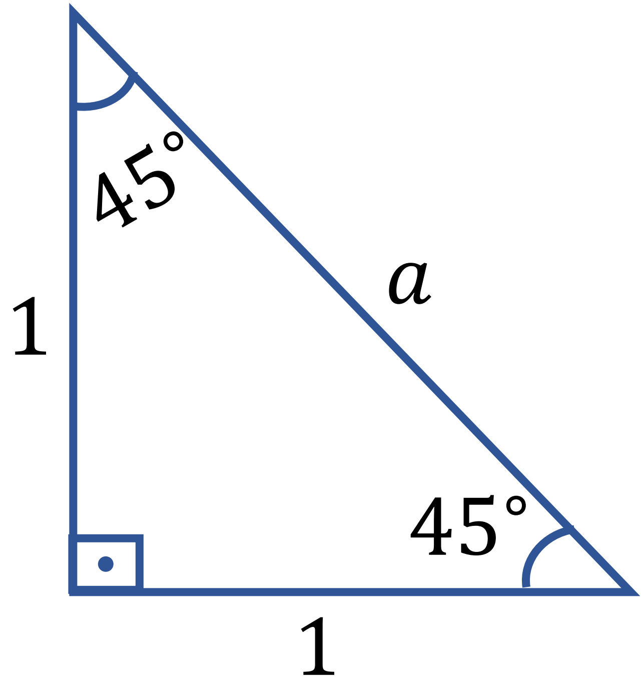
$$Tangente = \frac{Cateto\ oposto}{Cateto\ adjacente}$$

$$\tan 30° = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan 60° = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{1} = \sqrt{3}$$

Seno, Cosseno e Tangente de $30°$, $45°$e $60°$

Considerando o triângulo isósceles:



Por Pitágoras:

Calculando a hipotenusa do triângulo:

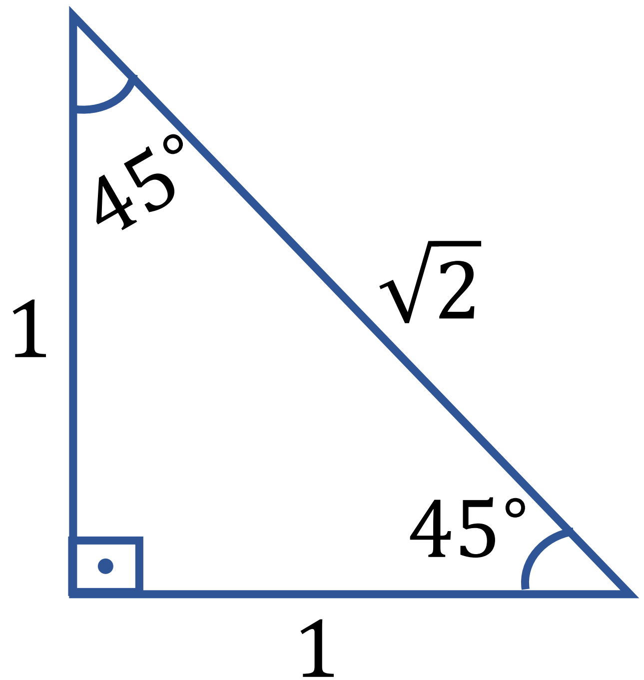
$$a^2 = 1^2 + 1^2$$

$$a^2 = 1 + 1 \Longrightarrow a^2 = 2 \Longrightarrow a = \pm\sqrt{2}$$

Como o valor de a se trata da medida de uma distância, então:

$$a = \sqrt{2}$$

Seno, Cosseno e Tangente de 30°, 45°e 60°



$$Seno = \frac{Cateto\ oposto}{Hipotenusa}$$

$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Cosseno = \frac{Cateto\ adjacente}{Hipotenusa}$$

$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Tangente = \frac{Cateto\ oposto}{Cateto\ adjacente}$$

$$\tan 45° = \frac{1}{1} = 1$$

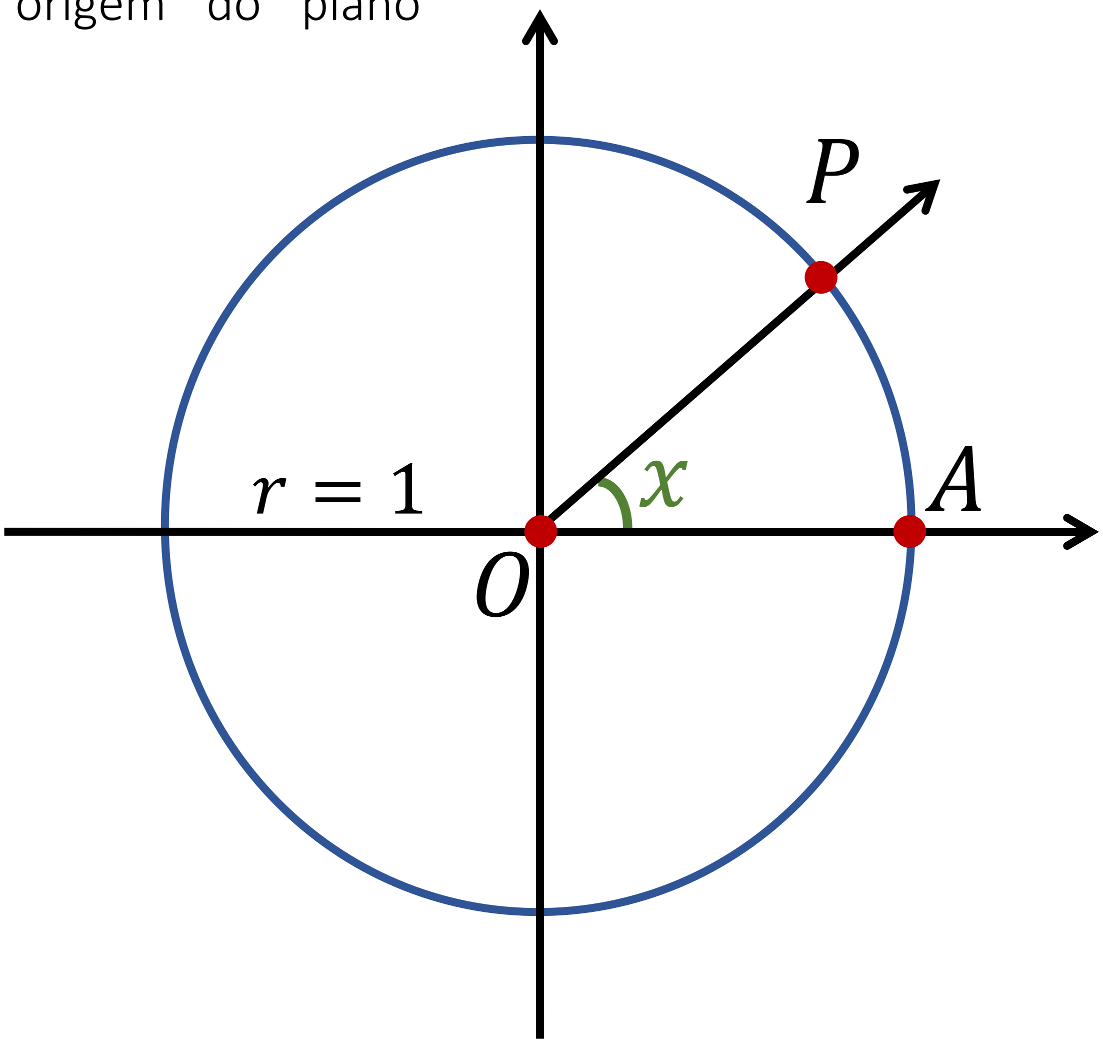
O Ciclo Trigonométrico

Considerando uma circunferência de raio unitário ($r = 1$) e centro na origem do plano cartesiano.

Fixando os pontos:

$O(0,0)$ $A(0,1)$

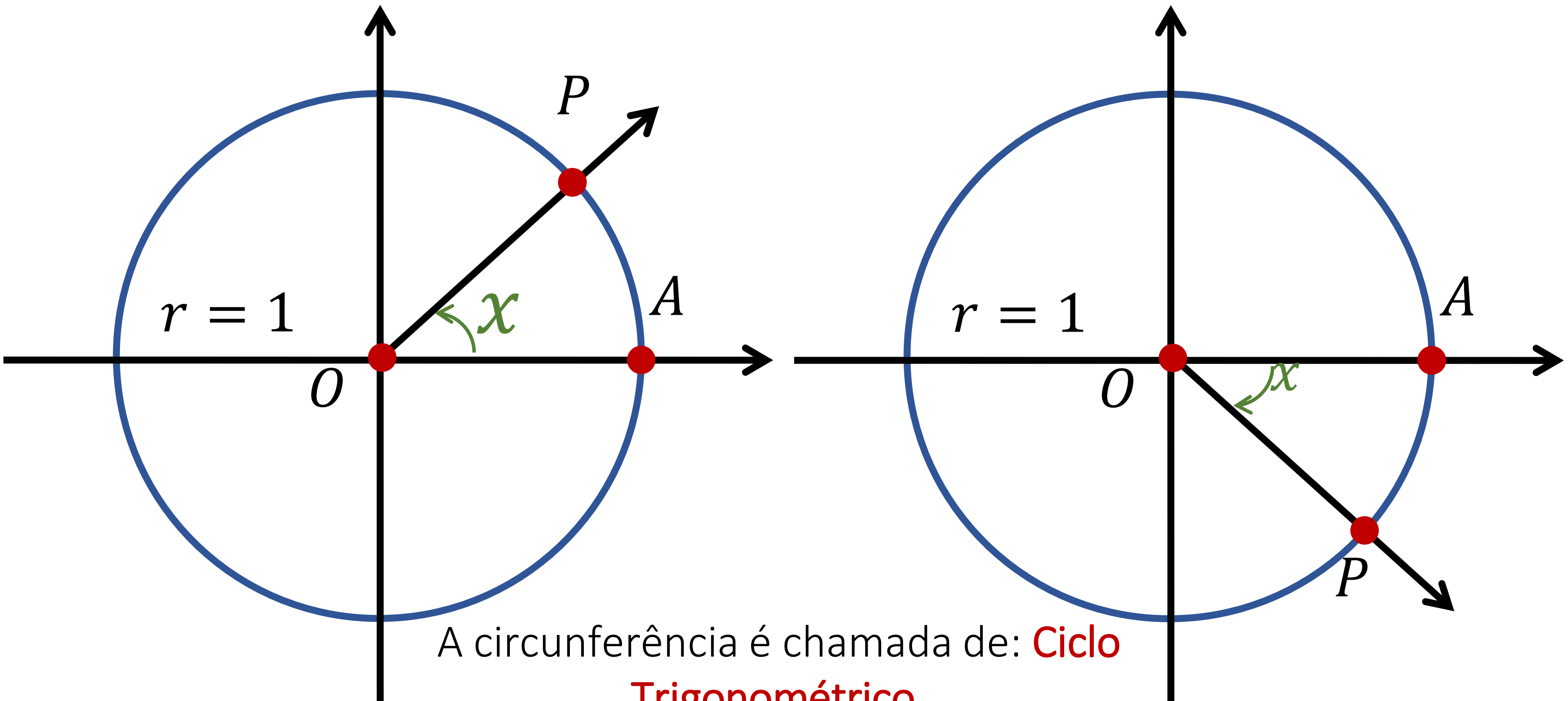
Cada ponto $\boldsymbol{P}$ sobre a circunferência determina um ângulo $x = AOP$.



O Ciclo Trigonométrico

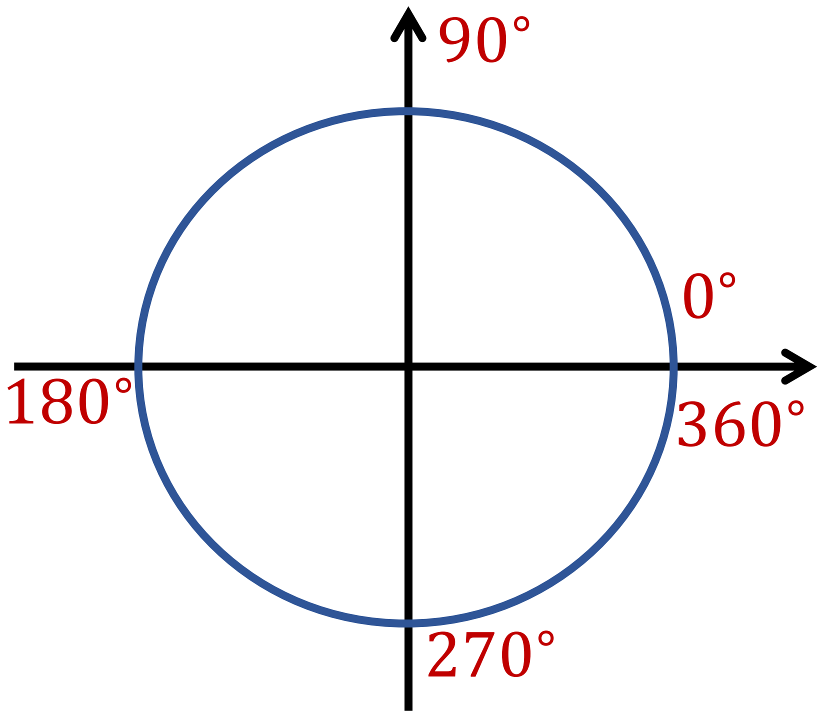
Estes ângulos podem ser medidos nos sentidos:

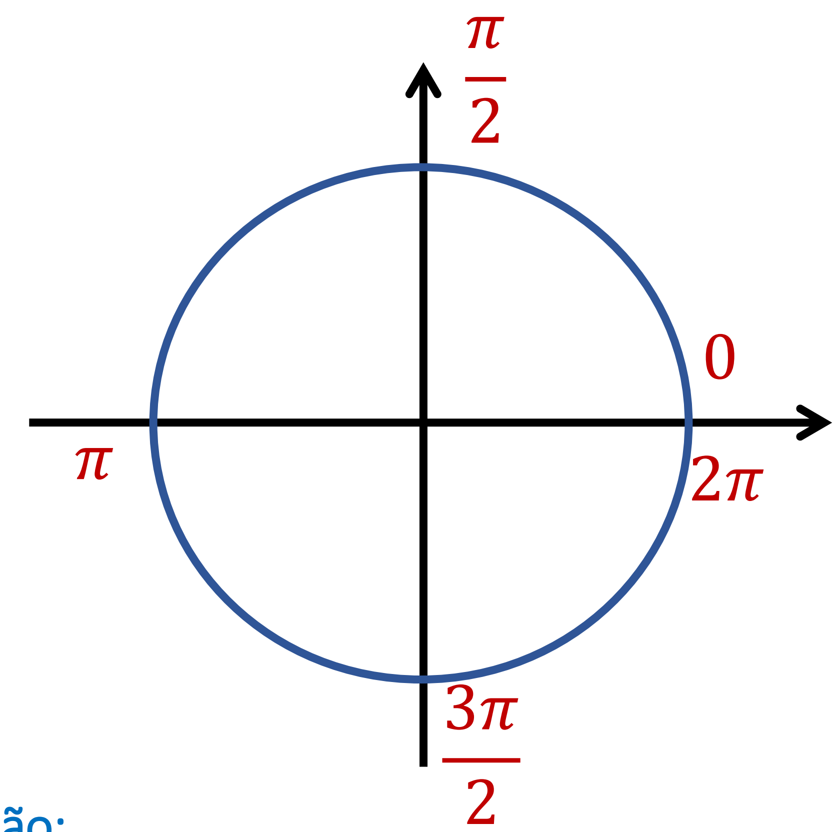
- positivo (anti-horário)
- negativo (horário)



A circunferência é chamada de: **Ciclo Trigonométrico**.

O Ciclo Trigonométrico





Conversão:

$180° \longleftrightarrow \pi$

Graus Radianos

Exemplos

1) Em cada caso, faça a respectiva conversão:

(a) $120°$ para radianos.

(b) $\frac{3\pi}{4}$ radianos para graus.

Solução:

(a) $120°$ para radianos.

Regra de três:

Graus	Radianos
$180°$	π
$120°$	x

$$180x = 120\pi \Longrightarrow x = \frac{12\cancel{0}\pi}{18\cancel{0}} \Longrightarrow x = \frac{12\pi}{18}\begin{smallmatrix}\div 6\\ \\ \div 6\end{smallmatrix} \Longrightarrow x = \frac{2\pi}{3} rad$$

Exemplos

1) Em cada caso, faça a respectiva conversão:

(a) $120°$ para radianos.

(b) $\frac{3\pi}{4}$ radianos para graus.

Solução:

(b) $\frac{3\pi}{4}$ radianos para graus.

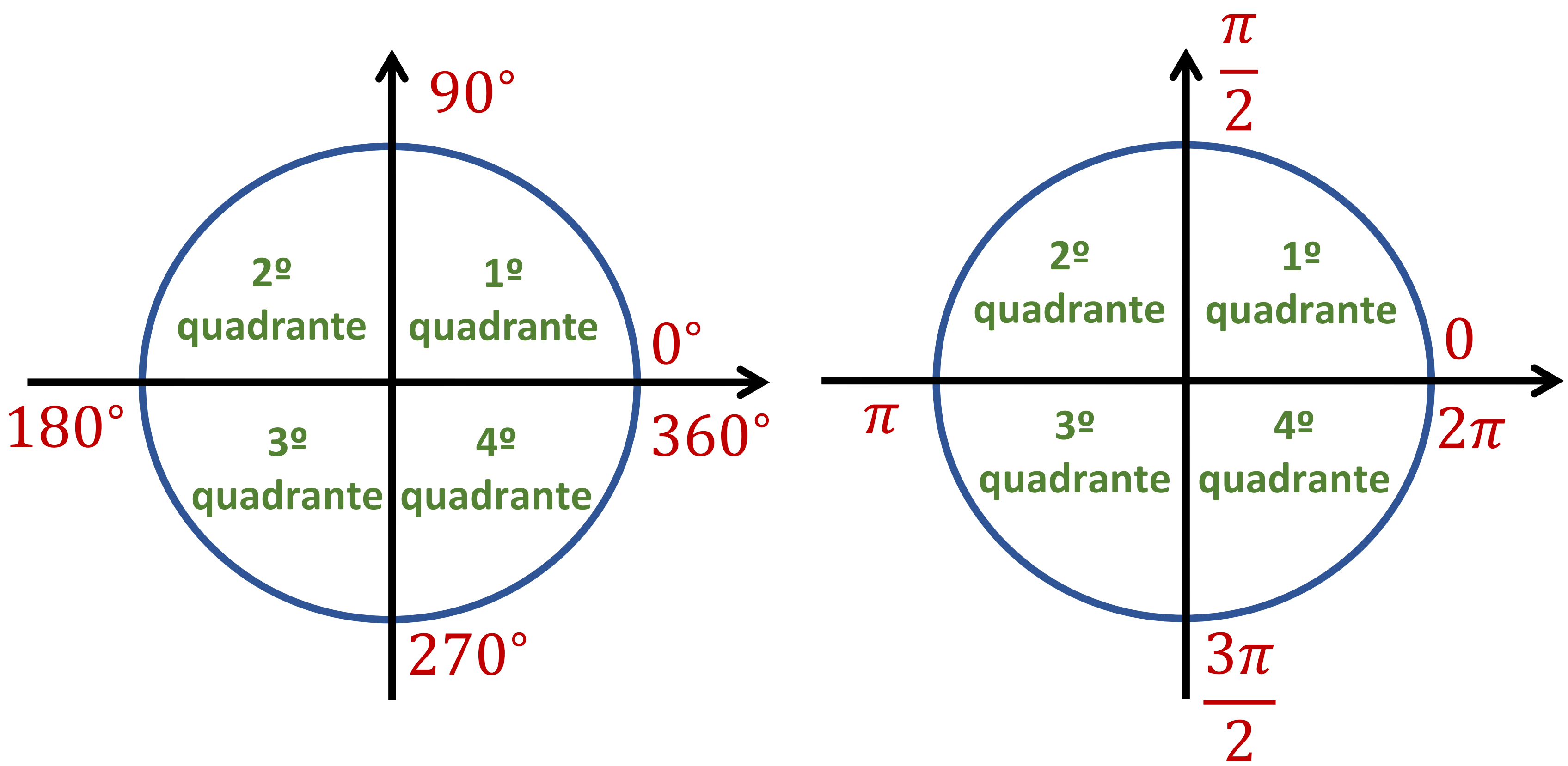
Regra de três:

Graus	Radianos
$180°$	π
x	$\frac{3\pi}{4}$

$$\pi x = 180.\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Longrightarrow x = \left(\frac{\cancel{540}\pi}{\cancel{4}}\right).\frac{1}{\pi} \Longrightarrow x = \frac{135\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}} \Longrightarrow x = 135°$$

O Ciclo Trigonométrico

O ciclo é dividido em quatro regiões (quadrantes).



Exemplos

2) Indique em quais quadrantes pertencem os ângulos abaixo:

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{3\pi}{4}$ (c) $\frac{4\pi}{3}$ (d) $\frac{11\pi}{6}$

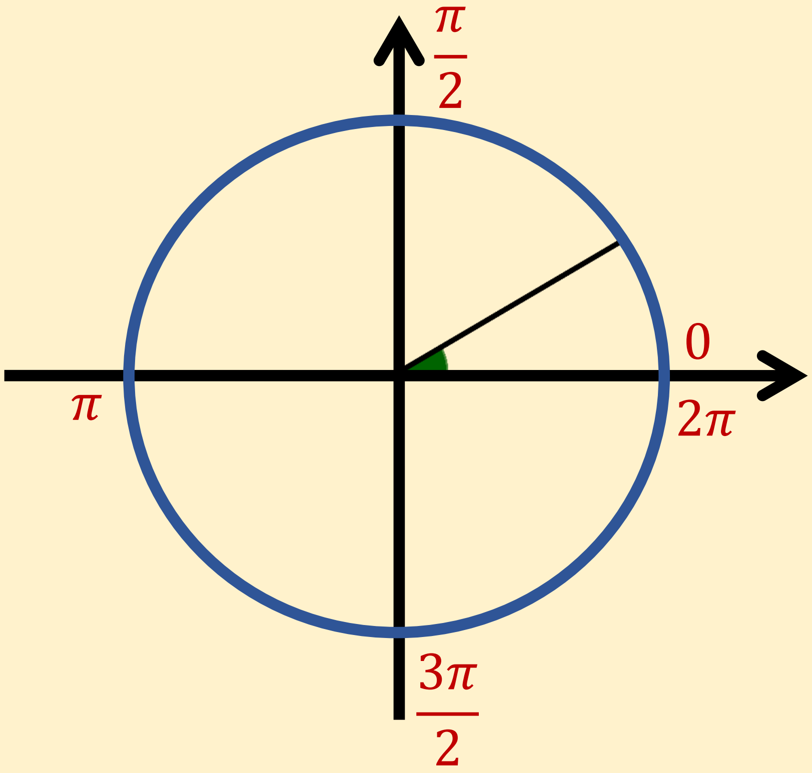
Solução:

(a) $\frac{\pi}{6} = \frac{180°}{6} = 30°$

Podemos ver que $30°$ está entre $0°$ e $90°$.

Então, $\frac{\pi}{6}$ está entre 0 e $\frac{\pi}{2}$.

Portanto, $\frac{\pi}{6}$ pertence ao $1º$ quadrante.



Exemplos

2) Indique em quais quadrantes pertencem os ângulos abaixo:

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{3\pi}{4}$ (c) $\frac{4\pi}{3}$ (d) $\frac{11\pi}{6}$

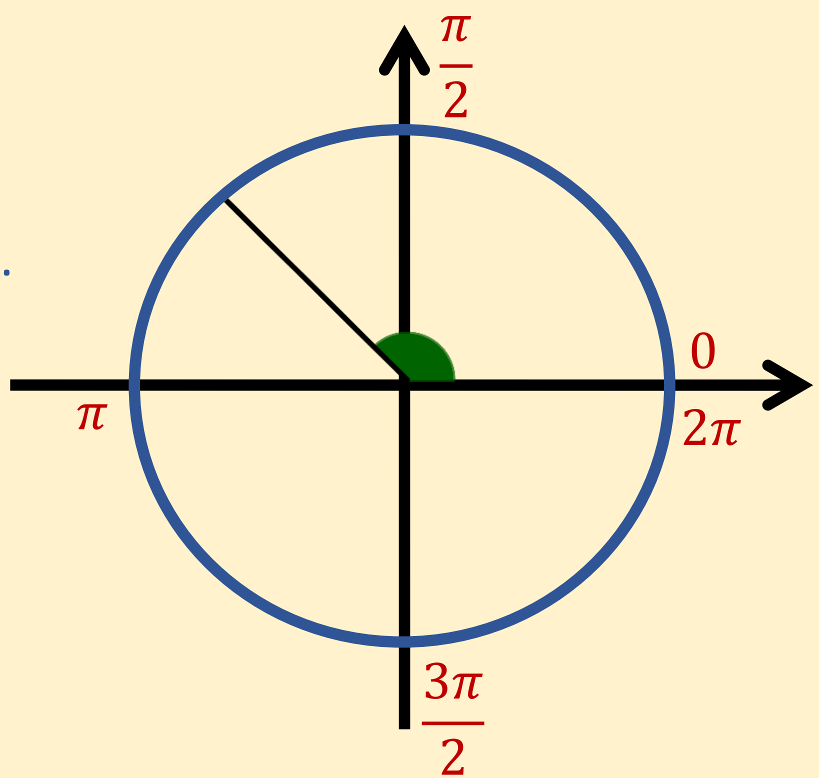
Solução:

(b) $\frac{3\pi}{4} = \frac{3.(\cancel{180°})}{\cancel{4}} = 3.(45°) = 135°$

Podemos ver que $135°$ está entre $90°$ e $180°$.

Então, $\frac{3\pi}{4}$ está entre $\frac{\pi}{2}$ e π.

Portanto, $\frac{3\pi}{4}$ pertence ao 2º quadrante.



Exemplos

2) Indique em quais quadrantes pertencem os ângulos abaixo:

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{3\pi}{4}$ (c) $\frac{4\pi}{3}$ (d) $\frac{11\pi}{6}$

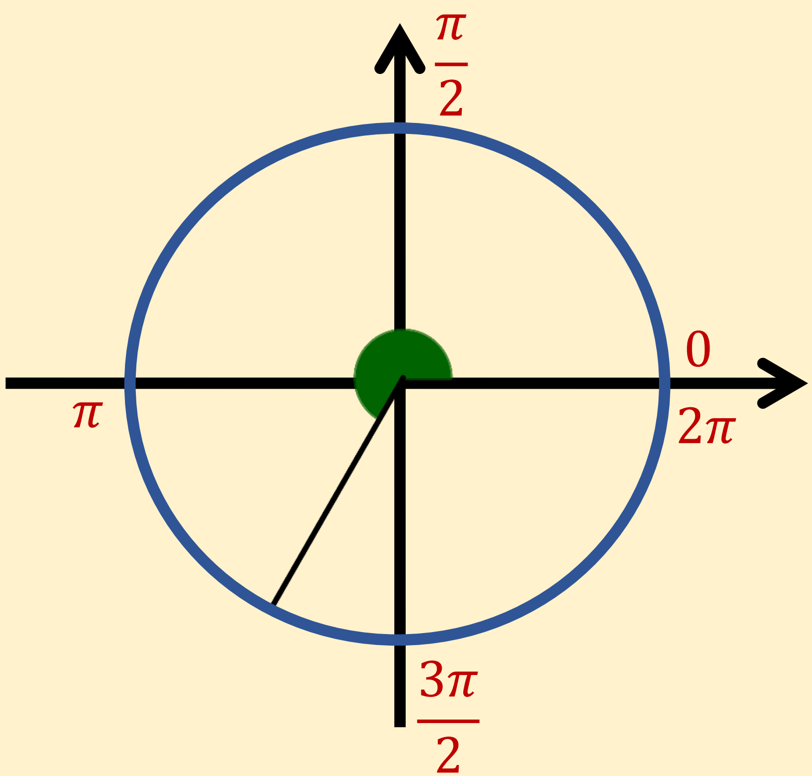
Solução:

(c) $\frac{4\pi}{3} = \frac{4.(\cancel{180°})}{\cancel{3}} = 4.(60°) = 240°$

Podemos ver que $240°$ está entre $180°$ e $270°$.

Então, $\frac{4\pi}{3}$ está entre π e $\frac{3\pi}{2}$.

Portanto, $\frac{4\pi}{3}$ pertence ao 3º quadrante.



Exemplos

2) Indique em quais quadrantes pertencem os ângulos abaixo:

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{3\pi}{4}$ (c) $\frac{4\pi}{3}$ (d) $\frac{11\pi}{6}$

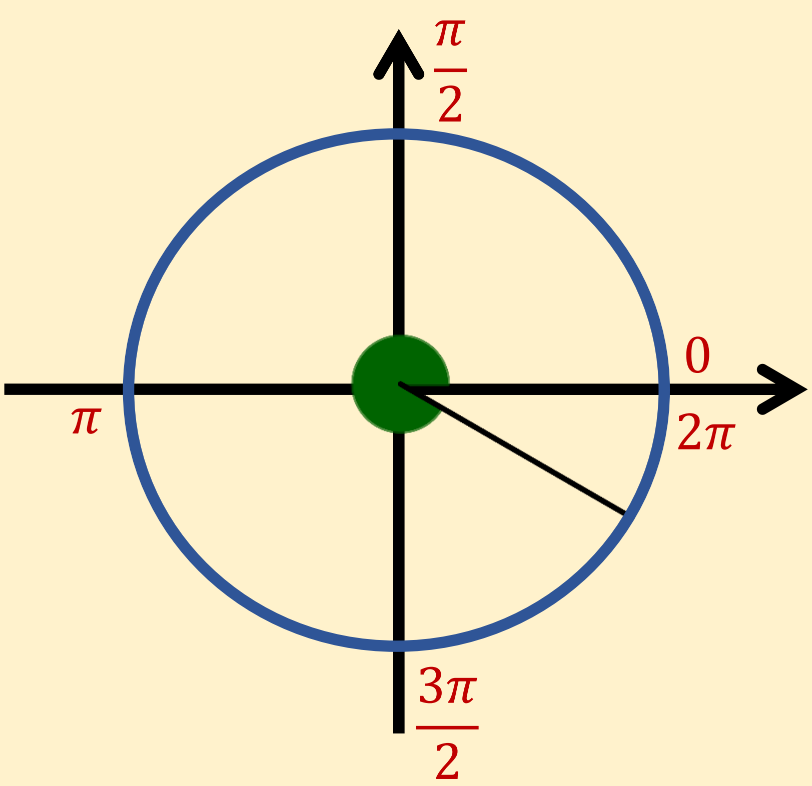
Solução:

(d) $\frac{11\pi}{6} = \frac{11.(\cancel{180°})}{\cancel{6}} = 11.(30°) = 330°$

Podemos ver que $330°$ está entre $270°$ e $360°$.

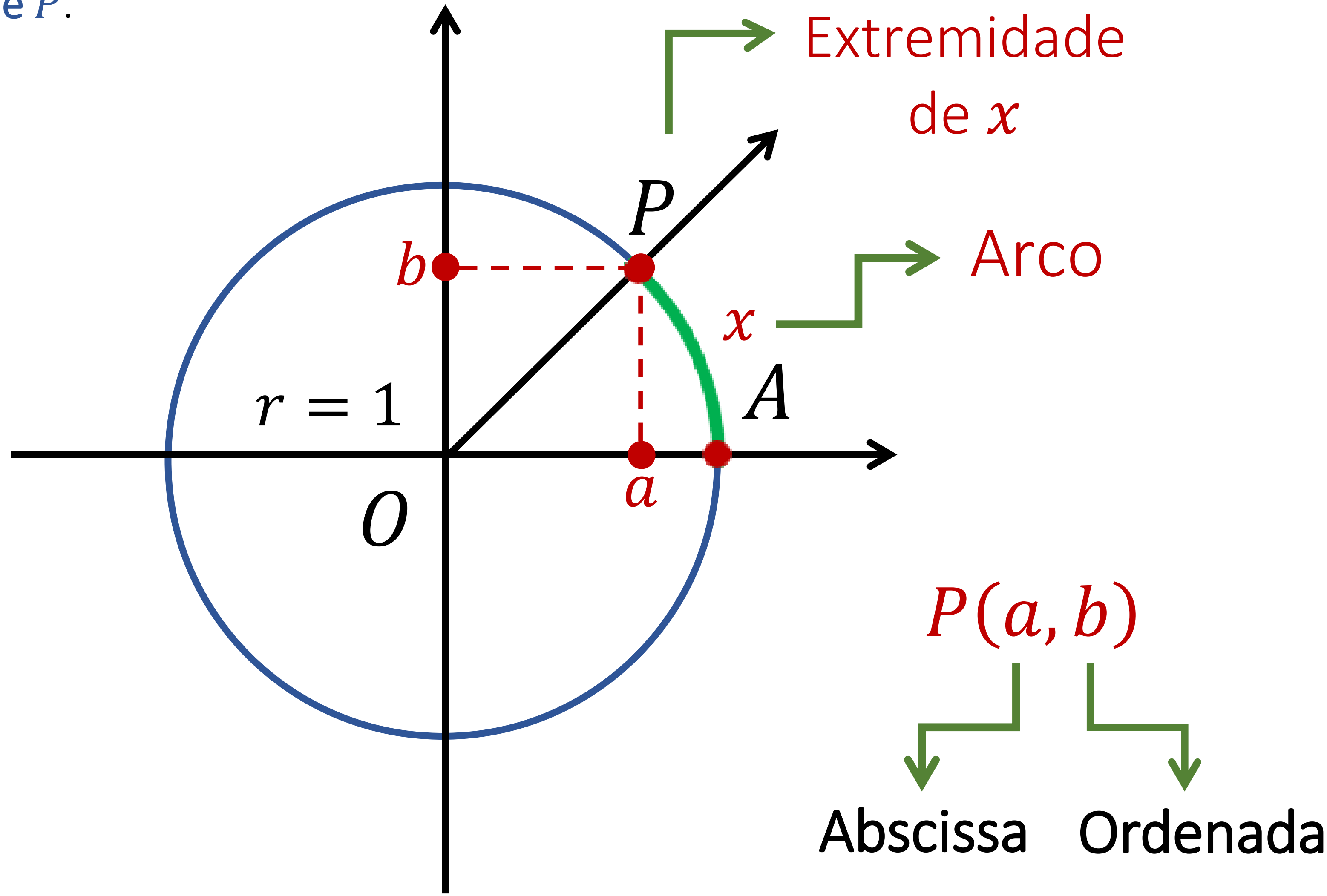
Então, $\frac{11\pi}{6}$ está entre $\frac{3\pi}{2}$ e 2π.

Portanto, $\frac{11\pi}{6}$ pertence ao 4º quadrante.

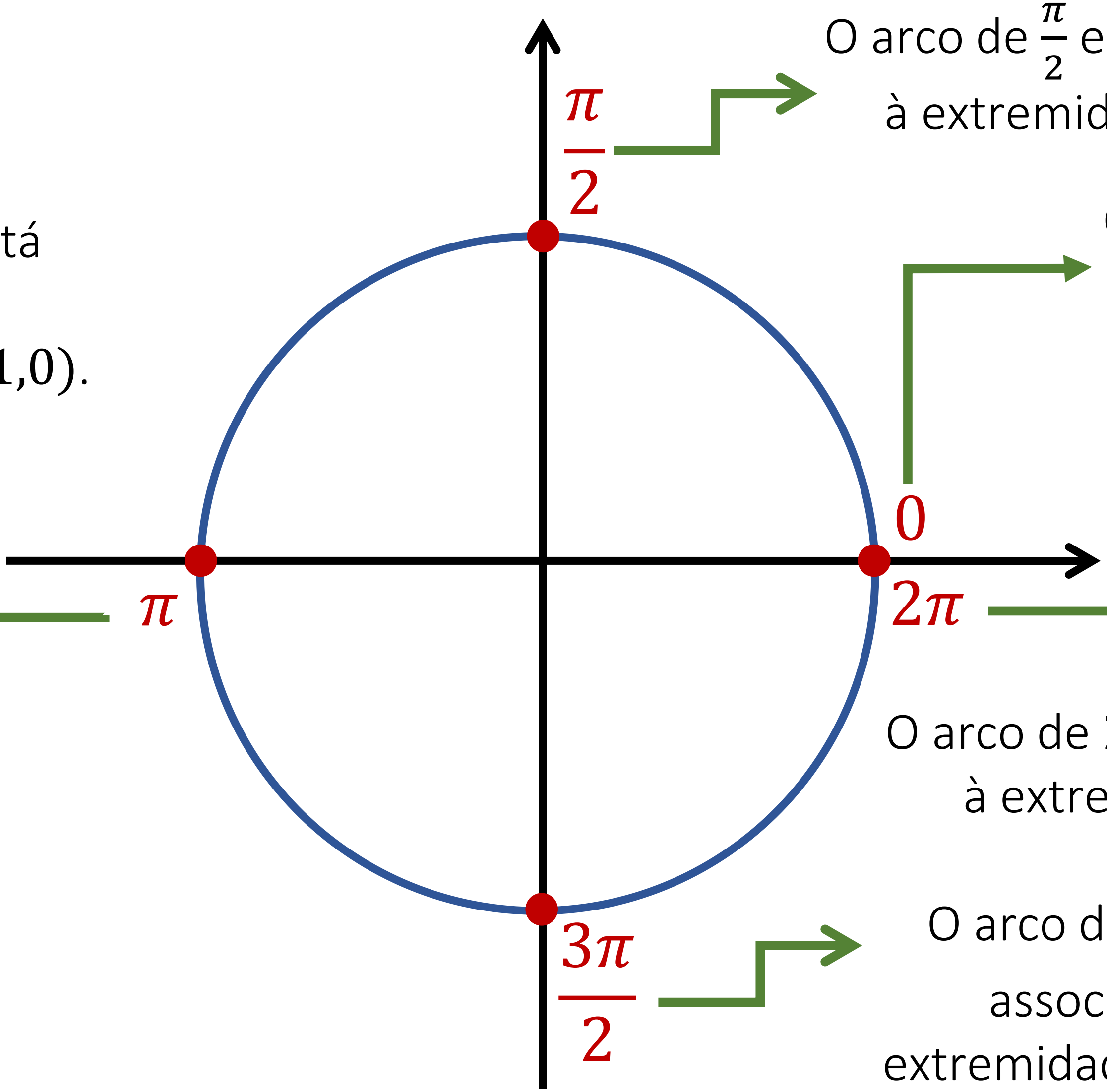


Trigonometria no Ciclo Trigonométrico

A cada ponto $P(a,b)$ no ciclo trigonométrico está associado um arco x de **extremidade** P.



Trigonometria no Ciclo Trigonométrico



O arco de $\frac{\pi}{2}$ está associado à extremidade $(0,1)$.

O arco de π está associado à extremidade $(-1,0)$.

O arco de 0 está associado à extremidade $(1,0)$.

O arco de 2π está associado à extremidade $(0,1)$.

O arco de $\frac{3\pi}{2}$ está associado à extremidade $(0,-1)$.

Imagem dos Arcos Especiais no Ciclo

Extremidade do arco $\frac{\pi}{6}$ e seus correspondentes:

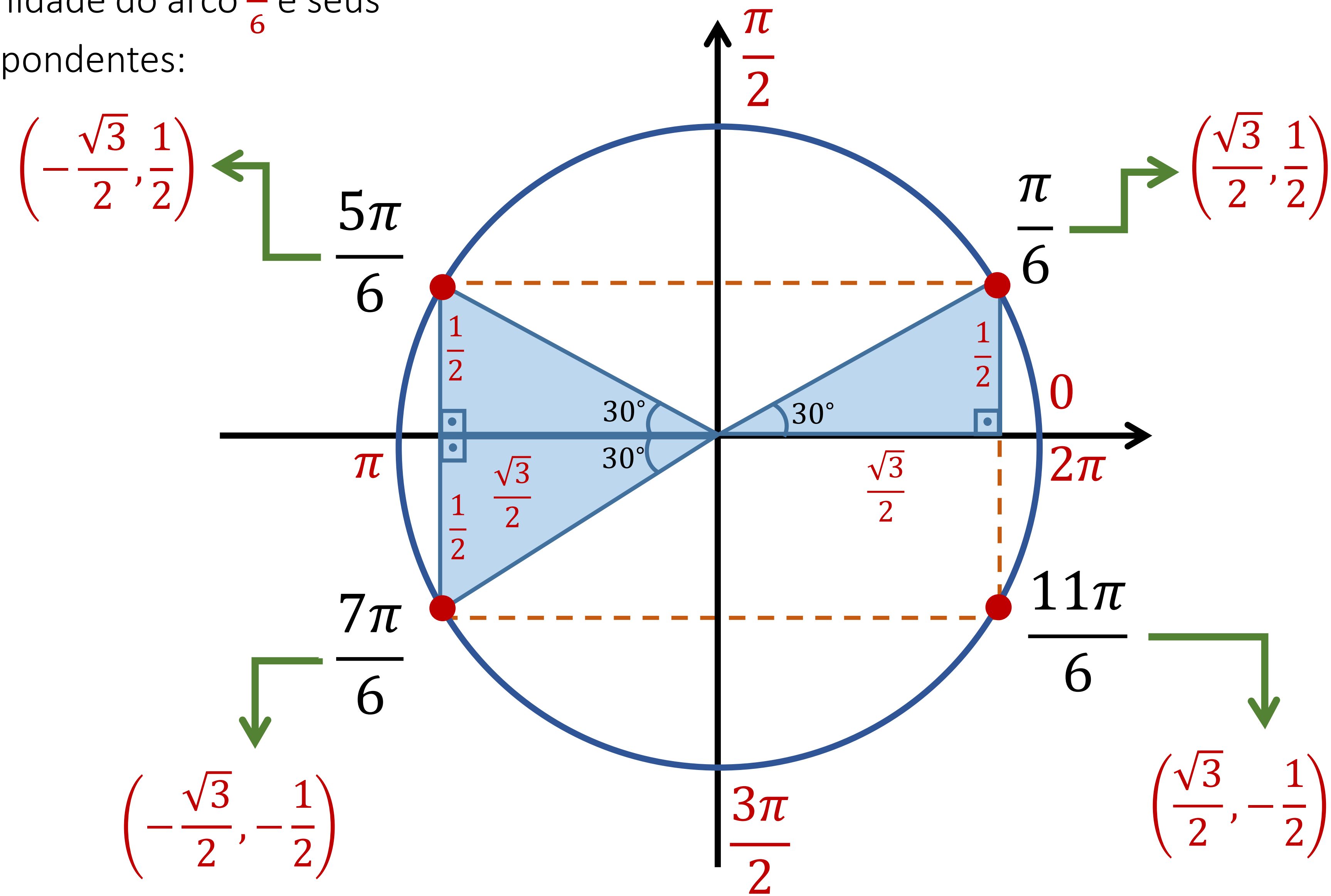


Imagem dos Arcos Especiais no Ciclo

Extremidade do arco $\frac{\pi}{4}$ e seus correspondentes:

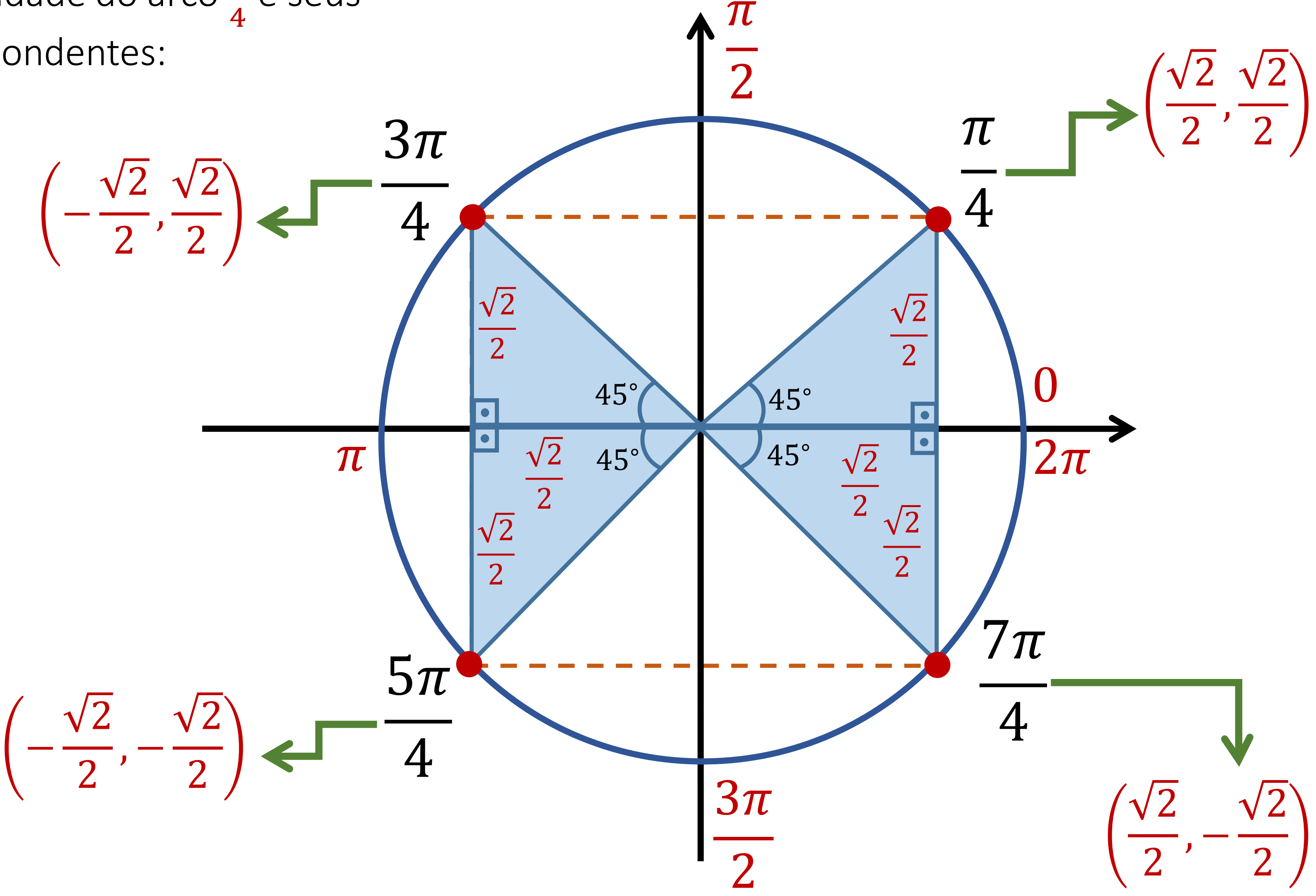
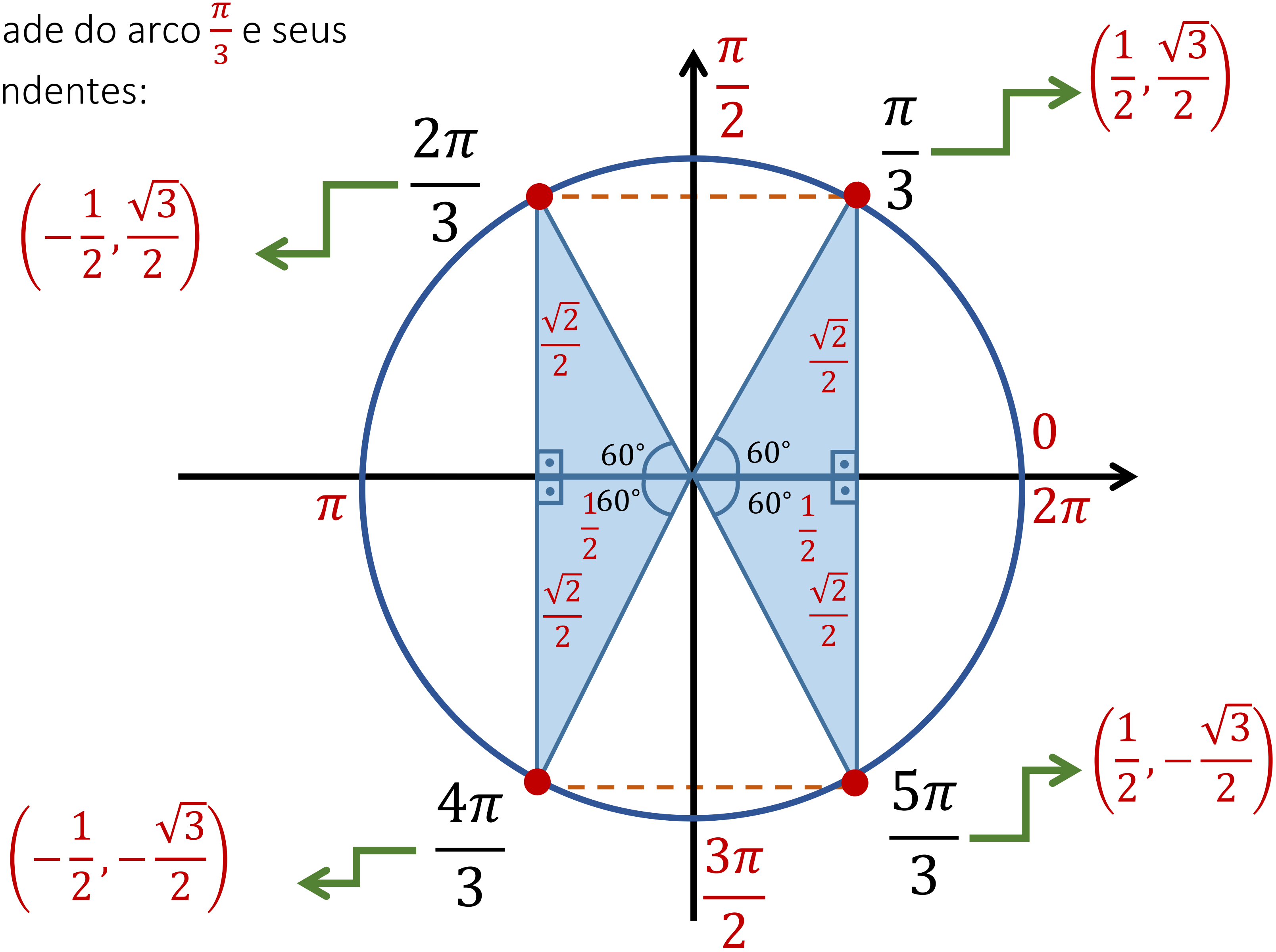


Imagem dos Arcos Especiais no Ciclo

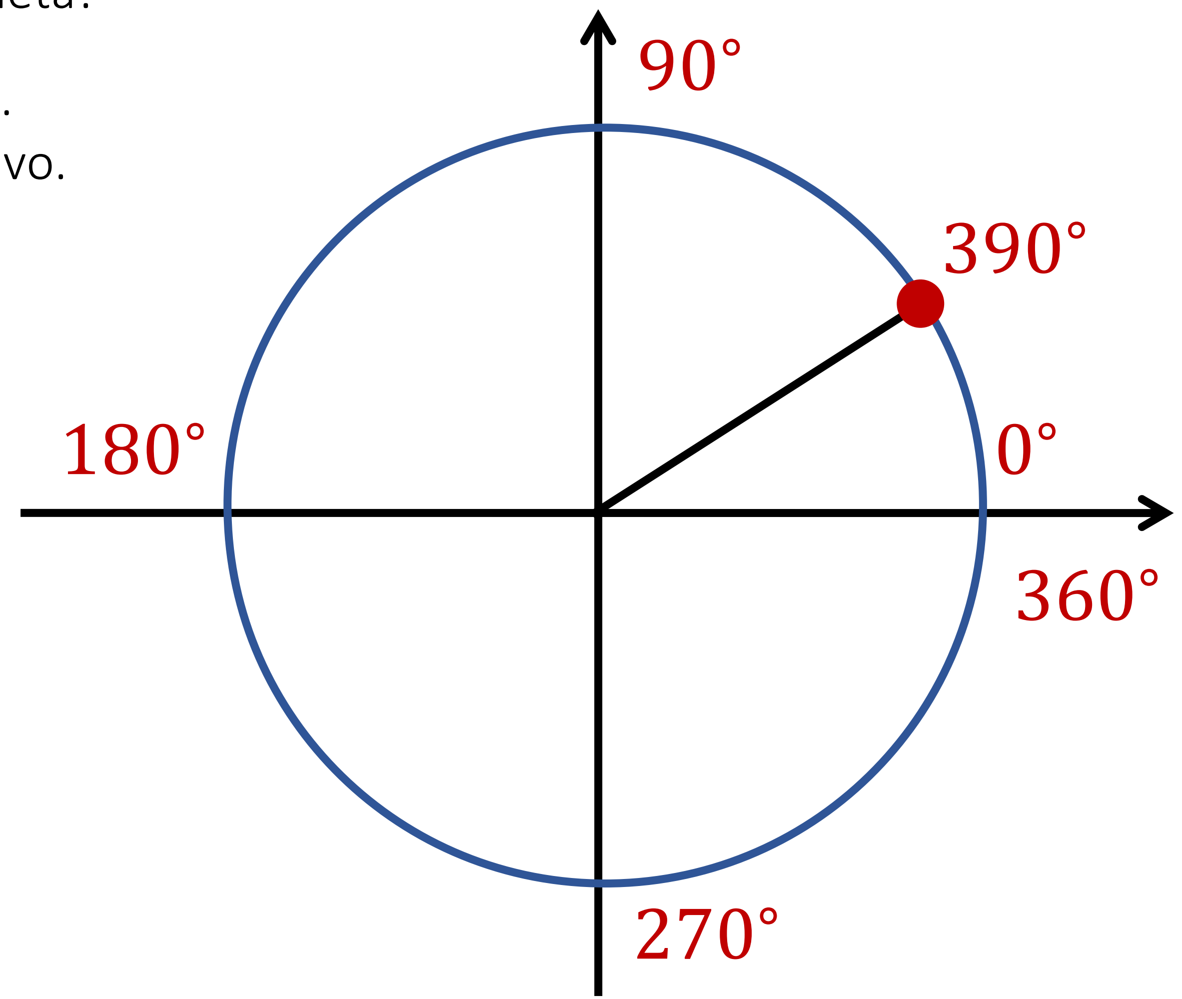
Extremidade do arco $\frac{\pi}{3}$ e seus correspondentes:



Arcos Côngruos

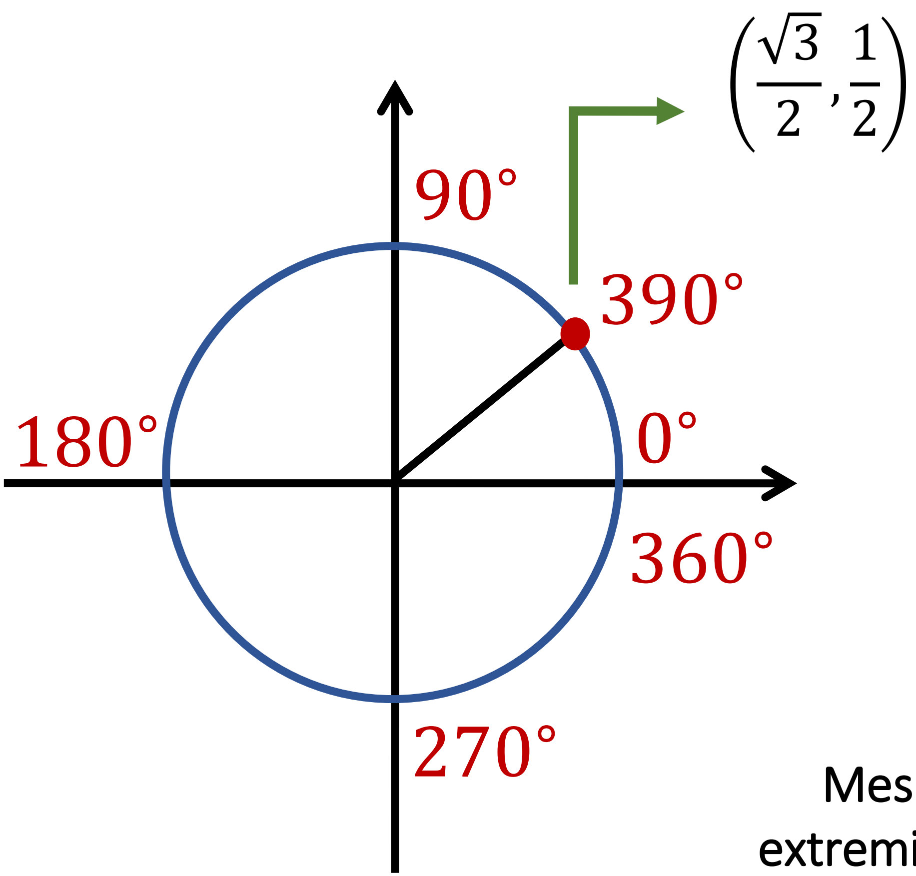
Existem casos em que um arco por de ser maior que uma volta completa!

- ✓ Tanto no sentido positivo.
- ✓ Quanto no sentido negativo.

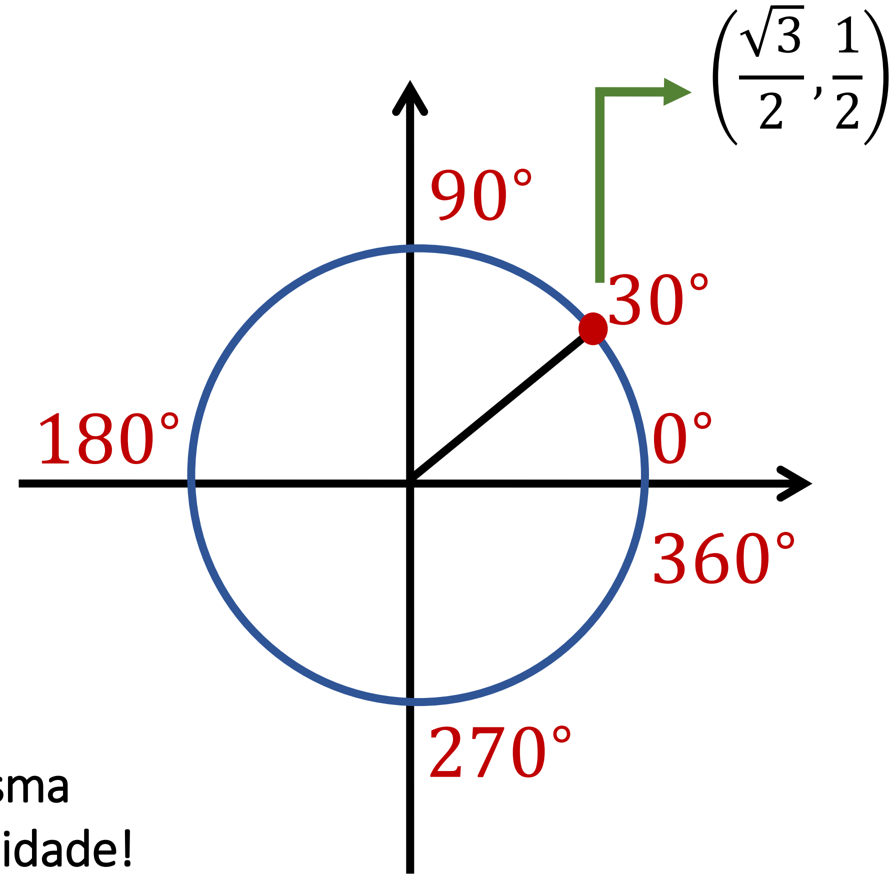


Exemplos

1) Note que o arco de $390°$ equivale a uma volta completa $(360°)$ mais um arco de $30°$.



Mesma extremidade!



Arcos Côngruos

Definição:

Dois arcos α_1 e α_2 são ditos côngruos ou congruentes se ambos possuem a mesma extremidade (mesma abscissa e mesma ordenada) no ciclo trigonométrico.

Ou seja, α_1 e α_2 diferem apenas por um certo número de voltas completas.

A expressão geral que define todos os demais arcos congruentes a α_0 é dada por:

Arcos dados em graus

$$\alpha = \alpha_0 + \underbrace{k}_{\text{Número de voltas completas}} \cdot (360°)$$

Arcos dados em radianos

$$\alpha = \alpha_0 + \underbrace{k}_{\text{Número de voltas completas}} \cdot (2\pi)$$

Exemplos

1) Determine a expressão geral de cada arco dado:

(a) $150°$ (b) $\frac{4\pi}{3}$

Solução:

(a) $150°$

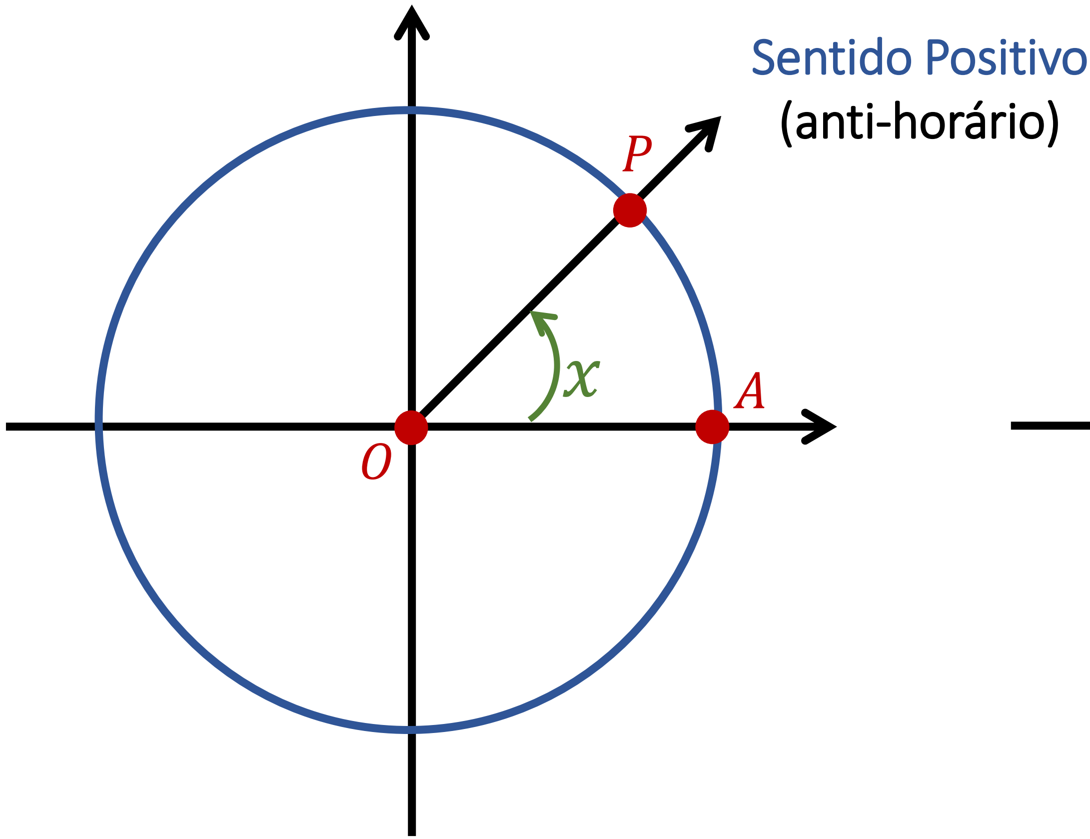
$$\alpha = 150° + k \cdot (360°)$$

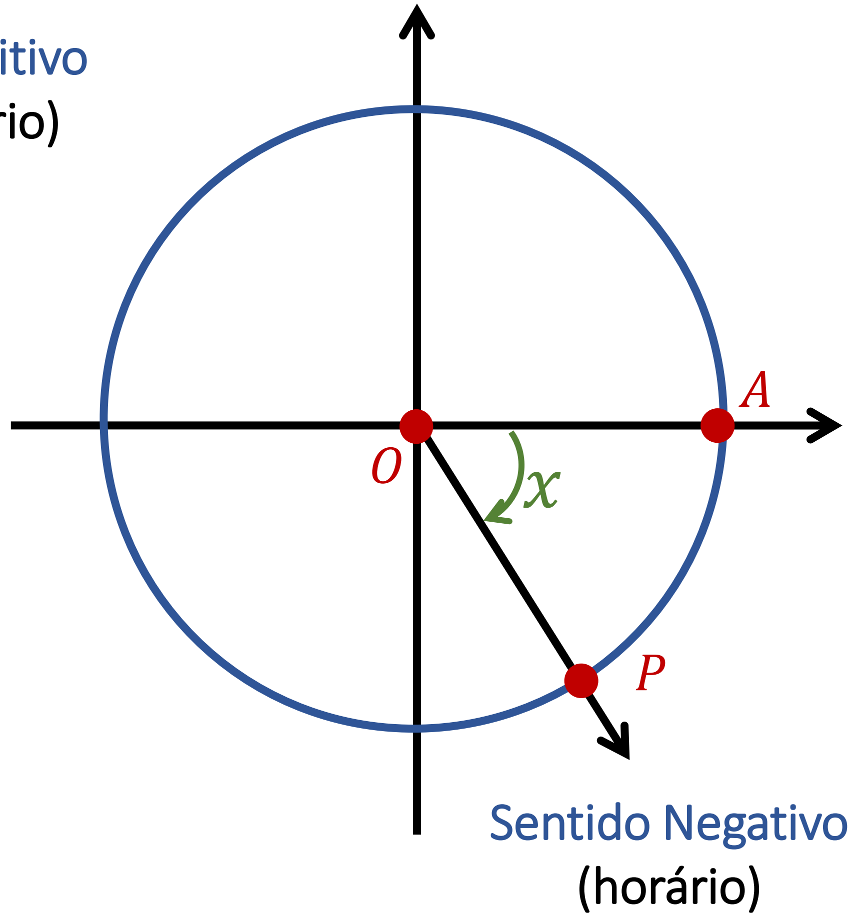
(b) $\frac{4\pi}{3}$

$$\alpha = \frac{4\pi}{3} + k \cdot (2\pi)$$

Voltas no Ciclo Trigonométrico

Fixados os pontos $\boldsymbol{O}$ e $\boldsymbol{A}$, cada ponto $\boldsymbol{P}$ sobre o Ciclo, determina um ângulo $\boldsymbol{x = AOP}$, que pode ser medido nos sentidos positivo ou negativo.





Menor determinação positiva

Definição:

O menor arco congruente a α tal que $0° \leq \alpha < 360°$ (graus) ou $0 \leq \alpha < 2\pi$ (radianos) é chamado de menor determinação positiva.

Menor determinação positiva
$$\mathbf{0° \leq \alpha_0 < 360°}$$

$$\alpha = \alpha_0 + k \cdot (360°)$$

Número de voltas completas

Menor determinação positiva
$$\mathbf{0° \leq \alpha_0 < 2\pi}$$

$$\alpha = \alpha_0 + k \cdot (2\pi)$$

Número de voltas completas

Menor determinação positiva

$$\alpha = \alpha_0 + k \cdot (360°) \qquad\qquad \alpha = \alpha_0 + k \cdot (2\pi)$$

Nas expressões acima, $k \in \mathbb{Z}$.

- ✓ $k > 0$ indica n voltas no sentido anti-horário.

  (sentido positivo do ciclo)

- ✓ $k < 0$ indica n voltas no sentido horário.

  (sentido negativo do ciclo)

A menor determinação positiva de um arco α é encontrada da seguinte maneira:

Menor determinação positiva

Se $\alpha > 0$ temos que o o ponto deu n voltas no sentido anti-horário, ou seja, no sentido positivo!

Logo:

Uma volta completa.

$$\begin{array}{r|l} \alpha & 360° \\ \hline -k.(360°) & k \\ \hline \alpha_0 & \end{array}$$

Número de voltas completas.

Menor determinação positiva.

Menor determinação positiva

Se $\alpha > 0$ temos que o o ponto deu n voltas no sentido anti-horário, ou seja, no sentido positivo!

Logo:

$$\begin{array}{r|l} \alpha & 2\pi \\ \hline -k.(2\pi) & k \\ \hline \alpha_0 & \end{array}$$

Uma volta completa.

Número de voltas completas.

Menor determinação positiva.

Menor determinação positiva

A menor determinação positiva de um arco α é encontrada da seguinte maneira:

Se $\alpha < 0$ temos que o número o ponto deu n voltas no sentido horário, ou seja, no sentido negativo!

Logo:

Fazemos a soma, até obtermos um arco positivo.

$\alpha + 360°$ ou $\alpha + 2\pi$

Exemplos

2) Encontre a menor determinação positiva do arco:

(a) $390°$ (b) $840°$ (c) $-1024°$ (d) $-\frac{21\pi}{4}$

Solução:

(a) $390°$

$$\begin{array}{r|l} 390° & 360° \\ \hline -360° & 1 \\ \hline 30° & \end{array}$$

Logo, $390° = 30° + 1 \cdot (360°)$

Portanto a menor determinação positiva de $390°$ será $30°$.

(b) $840°$

$$\begin{array}{r|l} 840° & 360° \\ \hline -720° & 2 \\ \hline 120° & \end{array}$$

Logo, $840° = 120° + 2 \cdot (360°)$

Portanto a menor determinação positiva de $840°$ será $120°$.

Exemplos

2) Encontre a menor determinação positiva do arco:

(a) $390°$ (b) $840°$ (c) $-1024°$ (d) $-\frac{21\pi}{4}$

Solução:

(c) $-1024°$

$$-1024° + 360° = -664°$$

$$\Rightarrow -664° + 360° = -304°$$

$$\Rightarrow -304° + 360° = 56°$$

Portanto a menor determinação positiva de $-1024°$ será $56°$.

(d) $-\frac{21\pi}{4}$

$$-\frac{21\pi}{4} + 2\pi = \frac{-21\pi + 8\pi}{4} = -\frac{13\pi}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{13\pi}{4} + 2\pi = \frac{-13\pi + 8\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4}$$

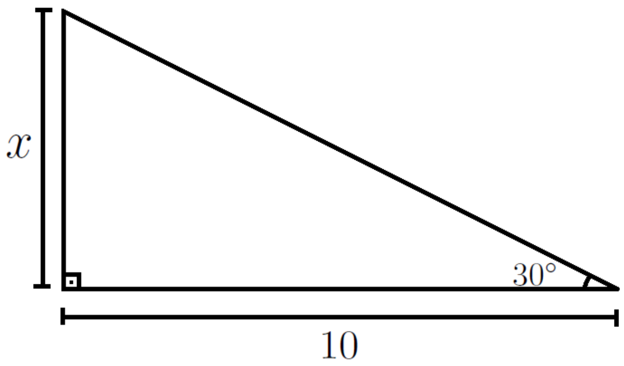
$$\Rightarrow -\frac{5\pi}{4} + 2\pi = \frac{-5\pi + 8\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

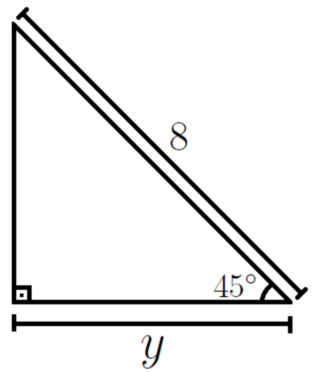
Portanto a menor determinação positiva de $-\frac{21\pi}{4}$ será $\frac{3\pi}{4}$.

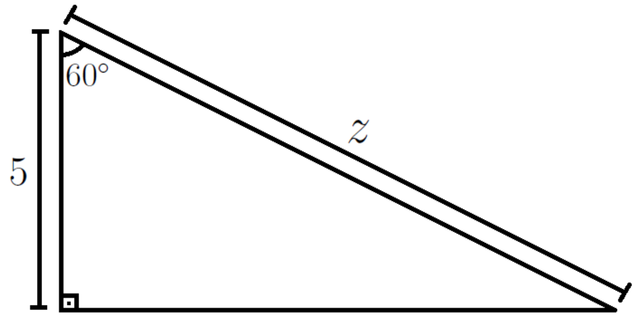
Exercícios Propostos

Exercícios

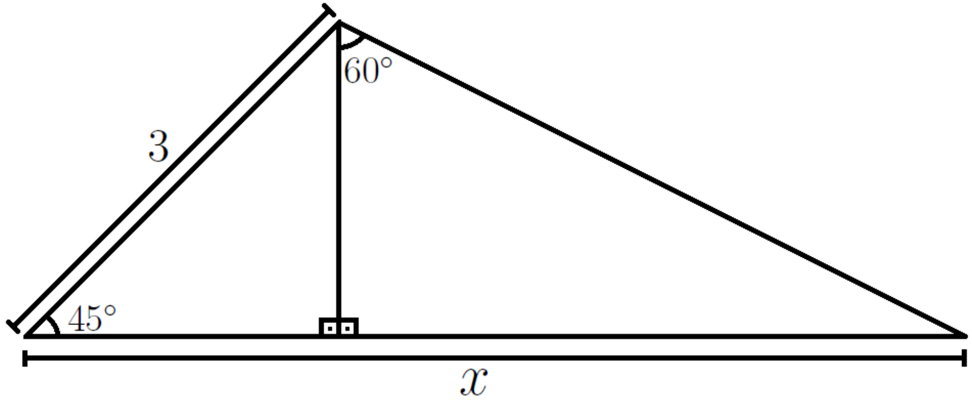
1) Em cada caso, determine os valores de x, y e z.







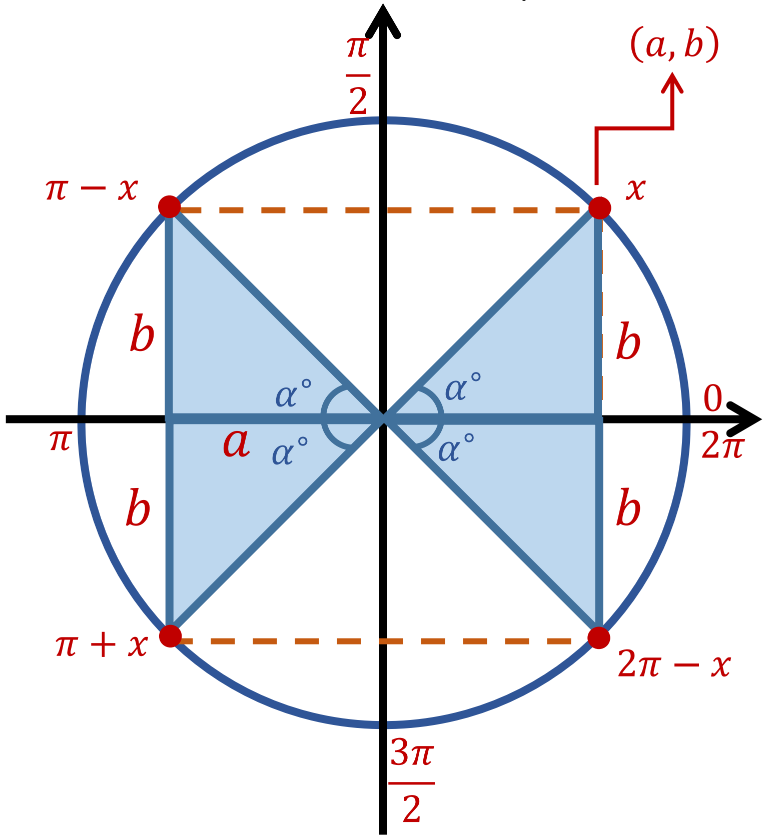
2) Determine o valor de x.



Exercícios

3) Considerando o arco x representado no ciclo trigonométrico abaixo, determine e represente no ciclo os arcos e as respectivas coordenadas correspondentes ao arco x nos demais quadrantes:

$$x \longrightarrow (a, b)$$



4) Em cada caso, encontre a menor determinação positiva do arco dado.

(a) $2205°$ (b) $-840°$ (c) $-1440°$ (d) 9π (e) $-\dfrac{37\pi}{3}$

Respostas

Exercício 1:

$$x = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

$$y = 4\sqrt{2}$$

$$z = 10$$

Exercício 2:

$$x = \frac{3\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{3})$$

Exercício 3:

a) $45°$

b) $240°$

c) 0

d) π

e) $\frac{5\pi}{3}$

Exercício 3:

Correspondente de x no segundo quadrante

$$\pi - x \longrightarrow (-a, b)$$

Correspondente de x no terceiro quadrante

$$\pi + x \longrightarrow (-a, -b)$$

Correspondente de x no quarto quadrante

$$2\pi - x \longrightarrow (a, -b)$$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA

O GAMA possui monitorias de:

- **Matemática Elementar, Cálulo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e equivalentes)
- **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
- **Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3** (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino

Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas

Aula 02

Projeto

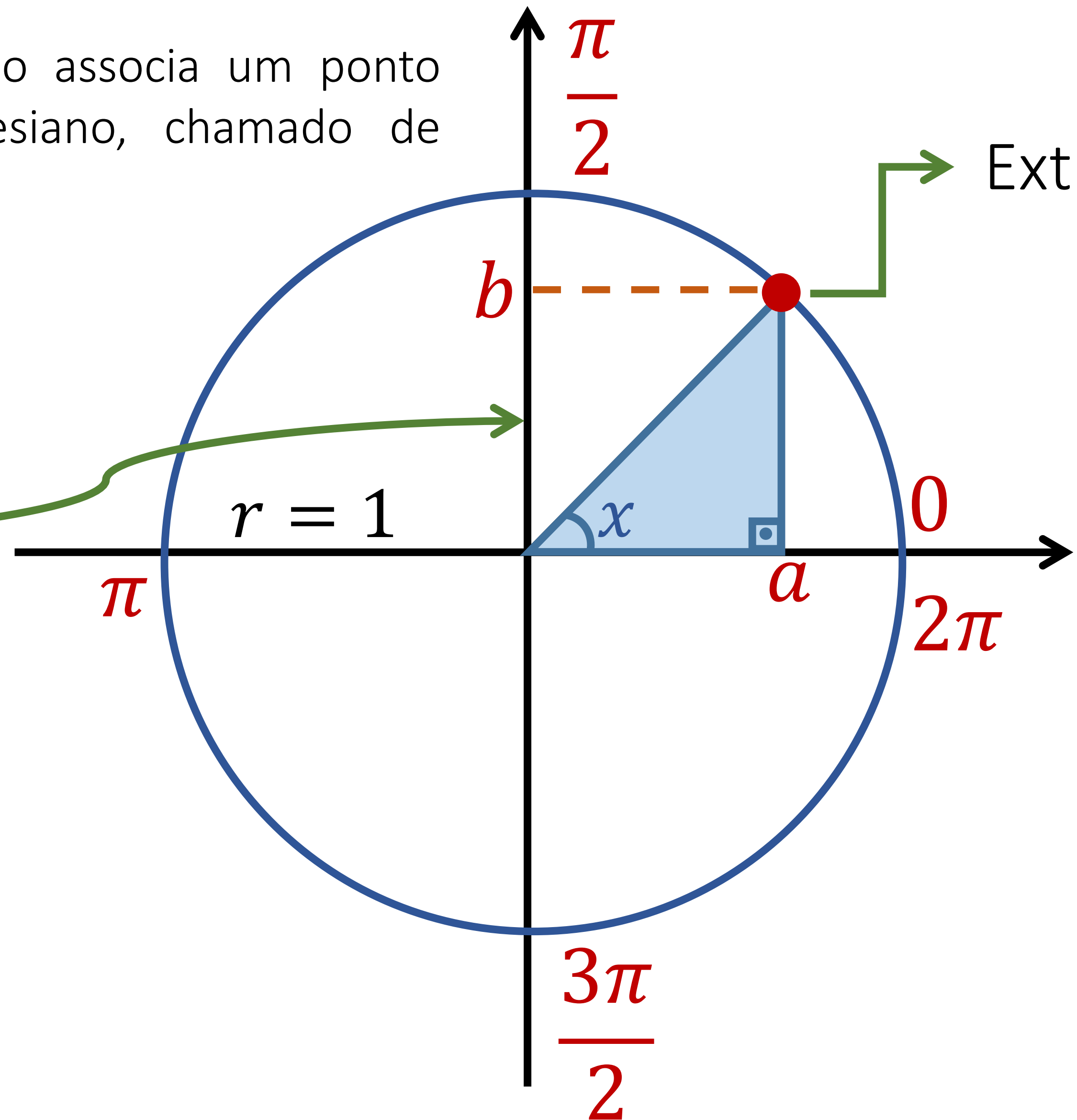
GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Seno e Cosseno no Ciclo Trigonométrico

Lembrando...

Para cada arco x, o ciclo associa um ponto $P(a, b)$ do plano cartesiano, chamado de extremidade do arco x.



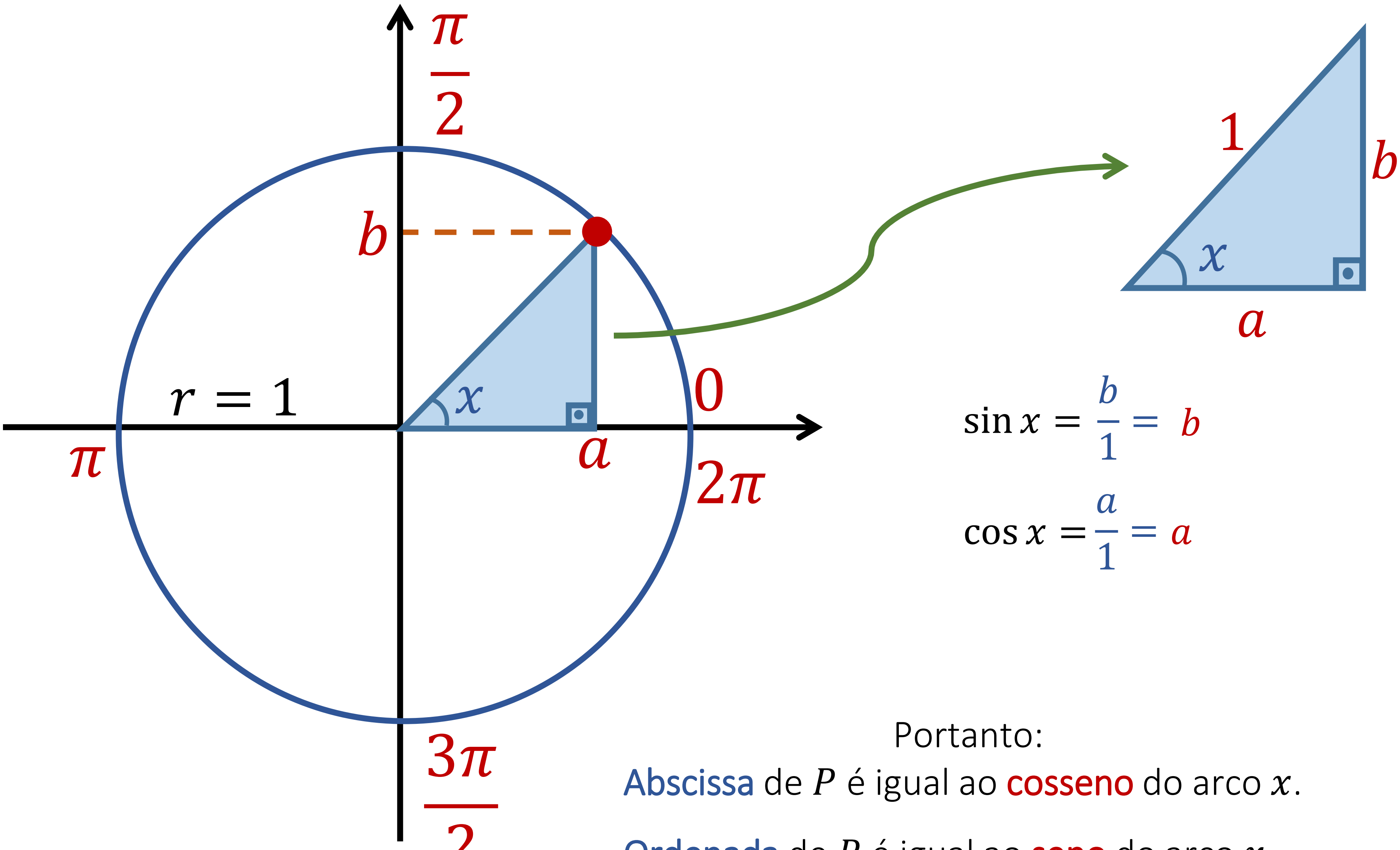
$P(a,$

Extremida

arco

Logo

Seno e Cosseno no Ciclo Trigonométrico



$$\sin x = \frac{b}{1} = b$$

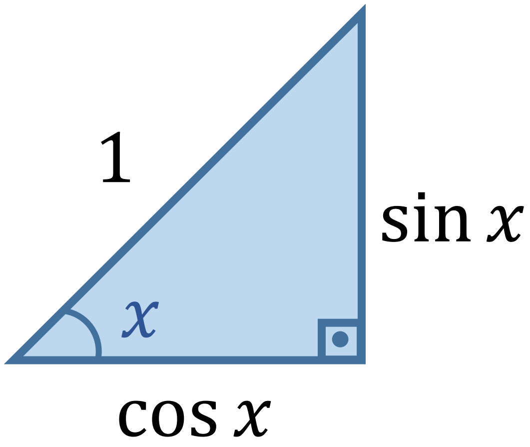
$$\cos x = \frac{a}{1} = a$$

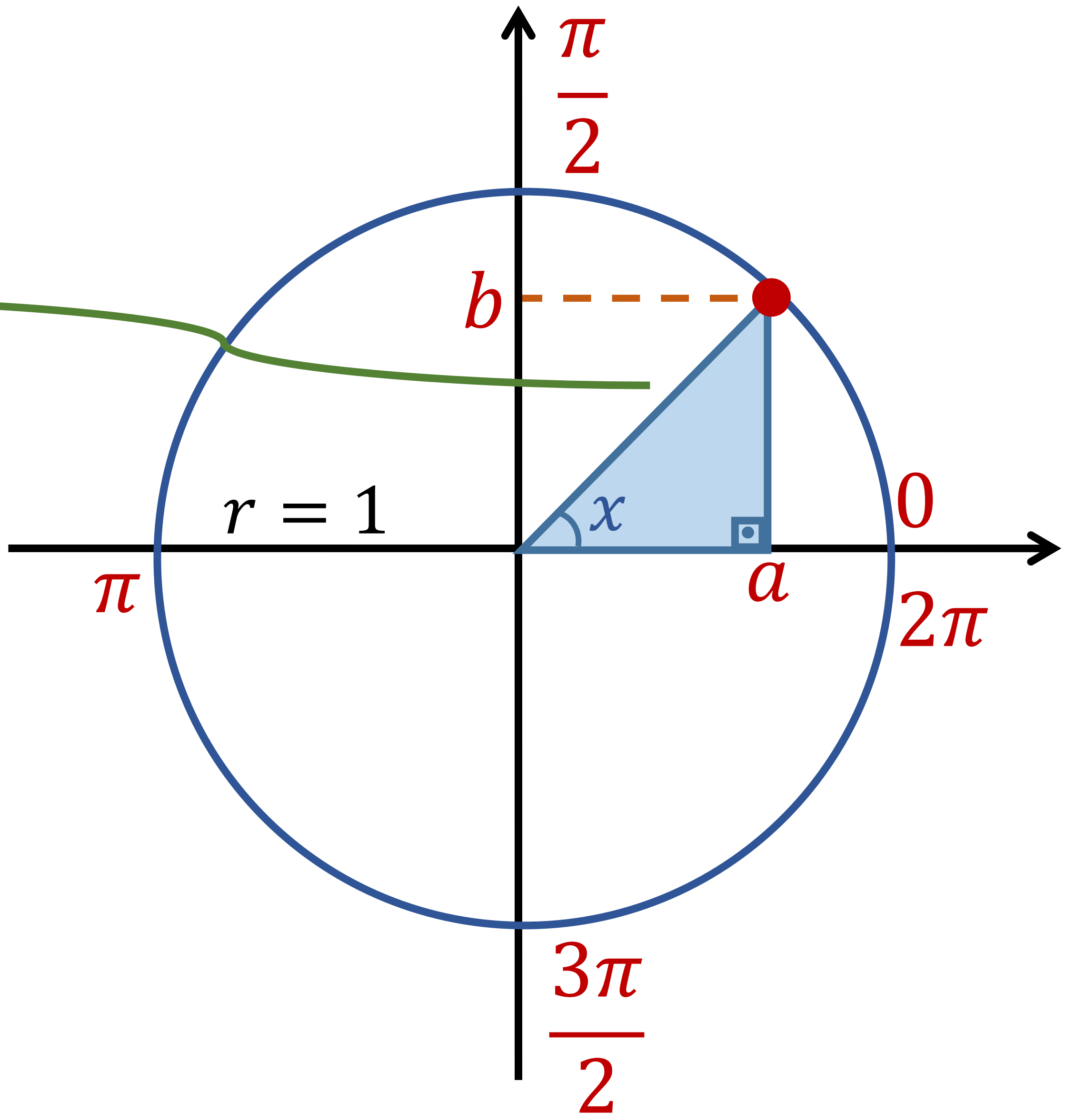
Portanto:

Abscissa de P é igual ao cosseno do arco x.

Ordenada de P é igual ao seno do arco x.

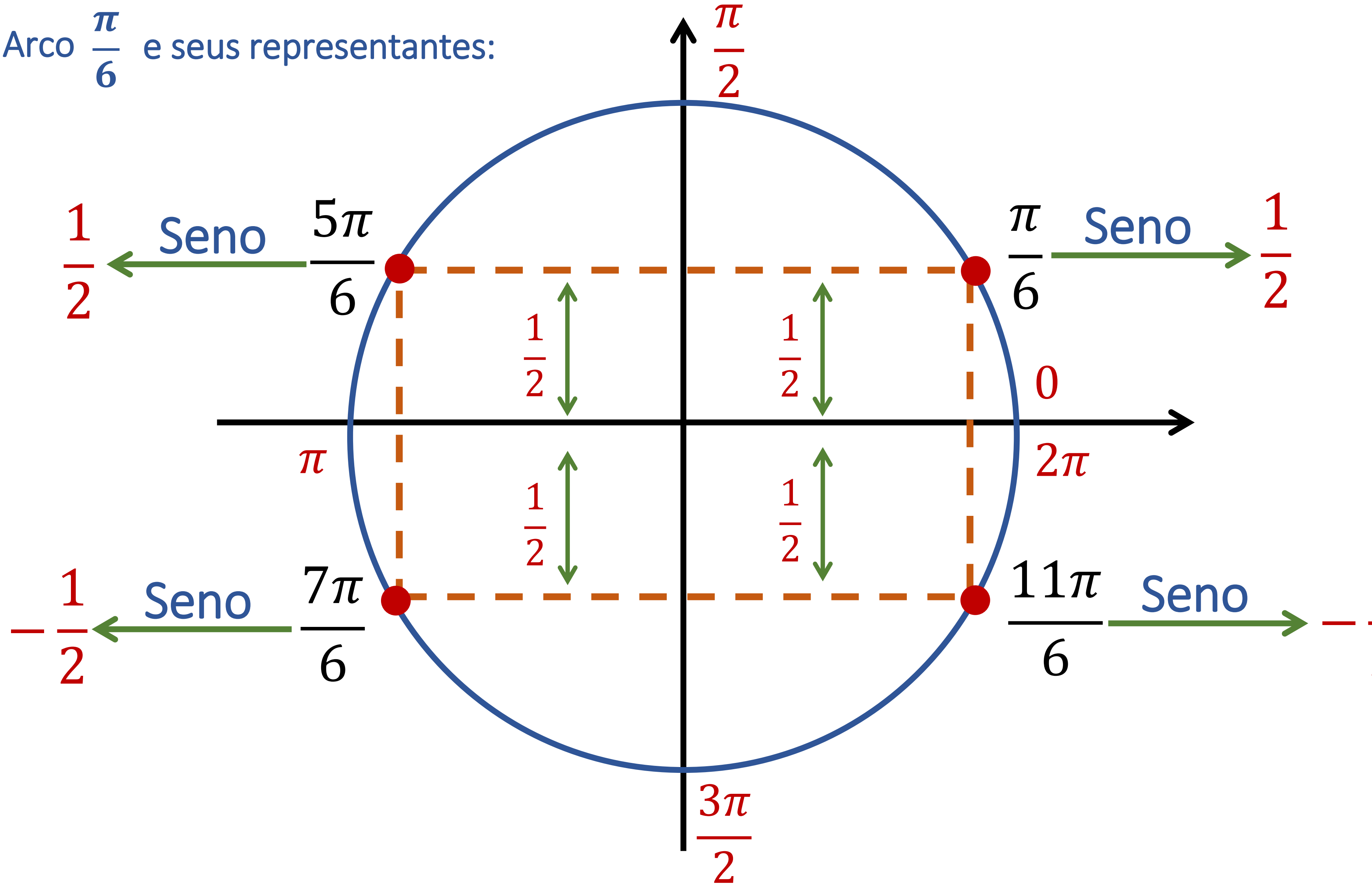
Seno e Cosseno no Ciclo Trigonométrico





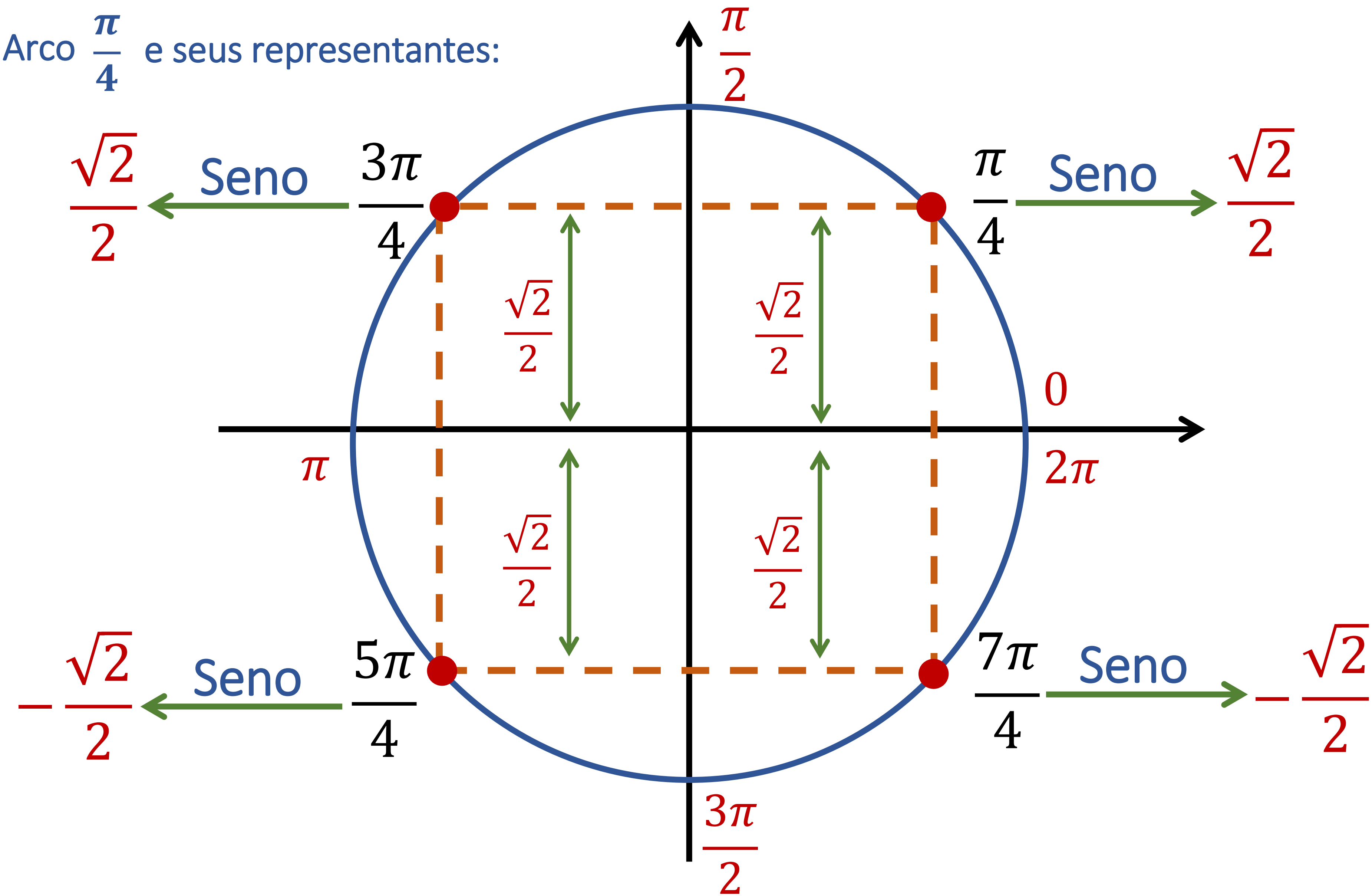
Seno dos arcos notáveis

Arco $\frac{\pi}{6}$ e seus representantes:



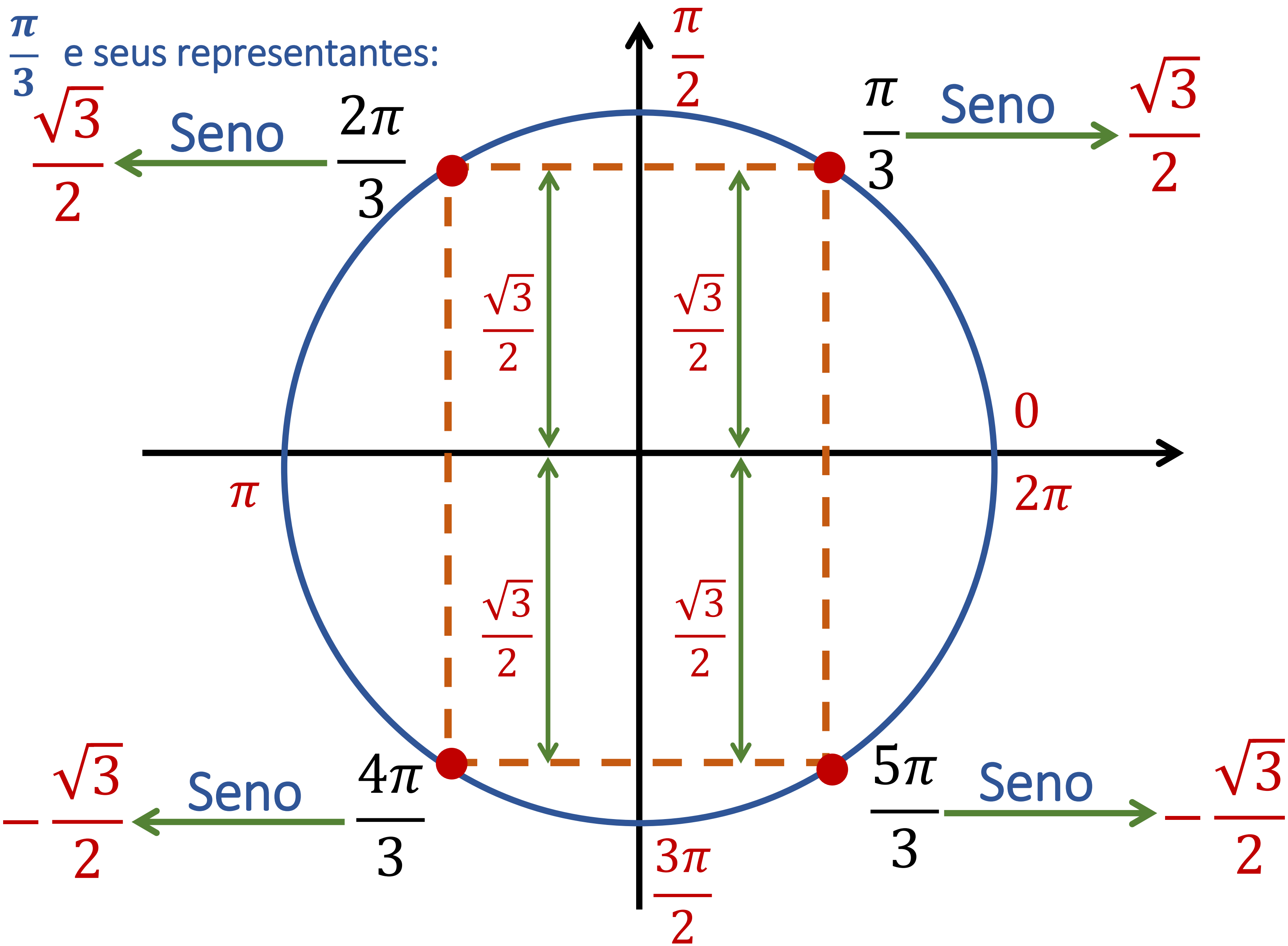
Seno dos arcos notáveis

Arco $\frac{\pi}{4}$ e seus representantes:



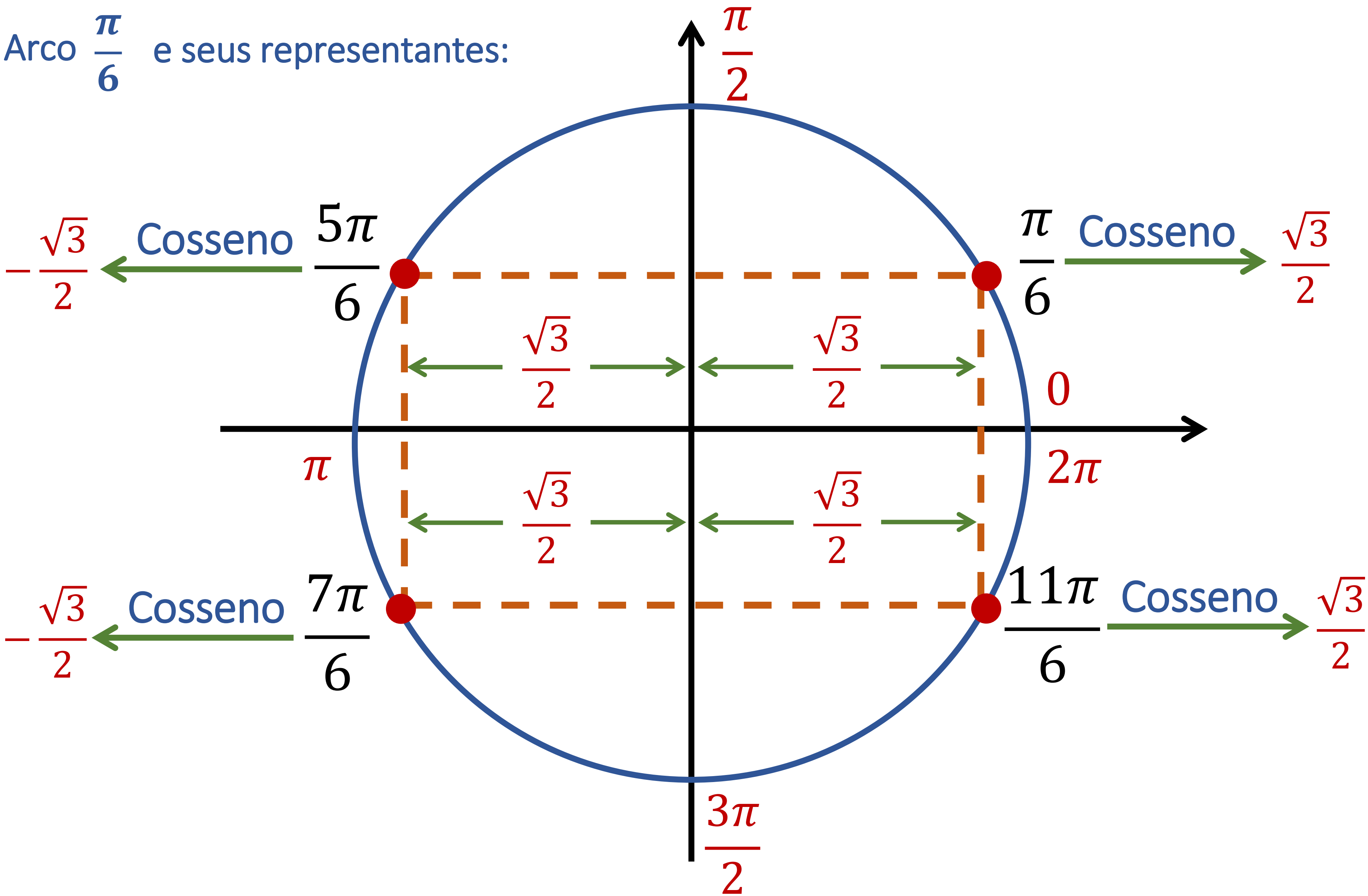
Seno dos arcos notáveis

Arco $\frac{\pi}{3}$ e seus representantes:



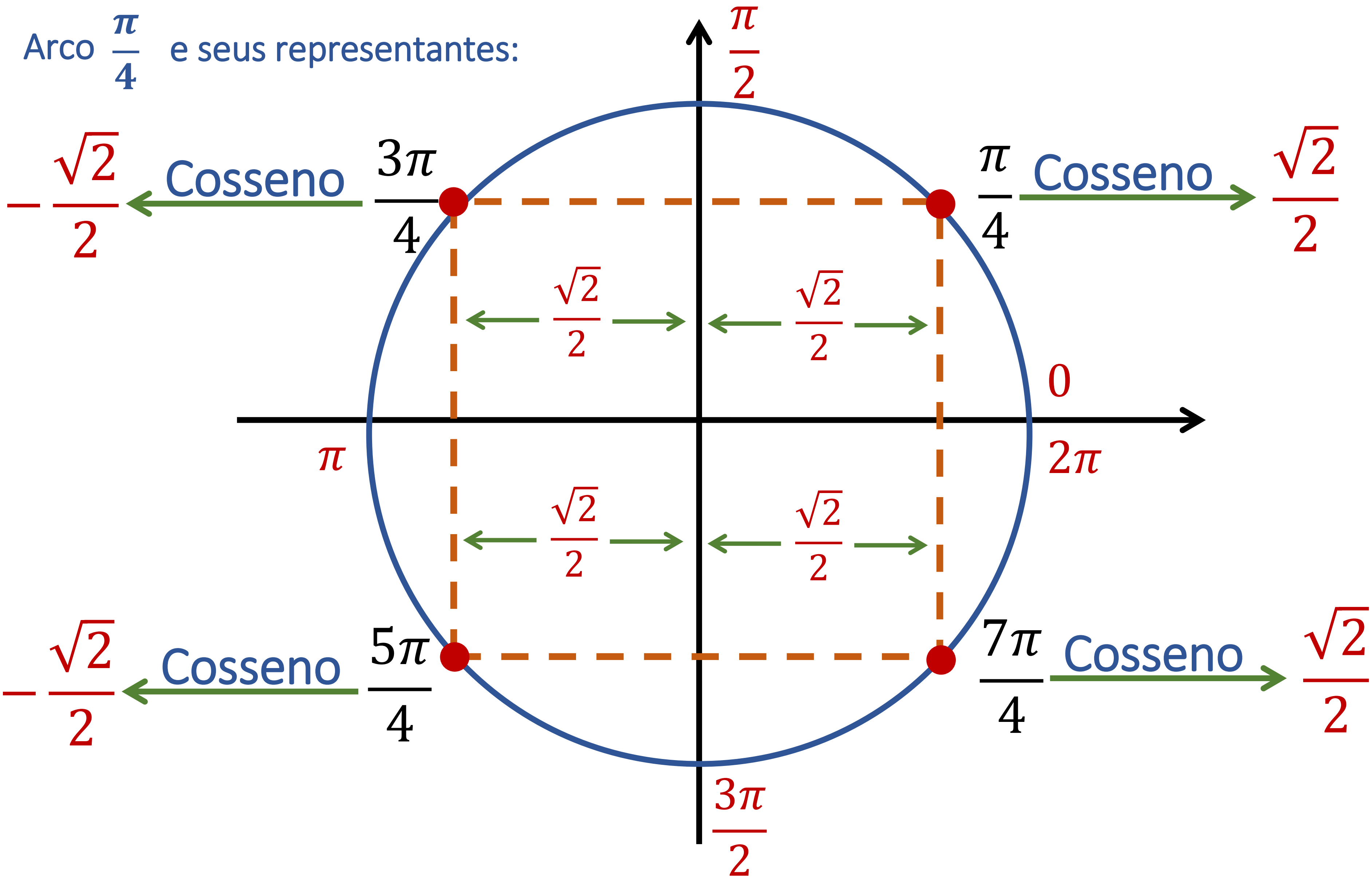
Cosseno dos arcos notáveis

Arco $\frac{\pi}{6}$ e seus representantes:



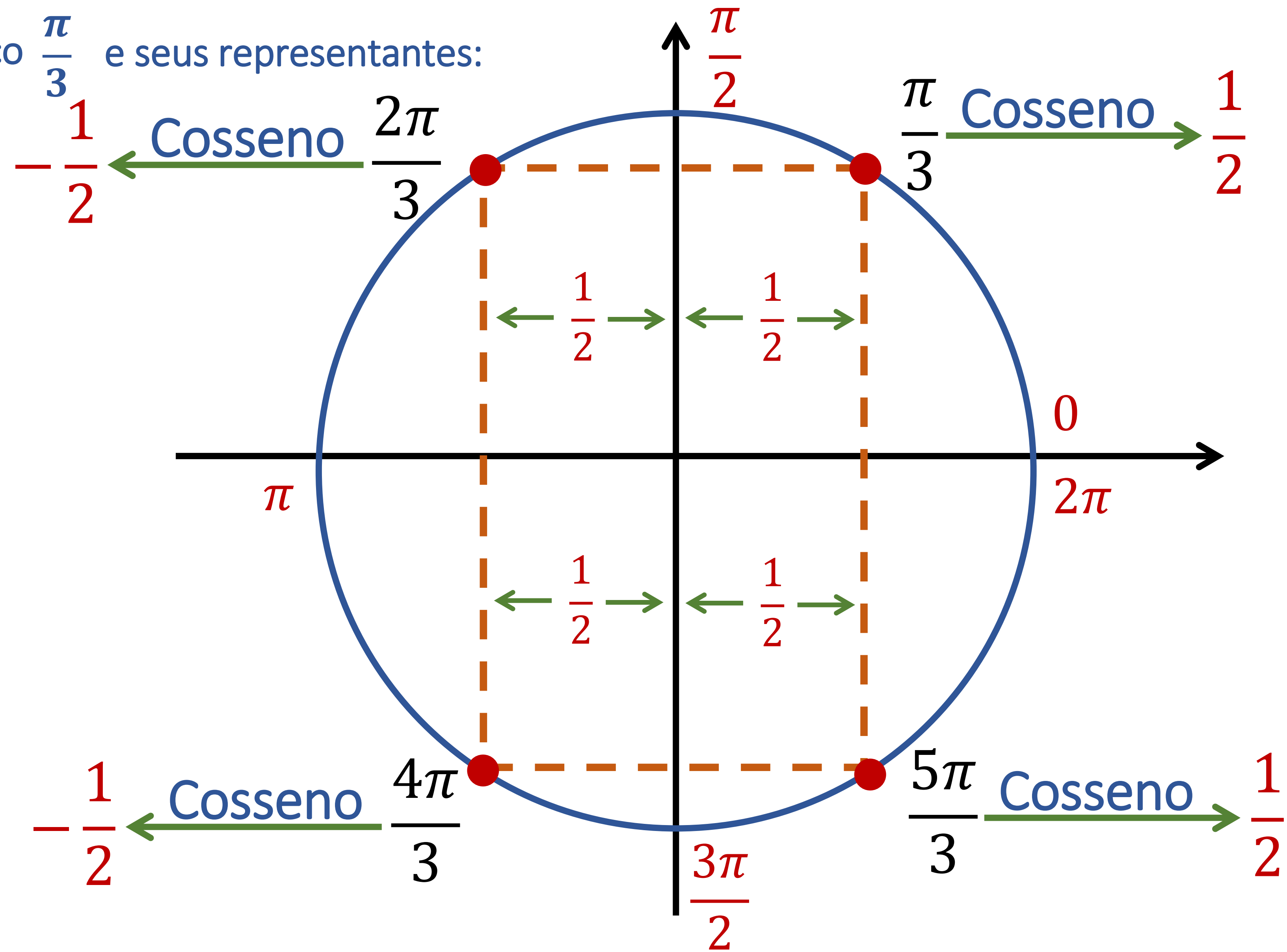
Cosseno dos arcos notáveis

Arco $\frac{\pi}{4}$ e seus representantes:

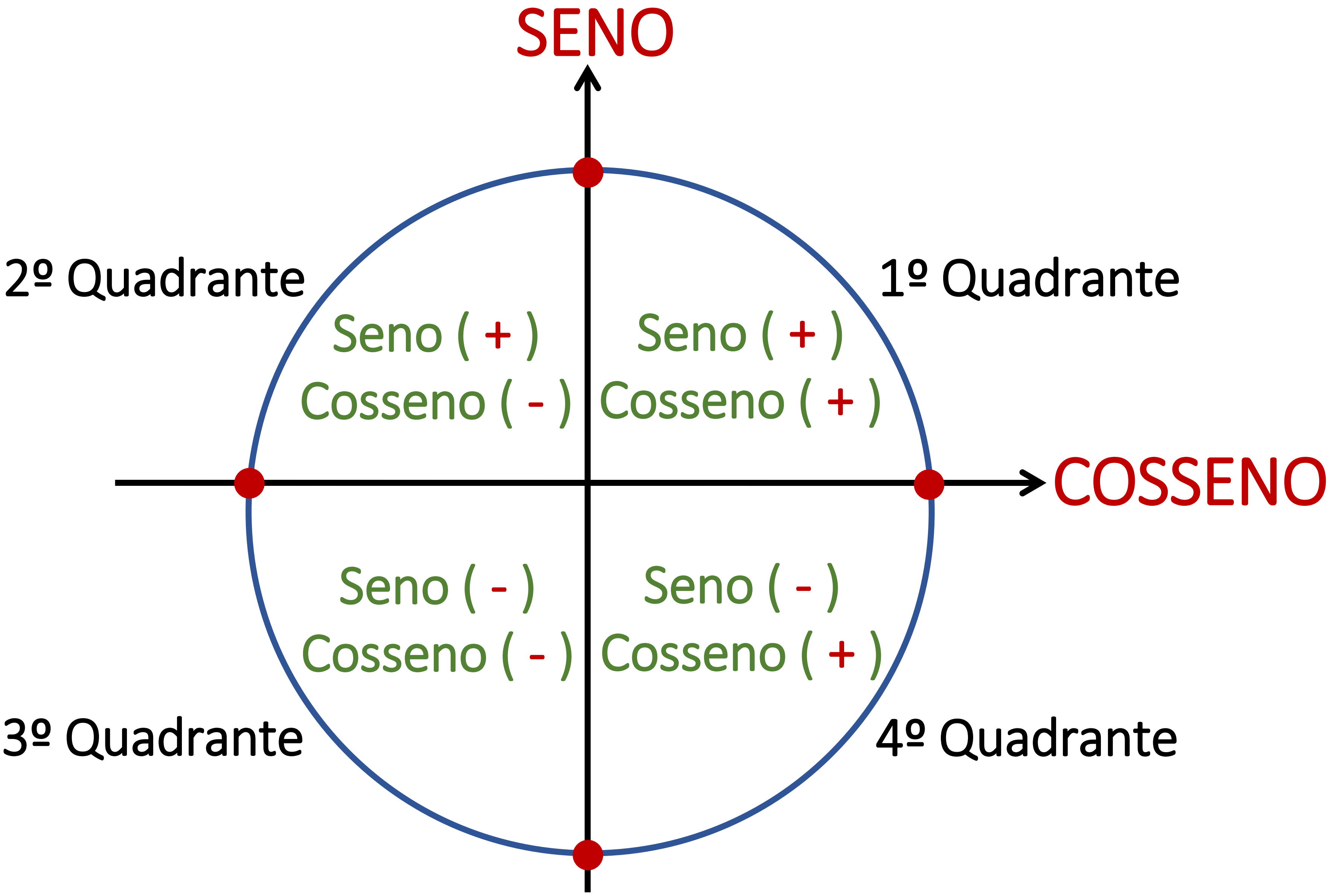


Cosseno dos arcos notáveis

Arco $\frac{\pi}{3}$ e seus representantes:



Sinais do Seno e do Cosseno



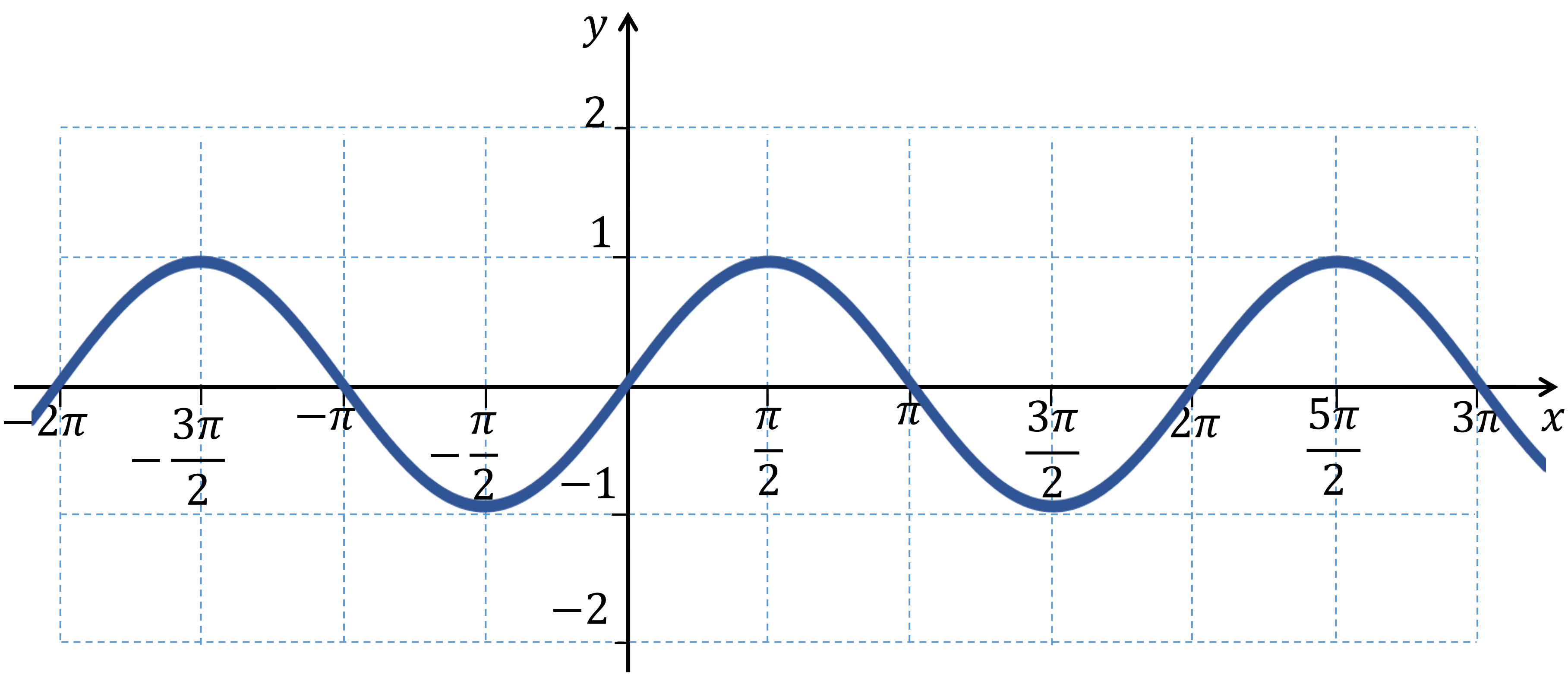
Função Seno

Definição:

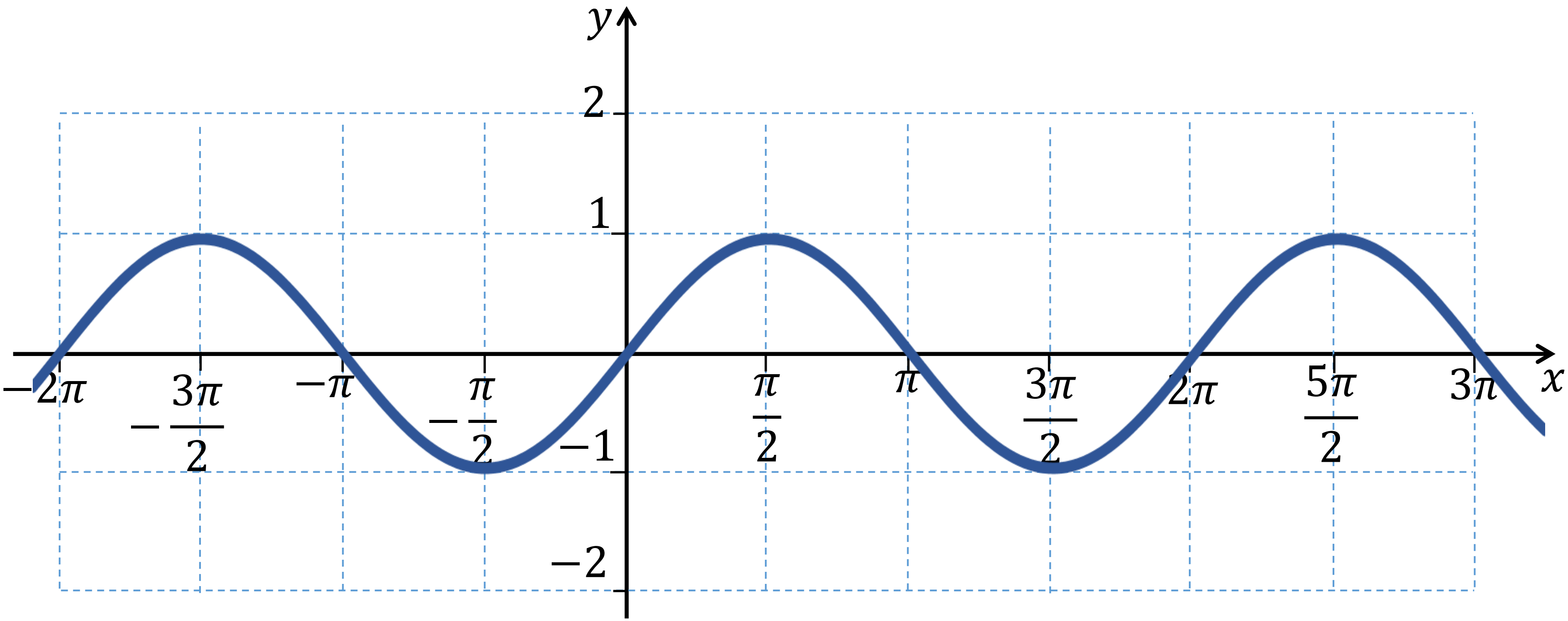
A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sin x$ é chamada de função seno.

Gráfico da função seno

$y = \sin x$



Função Seno



Domínio

$$D(f) = \mathbb{R}$$

Imagem

$$Im(f) = [-1,1]$$

Período

$$P(f) = 2\pi$$

Função Seno

1º quadrante:

- ✓Função positiva.
- ✓Função crescente.

2º quadrante:

- ✓Função positiva.
- ✓Função decrescente.

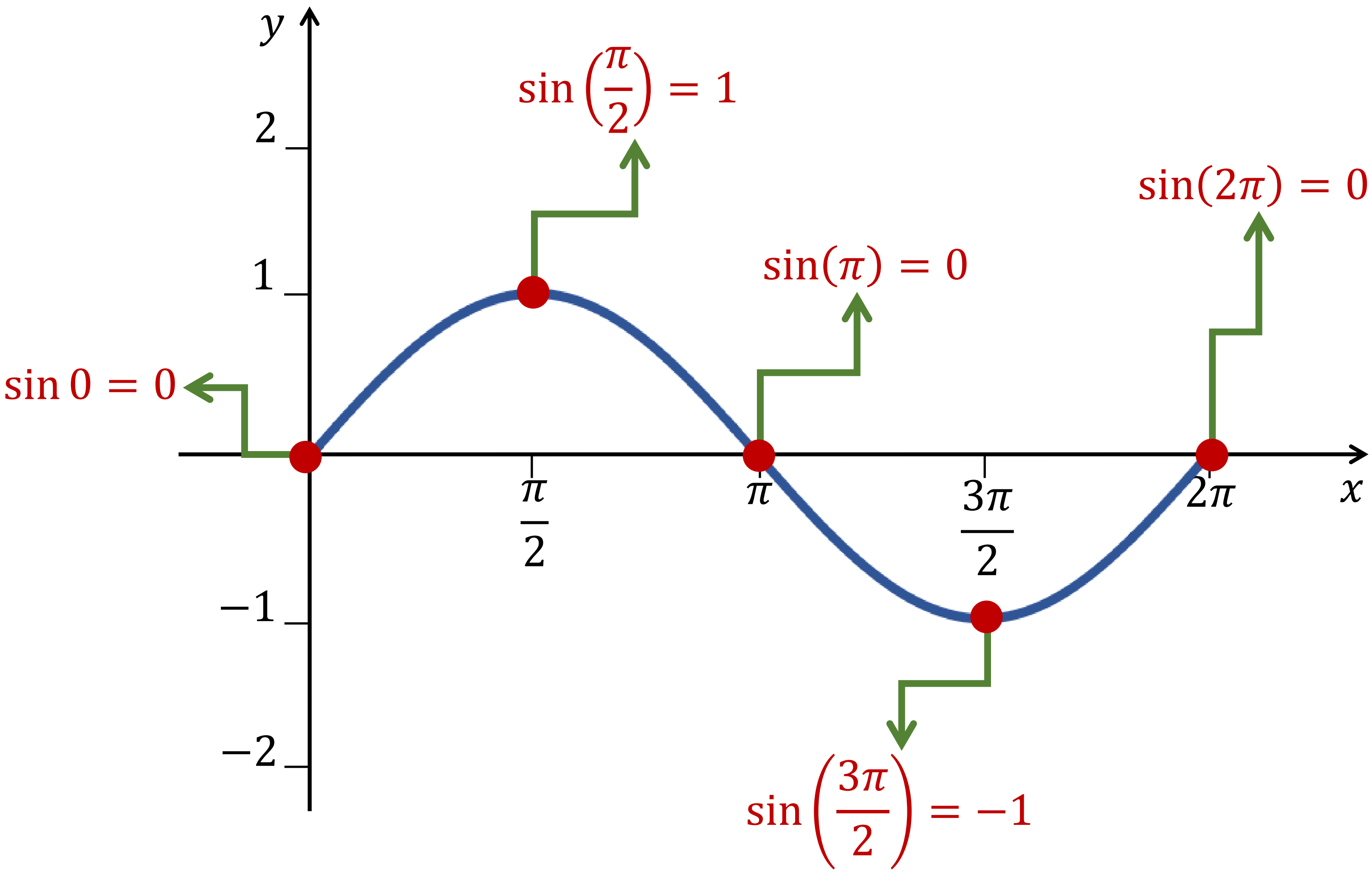
3º quadrante:

- ✓Função negativa.
- ✓Função decrescente.

4º quadrante:

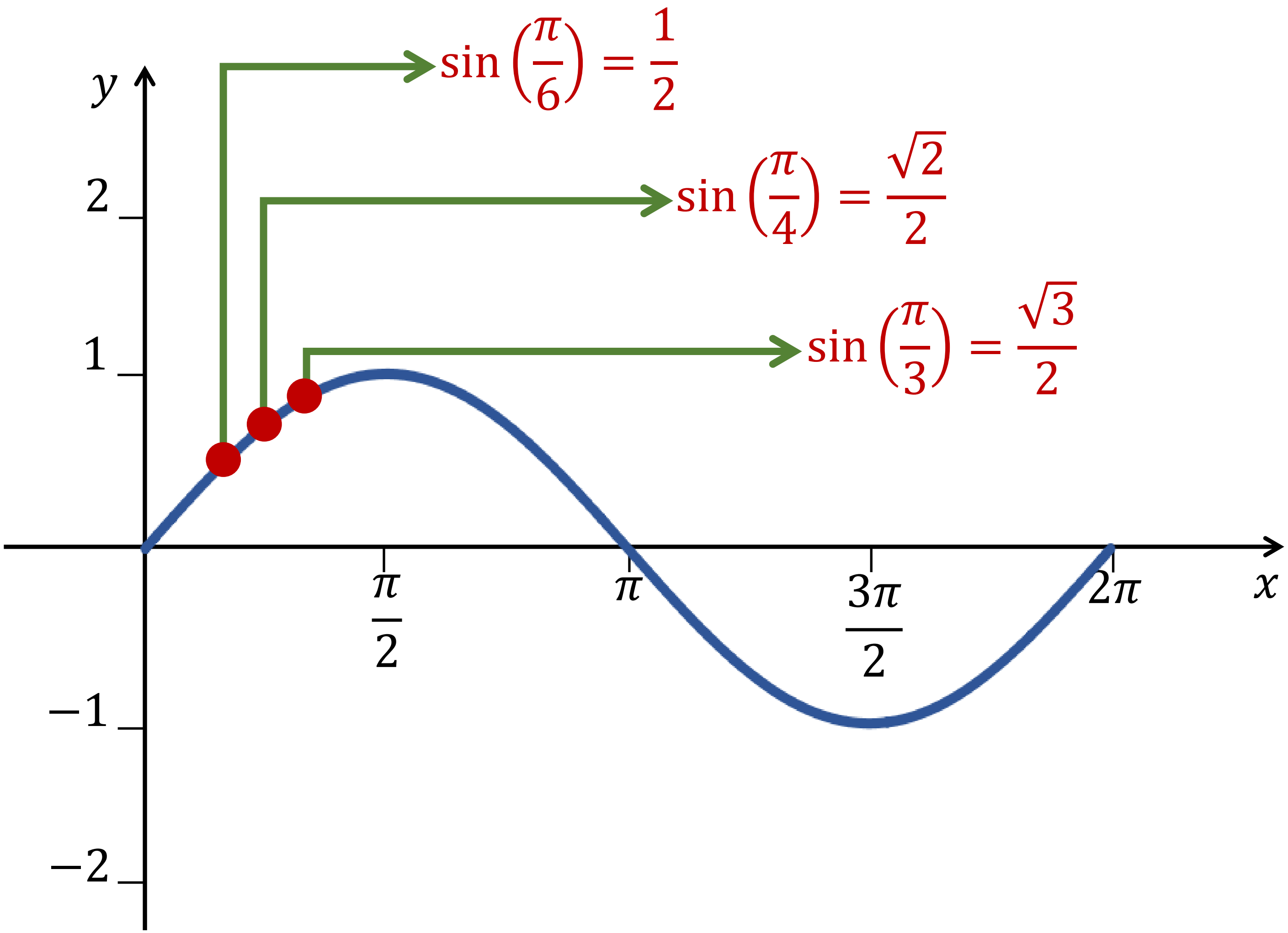
- ✓Função negativa.
- ✓Função crescente.

Função Seno

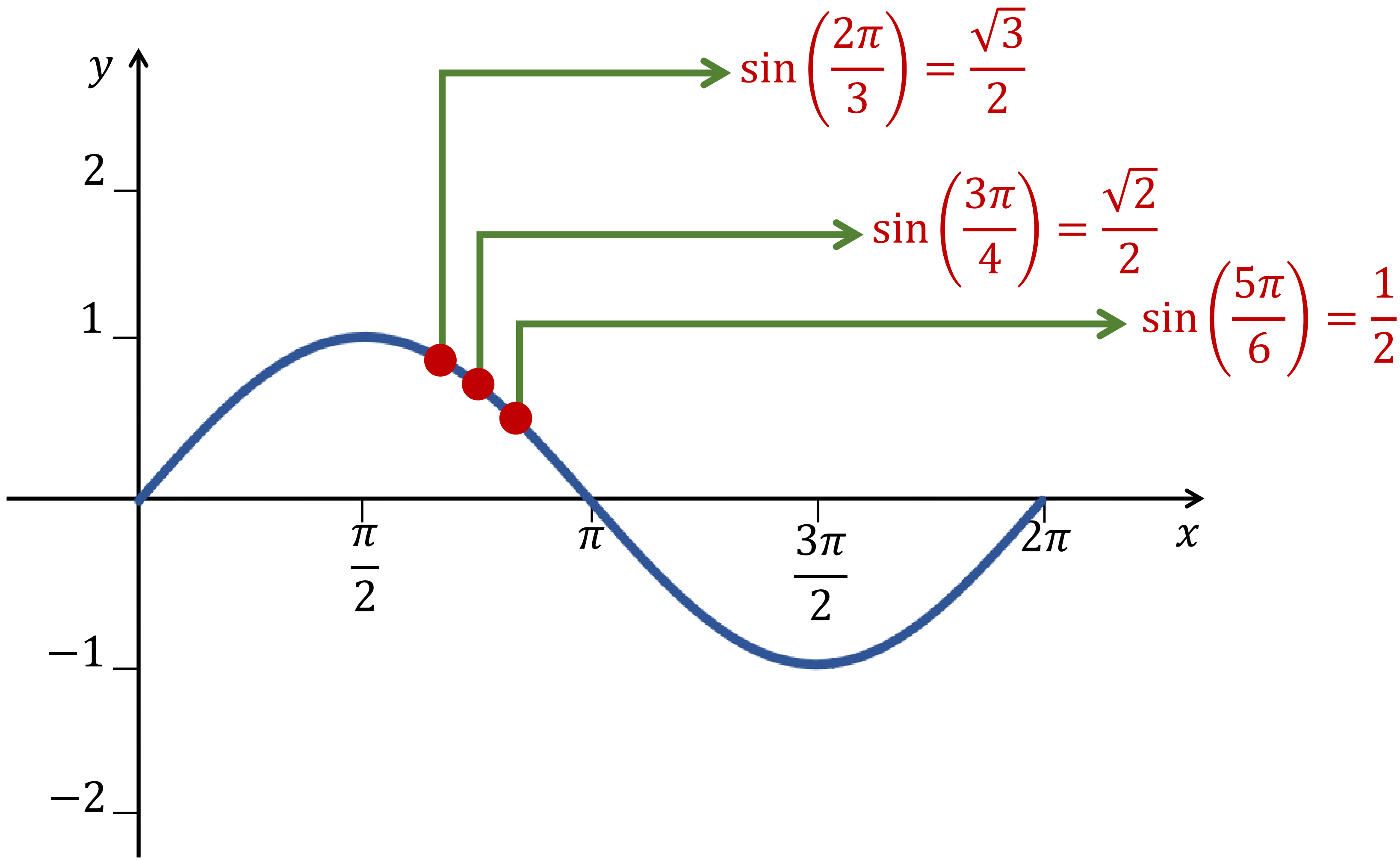


y
2
1
-1
-2
x
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
$\sin 0 = 0$
$\sin(\pi) = 0$
$\sin(2\pi) = 0$
$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

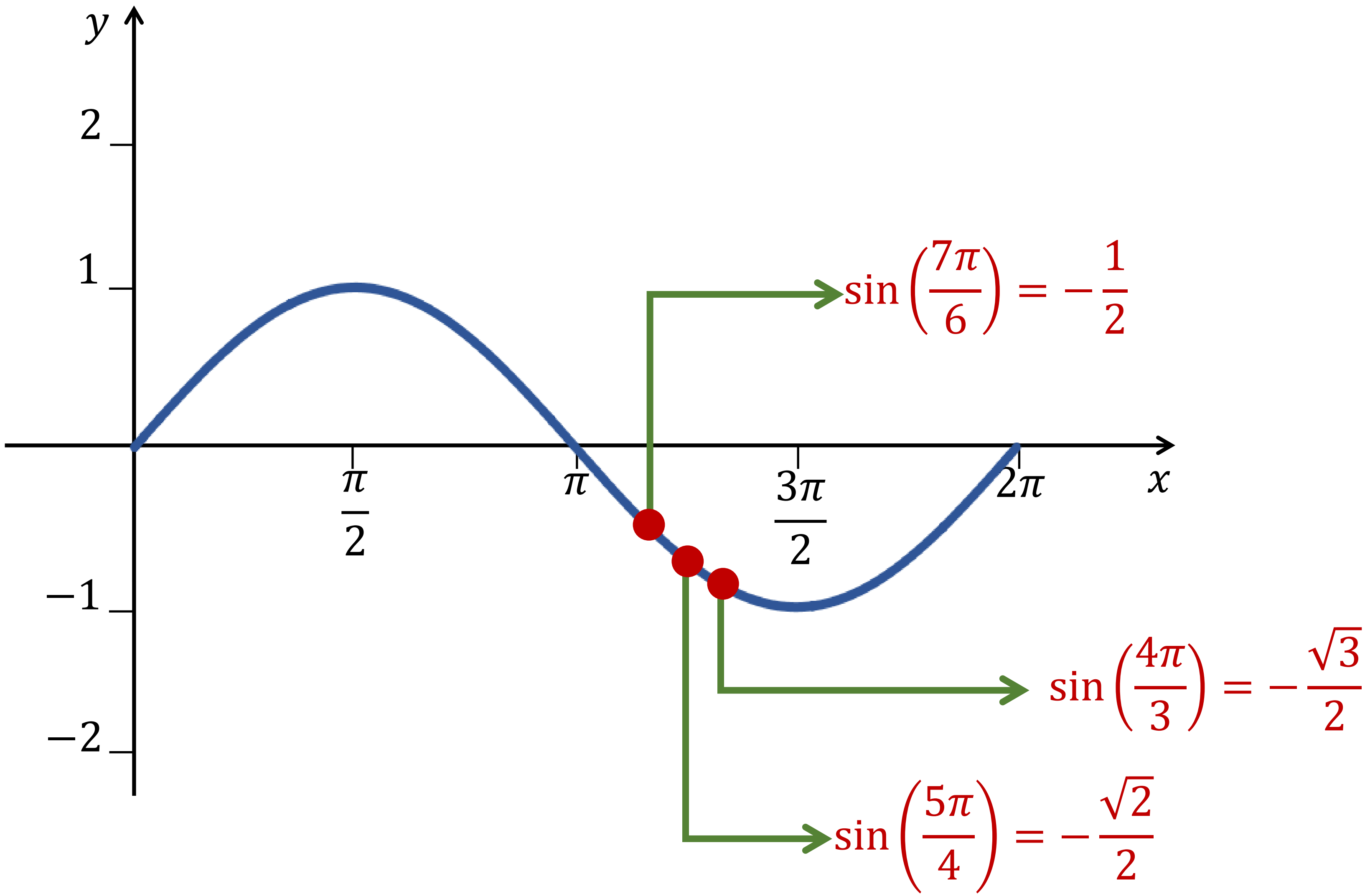
Função Seno: primeiro quadrante



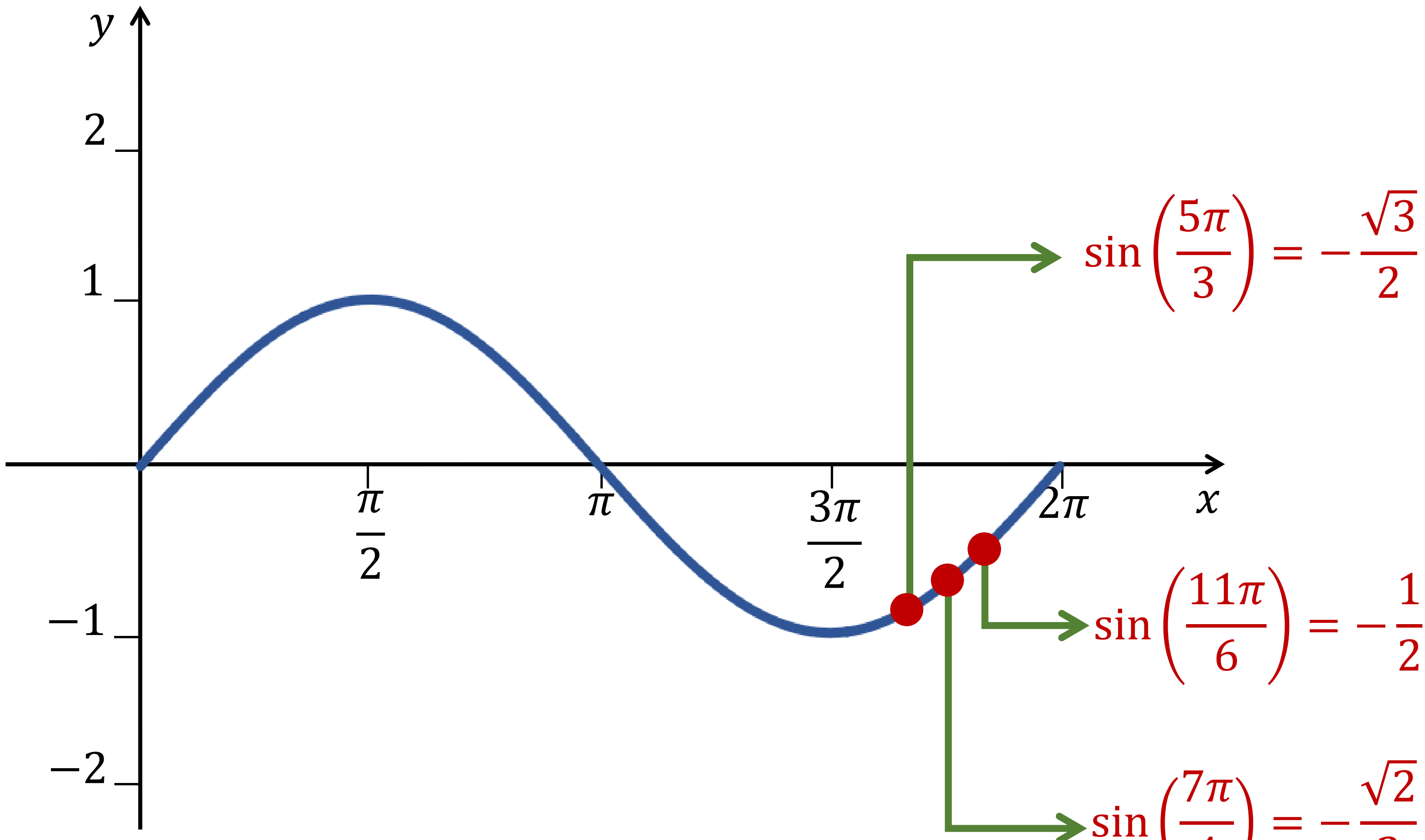
Função Seno: segundo quadrante



Função Seno: terceiro quadrante



Função Seno: quarto quadrante



Exemplos

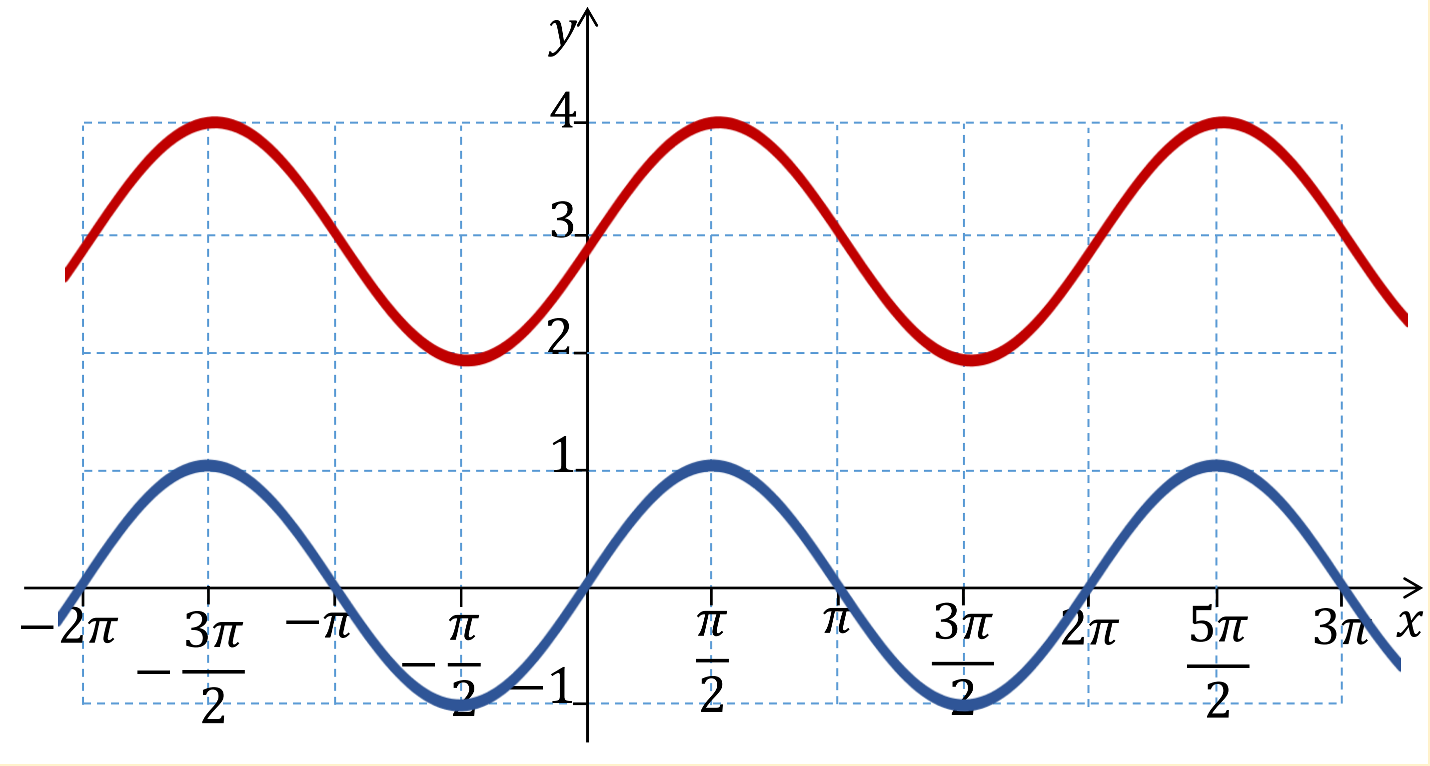
Esboce o gráfico da função $f(x) = \sin x + 3$.

$y = \sin x$

$y = \sin x + 3$

Solução:

$D(f) = \mathbb{R}$ $\quad Im(f) = [2,4]$ $\quad P(f) = 2\pi$



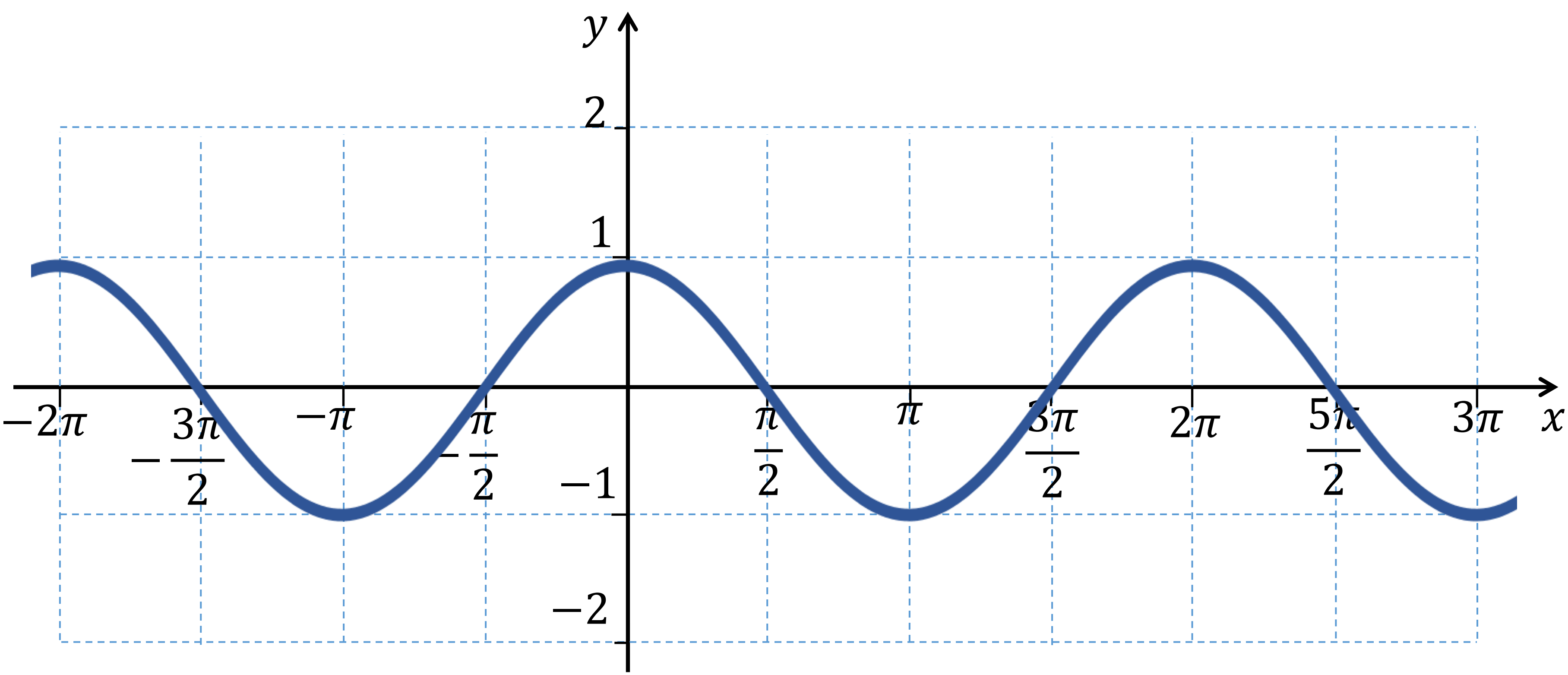
Função Cosseno

Definição:

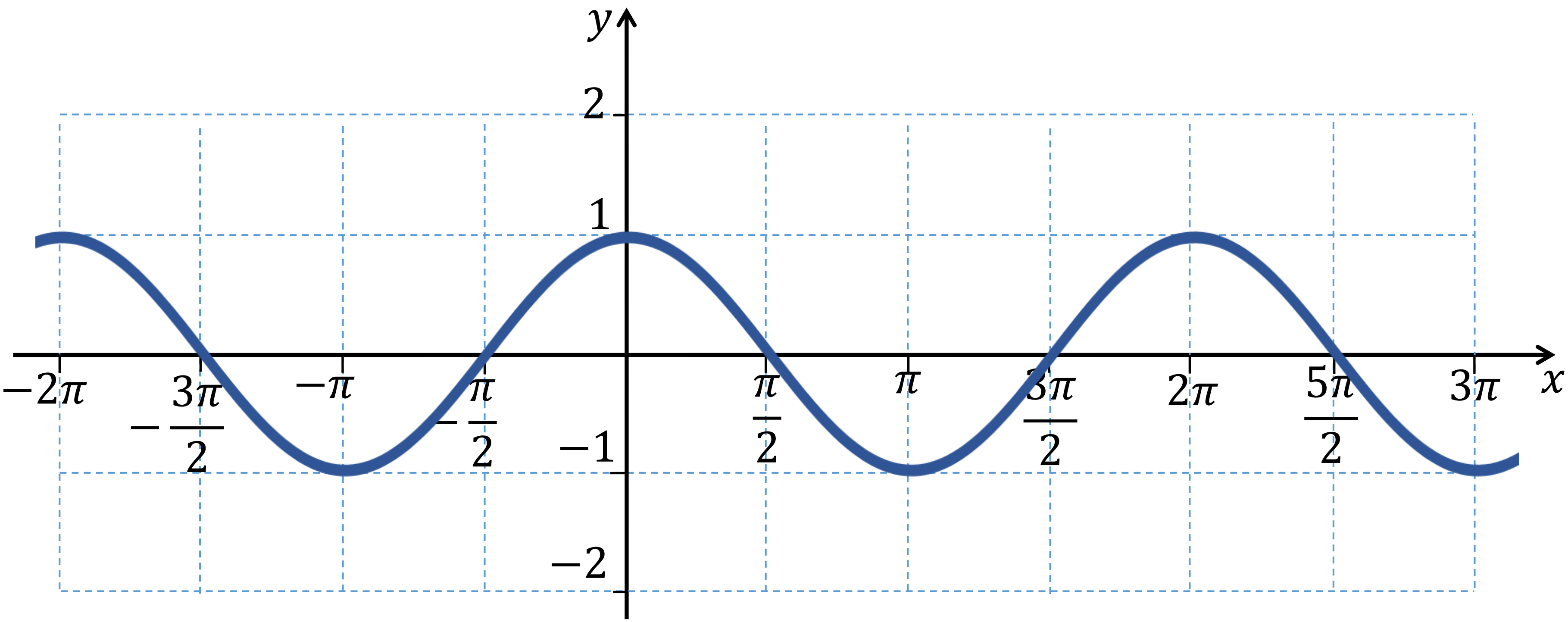
A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos x$ é chamada de função cosseno.

Gráfico da função cosseno

$y = \cos x$



Função Cosseno



Domínio

$D(f) = \mathbb{R}$

Imagem

$Im(f) = [-1,1]$

Período

$P(f) = 2\pi$

Função Cosseno

1º quadrante:

- ✓ Função positiva.
- ✓ Função decrescente.

2º quadrante:

- ✓ Função negativa.
- ✓ Função decrescente.

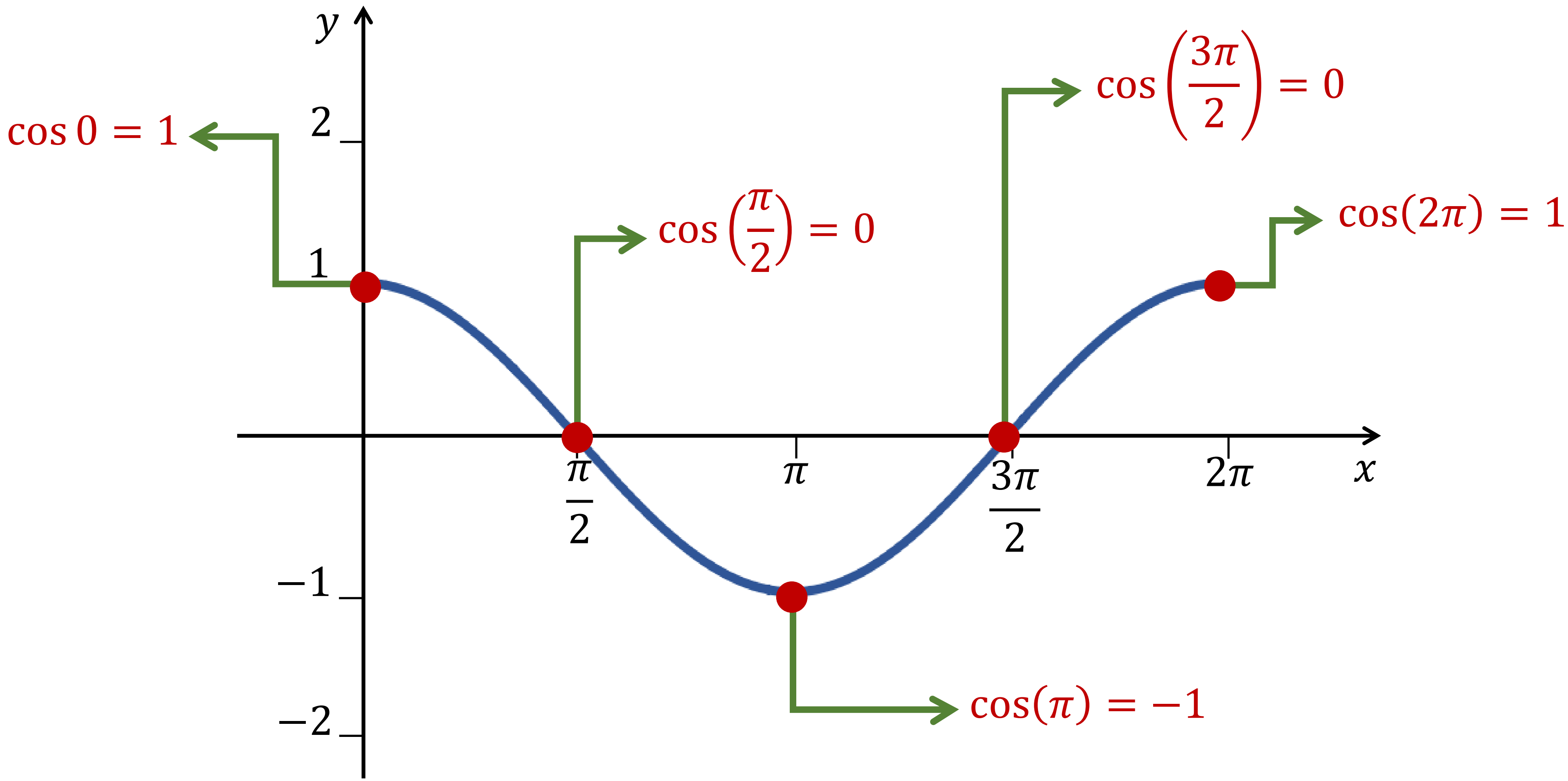
3º quadrante:

- ✓ Função negativa.
- ✓ Função crescente.

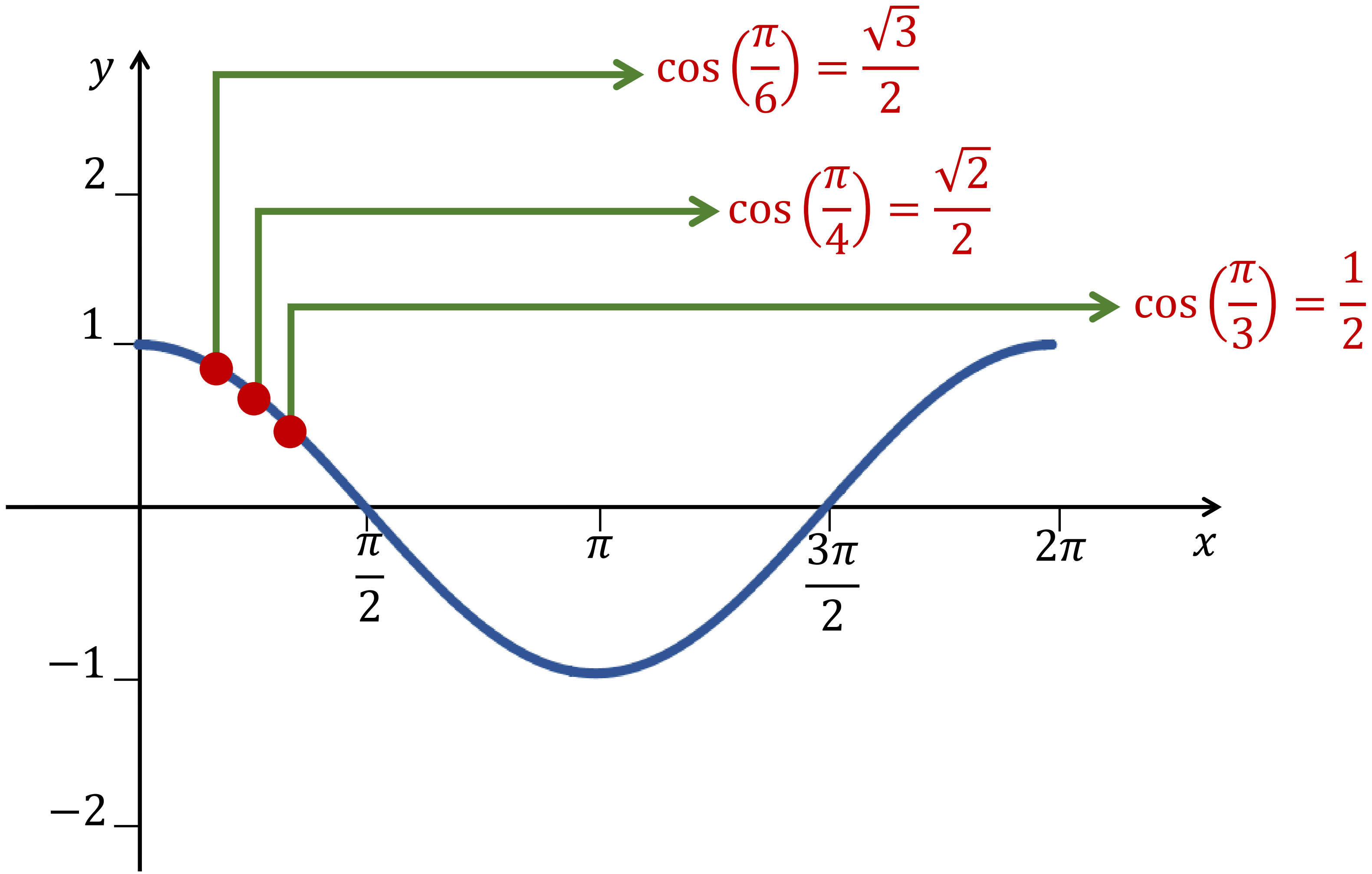
4º quadrante:

- ✓ Função positiva.
- ✓ Função crescente.

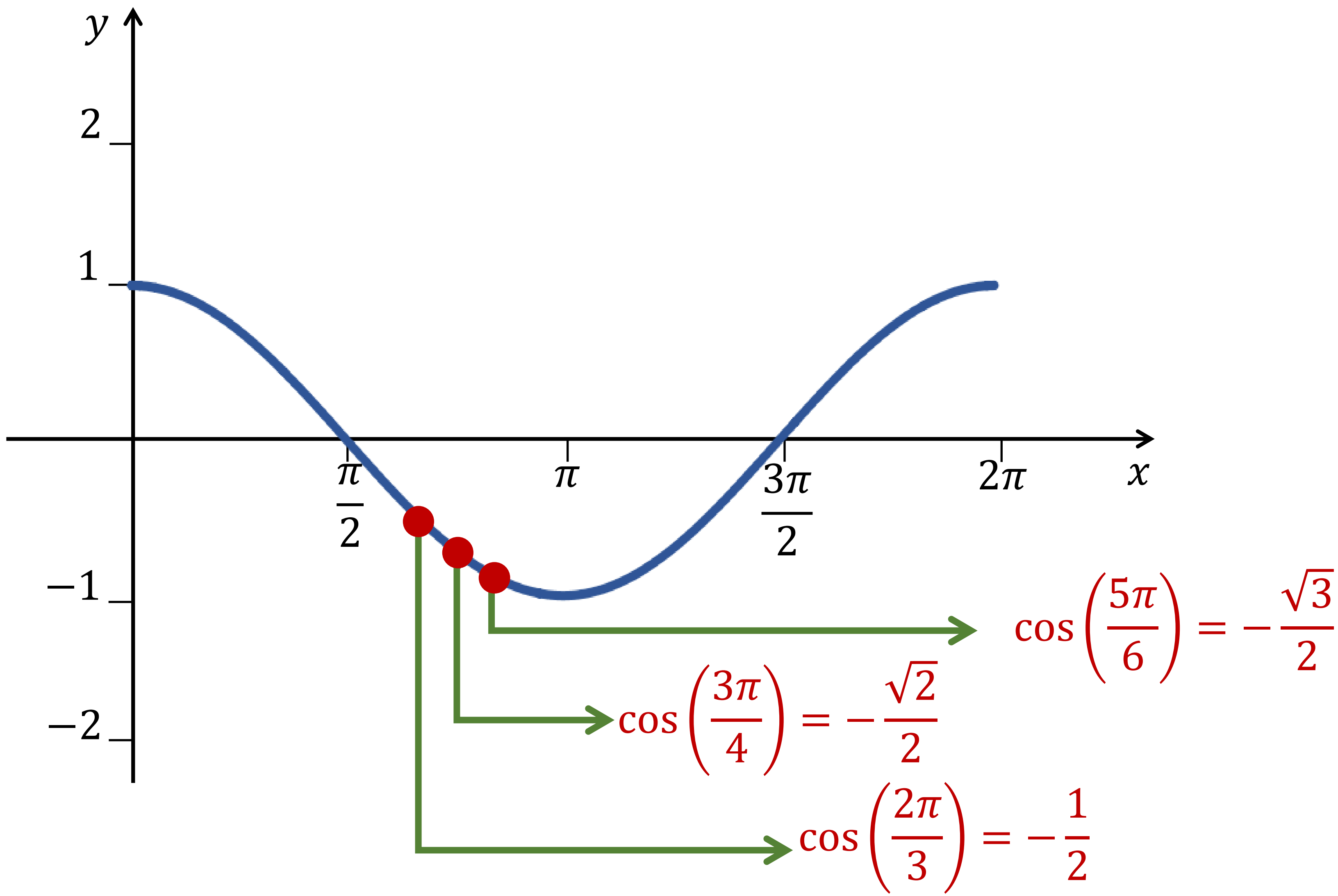
Função Cosseno



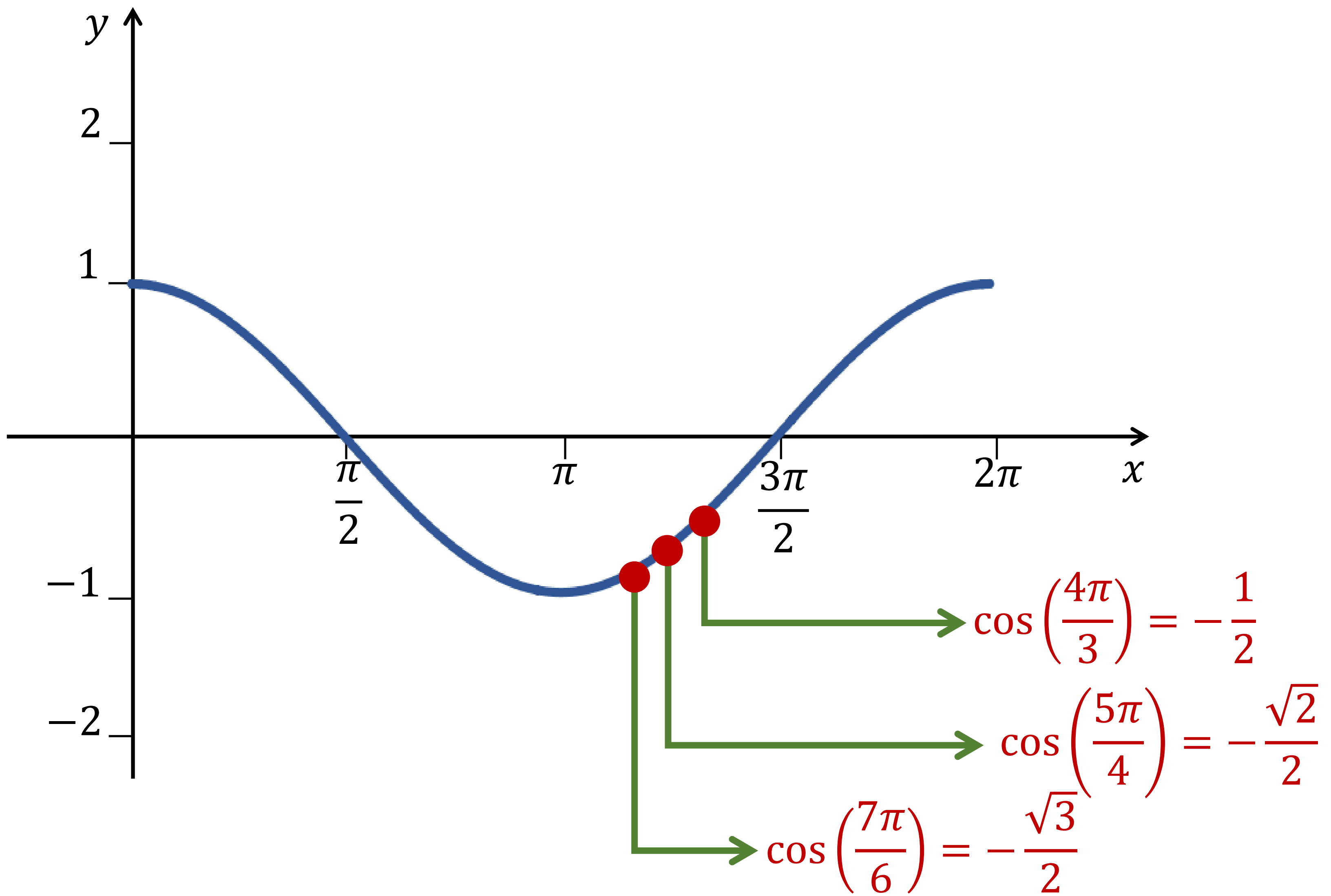
Função Cosseno: primeiro quadrante



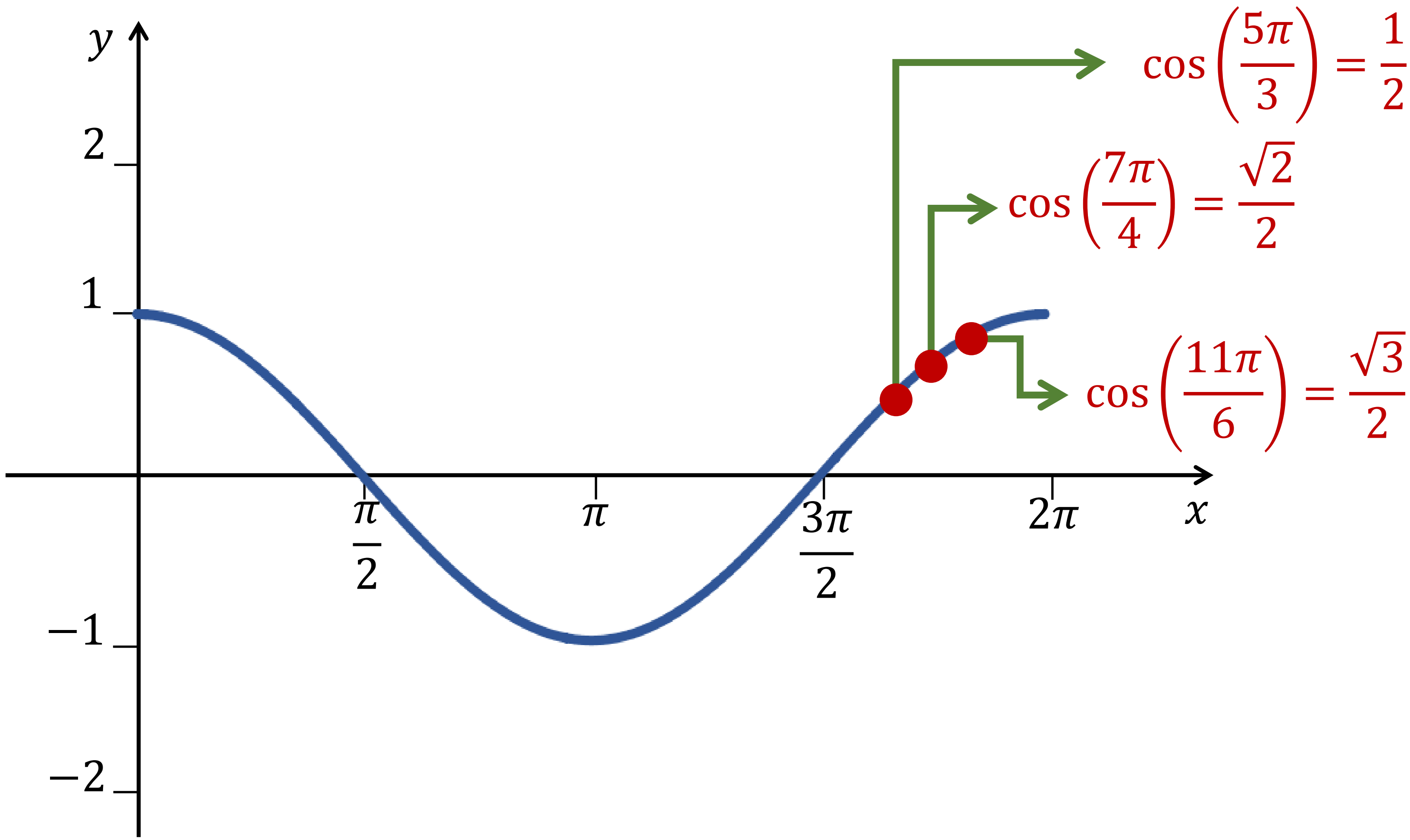
Função Cosseno: segundo quadrante



Função Cosseno: terceiro quadrante



Função Cosseno: quarto quadrante



Exemplos

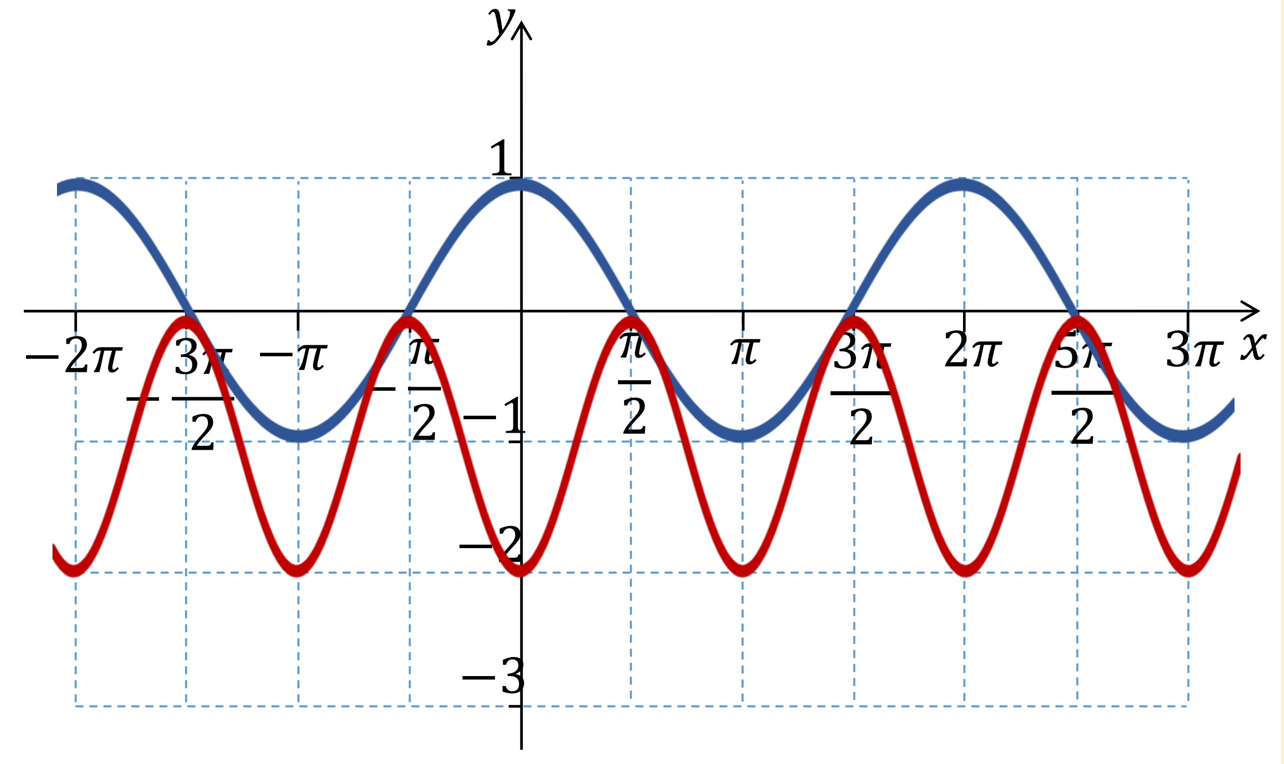
1) Esboce o gráfico da função $f(x) = -\cos(2x) - 1$.

$y = \cos x$

$y = -\cos(2x) - 1$

Solução:

$D(f) = \mathbb{R}$ $Im(f) = [-2,0]$ $P(f) = \pi$



Exercícios Propostos

Exercícios

1) Esboce o gráfico das funções trigonométricas, e determine o período (T), amplitude (A), domínio e imagem das funções:

(a) $y = 2 + \sin x$

(b) $y = 2 \sin 4x$

(c) $y = -3 \cos(0{,}5x)$

(d) $y = 3 \sin 2\pi x$

(e) $y = 3 \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

Respostas

Exercício 1:

a) $T = 2\pi \quad A = 1 \quad D(f) = \mathbb{R} \quad Im(f) = [1,3]$

b) $T = 4\pi \quad A = 3 \quad D(f) = \mathbb{R} \quad Im(f) = [-3,3]$

c) $T = \dfrac{\pi}{2} \quad A = 2 \quad D(f) = \mathbb{R} \quad Im(f) = [-2,2]$

d) $T = 1 \quad A = 3 \quad D(f) = \mathbb{R} \quad Im(f) = [-3,3]$

e) $T = \pi \quad A = 3 \quad D(f) = \mathbb{R} \quad Im(f) = [-3,3]$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA

O GAMA possui monitorias de:

- **Matemática Elementar, Cálulo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e equivalentes)
- **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
- **Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3** (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino

Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas

Aula 03

Projeto

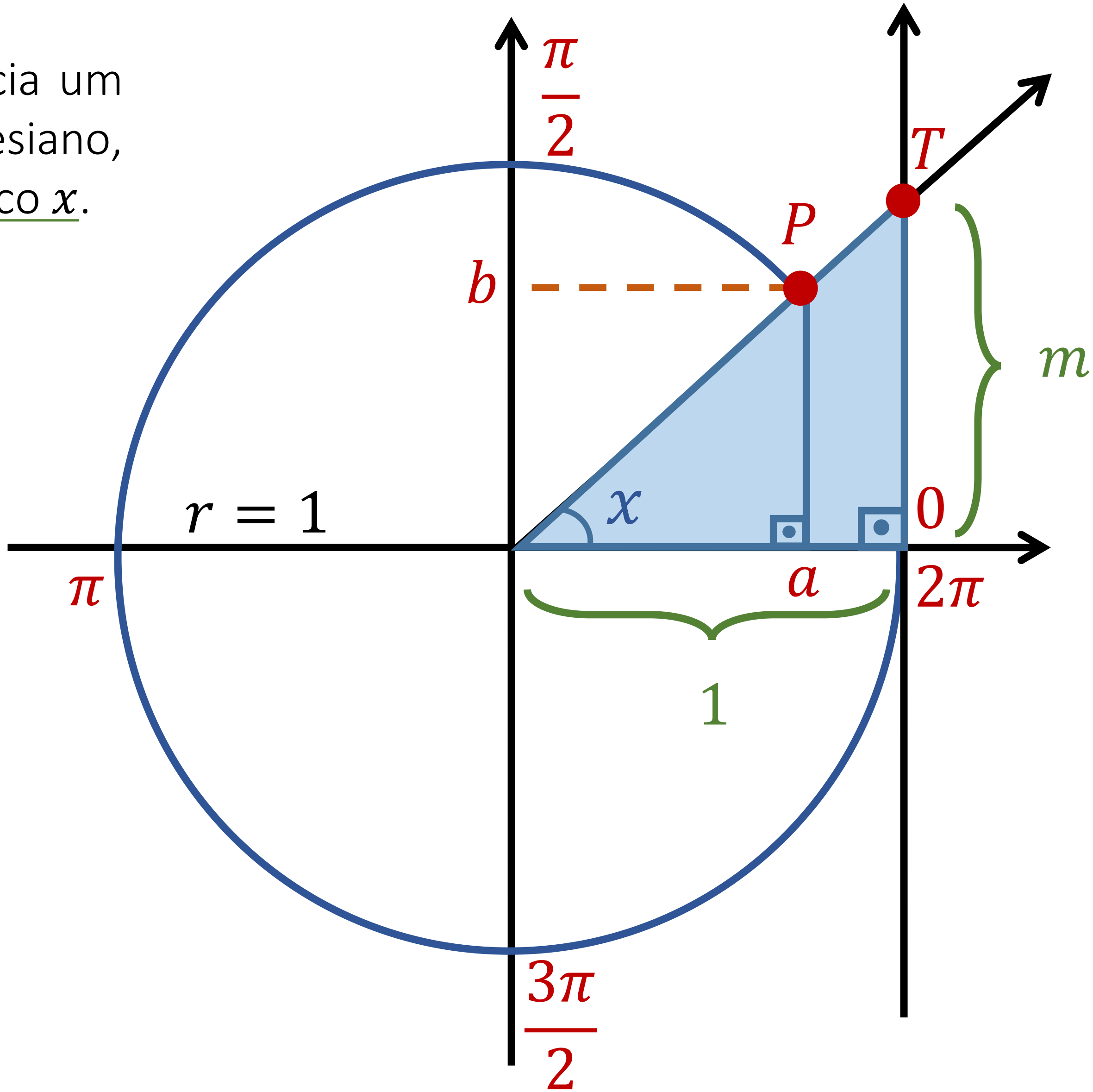
GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Tangente no Ciclo Trigonométrico

Lembrando...

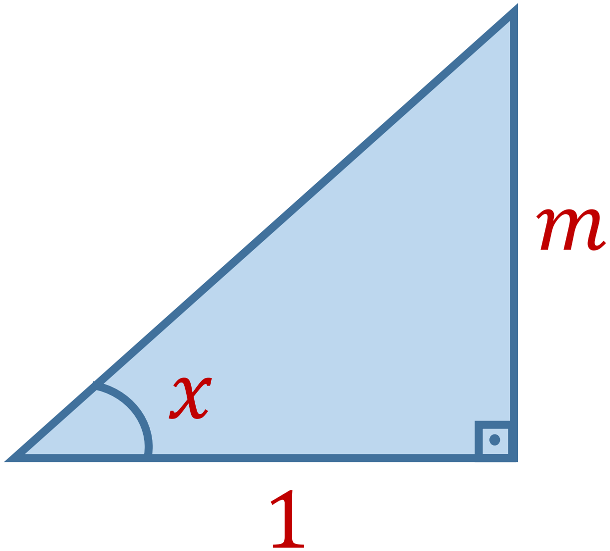
Para cada arco x, o ciclo associa um ponto $P(a, b)$ do plano cartesiano, chamado de extremidade do arco x.



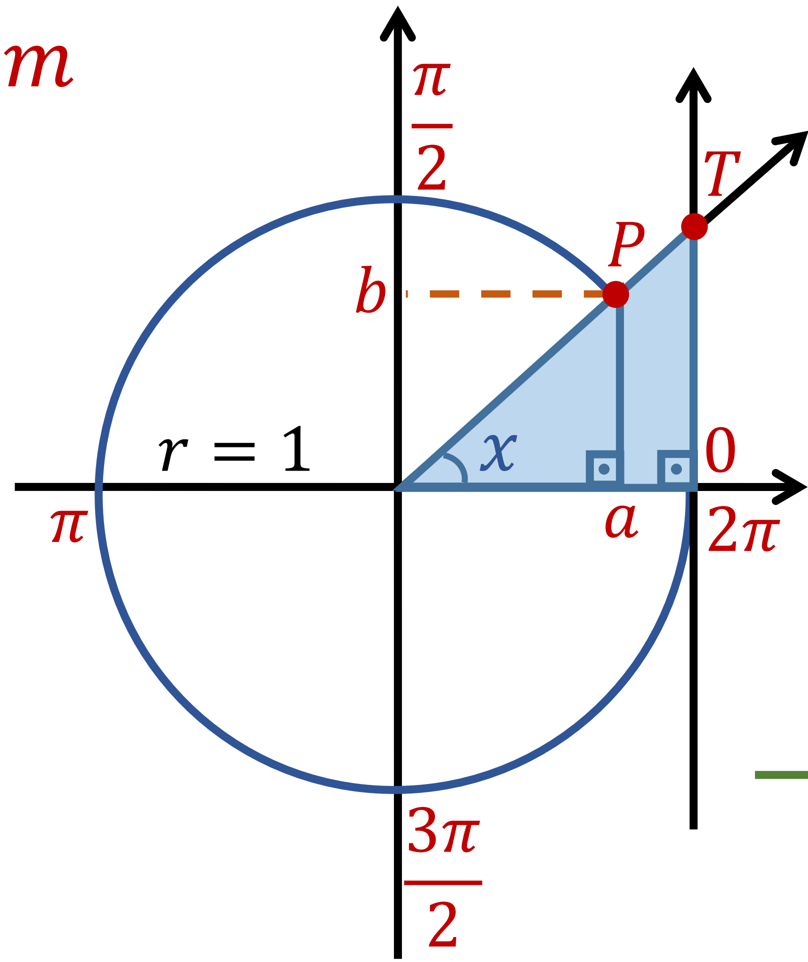
Tangente no Ciclo Trigonométrico

$$\tan x = \frac{m}{1} = m$$

Ordenada de $\boldsymbol{T}$.



Ou seja...

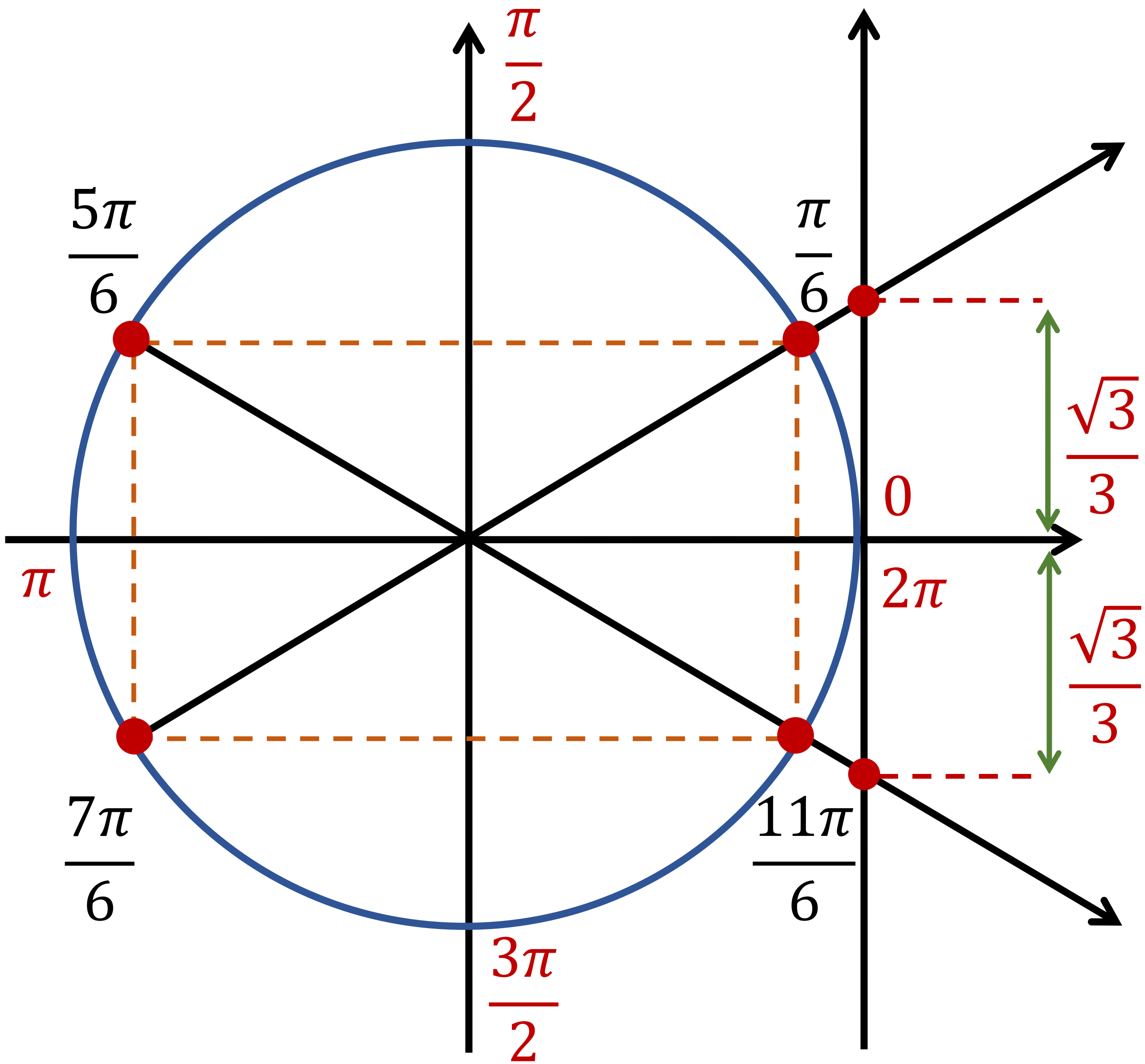


Eixo das tangentes.

Tangente dos arcos notáveis

Arco $\dfrac{\pi}{6}$

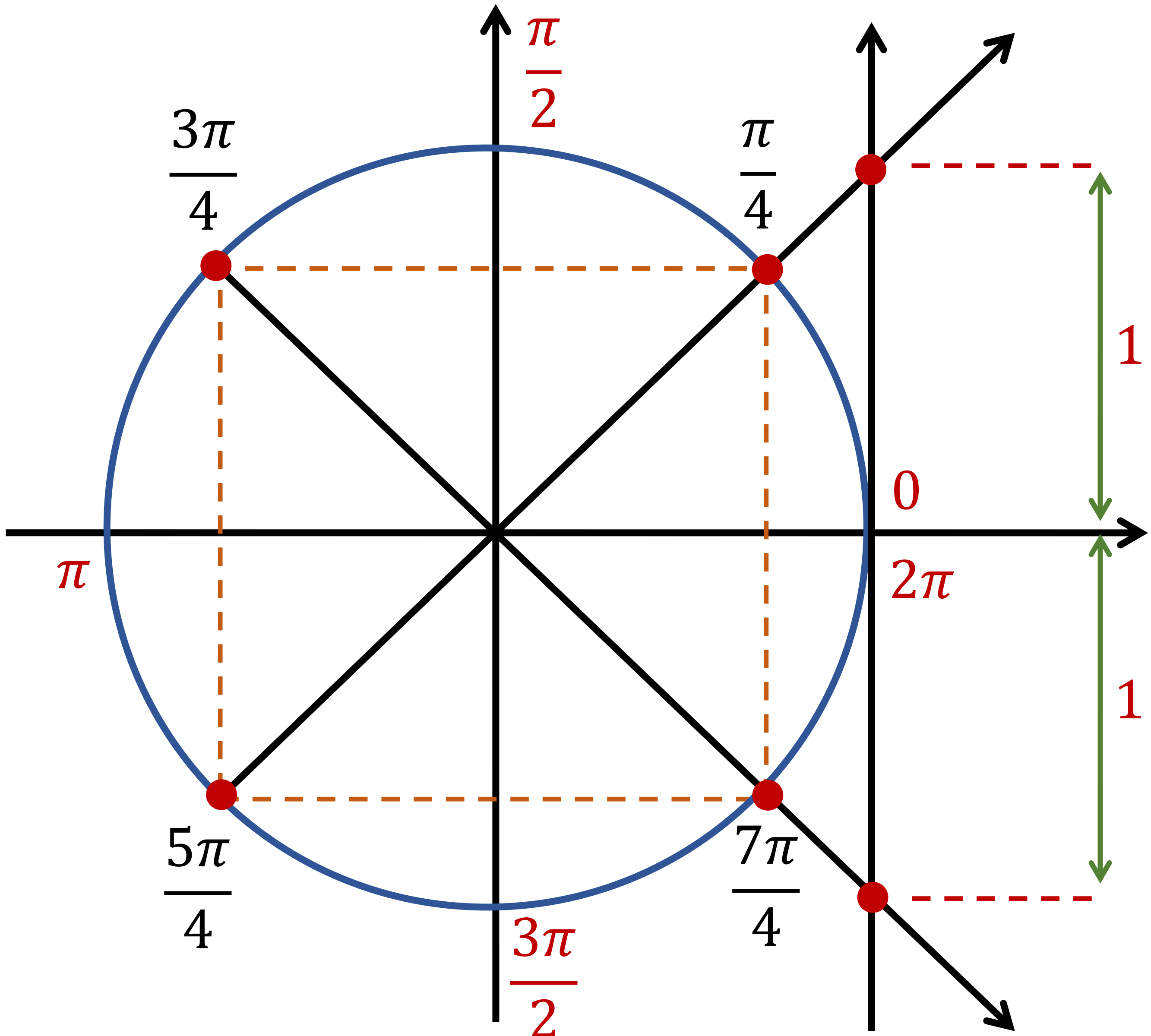
	Tangente
$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
$\dfrac{5\pi}{6}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
$\dfrac{7\pi}{6}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
$\dfrac{11\pi}{6}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$



Tangente dos arcos notáveis

Arco $\frac{\pi}{4}$

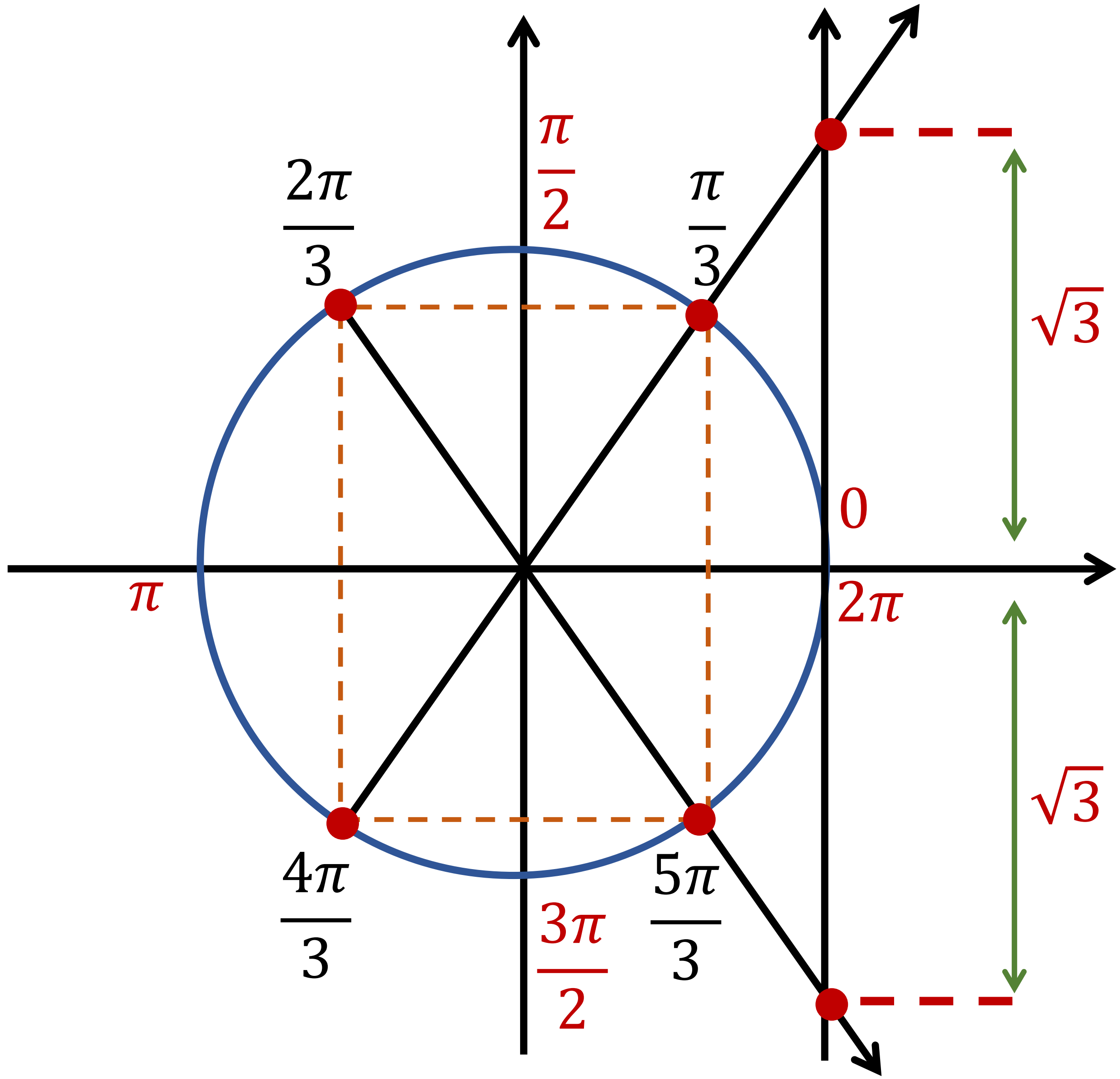
	Tangente
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{3\pi}{4}$	-1
$\frac{5\pi}{4}$	1
$\frac{7\pi}{4}$	-1



Tangente dos arcos notáveis

Arco $\frac{\pi}{3}$

	Tangente
$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{2\pi}{3}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{4\pi}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{3}$	$-\sqrt{3}$



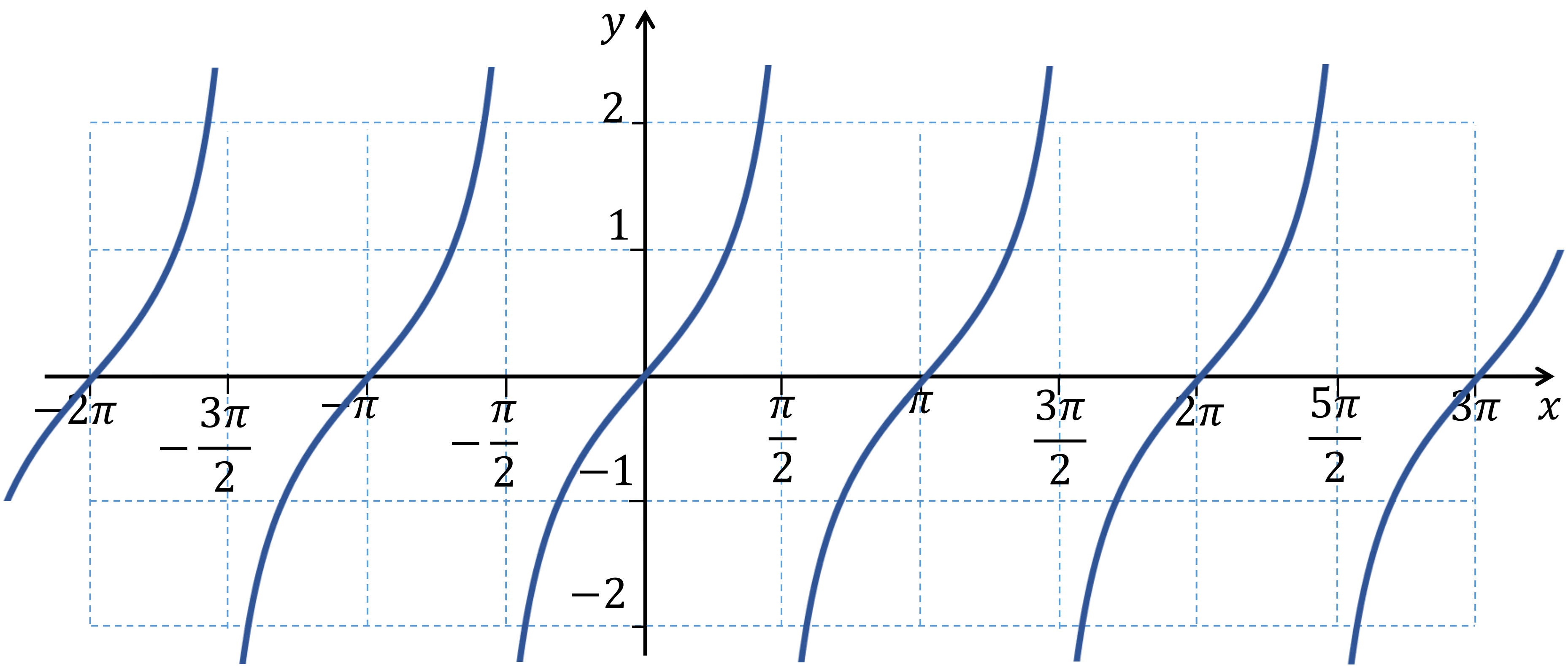
Função Tangente

Definição:

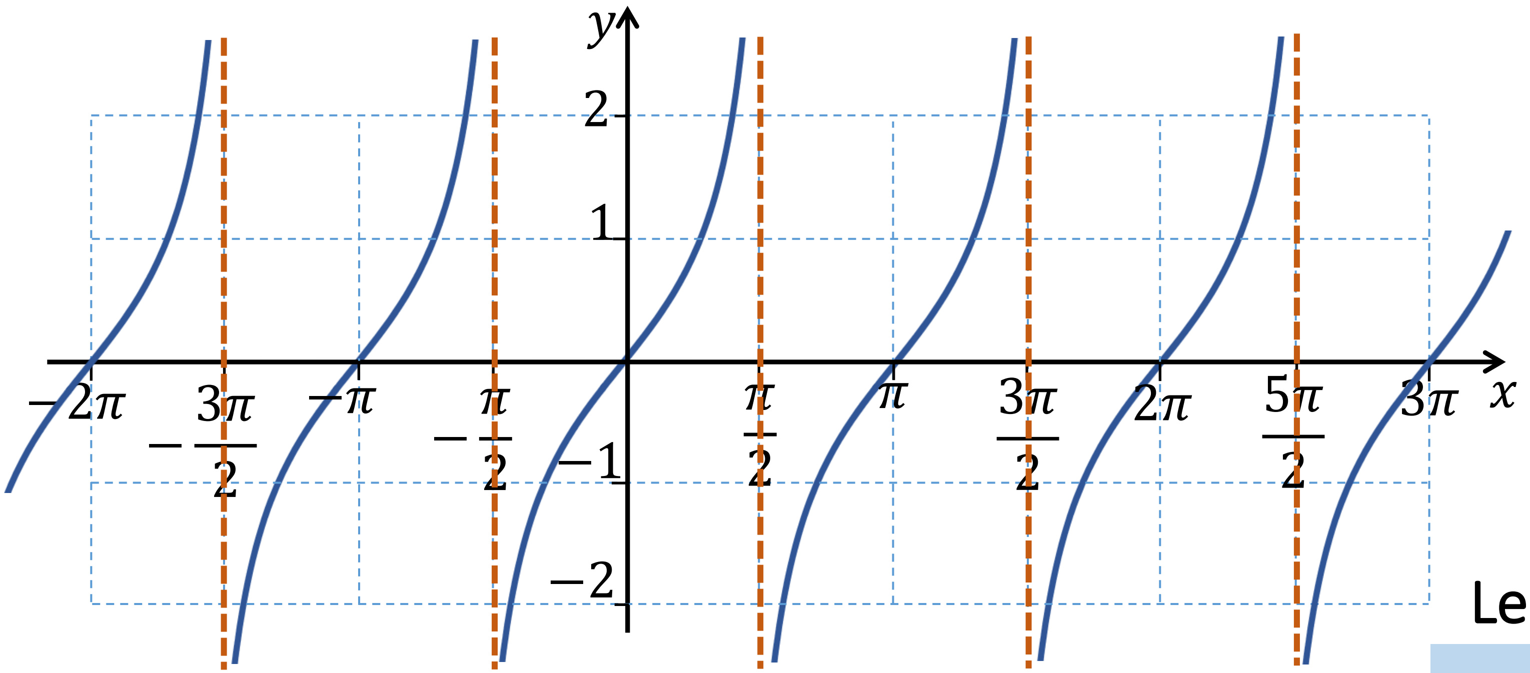
A função f dada por $f(x) = \tan x$ é chamada de **função tangente.**

Gráfico da função tangente

$y = \tan x$



Função Tangente



Lembre que:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Domínio

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Imagem

$$Im(f) = \mathbb{R}$$

Período

$$P(f) = \pi$$

Assíntotas

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$$

Função Tangente

1º quadrante:

- ✓ Função positiva.
- ✓ Função crescente.

2º quadrante:

- ✓ Função negativa.
- ✓ Função crescente.

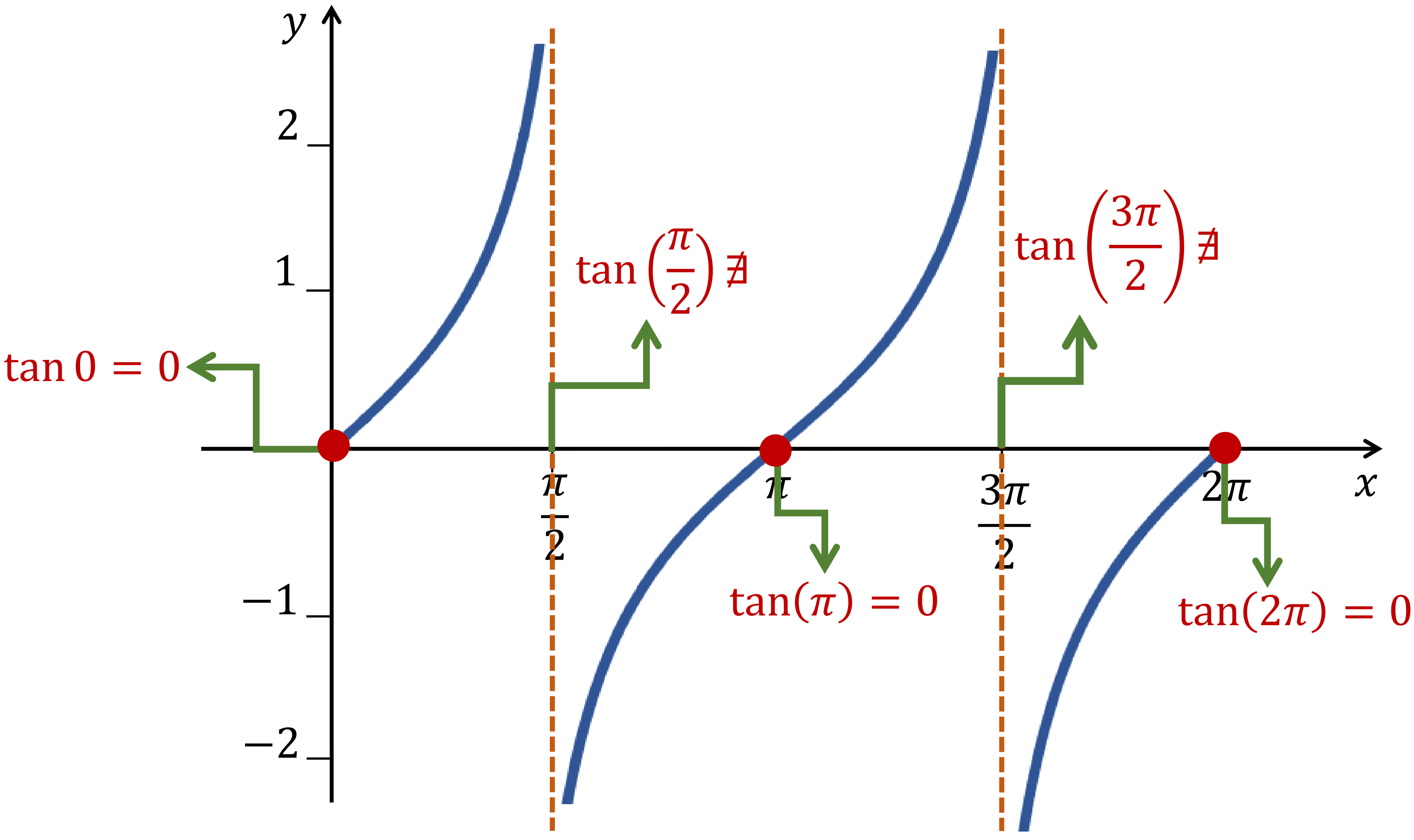
3º quadrante:

- ✓ Função positiva.
- ✓ Função crescente.

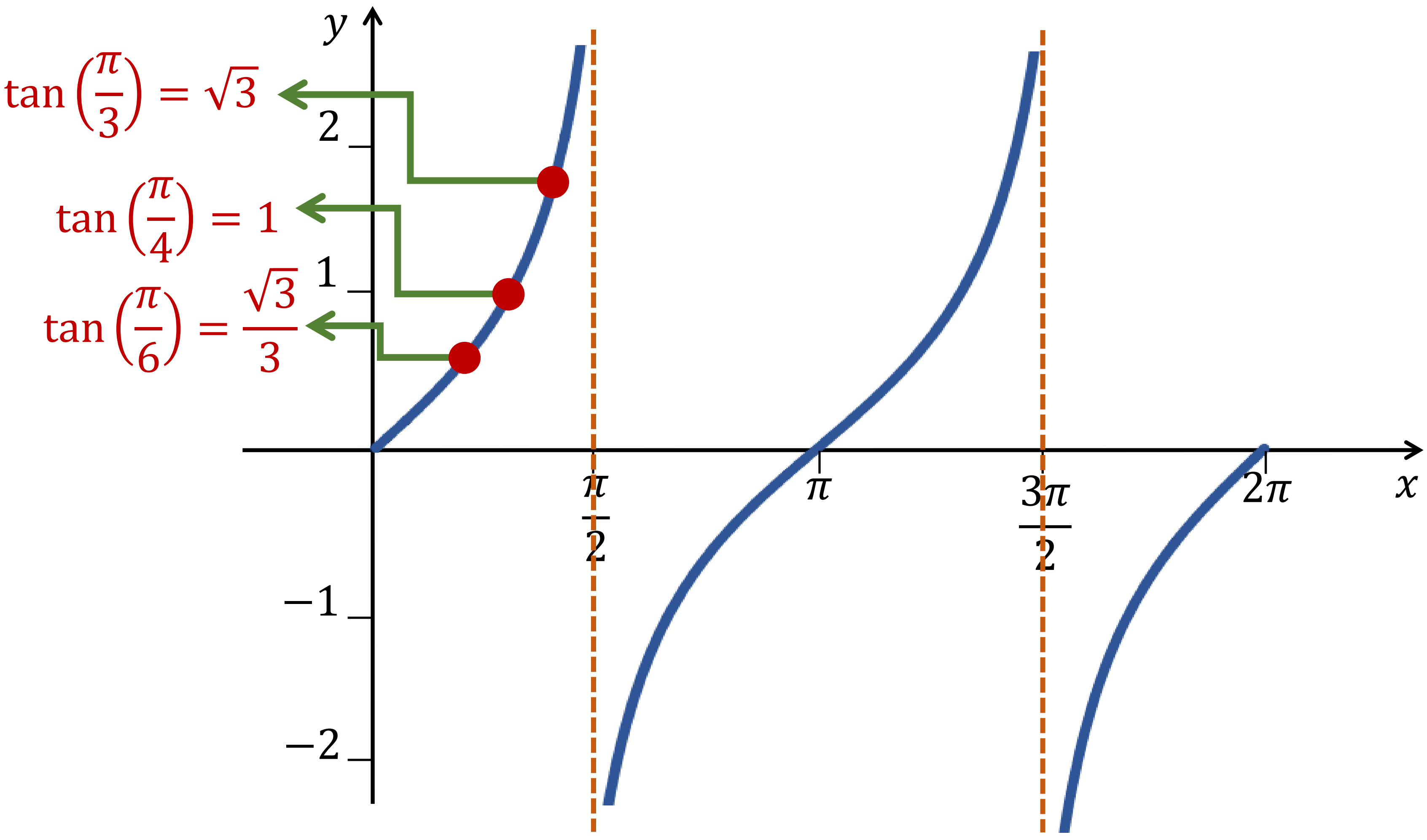
4º quadrante:

- ✓ Função negativa.
- ✓ Função crescente.

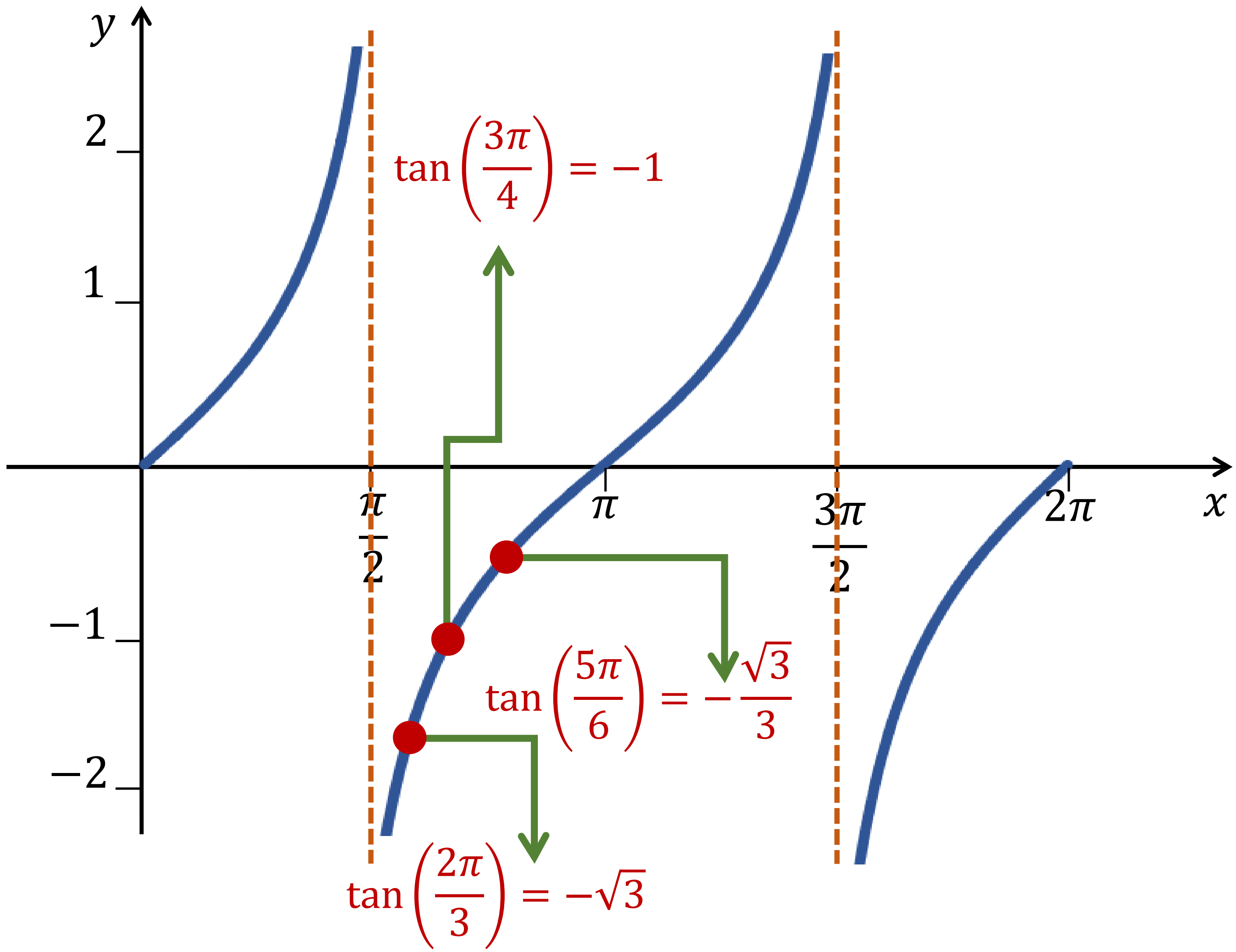
Função Tangente



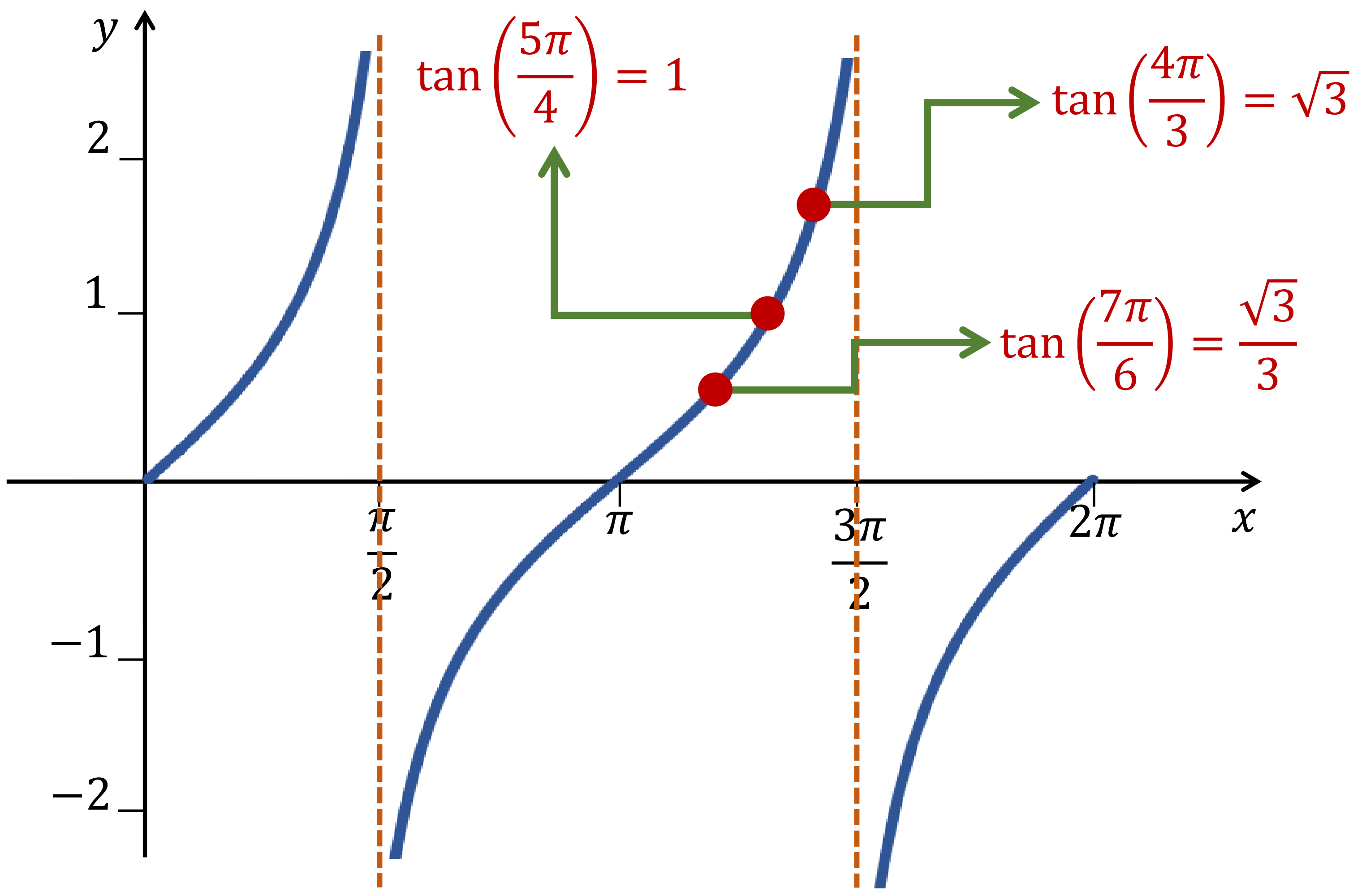
Função Tangente: primeiro quadrante



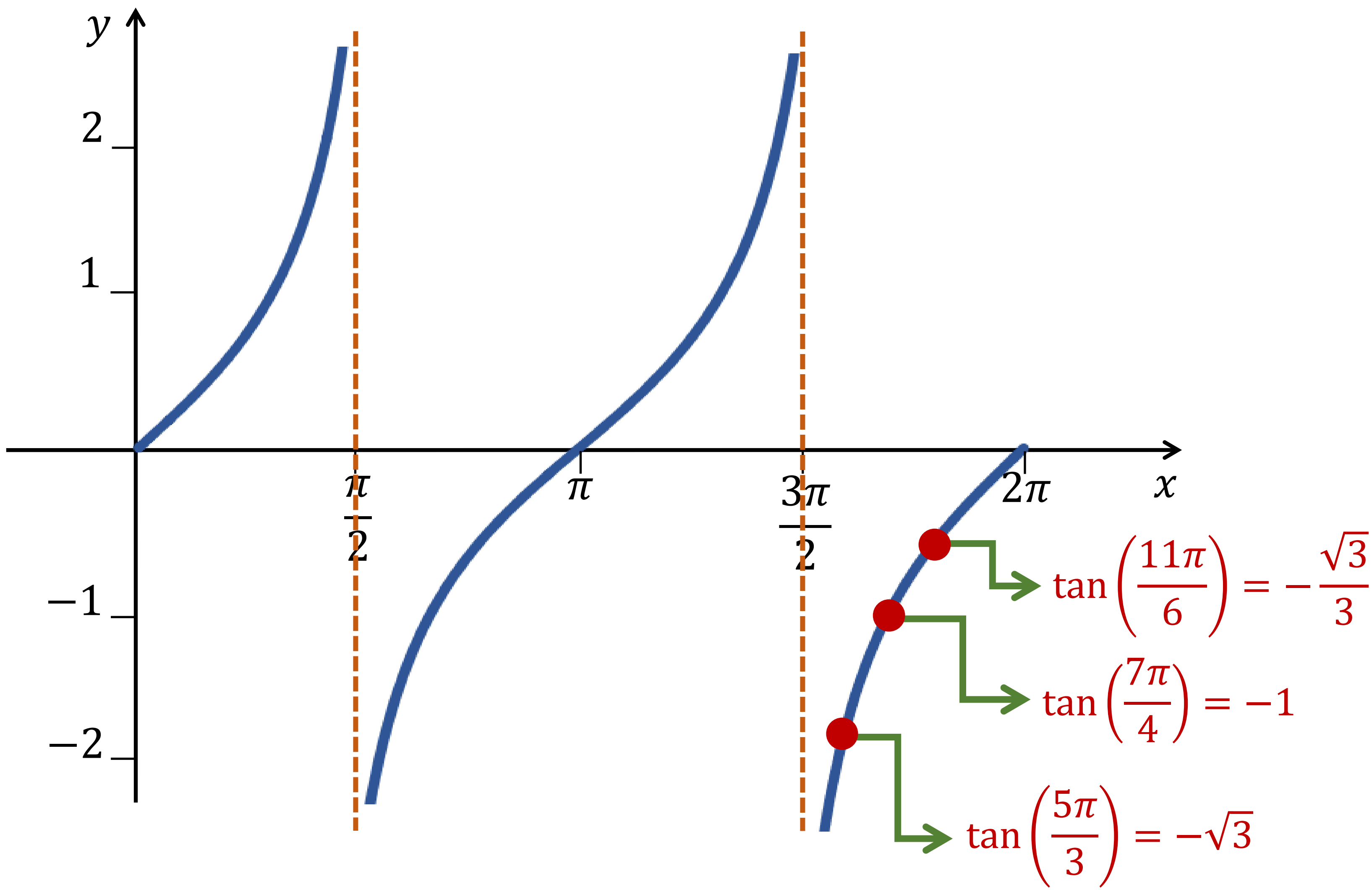
Função Tangente: segundo quadrante



Função Tangente: terceiro quadrante



Função Tangente: quarto quadrante



Exemplos

1) Esboce o gráfico, determine o domínio, a imagem e o período e as assíntotas da função $f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

$$y = \tan x$$

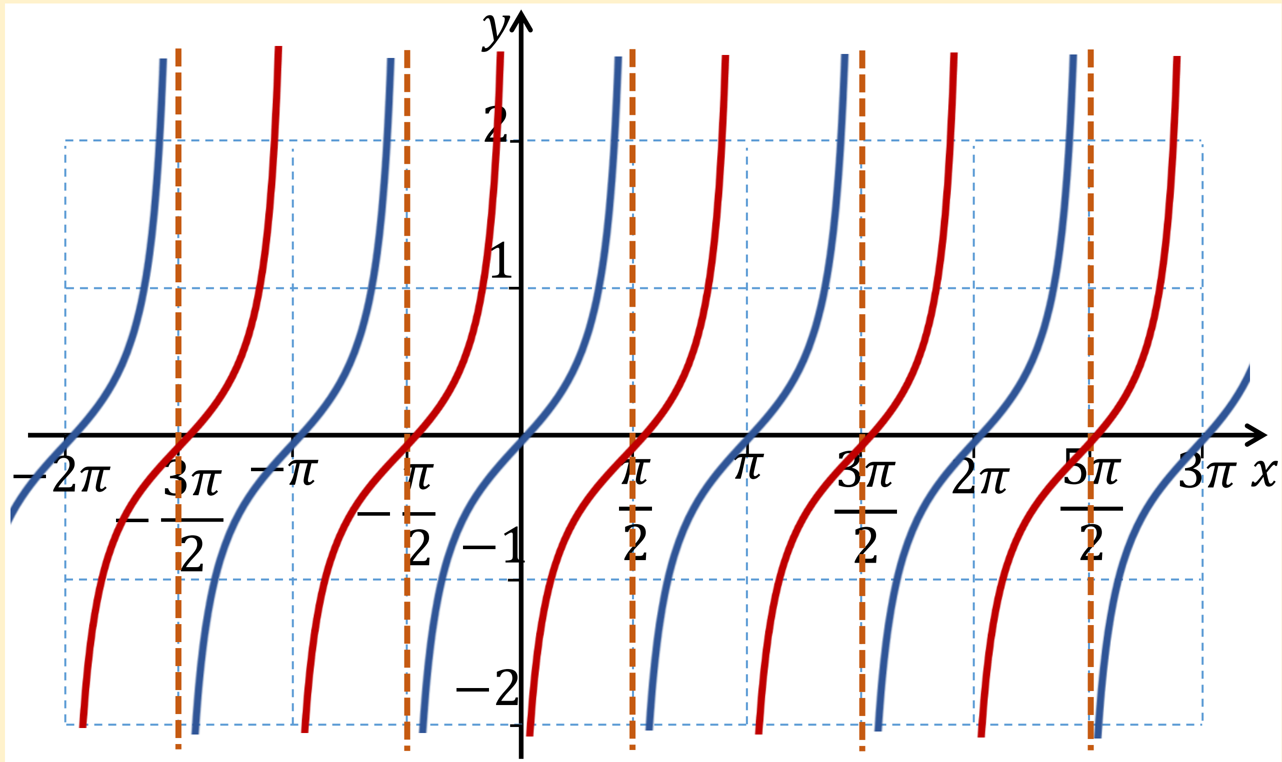
$$y = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Solução:

$$Im(f) = \mathbb{R}$$

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$$

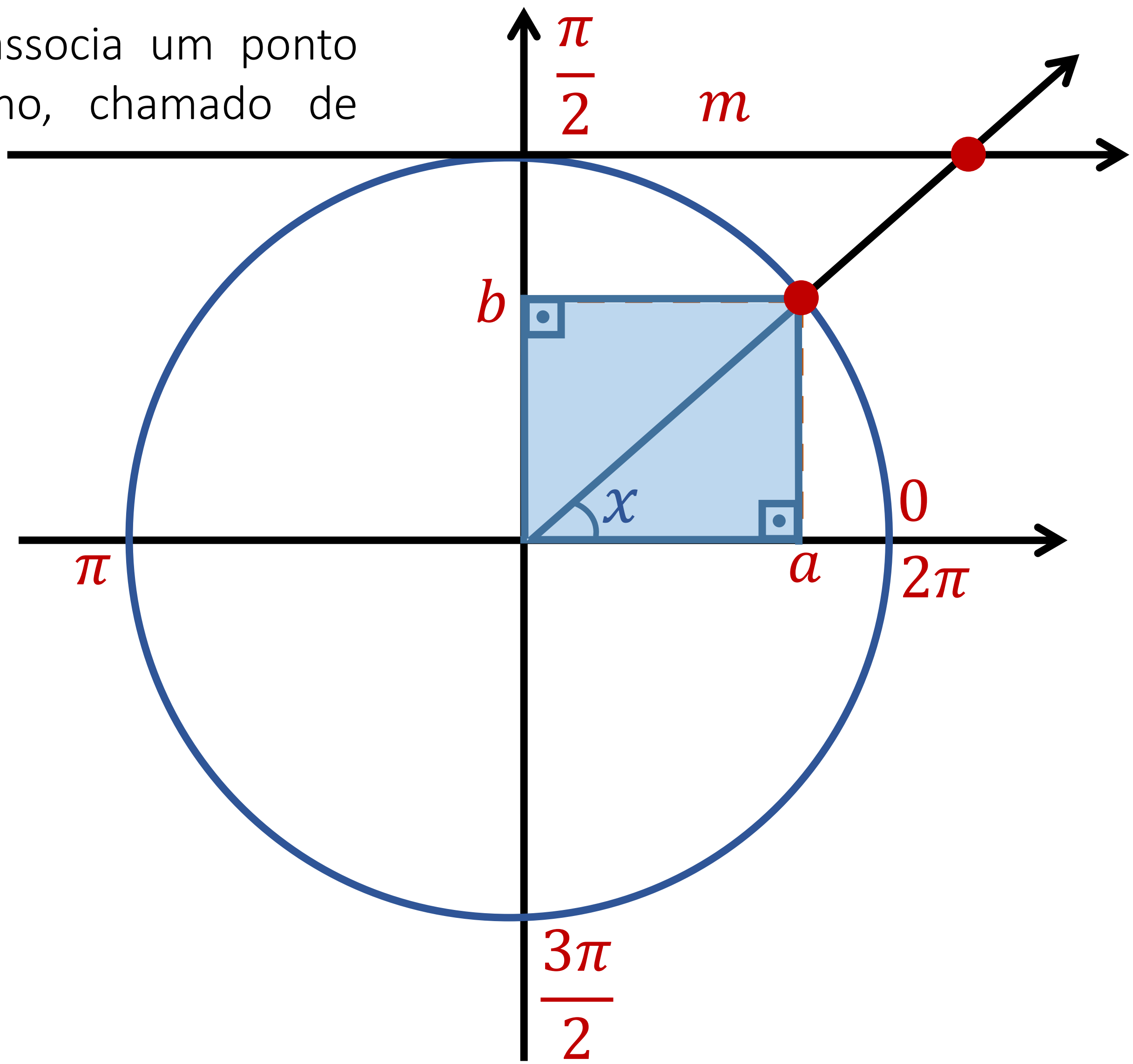
$$P(f) = \pi$$



Cotangente no Ciclo Trigonométrico

Lembrando...

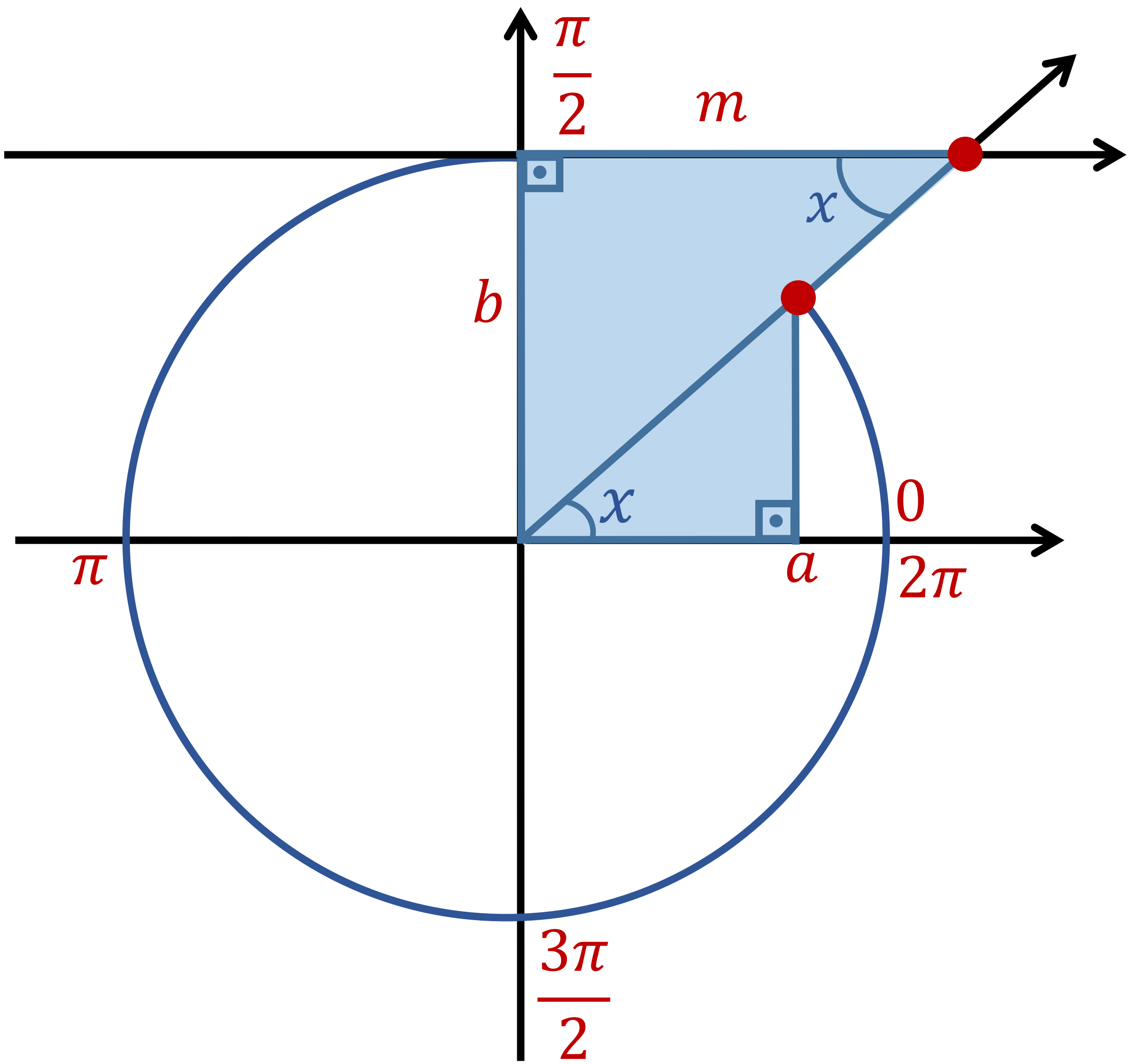
Para cada arco x, o ciclo associa um ponto $P(a, b)$ do plano cartesiano, chamado de extremidade do arco x.



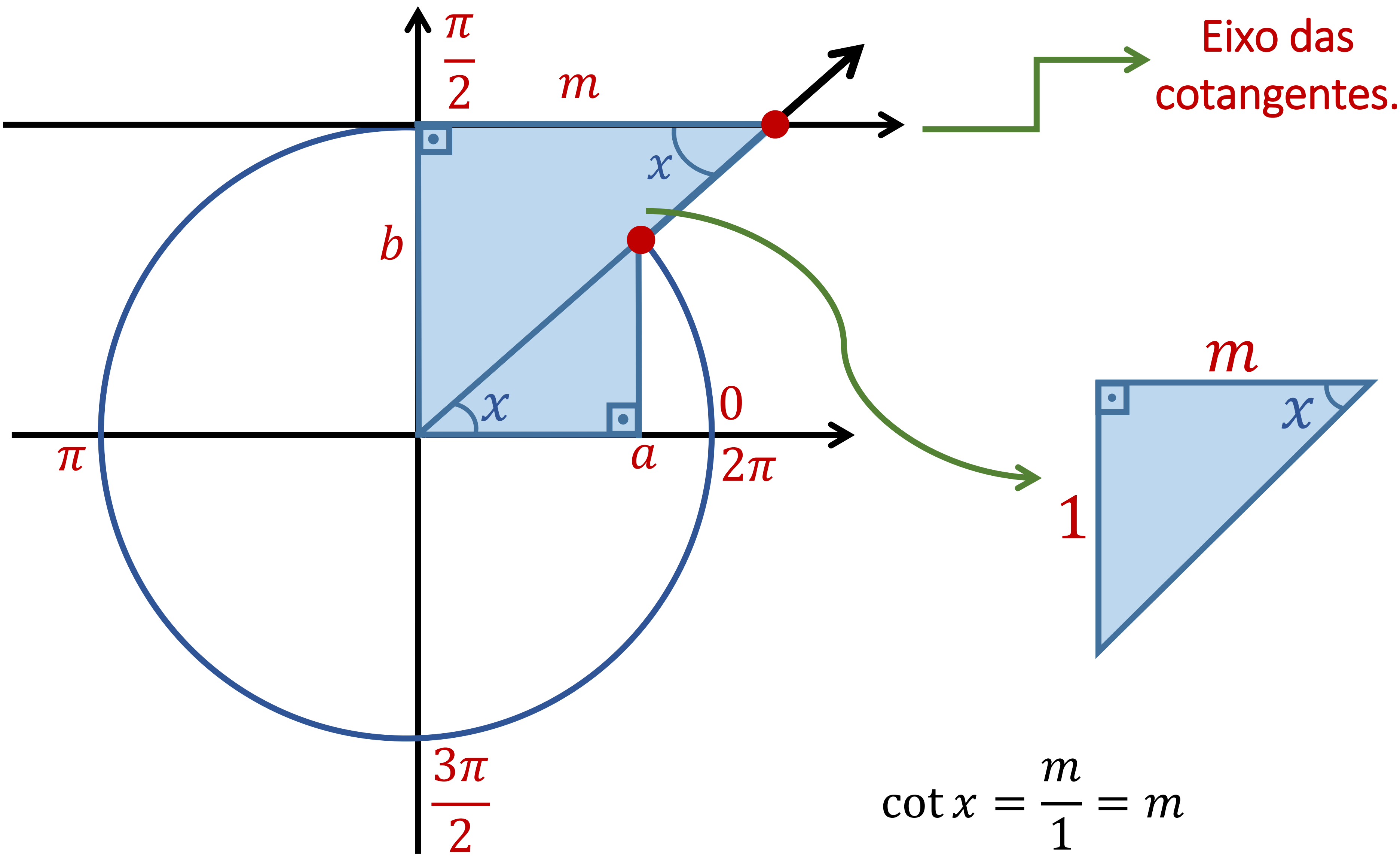
Cotangente no Ciclo Trigonométrico

Lembrando...

Para cada arco x, o ciclo associa um ponto $P(a, b)$ do plano cartesiano, chamado de extremidade do arco x.

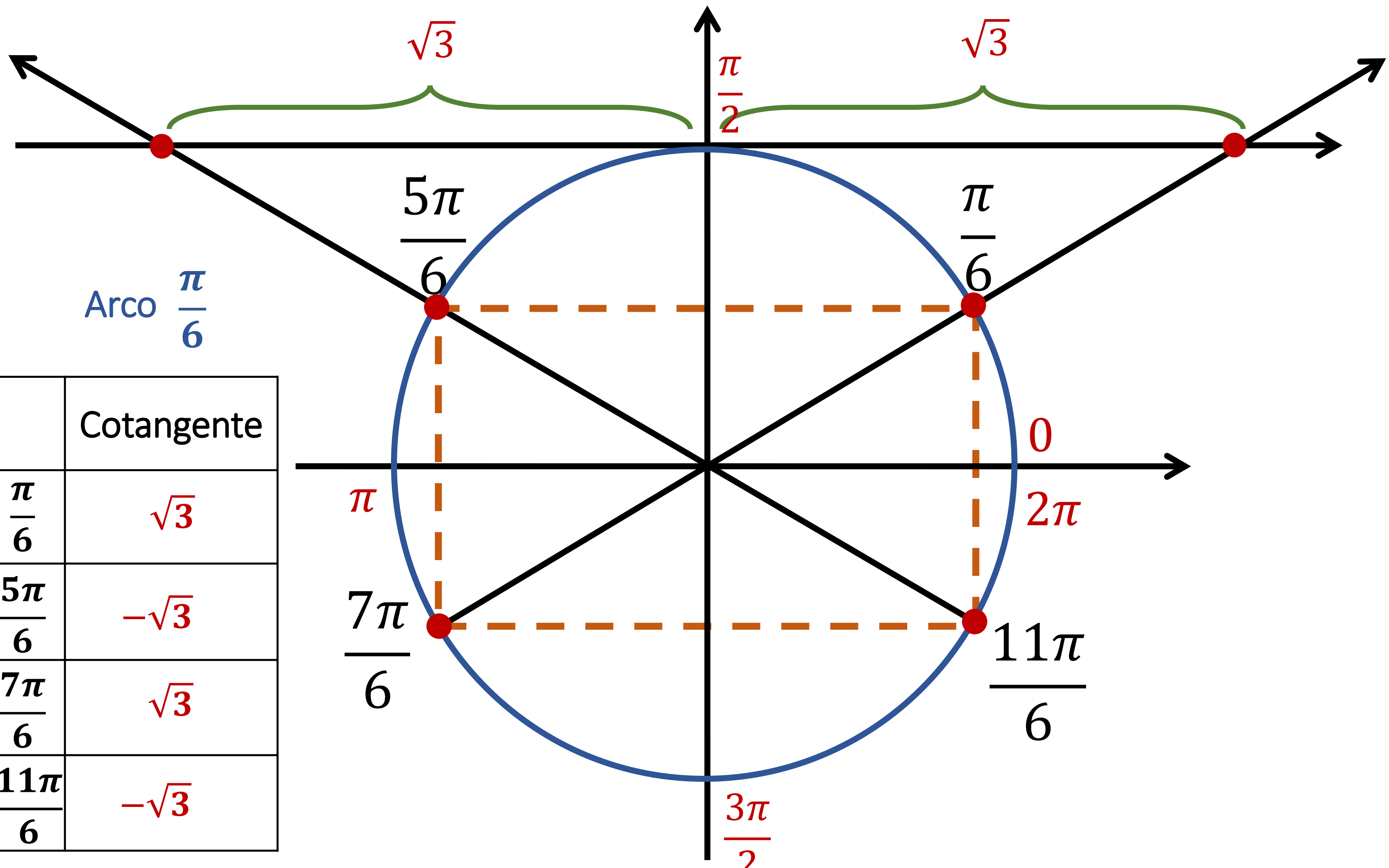


Cotangente no Ciclo Trigonométrico



$$\cot x = \frac{m}{1} = m$$

Cotangente dos arcos notáveis



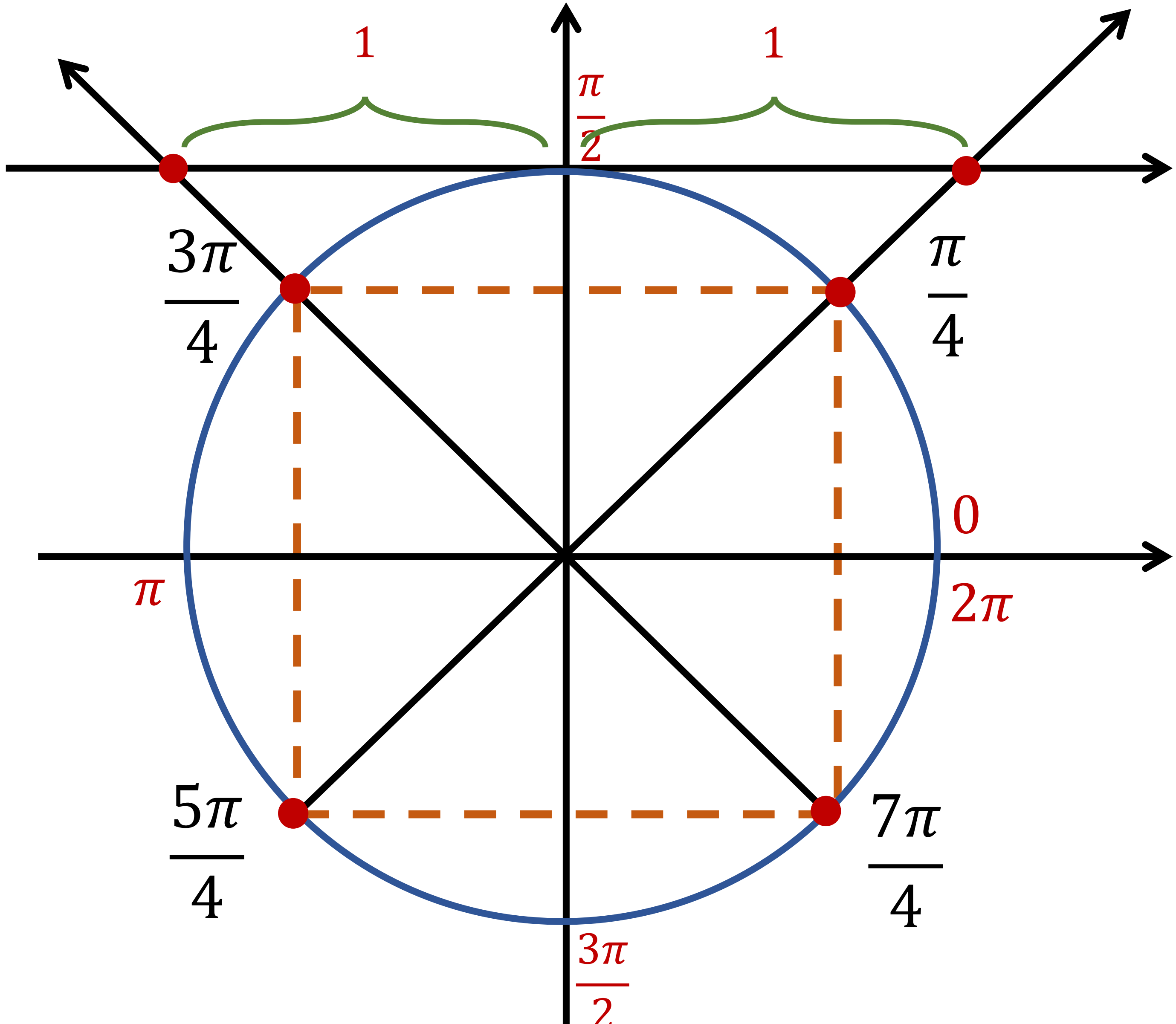
Arco $\frac{\pi}{6}$

	Cotangente
$\frac{\pi}{6}$	$\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{7\pi}{6}$	$\sqrt{3}$
$\frac{11\pi}{6}$	$-\sqrt{3}$

Cotangente dos arcos notáveis

Arco $\frac{\pi}{4}$

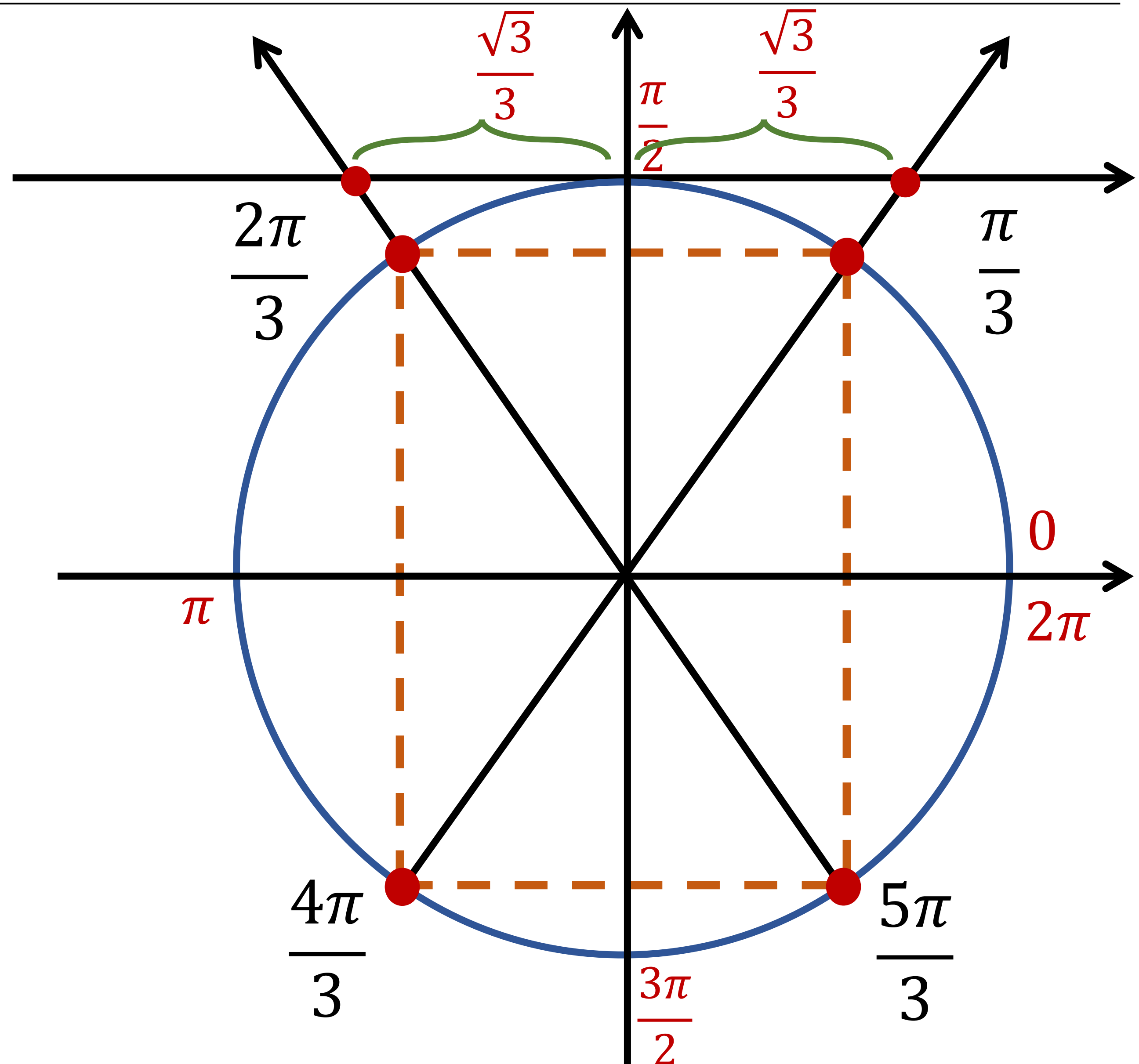
	Cotangente
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{3\pi}{4}$	-1
$\frac{5\pi}{4}$	1
$\frac{7\pi}{4}$	-1



Cotangente dos arcos notáveis

Arco $\frac{\pi}{3}$

	Cotangente
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$



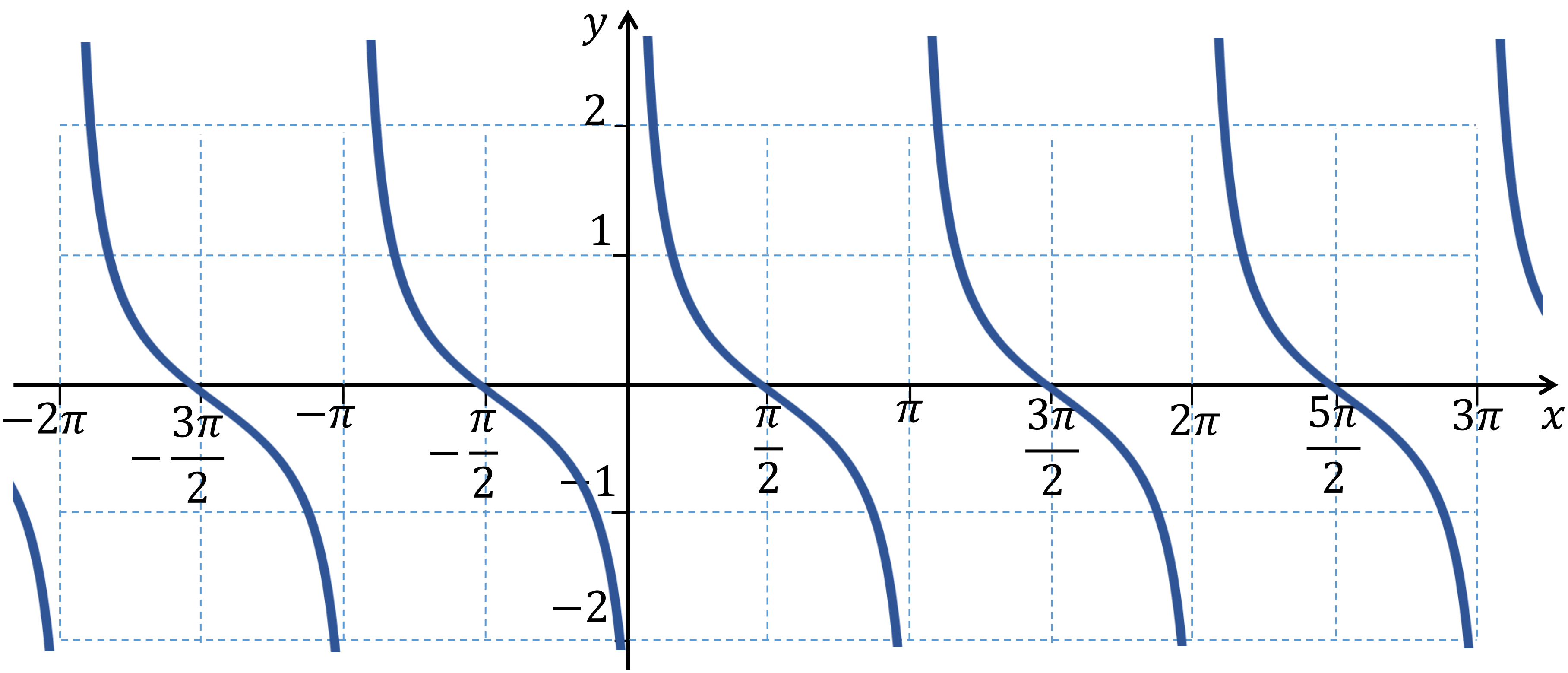
Função Cotangente

Definição:

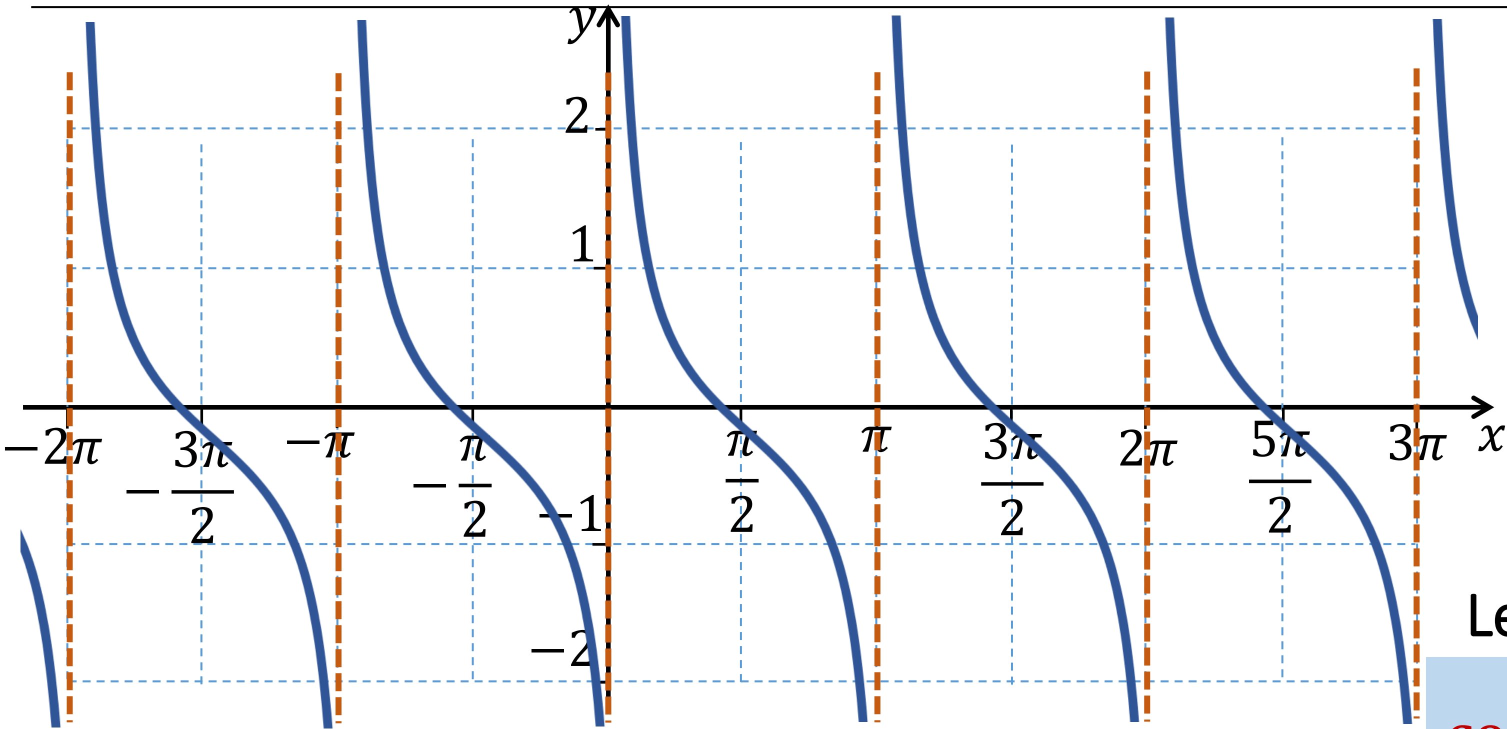
A função f dada por $f(x) = \cot x$ é chamada de função cotangente.

Gráfico da função cotangente

$y = \cot x$



Função Cotangente



Lembre que:

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Domínio

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$$

Imagem

$$Im(f) = \mathbb{R}$$

Período

$$P(f) = \pi$$

Assíntotas

$$x = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$$

Função Cotangente

1º quadrante:

- ✓Função positiva.
- ✓Função decrescente.

2º quadrante:

- ✓Função negativa.
- ✓Função decrescente.

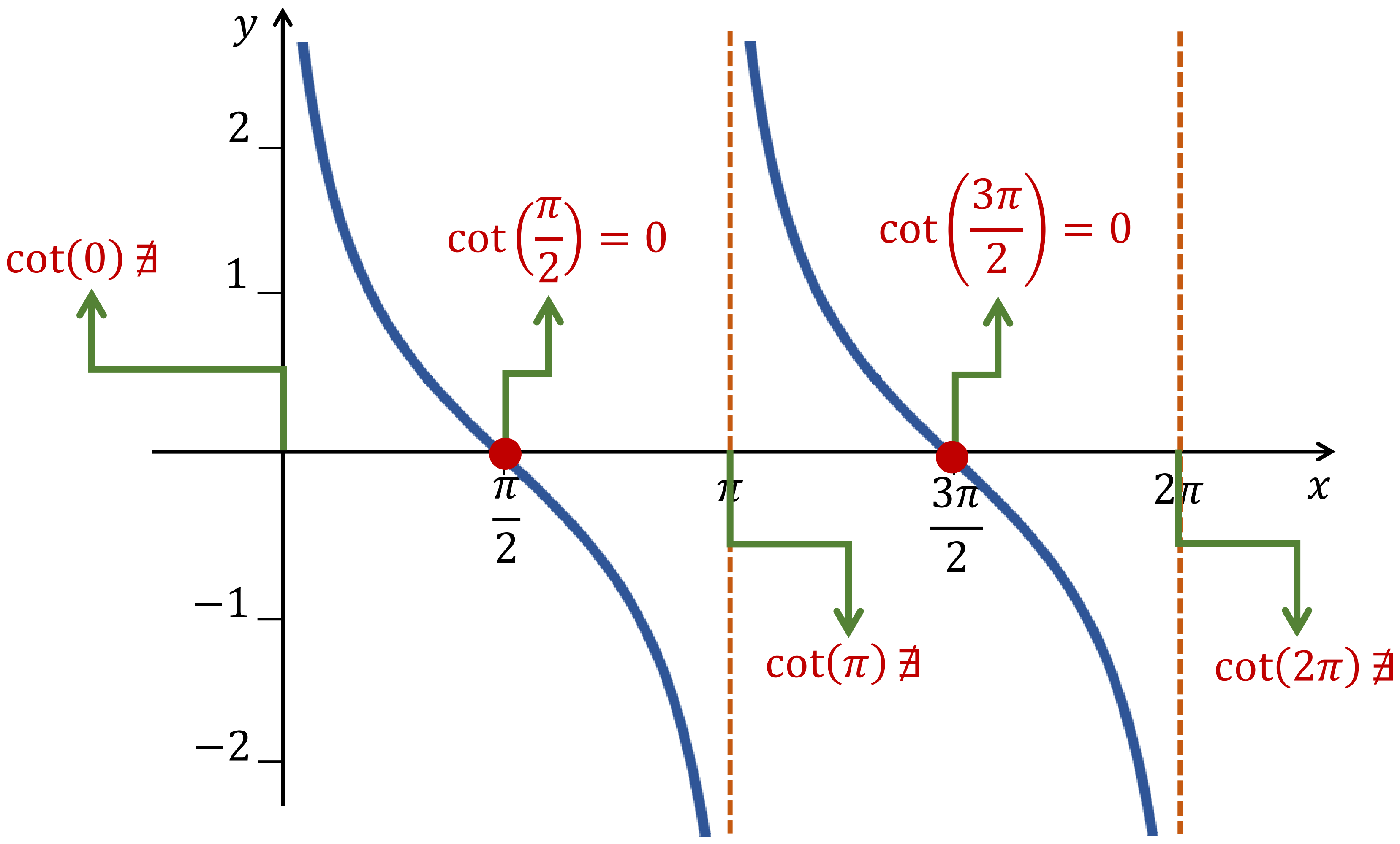
3º quadrante:

- ✓Função positiva.
- ✓Função decrescente.

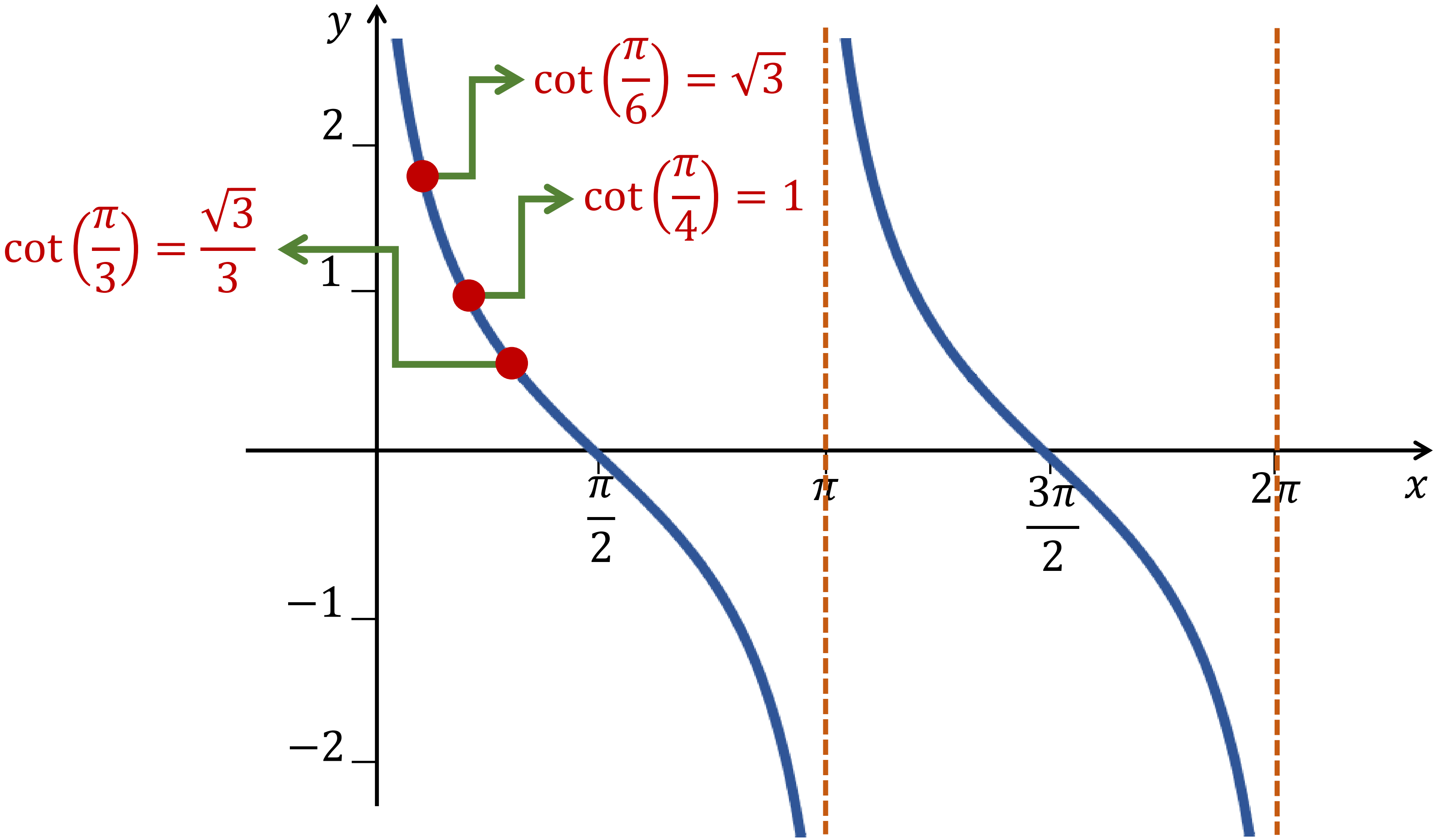
4º quadrante:

- ✓Função negativa.
- ✓Função decrescente.

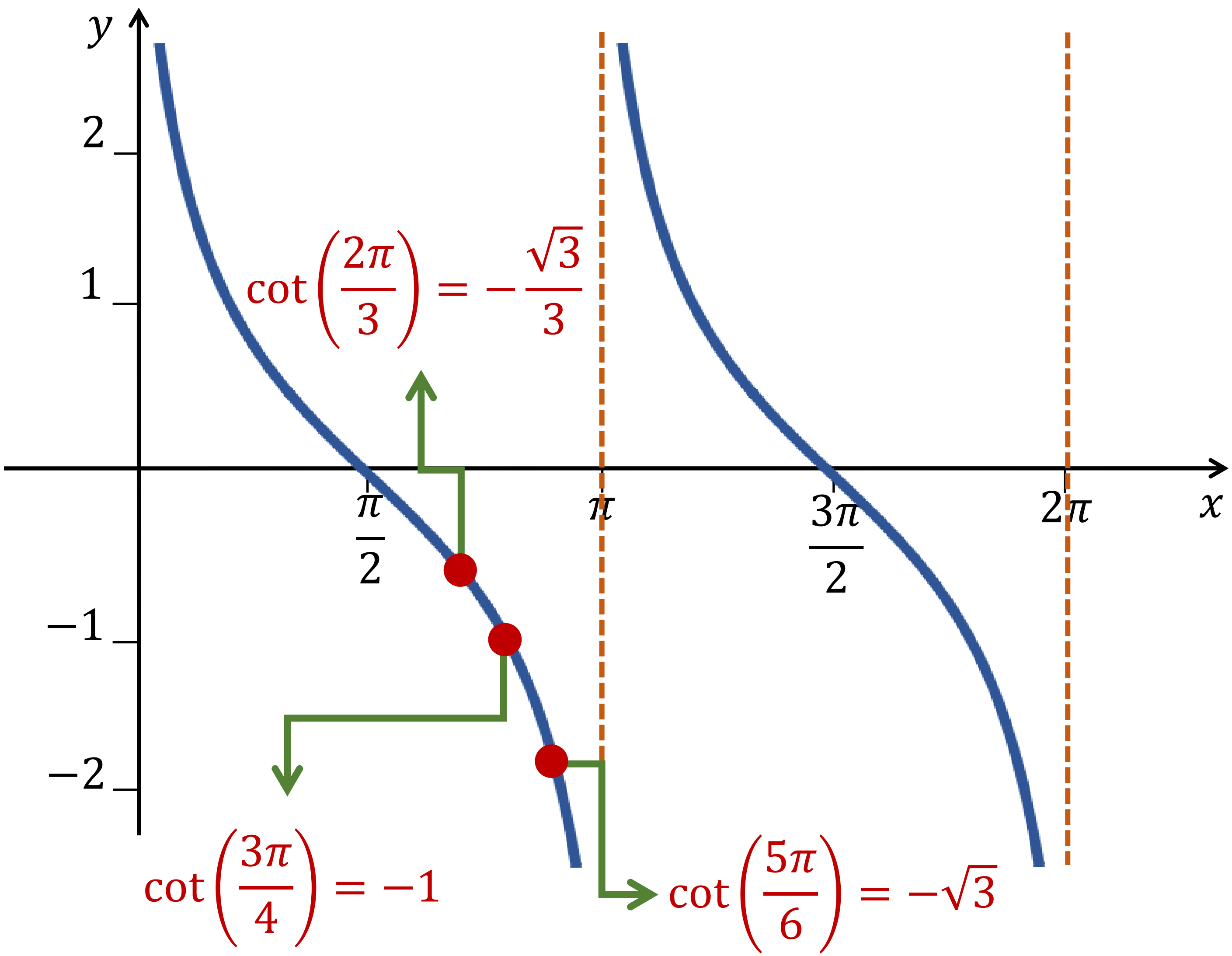
Função Cotangente



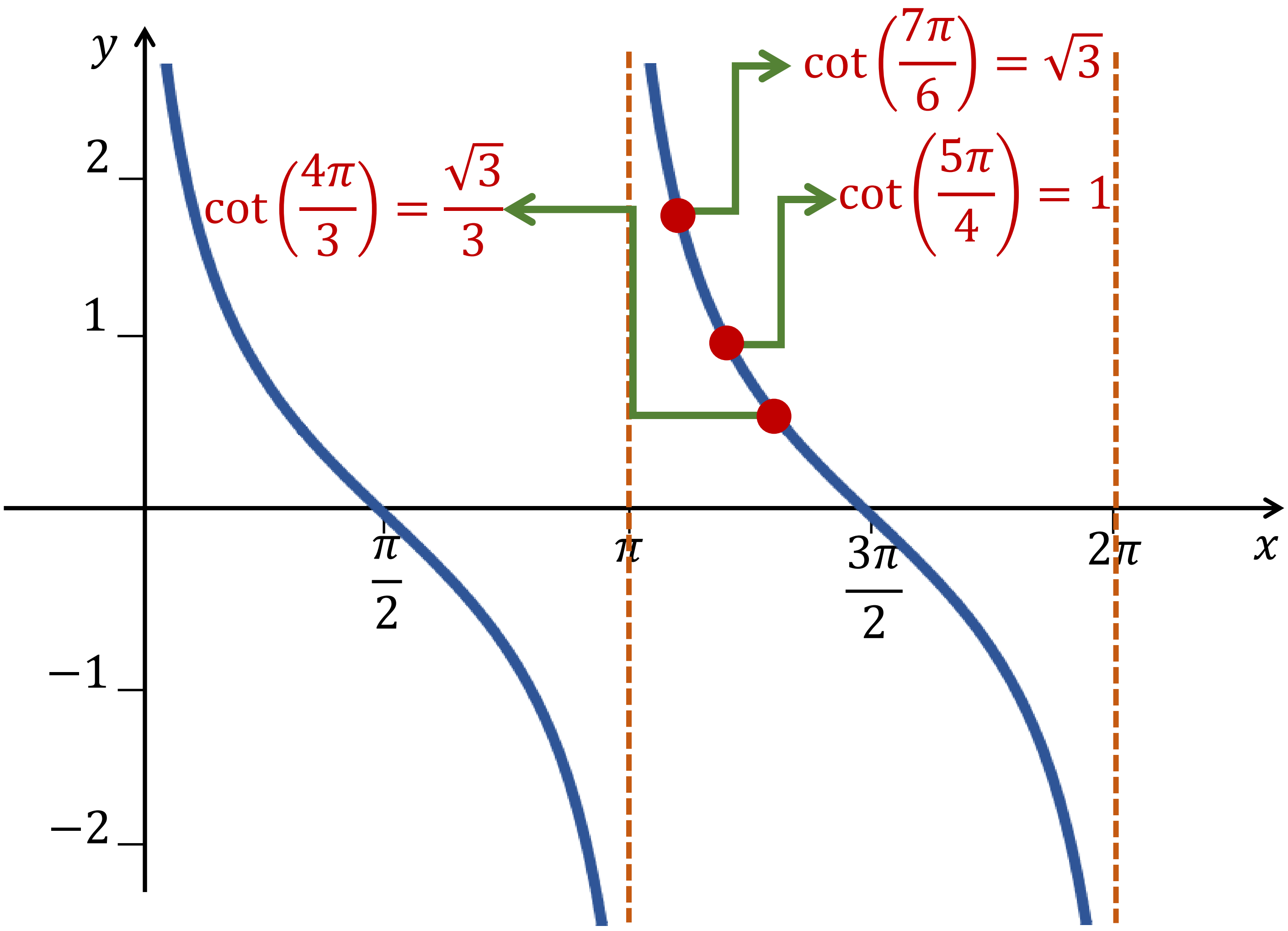
Função Cotangente: primeiro quadrante



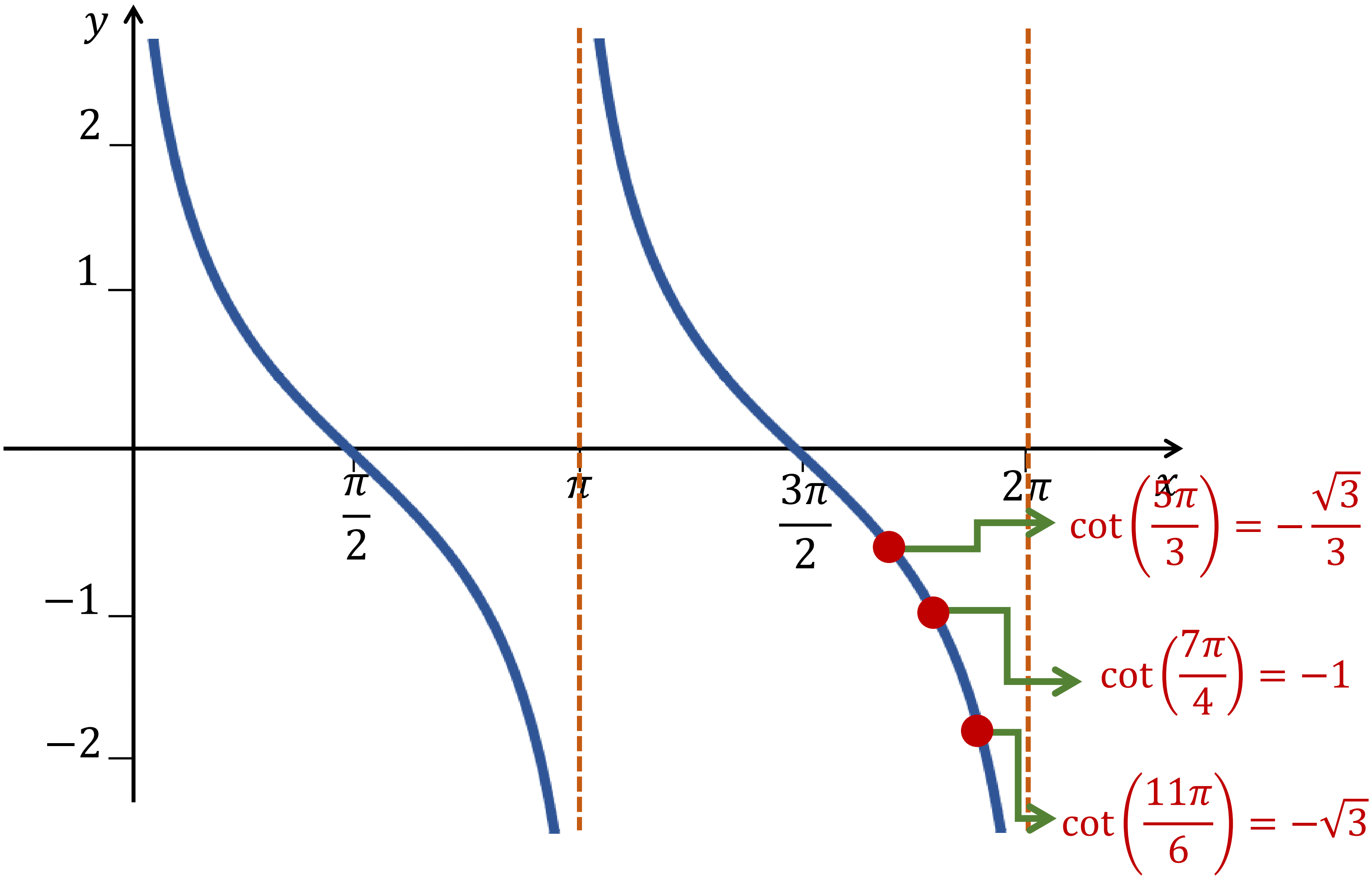
Função Cotangente: segundo quadrante



Função Cotangente: terceiro quadrante



Função Cotangente: quarto quadrante



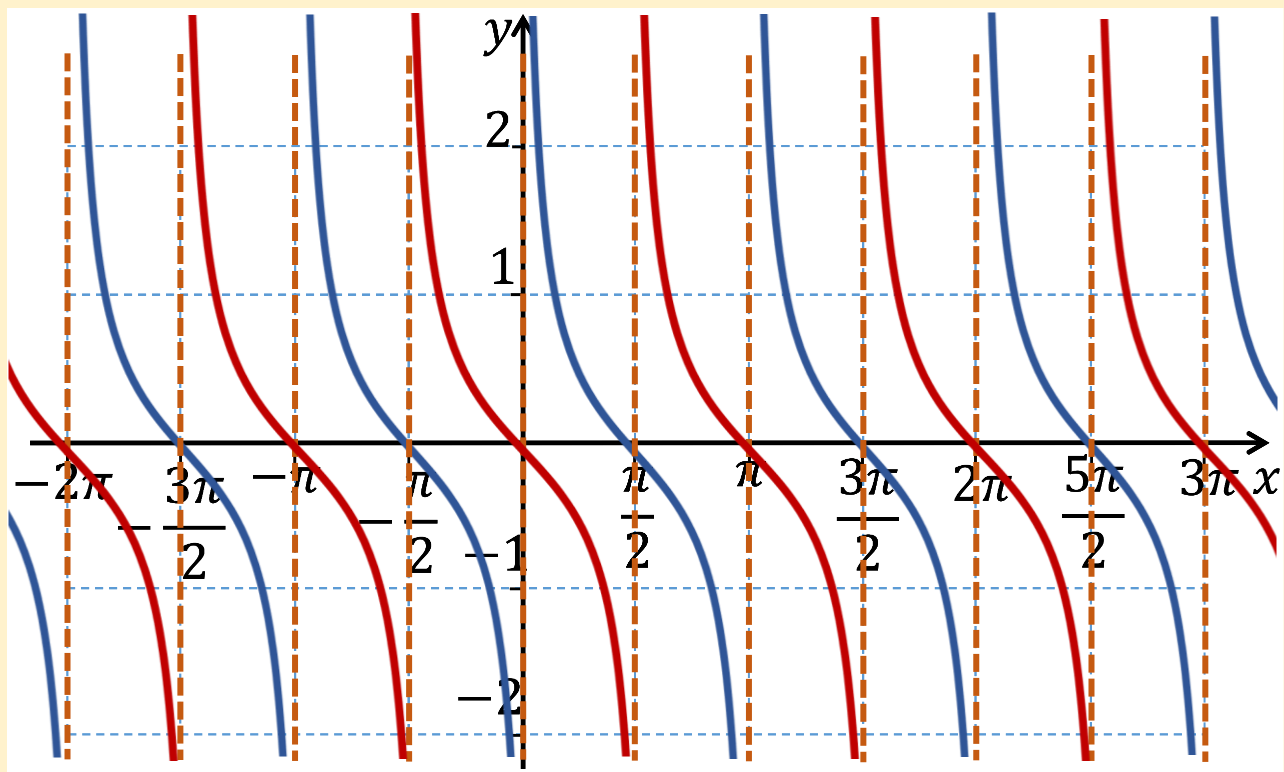
Exemplos

1) Esboce o gráfico, determine o domínio, a imagem e o período e as assíntotas da função $f(x) = \cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

$y = \cot x$

$y = \cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Solução:



Exercícios Propostos

Exercícios

1) Esboce o gráfico das funções trigonométricas, e determine o período (T), o domínio e imagem das funções:

(a) $y = \tan(2x) + 1$

(b) $y = 2\tan(3x)$

(c) $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

(d) $y = \frac{1}{2}\cot(x - \pi)$

Respostas

Exercício 1:

a) $T = \dfrac{\pi}{2}$ $\quad D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\quad Im(f) = \mathbb{R}$

b) $T = \dfrac{\pi}{3}$ $\quad D(f) = \left\{x \in R \middle| x \neq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\quad Im(f) = \mathbb{R}$

c) $T = \pi$ $\quad D(f) = \left\{x \in R \middle| x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\quad Im(f) = \mathbb{R}$

d) $T = \pi$ $\quad D(f) = \{x \in R | x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ $\quad Im(f) = \mathbb{R}$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA

O GAMA possui monitorias de:

- **Matemática Elementar, Cálulo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e equivalentes)
- **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
- **Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3** (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino

Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas

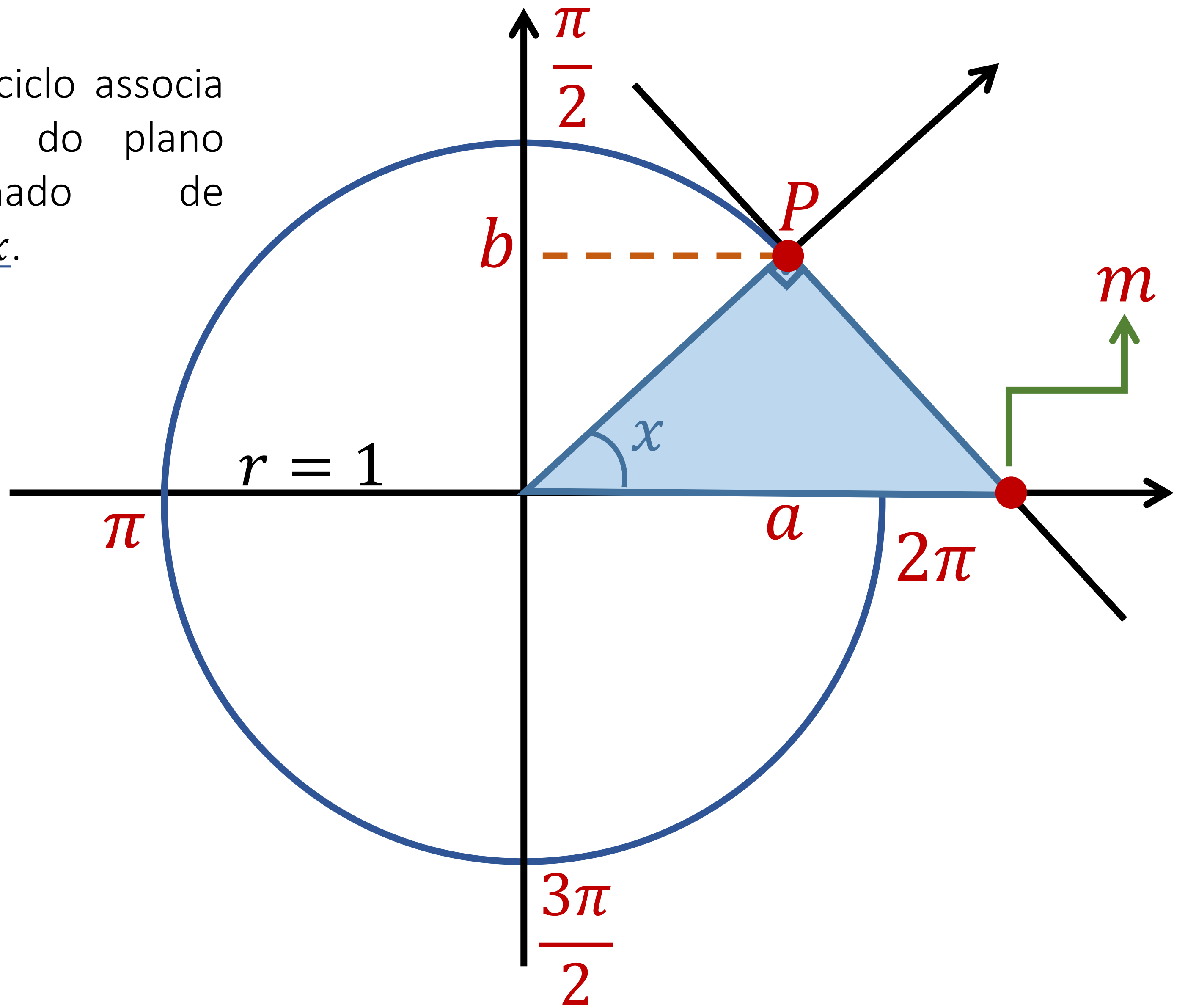
Aula 04

Projeto
GAMA
Grupo de Apoio em Matemática

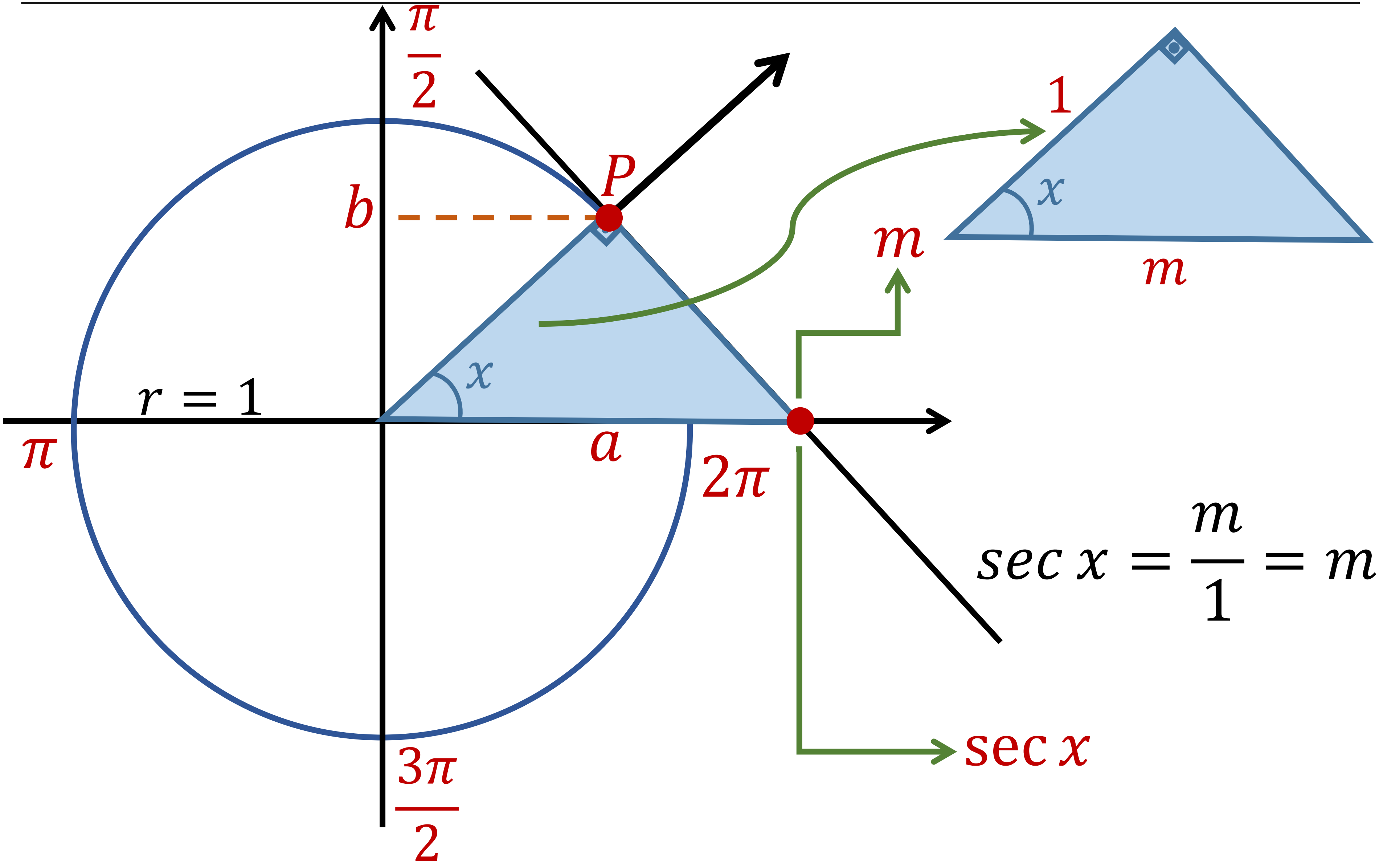
Secante no Ciclo Trigonométrico

Lembrando...

Para cada arco x, o ciclo associa um ponto $P(a,b)$ do plano cartesiano, chamado de <u>extremidade do arco x</u>.



Secante no Ciclo Trigonométrico

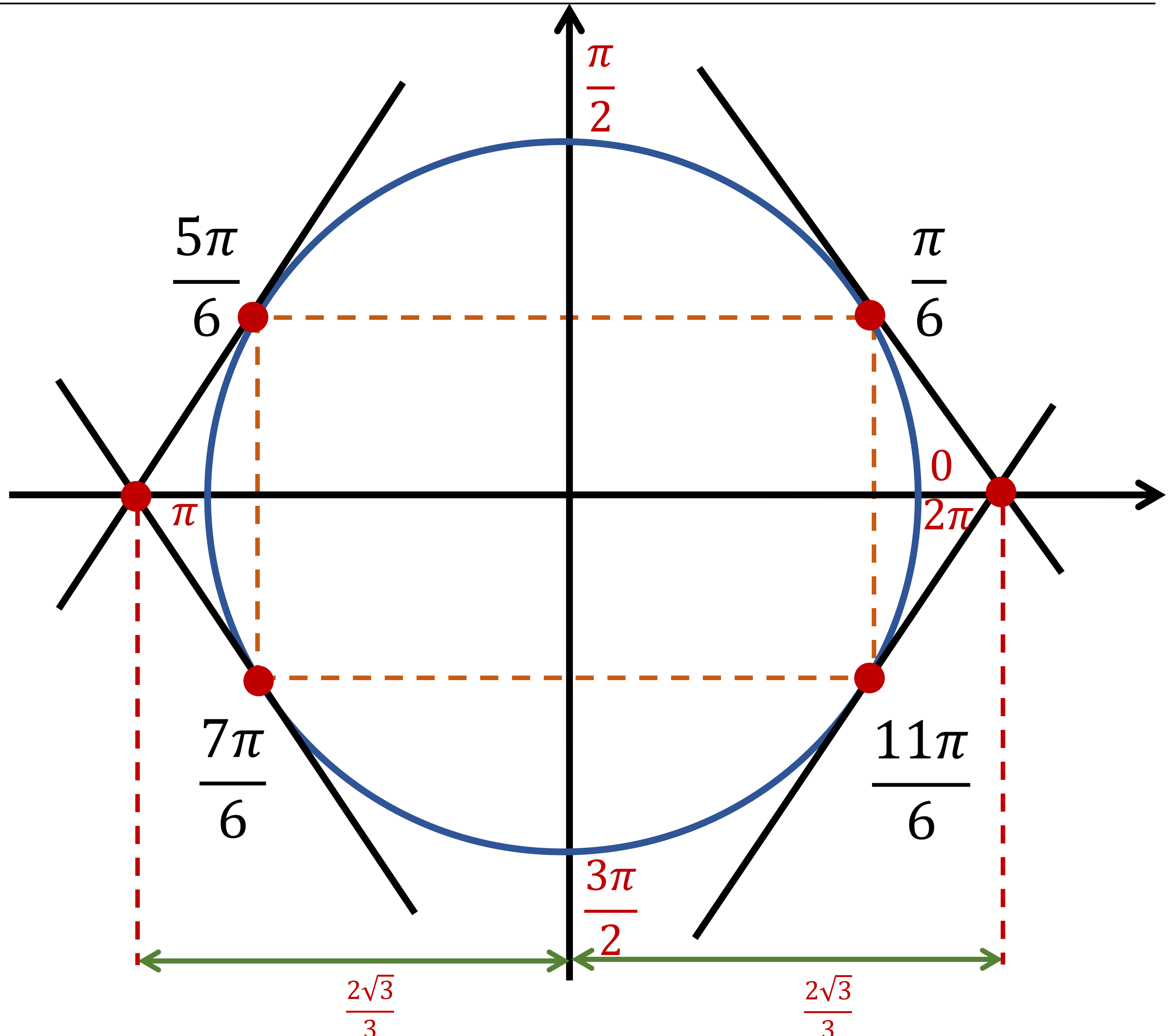


$$sec\, x = \frac{m}{1} = m$$

Secante dos arcos notáveis

Arco $\dfrac{\pi}{6}$

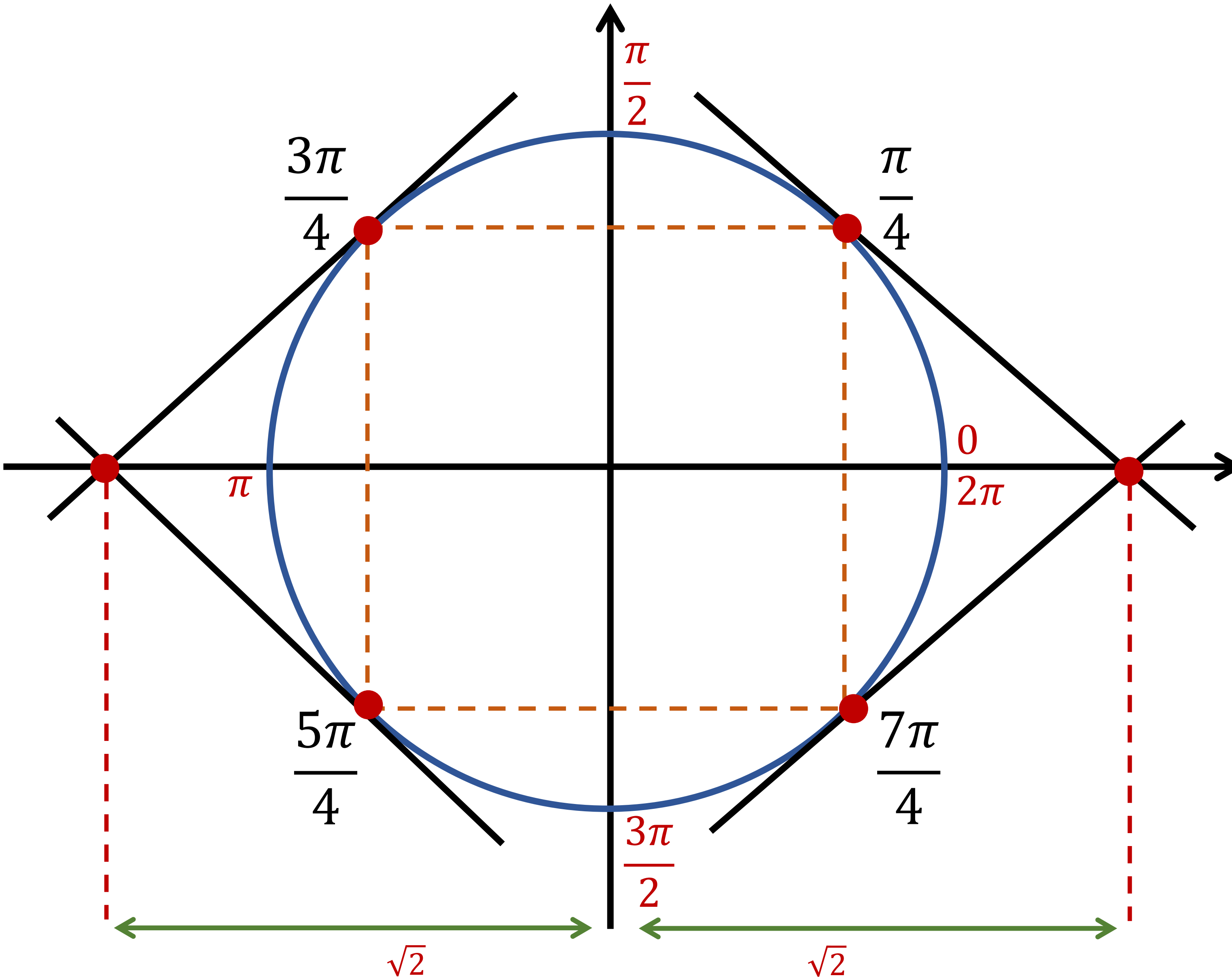
	Secante
$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
$\dfrac{5\pi}{6}$	$-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
$\dfrac{7\pi}{6}$	$-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
$\dfrac{11\pi}{6}$	$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$



Secante dos arcos notáveis

Arco $\frac{\pi}{4}$

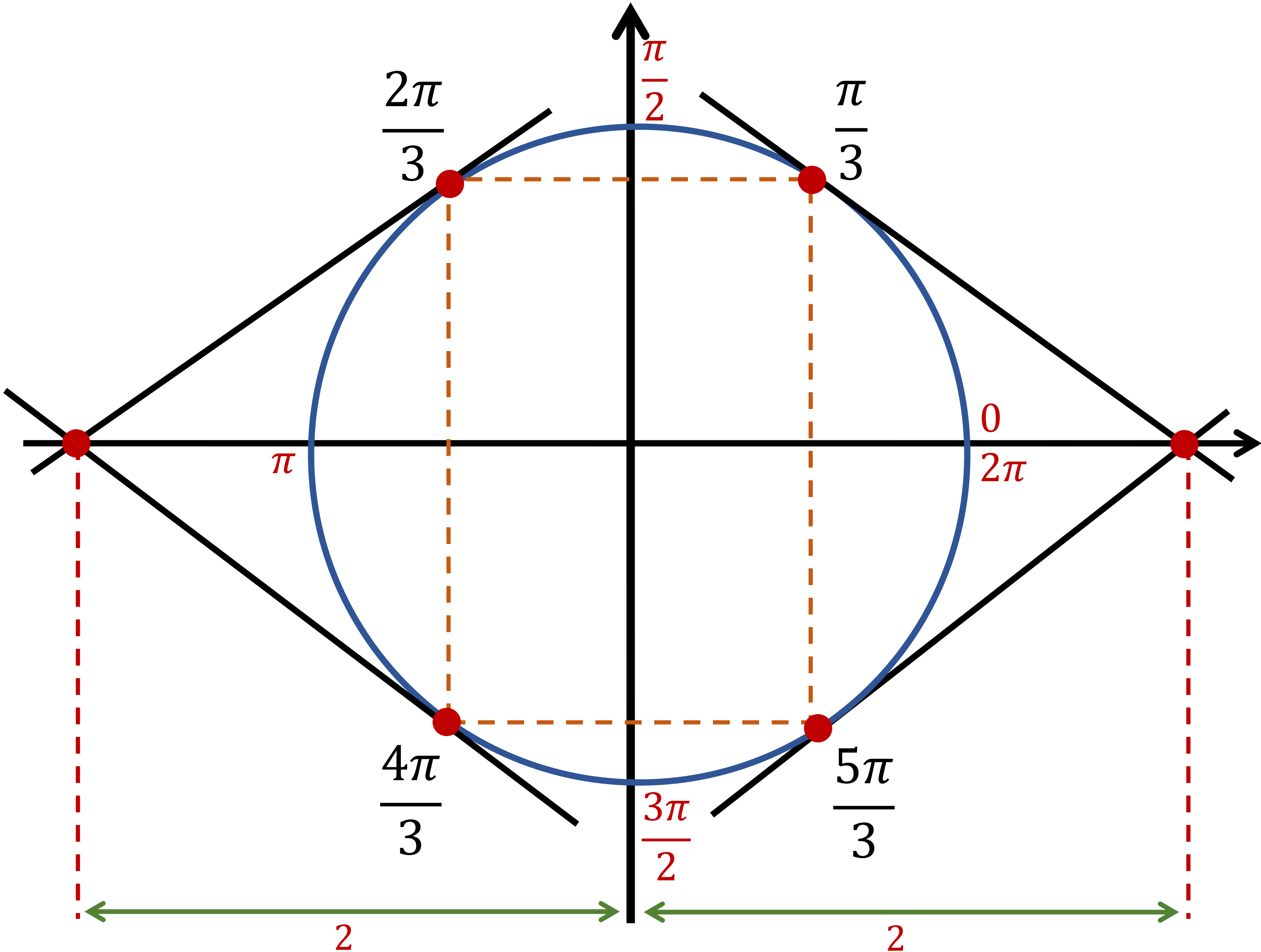
	Secante
$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$-\sqrt{2}$
$\frac{5\pi}{4}$	$-\sqrt{2}$
$\frac{7\pi}{4}$	$\sqrt{2}$



Secante dos arcos notáveis

Arco $\frac{\pi}{3}$

	Secante
$\frac{\pi}{3}$	2
$\frac{2\pi}{3}$	-2
$\frac{4\pi}{3}$	-2
$\frac{5\pi}{3}$	2



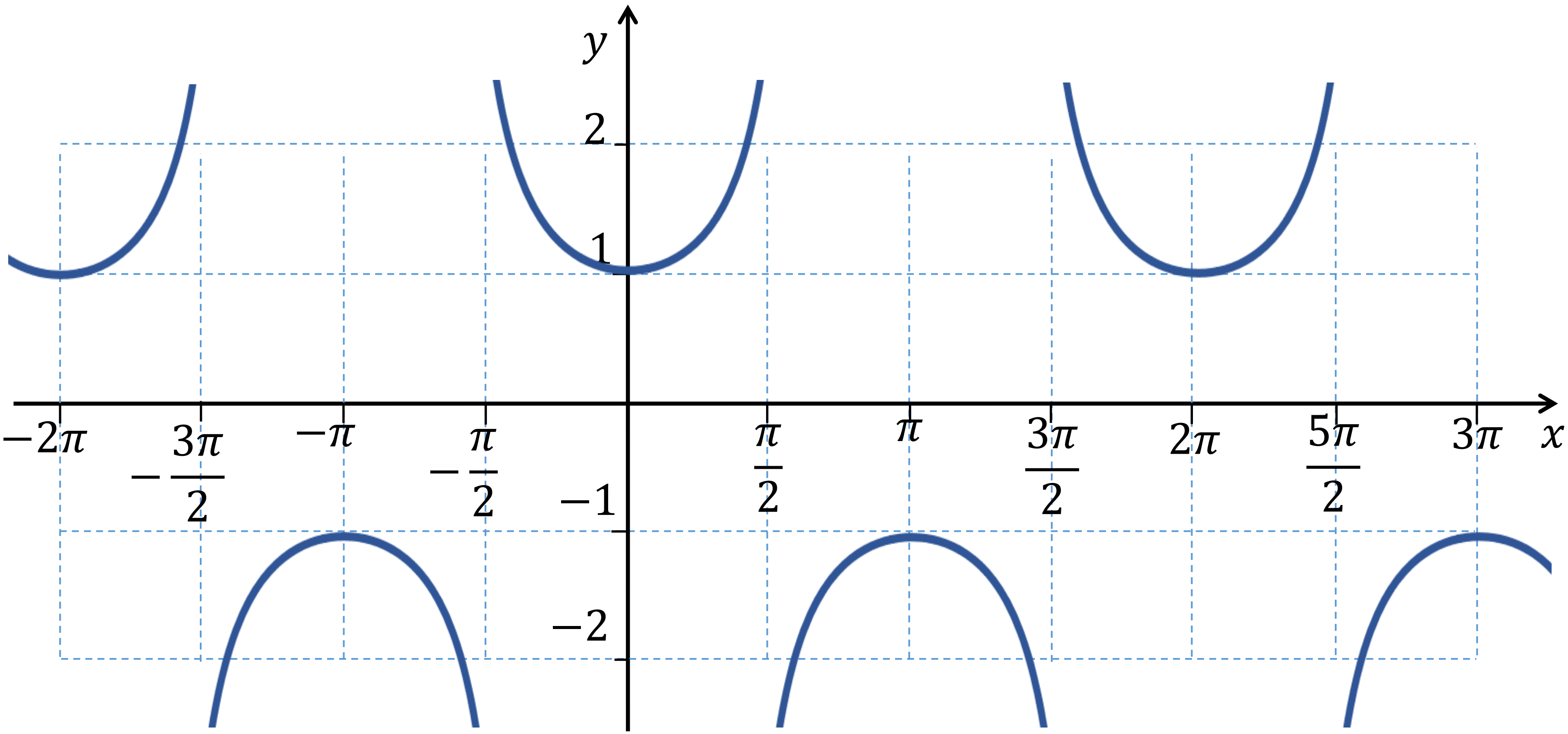
Função Secante

Definição:

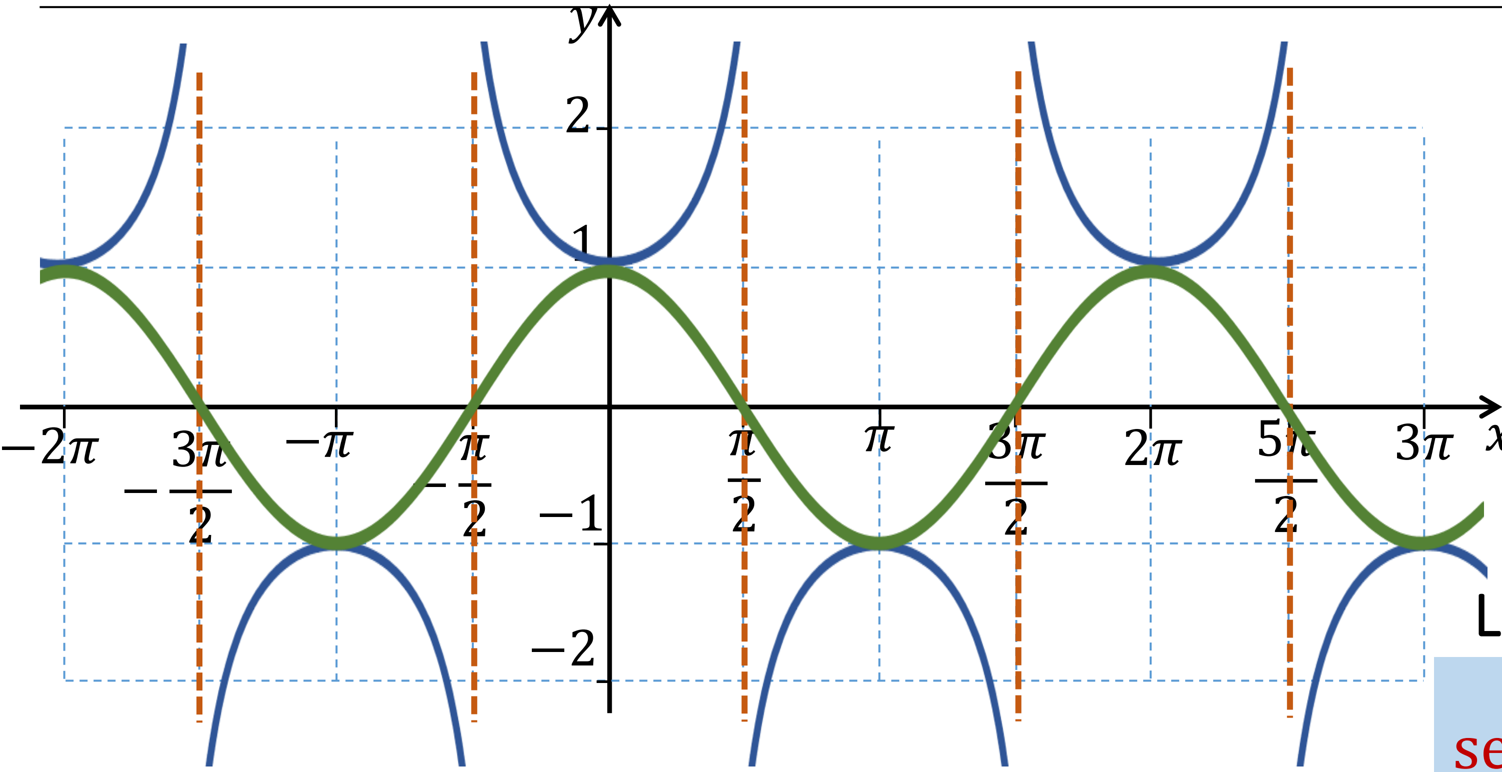
A função f dada por $f(x) = \sec x$ é chamada de função secante.

Gráfico da função secante

$y = \sec x$



Função Secante



Lembre que:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Domínio

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Assíntotas

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$$

Imagem

$$Im(f) = \mathbb{R} - (-1,1)$$

Período

$$P(f) = 2\pi$$

Função Secante

1º quadrante:

- ✓ Função positiva.
- ✓ Função crescente.

2º quadrante:

- ✓ Função negativa.
- ✓ Função crescente.

3º quadrante:

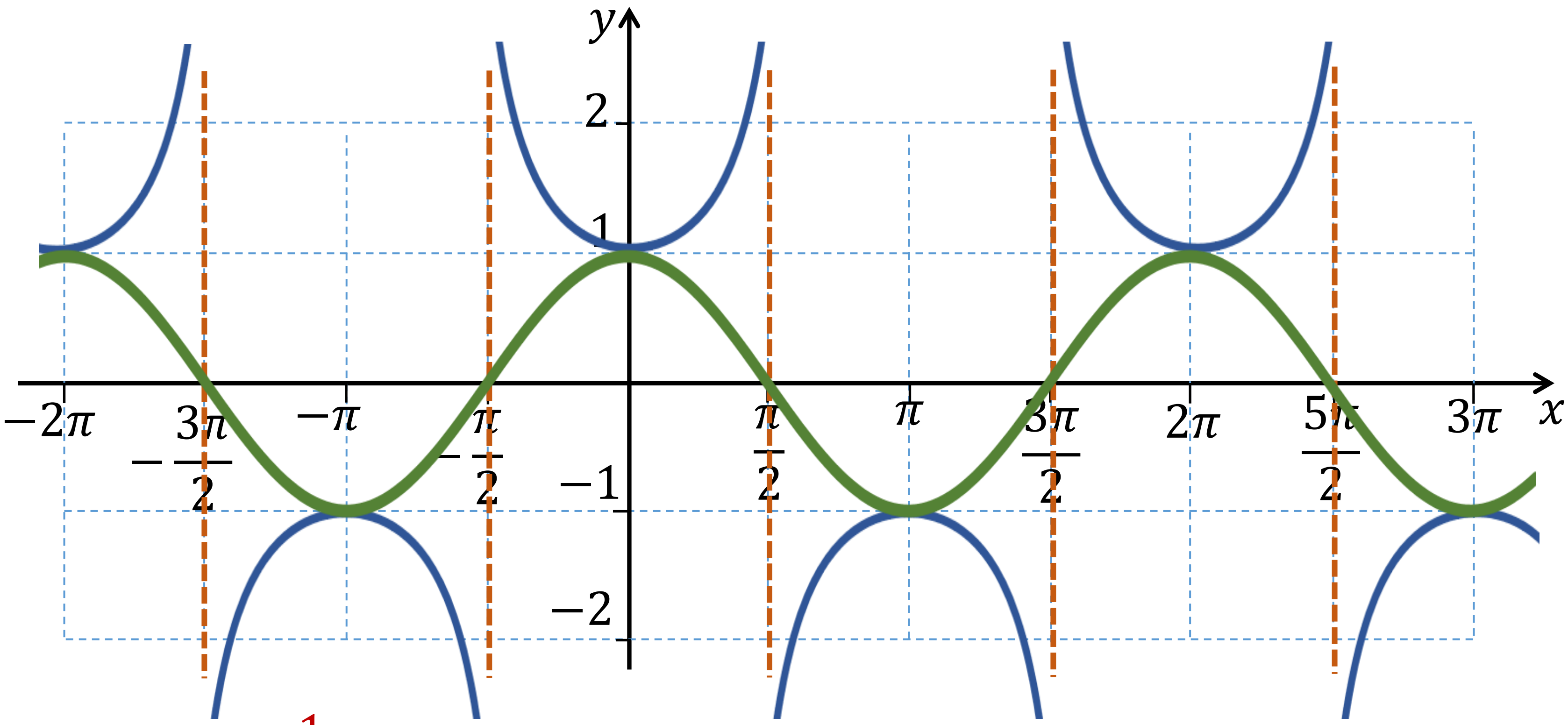
- ✓ Função negativa.
- ✓ Função decrescente.

4º quadrante:

- ✓ Função positiva.
- ✓ Função decrescente.

Função Secante

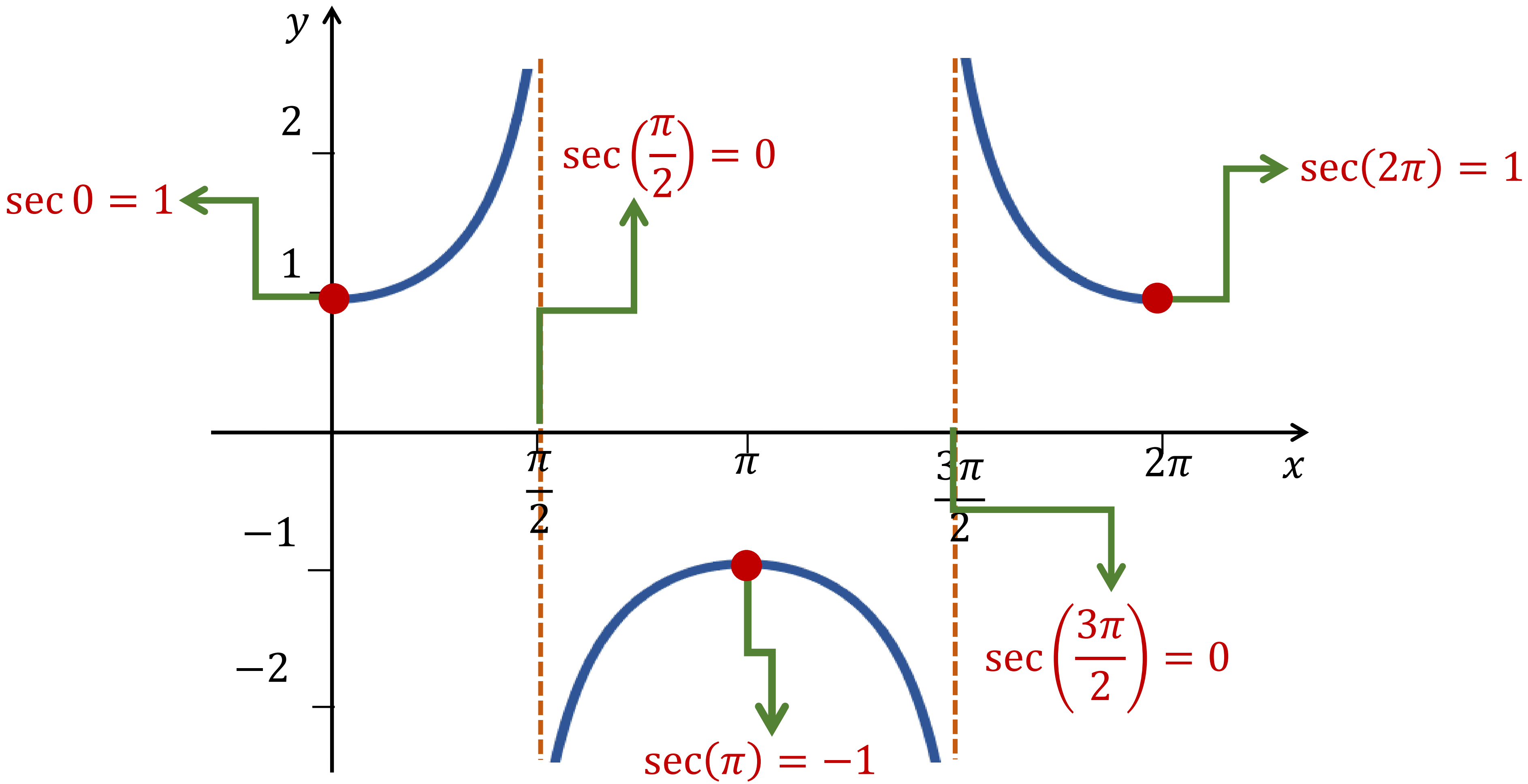
Relação gráfica entre as funções secante e cosseno:



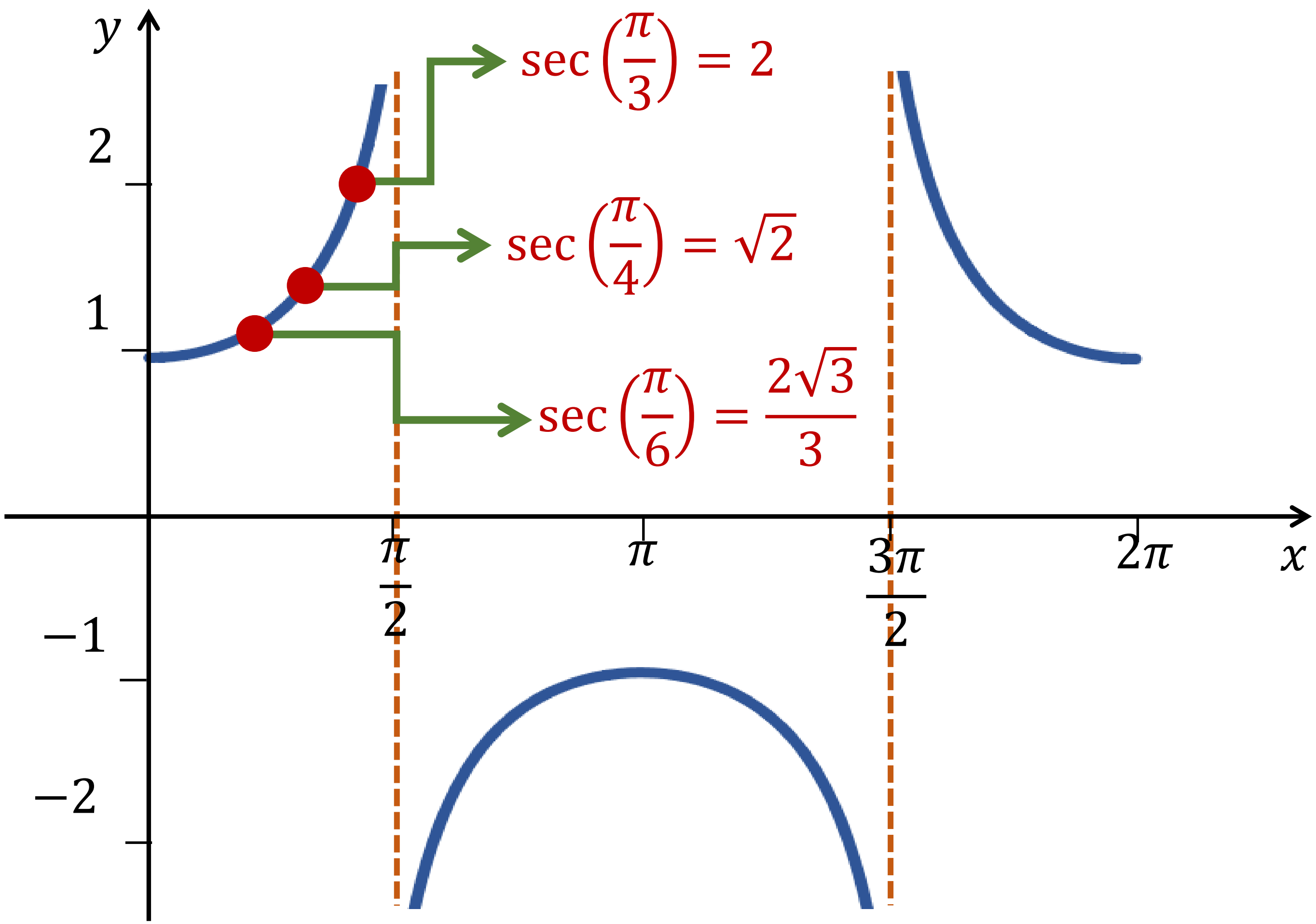
$$f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

- ✓ Onde o cosseno cresce, a secante decresce, e vice-versa;
- ✓ Onde o cosseno se anula, a secante não está definida;
- ✓ O sinal da secante acompanha o sinal do cosseno, em cada quadrante.

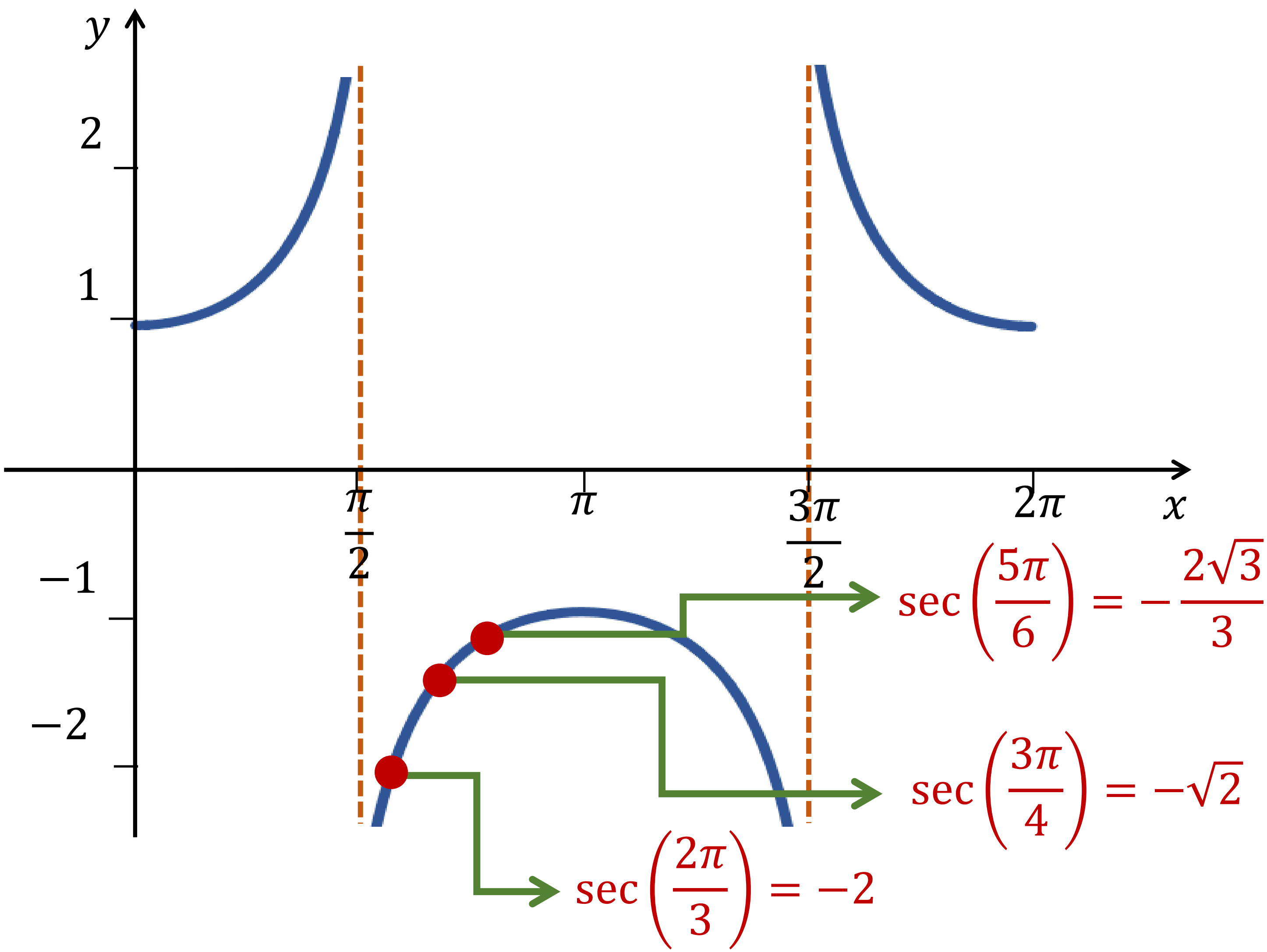
Função Secante



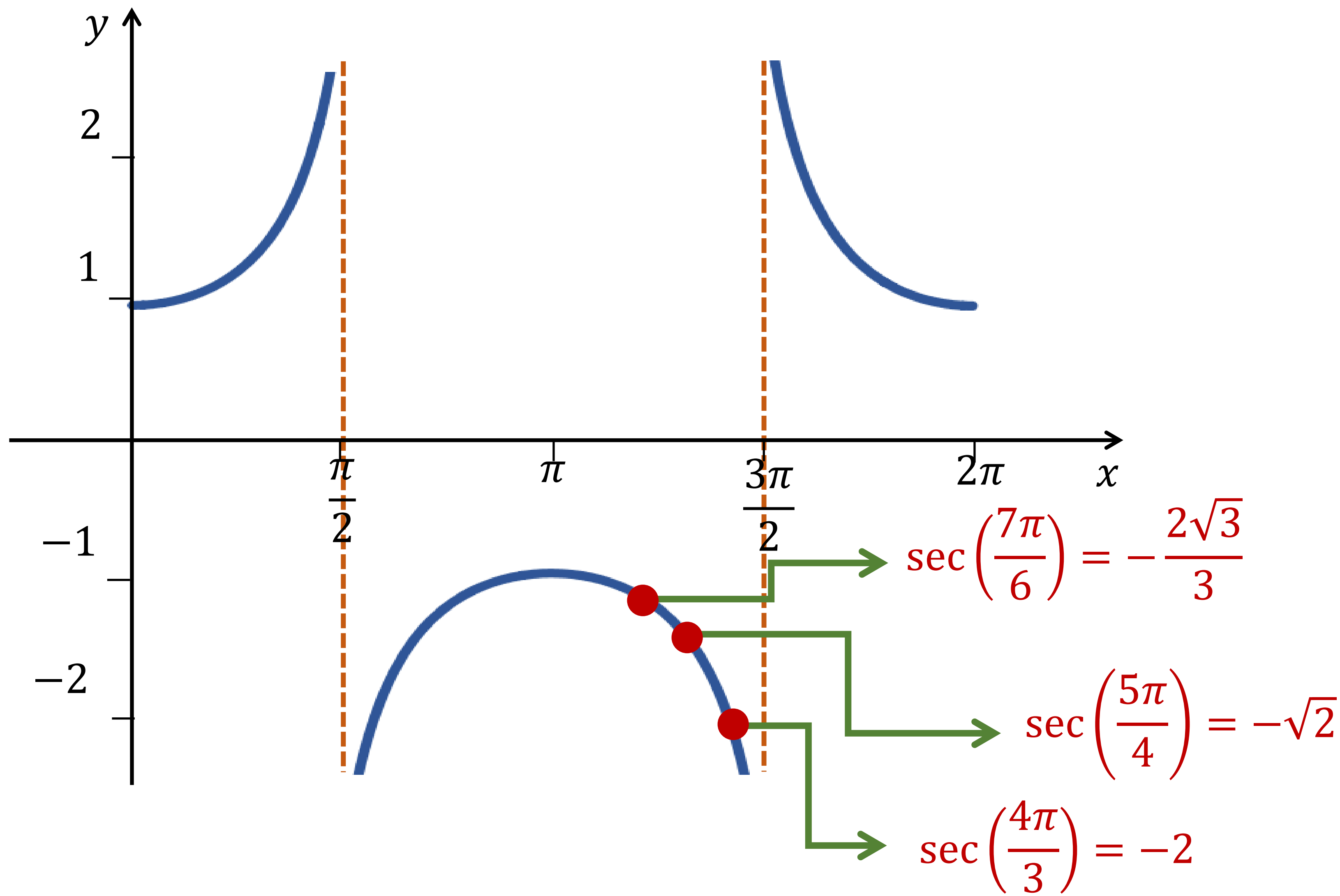
Função Secante: primeiro quadrante



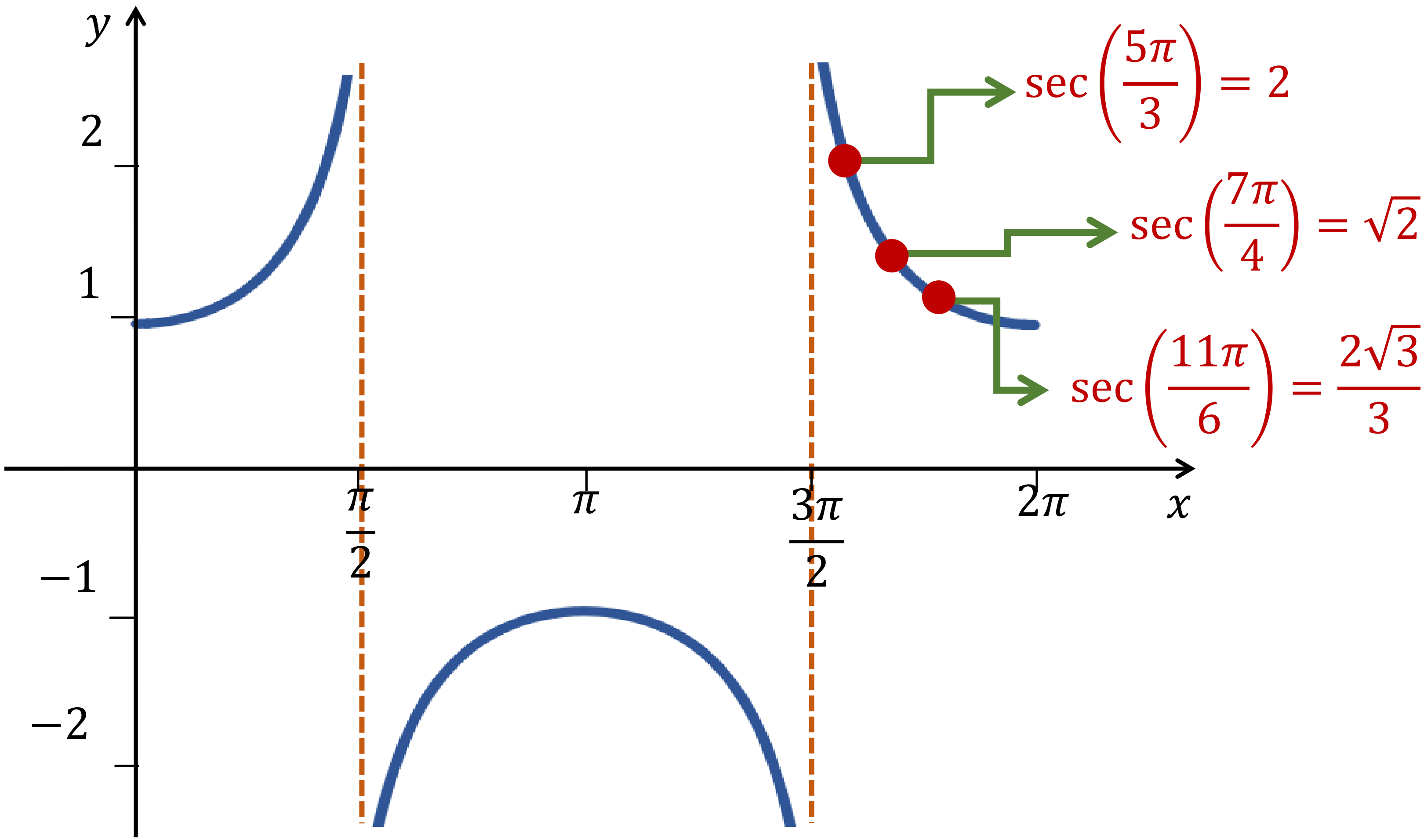
Função Secante: segundo quadrante



Função Secante: terceiro quadrante



Função Secante: quarto quadrante



Exemplos

1) Esboce o gráfico, determine o domínio, a imagem e o período e as assíntotas da função $f(x) = -\sec\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Solução:

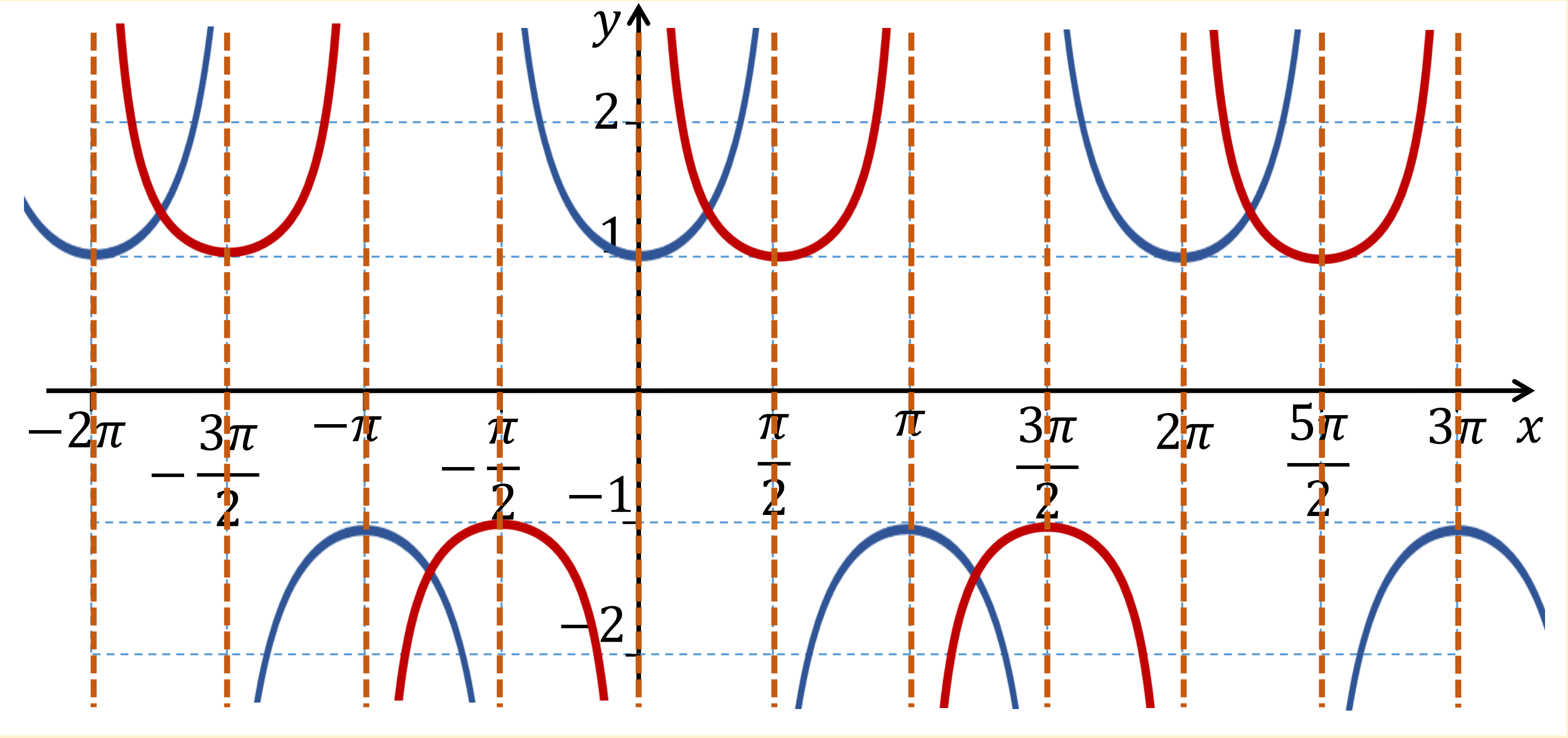
$Im(f) = \mathbb{R} - (-1, 1)$

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

$P(f) = 2\pi$

$y = \sec x$

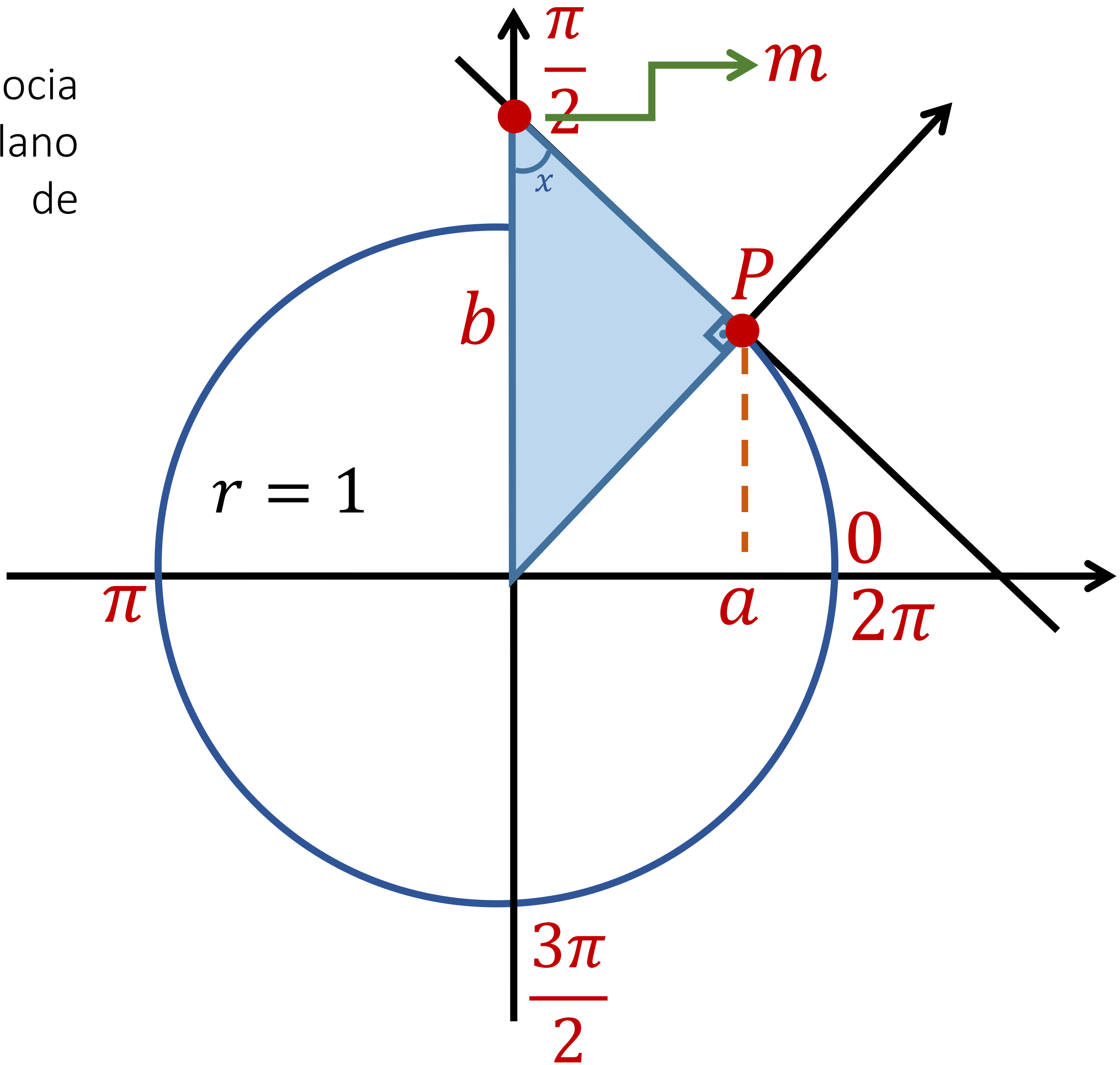
$y = -\sec\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$



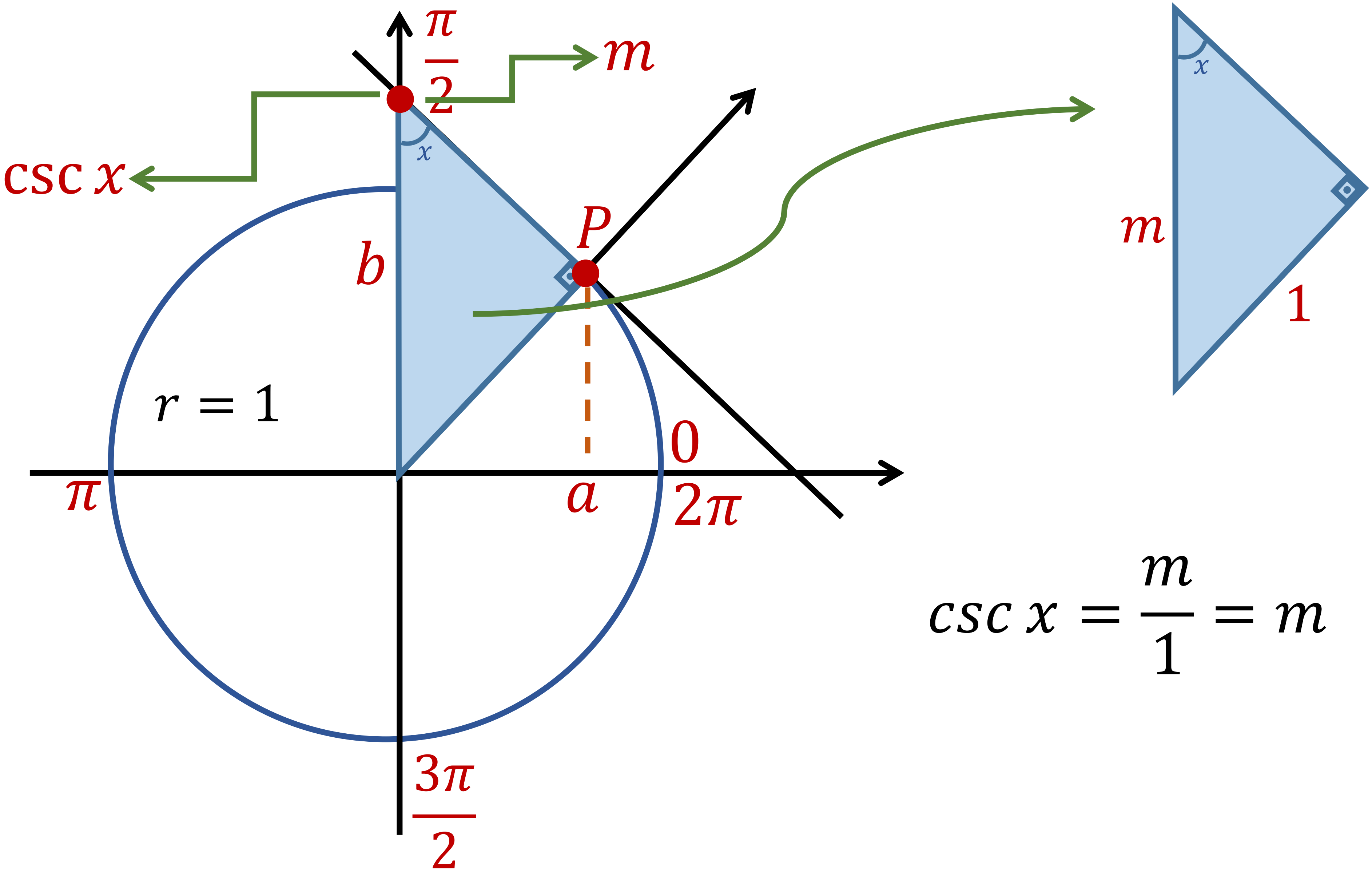
Cossecante no Ciclo Trigonométrico

Lembrando...

Para cada arco x, o ciclo associa um ponto $P(a,b)$ do plano cartesiano, chamado de extremidade do arco x.



Cossecante no Ciclo Trigonométrico

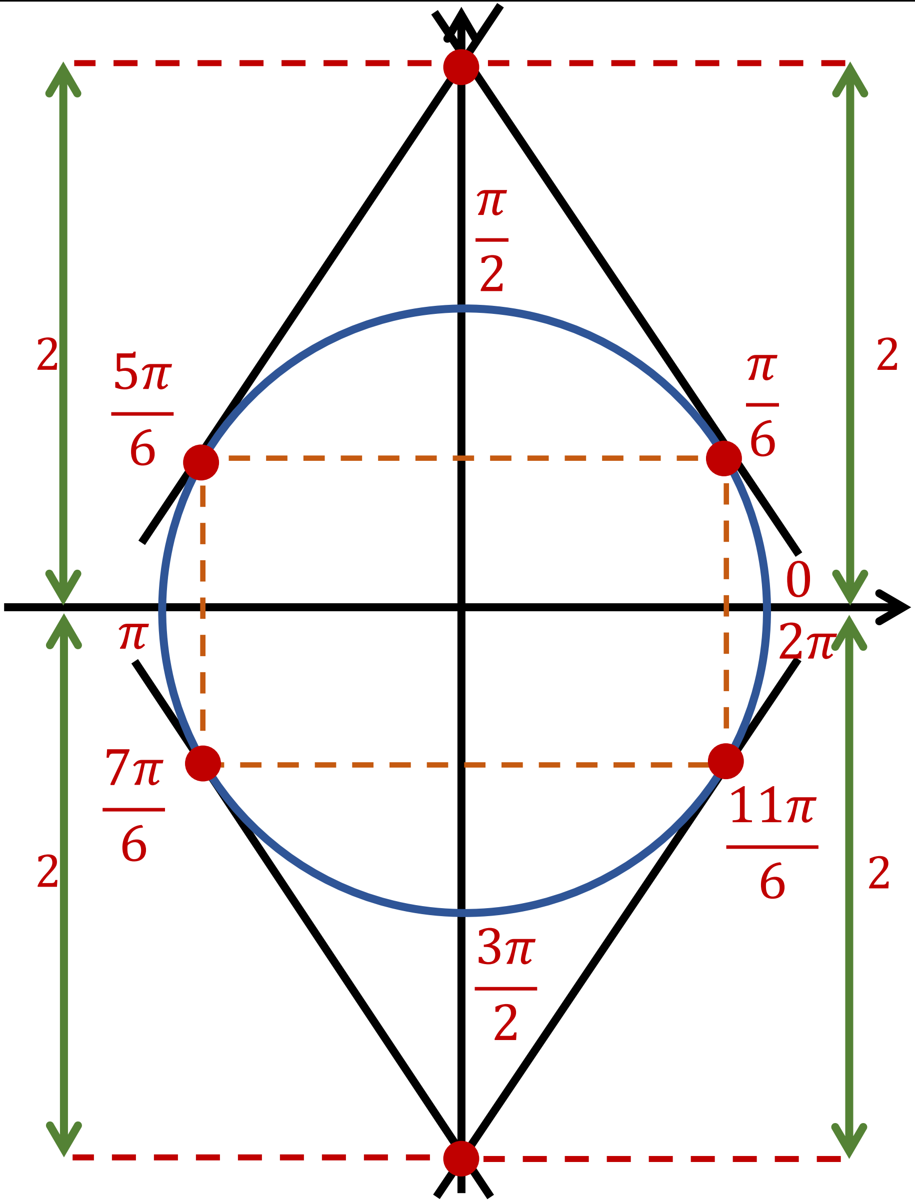


$$csc\, x = \frac{m}{1} = m$$

Cossecante dos arcos notáveis

Arco $\frac{\pi}{6}$

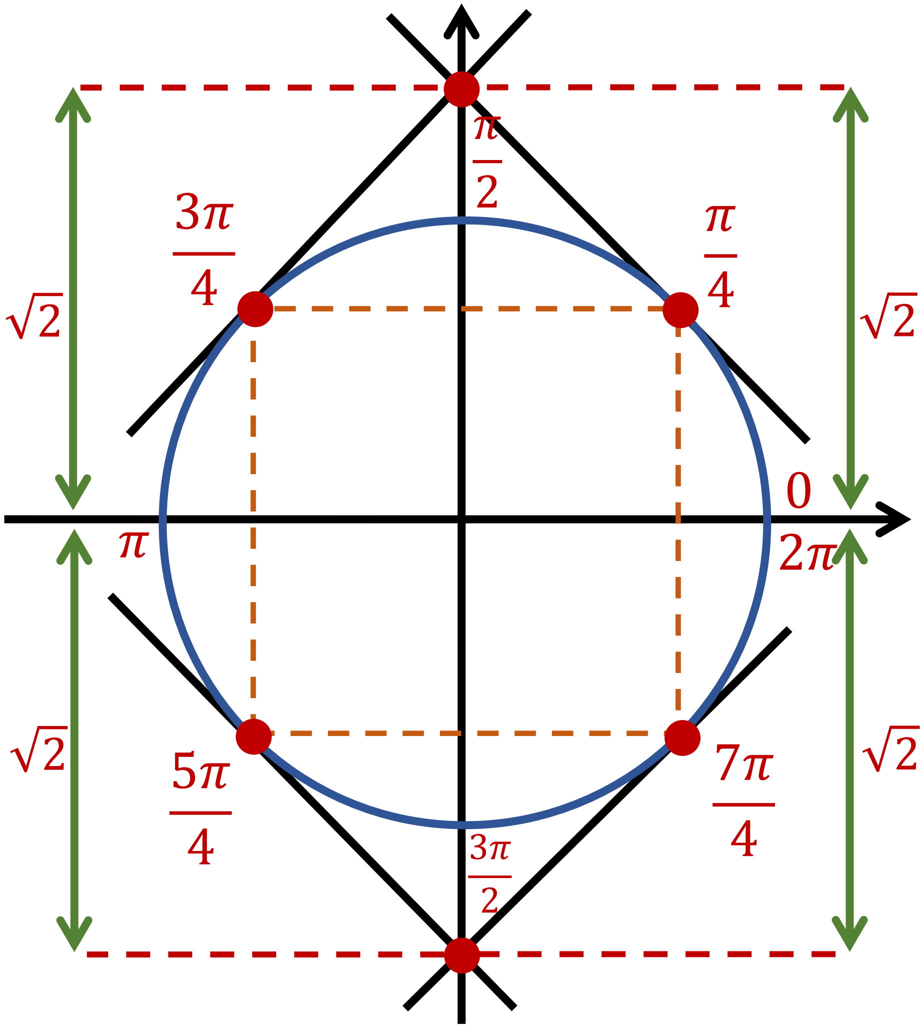
	Cossecante
$\frac{\pi}{6}$	2
$\frac{5\pi}{6}$	2
$\frac{7\pi}{6}$	-2
$\frac{11\pi}{6}$	-2



Cossecante dos arcos notáveis

Arco $\frac{\pi}{4}$

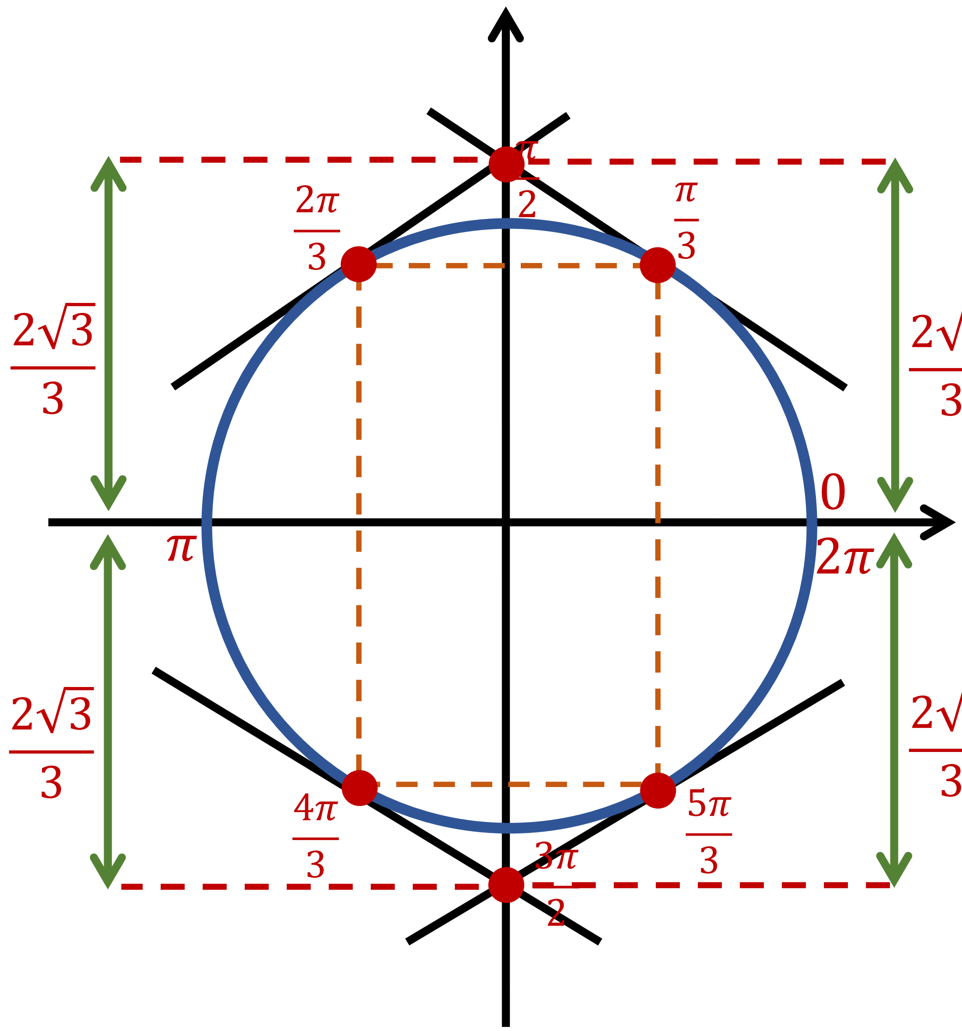
	Cossecante
$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\sqrt{2}$
$\frac{5\pi}{4}$	$-\sqrt{2}$
$\frac{7\pi}{4}$	$-\sqrt{2}$



Cossecante dos arcos notáveis

Arco $\frac{\pi}{3}$

	Cossecante
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$



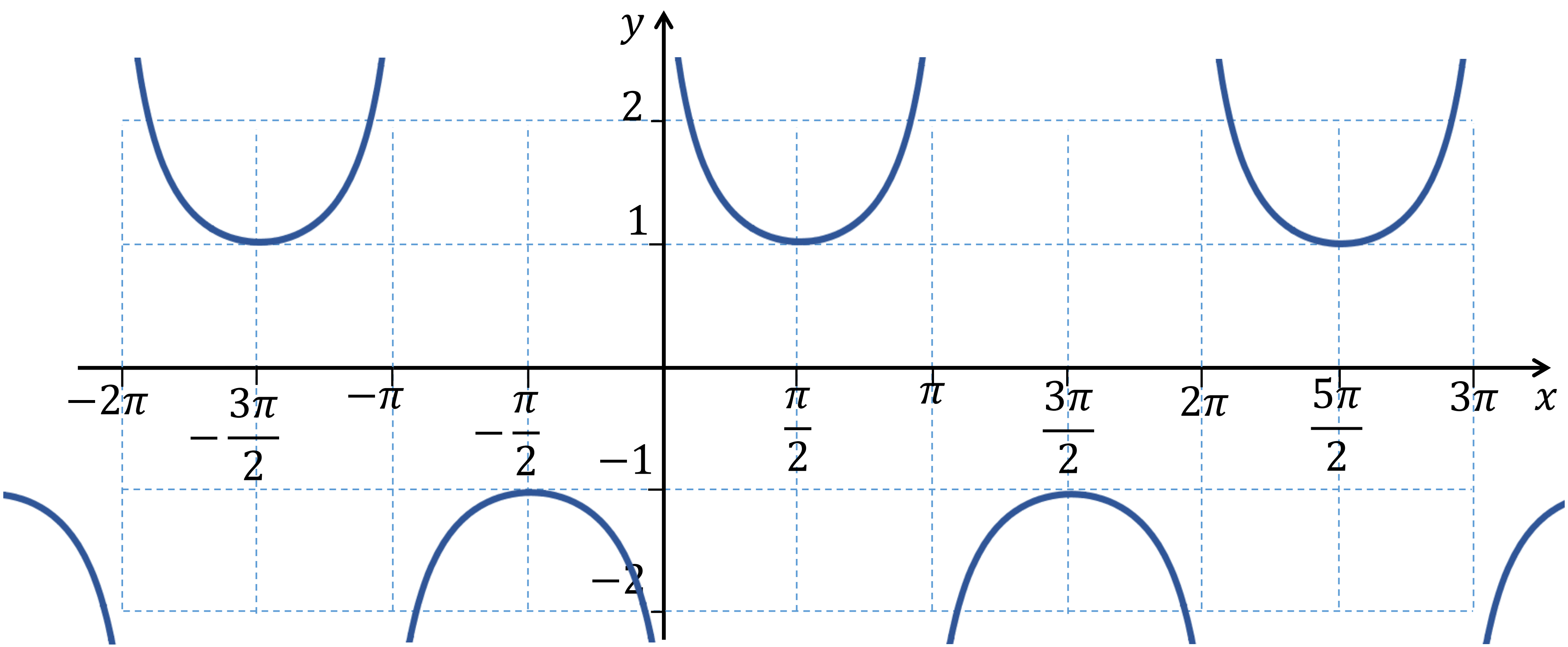
Função Cossecante

Definição:

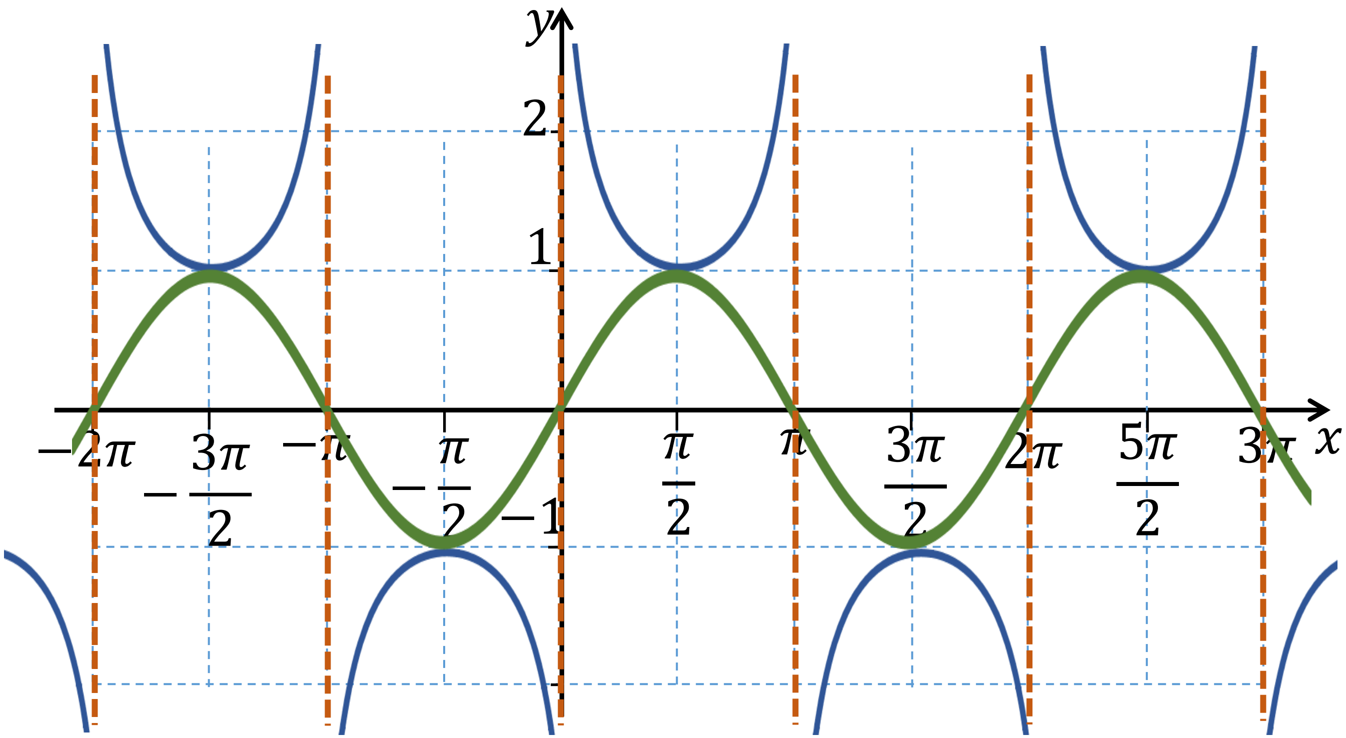
A função f dada por $f(x) = \csc x$ é chamada de **função cossecante.**

Gráfico da função cossecante

$y = \csc x$



Função Cossecante



Lembre que:

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

Domínio

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$$

Imagem

$$Im(f) = \mathbb{R} - (-1,1)$$

Período

$$P(f) = 2\pi$$

Assíntotas

$$x = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$$

Função Cossecante

1º quadrante:

- ✓ Função positiva.
- ✓ Função decrescente.

2º quadrante:

- ✓ Função positiva.
- ✓ Função crescente.

3º quadrante:

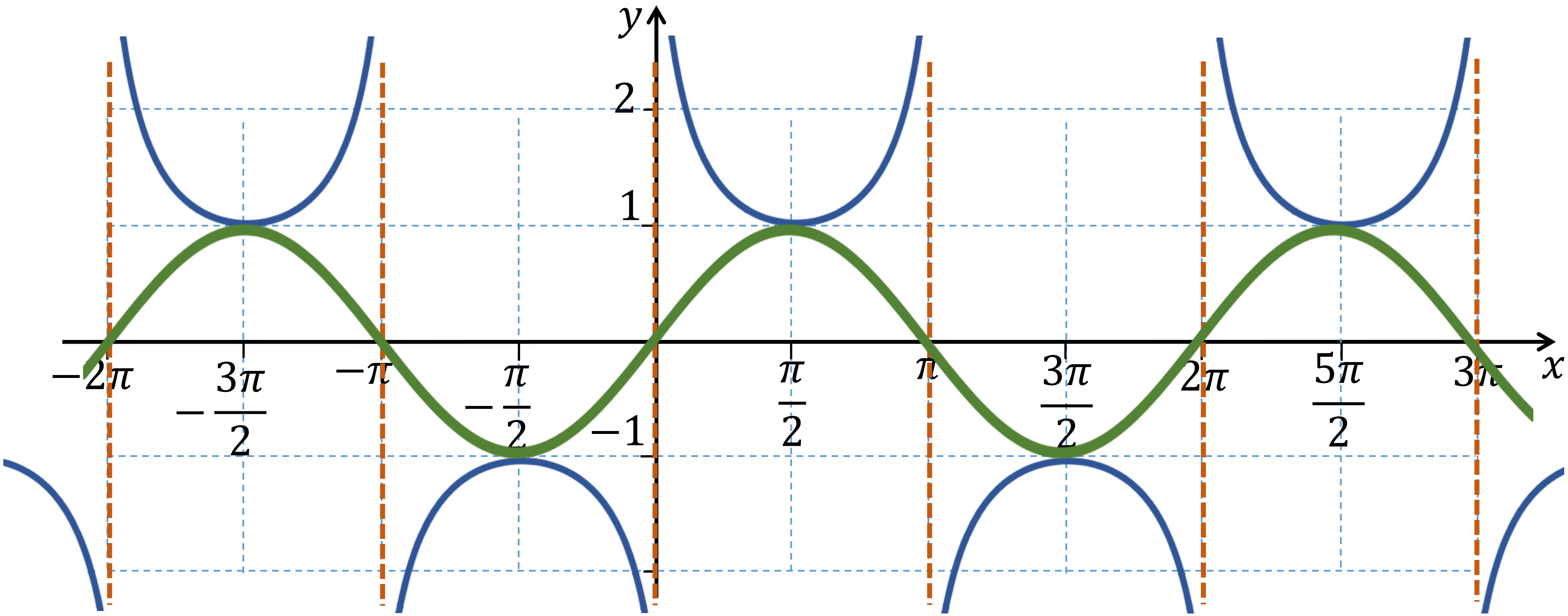
- ✓ Função negativa.
- ✓ Função crescente.

4º quadrante:

- ✓ Função negativa.
- ✓ Função decrescente.

Função Cossecante

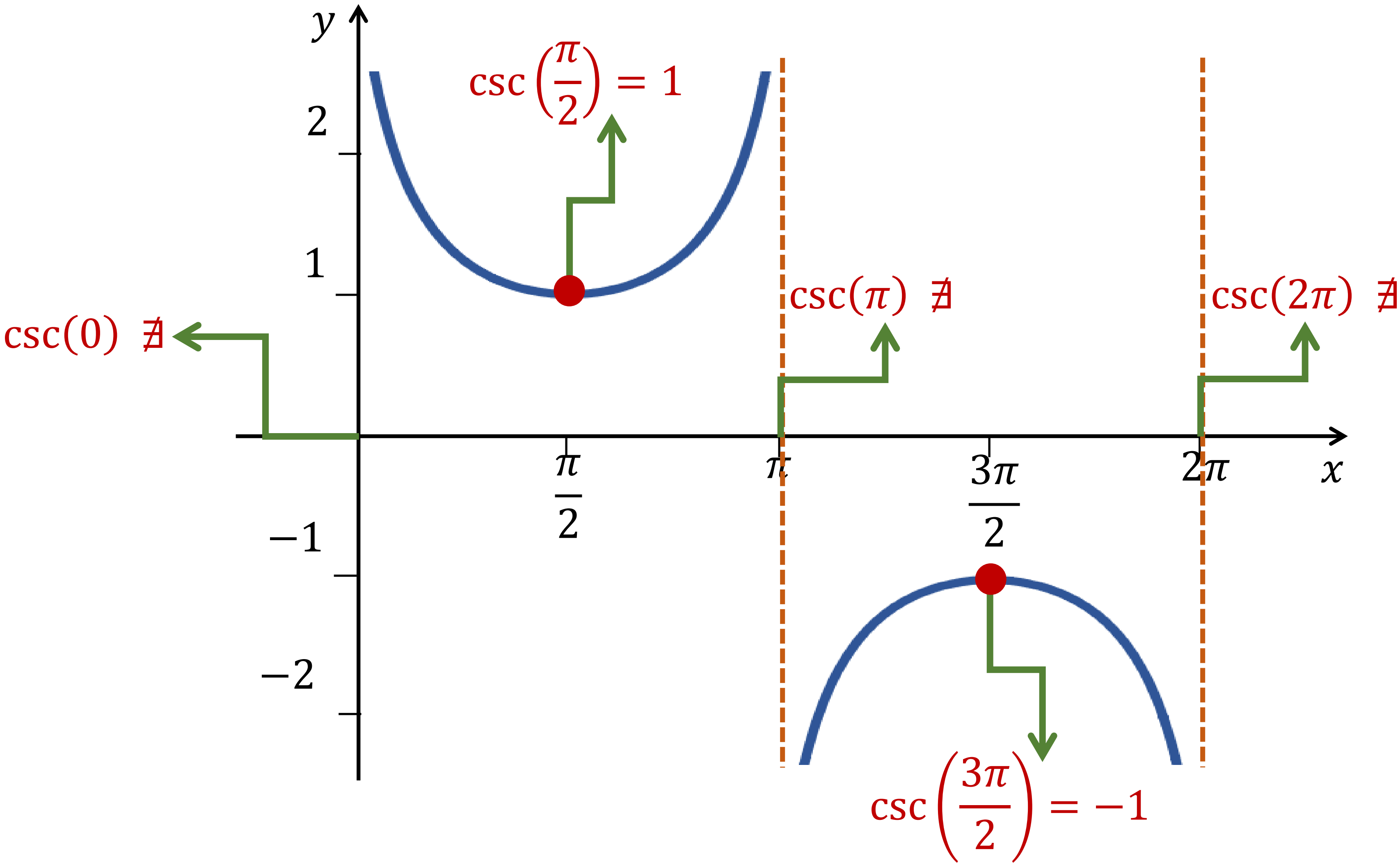
Relação gráfica entre as funções cossecante e seno:



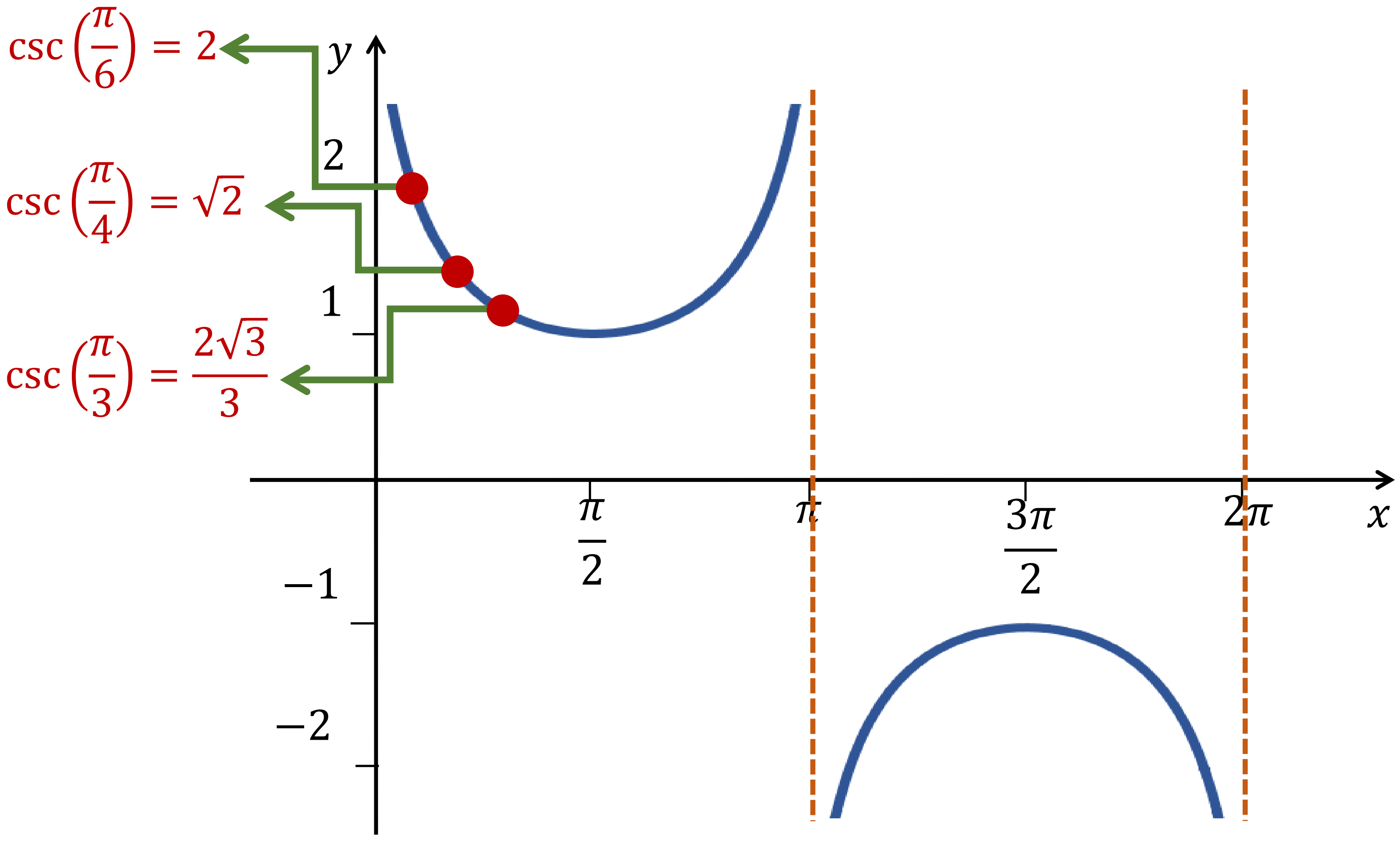
$$f(x) = \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

- ✓ Onde o seno cresce, a cossecante decresce, e vice-versa;
- ✓ Onde o seno se anula, a cossecante não está definida;
- ✓ O sinal da cossecante acompanha o sinal do seno, em cada quadrante.

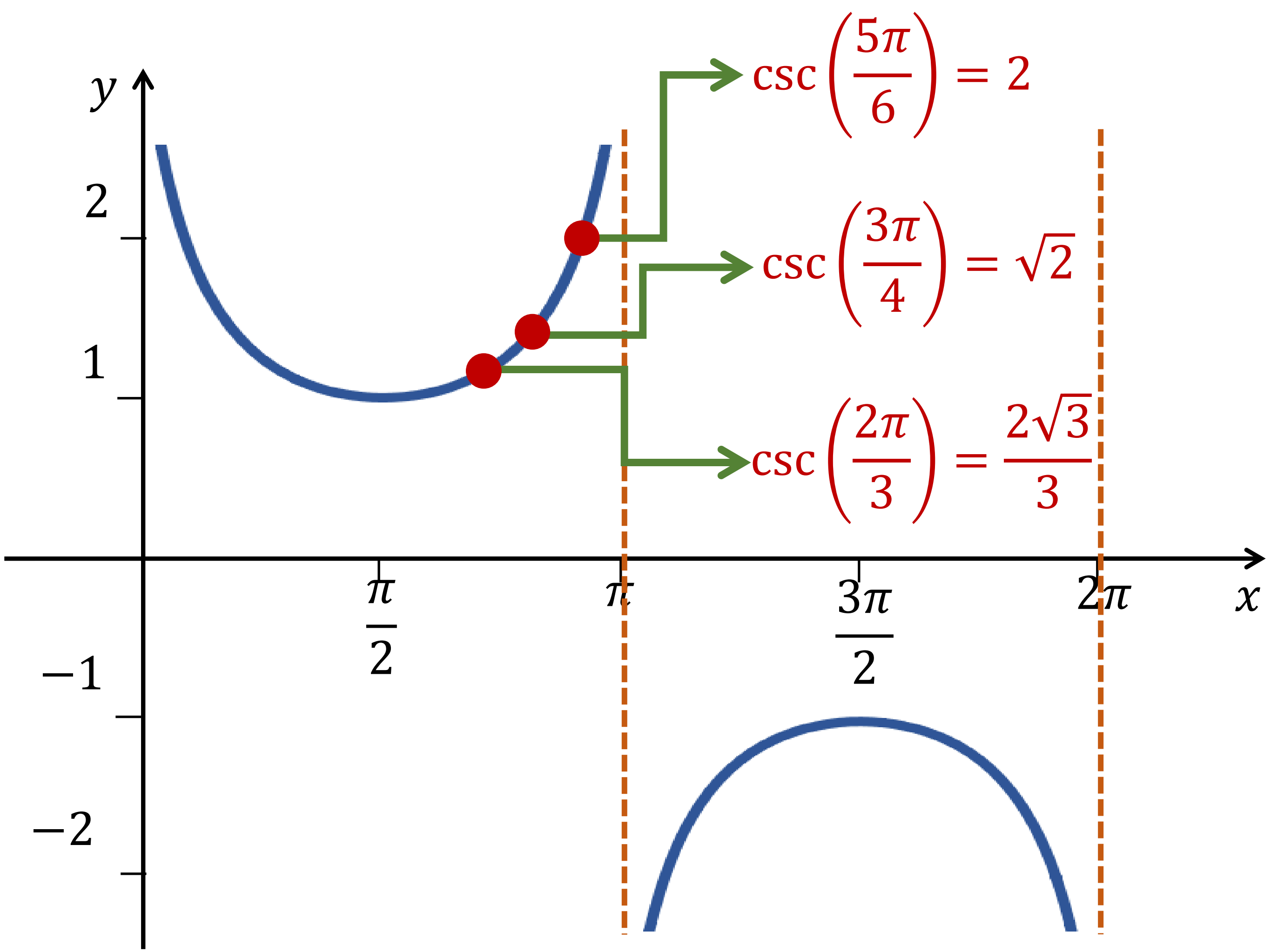
Função Cossecante



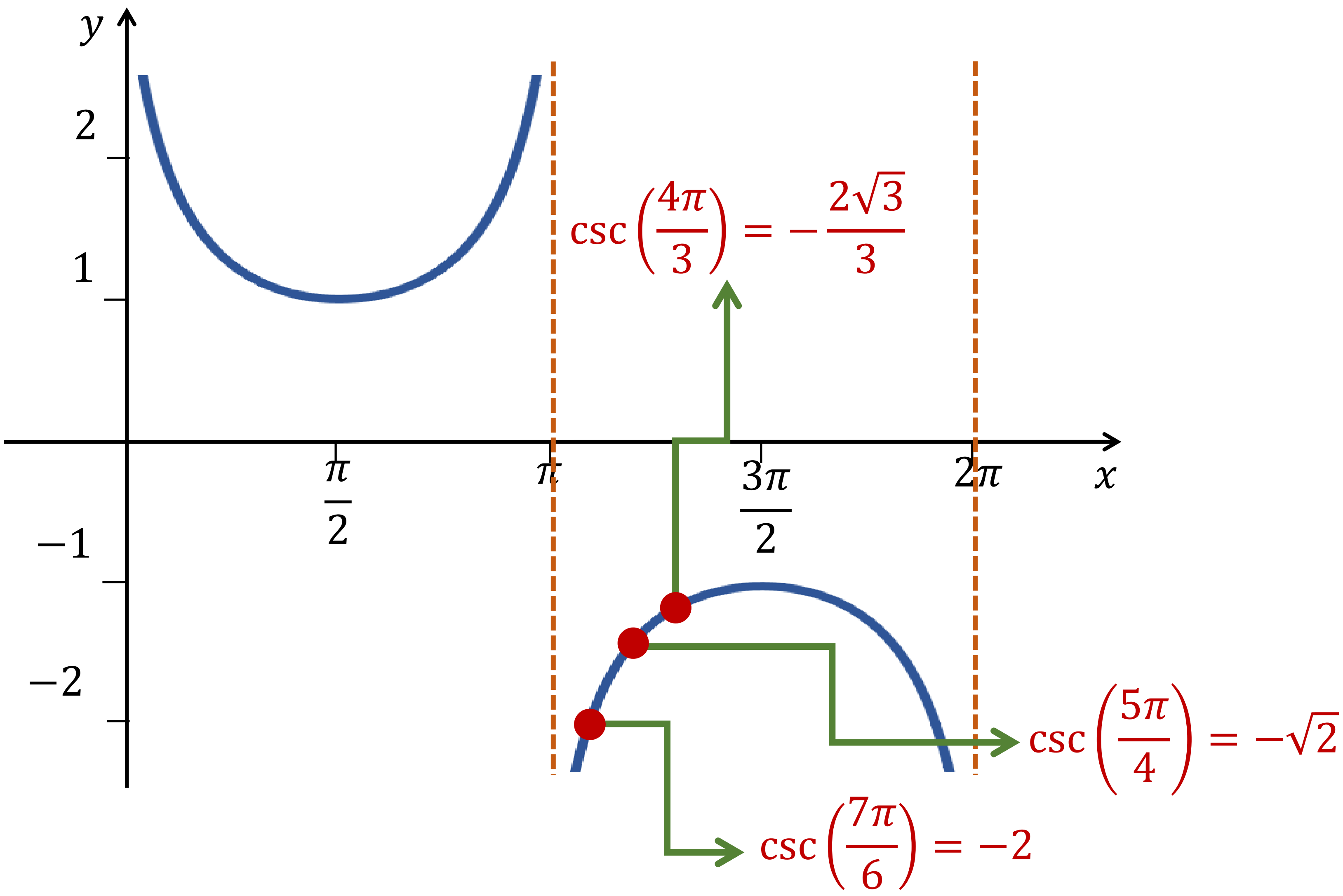
Função Cossecante: primeiro quadrante



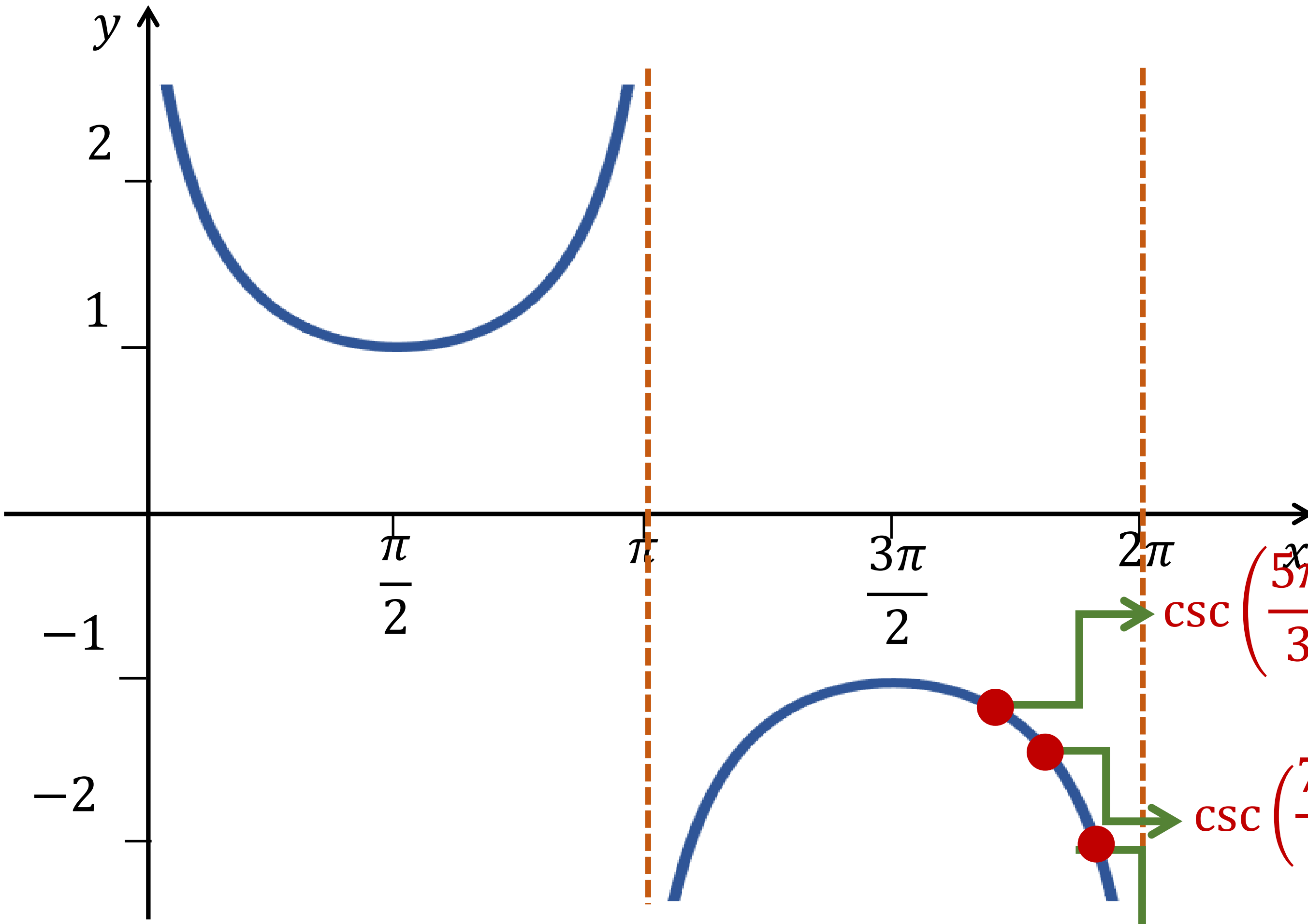
Função Cossecante: segundo quadrante



Função Cossecante: terceiro quadrante



Função Cossecante: quarto quadrante



$$\csc\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$$

$$\csc\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -2$$

Exemplos

1) Esboce o gráfico, determine o domínio, a imagem e o período e as assíntotas da função $f(x) = \csc\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

$y = \csc x$

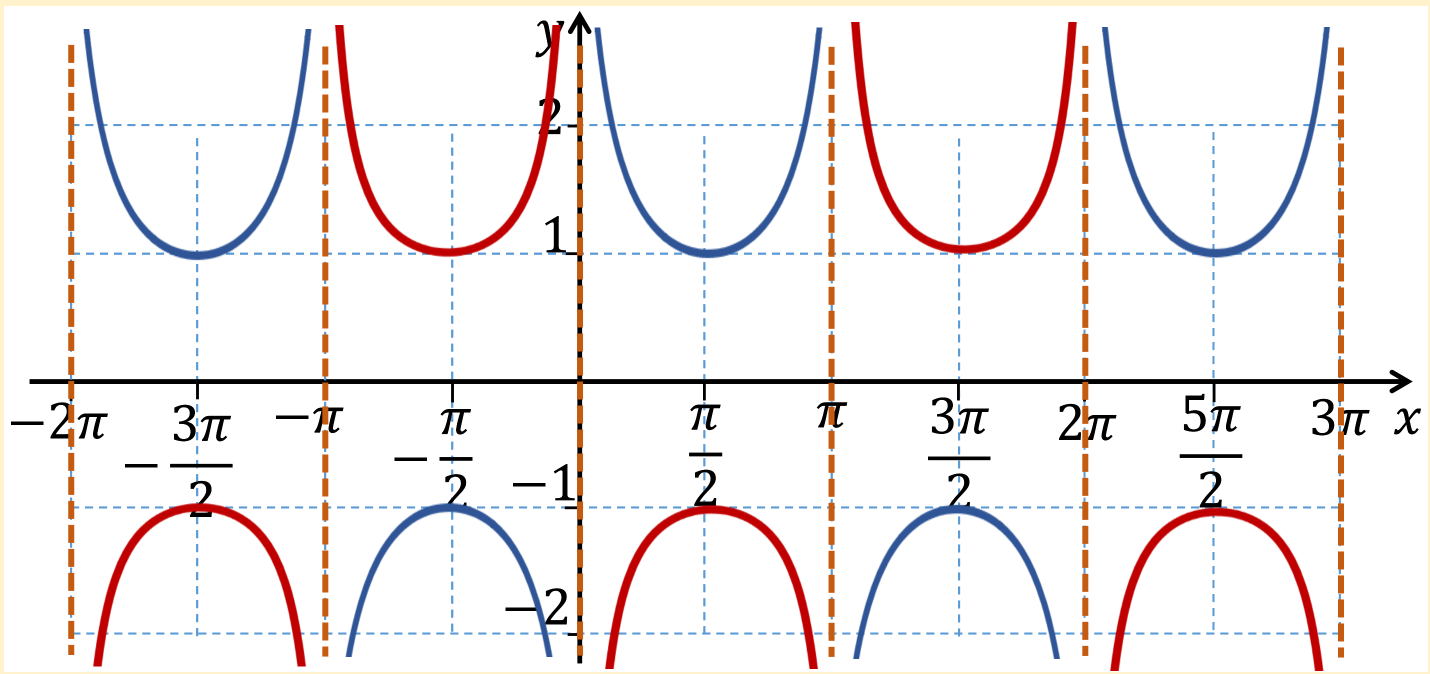
$y = \cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Solução:

$Im(f) = \mathbb{R} - (-1, 1)$

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

$P(f) = 2\pi$



Exercícios Propostos

GAMA
Grupo de Apoio em Matemática

Exercícios

1) Esboce o gráfico das funções trigonométricas, e determine o período (T), o domínio e imagem das funções:

(a) $y = \sec(2x)$

(b) $y = 2\sec(3x)$

(c) $y = -\sec\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

(d) $y = 3\csc(3x)$

(e) $y = -\csc(2\pi x)$

(f) $y = 2 - \csc(x)$

Respostas

Exercício 1:

a) $T = \pi$ $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$ $Im(f) = \mathbb{R} - (-1,1)$

b) $T = \frac{2\pi}{3}$ $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}\right\}$ $Im(f) = \mathbb{R} - (-2,2)$

c) $T = 2\pi$ $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ $Im(f) = \mathbb{R} - (-1,1)$

Respostas

Exercício 1:

d) $T = \frac{2\pi}{3}$ $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq \frac{k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}\right\}$ $Im(f) = \mathbb{R} - (-3,3)$

e) $T = 1$ $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq \frac{k}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$ $Im(f) = \mathbb{R} - (-1,1)$

f) $T = 2\pi$ $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ $Im(f) = \mathbb{R} - (1,3)$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA

O GAMA possui monitorias de:

- **Matemática Elementar, Cálulo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e equivalentes)
    - **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
        - **Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3** (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino

Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas

Aula 05

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Função Exponencial

Definição:

Dado $a \in \mathbb{R}$ tal que $a > 0$ e $a \neq 1$, função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = a^x$$

é chamada de função exponencial de base $\boldsymbol{a}$.

Exemplos

1) $y = 2^x$ Função exponencial de base 2.

2) $y = 3^x$ Função exponencial de base 3.

3) $y = 10^x$ Função exponencial de base 10.

Exemplos

4) $y = \pi^x$

Função exponencial de base π.

Número Pi, seu valor aproximado com duas casas decimais é $3{,}14$.

5) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

Função exponencial de base $\frac{1}{2}$.

6) $y = e^x$

Função exponencial de base e.

Número de Euler, seu valor aproximado com três casas decimais é 2,718.

Gráfico

Esboce o gráfico da função $f(x) = 2^x$.

Obs: função crescente.

Solução: Destacando alguns pontos, tem-se:

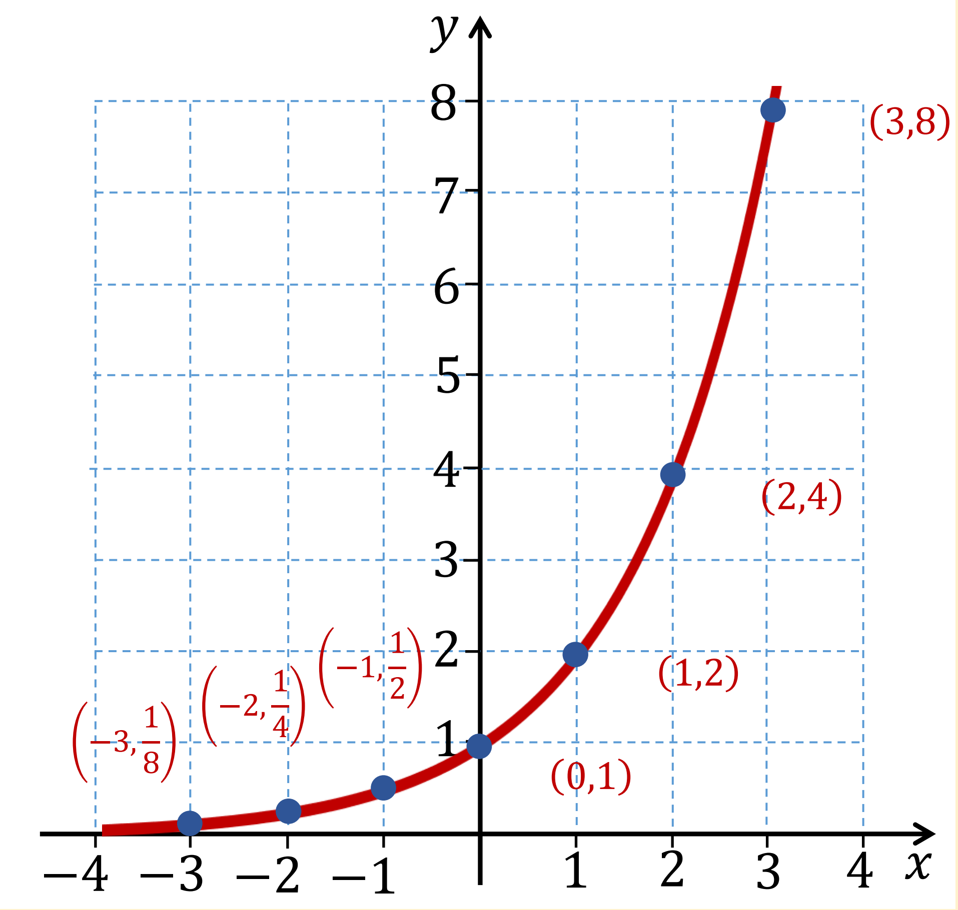
$$f(-3) = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$$

$$f(0) = 2^0 = 1 \qquad f(2) = 2^2 = 4$$

$$f(1) = 2^1 = 2 \qquad f(3) = 2^3 = 8$$



Gráfico

Esboce o gráfico da função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Obs: função decrescente.

Solução: Destacando alguns pontos, tem-se:

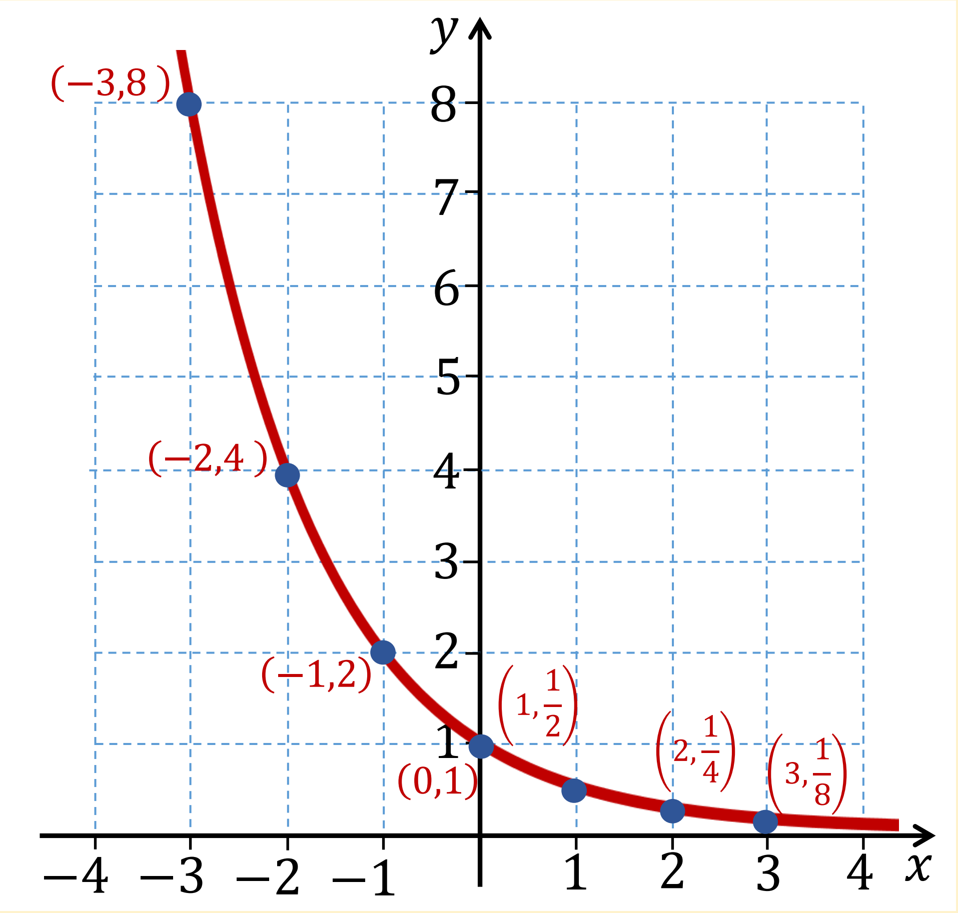
$$f(-3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$$

$$f(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$$

$$f(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2^1 = 2$$

$$f(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1 \quad f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4}$$

$$f(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2} \quad f(3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{1}{8}$$



Gráfico, Domínio e Imagem

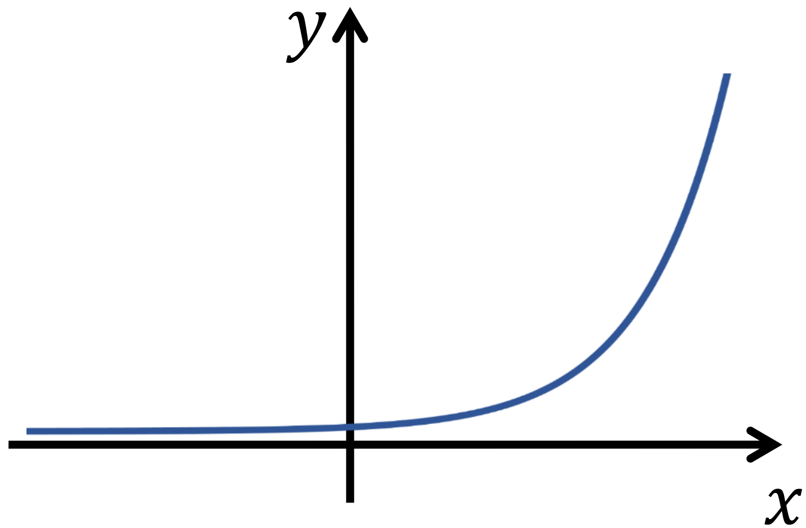
O gráfico de uma função exponencial pode assumir dois formatos distintos:

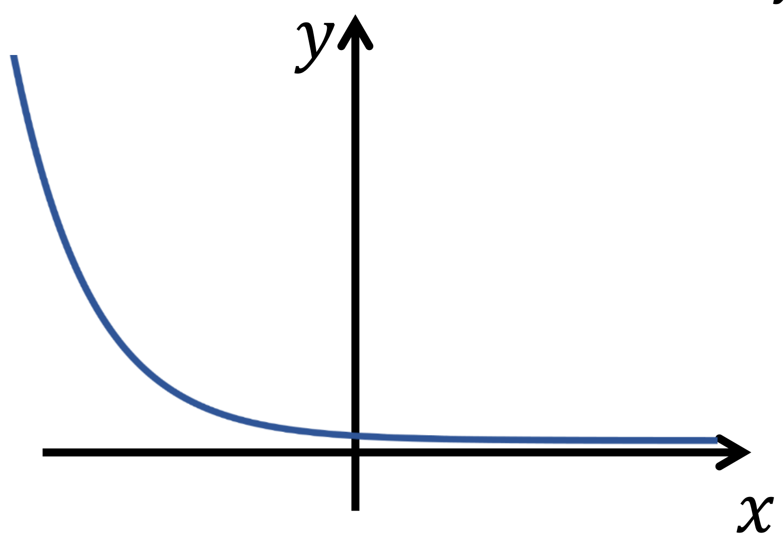
Primeiro caso: $a > 1$

Função Crescente

$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \mathbb{R}_+^*.$





Segundo caso: $0 < a < 1$

Função Decrescente

$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \mathbb{R}_+^*.$

Gráfico, Domínio e Imagem

Em ambos os casos (crescente ou decrescente), a reta $y = 0$ é chamada de assíntota horizontal do gráfico da função.

Observação:

Para esboçar o gráfico de uma função $f(x) = a^x$, basta:

i. identificar o comportamento do gráfico (crescente ou decrescente)

ii. lembrar que os pontos $(0,1)$ e $(1, a)$ sempre pertencem ao gráfico destas funções, pois:

$$f(0) = a^0 = 1 \implies (0,1) \in f$$

$$f(1) = a^1 = a \implies (1, a) \in f$$

Exemplos

1) Esboce os gráficos das funções:

(a) $f(x) = 3^x$ (b) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ (c) $f(x) = 2^x + 1$ (d) $f(x) = 4^{x-2}$

Solução:

a) $f(x) = 3^x$

$3 > 1 \Longrightarrow f(x)$ é crescente

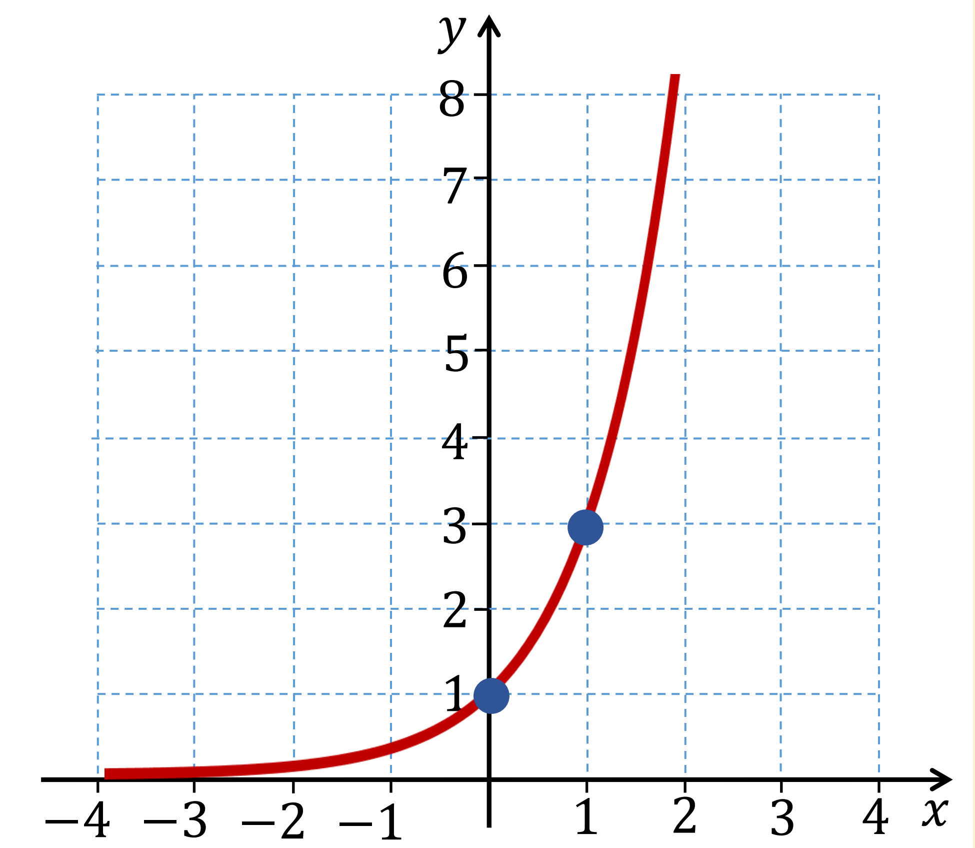
Definindo os pontos:

$(0\,,1)$ e $(1\,,a)$

Temos,

$(0\,,1)$ e $(1\,,3)$

$D(f) = \mathbb{R}$ $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$



Exemplos

1) Esboce os gráficos das funções:

(a)$f(x) = 3^x$ (b) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ (c)$f(x) = 2^x + 1$ (d)$f(x) = 4^{x-2}$

Solução:

b)$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

$0 < \frac{1}{4} > 1 \Longrightarrow f(x)$ é decrescente

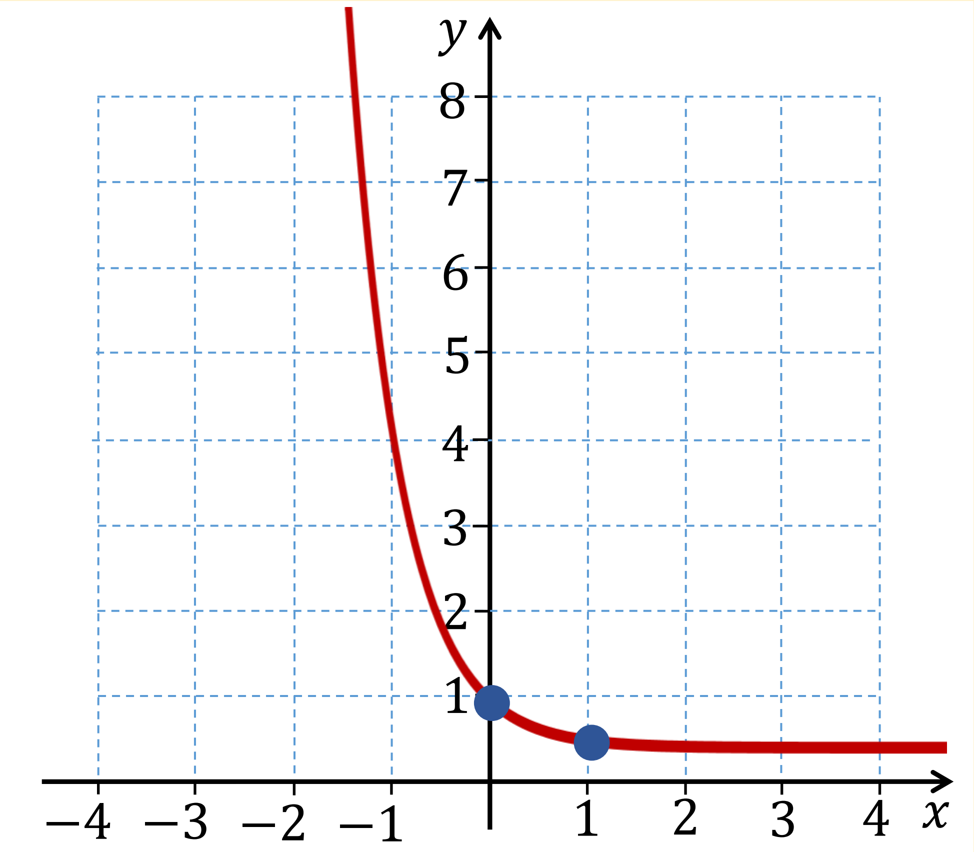
Definindo os pontos:

$(0\,,1)$ e $(1\,,a)$

Temos,

$(0\,,1)$ e $\left(1\,,\frac{1}{4}\right)$

$D(f) = \mathbb{R}$ $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$



Exemplos

1) Esboce os gráficos das funções:

(a)$f(x) = 3^x$ (b) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ (c)$f(x) = 2^x + 1$ (d)$f(x) = 4^{x-2}$

Solução:

c)$f(x) = 2^x + 1$

$2 > 1 \Longrightarrow f(x)$ é crescente

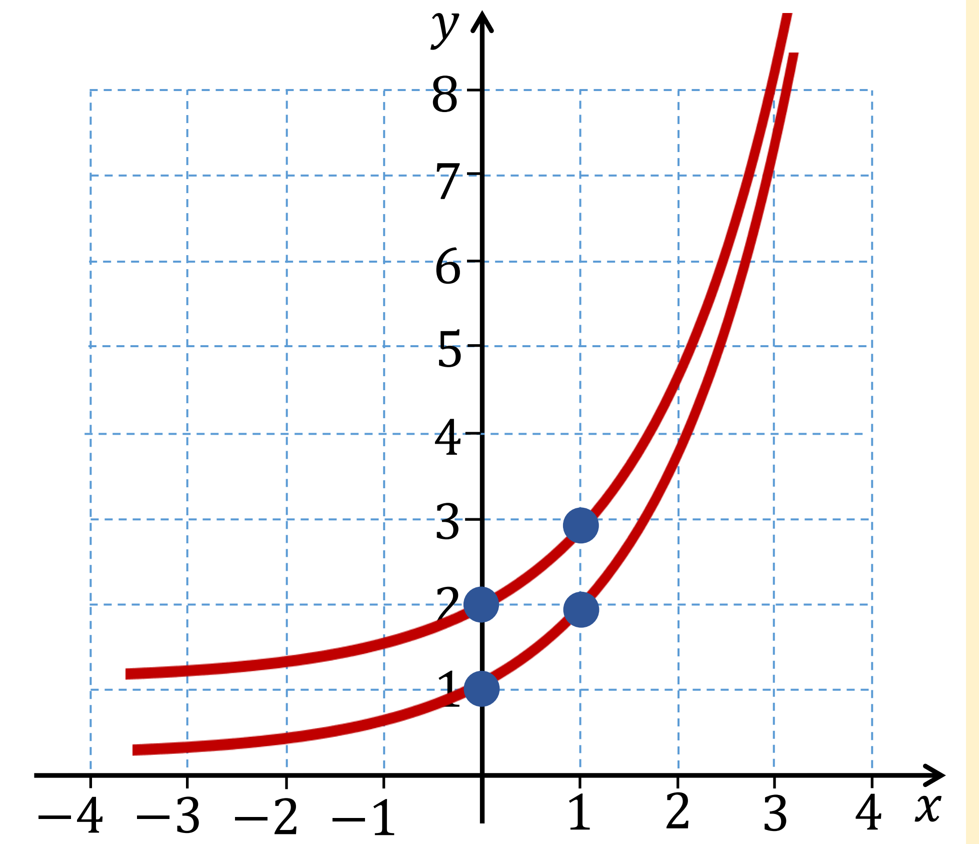
Definindo os pontos:

$(0\,,1)$ e $(1\,,a)$

Temos,

$(0\,,1)$ e $(1\,,2)$

$D(f) = \mathbb{R}$ $Im(f) = (1, +\infty)$



Exemplos

1) Esboce os gráficos das funções:

(a)$f(x) = 3^x$ (b) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ (c)$f(x) = 2^x + 1$ (d)$f(x) = 4^{x-2}$

Solução:

d)$f(x) = 4^{x-2}$

$4 > 1 \Longrightarrow f(x)$ é crescente

Definindo os pontos:

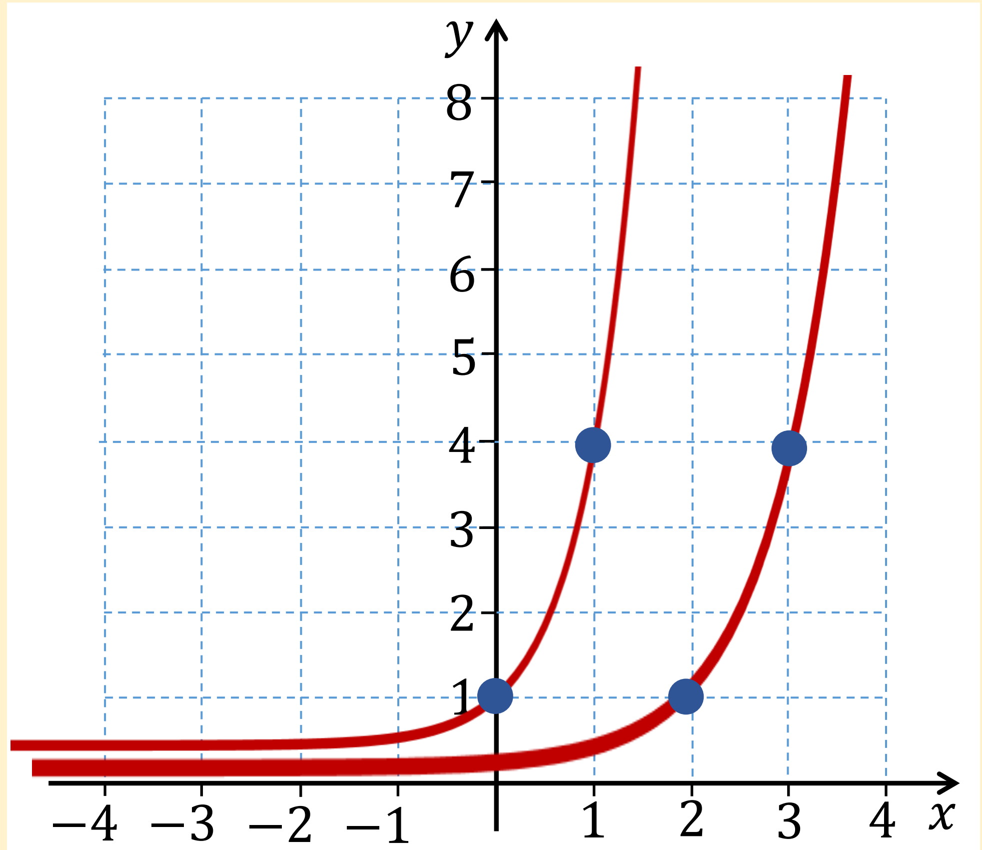
$(0\,,1)$ e $(1\,,a)$

Temos,

$(0\,,1)$ e $(1\,,4)$

Deslocamos 2 unidades para esquerda!

$D(f) = \mathbb{R}$ $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$



Exercícios Propostos

Exercícios

1) Em cada caso, esboce o gráfico da função dada e determine o domínio, a imagem e a equação da assíntota horizontal.

(a) $f(x) = 2^x + 2$

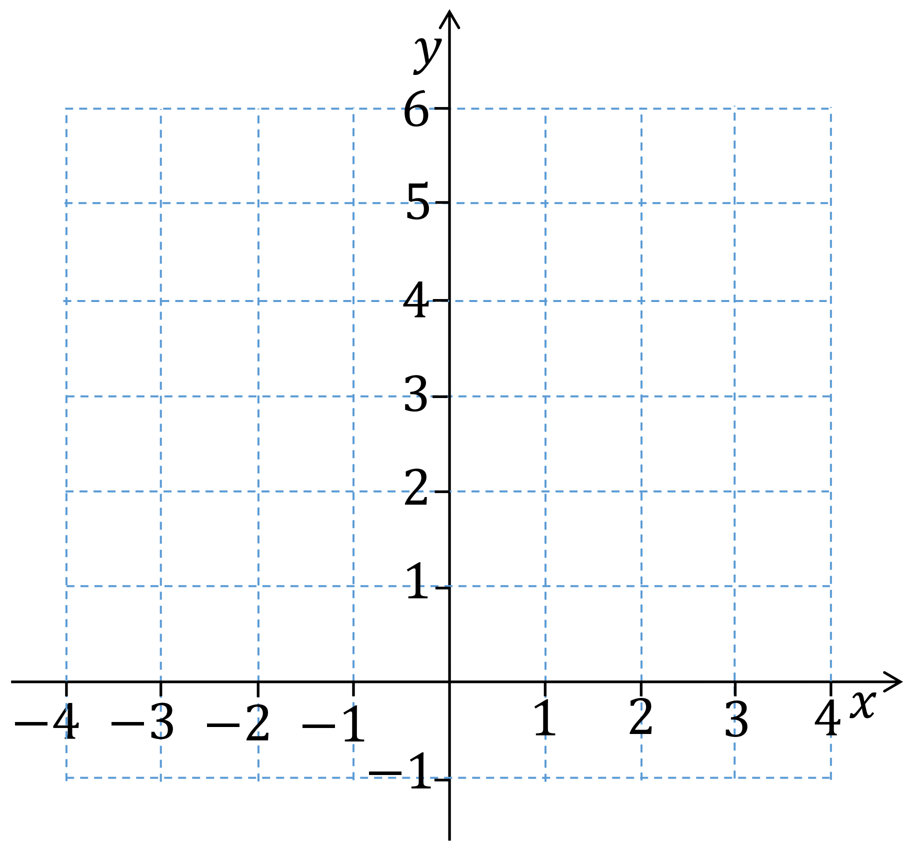
(b) $f(x) = 3^x - 1$

(c) $f(x) = 2^{x-1}$

(d) $f(x) = 4^{x+2}$

(e) $f(x) = -2^x$

(f) $f(x) = 2^{-x}$



Exercícios

2) Em cada caso, determine a composta fog.

(a) $f(x) = 2x + 5$ e $g(x) = 3^x$

(b) $f(x) = 5^x$ e $g(x) = x^2 + 3x$

(c) $f(x) = x^2 - x$ e $g(x) = 2^x$

3) Em cada caso, escreva a função dada como uma composta de duas funções.

a) $f(x) = 3^{x^2-2x+1}$

b) $f(x) = 2^{\sqrt{x}}$

4) A função exponencial é injetora? É sobrejetora? É bijetora? Justifique.

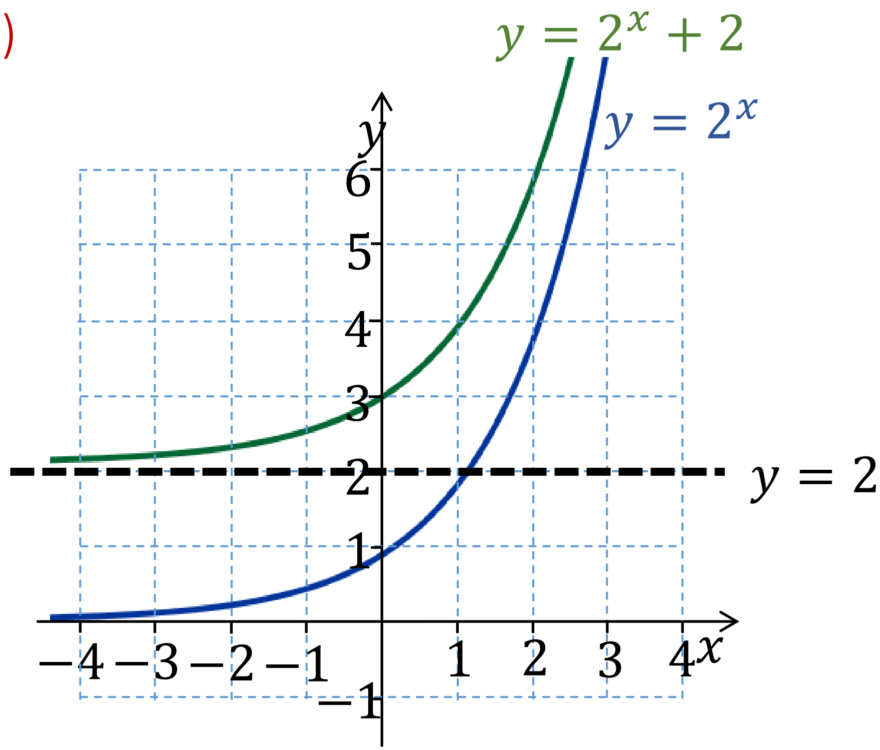
5) Esboce o gráfico das funções inversas das seguintes funções exponenciais:

(a) $f(x) = 2^x$ (b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Respostas

Exercício 1:

a)



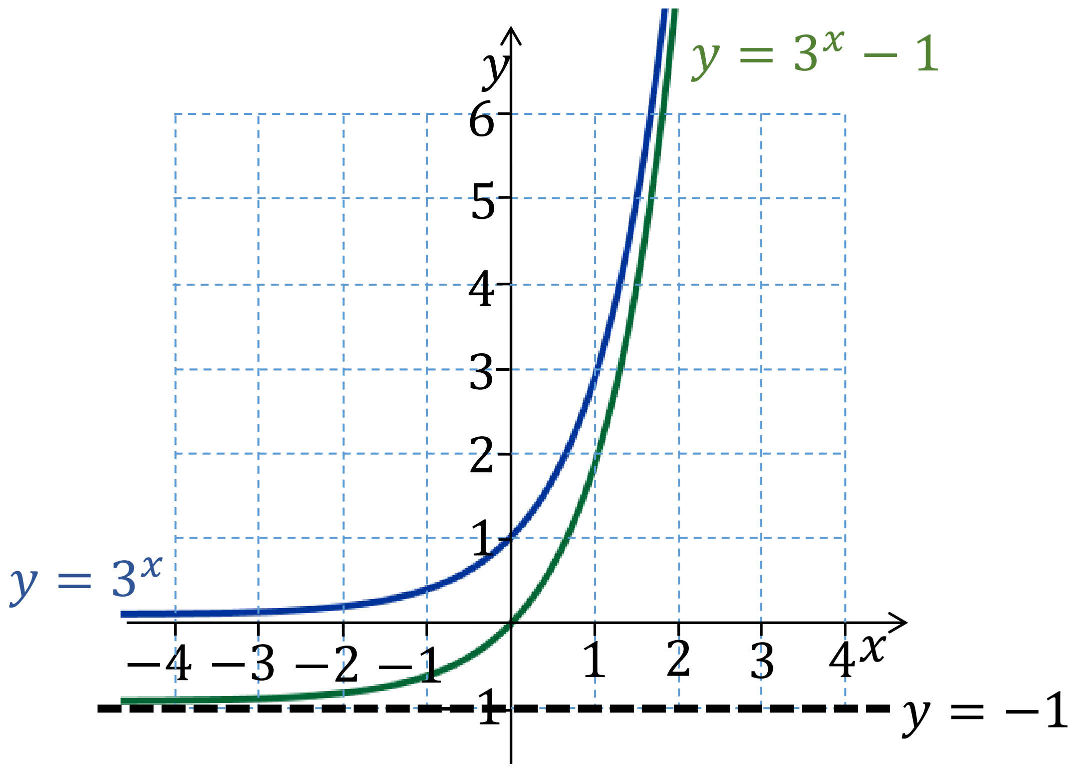
$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = (2, +\infty)$

Assíntota: $y = 2$

Respostas

b)



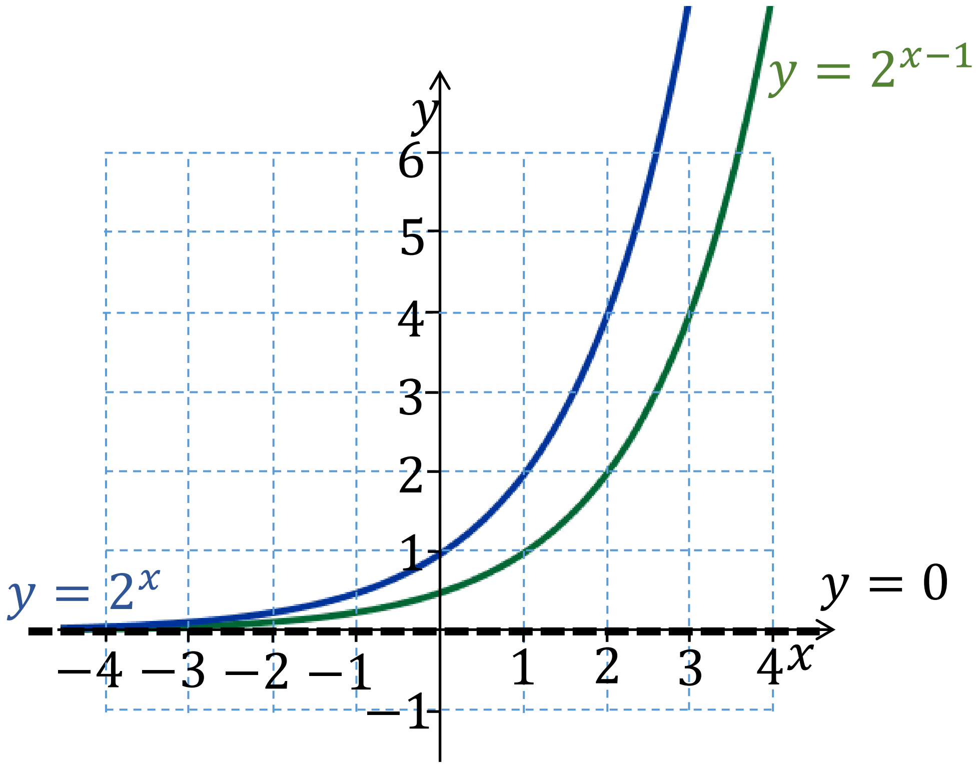
$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = (-1, +\infty)$

Assíntota: $y = -1$

Respostas

c)



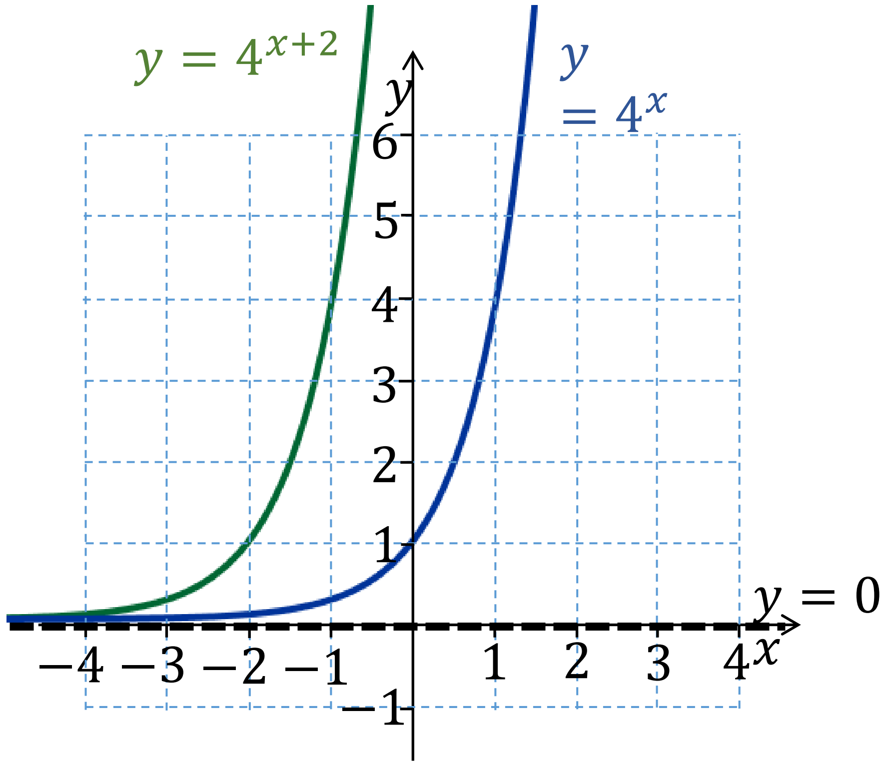
$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \mathbb{R}_+^*$

Assíntota: $y = 0$

Respostas

d)



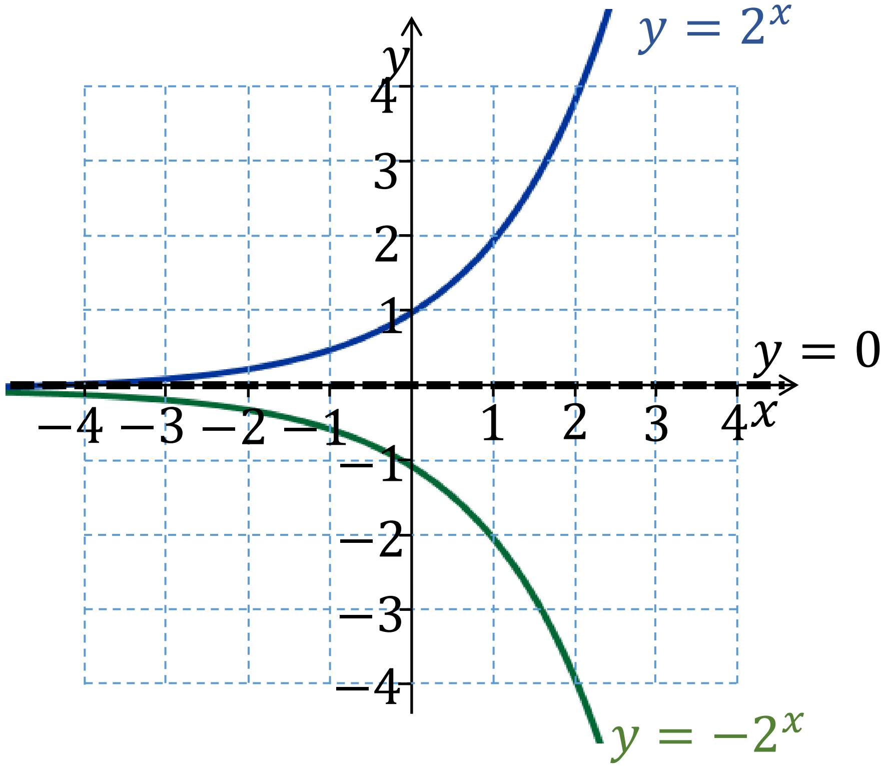
$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \mathbb{R}_+^*$

Assíntota: $y = 0$

Respostas

e)



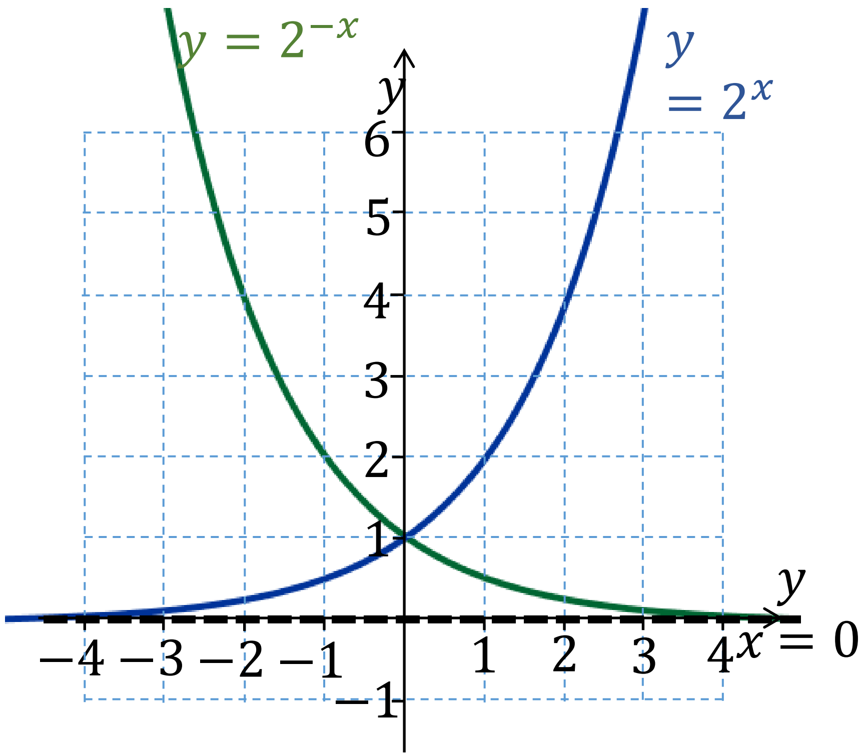
$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \mathbb{R}^*_-$

Assíntota: $y = 0$

Respostas

f)



$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \mathbb{R}_{+}^{*}$

Assíntota: $y = 0$

Respostas

Exercício 2:

a) $(fog)(x) = 2 \cdot 3^x + 5$

b) $(fog)(x) = 5^{x^2+3x}$

c) $(fog)(x) = 2^{2x} - 2^x$

Exercício 3:

a) $f = f_2 o f_1$ $\quad f_1(x) = x^2 - 2x + 1$ $\quad f_2(x) = 3^x$

b) $f = f_2 o f_1$ $\quad f_1(x) = \sqrt{x}$ $\quad f_2(x) = 2^x$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA

O GAMA possui monitorias de:

- **Matemática Elementar, Cálulo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e equivalentes)
  - **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
    - **Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3** (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino

Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas

Aula 06

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Logaritmos

Definição:

Chamamos de logaritmo o número $x = \log_a b$, o número x que satisfaz a equação exponencial,

$$a^x = b$$

tal que $a > 0$, $b > 0$ e $a \neq 1$ ambos números reais.

Notação:

$$x = \log_a b.$$

Da definição acima segue que

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b.$$

Logaritmos

Observação: $\log_{10} a = \log a$ (Quando a base do logaritmo é 10, se escreve $\log a$ para representar $\log_{10} a$)

$\log_e a = \ln a$ (Quando a base do logaritmo é e, se escreve $\ln e$ para representar $\log_e a$)

$$x = \log_a b.$$

Logaritmando

Base

Exemplos

1) Resolva a equação exponencial $2^x = 8$.

Solução:

$$2^x = 8.$$

Igualando as bases, tem-se:

$$2^x = 2^3 \quad \Longrightarrow x = 3,$$

portanto, se diz que 3 é o logaritmo de 8 na base 2.

Ou seja,

$$\log_2 8 = 3.$$

Exemplos

2) Calcule $\log_2 64$.

Solução:

Usando a definição de logaritmo, tem-se:

$$\log_b a = x \iff b^x = a.$$

Então,

$$\log_2 64 = x \qquad \iff 2^x = 64.$$

Resolvendo a equação $2^x = 64$, tem-se:

$$2^x = 64 \qquad \Longrightarrow 2^x = 2^6 \qquad \Longrightarrow x = 6.$$

Portanto, $\log_2 64 = 6.$

Exemplos

3) Calcule $\log_4 0{,}25$.

Solução:

Usando a definição de logaritmo, tem-se:

$$\log_4 0{,}25 = x \Leftrightarrow 4^x = 0{,}25 \Leftrightarrow 4^x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4^x = 4^{-1} \Leftrightarrow x = -1$$

Portanto,

$$\log_4 0{,}25 = -1.$$

4) Calcule $\log_2 1$.

Solução:

Usando a definição de logaritmo, tem-se:

$$\log_2 1 = x \Leftrightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow 2^x = 2^0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Portanto,

$$\log_2 1 = 0.$$

Exemplos

5) Calcule $\log_5 5$.

Solução:

Usando a definição de logaritmo, tem-se:

$$\log_5 5 = x \quad \Leftrightarrow \quad 5^x = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 5^x = 5^1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

Portanto,

$$\log_5 5 = 1.$$

Consequências da definição de Logaritmo

Primeira consequência:

O logaritmo de 1, em qualquer base, é sempre igual a 0.

$$\log_a 1 = 0.$$

Para todo $a > 0$ e $a \neq 1$.

Segunda consequência:

O logaritmo de um número na própria base, é sempre igual a 1.

$$\log_a a = 1.$$

Para todo $a > 0$ e $a \neq 1$.

Consequências da definição de Logaritmo

Terceira consequência:

Quando temos uma potência com expoente logarítmico de base igual a base dessa potência, o resultado será o logaritmando do expoente.

$$a^{\log_a n} = n.$$

Para todo $a > 0$, $a \neq 1$ e $n > 0$.

Quarta consequência:

Dois logaritmos de mesma base serão iguais se, e somente se, seus logaritmandos forem iguais.

$$\log_a n = \log_a m \iff n = m.$$

Para todo $a > 0$, $a \neq 1$, $n > 0$ e $m > 0$.

Exemplos

6) Calcule $\log_2 1$.

Solução:

$$\log_2 1 = 0,$$

pois: $2^0 = 1$.

7) Calcule $\log_2 2$.

Solução:

$$\log_2 2 = 1,$$

pois: $2^1 = 2$.

Exemplos

8) Calcule $2^{\log_2 4}$.

Solução:

$$2^{\log_2 4} = 4,$$

Pois se considerarmos $\log_2 4 = x$, teremos $x = 2$,

logo: $2^{\log_2 4} = 2^x = 2^2 = 4.$

9) Encontre a solução da equação $\log_2(2x + 4) = \log_2(3x + 1)$.

Solução:

$$\log_2(2x + 4) = \log_2(3x + 1)$$

$2x + 4 = 3x + 1$ $\quad$ $2x - 3x = 1 - 4$ $\quad$ $-x = -3$

$x = 3$ $\quad$ Logo, $\quad$ $S = \{3\}$

Propriedades logarítmicas

Logaritmo do produto: logaritmo do produto é a soma dos logaritmos.

$$\log_a(m.n) = \log_a m + \log_a n.$$

Logaritmo do quociente: logaritmo do quociente é a diferença dos logaritmos.

$$\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n.$$

Exemplos

10) Represente as expressões abaixo como um único logaritmo:

(a) $\log_6 4 + \log_6 8$ (b) $\log_5 3 - \log_5 8$

Solução:

(a) $$\log_6 4 + \log_6 8 = \log_2(4\,.\,8) = \log_2 32.$$

(b) $$\log_5 3 - \log_5 8 = \log_5\left(\frac{3}{8}\right).$$

Propriedades logarítmicas

Logaritmo da potência: o expoente do logaritmando passa para frente do logaritmo multiplicando o mesmo.

$$\log_a n^m = m \,.\, \log_a n.$$

Exemplos

11) Calcule:

(a) $\log_2 8^4$

(b) $\log_2 \sqrt[3]{4}$

Solução:

(a) $$\log_2 8^4 = 4 \,.\, \log_2 8 = 4 \,.\, 3 = 12.$$

(b) $$\log_2 \sqrt[3]{4} = \log_2 4^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \,.\, \log_2 4 = \frac{1}{3} \,.\, 2 = \frac{2}{3}.$$

Propriedades logarítmicas

Mudança de base: dados um logaritmo de b na base a, fazemos a sua mudança para uma base c da seguinte forma.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Exemplos

12) Passe $\log_2 16$, para base 10.

Solução:

$$\log_2 16 = \frac{\log 16}{\log 2}.$$

Função Logarítmica

Definição:

Dado $a \in \mathbb{R}$ tal que $a > 0$ e $a \neq 1$, a função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \log_a x$$

é chamada de **função logarítmica de base a**.

Exemplos

13) $y = \log_2 x$ Função logarítmica de base 2.

14) $y = \log x$ Função logarítmica de base 10.

15) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ Função logarítmica de base $\frac{1}{2}$.

Exemplos

16) $y = \log_3 x$ Função logarítmica de base 3.

17) $y = \log_\pi x$ Função logarítmica de base π.

Número Pi, seu valor aproximado com duas casas decimais é $3{,}14$.

18) $y = \ln x$ Função logarítmica de base e.

Número de Euler, seu valor aproximado com três casas decimais é $2{,}718$.

Gráfico

Esboce o gráfico da função $f(x) = \log_2 x$.

Obs: função crescente.

Solução: Destacando alguns pontos do gráfico, tem-se:

$$f\left(\frac{1}{8}\right) = \log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$$

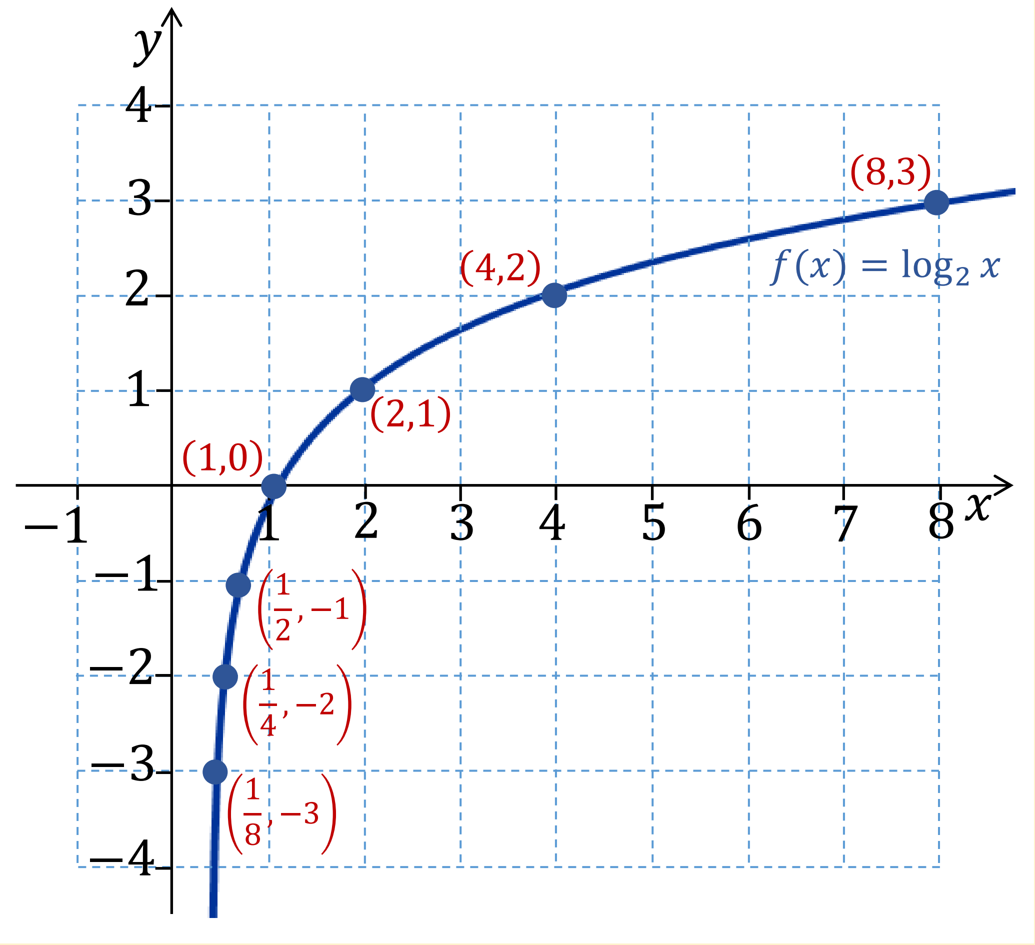
$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2\left(\frac{1}{4}\right) = -2$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$f(1) = \log_2(1) = 0$$

$$f(2) = \log_2(2) = 1$$

$$f(4) = \log_2(4) = 2$$



Gráfico

Esboce o gráfico da função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Obs: função decrescente.

Solução: Destacando alguns pontos do gráfico, tem-se:

$$f\left(\frac{1}{8}\right) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{8}\right) = 3$$

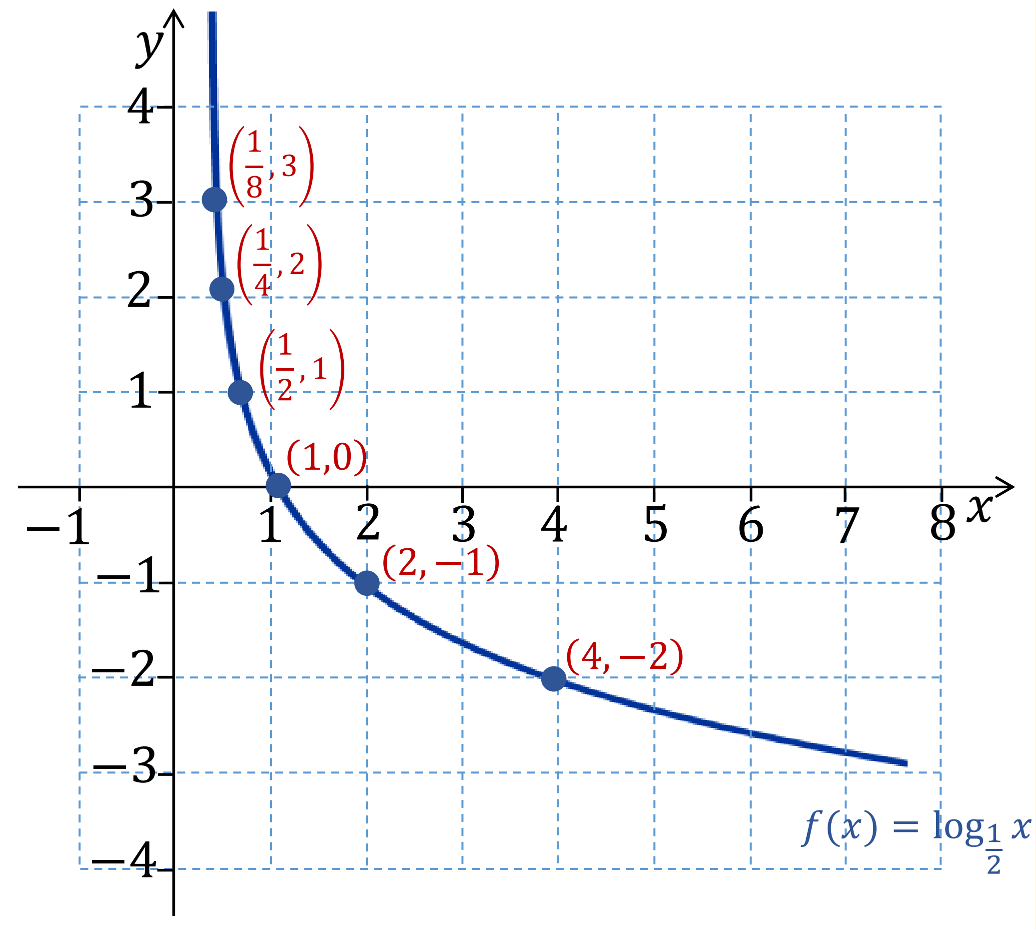
$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right) = 2$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$f(1) = \log_{\frac{1}{2}}(1) = 0$$

$$f(2) = \log_{\frac{1}{2}}(2) = -1$$

$$f(4) = \log_{\frac{1}{2}}(4) = -2$$



Gráfico, Domínio e Imagem

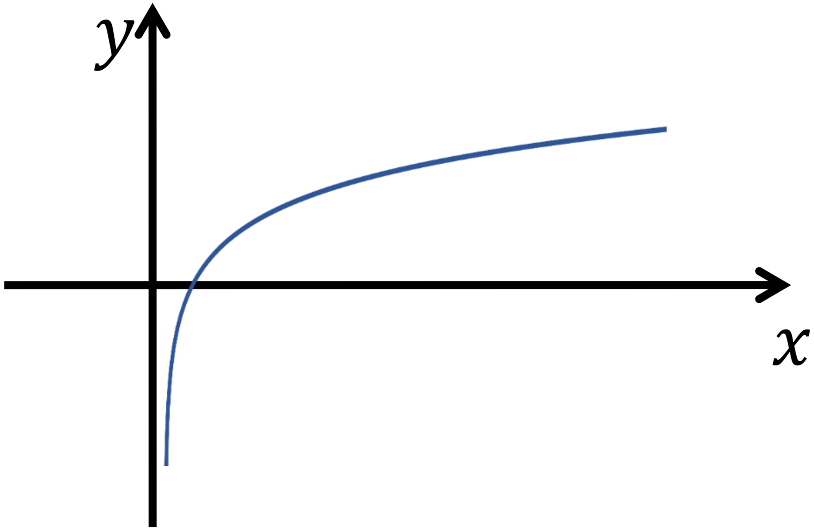
O gráfico de uma função exponencial pode assumir dois formatos distintos:

Primeiro caso: $a > 1$

Função Crescente

$D(f) = \mathbb{R}_+^*$

$Im(f) = \mathbb{R}.$

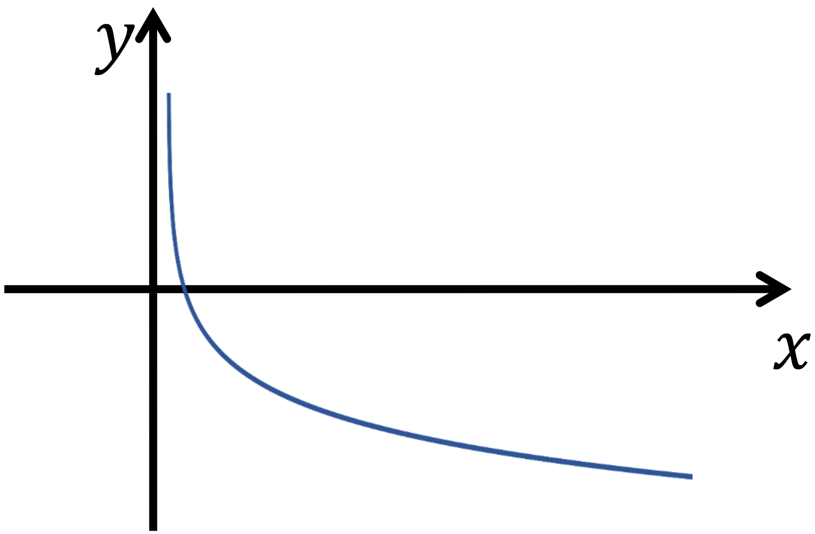


Segundo caso: $0 < a < 1$

Função Decrescente

$D(f) = \mathbb{R}_+^*$

$Im(f) = \mathbb{R}.$



Gráfico, Domínio e Imagem

Em ambos os casos (crescente ou decrescente), a reta $x = 0$ é chamada de assíntota vertical do gráfico da função.

Observação:

Para esboçar o gráfico de uma função $f(x) = \log_a x$, basta:

i. identificar o comportamento do gráfico (crescente ou decrescente)

ii. lembrar que os pontos $(1,0)$ e $(a,1)$ sempre pertencem ao gráfico destas funções, pois:

$$f(1) = \log_a 1 = 0 \qquad \Longrightarrow (1,0) \in f$$

$$f(a) = \log_a a = 1 \qquad \Longrightarrow (a,1) \in f$$

Exemplos

19) Esboce os gráficos das funções:

(a) $f(x) = \log_{\frac{5}{2}} x$ (b) $f(x) = \ln x$ (c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ (d) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

Solução:

(a) $f(x) = \log_3 x$

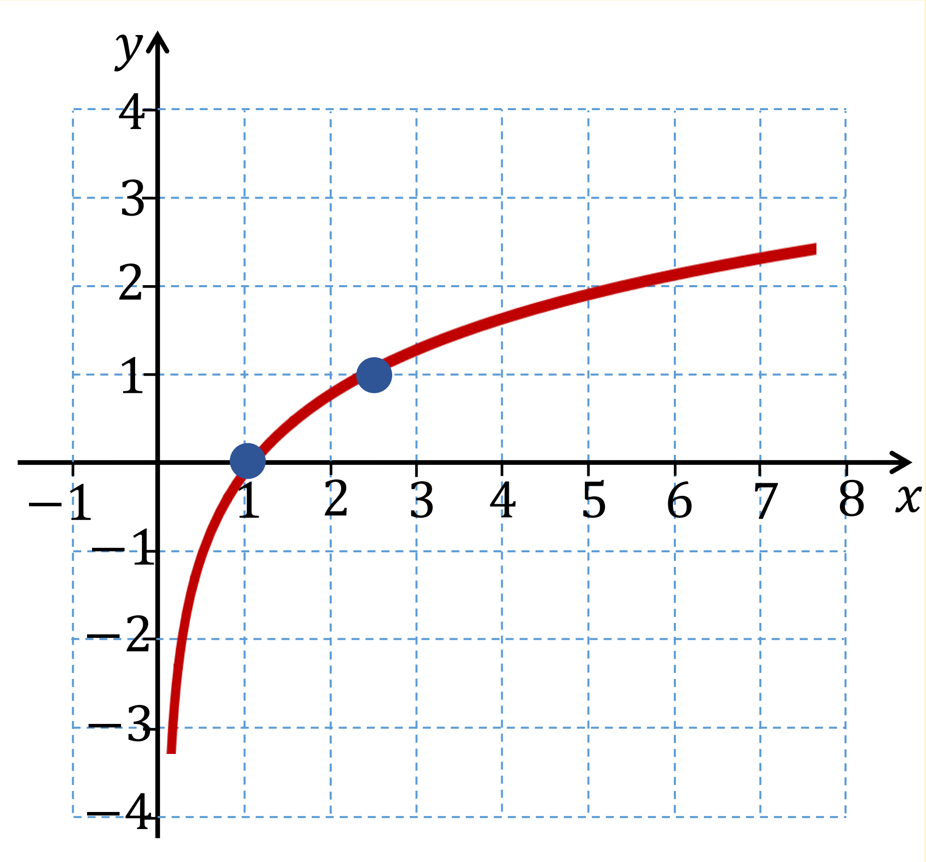
$\frac{5}{2} > 1 \Longrightarrow f(x)$ é crescente

Definindo os pontos:

$(1\,,0)$ e $(a\,,1)$

Temos,

$(1\,,0)$ e $\left(\frac{5}{2}\,,1\right)$



Exemplos

20) Esboce os gráficos das funções:

(a) $f(x) = \log_{\frac{5}{2}} x$ (b) $f(x) = \ln x$ (c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ (d) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

Solução:

(b) $f(x) = \ln x$

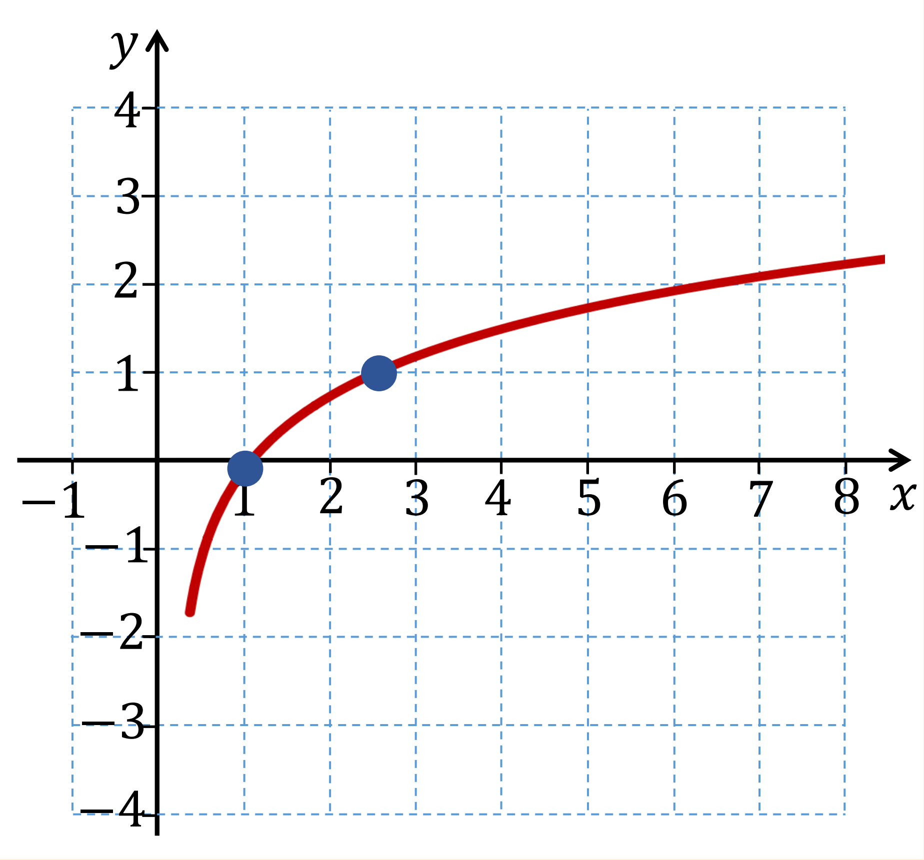
$e > 1 \Longrightarrow f(x)$ é crescente

Definindo os pontos:

$(1\,,0)$ e $(a\,,1)$

Temos,

$(1\,,0)$ e $(e\,,1)$



Exemplos

21) Esboce os gráficos das funções:

(a) $f(x) = \log_{\frac{5}{2}} x$ (b) $f(x) = \ln x$ (c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ (d) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

Solução:

(c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

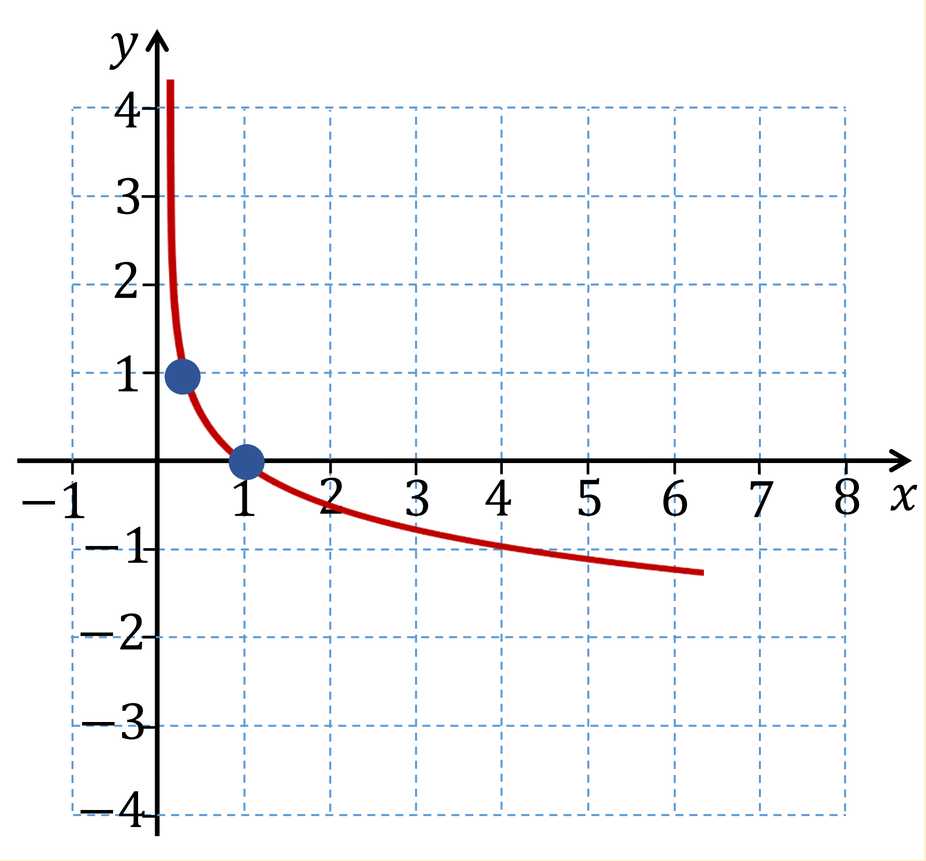
$0 < \frac{1}{3} > 1 \Longrightarrow f(x)$ é decrescente

Definindo os pontos:

$(1, 0)$ e $(a, 1)$

Temos,

$(1, 0)$ e $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$



Exemplos

22) Esboce os gráficos das funções:

(a) $f(x) = \log_{\frac{5}{2}} x$ (b) $f(x) = \ln x$ (c) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ (d) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

Solução:

(d) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

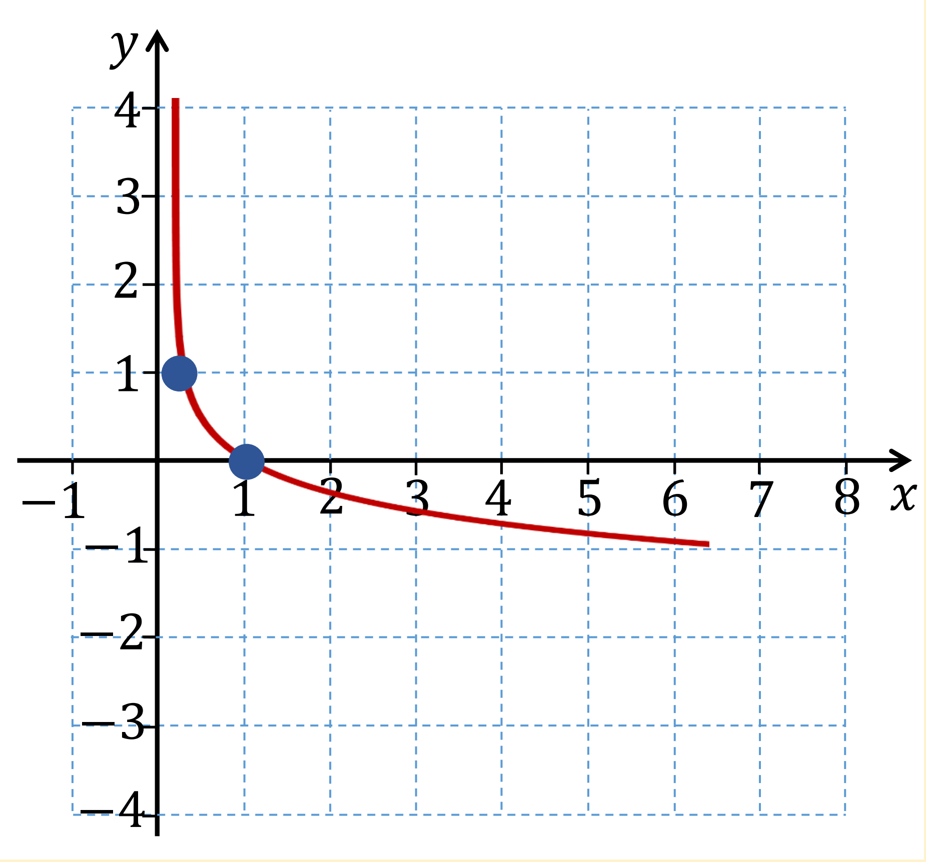
$0 < \frac{1}{4} > 1 \Longrightarrow f(x)$ é decrescente

Definindo os pontos:

$(1\,,0)$ e $(a\,,1)$

Temos,

$(1\,,0)$ e $\left(\frac{1}{4}\,,1\right)$



Gráfico, Domínio e Imagem

Observação:

A inversa da função exponencial é uma função bijetora!

Logo, a função inversa da função exponencial de base a é a função logarítmica de mesma base.

Ou seja,

$$f(x) = a^x \qquad f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

$$f^{-1}(x) = \log_a x \qquad f^{-1}: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

Exemplos

23) Em cada caso, determine a função inversa da função dada.

a) $f(x) = \log_5 x$ b) $f(x) = 4^x$

Solução:

a) $f(x) = \log_5 x$

A função inversa de $f(x)$ é a função exponencial de base 5.
Logo,

$$f^{-1}(x) = 5^x$$

b) $f(x) = 4^x$

A função inversa de $f(x)$ é a função logarítmica de base 4.
Logo,

$$f^{-1}(x) = \log_4 x$$

Gráfico, Domínio e Imagem

Observação:

Lembre que existe simetria , em relação à reta $y = x$, entre os gráficos de uma função f e de sua inversa f^{-1}.

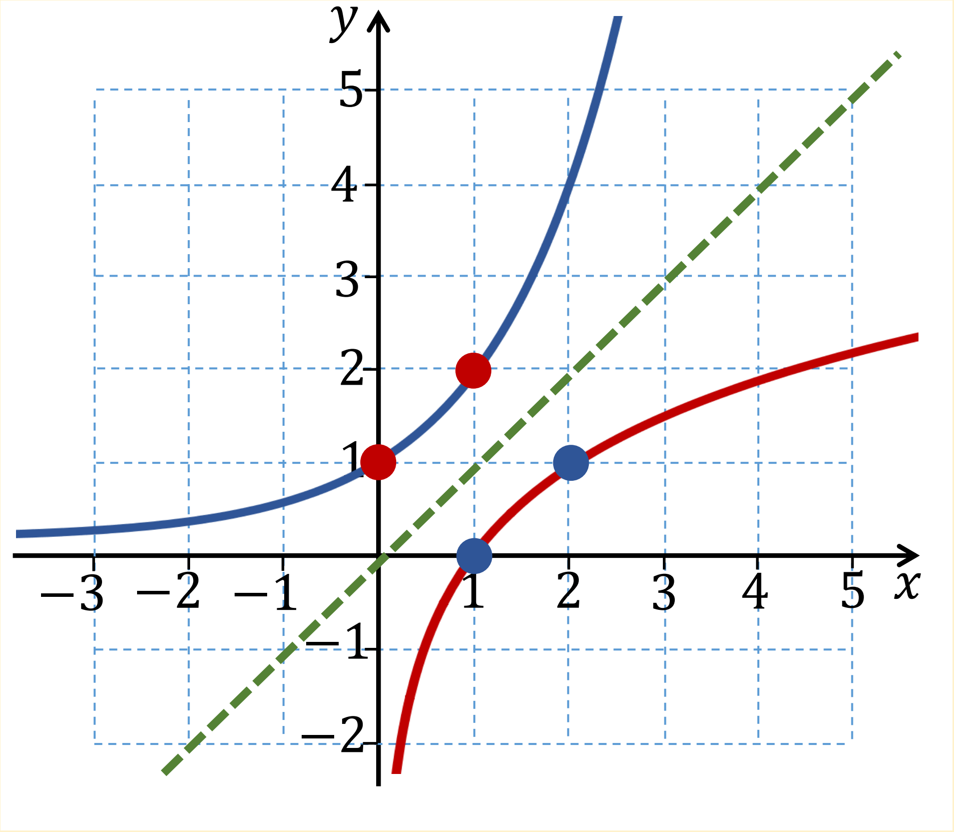
Exemplos

24) Determine a função inversa da função exponencial 2^x e esboce os gráficos de ambas.

Solução:

A função inversa de $f(x)$ é a função logarítmica de base 2.
Logo,

$$f^{-1}(x) = \log_2 x.$$



Definindo os pontos de $f(x) = 2^x$:

$$(0,1) \quad (1,2)$$

Definindo os pontos de $f^{-1}(x) = \log_2 x$:

$$(0,1) \quad (1,2)$$

Exercícios Propostos

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Exercícios

1) Calcule:

(a) $\log_4 64$

(b) $\log_{\frac{1}{4}} 16$

2) Calcule o valor de y em cada equação:

(a) $\log_4 y = 3$

(b) $\log_y 36 = 2$

3) Calcule o valor de y em cada equação:

(a) $\log_4 5 + \log_4 9$

(c) $8\log 1 + \log 0{,}777 - \log 0{,}11$

(b) $3\log_8 4 - \log_8 16$

(d) $\frac{1}{3}\log_3 8 - \log_3 10 + 4\log_3 2$

4) Considerando $\log 2 = 0{,}3$, $log\ 3 = 0{,}5$ e $log\ 5 = 0{,}7$ determine:

(a) $\log 15$

(c) $\log 45$

(e) $(\log 1{,}5)^2$

(b) $\log 30$

(d) $\log 1{,}2$

(f) $\log \sqrt{0{,}3}$

Exercícios

5) Calcule:

(a) $\log_4 x + \log_4(x+3) = 1$

(b) $\log(x-3) + \log x$=1

(c) $\log_6(x-1)^2 - \log_6(x-1) = 0$

(d) $\log_4 2x + \log_4(9-x) = 2$

Exercícios

6) Em cada caso, esboce o gráfico da função dada e determine o domínio, a imagem e a equação da assíntota vertical.

(a) $f(x) = 1 + \log_2 x$

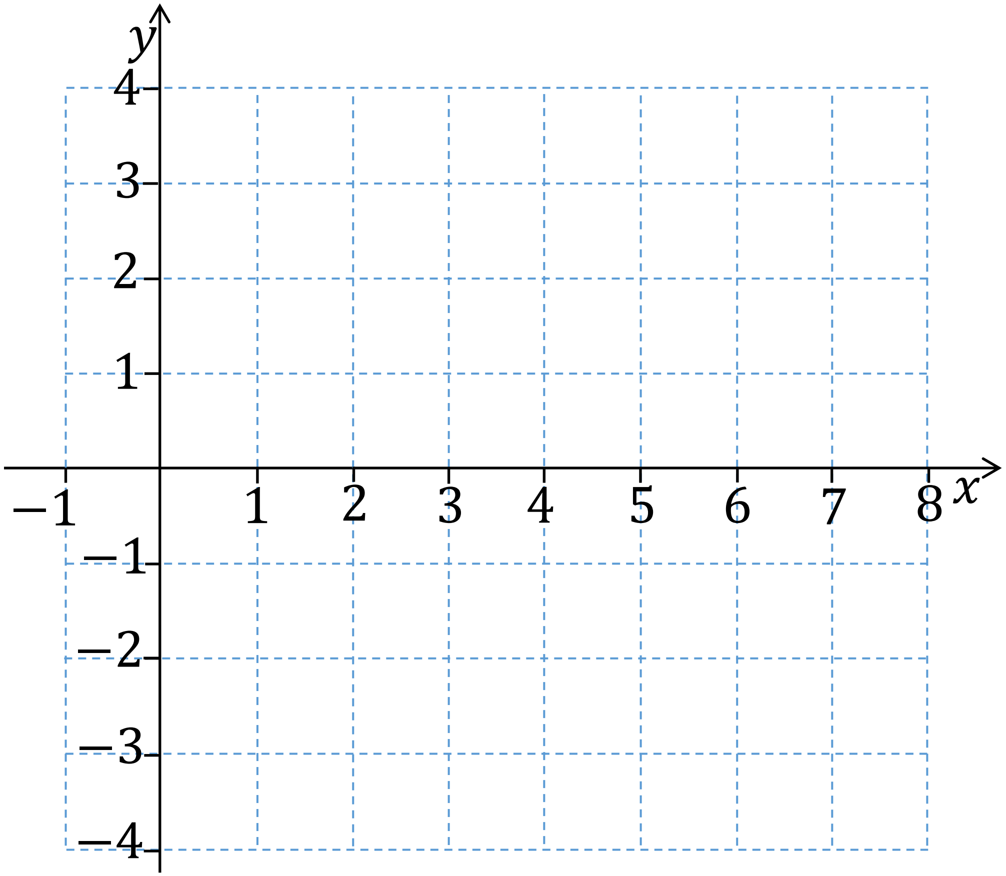
(b) $f(x) = 2\log_2 x$

(c) $f(x) = \log_3(x-2)$

(d) $f(x) = 2 + \log_3(x+1)$

(e) $f(x) = -\ln x$

(f) $f(x) = -\ln(-x)$



Exercícios

7) Determine o domínio das seguintes funções:

(a) $f(x) = 1 + 3\log_2(x-5)$

(b) $f(x) = \log(x^2 - 1)$

(c) $f(x) = \log_5(x^2 - x - 12) + \ln(x+2)$

8) Em cada caso, determine a composta fog.

(a) $f(x) = \log_2(x)$ e $g(x) = 12 - 3x$

(b) $f(x) = \log_5(x)$ e $g(x) = 5^x$

(c) $f(x) = 5^x$ e $g(x) = \log_5(x)$

(d) $f(x) = \ln x$ e $g(x) = e^{x^2+\sqrt{x}}$

9) Em cada caso, escreva a função dada como uma composta de duas funções.

a) $f(x) = \log(x^3 + 2x)$

b) $f(x) = \sqrt{\ln x}$

Respostas

Exercício 1:

a) $x = 3$

b) $x = -2$

Exercício 2:

a) $y = 64$

b) $y = 6$

Exercício 3:

a) $\log_4 45$

b) $\log_8 4$

c) $\log\left(\frac{777}{110}\right)$

d) $\log_3\left(\frac{16}{5}\right)$

Exercício 4:

a) $0{,}8$

b) $1{,}5$

c) $1{,}7$

d) $0{,}1$

e) $0{,}04$

f) $-0{,}25$

Exercício 5:

a) $S = \{-4, 1\}$

b) $S = \{-2, 5\}$

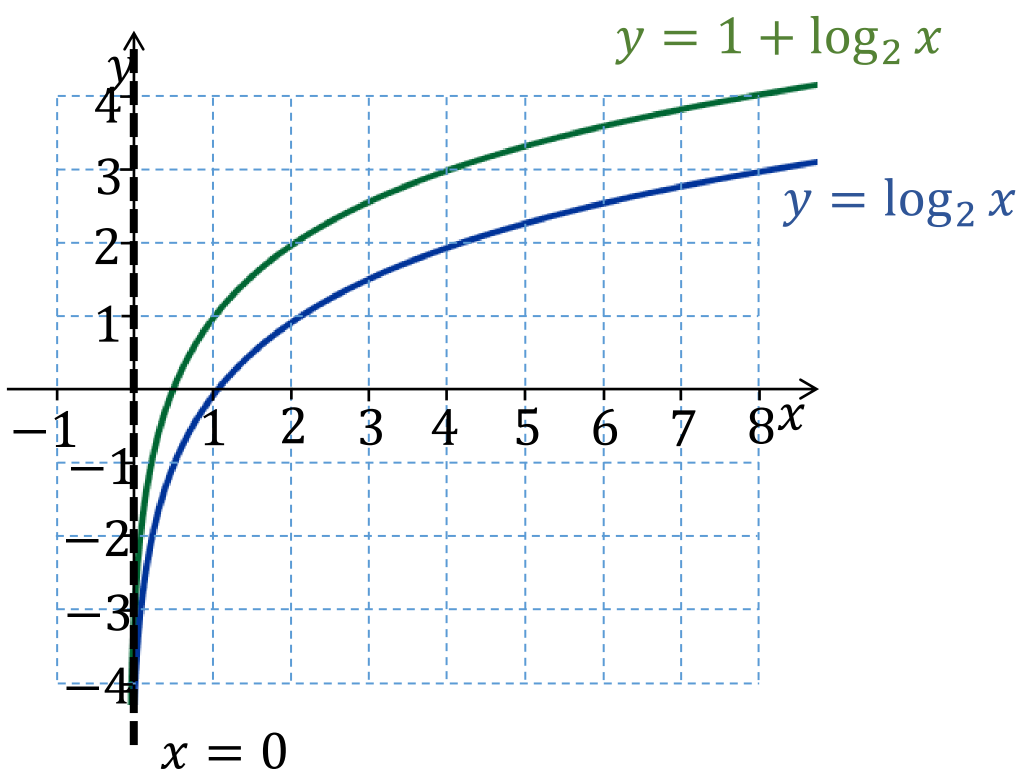
c) $S = \{2\}$

d) $S = \{1, 8\}$

Respostas

Exercício 6:

a)



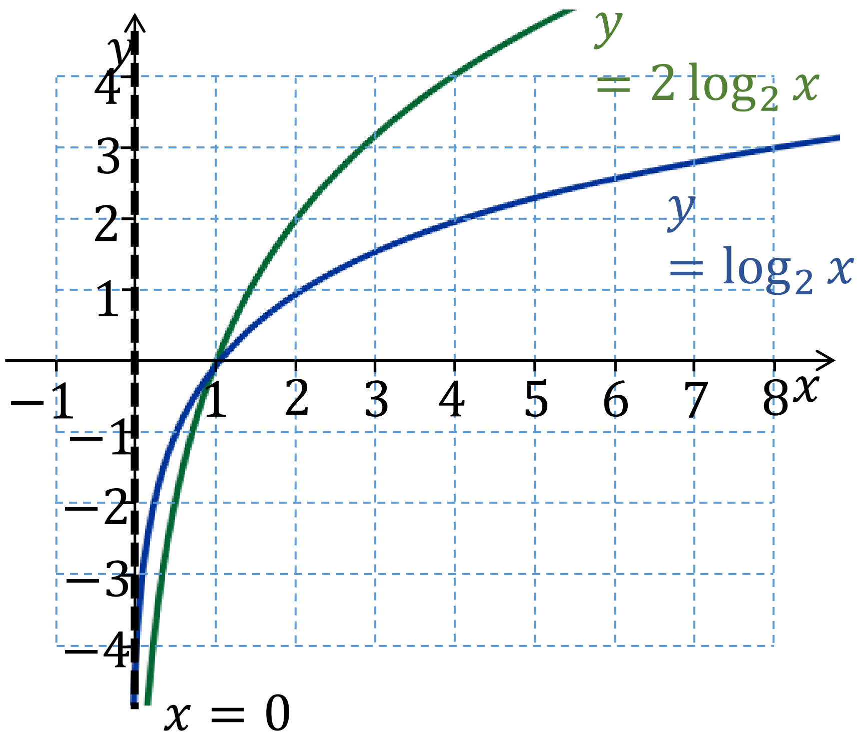
$D(f) = \mathbb{R}_+^*$

$Im(f) = \mathbb{R}$

Assíntota: $x = 0$

Respostas

b)



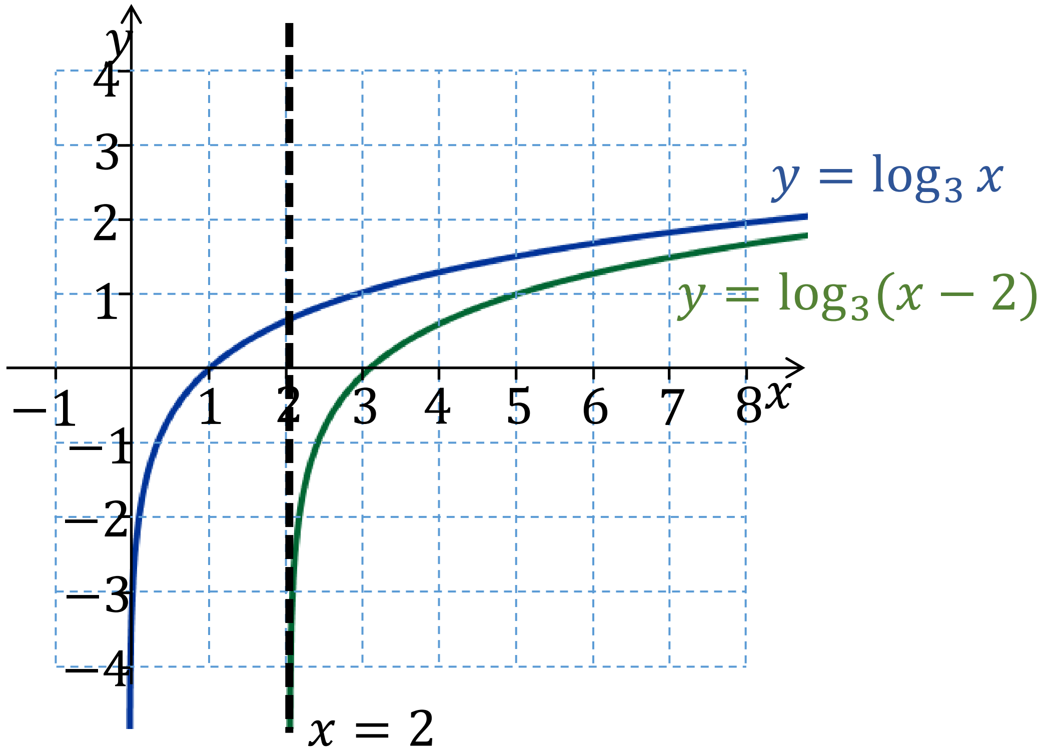
$D(f) = \mathbb{R}_+^*$

$Im(f) = \mathbb{R}$

Assíntota: $x = 0$

Respostas

c)



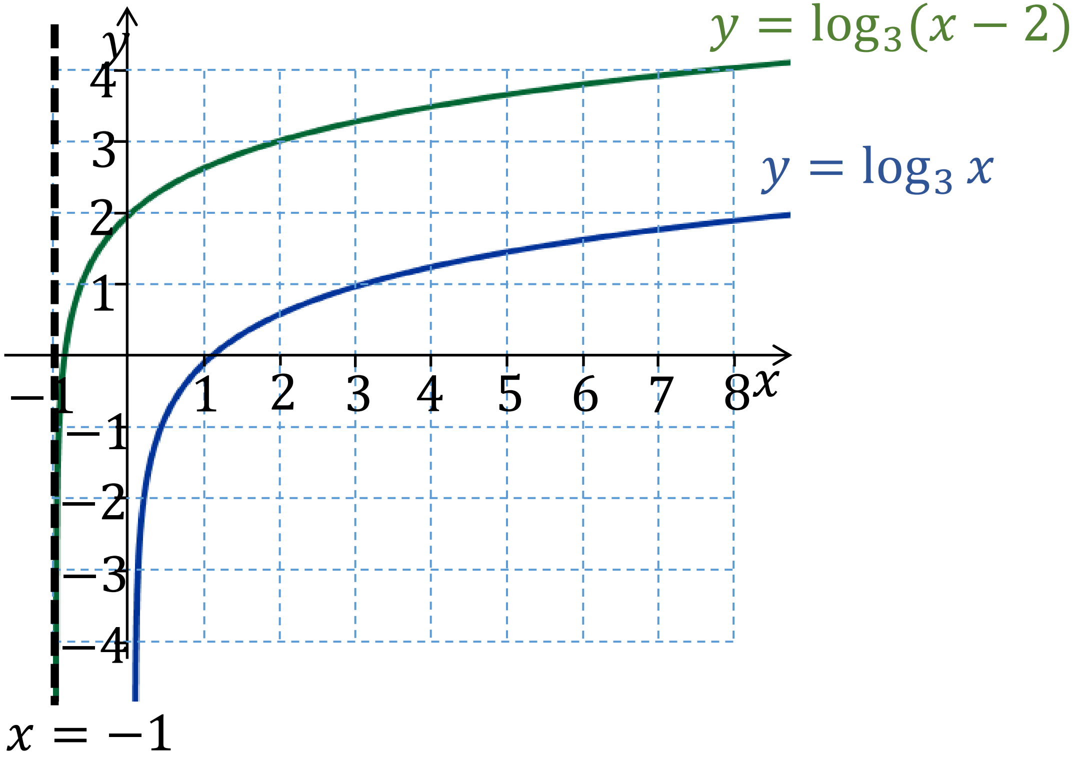
$D(f) = (2, +\infty)$

$Im(f) = \mathbb{R}$

Assíntota: $x = 2$

Respostas

d)



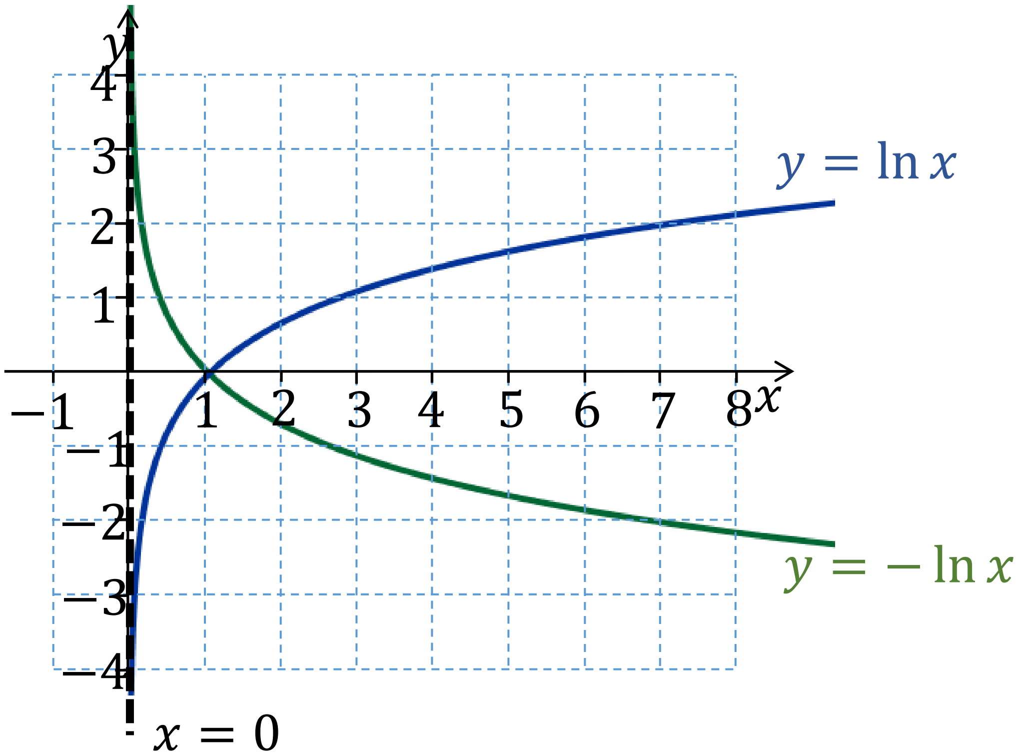
$D(f) = (-1, +\infty)$

$Im(f) = \mathbb{R}$

Assíntota: $x = -1$

Respostas

e)



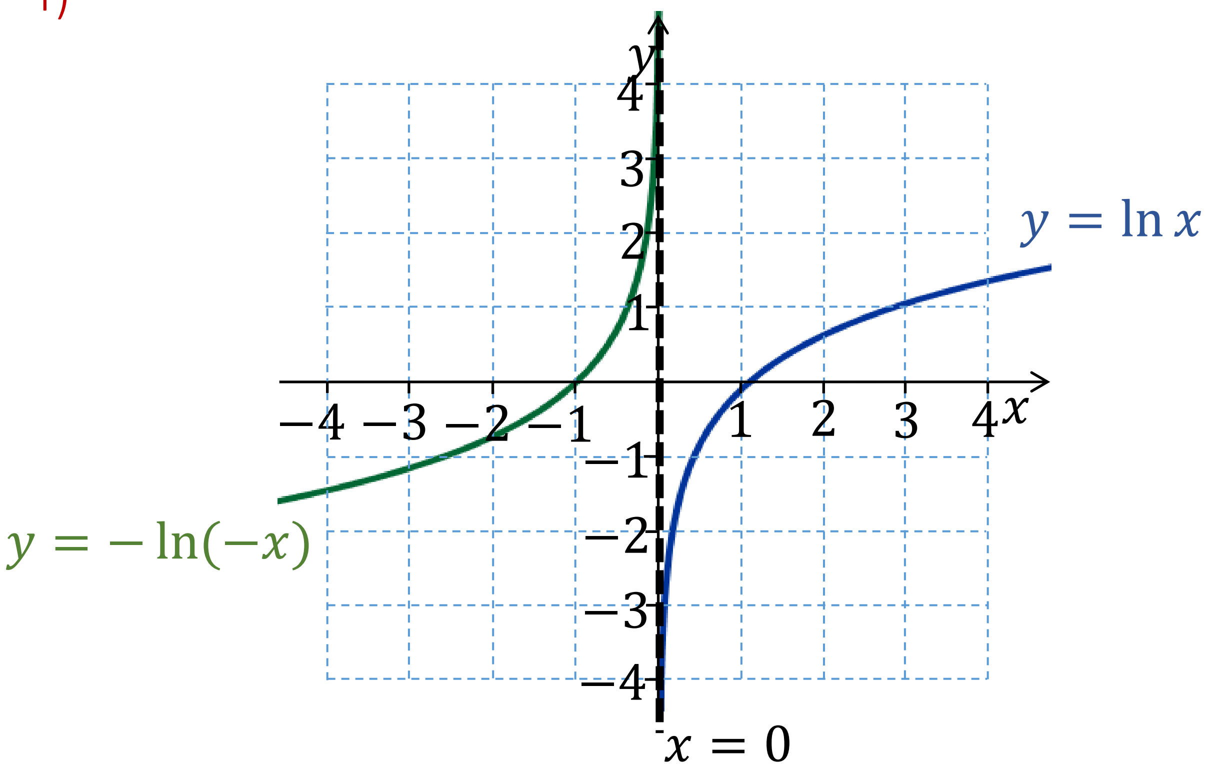
$D(f) = (0, +\infty)$

$Im(f) = \mathbb{R}$

Assíntota: $x = 0$

Respostas

f)



$D(f) = (-\infty, 0)$

$Im(f) = \mathbb{R}$

Assíntota: $x = 0$

Respostas

Exercício 7:

a) $D(f) = (5, +\infty)$

b) $D(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

c) $D(f) = (4, +\infty)$

Exercício 8:

a) $(fog)(x) = \log_2(12 - 3x)$

b) $(fog)(x) = x$

c) $(fog)(x) = x$

d) $(fog)(x) = x^2 + \sqrt{x}$

Exercício 9:

a) $f = f_2 o f_1 \qquad f_1(x) = x^3 + 2x$

$f_2(x) = \log(x)$

b) $f = f_2 o f_1 \qquad f_1(x) = \ln x$

$f_2(x) = \sqrt{x}$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA

O GAMA possui monitorias de:

- **Matemática Elementar, Cálulo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e equivalentes)
- **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
- **Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3** (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.