



Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino



Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Derivadas

Aula 01

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em
Matemática

Equação da reta

Lembre que a fórmula para o **coeficiente angular** ou **inclinação** da reta que contém os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ é dada por:

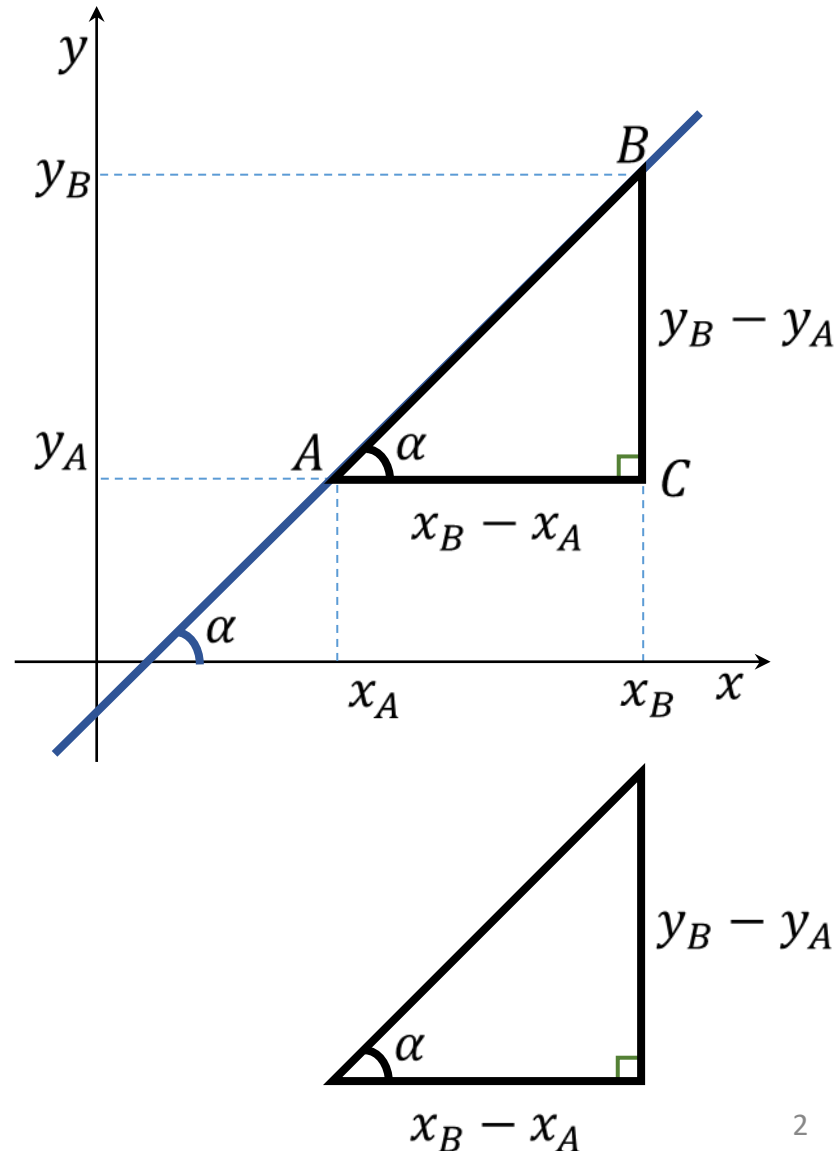
$$m = \tan \alpha$$

Ou ainda:

$$m = \tan \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

A equação da reta que possui coeficiente m e que contém o ponto $A(x_A, y_A)$ é dada por:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$



Equação da reta

Exemplo: Encontre a equação da reta que contém os pontos A(2,1) e B(5,3).

Solução: Determinando o coeficiente angular (inclinação) da reta, temos:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 1}{5 - 2} = \frac{2}{3}$$

Determinando a equação da reta:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

$$y - 1 = \frac{2}{3}(x - 2)$$

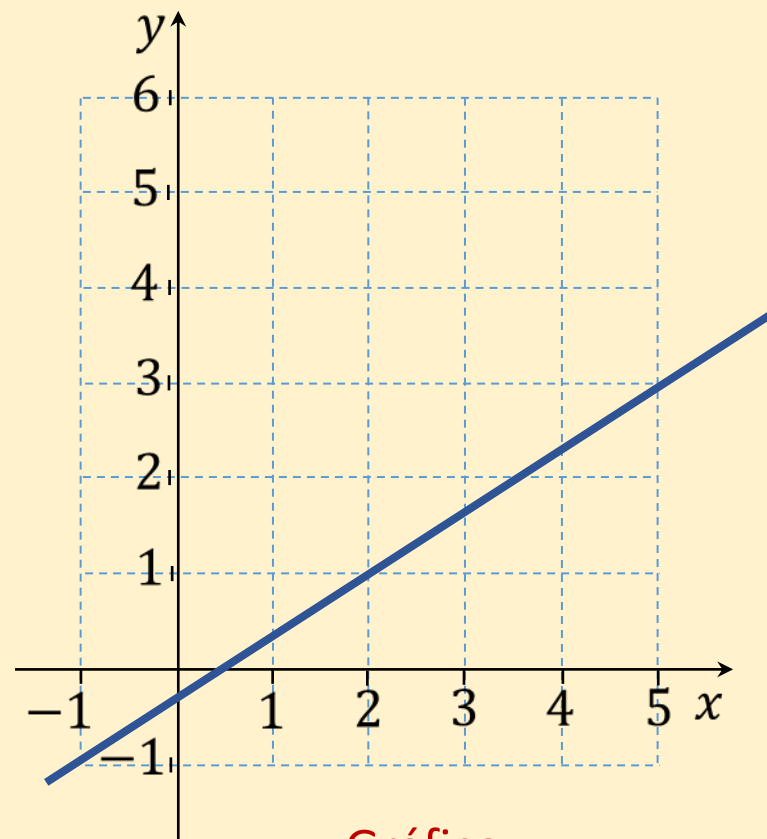
Portanto:

$$2x - 3y - 1 = 0$$

Equação geral

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

Equação reduzida



Gráfico

Reta tangente

Considere uma **reta secante** à curva $y = f(x)$ nos pontos $A(a, f(a))$ e $P(x, y)$, isto é, a reta intercepta a curva nos pontos A e P .

Ao aproximarmos os pontos A e P , isto é, fazendo

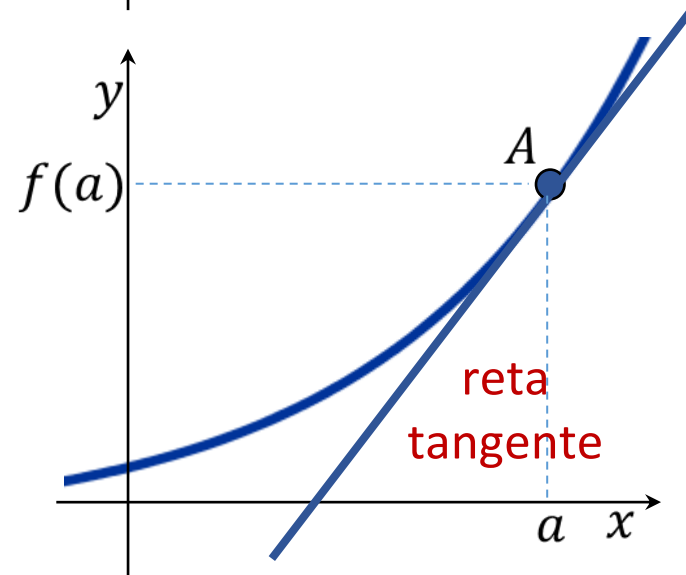
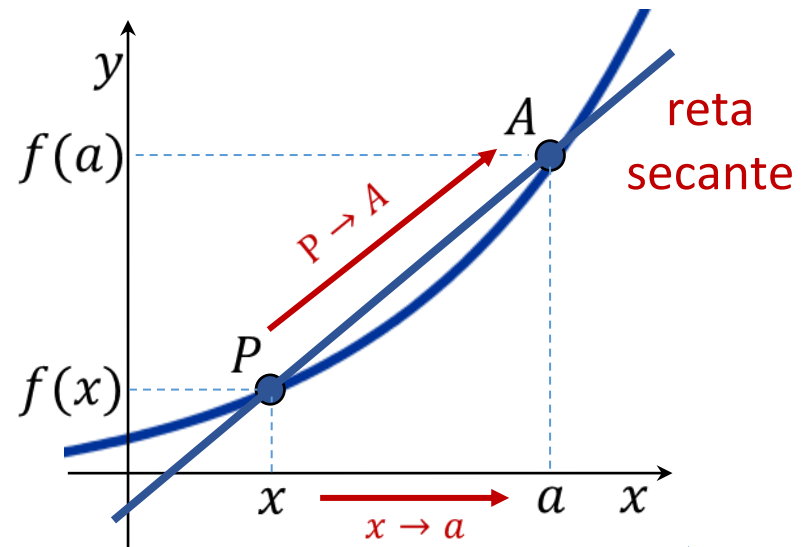
$$P \rightarrow A$$

ou, equivalentemente,

$$x \rightarrow a$$

teremos, na situação limite, uma **reta tangente** a curva $y = f(x)$ no ponto fixado $A(a, f(a))$.

Isto é, uma reta que apenas tangencia a curva dada no ponto fixado A .



Inclinação da reta tangente

Pergunta: Qual o valor do coeficiente angular (inclinação) da reta tangente ao gráfico da função f passando pelo ponto $A(a, f(a))$?

Note que a inclinação m da reta tangente é obtida fazendo o limite, para $x \rightarrow a$, da inclinação m_{PA} da reta secante.

$$m_{PA} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Inclinação da
reta secante

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Inclinação da
reta tangente

Resposta: A inclinação da reta tangente é dada por

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

desde que este limite exista.

Inclinação da reta tangente

Definição: A **reta tangente** à uma curva $y = f(x)$ em um ponto $A(a, f(a))$ é a reta que contém o ponto A e tem inclinação

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

(desde que este limite exista).

Observação: Fazendo a substituição

$$h = x - a$$

no limite acima, temos que $x = a + h$ e como $x \rightarrow a$ temos $h \rightarrow 0$.

Podemos então reescrever m como:

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Equação reta tangente

Exemplo: (a) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função

$$f(x) = x^2 + 1$$

no ponto $A(1,2)$.

(b) Esboce, no mesmo plano cartesiano, os gráficos de f e da reta tangente.

Solução: Calculando a inclinação desta reta, teremos:

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(1+h)^2 + 1] - [(1)^2 + 1]}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{[1 + 2h + h^2 + 1] - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+2) = 2.$$

Portanto, a equação da reta tangente será dada por:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

$$y - 2 = 2(x - 1)$$

$$y - 2x = 0$$

$$y = 2x$$

Equação reta tangente

Exemplo: (a) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função

$$f(x) = x^2 + 1$$

no ponto $A(1,2)$.

(b) Esboce, no mesmo plano cartesiano, os gráficos de f e da reta tangente.

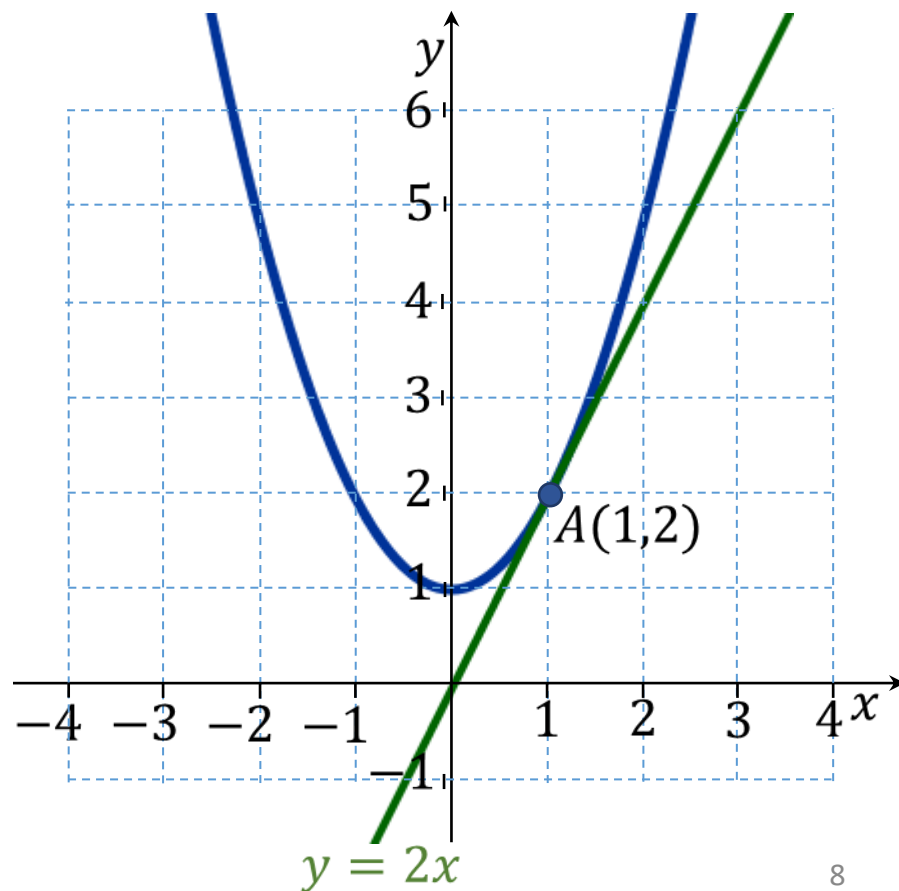
Solução: Esboçando, no mesmo plano cartesiano, os gráficos da função

$$f(x) = x^2 + 1$$

e da equação da reta tangente

$$y = 2x$$

ao gráfico de f no ponto $A(1,2)$,
 obtém-se os gráficos ao lado.



Definição de derivada

Definição: A **derivada** de uma função $y = f(x)$ em um número a denotada por $f'(a)$, é dada por

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

(desde que este limite exista).

Se o limite acima existe, se diz que a f é **derivável** no número a .
Do contrário, se diz que f é **não derivável** em a .

Uma forma equivalente de denotar a derivada seria:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Portanto, a equação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $A(a, f(a))$ pode ser escrita como

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Definição de derivada

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

calcule $f'(1)$.

Solução: Calculando a derivada pela definição temos

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - 1 - h}{1+h}}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{1+h} \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{1+h} = -1$$

Portanto,

$$f'(1) = -1$$

Definição de derivada

Observação: Uma função f não possui derivada nos pontos onde não existe o limite (bilateral):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Isto ocorre geralmente quando uma das situações a seguir ocorrem:

(a) A função f não está definida em $x = a$, isto é, $f(a)$ não existe;

(b) O limite acima é infinito.

Neste caso, teríamos uma “reta tangente vertical” em $x = a$.

(c) Os limites laterais

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

não existem ou são diferentes entre si.

Definição de derivada

Definição: A derivada de uma função $y = f(x)$, denotada por f' , é a função que associa a cada $x \in D(f)$ o número

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(desde que este limite exista).

Notações: Outras notações para a derivada de uma função $y = f(x)$ em um número x são:

$$f' \quad y' \quad D_x(f) \quad \frac{dy}{dx} \quad \frac{df}{dx}$$

Notação: A notação

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a}$$

também pode ser utilizada para denotar $f'(a)$.

Exercícios Propostos



Exercícios



1) Calcule as derivadas pela definição:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$

)

(b) $f(x) = 3x^2 - 8x + 5$ $f'(x) = 6x - 8$

)

(c) $f(x) = \sqrt{x}$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função

$$f(x) = x^2 - 8x + 9$$

no ponto $P(2, -3)$.

Obs.: Utilize o limite para encontrar a inclinação da reta!!

$$y = -4x + 5$$

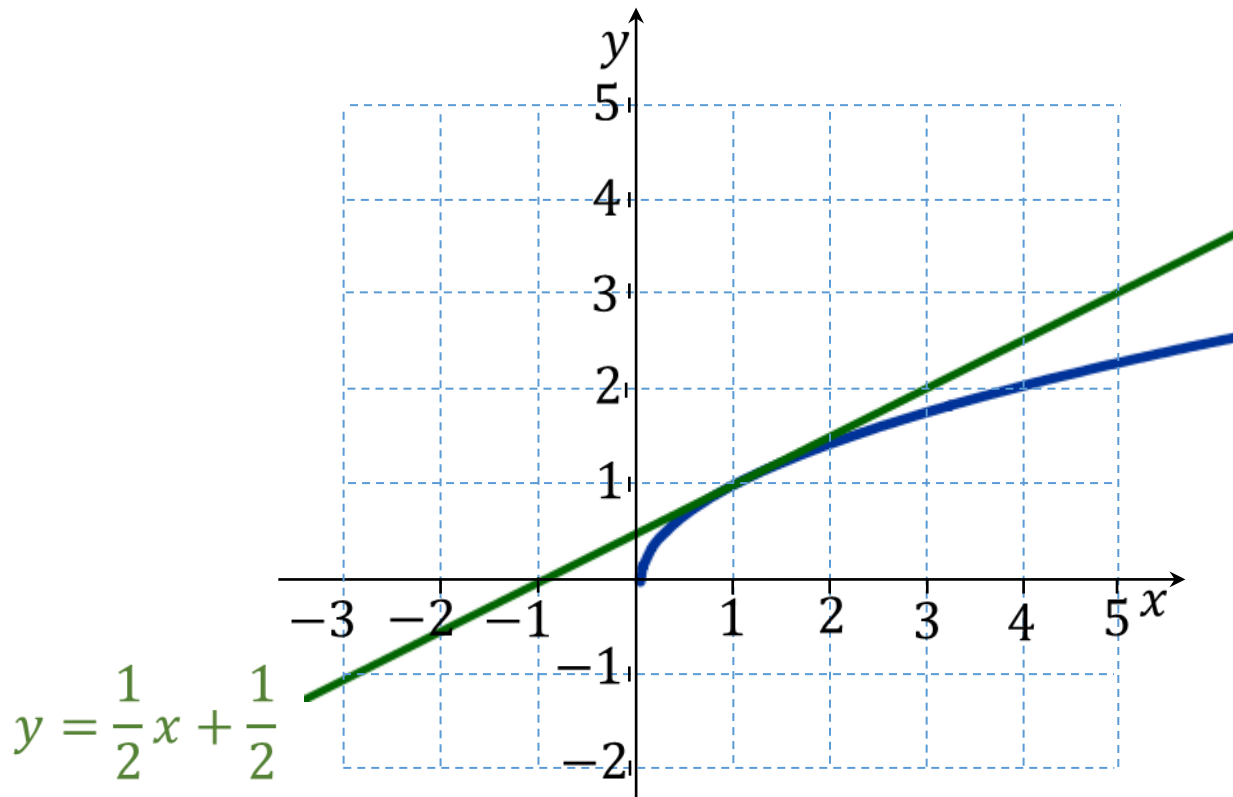
Exercícios

3) Esboce o gráfico da função

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Obs.: Utilize o limite para encontrar a inclinação da reta tangente!!

e a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1,1)$.



reta tangente ao gráfico
de f no ponto $(1,1)$.

Exercícios



4) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2 \qquad y = 12x + 9$$

no ponto $x = -1$.

Obs.: Utilize o limite para encontrar a inclinação da reta!!

5) Calcule a derivada da função

$$f(x) = \frac{x - 1}{x + 1} \qquad f'(x) = \frac{2}{x^2 + 2x + 1}$$

utilizando a definição de derivada (pelo limite).

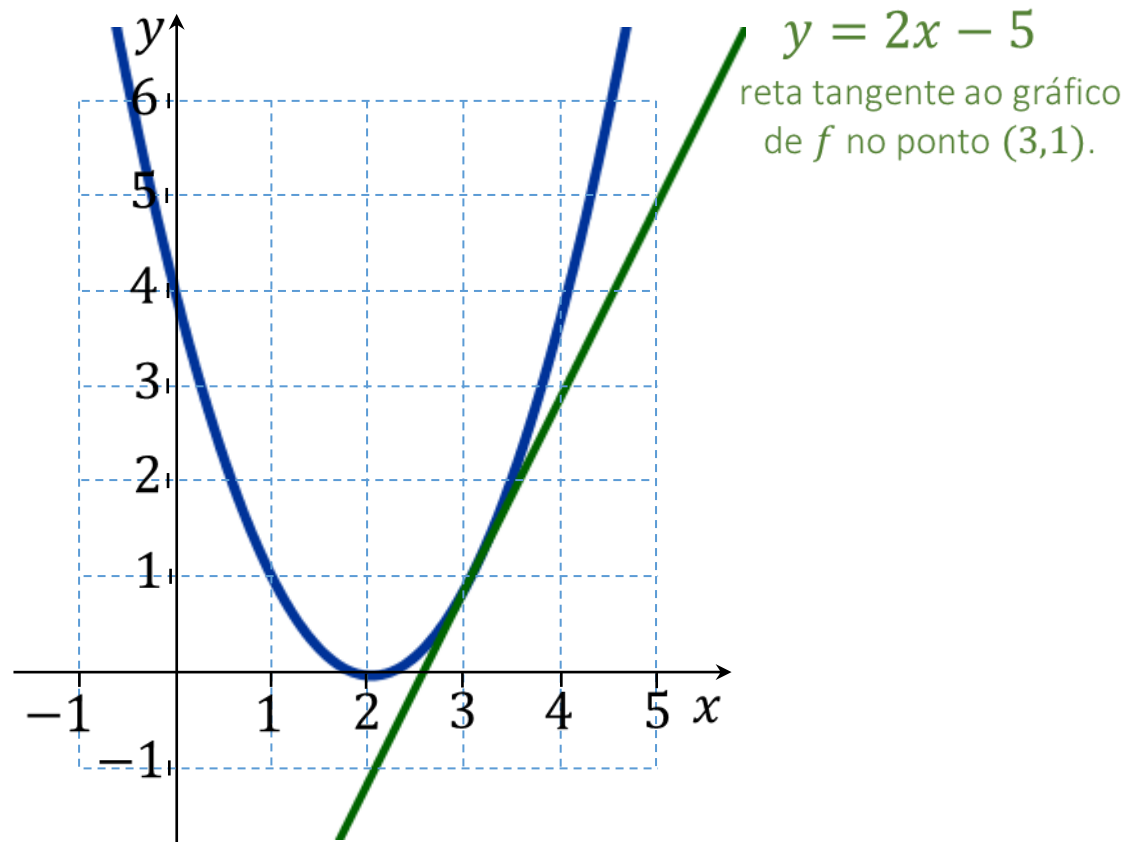
Exercícios

6) Esboce o gráfico da função

$$f(x) = x^2 - 4x + 4$$

Obs.: Utilize o limite para encontrar a inclinação da reta tangente!!

e a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(3,1)$.



Monitorias!!



Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

<http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias>

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

<http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA>

O GAMA possui monitorias de:

- ☐ Matemática Elementar, Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e equivalentes)
 - ☐ ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
 - ☐ Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3 (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.



Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino



Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Derivadas

Aula 02

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em
Matemática

Regras de derivação

Nesta aula, estudaremos algumas regras de derivação.

Derivada da constante: A derivada de uma função constante $f(x) = c$, onde c é qualquer número real, é igual a zero, ou seja,

$$[c]' = 0$$

De fato, sendo f uma função constante, digamos $f(x) = c$, teremos:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

Exemplo: Calcule a derivada das funções:

(a) $f(x) = 5$

(b) $f(x) = \sqrt{2 + \pi}$

(c) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{e} - e}{\ln \pi}$

Solução: Como todas as funções são constantes, tem-se

se (a) $f'(x) = (5)' = 0$

(c) $f'(x) = \left(\frac{\sqrt[3]{e} - e}{\ln \pi} \right)' = 0$

(b) $f'(x) = (\sqrt{2 + \pi})' = 0$

Regras de derivação

Derivada da potência: A derivada da função $f(x) = x^n$ é dada por

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

para todo n real.

Exemplo: Calcule a derivada das funções:

(a) $f(x) = x^8$ (b) $f(x) = \frac{1}{x^6}$ (c) $f(x) = \sqrt[4]{x}$

Solução: (a) Como $n = 8$, temos:

$$f'(x) = (x^8)' = 8x^{(8-1)} = 8x^7$$

(b) Como podemos reescrever a função como $f(x) = x^{-6}$, temos:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^6}\right)' = (x^{-6})' = -6x^{(-6-1)} = -6x^{-7} = -\frac{6}{x^7}$$

(c) Reescrevendo a função como $f(x) = x^{1/4}$, temos:

$$f'(x) = (\sqrt[4]{x})' = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4}x^{\left(\frac{1}{4}-1\right)} = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

Regras de derivação

Derivada do Múltiplo Constante: Se k é uma constante e u for uma função derivável, então

$$[ku]' = k[u]'$$

Isto é, a derivada do produto de uma constante por uma função é igual ao produto da constante pela derivada da função.

Exemplo: Calcule a derivada das funções:

(a) $f(x) = 6x^8$

(b) $f(x) = \frac{5}{x^6}$

(c) $f(x) = -4\sqrt[3]{x}$

Solução: (a)

$$f'(x) = (6x^8)' = 6(x^8)' = 6(8)x^7 = 48x^7$$

$$(b) \quad f'(x) = \left(\frac{5}{x^6}\right)' = 5\left(\frac{1}{x^6}\right)' = 5(x^{-6})' = 5(-6)x^{-7} = -\frac{30}{x^7}$$

$$(c) \quad f'(x) = (-4\sqrt[3]{x})' = -4\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = -4\left(\frac{1}{3}\right)x^{\frac{1}{3}-1} = -\frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} = -\frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Regras de derivação

Derivada da Soma/diferença: Sejam u e v funções deriváveis, então

$$[u \pm v]' = u' \pm v'$$

Isto é, a derivada da soma/diferença é igual a soma/diferença das derivadas.

Exemplo: Calcule a derivada das funções:

(a) $f(x) = 6x^8 + 9x^2$

(b) $f(x) = \frac{5}{x^6} - 9\sqrt[3]{x^4} - 20x + 5$

Solução:

(a) $f'(x) = (6x^8 + 9x^2)' = (6x^8)' + (9x^2)' = 48x^7 + 18x.$

(b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{5}{x^6} - 9\sqrt[3]{x^4} - 20x + 5 \right)' = (5x^{-6})' - (9x^{\frac{4}{3}})' - (20x)' + (5)' \\ &= 5(-6)x^{-7} - 9\left(\frac{4}{3}\right)x^{\frac{1}{3}} - 20 = -30x^{-7} - 12x^{\frac{1}{3}} - 20. \end{aligned}$$

Regras de derivação

Derivada do produto: Sejam u e v funções deriváveis, então

$$[u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Isto é, a derivada do produto de duas funções é igual a derivada da primeira vezes a segunda mais a primeira vezes a derivada da segunda.

Exemplo: Calcule a derivada das funções:

$$(a) f(x) = (x^2 - 2)(2x^5 + 4) \quad (b) f(x) = (x^4 - 3x)(\sqrt[5]{x^7} - 100)$$

Solução: (a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= [(x^2 - 2)(2x^5 + 4)]' = (x^2 - 2)'(2x^5 + 4) + (x^2 - 2)(2x^5 + 4)' \\ &= 2x(2x^5 + 4) + (x^2 - 2)(10x^4) = 14x^6 - 20x^4 + 8x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad f'(x) &= (x^4 - 3x)'(\sqrt[5]{x^7} - 100) + (x^4 - 3x)(\sqrt[5]{x^7} - 100)' = \\ &= (4x^3 - 3)(\sqrt[5]{x^7} - 100) + (x^4 - 3x)\frac{7}{5}x^{\frac{2}{5}} = \frac{27}{5}x^{\frac{22}{5}} - \frac{36}{5}x^{\frac{7}{5}} - 400x^3 + 300 \end{aligned}$$

Regras de derivação

Derivada do quociente: Sejam u e v funções deriváveis, então

$$\left[\frac{u}{v} \right]' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Isto é, a derivada do quociente de duas funções é igual a derivada da de cima vezes a função de baixo, menos a função de cima vezes a derivada da função de baixo, tudo dividido pelo quadrado da função de baixo.

Exemplo: Calcule a derivada das funções:

$$(a) f(x) = \frac{x^2+2}{x-3}$$

$$(b) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x+1}$$

Solução:

(a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\frac{x^2+2}{x-3} \right]' = \frac{(x^2+2)'(x-3) - (x^2+2)(x-3)'}{(x-3)^2} \\ &= \frac{(2x)(x-3) - (x^2+2)(1)}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x - 2}{x^2 - 6x + 9} \end{aligned}$$

Regras de derivação

(b)

$$f'(x) = \left[\frac{\sqrt{x}}{2x+1} \right]' = \frac{(\sqrt{x})'(2x+1) - (\sqrt{x})(2x+1)'}{(2x+1)^2} =$$

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(2x+1) - (\sqrt{x})(2)}{(2x+1)^2} = \frac{\frac{2x+1}{2\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}}{4x^2 + 4x + 1} = \frac{\frac{2x+1-4x}{2\sqrt{x}}}{4x^2 + 4x + 1}$$

$$= \frac{-2x+1}{2\sqrt{x}(4x^2 + 4x + 1)}$$

Derivada de algumas funções elementares

Funções trigonométricas

$$[\sin x]' = \cos x$$

$$[\cos x]' = -\sin x$$

$$[\tan x]' = \sec^2 x$$

$$[\cot x]' = -\csc^2 x$$

$$[\sec x]' = \sec x \tan x$$

$$[\csc x]' = -\csc x \cot x$$

Funções trigonométricas inversas

$$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$[\arctan x]' = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$[\text{arccot } x]' = -\frac{1}{x^2 + 1}$$

$$[\text{arcsec } x]' = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$[\text{arccsc } x]' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

Funções exponenciais

$$(a > 0, a \neq 1)$$

$$[a^x]' = a^x \ln a$$

$$[e^x]' = e^x$$

Funções logarítmicas

$$(a > 0, a \neq 1)$$

$$[\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$[\ln x]' = \frac{1}{x}$$

Exercícios Propostos



Exercícios



1) Calcule a derivada das seguintes funções, utilizando a regra da potência.

$$(a) f(x) = x^2 \quad f'(x) = 2x$$

$$(e) f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$(b) f(x) = \frac{1}{x} \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$(f) f(t) = \sqrt[5]{t^2} \quad f'(t) = \frac{2}{5\sqrt[5]{t^3}}$$

$$(c) f(x) = \sqrt{x} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(g) p(m) = m^{\frac{2}{3}} \quad p'(m) = \frac{2}{3\sqrt[3]{m}}$$

$$(d) f(x) = \sqrt[3]{x} \quad f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$(h) n(q) = \frac{1}{q^2} \quad n'(q) = \frac{-2}{q^3}$$

Exercícios

2) Calcule a derivada das funções dadas:

(a) $f(r) = \pi r^2$ $f'(r) = 2\pi r$

(b) $f(x) = \frac{1}{2}x^{-3} - 14$ $f'(x) = -\frac{3}{2x^4}$

(c) $f(x) = (7x - 1)(x^2 + 4)$ $f'(x) = 21x^2 - 2x + 28$

(d) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$

3) Encontre uma equação da reta tangente à curva

$$f(x) = x^4 + 2x^2 - x$$

no ponto (1,2). $y = 7x - 5$

Exercícios

4) Calcule a derivada das funções dadas:

$$(a) f(x) = \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \cot x \quad f'(x) = \cos x - \frac{\csc^2 x}{2}$$

$$(b) f(x) = -4x^2 \cos x \quad f'(x) = 4x^2 \sin x - 8x \cos x$$

$$(c) f(x) = \frac{5 - \cos x}{5 + \operatorname{sen} x} \quad f'(x) = \frac{5(\sin x - \cos x) + 1}{(5 + \operatorname{sen} x)^2}$$

$$(d) h(y) = ye^{y+10} \quad h'(y) = (y+1)e^y$$

$$(e) m(x) = \frac{\ln x}{x^2} \quad m'(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$$

5) Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

$$(a) y = e^x \cos x \quad (0, 1) \quad y = x + 1$$

$$(b) y = \sec x \quad \left(\frac{\pi}{3}, 2\right) \quad y = 2\sqrt{3}x + 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$

Exercícios

6) Calcule a derivada das funções dadas:

$$(a) f(x) = x^3 + 5x - 2 \quad f'(x) = 3x^2 + 5$$

$$(b) f(x) = \sqrt[5]{x^4} + 2x^3 - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{3}} \quad f'(x) = \frac{4}{5\sqrt[5]{x}} + 6x^2 - \frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2}$$

$$(c) f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 1) \quad f'(x) = 4x^3$$

$$(d) f(x) = \frac{x^4 - 2x}{x - 2} \quad f'(x) = \frac{3x^4 - 8x^3 + 4}{(x - 2)^2}$$

7) Encontre uma equação da reta tangente à curva

$$f(x) = \sqrt[4]{x}$$

no ponto $x = 1$. $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

Exercícios

8) Calcule a derivada das funções dadas:

(a) $f(x) = x^3 + \sin x + 2 \cos x$ $f'(x) = 3x^2 + \cos x - 2 \sin x$

(b) $g(t) = t^3 \cos t$ $g'(t) = 3t^2 \cos t - t^3 \sin t$

(c) $f(\theta) = \frac{\sec \theta}{1 + \sec \theta}$ $f'(\theta) = \frac{\sec \theta \tan \theta}{(1 + \sec \theta)^2}$

(d) $f(x) = 2x \log x$ $f'(x) = 2 \log x + \frac{2}{\ln 10}$

9) Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

(a) $y = x^2 \ln x$ $(1, 0)$ $y = x - 1$

(b) $y = 1 + 2 \sin x$ $\left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$ $y = 3$

Monitorias!!



Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

<http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias>

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

<http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA>

O GAMA possui monitorias de:

- ☐ Matemática Elementar, Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e equivalentes)
 - ☐ ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
 - ☐ Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3 (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.



Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino



Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Derivadas

Aula 03

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em
Matemática

Derivadas de ordem superior

Definição: Seja f uma função derivável. Se f' também for uma função derivável, então sua derivada $(f')'$ é chamada *derivada segunda* de f .

Notação:

$$f'' = (f')' \quad \text{ou ainda} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left[\frac{dy}{dx} \right]$$

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = 2x^3 - 9x,$$

calcule $f''(x)$.

Solução: Como

$$f'(x) = (2x^3 - 9x)' = 6x^2 - 9$$

teremos

$$f''(x) = (f')'(x) = (6x^2 - 9)' = 12x.$$

Derivadas de ordem superior

Definição: Seja f uma função derivável. Se f'' também for uma função derivável, então sua derivada $(f'')'$ é chamada *derivada terceira* de f .

Notação:

$$f''' = (f'')' \quad \text{ou} \quad f^{(3)} = (f'')' \quad \text{ou ainda} \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left[\frac{d^2 y}{dx^2} \right]$$

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = x^3 - \cos x + e^x,$$

calcule $f^{(3)}(x)$.

Solução: Como

$$f'(x) = (x^3 - \cos x + e^x)' = 3x^2 + \sin x + e^x$$

teremos

$$f''(x) = (3x^2 + \sin x + e^x)' = 6x + \cos x + e^x$$

e portanto

$$f^{(3)}(x) = (6x + \cos x + e^x)' = 6 - \sin x + e^x.$$

Derivadas de ordem superior

Definição: Seja f uma função derivável. Se $f^{(n-1)}$ também for uma função derivável, então sua derivada $(f^{(n-1)})'$ é chamada *derivada enésima* de f .

Notação:

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})' \quad \text{ou ainda} \quad \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left[\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right]$$

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = 2^x,$$

calcule $f^{(5)}(x)$.

Solução: Como

$$f'(x) = (2^x)' = 2^x \ln 2$$

teremos

$$f^{(2)}(x) = (2^x \ln 2)' = \ln 2 (2^x)' = 2^x (\ln 2)^2$$

e portanto

$$\vdots$$

$$f^{(5)}(x) = 2^x (\ln 2)^5$$

Regra da cadeia

Teorema (Regra da Cadeia): Se a função g for derivável em x e a função f for derivável em $g(x)$, então a função composta $h = f \circ g$ será derivável em x e a derivada da função composta será dada por

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Ou seja, **a derivada da função composta é igual a derivada da função de fora calculada na função de dentro vezes a derivada da função de**

Observação: Costuma-se denotar a função de dentro por uma variável auxiliar, geralmente u , para utilização da Regra da Cadeia.

Assim, se $y = f(g(x))$, denota-se

$$u = g(x) \quad \text{e} \quad y = f(u)$$

Desta forma, escreve-se

$$y' = f'(u) \cdot u'$$

Diagram illustrating the chain rule formula $y' = f'(u) \cdot u'$ with annotations:

- y' is labeled "Derivada da função composta." (Derivative of the composite function).
- $f'(u)$ is labeled "Derivada da função de fora calculada na função de dentro." (Derivative of the outer function calculated at the inner function).
- u' is labeled "Derivada da função de dentro." (Derivative of the inner function).

Regra da cadeia

Exemplo: Calcule a derivada da função

$$h(x) = \sin(2x + 1).$$

Solução: Neste caso a função de dentro é

$$u = g(x) = 2x + 1$$

e a função de fora é

$$f(u) = \sin u.$$

Portanto,

$$f'(u) = \cos u \quad \text{e} \quad u' = g'(x) = 2$$

e temos:

$$h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(u) \cdot u' = \cos(u) \cdot 2 = 2\cos(2x + 1).$$

Regra da cadeia

Exemplo: Calcule a derivada da função

$$h(x) = \sqrt{x^2 + 2x}.$$

Solução: Neste caso, tem-se:

$$u = g(x) = x^2 + 2x$$

(função de dentro)

$$f(u) = \sqrt{u}$$

(função de fora)

Como,

$$f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \quad \text{e} \quad u' = g'(x) = 2x + 2$$

temos:

$$h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(u) \cdot u' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x}} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}}.$$

Regra da cadeia

Observação: Regra da cadeia na notação de Leibniz:

Se $y = f(u)$ e $u = g(x)$ forem deriváveis, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}.$$

Ou

seja:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

Derivada da função composta. Derivada da função de fora calculada na função de dentro. Derivada da função de dentro.

Regra da cadeia

Exemplo: Calcule a derivada da função

$$y = e^{\sin x}.$$

Solução: Neste caso, podemos escrever a função dada como:

$$y = e^u \quad (\text{função de fora})$$

$$u = \sin x. \quad (\text{função de dentro})$$

Portanto:

$$\frac{dy}{du} = (e^u)' = e^u \quad \text{Derivada da função de fora calculada na função de dentro.}$$

e

$$\frac{du}{dx} = (\sin x)' = \cos x \quad \text{Derivada da função de dentro.}$$

e utilizando a Regra da Cadeia temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = e^u (\cos x) = e^{\sin x} \cos x.$$

Regra da cadeia

Exemplo: Calcule a derivada da função

$$w = \ln(t^4 + 2).$$

Solução: Neste caso, podemos escrever a função dada como:

$$w = \ln u \quad (\text{função de fora})$$

$$u = t^4 + 2 \quad (\text{função de dentro})$$

Portanto:

$$\frac{dw}{du} = (\ln u)' = \frac{1}{u} \quad \text{Derivada da função de fora calculada na função de dentro.}$$

e

$$\frac{du}{dt} = (t^4 + 2)' = 4t^3 \quad \text{Derivada da função de dentro.}$$

e utilizando a Regra da Cadeia temos:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{du} \frac{du}{dt} = \frac{1}{u} 4t^3 = \frac{4t^3}{t^4 + 2}.$$

Regra da cadeia

Funções trigonométricas

$$[\sin u]' = \cos u \cdot u'$$

$$[\cos u]' = -\sin u \cdot u'$$

$$[\tan u]' = \sec^2 u \cdot u'$$

$$[\cot u]' = -\csc^2 u \cdot u'$$

$$[\sec u]' = \sec u \tan u \cdot u'$$

$$[\csc u]' = -\csc u \cot u \cdot u'$$

Funções trigonométricas inversas

$$[\arcsin u]' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$[\arccos u]' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$[\arctan u]' = \frac{u'}{x^2 + 1}$$

$$[\text{arccot } u]' = -\frac{u'}{x^2 + 1}$$

$$[\text{arcsec } u]' = \frac{u'}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$[\text{arccsc } u]' = -\frac{u'}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

Funções exponenciais

$$(a > 0, a \neq 1)$$

$$[a^u]' = u' a^u \ln a$$

$$[e^u]' = u' e^u$$

Funções logarítmicas

$$(a > 0, a \neq 1)$$

$$[\log_a u]' = \frac{u'}{u \ln a}$$

$$[\ln u]' = \frac{u'}{u}$$

Exercícios Propostos



Exercícios



1) Calcule a segunda derivada das funções dadas

(a) $f(x) = x \cos x$ *Resp.: $f''(x) = -2\sin x - x \cos x$*

(b) $f(x) = \sqrt{3}(e^x + x^3)$ *Resp.: $f''(x) = \sqrt{3}(e^x + 6x)$*

(c) $f(x) = \sin x \cos x$ *Resp.: $f''(x) = -4 \sin x \cos x$*

2) Calcule a terceira derivada da função:

$$f(x) = 6x^5 + 4x + 5 \quad \text{Resp.: } f^{(3)}(x) = 360x^2$$

Exercícios



3) Calcule a derivada das funções usando a regra de cadeia:

(a) $f(x) = \sin(2x)$ *Resp.: $f'(x) = 2 \cos 2x$*

(b) $f(x) = \tan(x^2 + 1)$ *Resp.: $f'(x) = 2x \sec^2(x^2 + 1)$*

(c) $f(x) = \sqrt{x^3 + \csc(x)}$ *Resp.: $f'(x) = \frac{3x^2 - \csc x \cot x}{2\sqrt{x^3 + \csc x}}$*

(d) $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^3$ *Resp.: $f'(x) = -\frac{9(x+1)^2}{(x-2)^4}$*

(e) $f(x) = 2e^{x^2-4x}$ *Resp.: $f'(x) = 4(x-2)e^{x^2-4x}$*

(f) $f(x) = \cos^2(x^2 + 1)$ *Resp.: $f'(x) = -4x \sin(x^2 + 1) \cos(x^2 + 1)$*

4) Encontre a equação da reta tangente a
curva

$$y = (x - 1)^5$$

no ponto $(2, 1)$. *Resp.: $y = 5x - 9$*

Exercícios

5) Calcule a segunda derivada das funções dadas

$$(a) f(x) = 2x^{-5} + \ln x \quad \text{Resp.: } f''(x) = 60x^{-7} - \frac{1}{x^2}$$

$$(b) f(x) = \frac{x^2+2}{x-1} \quad \text{Resp.: } f''(x) = \frac{6}{(x-1)^3}$$

6) Calcule a derivada das funções usando a regra de cadeia:

$$(a) f(x) = \sqrt[3]{x^4 + 2x^2 - 3x + 1} \quad \text{Resp.: } f'(x) = \frac{4x^3 + 4x - 3}{3\sqrt[3]{(x^4 + 2x^2 - 3x + 1)^2}}$$

$$(b) f(x) = \ln(\sin(x)) \quad \text{Resp.: } f'(x) = \cot x$$

$$(c) f(x) = (1 + x^5 \cot x)^{-8} \quad \text{Resp.: } f'(x) = -\frac{8(5x^4 \cot x - x^5 \csc^2 x)}{(x^5 \cot x + 1)^9}$$

Monitorias!!



Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

<http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias>

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

<http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA>

O GAMA possui monitorias de:

- ☐ Matemática Elementar, Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e equivalentes)
 - ☐ ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
 - ☐ Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3 (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.



Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino



Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Derivadas

Aula 04

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em
Matemática

Derivação implícita

Note que todas as funções dadas até agora, a variável dependente pôde ser escrita explicitamente em função da variável independente

Por exemplo:

$$y = 2x^2 - 3 \quad y = \sqrt{x + 1} \quad y = \cos x + e^x \tan x$$

Nestes casos, se diz que a variável y foi dada **explicitamente** em função da variável x .

Existem casos em que é bastante trabalhoso ou até inviável expressar a variável dependente de forma explícita, em função da variável independente.

Por exemplo, como poderíamos expressar y em função de x nas equações abaixo?

$$x^3 + y^3 = 6xy \quad xy + x \sin y = 1 \quad e^{xy} = x + y$$

Nestes casos, se diz que a variável y foi dada **implicitamente** em função da variável x .

Derivação implícita

Note que, até agora, calculamos a derivada somente de funções dadas explicitamente!

Pergunta: É possível calcular a derivada de uma função na forma implícita?

A resposta para a pergunta acima é SIM!

Para calcular a derivada de uma função na forma implícita, vamos seguir os seguintes passos:

1) Derive os dois lados da equação considerando $y = y(x)$, ou seja, considerando y como função de x (utilize a regra da cadeia se necessário).

2) Tente isolar $\frac{dy}{dx}$ na equação resultante da derivação.

Derivação implícita

Exemplo: Se

$$x^2 + y^2 = 9,$$

calcule $\frac{dy}{dx}$.

Solução:

$$\frac{d}{dx}[x^2 + y^2] = \frac{d}{dx}[9] \xrightarrow{(1)} 2x \frac{dx}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \xrightarrow{(2)} 2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\xrightarrow{(3)} \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} \xrightarrow{(4)} \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

(1) Derivando em relação a x e usando a Regra da Cadeia

(2) $\frac{dx}{dx} = 1$

(3) Isolando $\frac{dy}{dx}$

(4) Simplificação

Derivação implícita

Exemplo: Encontre a equação da reta tangente à curva

$$7y^2 = 4 + xy^3,$$

no ponto $(3, 2)$.

Solução: Primeiramente vamos calcular a derivada de y em relação a x :

$$\frac{d}{dx}[7y^2] = \frac{d}{dx}[4 + xy^3] \implies 14y \frac{dy}{dx} = 0 + \frac{dx}{dx}y^3 + x \frac{d[y^3]}{dx} \implies$$

$$14y \frac{dy}{dx} = y^3 + 3xy^2 \frac{dy}{dx} \implies (14y - 3xy^2) \frac{dy}{dx} = y^3 \implies \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{14 - 3xy}$$

Calculando a derivada no ponto $(3, 2)$ temos:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{x=3 \\ y=2}} = \frac{2^2}{14 - 3(3)(2)} = \frac{4}{14 - 18} = -1$$

Portanto:

$$y - y_A = m(x - x_A) \implies y - 2 = (-1)(x - 3) \implies y = -x + 5.$$

Regra de L'Hôpital

Teorema (Regra de L'Hôpital):

Se

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

Então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

O mesmo vale se $x \rightarrow a$ for substituído por

$x \rightarrow a^+$ ou $x \rightarrow a^-$ ou $x \rightarrow -\infty$ ou $x \rightarrow +\infty$.

Observação: A regra de L'Hôpital vale para indeterminações do tipo

$$\begin{array}{ccccc} \frac{0}{0} & \frac{+\infty}{+\infty} & \frac{+\infty}{-\infty} & \frac{-\infty}{+\infty} & \frac{-\infty}{-\infty} \end{array}$$

Portanto, antes de aplicar a regra de L'Hôpital, faça uma “*verificação*” para ter certeza que a regra pode ser aplicada!

Regra de L'Hôpital

Exemplo: Calcule o limite:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

Solução:

Verificação: Como

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

Diagram illustrating the indeterminate form $\frac{0}{0}$. Red arrows point from the numerator $x^2 - 9$ to a 0 and from the denominator $x - 3$ to a 0 .

temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ podemos aplicar a regra de L'Hôpital.

Portanto:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 9)'}{(x - 3)'} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{1} = 2(3) = 6.$$

Regra de L'Hôpital

Exemplo: Calcule o limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + x - 5}{e^x}$$

Solução:

Verificação: Como

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + x - 5}{e^x}$$

$\nearrow +\infty$
 $\searrow +\infty$

temos uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ podemos aplicar a regra de L'Hôpital.

Portanto, aplicando a Regra de L'Hôpital três vezes (faça a verificação a cada vez!) temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + x - 5}{e^x} &\stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 4x + 1}{e^x} \\ &\stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + 4}{e^x} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{e^x} = 0. \end{aligned}$$

Exercícios Propostos



Exercícios

1) Obtenha $\frac{dy}{dx}$, a partir das equações dadas por derivação implícita:

(a) $x^2y + 2y^3 = 3x + 2y$ *Resp.: $\frac{dy}{dx} = \frac{3 - 2xy}{x^2 + 6y^2 - 2}$*

(b) $6x + \sqrt{xy} - 3y = 4$ *Resp.: $\frac{dy}{dx} = -\frac{12\sqrt{xy} + y}{x - 6\sqrt{xy}}$*

2) Verifique se o ponto $P(-2, 8)$ pertence à curva

$$xy = -16 \quad \text{Resp.: } y = 4x + 16$$

encontre a equação da reta tangente à curva neste ponto.

Exercícios



3) Calcule os seguintes limites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad 1$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \quad 2$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} \quad +\infty$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad \frac{1}{6}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{-x}}{x^2 + 5x + 6} \quad +\infty$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \cos x} \right) \quad -\frac{1}{2}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{\sin(3x)} \quad \frac{4}{3}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(2x)} \quad \frac{1}{2}$$

Exercícios



4) Obtenha $\frac{dy}{dx}$, a partir das equações dadas por derivação implícita:

$$(a) \cos(x + y) = x \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1 + \sin(x + y)}{\sin(x + y)}$$

$$(b) e^{x+y^2} = 2x + y \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{e^{x+y^2} - 2}{2ye^{x+y^2} - 1}$$

5) Verifique se o ponto $P(2, -3)$ pertence à curva

$$2x^3 - x^2y + y^3 - 1 = 0 \quad y = -\frac{36}{23x} + \frac{3}{23}$$

dada e encontre a equação da reta tangente neste ponto.

6) Calcule os seguintes limites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} \quad 2\sqrt{3}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \infty} 2xe^{-x^2} \quad 0$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} \quad \cos a$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow \infty} 2x^{\frac{1}{x}} \quad 2$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} \quad 0$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} \quad -\frac{1}{3}$$

Monitorias!!



Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

<http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias>

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

<http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA>

O GAMA possui monitorias de:

- ☐ Matemática Elementar, Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e equivalentes)
 - ☐ ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
 - ☐ Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3 (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.



Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino



Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Derivadas

Aula 05

Projeto

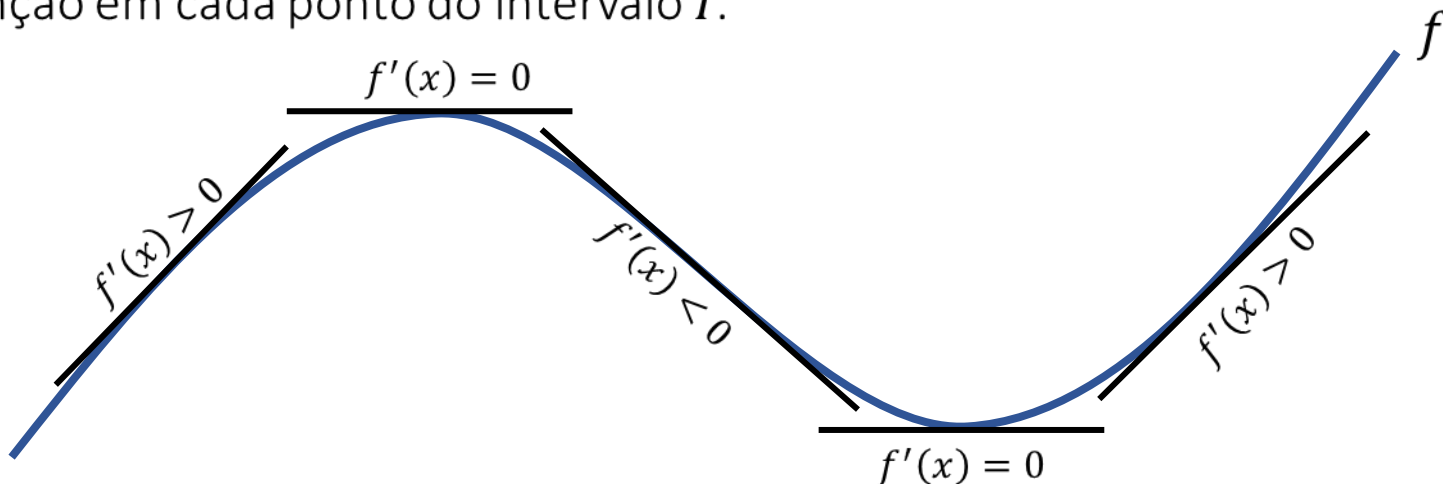
GAMA

Grupo de Apoio em
Matemática

Teste da Primeira Derivada

Seja f uma função contínua e derivável num intervalo I .

Sabemos que a **primeira derivada** é a inclinação da reta tangente a essa função em cada ponto do intervalo I .



Com a primeira derivada podemos obter informações sobre:

Intervalos onde a função é crescente ou decrescente

Máximos e Mínimos Locais

Veremos nesta aula como obter cada uma dessas informações!

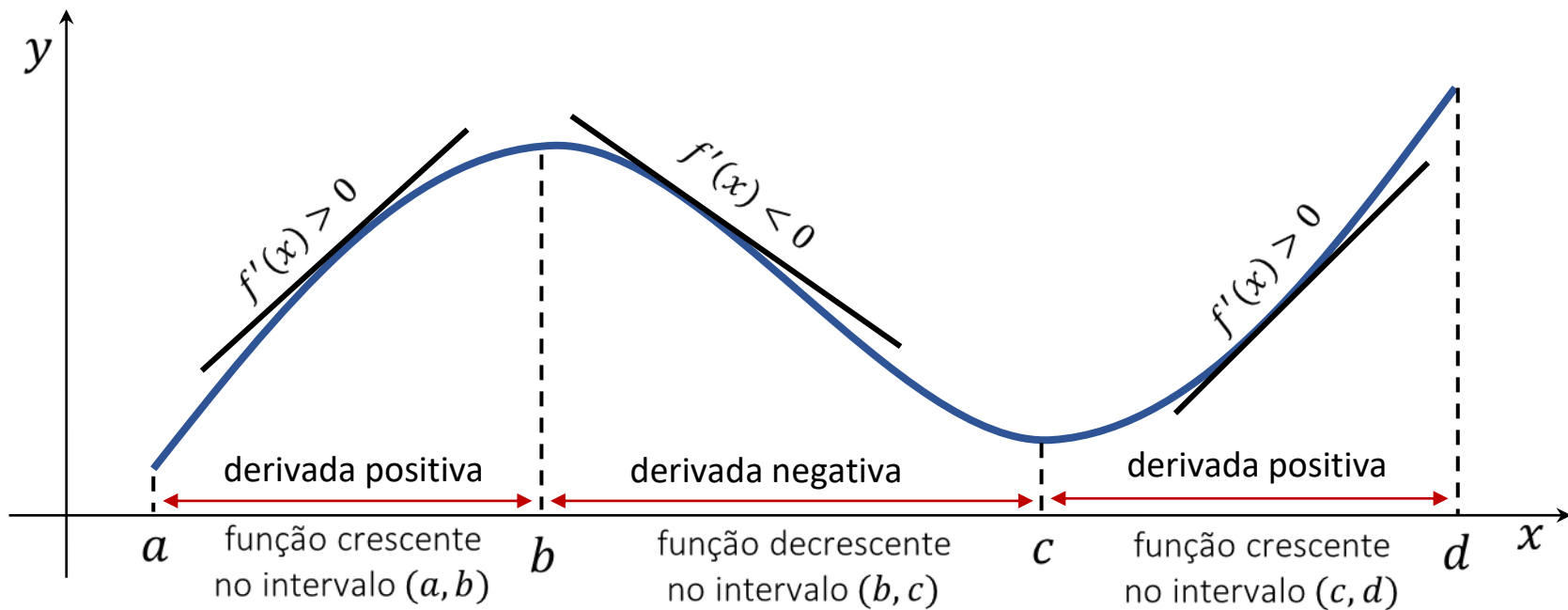
Teste da Primeira Derivada

Teorema: Sendo f uma função derivável, f' sua primeira derivada.

Onde f' é **positiva**, a função f é **crescente**.

Onde f' é **negativa**, a função f é **decrescente**.

Graficamente, a interpretação do Teorema acima é a seguinte:



Teste da Primeira Derivada

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = x^2 - 2x,$$

determine os intervalos onde a função é crescente e decrescente.

Solução: Como $f(x) = x^2 - 2x$, temos:

$$f'(x) = 2x - 2.$$

Vamos descobrir os intervalos de crescimento e decrescimento de f analisando o sinal de f' .

Quando a função $2x - 2 > 0$? Para todo $x > 1$.

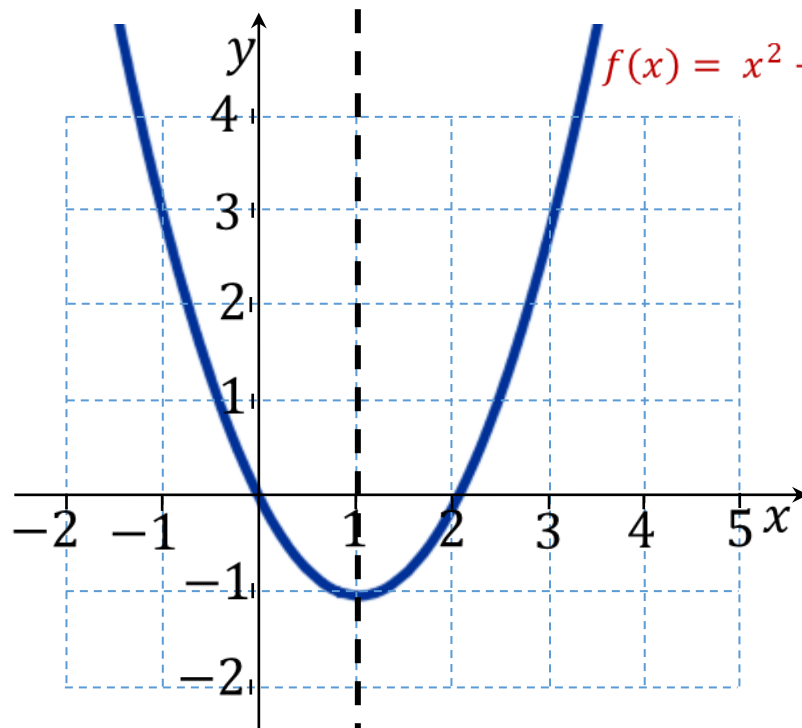
Consequentemente, f é crescente no intervalo $(1, +\infty)$.

Quando a função $2x - 2 < 0$? Para todo $x < 1$.

Consequentemente, f é decrescente no intervalo $(-\infty, 1)$.

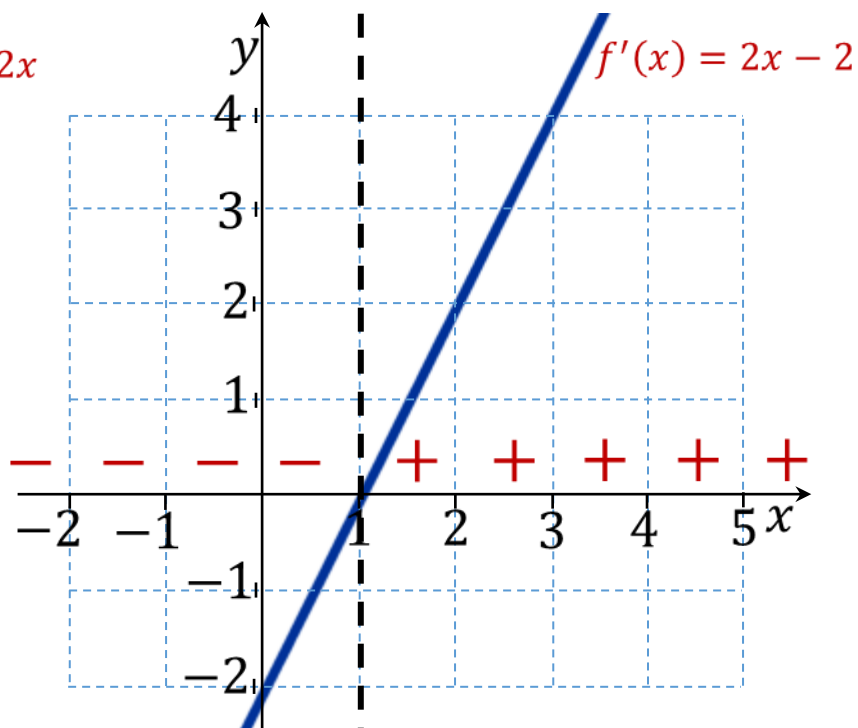
Teste da Primeira Derivada

Observe a relação “derivada positiva resulta em função crescente” e “derivada negativa resulta em função decrescente” no gráfico da função f do exemplo anterior.



$x < 1$
 função
 decrescente

$x > 1$
 função
 crescente



$x < 1$
 derivada
 negativa

$x > 1$
 derivada
 positiva

Pontos críticos

Definição: Um número c pertencente ao domínio de uma função é chamado de **ponto crítico** da função f se uma das condições é satisfeita:

$$f'(c) = 0 \quad \text{ou} \quad f'(c) \text{ não existe.}$$

Portanto, para verificar se um número c é um ponto crítico de uma função f , precisamos seguir os seguintes passos:

1º Passo: Derive a função f , ou seja, calcule $f'(x)$.

2º Passo: Iguale a derivada a zero, ou seja, verifique se existem valores de c para os quais

$$f'(c) = 0.$$

3º Passo: Verifique se existem valores de c para os quais $f'(c)$ não existe.

Se estes valores de c encontrados estiverem no domínio de f , eles serão os pontos críticos de f .

Pontos críticos

Exemplo: Verifique se a função

$$f(x) = x^2 + 2x - 4.$$

possui pontos críticos.

Solução:

1º Passo: Como $f(x) = x^2 + 2x - 4$ então

$$f'(x) = 2x + 2.$$

2º Passo: Igualando a derivada a zero, temos:

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1.$$

A derivada se
anula em $x = -1$.

3º Passo: Como f é uma função polinomial, então não existem pontos onde a derivada não existe!

Como $c = -1$ pertence ao domínio de f e $f'(-1) = 0$, então ele é um ponto crítico de f .

Note que a função f não possui outros pontos críticos.

Pontos críticos

Exemplo: Verifique se a função

$$f(x) = \sqrt{x}$$

possui pontos críticos.

Solução:

1º Passo: Como $f(x) = \sqrt{x}$ então

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2º Passo: Igualando a derivada a zero, temos:

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \rightarrow \nexists$$

Não existem pontos onde
a derivada se anula

3º Passo: Dada a expressão que define f' , percebe-se que $c = 0$ é o único ponto onde a derivada não existe.

Como $c = 0$ pertence ao domínio de f e $f'(0)$ não existe, então ele é um ponto crítico de f .

Note que a função f não possui outros pontos críticos.

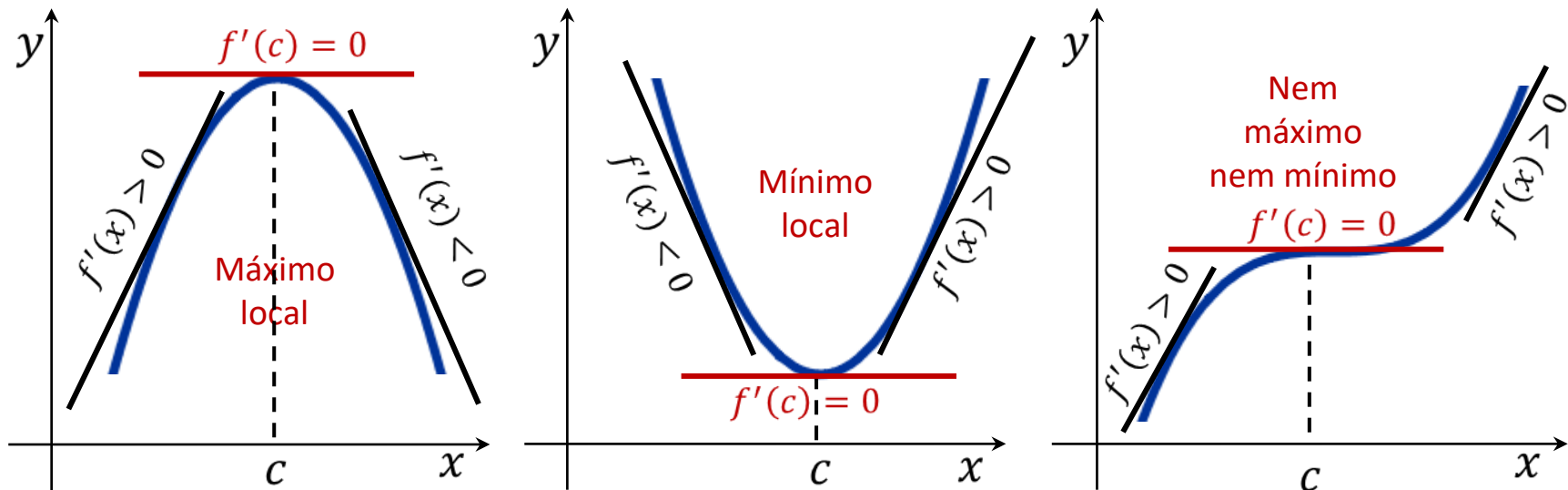
Máximos e mínimos locais

Teorema: Seja f uma função derivável em um intervalo I e $c \in I$ um ponto crítico de f .

Se o sinal de $f'(x)$ muda de positivo para negativo em c , então temos um **máximo local** em c .

Se o sinal de $f'(x)$ muda de negativo para positivo em c , então temos um **mínimo local** em c .

Se não há mudança no sinal de $f'(x)$ em c , então não temos um ponto de máximo nem de mínimo local.



Observação: O Teorema se aplica no caso em que não existe a derivada da função f em $x = c$.

Exemplo: $f(x) = |x|$ não é derivável em $x = 0$, embora este seja um ponto de mínimo.

Máximos e mínimos locais

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = x^2 + 2x - 4.$$

determine o ponto crítico e se ele é de máximo ou de mínimo.

Solução: Calculando f' :

$$f'(x) = 2x + 2.$$

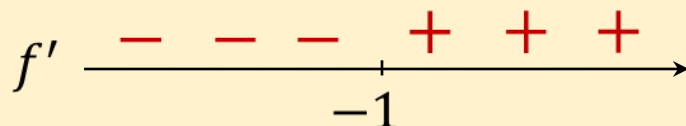
Igualando a derivada a zero:

$$2x + 2 = 0$$

$$2x = -2$$

$$x = -1 \quad (\text{ponto crítico})$$

Sinal da derivada:



Como $f'(x)$ muda de negativo para positivo, logo $x = -1$ é um **mínimo local**.

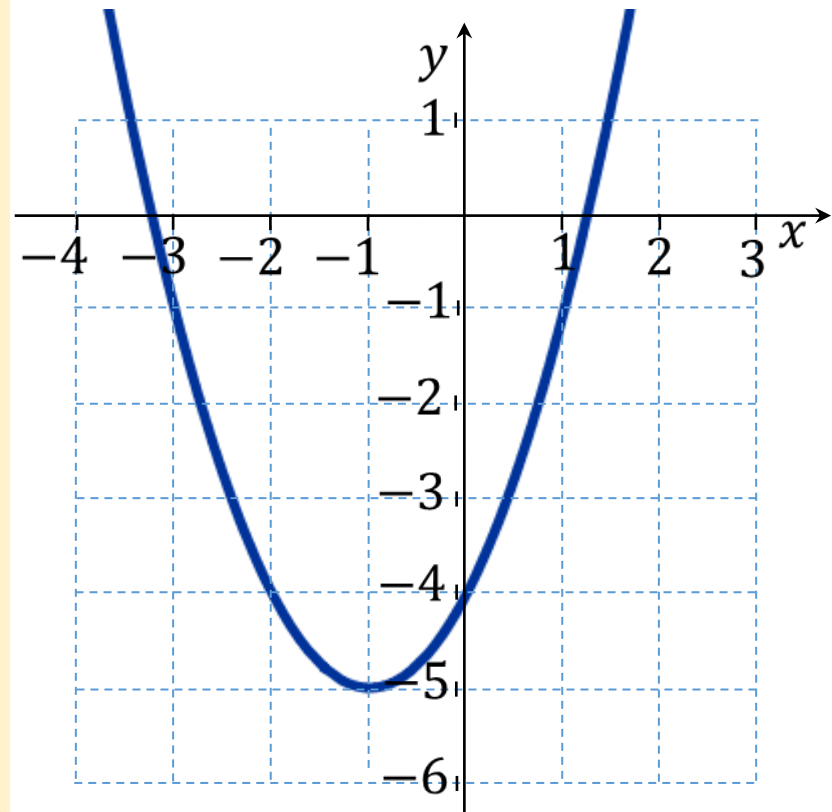


Gráfico de f

Exercícios Propostos



Exercícios



1) Em cada caso, determine os pontos críticos da função dada.

(a) $f(x) = 2x^5 + 5x^4 - 10x^3 - 15$ $x = -3, x = 0$ e $x = 1$

(b) $f(x) = 6x^{\frac{2}{3}}$ $x = 0$

Exercícios

2) Considere a função $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$.

Encontre onde a função é crescente, decrescente e seus pontos de máximos e mínimos.

Pontos críticos: $x = -1, x = 0$ e $x = 2$ Crescente em $(-1, 0)$ e $(2, +\infty)$
Decrescente em $(-\infty, -1)$ e $(0, 2)$ Máximo: $x = 0$ Mínimos: $x = -1$ e $x = 2$

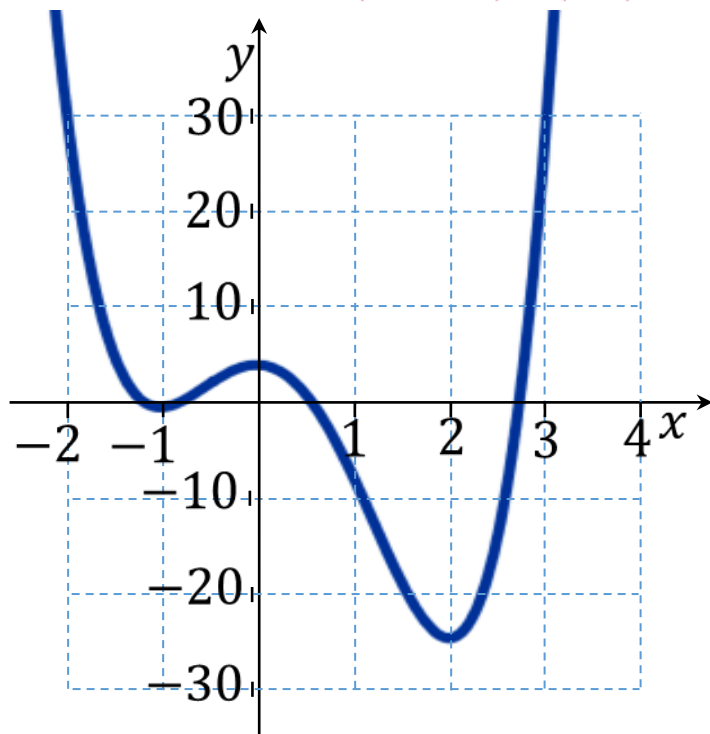


Gráfico de f

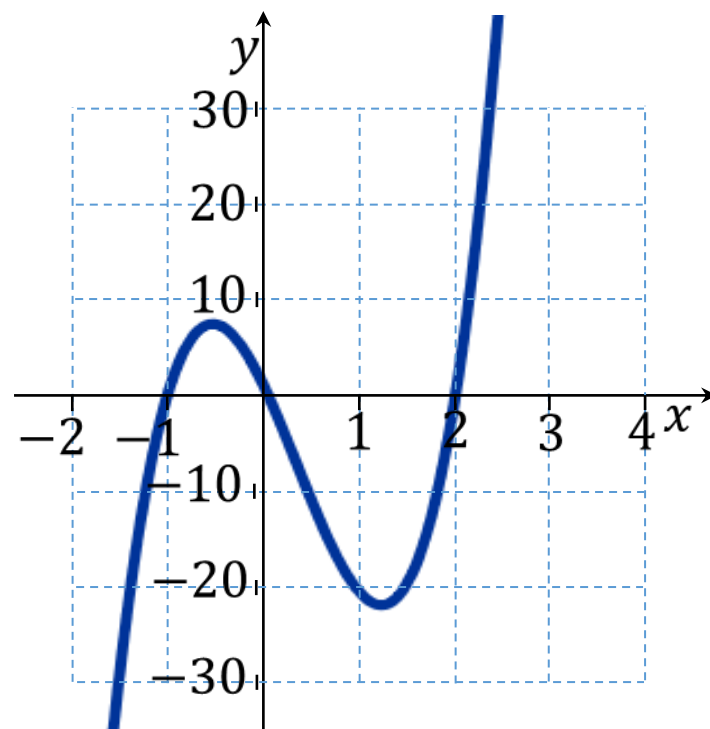


Gráfico de f'

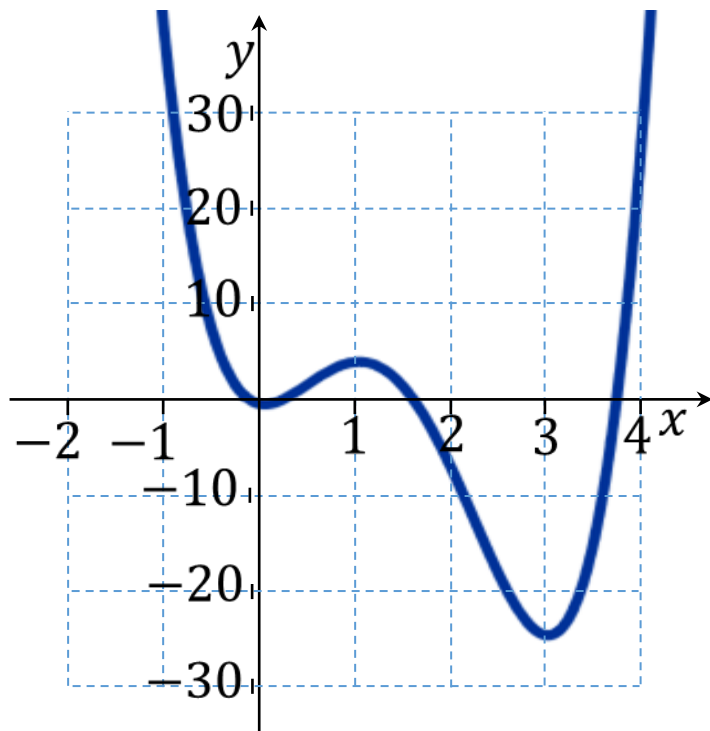
Exercícios

3) Seja a função $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$ definida em $\mathbb{R}$. Encontre os intervalos onde a função seja crescente e decrescente e seus valores de máximos e mínimos.

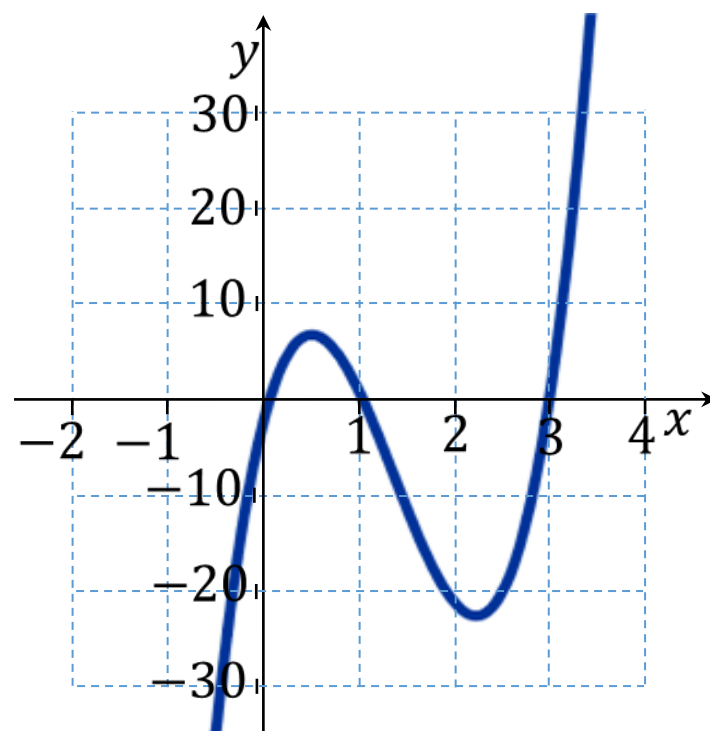
Pontos críticos: $x = 0$; $x = 1$ e $x = 3$ Crescente em $(0,1)$ e $(3, +\infty)$ Decrescente em $(-\infty, 0)$ e $(1, 3)$

Máximo local: $x = 1$

Mínimos locais: $x = 0$ e $x = 3$



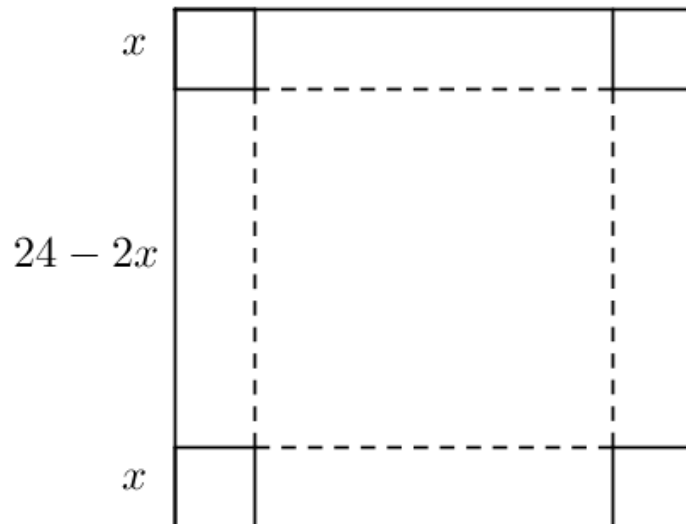
$$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$$



$$f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 36x$$

Exercícios

4) Um fabricante de caixas de papelão pretende fazer caixas sem tampas a partir de folhas quadradas de cartão com área igual a 576cm^2 , cortando quadrados iguais nos quatro cantos e dobrando os lados para cima. Determinar o lado do quadrado que deve ser cortado para se obter uma caixa com o maior volume possível.



Resp.: $x = 4\text{ cm}$ com 1024 cm^3

Exercícios

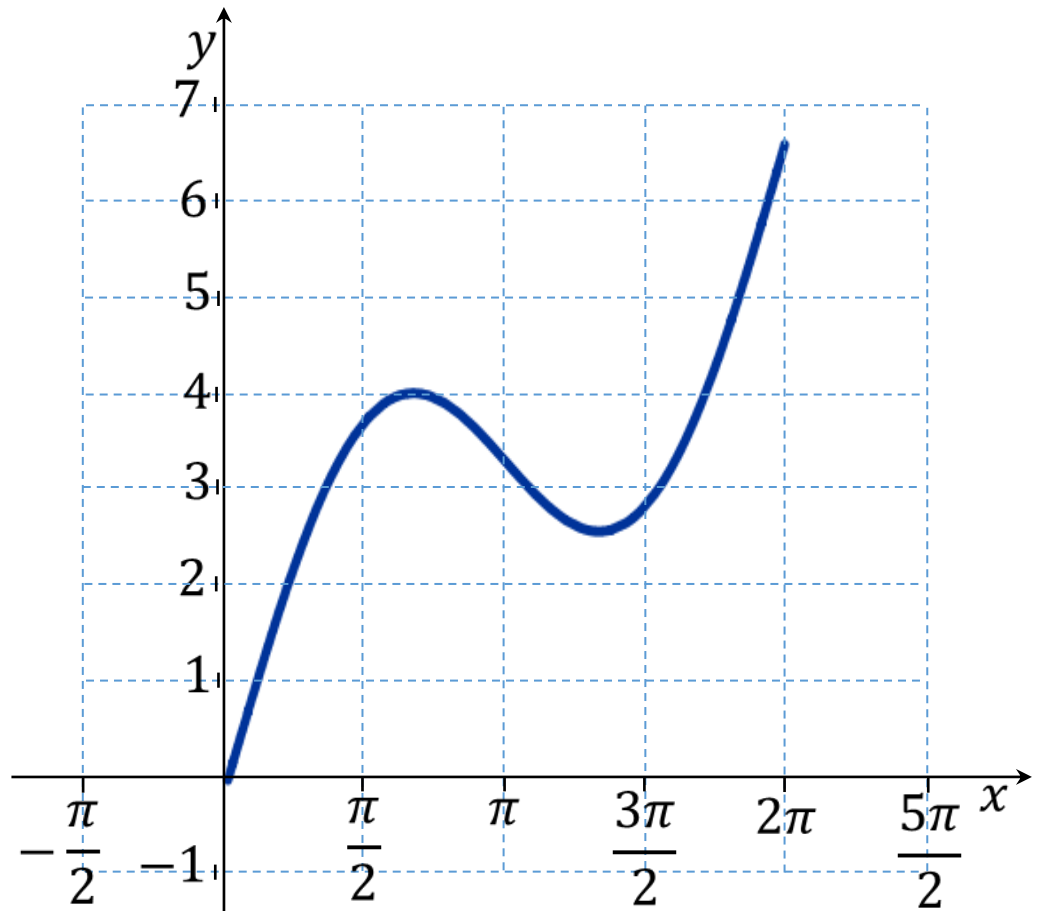
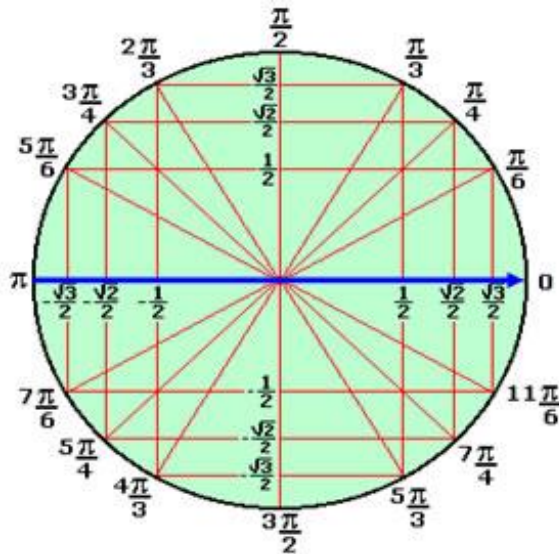
1) Encontre os valores de máximo e mínimos, onde a função é crescente e decrescente da função $g(x) = x + 2 \sin x$ em $0 \leq x \leq 2\pi$.

Pontos críticos: $x = \frac{2\pi}{3}$; $x = \frac{4\pi}{3}$

Crescente em $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ e $\left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$

Decrescente em $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$

Mínimo: $x = \frac{4\pi}{3}$ Máximo: $x = \frac{2\pi}{3}$



Exercícios



2) Utilize o teste da primeira derivada para determinar onde a função dada por

$$h(x) = x^{2/3}(6 - x)^{1/3}$$

é crescente, decrescente e seus valores de máximos e mínimos.

Pontos críticos: $x = 0, x = 4$ e $x = 6$ Crescente em $(0, 4)$ Decrescente em $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$

Máximos: $x = 4$ Mínimos: $x = 0$

Monitorias!!



Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

<http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias>

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

<http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA>

O GAMA possui monitorias de:

- ☐ Matemática Elementar, Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e equivalentes)
 - ☐ ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
 - ☐ Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3 (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.



Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino



Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Derivadas

Aula 06

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em
Matemática

Teste da Segunda Derivada

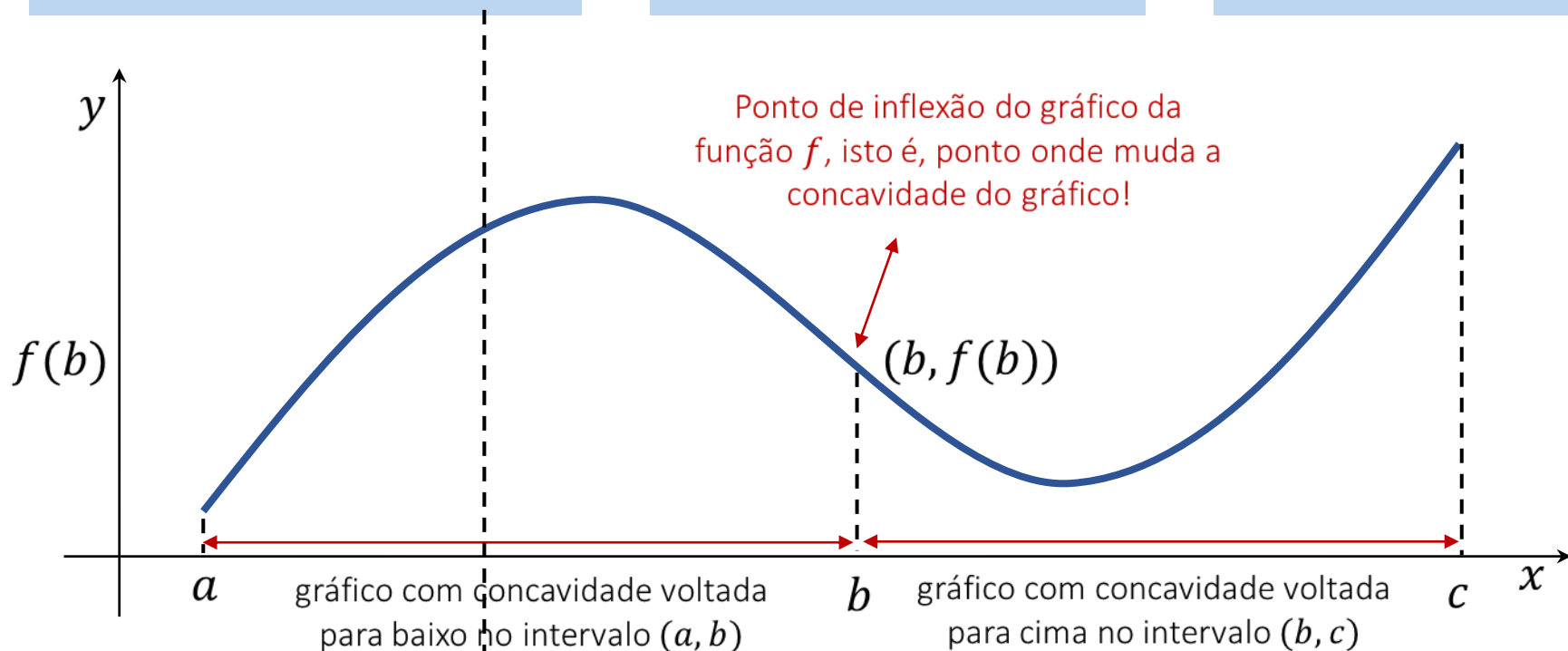
Seja f uma função contínua e duas vezes derivável num intervalo I .

Com a **segunda derivada** de f podemos obter informações sobre:

Máximos e mínimos locais

Concavidade do gráfico

Pontos de inflexão



Veremos agora como obter cada uma dessas informações:

Concavidade

Teorema: Sendo f uma função duas vezes derivável, f' e f'' sua primeira e segunda derivadas, respectivamente. Então:

Onde f'' for **positiva**, a concavidade da função é **voltada para cima**.

Onde f'' for **negativa**, a concavidade é **voltada para baixo**.

Portanto, para estudar a concavidade do gráfico de uma função f , podemos seguir os seguintes passos:

1º Passo: Derive a função f , ou seja, calcule $f'(x)$.

2º Passo: Derive a função f' , ou seja, calcule $f''(x)$.

3º Passo: Faça o estudo de sinal de $f''(x)$.

Nos intervalos onde $f''(x) > 0$ a concavidade é voltada para cima e onde $f''(x) < 0$ a concavidade é voltada para baixo.

Concavidade

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = x^3,$$

determine onde a concavidade é para cima e onde é para baixo.

Solução:

1º Passo: Como $f(x) = x^3$ então:

$$f'(x) = 3x^2.$$

2º Passo: Calculando f'' , temos:

$$f''(x) = 6x.$$

3º Passo: Estudando o sinal de f'' temos:

Quando $f''(x)$ é positiva?

Para todo $x > 0$.

Então, f é côncava para cima em $(0, +\infty)$.

Quando $f''(x)$ é negativa?

Para todo $x < 0$.

Então, f é côncava para baixo em $(-\infty, 0)$.

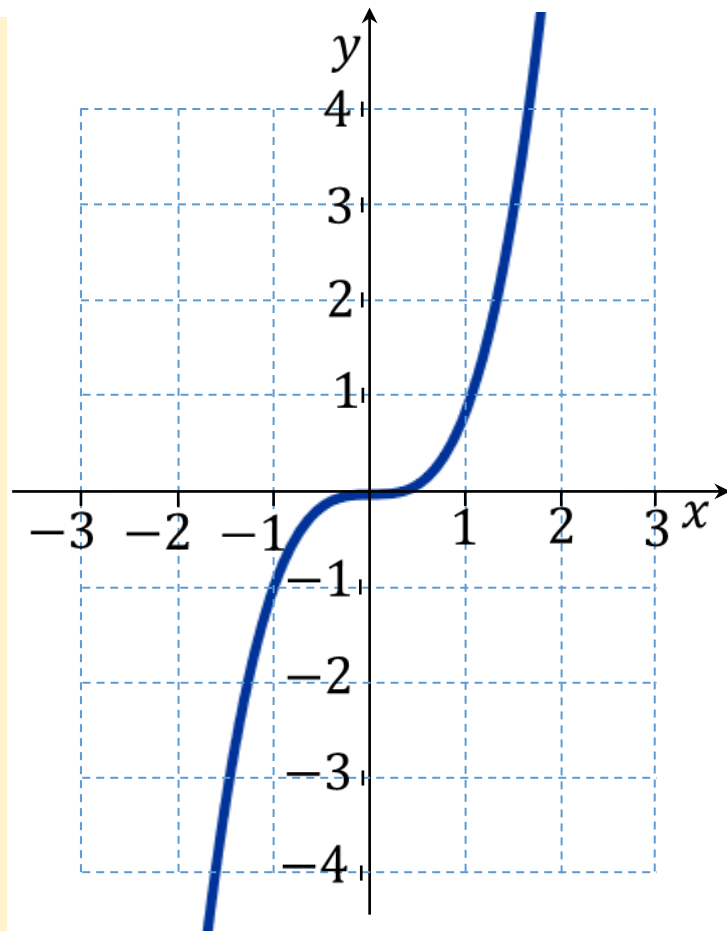


Gráfico de f

Teste da Segunda Derivada

Teorema: Seja f uma função tal que f'' seja contínua na proximidade de $x = c$.

Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f tem um ponto de **máximo local** em c .

Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f tem um ponto de **mínimo local** em c .

Portanto, para verificar se a função f possui máximos ou mínimos locais, fazemos:

1º Passo: Encontre $f'(x)$.

2º Passo: Verifique se existe algum ponto crítico de f tal que $f'(c) = 0$.

3º Passo: Encontre $f''(x)$.

4º Passo: Analise o sinal de $f''(c)$.

Se $f''(c) < 0$ então $x = c$ é um máximo local.

Se $f''(c) > 0$ então $x = c$ é um mínimo local.

Teste da Segunda Derivada

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = x^2 + 2x - 4.$$

determine seu ponto crítico e se ele é de máximo ou de mínimo.

Solução:

1º Passo: Como $f(x) = x^2 + 2x - 4$ então

$$f'(x) = 2x + 2.$$

2º Passo: Como $f'(x) = 2x + 2$ então

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1.$$

ponto crítico!

3º Passo: Como $f'(x) = 2x + 2$ então

$$f''(x) = 2.$$

4º Passo: Como

$$f''(-1) = 2 > 0$$

Portanto, $x = -1$ é um **mínimo local**.

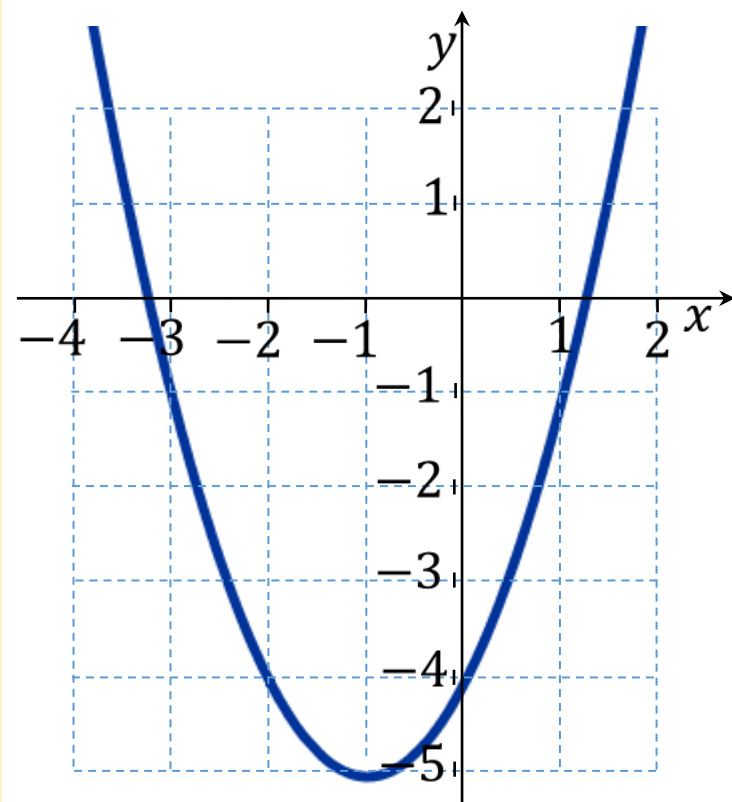


Gráfico de f

Pontos de inflexão

Definição: Um ponto P da curva $y = f(x)$ é chamado de **ponto de inflexão** se f é contínua no ponto e a curva mudar de côncava para cima para côncava para baixo ou vice-versa em P .

Portanto, para determinar se o gráfico de uma função f possui pontos de inflexão, fazemos:

1º Passo: Encontre $f''(x)$.

2º Passo: Verifique se f'' troca de sinal em algum número $x = d$.

3º Passo: Verifique se f é contínua em $x = d$.

4º Passo: Determine as coordenadas $(d, f(d))$ do ponto de inflexão.

Se f'' troca do sinal positivo para negativo, então o gráfico de f está trocando de côncavo para cima para côncavo para baixo.

Se f'' troca do sinal negativo para positivo, então o gráfico de f está trocando de côncavo para baixo para côncavo para cima.

Pontos de inflexão

Exemplo: Dada a função

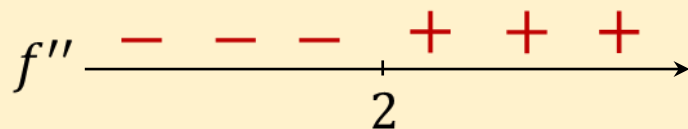
$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3.$$

determine se f possui pontos de inflexão.

Solução:

1º Passo: $f''(x) = 6x - 12.$

2º Passo: Sinal de f'' :



3º Passo: Como f é uma função polinomial, segue que f é contínua em $d = 2$.

Dos três passos acima, temos que a função f possui um ponto de inflexão $d = 2$.

4º Passo: As coordenadas do ponto de inflexão são dadas por:

$$P = (2, f(2)) = (2, -1).$$

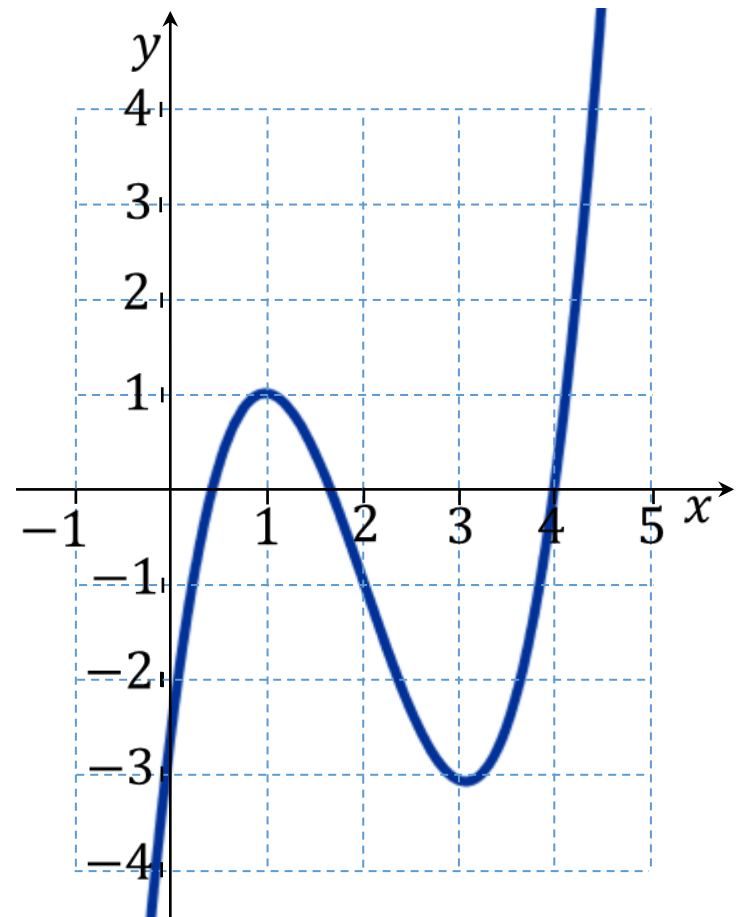


Gráfico de f

Exercícios Propostos



Exercícios

1) Para as funções abaixo, determine:

- i) os intervalos nos quais f é *crescente*;
- ii) os intervalos nos quais f é *decrecente*;
- iii) os intervalos nos quais f é *côncava para cima*;
- iv) os intervalos nos quais f é *côncava para baixo*;
- v) as coordenadas dos *pontos de inflexão* (se existirem);
- vi) as coordenadas dos pontos de máximo ou mínimo (se existirem);
- vii) o *esboço do gráfico* da função f utilizando as informações obtidas nos itens anteriores.

(a) $f(x) = x^4 - 4x^3$

(c) $f(x) = \frac{(x+2)}{(x+1)}$

(e) $f(x) = x^4 - 4x^2$

(b) $f(x) = (x-1)^3$

(d) $f(x) = x^2 - 4x$

(f) $f(x) = \frac{(x^2+1)}{(x^2-1)}$

Exercícios

(a) $f(x) = x^4 - 4x^3$

- i. $(3, +\infty)$
- ii. $(-\infty, 3)$
- iii. $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
- iv. $(0, 2)$
- v. $(0, 0)$ e $(2, -16)$
- vi. $(3, -27)$ (mínimo local)

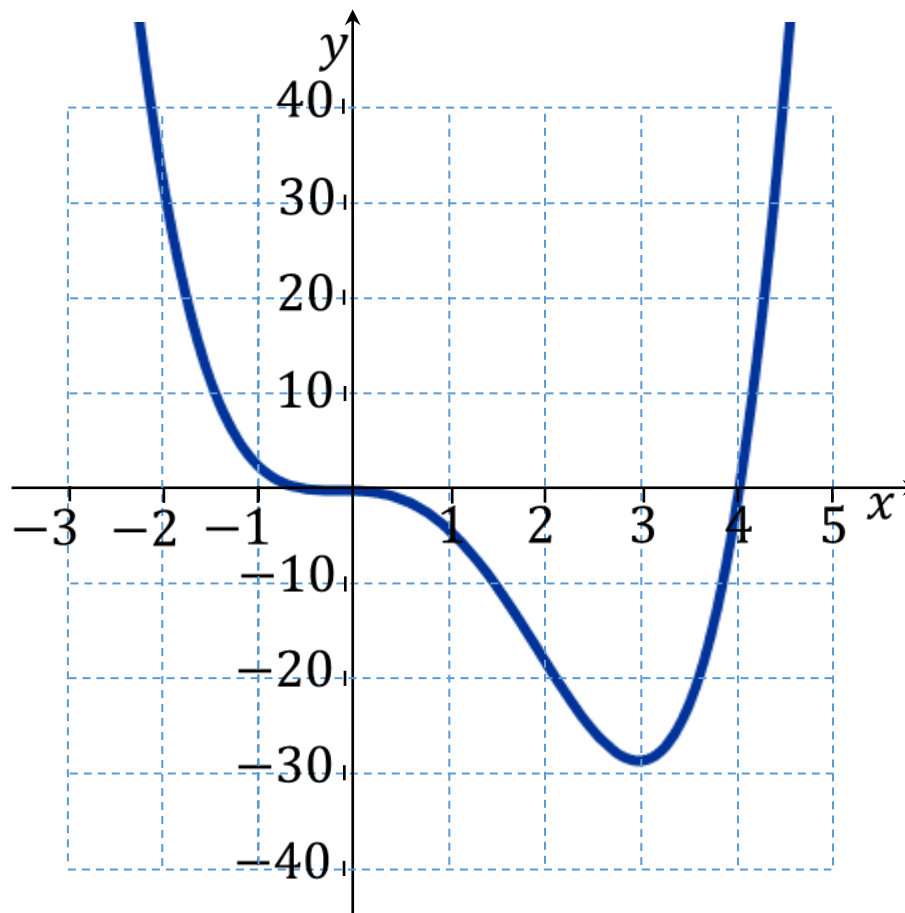


Gráfico de f

Exercícios

(b) $f(x) = (x - 1)^3$

- i. $\mathbb{R}$
- ii. $\nexists$
- iii. $(1, +\infty)$
- iv. $(-\infty, 1)$
- v. $(1, 0)$
- vi. $\nexists$

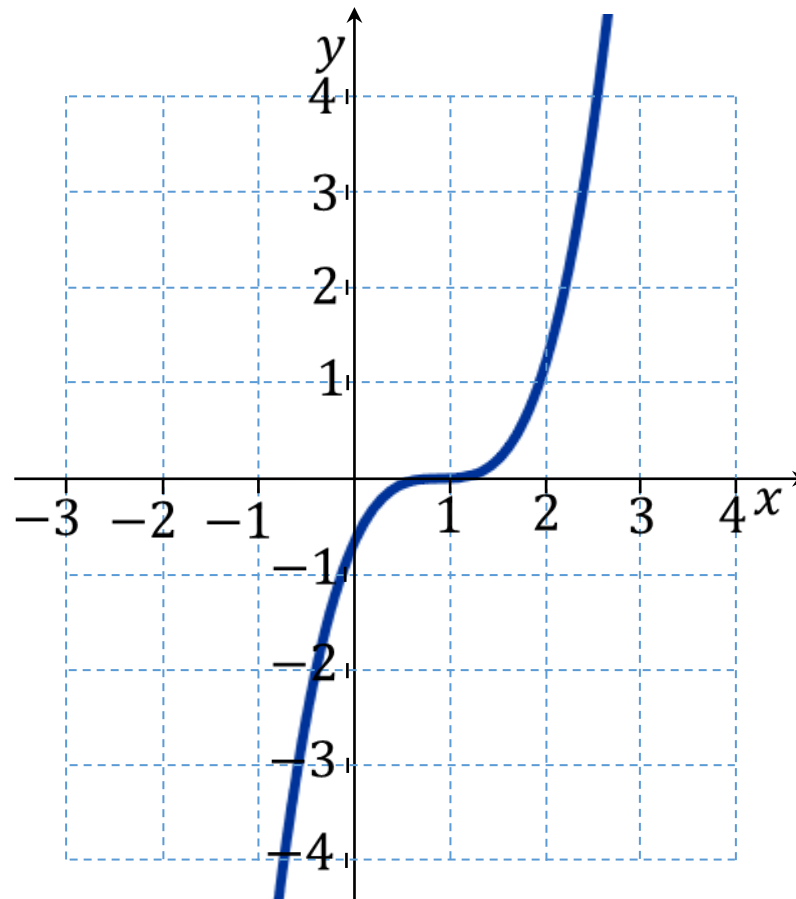


Gráfico de f

Exercícios

(c) $f(x) = \frac{(x+2)}{(x+1)}$

- i. $\cancel{\mathbb{R}}$
- ii. $\mathbb{R} - \{-1\}$
- iii. $(-1, +\infty)$
- iv. $(-\infty, -1)$
- v. $\cancel{\mathbb{R}}$
- vi. $\cancel{\mathbb{R}}$

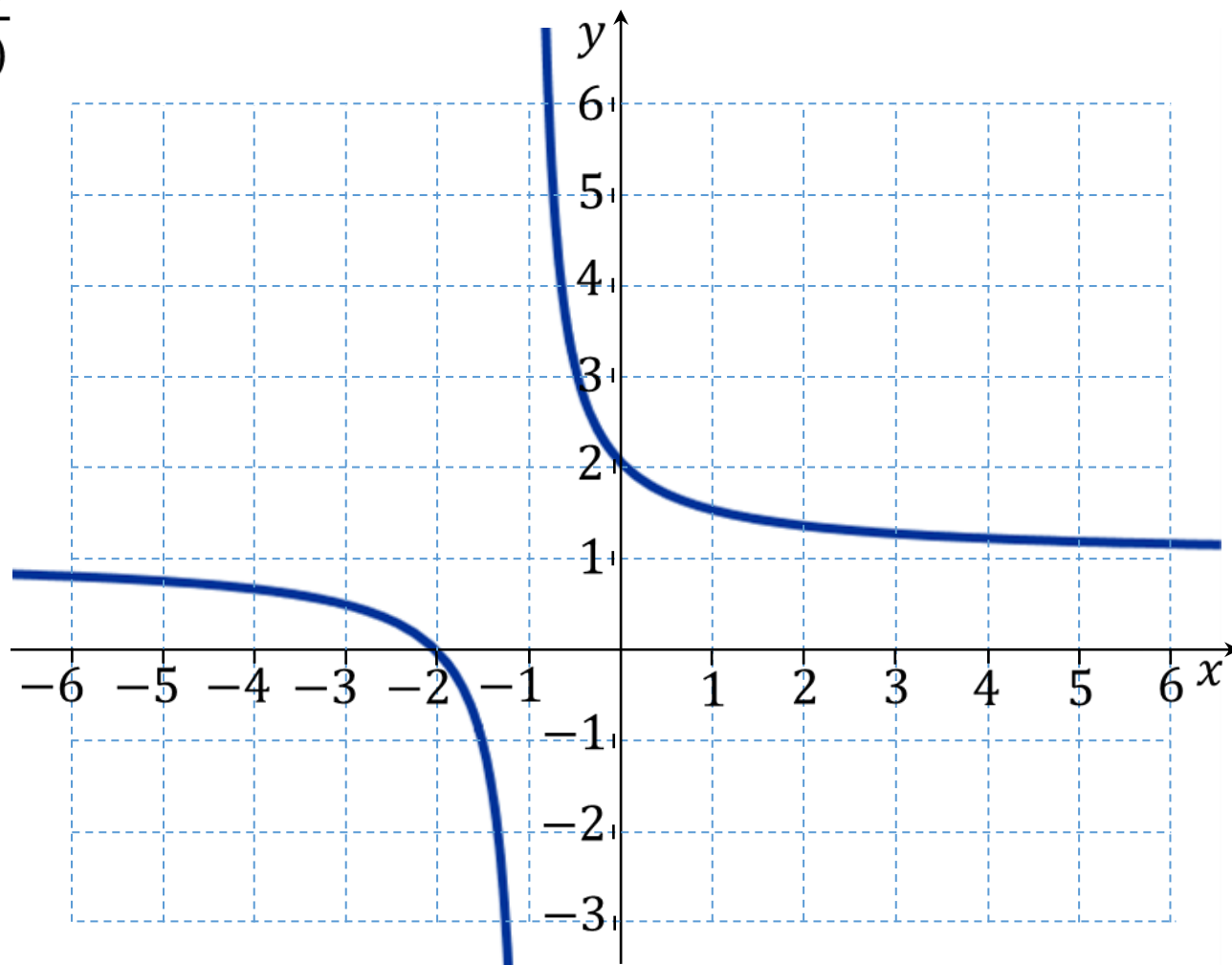


Gráfico de f

Exercícios

(d) $f(x) = x^2 - 4x$

- i. $(2, +\infty)$
- ii. $(-\infty, 2)$
- iii. $\mathbb{R}$
- iv. $\nexists$
- v. $\nexists$
- vi. $(2, -4)$ (mínimo local).

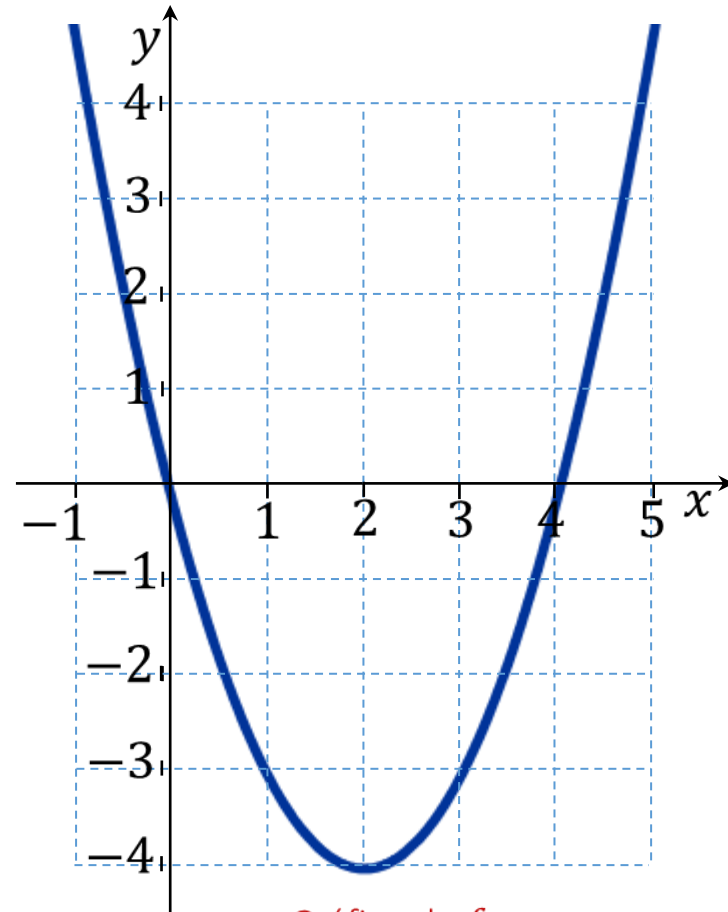


Gráfico de f

Exercícios

(e) $f(x) = x^4 - 4x^2$

- i. $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$
- ii. $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$
- iii. $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right)$
- iv. $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$
- v. $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{20}{9}\right) \text{ e } \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{20}{9}\right)$
- vi. $(-\sqrt{2}, -4) \text{ e } (\sqrt{2}, -4)$ (mínimos locais) e $(0, 0)$ (máximo local).

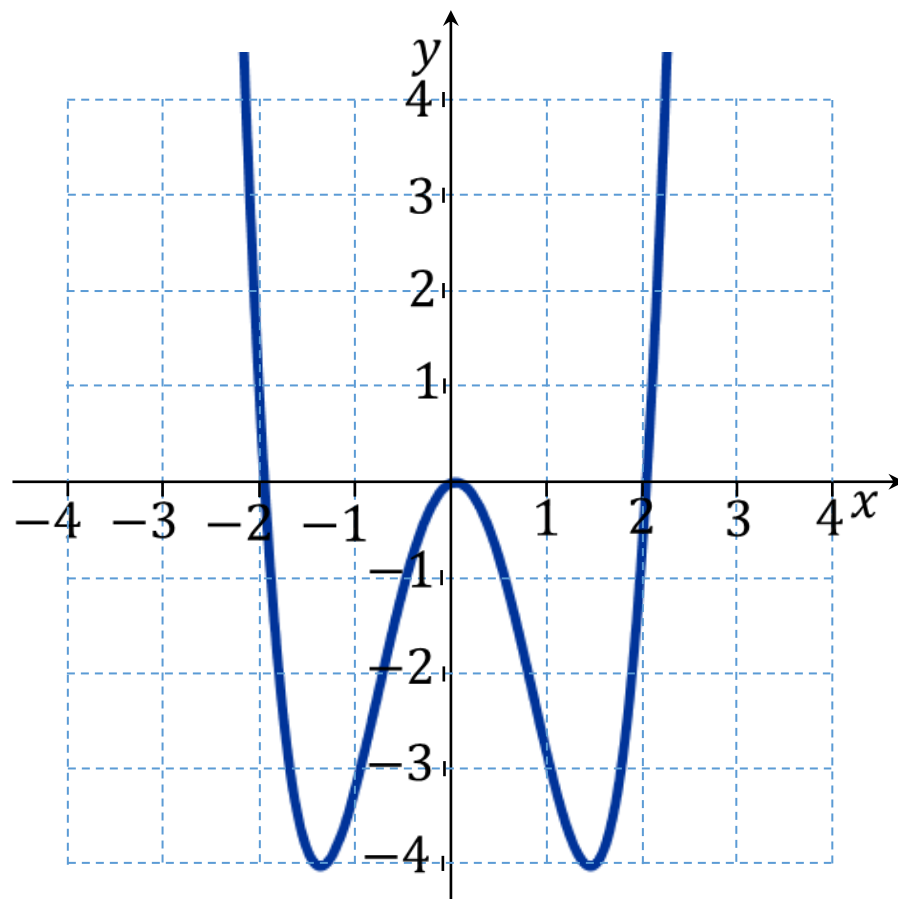


Gráfico de f

Exercícios

$$(f) f(x) = \frac{(x^2+1)}{(x^2-1)}$$

- i. $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
- ii. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
- iii. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- iv. $(-1, 1)$
- v. $\emptyset$
- vi. $(0, -1)$ (máximo local)

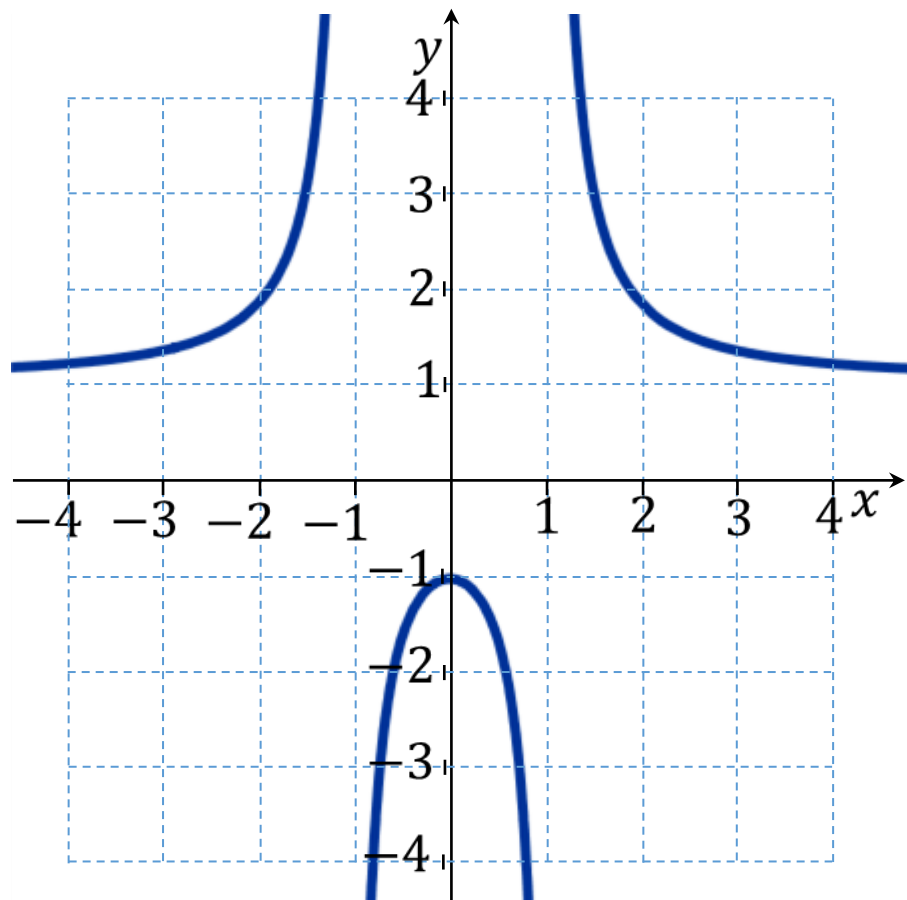


Gráfico de f

Monitorias!!



Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

<http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias>

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

<http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA>

O GAMA possui monitorias de:

- ☐ Matemática Elementar, Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e equivalentes)
 - ☐ ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
 - ☐ Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3 (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.