



Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino



Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Apoio ao Cálculo

Aula 01

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em
Matemática

Conjuntos Numéricos

Números naturais

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

Subconjunto notável

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\} \text{ Naturais positivos}$$

Números inteiros

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Subconjuntos notáveis

$$\mathbb{Z}_- = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0\} \text{ Inteiros não-positivos}$$

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\} \text{ Inteiros não-negativos}$$

$$\mathbb{Z}_-^* = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1\} \text{ Inteiros negativos}$$

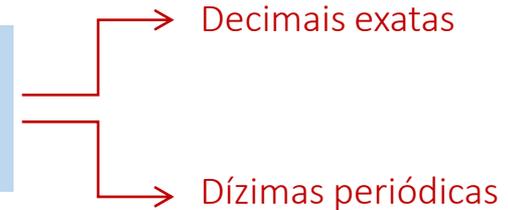
$$\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\} \text{ Inteiros positivos}$$

$$\mathbb{Z}^* = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\} \text{ Inteiros não nulos}$$

Conjuntos Numéricos

Números racionais

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^* \right\}$$



Subconjuntos notáveis

$$\mathbb{Q}_- \quad \mathbb{Q}_+ \quad \mathbb{Q}^* \quad \mathbb{Q}_+^* \quad \mathbb{Q}^*$$

Números reais

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$

Irracionais ←

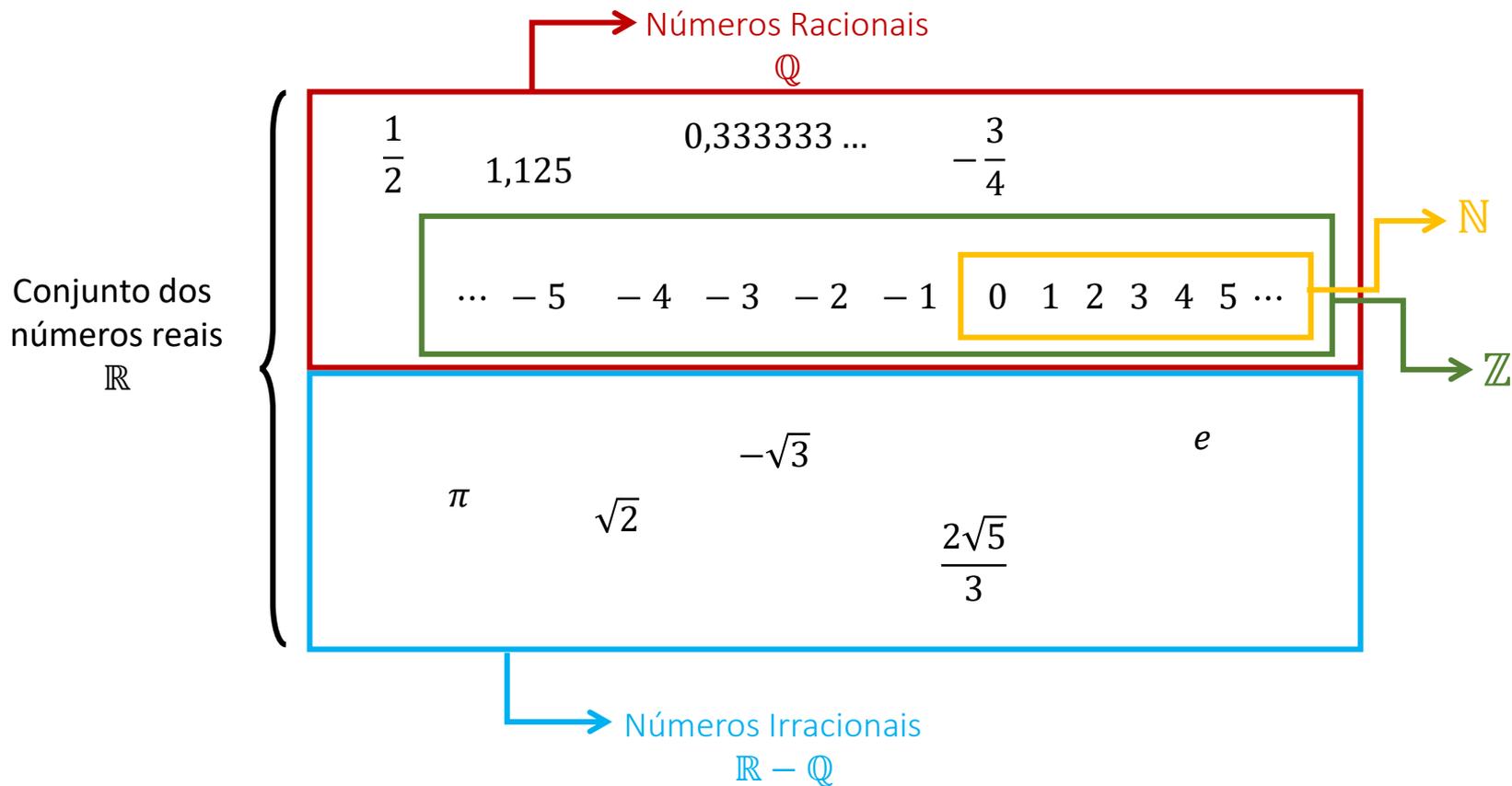
Todos os números reais
que não são racionais

Subconjuntos notáveis

$$\mathbb{R}_- \quad \mathbb{R}_+ \quad \mathbb{R}^* \quad \mathbb{R}_+^* \quad \mathbb{R}^*$$

Conjuntos Numéricos

Representação dos conjuntos numéricos por diagramas



Pertinência e inclusão

Pertinência		Inclusão			
Relaciona elemento e conjunto.		Relaciona dois conjuntos.			
\in	\notin	\subset	$\not\subset$	\supset	$\not\supset$
pertence	não pertence	está contido	não está contido	contém	não contém

O elemento x pertence ao conjunto A

$$x \in A$$

A é subconjunto B

$$A \subset B$$

A não é subconjunto B

$$A \not\subset B$$

O elemento x não pertence ao conjunto A

$$x \notin A$$

$$B \supset A$$

Todo elemento de A é também elemento de B

$$B \not\supset A$$

Nem todos elementos de A são elemento de B

Exemplos: Em cada caso, complete as lacunas com os símbolos \in , \notin , \subset , $\not\subset$, \supset , $\not\supset$ da forma mais conveniente em

$$2 \underline{\in} \mathbb{N} \quad -5 \underline{\in} \mathbb{Z} \quad -5 \underline{\notin} \mathbb{N} \quad 0 \underline{\notin} \mathbb{N}^*$$

$$\{1,2,3\} \underline{\subset} \{-1,0,1,2,3,4\} \quad \mathbb{N} \underline{\subset} \mathbb{Z} \quad \{-1,0,2\} \underline{\not\subset} \mathbb{N}$$

$$\mathbb{N} \underline{\subset} \mathbb{Z} \underline{\subset} \mathbb{Q} \underline{\subset} \mathbb{R} \quad \mathbb{Z} \underline{\not\subset} \mathbb{Q} \quad \mathbb{R} \underline{\supset} \mathbb{Q} \quad \mathbb{N} \underline{\not\subset} \mathbb{Z}^*$$

Regra de sinais

Somas e subtrações:

Sinais iguais: soma-se e conserva o sinal.

Sinais diferentes: subtrai-se e conserva-se o sinal do maior (em módulo).

Exemplos:

$$8 + 3 = 11 \quad -7 - 3 = -10 \quad 5 - 3 = 2 \quad -10 + 4 = -6$$

Multiplicações e divisões:

Sinais iguais: resulta em sinal positivo.

Sinais diferentes: resulta em sinal negativo.

Exemplos:

$$\begin{array}{ll} (2) \cdot (3) = 6 & (-5) \cdot (-3) = 15 \\ (4) \cdot (-8) = -32 & (-7) \cdot (2) = -14 \end{array}$$

Intervalos reais

Intervalo aberto

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$



Intervalo ilimitado aberto à esquerda

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$



Intervalo fechado

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$



Intervalo ilimitado fechado à esquerda

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$



Intervalo semiaberto à esquerda

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$



Intervalo ilimitado aberto à direita

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$



Intervalo semiaberto à direita

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$



Intervalo ilimitado fechado à direita

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$$

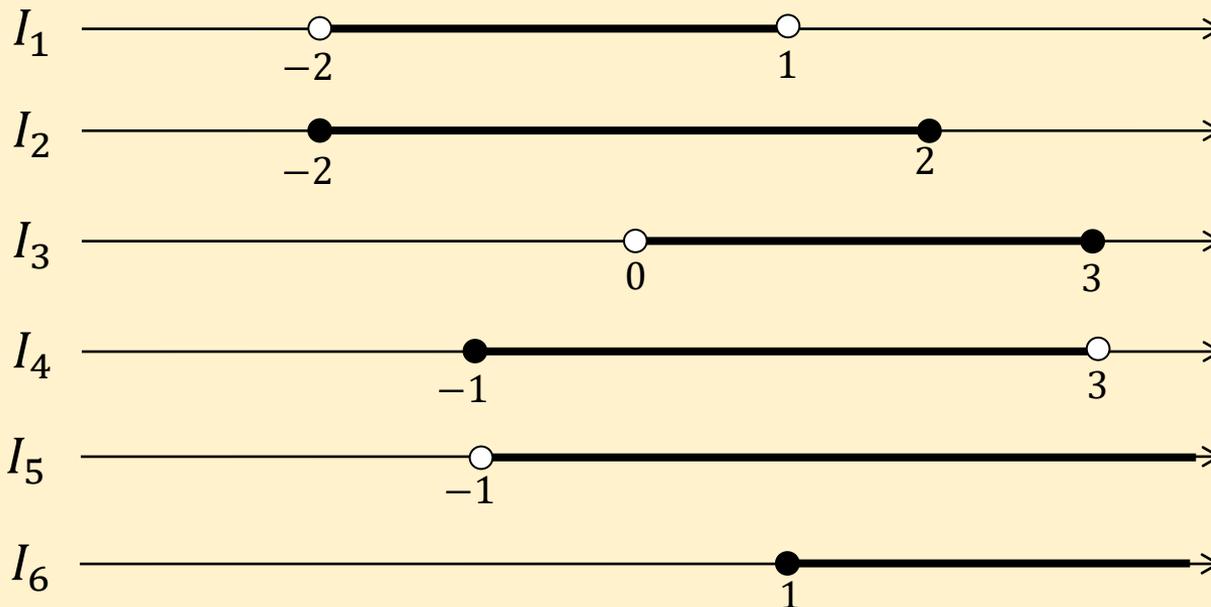


Operações com Intervalos

Exemplo: Represente os seguintes intervalos na reta real.

- | | | |
|--------------------|---------------------------|---|
| (a) $I_1 = (-2,1)$ | (e) $I_5 = (-1, +\infty)$ | (i) $I_9 = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 0\}$ |
| (b) $I_2 = [-2,2]$ | (f) $I_6 = [1, +\infty)$ | (j) $I_{10} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ |
| (c) $I_3 = (0,3]$ | (g) $I_7 = (-\infty, 3]$ | (k) $I_{11} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$ |
| (d) $I_4 = [-1,3)$ | (h) $I_8 = (-\infty, 2)$ | (l) $I_{12} = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 2\}$ |

Solução:

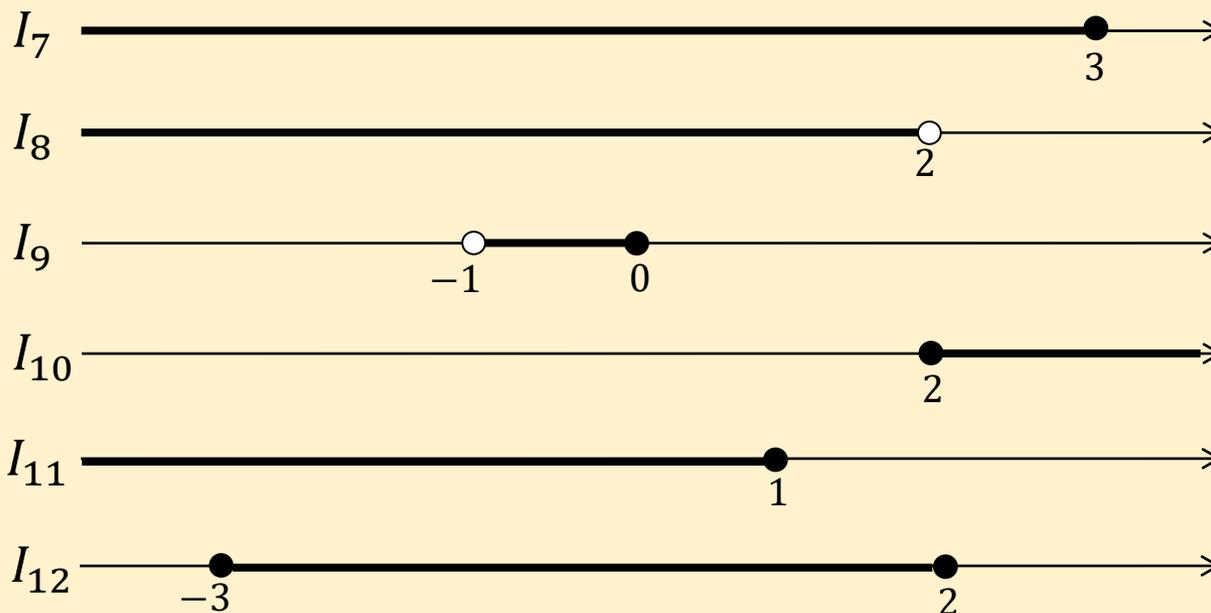


Operações com Intervalos

Exemplo: Represente os seguintes intervalos na reta real.

- | | | |
|--------------------|---------------------------|---|
| (a) $I_1 = (-2,1)$ | (e) $I_5 = (-1, +\infty)$ | (i) $I_9 = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 0\}$ |
| (b) $I_2 = [-2,2]$ | (f) $I_6 = [1, +\infty)$ | (j) $I_{10} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ |
| (c) $I_3 = (0,3]$ | (g) $I_7 = (-\infty, 3]$ | (k) $I_{11} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$ |
| (d) $I_4 = [-1,3)$ | (h) $I_8 = (-\infty, 2)$ | (l) $I_{12} = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 2\}$ |

Solução:



Operações com Intervalos

União

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A ou B

Diferença

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Elementos que pertencem ao conjuntos A e não pertencem ao conjunto B

Interseção

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Elementos que pertencem simultaneamente aos conjuntos A e B

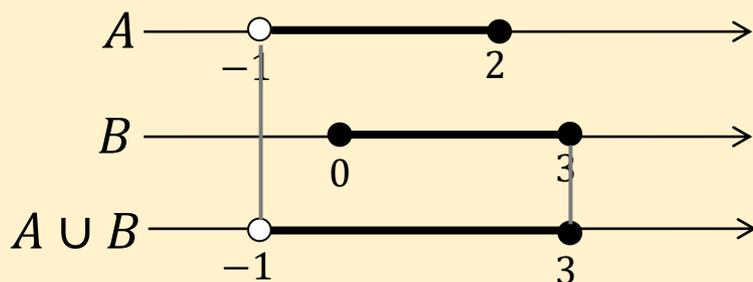
Complementar

$$A' = \{x \mid x \notin A\}$$

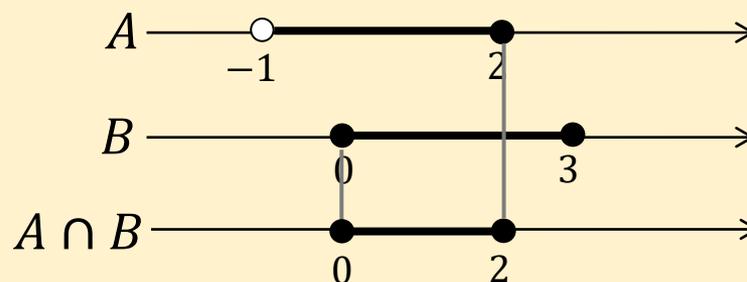
Elementos que não pertencem ao conjunto A

Exemplo: Sendo $A = (-1, 2]$ e $B = [0, 3]$, determine $A \cup B$ e $A \cap B$.

Solução:



$$A \cup B = (-1, 3]$$



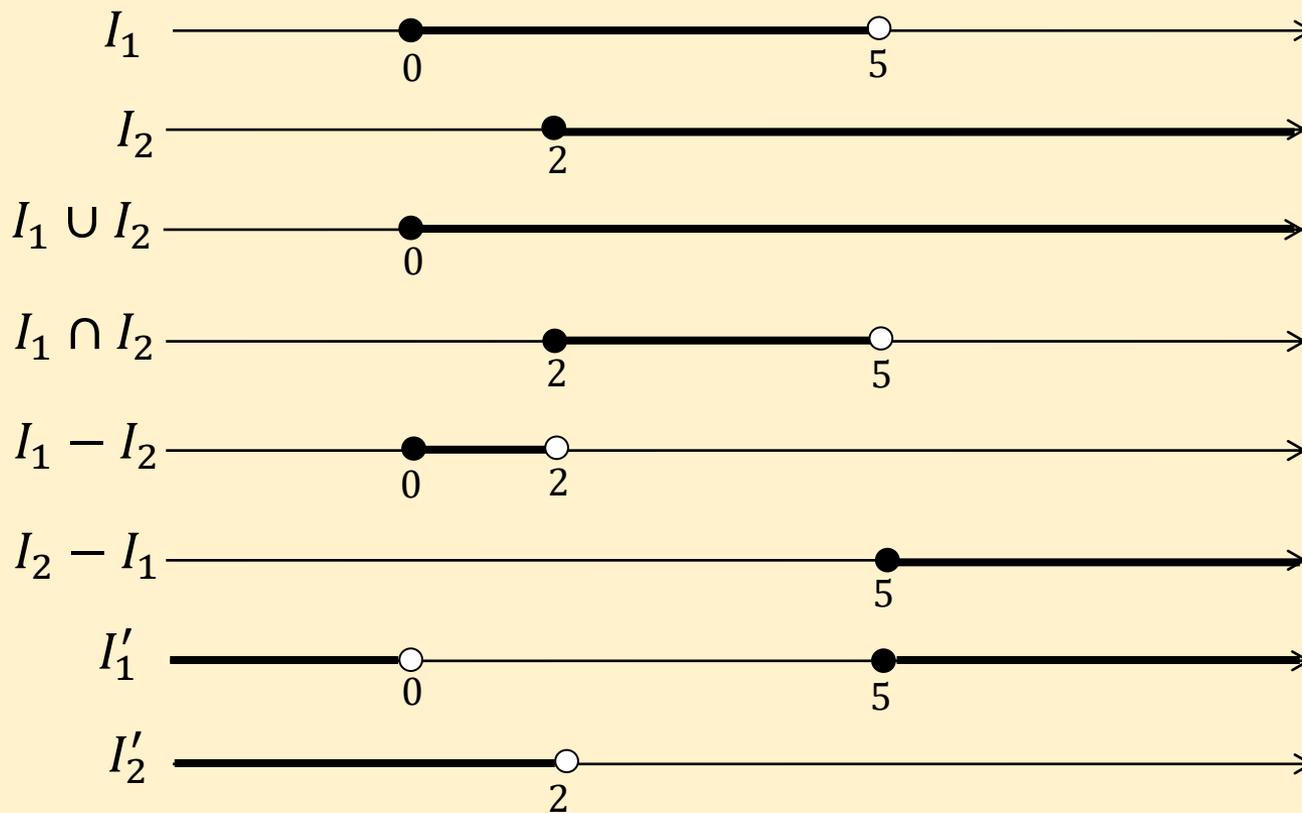
$$A \cap B = [0, 2]$$

Operações com Intervalos

Exemplo: Sendo $I_1 = [0, 5)$ e $I_2 = [2, +\infty)$, determine:

- (a) $I_1 \cup I_2$ (b) $I_1 \cap I_2$ (c) $I_1 - I_2$ (d) $I_2 - I_1$ (e) I_1' (f) I_2'

Solução:



Decomposição em fatores primos

Definição: Um número natural p é chamado de **número primo** se $p \geq 2$ e p é divisível apenas por 1 e por p .

Exemplos:

2 é primo 3 é primo 4 não é primo 5 é primo 6 não é primo

$4 = 2 \cdot 2$
divisível por 2.

$6 = 2 \cdot 3$
divisível por 2 e por 3.

Exemplos: Em cada caso, decomponha o número dado como um produto de fatores primos.

(a) 12

(b) 125

(c) 232

Solução:

$$\begin{array}{r|l}
 (a) & 12 & 2 \\
 & 6 & 2 \\
 & 3 & 3 \\
 & 1 & \hline
 & & 2^2 \cdot 3
 \end{array}$$

Decomposição
em fatores primos
 $12 = 2^2 \cdot 3$

$$\begin{array}{r|l}
 (b) & 125 & 5 \\
 & 25 & 5 \\
 & 5 & 5 \\
 & 1 & \hline
 & & 5^3
 \end{array}$$

Decomposição
em fatores primos
 $125 = 5^3$

$$\begin{array}{r|l}
 (c) & 232 & 2 \\
 & 116 & 2 \\
 & 58 & 2 \\
 & 29 & 29 \\
 & 1 & \hline
 & & 2^3 \cdot 29
 \end{array}$$

Decomposição
em fatores primos
 $232 = 2^3 \cdot 29$

Mínimo múltiplo comum

Definição: O **mínimo múltiplo comum** de dois inteiros positivos a e b , denotado por $mmc(a, b)$ é o menor múltiplo comum de a e b .

Exemplos: Encontre

$$mmc(6, 15)$$

Solução: Note que os múltiplos positivos de 6 e de 15 são:

$$M(6) = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, \dots\} \text{ e } M(15) = \{15, 30, 45, \dots\}$$

Portanto,

$$mmc(6, 15) = 30 \quad \text{Menor múltiplo comum de 6 e 15}$$

Na prática, encontra-se o $mmc(a, b)$ utilizando-se o seguinte método prático, que utiliza a forma fatorada de a e b :

$$\begin{array}{r|l}
 6 - 15 & 2 \\
 3 - 15 & 3 \\
 1 - 5 & 5 \\
 1 - 1 & \hline
 & 2 \cdot 3 \cdot 5
 \end{array}$$

Portanto,

$$mmc(6, 15) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

Mínimo múltiplo comum

Pode-se calcular o mínimo múltiplo comum entre três ou mais números utilizando-se um método parecido ao do exemplo anterior.

Exemplos: Encontre

$$mmc(10, 28, 35)$$

Solução: Utilizando a fatoração simultânea de 10, 28 e 35, tem-se:

$$\begin{array}{r|l}
 10 & - & 28 & - & 35 & | & 2 \\
 5 & - & 14 & - & 35 & | & 2 \\
 5 & - & 7 & - & 35 & | & 5 \\
 1 & - & 7 & - & 7 & | & 7 \\
 \hline
 1 & - & 1 & - & 1 & | & 2^2 \cdot 5 \cdot 7
 \end{array}$$

Portanto,

$$mmc(10, 28, 35) = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 = 140$$

Operações e propriedades das frações

Igualdade de frações

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Duas frações são iguais sempre que a multiplicação cruzada resultar em números iguais.

Exemplo:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \quad \text{pois} \quad \underbrace{2 \cdot 6}_{12} = \underbrace{3 \cdot 4}_{12}$$

Exemplo:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{pois} \quad \underbrace{1 \cdot 2}_2 = \underbrace{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}_2$$

Simplificação

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$$

Fatores comuns ao numerador e denominador podem ser simplificados.

Exemplo:

$$\frac{15}{12} = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{5}{4}$$

Exemplo:

$$\frac{25a}{5ab} = \frac{5 \cdot 5 \cdot a}{5 \cdot a \cdot b} = \frac{5}{b}$$

Operações e propriedades das frações

Soma/subtração

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{\frac{m}{b} \cdot a \pm \frac{m}{d} \cdot c}{m}$$

$m = m.m.c. (b, d)$ mínimo múltiplo comum entre b e d .

Exemplo:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{5} = \frac{\frac{10}{2} \cdot 1 + \frac{10}{5} \cdot 3}{10} = \frac{5 + 6}{10} = \frac{11}{10}$$

$$\begin{array}{r|l} 2 - 5 & 2 \\ 1 - 5 & 5 \\ \hline 1 - 1 & 2 \cdot 5 \end{array}$$

$$mmc(2, 5) = 2 \cdot 5 = 10$$

Exemplo:

$$\frac{3}{4} - \frac{7}{10} = \frac{\frac{20}{4} \cdot 3 - \frac{20}{10} \cdot 7}{20} = \frac{15 - 14}{20} = \frac{1}{20}$$

$$\begin{array}{r|l} 4 - 10 & 2 \\ 2 - 5 & 2 \\ 1 - 5 & 5 \\ \hline 1 - 1 & 2 \cdot 2 \cdot 5 \end{array}$$

$$mmc(4, 10) = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$$

Operações e propriedades das frações

Multiplicação

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Multiplica-se o de cima pelo de cima e o de baixo pelo de baixo.

Exemplo:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 8} = \frac{3}{40}$$

Exemplo:

$$\frac{a+1}{2a} \cdot \frac{b}{a} = \frac{(a+1) \cdot b}{(2a) \cdot a} = \frac{ab+b}{2a^2}$$

Divisão

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Multiplica-se a primeira pelo inverso da segunda.

Exemplo:

$$\frac{5}{3} \div \frac{2}{7} = \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{2} = \frac{5 \cdot 7}{3 \cdot 2} = \frac{35}{6}$$

Exemplo:

$$\frac{a^2}{2b} \div \frac{a}{b} = \frac{a^2}{2b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot a \cdot b}{2 \cdot b \cdot a} = \frac{a}{2}$$

Operações com frações

Exemplos: Efetue as seguintes operações com frações

(a) $\frac{1}{5} + \frac{2}{3}$ (b) $\frac{1}{8} - \frac{5}{4}$ (c) $\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2}$ (d) $\frac{4}{9} \div \frac{1}{2}$ (e) $\frac{3}{4} + \frac{1}{3} - \frac{4}{15}$

Solução:

$$(a) \frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{\frac{15}{5} \cdot 1 + \frac{15}{3} \cdot 2}{15} = \frac{3 + 10}{15} = \frac{13}{15}$$

$$\begin{array}{r|l} 5 - 3 & 3 \\ 5 - 1 & 5 \\ 1 - 1 & 3 \cdot 5 \\ \hline \end{array}$$

$mmc(5, 3) = 3 \cdot 5 = 15$

$$(b) \frac{1}{8} - \frac{5}{4} = \frac{\frac{8}{8} \cdot 1 - \frac{8}{4} \cdot 5}{8} = \frac{1 - 10}{8} = -\frac{9}{8}$$

$$\begin{array}{r|l} 8 - 4 & 2 \\ 4 - 2 & 2 \\ 2 - 1 & 2 \\ 1 - 1 & 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ \hline \end{array}$$

$$(c) \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6} \quad (d) \frac{4}{9} \div \frac{1}{2} = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{1} = \frac{4 \cdot 2}{9 \cdot 1} = \frac{8}{9}$$

$mmc(8, 4) = 2^3 = 8$

$$(e) \frac{3}{4} + \frac{1}{3} - \frac{4}{15} = \frac{\frac{60}{4} \cdot 3 + \frac{60}{3} \cdot 1 - \frac{60}{15} \cdot 4}{60}$$

$$= \frac{15 \cdot 3 + 20 \cdot 1 - 4 \cdot 4}{60} = \frac{45 + 20 - 16}{60} = \frac{49}{60}$$

$$\begin{array}{r|l} 4 - 3 - 15 & 2 \\ 2 - 3 - 15 & 2 \\ 1 - 3 - 15 & 3 \\ 1 - 1 - 5 & 5 \\ 1 - 1 - 1 & 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \\ \hline \end{array}$$

$mmc(4, 3, 15) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ **18**

Exercícios Propostos



Exercícios



1) Represente graficamente os intervalos a seguir e verifique se os números

$$5; \quad \pi; \quad \sqrt{5}; \quad -0,2; \quad \frac{5}{2};$$

pertencem a cada intervalo:

(a) $A = [-2, 5)$

(b) $B = (2, 7)$

(c) $C = (6, +\infty)$

2) Sendo: $A = [-2, 5]$, $B = (2, 7)$ e $C = (6, +\infty)$. Determine:

(a) $A \cap C$

(c) $A - B$

(e) $(A \cup C) \cup B$

(b) $A \cap B$

(d) $A \cup C$

(f) $(A - C) \cap B$

3) Sendo $U = \mathbb{R}$ represente cada um dos intervalos indicados por compreensão e na reta real:

(a) conjunto dos números maiores que -3 e menores que 1 ;

(b) conjunto dos números menores ou iguais a -4 ;

(c) conjunto dos números maiores que -1 ou menores que -3 .

Exercícios



4) Realize cada uma das operações envolvendo frações:

$$(a) \frac{3}{5} - \frac{2}{15} + \frac{1}{3}$$

$$(d) \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{3}\right)}$$

$$(b) -\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{3}$$

$$(e) \frac{4}{3} \div 2$$

$$(c) \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{4}\right)$$

$$(f) \frac{-\frac{5}{3}}{\frac{15}{6}}$$

5) Calcule:

$$(a) \frac{3}{2} - \frac{1}{5} \div \frac{3}{10} + 1$$

$$(c) \frac{1}{3} + \left[\frac{1}{3} \div \left(\frac{1}{4} + 1 \right) \right] \cdot \left(-\frac{1}{9} \right)$$

$$(b) 2 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)$$

Exercícios

6) Represente graficamente na reta real os seguintes intervalos:

(a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3\}$

(b) $(-\infty, 2]$

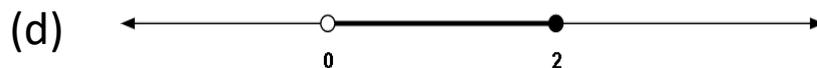
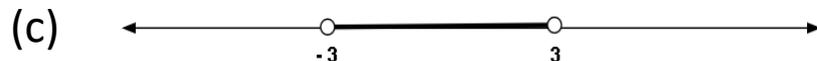
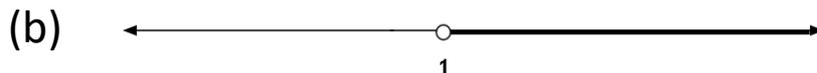
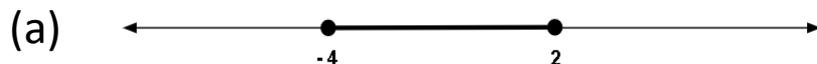
(c) $[-3, \frac{1}{2}]$

(d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 7\}$

(e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$

(f) $[0, 6)$

7) Escreva os intervalos representados graficamente:



Exercícios



8) Dados os conjuntos a seguir, determine o que se pede.

(a) $A = [2, 4]$ e $B = [3, 6]$:

$$A \cap B$$

$$A \cup B$$

$$A - B$$

$$B - A$$

(b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$: $A \cap B, A \cup B$.

$$A \cap B$$

$$A \cup B$$

9) Dados os intervalos $A = [-1, 4]$, $B = [1, 5]$, $C = [2, 4]$ e $D = [1, 3]$, verifique se 1 pertence ao conjunto $(A \cap B) - (C - D)$.

Exercícios



10) Realize as seguintes operações envolvendo frações:

$$(a) \frac{25}{3} + \frac{5}{2} \div 2$$

$$(b) \left(-\frac{3}{4}\right) \div \left(-\frac{5}{2}\right) + \left(\frac{27}{16}\right)$$

$$(c) -1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{8}$$

$$(d) \frac{12}{5} - \frac{24}{15}$$

$$(e) \frac{2}{100} + \frac{98}{10}$$

$$(f) \frac{27}{8} \div \frac{5}{16}$$

$$(g) -2 \cdot \frac{23}{8} - \frac{1}{2}$$

$$(h) 2 \cdot \frac{1}{8} + \frac{2}{7} - \frac{81}{9}$$

Respostas



Exercício 1:

a) $\pi, \sqrt{5}, -0,2, \frac{5}{2}$

b) $5, \pi, \sqrt{5}, \frac{5}{2}$

c) Nenhum

Exercício 2:

a) \emptyset

b) $(2,5]$

c) $[-2,2]$

d) $[-2,5] \cup (6,+\infty)$

e) $[-2, ,+\infty)$

f) $(2,5]$

Exercício 3:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 1\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -4\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > -1\}$

Exercício 4:

a) $\frac{4}{5}$

b) $-\frac{8}{21}$

c) $\frac{3}{10}$

d) $\frac{3}{4}$

e) $\frac{2}{3}$

f) $-\frac{2}{3}$

Exercício 5:

a) $\frac{11}{6}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{41}{135}$

Respostas

Exercício 6:



Exercício 7:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 2\}$ ou $[-4, 2]$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ ou $(1, +\infty)$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$ ou $(-3, 3)$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 2\}$ ou $(0, 2]$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$ ou $(-\infty, 1]$

Respostas



Exercício 8:

a) $A \cap B \{x \in \mathbb{R} | 3 \leq x \leq 4\}$ ou $[3, 4]$

$A \cup B \{x \in \mathbb{R} | 2 \leq x \leq 6\}$ ou $[2, 6]$

$A - B \{x \in \mathbb{R} | 2 \leq x < 3\}$ ou $[2, 3)$

$B - A \{x \in \mathbb{R} | 4 < x \leq 6\}$ ou $(4, 6]$

b) $A \cap B \{x \in \mathbb{R} | x < 1\}$ ou $(-\infty, 1)$

$A \cup B \{x \in \mathbb{R} | x < 4\}$ ou $(-\infty, 4)$

Exercício 9:

$\{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 3\}$ ou $[1, 3]$, portanto $1 \in (A \cap B) - (C - D)$.

Exercício 10:

a) $\frac{115}{12}$ e) $\frac{491}{50}$

b) $\frac{159}{80}$ f) $\frac{54}{5}$

c) $-\frac{5}{12}$ g) $-\frac{25}{4}$

d) $\frac{4}{5}$ h) $-\frac{237}{28}$

Monitorias!!



Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

<http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias>

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

<http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA>

O GAMA possui monitorias de:

- ❑ Matemática Elementar, Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e equivalentes)
 - ❑ ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
 - ❑ Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3 (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.



Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino



Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Apoio ao Cálculo

Aula 02

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em
Matemática

Potências em \mathbb{R}

Dados $a \in \mathbb{R}^*$ e $n \in \mathbb{N}$, definimos a **potência enésima** como:

Expoente

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$

Base

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^0 = 1$$

Exemplo: Calcule as seguintes potências

(a) 2^3

(b) 5^{-2}

(c) 3^0

Solução: Utilizando a definição de potência, tem-se:

(a) $2^3 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ fatores}} = 8$

(b) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{\underbrace{5 \cdot 5}_{2 \text{ fatores}}} = \frac{1}{25}$

(c) $3^0 = 1$

Propriedades das potências

Produto de potências de mesma base

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Exemplo:

$$2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$$

Exemplo:

$$3^{2a} \cdot 3^5 = 3^{2a+5}$$

Quociente de potências de mesma base

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Exemplo:

$$\frac{3^5}{3^3} = 3^{5-3} = 3^2$$

Exemplo:

$$\frac{a^{5+b}}{a^c} = a^{5+b-c}$$

Potência de potência

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Exemplo:

$$(5^3)^4 = 5^{3 \cdot 4} = 5^{12}$$

Exemplo:

$$(a^2)^{2b} = a^{2 \cdot 2b} = a^{4b}$$

Fração com expoente negativo

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

Exemplo:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

Exemplo:

$$\left(\frac{1}{b}\right)^{-3} = b^3$$

Propriedades das potências

Produto de potências de mesmo expoente

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

Exemplo:

$$2^5 \cdot 3^5 = (2 \cdot 3)^5 = 6^5$$

Exemplo:

$$4 \cdot a^2 = (2 \cdot a)^2$$

Quociente de potências de mesmo expoente

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

Exemplo: $\frac{2^7}{5^7} = \left(\frac{2}{5}\right)^7$

Exemplo: $\frac{b^3}{27} = \left(\frac{b}{3}\right)^3$

Potência de base negativa e expoente par

$$(-a)^n = a^n$$

Exemplo:

$$(-2)^6 = 2^6 = 64$$

Exemplo:

$$(-2x)^2 = (2x)^2 = 4 \cdot x^2$$

Potência de base negativa e expoente ímpar

$$(-a)^n = -a^n$$

Exemplo:

$$(-2)^5 = -2^5 = -32$$

Exemplo: $\left(-\frac{1}{2a}\right)^3 = -\frac{1}{8a^3}$

Potências em \mathbb{R}

Exemplo: Calcule as seguintes potências

(a) $(-3)^4$ (b) $(-2)^5$ (c) $\left(\frac{1}{5}\right)^3$ (d) $\left(\frac{5}{2}\right)^0$ (e) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2}$ (f) $(2^4)^3$

Solução: Utilizando as propriedades de potência, tem-se:

(a) $(-3)^4 = 3^4 = 81$

(d) $\left(\frac{5}{2}\right)^0 = 1$

(b) $(-2)^5 = -2^5 = -32$

(e) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{7^2}{2^2} = \frac{49}{4}$

(c) $\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1^3}{5^3} = \frac{1}{125}$

(f) $(2^4)^3 = 2^{12} = 4096$

Potências de Base 10

Com o uso do sistema numérico decimal, as potências de base 10 são particularmente importantes! Note que:

Potência 2

$$10^2 = \underbrace{100}_{2 \text{ zeros}}$$

Potência -1

$$10^{-1} = \underbrace{0,1}_{1 \text{ zero}}$$

Potência 3

$$10^3 = \underbrace{1.000}_{3 \text{ zeros}}$$

Potência -2

$$10^{-2} = \underbrace{0,01}_{2 \text{ zeros}}$$

Potência 4

$$10^4 = \underbrace{10.000}_{4 \text{ zeros}}$$

Potência -3

$$10^{-3} = \underbrace{0,001}_{3 \text{ zeros}}$$

Potência 5

$$10^5 = \underbrace{100.000}_{5 \text{ zeros}}$$

Potência -4

$$10^{-4} = \underbrace{0,0001}_{4 \text{ zeros}}$$

No caso geral:

Expoente positivo

Potência n

$$10^n = \underbrace{100 \dots 0}_{n \text{ zeros}}$$

Expoente negativo

Potência $-n$

$$10^{-n} = \underbrace{0,0 \dots 01}_{n \text{ zeros}}$$

Potências de Base 10

No geral, quando multiplicamos um número decimal por uma potência 10^n , onde n é um número inteiro, podemos dizer que,

“a vírgula anda n casas para a esquerda ou n casas para a direita”

de acordo com o sinal do expoente n .

- ✓ Se n é positivo, a vírgula se desloca n unidades para a direita;
- ✓ Se n é negativo, a vírgula se desloca $|n|$ unidades para a esquerda;

Exemplo: Efetue os seguintes produtos:

(a) $(12,5) \cdot 10^4$

(b) $(12,5) \cdot 10^{-4}$

Solução:

(a) $(12,5) \cdot 10^4 = (12,50000000 \dots) \cdot \overbrace{10.000}^{4 \text{ zeros}} = 125.000.$

↑ ↑
 “A vírgula se desloca 4 casas para a direita”

(b) $(12,5) \cdot 10^{-4} = (\dots 00000012,5) \cdot \overbrace{0,0001}^{4 \text{ zeros}} = 0,00125.$

↑ ↑
 “A vírgula se desloca 4 casas para a esquerda”

Unidades de medida

Prefixos das principais unidades de medida

Potências	Prefixo	Símbolo	metro (m)	grama (g)	litro (l)
10^{12}	<i>Tera</i>	<i>T</i>	<i>Tm</i>	<i>Tg</i>	<i>Tl</i>
10^9	<i>Giga</i>	<i>G</i>	<i>Gm</i>	<i>Gg</i>	<i>Gl</i>
10^6	<i>Mega</i>	<i>M</i>	<i>Mm</i>	<i>Mg</i>	<i>Ml</i>
10^3	<i>Kilo</i>	<i>k</i>	<i>km</i>	<i>kg</i>	<i>kl</i>
10^2	<i>Hecto</i>	<i>h</i>	<i>hm</i>	<i>hg</i>	<i>hl</i>
10	<i>Deca</i>	<i>da</i>	<i>dam</i>	<i>dag</i>	<i>dal</i>
10^0			<i>m</i>	<i>g</i>	<i>l</i>
10^{-1}	<i>Deci</i>	<i>d</i>	<i>dm</i>	<i>dg</i>	<i>dl</i>
10^{-2}	<i>Centi</i>	<i>c</i>	<i>cm</i>	<i>cg</i>	<i>cl</i>
10^{-3}	<i>Mili</i>	<i>m</i>	<i>mm</i>	<i>mg</i>	<i>ml</i>
10^{-6}	<i>Micro</i>	μ	μm	μg	μl
10^{-9}	<i>Nano</i>	<i>n</i>	<i>nm</i>	<i>ng</i>	<i>nl</i>
10^{-12}	<i>Pico</i>	ρ	ρm	ρg	ρl

Unidades de medida

Comprimento: a unidade padrão é o metro.

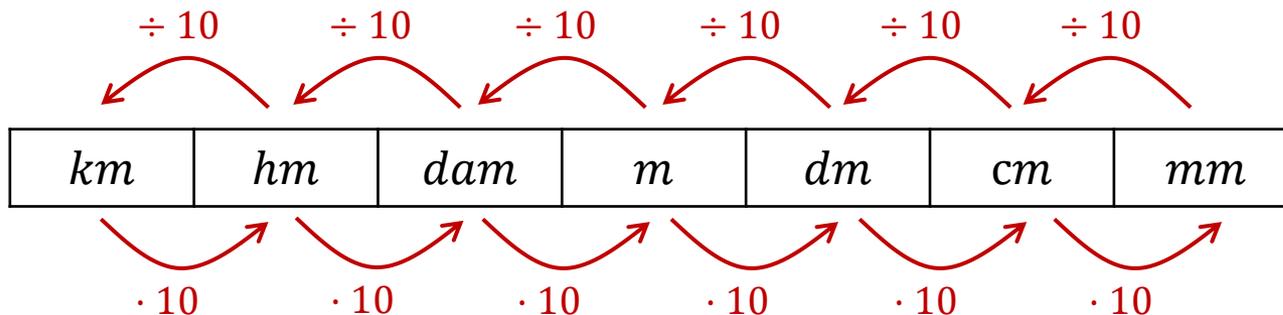
<i>km</i>	<i>hm</i>	<i>dam</i>	<i>m</i>	<i>dm</i>	<i>cm</i>	<i>mm</i>
$10^3 m$	$10^2 m$	$10^1 m$	$10^0 m$	$10^{-1} m$	$10^{-2} m$	$10^{-3} m$
1.000m	100m	10m	1m	0,1m	0,01m	0,001m

Quilômetro
Hectômetro
Decâmetro
Metro
Decímetro
Centímetro
Milímetro

{
Múltiplos
Submúltiplos
}

Conversões

Da direita para a esquerda, divide-se por 10 em cada passo



Da esquerda para a direita, multiplica-se por 10 em cada passo

Conversões de unidades de medida

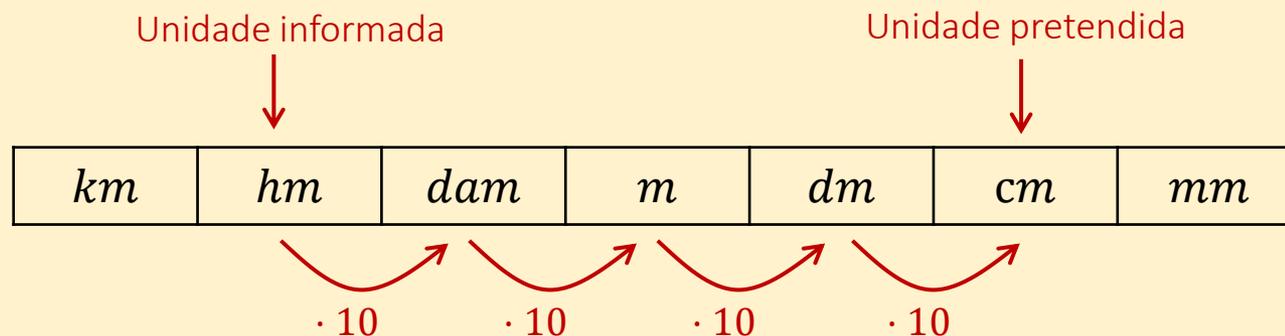
Exemplo: Converta:

(a) 5,2 hectômetros para centímetros

(b) 130 milímetros para metros

Solução:

(a)



Hectômetros		Centímetros
5,2	↔	$(5,2) \cdot 10^4$
5,2	↔	$(5,2) \cdot 10.000$
5,2	↔	52.000

Resposta: 5,2 hectômetros equivalem a 52.000 centímetros

Conversões de unidades de medida

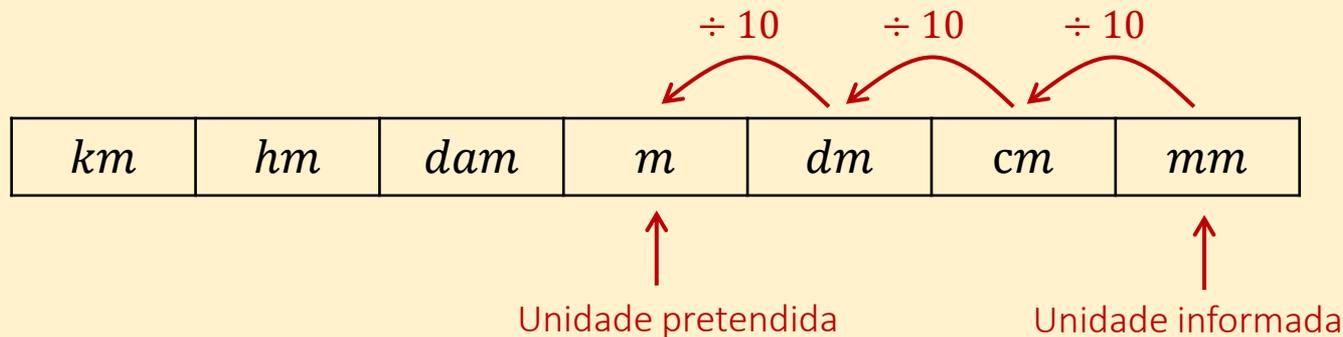
Exemplo: Converta:

(a) 5,2 hectômetros para centímetros

(b) 130 milímetros para metros

Solução:

(b)

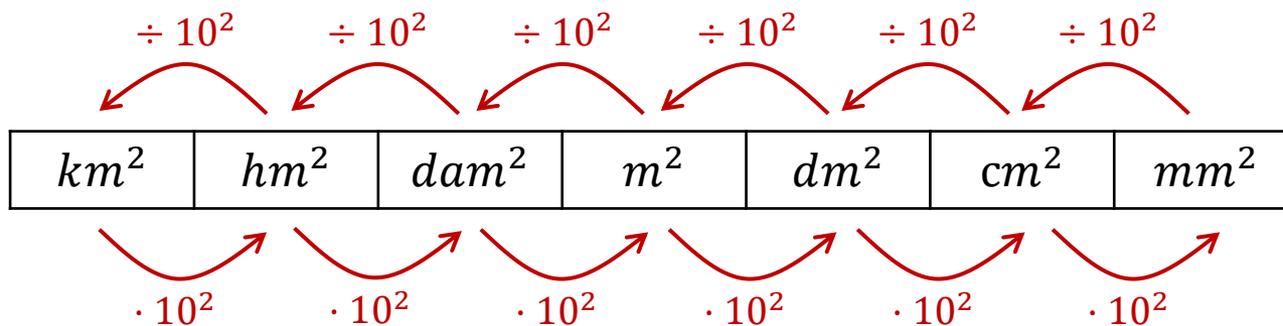


Milímetros		Metros
130	\longleftrightarrow	$130 \cdot 10^{-3}$
130	\longleftrightarrow	$130 \cdot 0,001$
130	\longleftrightarrow	0,13

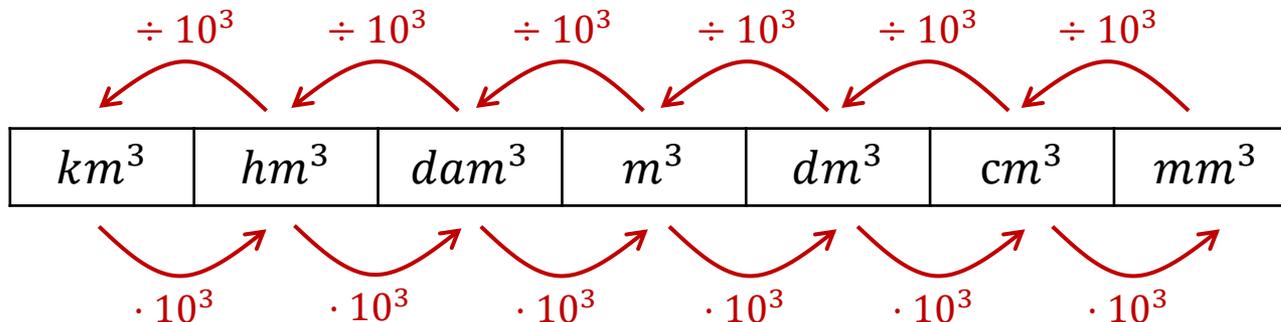
Resposta: 130 milímetros equivalem a 0,13 metros.

Conversões de unidades de área e volume

Conversão de área



Conversão de volume



Conversões de unidades de medida

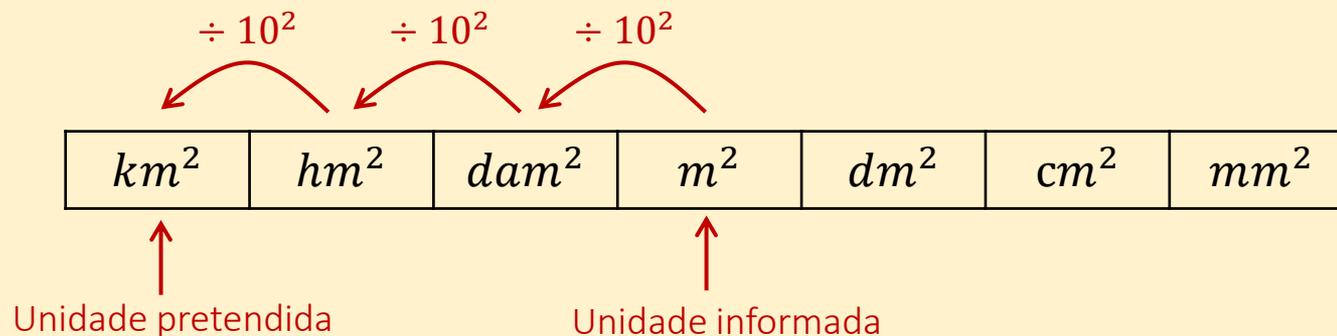
Exemplo: Converta:

(a) $1500m^2$ para km^2

(b) $230dam^3$ para mm^3

Solução:

(a)



Metros quadrados		Quilômetros quadrados
1500	↔	$1500 \cdot 10^{-6}$
1500	↔	$1500 \cdot 0,000001$
1500	↔	0,0015

Resposta: **1500** metros quadrados equivalem a **0,0015** quilômetros quadrados.

Conversões de unidades de medida

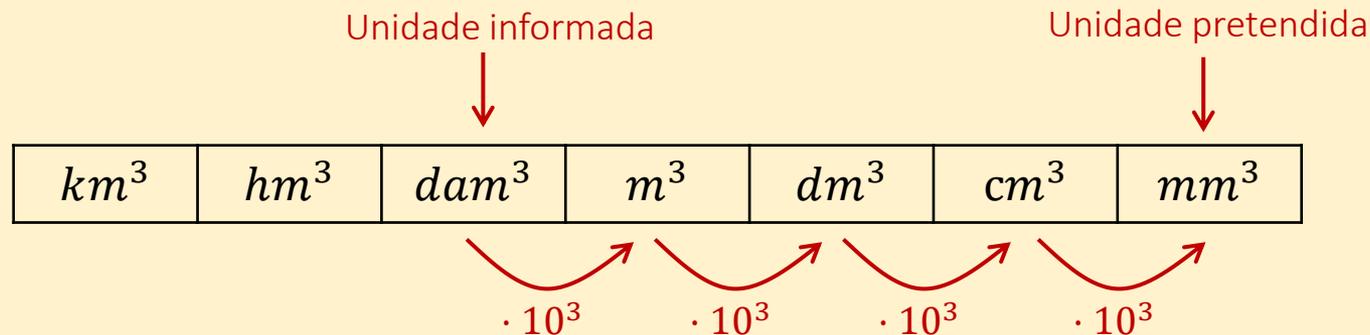
Exemplo: Converta:

(a) $1500m^2$ para km^2

(b) $230dam^3$ para mm^3

Solução:

(b)



Decâmetros Cúbicos

Milímetros Cúbicos

230	←→	230 · 10 ¹²
230	←→	230 · 1000000000000
230	←→	230.000.000.000.000

Resposta: 230 decâmetros cúbicos equivalem a 230.000.000.000.000 milímetros cúbicos.

Exercícios Propostos



Exercícios

1) Calcule as seguintes potências:

(a) $(-2)^3$

(c) -2^2

(e) $(-2)^{-2}$

(g) 3^{2^3}

(b) $(-2)^2$

(d) 2^{-2}

(f) -3^{-3}

(h) $(3^2)^3$

2) Calcule as seguintes potências:

(a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$

(c) $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$

(e) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$

(g) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$

(b) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$

(d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

(f) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$

(h) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$

3) Efetue os seguintes produtos:

(a) $25 \cdot 10^5$

(e) $3 \cdot 10^{-2}$

(b) $(3,2) \cdot 10^4$

(f) $452 \cdot 10^{-5}$

(c) $(0,041) \cdot 10^2$

(g) $(7,02) \cdot 10^{-3}$

(d) $(0,0243) \cdot 10^7$

(h) $224,5 \cdot 10^{-1}$

Exercícios



4) Efetue as seguintes conversões:

(a) 512 hectômetros para metros;

(b) 1255 decímetros para decâmetros;

(c) 1,2 quilômetros para centímetros;

(d) 0,230 decâmetros para decímetros;

(e) $(1,7) \cdot 10^5$ milímetros para metros;

(f) 1200 metros quadrados para hectômetros quadrados;

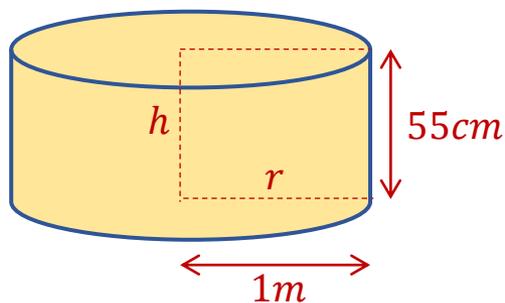
(g) 1,25 decâmetros quadrados para metros quadrados;

(h) 3,42 metros cúbicos para decímetros cúbicos;

Exercícios

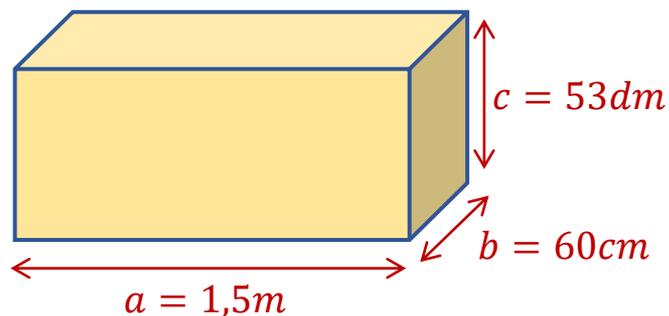
5) O **metro cúbico**, no Sistema Internacional de Unidade (SI), é a unidade fundamental para o cálculo do volume/capacidade. Sabendo que 1 litro equivale a 1 decímetro cúbico, determine a capacidade, em litros, dos seguintes reservatórios:

(a)

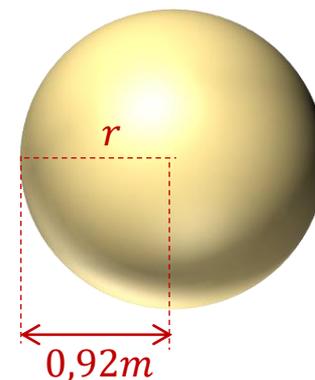


Utilizar $\pi \cong 3,14$

(b)



(c)



Utilizar $\pi \cong 3,14$

Exercícios



6) Calcule as seguintes potências:

(a) $3^5 \cdot 3^{-3}$

(b) $(-5)^{2^3}$

(c) $(-4)^{2+5}$

(d) $(-\frac{1}{3})^4$

(e) $((-5)^2)^3$

(f) $(-5^2)^3$

(g) $\left(\left(-\frac{1}{5}\right)^3\right)^{2-3}$

(h) $\left(\frac{2^3}{5}\right)^3$

(i) $((-6)^3)^5 \cdot (-216)^{-7+2}$

(j) $\left(\frac{5^3}{5^6}\right)$

Exercícios



7) Calcule os seguintes produtos:

(a) $3,75 \cdot 10^3$

(b) $49 \cdot 10^3 \cdot 0,1 \cdot 10^{-1}$

(c) $0,005 \cdot 10^2$

(d) $10007,06 \cdot 10^{-3}$

(e) $0,1005 \cdot 10^4$

(f) $65345,7 \cdot 10^{-5}$

(g) $0,120005 \cdot 10^1$

(h) $0,007 \cdot 10^{-2}$

(i) $2,504 \cdot 10^7$

(j) $679 \cdot 10^{-1}$

8) Efetue as conversões de unidades como solicitado em cada letra:

(a) $25 \cdot 10^{-3} \text{ hm} \rightarrow \text{m}$

(b) $0,0000012 \text{ Tm} \rightarrow \text{m}$

(c) $2005 \text{ cm} \rightarrow \text{km}$

(d) $2 \text{ dam} \rightarrow \text{cm}$

(e) $37 \cdot 10^3 \text{ mm} \rightarrow \text{dm}$

(f) $1 \cdot 10^9 \text{ pm} \rightarrow \mu\text{m}$

(g) $342 \mu\text{m}^2 \rightarrow \text{nm}^2$

(h) $100 \text{ km}^3 \rightarrow \text{m}^3$

(i) $49 \cdot 10^6 \text{ Mm} \rightarrow \text{Gm}$

(j) $999,8 \text{ hm} \rightarrow \text{dam}$

Exercícios



9) Sabendo que 1L (um litro) equivale a $1dm^3$, quantos litros possui um reservatório d'água de $50m^3$? Foram consumidos $25000cm^3$ de água do reservatório. Quantos litros restaram?

Respostas



Exercício 1:

a) -8

b) 4

c) -4

d) $\frac{1}{4}$

e) $\frac{1}{4}$

f) $-\frac{1}{27}$

g) 6561

h) 729

Exercício 2:

a) $\frac{8}{27}$

b) $-\frac{27}{64}$

c) $\frac{9}{16}$

d) $\frac{9}{4}$

e) $\frac{2}{3}$

f) 64

g) $-\frac{27}{8}$

h) 9

Exercício 3:

a) 2500000

b) 32000

c) $4,1$

d) 243000

e) $0,03$

f) $0,00452$

g) $0,00702$

h) $22,45$

Exercício 4:

a) 51.200

b) $12,55$

c) 120.000

d) 23

e) 170

f) $0,12$

g) 125

h) 3.420

Exercício 5:

a) Volume $\cong 1.727$ litros

b) Volume $\cong 4.770$ litros

c) Volume $\cong 3.260,11$ litros

Exercício 6:

a) 9

b) 390625

c) -16384

d) $\frac{1}{81}$

e) 15625

f) -15625

g) -125

h) $\frac{512}{125}$

i) 1

j) $\frac{1}{125}$

Respostas



Exercício 7:

a) 3750

b) 490

c) 0,5

d) 10,00706

e) 1005

f) 0,653457

g) 1,20005

h) 0,00007

i) 25040000

j) 67,9

Exercício 8:

a) 2,5 m

b) 1200000 m

c) 0,02005 km

d) 2000 cm

e) 370 dm

f) 1000 μ m

g) $342 \cdot 10^6 \text{ nm}^2$

h) $1 \cdot 10^{11} \text{ m}^3$

i) $49 \cdot 10^3 \text{ Gm}$

j) 9998 dam

Exercício 9:

50000 litros, 49975 litros.

Monitorias!!



Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

<http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias>

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

<http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA>

O GAMA possui monitorias de:

- Matemática Elementar, Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e equivalentes)
 - ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
 - Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3 (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.



Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino



Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Apoio ao Cálculo

Aula 03

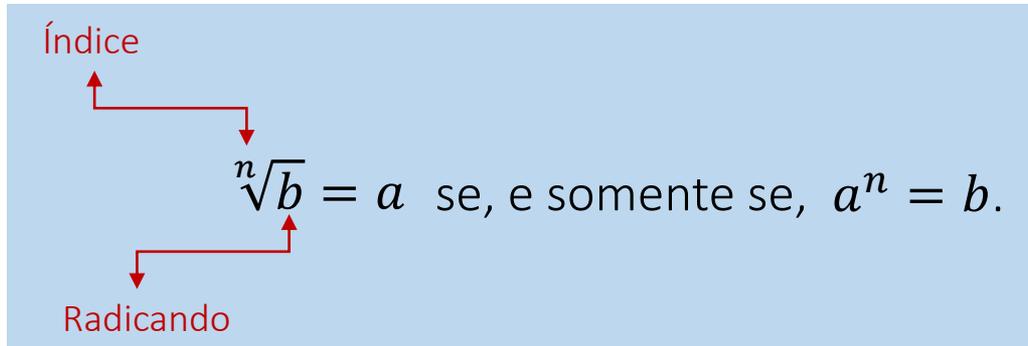
Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em
Matemática

Raízes em \mathbb{R}

Dados $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$, definimos a **raiz enésima** como:


$${}^n\sqrt{b} = a \text{ se, e somente se, } a^n = b.$$

Índice

Radicando

Propriedades das Raízes

Raiz como expoente fracionário

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Exemplo:

$$\sqrt{6} = 6^{\frac{1}{2}}$$

Exemplo:

$$\sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$$

Potência de raiz

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Produto de raízes de mesmo índice

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Exemplo:

$$(\sqrt{x})^6 = \sqrt{x^6}$$

Exemplo:

$$(\sqrt[5]{3})^2 = \sqrt[5]{9}$$

Exemplo:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10}$$

Exemplo:

$$\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{2b}$$

Raiz de raiz

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Quociente de raízes de mesmo índice

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Exemplo:

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[12]{2}$$

Exemplo:

$$\sqrt[5]{\sqrt{x}} = \sqrt[10]{x}$$

Exemplo:

$$\frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[4]{\frac{6}{5}}$$

Exemplo:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$$

Raízes em \mathbb{R}

Exemplo: Calcule:

(a) $\sqrt{1024}$ (b) $\sqrt[5]{32}$ (c) $(-8)^{\frac{1}{3}}$ (d) $16^{\frac{3}{2}}$ (e) $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}$

Solução: Utilizando a definição de raiz e suas propriedades, tem-se:

$$(a) \sqrt{1024} = \sqrt{2^{10}} = 2^{\frac{10}{2}} = 2^5 = 32$$

$$(b) \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$$

$$(c) (-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$$

$$(d) 16^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{16^3} = \sqrt{(2^4)^3} = \sqrt{2^{12}} = 2^{\frac{12}{2}} = 2^6 = 64$$

$$(e) \left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}} = (81)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$$

Raízes em \mathbb{R}

Exemplo: Simplifique ao máximo:

(a) $\sqrt{24}$ (b) $\sqrt[3]{32}$ (c) $\sqrt[4]{512}$

Solução: Utilizando a definição de raiz e suas propriedades, tem-se:

$$(a) \sqrt{24} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{2 \cdot 3} = 2\sqrt{6}$$

$$(b) \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^2} = 2\sqrt[3]{4}$$

$$(c) \sqrt[4]{512} = \sqrt[4]{2^9} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2^4 \cdot 2} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{2} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt[4]{2} = 4\sqrt[4]{2}$$

Racionalização

Racionalizar uma fração significa multiplicar e dividir a fração por um **fator racionalizante** de modo a simplificar as raízes do denominador.

Os casos mais comuns de racionalização são os seguintes:

Caso 1: o denominador é uma raiz quadrada.

Neste caso, o fator racionalizante é a própria raiz quadrada que aparece no denominador.

Exemplo	Fator	Forma racionalizada
$\frac{1}{\sqrt{a}}$	\sqrt{a}	$\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^2}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{2}{\sqrt{6}}$	$\sqrt{6}$	$\frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6^2}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Racionalização

Caso 2: o denominador é uma raiz de índice n .

Neste caso, se no denominador há a raiz $\sqrt[n]{a^m}$, o fator racionalizante será $\sqrt[n]{a^{n-m}}$.

Exemplo	Fator	Forma racionalizada
$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$	$\sqrt[n]{a^{n-m}}$	$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^n}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$
$\frac{1}{\sqrt[5]{7^2}}$	$\sqrt[5]{7^3}$	$\frac{1}{\sqrt[5]{7^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^3}} = \frac{\sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^5}} = \frac{\sqrt[5]{7^3}}{7} = \frac{\sqrt[5]{343}}{7}$
$-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$	$\sqrt[3]{2^2}$	$-\frac{3}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = -\frac{3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = -\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$
$\frac{5}{\sqrt[4]{8}}$	$\sqrt[4]{2}$	$\frac{5}{\sqrt[4]{8}} = \frac{5}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{5}{\sqrt[4]{2^3}} \cdot \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}} = \frac{5\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^4}} = \frac{5\sqrt[4]{2}}{2}$

Racionalização

Caso 3: o denominador é uma soma/diferença envolvendo uma raiz quadrada.
 Neste caso, o fator racionalizante será o “conjugado” do denominador.

Exemplo	Fator	Forma racionalizada
$\frac{1}{\sqrt{a} + b}$	$\sqrt{a} - b$	$\frac{1}{\sqrt{a} + b} \cdot \frac{\sqrt{a} - b}{\sqrt{a} - b} = \frac{\sqrt{a} - b}{(\sqrt{a})^2 - \sqrt{a} \cdot b + \sqrt{a} \cdot b - b^2} = \frac{\sqrt{a} - b}{a - b^2}$
$\frac{1}{\sqrt{a} - b}$	$\sqrt{a} + b$	$\frac{1}{\sqrt{a} - b} \cdot \frac{\sqrt{a} + b}{\sqrt{a} + b} = \frac{\sqrt{a} + b}{(\sqrt{a})^2 - \sqrt{a} \cdot b + \sqrt{a} \cdot b - b^2} = \frac{\sqrt{a} + b}{a - b^2}$
$\frac{3}{\sqrt{2} + 1}$	$\sqrt{2} - 1$	$\frac{3}{\sqrt{2} + 1} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{3(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2})^2 - \sqrt{2} + \sqrt{2} - (1)^2} = \frac{3\sqrt{2} - 3}{2 - 1} = 3\sqrt{2} - 3$
$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7} - 2}$	$\sqrt{7} + 2$	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7} - 2} \cdot \frac{\sqrt{7} + 2}{\sqrt{7} + 2} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{7} + 2)}{(\sqrt{7})^2 - 2\sqrt{7} + 2\sqrt{7} - (2)^2} = \frac{\sqrt{35} + 2\sqrt{5}}{3}$
$\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$	$\sqrt{3} + \sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - \sqrt{2}\sqrt{3} + -\sqrt{2}\sqrt{3} - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

Racionalização

Exemplo: Racionalize as frações:

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(b) $\frac{2}{3\sqrt{5}}$

(c) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$

(d) $\frac{2}{\sqrt[5]{9}}$

(e) $\frac{1}{3 - \sqrt{2}}$

(f) $\frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$

Solução:

(a)
$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(b)
$$\frac{2}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{3\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{3 \cdot \sqrt{25}} = \frac{2\sqrt{5}}{3 \cdot 5} = \frac{2\sqrt{5}}{15}.$$

(c)
$$\frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{2\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{2\sqrt[3]{2^2}}{2} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}.$$

(d)
$$\frac{2}{\sqrt[5]{9}} = \frac{2}{\sqrt[5]{3^2}} = \frac{2}{\sqrt[5]{3^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^3}} = \frac{2\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{2\sqrt[5]{3^3}}{3} = \frac{2\sqrt[5]{27}}{3}.$$

Racionalização

Exemplo: Racionalize as frações:

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(b) $\frac{2}{3\sqrt{5}}$

(c) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$

(d) $\frac{2}{\sqrt[5]{9}}$

(e) $\frac{1}{3 - \sqrt{2}}$

(f) $\frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$

Solução:

(e)

$$\frac{1}{3 - \sqrt{2}} = \frac{1}{3 - \sqrt{2}} \cdot \frac{3 + \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}} = \frac{3 + \sqrt{2}}{3^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{3 + \sqrt{2}}{9 - 2} = \frac{3 + \sqrt{2}}{7}.$$

(f)

$$\frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \cdot \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(1 - \sqrt{2})}{1^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2} - 2}{-1} = 2 - \sqrt{2}.$$

Exercícios Propostos



Exercícios



1) Simplifique os radicais.

(a) $\sqrt{576}$

(b) $\sqrt[3]{64}$

(c) $\sqrt{12}$

(d) $\sqrt[3]{27}$

2) Reduza os radicais a seguir e efetue as operações indicadas em cada caso.

(a) $\sqrt{2} - \sqrt{8}$

(c) $\sqrt{125} + \sqrt{20} - \sqrt{45}$

(b) $\sqrt{3} - 2\sqrt{12} + \sqrt{27}$

(d) $\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{250} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16}$

3) Calcule cada produto abaixo:

(a) $(2\sqrt{5} + 8)(\sqrt{5} - 1)$

(c) $(\sqrt{6} - 2)(9 - \sqrt{6})$

(b) $(-5 + 3\sqrt{2})(4 - \sqrt{2})$

(d) $(1 - 2\sqrt{7})(1 + 2\sqrt{7})$

4) Calcule o valor numérico da expressão

$$8^{\frac{1}{2}} + \sqrt[4]{4} + \sqrt[6]{8} - 32^{\frac{1}{2}} + 128^{\frac{1}{2}} - \sqrt{32}$$

Exercícios



5) Efetue as operações com as raízes

(a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$

(c) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{18}$

(b) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{6}$

(d) $\sqrt{6} \div \sqrt{3}$

6) Introduza cada expressão a seguir em um só radical:

(a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{5}$

(c) $\sqrt[3]{40} \div \sqrt{2}$

(b) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{2}$

(d) $\sqrt{8} \div \sqrt[3]{16}$

7) Determine o valor de x na expressão

$$x = \sqrt{7 + \sqrt[3]{6 + \sqrt[4]{16}}}$$

Exercícios



8) Racionalize as frações abaixo:

(a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

(b) $\frac{2}{3\sqrt{3}}$

(c) $\frac{\sqrt{x}}{y\sqrt{y}}$

9) Racionalize as frações abaixo:

(a) $\frac{3}{\sqrt[3]{3}}$

(b) $\frac{2}{\sqrt[4]{8}}$

(c) $\frac{xy}{\sqrt[5]{x^2y^3}}$

10) Racionalize as frações abaixo:

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

(c) $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}$

(b) $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$

(d) $\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}$

Exercícios



11) Simplifique os radicais.

(a) $\sqrt{24}$

(b) $\sqrt{75}$

(c) $\sqrt[3]{250}$

(d) $\sqrt[5]{-972}$

12) Reduza os radicais e calcule o valor numérico das expressões.

(a) $\sqrt{3} + \sqrt{48}$

(b) $3\sqrt{32} + 2\sqrt{8} - 2\sqrt{18}$

(c) $\sqrt{28} - 10\sqrt{7}$

(d) $6\sqrt{3} + \sqrt{75}$

(e) $\sqrt{98} + 5\sqrt{18}$

(f) $\sqrt{75} - 2\sqrt{12} + \sqrt{27}$

(g) $\sqrt{12} - 9\sqrt{3} + \sqrt{75}$

(h) $5\sqrt{180} + \sqrt{245} - 17\sqrt{5}$

13) Efetue as operações com raízes:

(a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{7}$

(b) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{10}$

(c) $\sqrt[3]{30} \div \sqrt[3]{10}$

(d) $\sqrt[4]{15} \div \sqrt[4]{5}$

(e) $(\sqrt{2} - 2) \cdot (3 - \sqrt{2})$

(f) $(7\sqrt{7} + 1) \cdot (\sqrt{7} - 1)$

Exercícios



14) Para cada expressão reduza a um só radical.

(a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{16}$

(b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{15}$

(c) $\sqrt[3]{25} \div \sqrt[4]{2}$

(d) $\sqrt[3]{10} \div \sqrt[5]{3}$

15) Racionalize as frações abaixo:

(a) $\frac{5}{\sqrt{3}}$

(b) $\frac{2}{\sqrt{18}}$

(c) $\frac{1}{10\sqrt{7}}$

(d) $\frac{5}{\sqrt[5]{25}}$

(e) $\frac{1}{\sqrt{3} + 5}$

(f) $\frac{2}{2\sqrt{2} - 1}$

Respostas



Exercício 1:

a) 24

b) 4

c) $2\sqrt{3}$

d) $4\sqrt[3]{2}$

Exercício 2:

a) $-\sqrt{2}$

b) 0

c) $4\sqrt{5}$

d) $10\sqrt[3]{2}$

Exercício 3:

a) $2 + 6\sqrt{5}$

b) $17\sqrt{2} - 26$

c) $11\sqrt{6} - 24$

d) -27

Exercício 4:

$4\sqrt{2}$

Exercício 5:

a) 6

b) $2\sqrt[3]{3}$

c) 6

d) $\sqrt{2}$

Exercício 6:

a) $\sqrt[6]{3^3 5^2}$

b) $\sqrt[12]{2^{11}}$

c) $\sqrt[6]{2^3 5^2}$

d) $\sqrt[6]{2}$

Exercício 7:

$x = 3$

Exercício 8:

a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

c) $\frac{\sqrt{xy}}{y^2}$

Exercício 9:

a) $\sqrt[3]{9}$

b) $\sqrt[4]{2}$

c) $\sqrt[5]{x^3 y^2}$

Exercício 10:

a) $\sqrt{2} + 1$

b) $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$

c) $\frac{-3\sqrt{2} - 4}{2}$

d) $\frac{4 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{2}$

Exercício 11:

a) $2\sqrt{6}$

b) $5\sqrt{3}$

c) $5\sqrt[3]{2}$

d) $-3\sqrt[5]{4}$

Respostas



Exercício 12:

a) $5\sqrt{3}$

b) $10\sqrt{2}$

c) $-8\sqrt{7}$

d) $11\sqrt{3}$

e) $22\sqrt{2}$

f) $4\sqrt{3}$

g) $-2\sqrt{3}$

h) $20\sqrt{5}$

Exercício 13:

a) $\sqrt{14}$

b) $\sqrt[3]{50}$

c) $\sqrt[3]{3}$

d) $\sqrt[4]{3}$

e) $5\sqrt{2} - 8$

f) $-6\sqrt{7} + 48$

Exercício 14:

a) $\sqrt[6]{2^3 \cdot 16^2}$

b) $\sqrt[6]{5^3 \cdot 15^2}$

c) $\sqrt[12]{\frac{25^4}{2^3}}$

d) $\sqrt[15]{\frac{10^5}{3^3}}$

Exercício 15:

a) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{\sqrt{18}}{9}$

c) $\frac{\sqrt{7}}{70}$

d) $\sqrt[5]{125}$

e) $\frac{-\sqrt{3}+5}{22}$

f) $\frac{4\sqrt{2}+2}{7}$

Monitorias!!



Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

<http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias>

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

<http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA>

O GAMA possui monitorias de:

- Matemática Elementar, Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e equivalentes)
 - ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
 - Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3 (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.



Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino



Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Apoio ao Cálculo

Aula 04

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em
Matemática

Fatoração

De maneira geral, **fatorar** uma expressão significa escreve-la como um produto de dois ou mais fatores.

Estudaremos a seguir os casos mais comuns de fatoração de expressões algébricas.

Fatoração por fator comum em evidência

$$mx \pm my = m(x \pm y)$$

Prova da fórmula:

$$m(x + y) = mx + my$$

Exemplo: Fatore as seguintes expressões:

(a) $7x + 7y$

(b) $10m - 25n$

(c) $2m - 4n + 10$

(d) $x^5 + 3x^2$

Solução:

(a) $7x + 7y = 7(x + y)$

(c) $2m - 4n + 10 = 2(m - 2n + 5)$

(b) $10m - 25n = 5(2m - 5n)$

(d) $x^5 + 3x^2 = x^2(x^3 + 3)$

Fatoração

Fatoração por agrupamento

$$mx + my + nx + ny = (m + n)(x + y)$$

Prova da fórmula:

$$(m + n)(x + y) = mx + my + nx + ny$$

Exemplo: Fatore as seguintes expressões:

(a) $xy + 2x + 5y + 10$

(b) $2xy^2 + 4xy - 6y^2 - 12y$

Solução:

(a) $xy + 2x + 5y + 10$

$$= x(y + 2) + 5(y + 2) = (x + 5)(y + 2)$$

(b)

$$2xy^2 + 4xy - 6y^2 - 12y = 2[xy^2 + 2xy - 3y^2 - 6y]$$

$$= 2[x(y^2 + 2y) - 3(y^2 + 2y)]$$

$$= 2(x - 3)(y^2 + 2y) = 2y(x - 3)(y + 2).$$

Produtos notáveis

Primeiro caso de produtos notáveis:

Quadrado da soma de dois termos

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Prova da fórmula:

$$(x + y)^2 = (x + y) \cdot (x + y) = x^2 + \underbrace{xy + yx}_{2xy} + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Diagram illustrating the expansion of $(x + y)^2$ using the distributive property. Red arrows show the multiplication of $(x + y)$ by $(x + y)$. The result is $x^2 + xy + yx + y^2$. The terms xy and yx are grouped together and labeled $2xy$. Red arrows point from the terms in the final expression to their respective parts: x^2 is labeled "quadrado da soma de dois termos", $2xy$ is labeled "quadrado do primeiro" and "mais duas vezes o produto do primeiro pelo segundo", and y^2 is labeled "quadrado do segundo".

Exemplo: Fatore as seguintes expressões:

(a) $x^2 + 4x + 4$

(b) $x^2 + 6xy + 9y^2$

(c) $4m^2 + 28m + 49$

Solução:

(a) $x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2x(2) + 2^2 = (x + 2)^2.$

(b) $x^2 + 6xy + 9y^2 = x^2 + 2x(3y) + (3y)^2 = (x + 3y)^2.$

(c) $4m^2 + 28m + 49 = (2m)^2 + 2(2m)(7) + (7)^2 = (2m + 7)^2.$

Produtos notáveis

Segundo caso de produtos notáveis:

Quadrado da diferença de dois termos

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Prova da fórmula:

$$(x - y)^2 = (x - y) \cdot (x - y) = x^2 - \underbrace{xy - yx}_{-2xy} + y^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Diagrama de prova da fórmula:

- Red arrows show the expansion of $(x - y) \cdot (x - y)$ into $x^2 - xy - yx + y^2$.
- A red arrow points from $(x - y)^2$ to the text "quadrado da diferença de dois termos".
- A red bracket under $-xy - yx$ is labeled $-2xy$.
- Red arrows point from x^2 , $-2xy$, and y^2 to the following labels:
 - x^2 : quadrado do primeiro
 - $-2xy$: menos duas vezes o produto do primeiro pelo segundo
 - y^2 : quadrado do segundo

Exemplo: Fatore as seguintes expressões:

(a) $x^2 - 6x + 9$

(b) $x^2 - 4xy + 4y^2$

(c) $x^2 - 2x\sqrt{3} + 3$

Solução:

(a) $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2x(3) + 3^2 = (x - 3)^2.$

(b) $x^2 - 4xy + 4y^2 = x^2 - 2x(2y) + (2y)^2 = (x - 2y)^2.$

(c) $x^2 - 2x\sqrt{3} + 3 = x^2 - 2x(\sqrt{3}) + (\sqrt{3})^2 = (x - \sqrt{3})^2.$

Produtos notáveis

Terceiro caso de produtos notáveis:

Diferença de dois quadrados

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

Prova da fórmula:

$$(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - \cancel{xy} + \cancel{yx} - y^2 = x^2 - y^2$$

Produto da soma pela diferença de dois termos

quadrado do primeiro

quadrado do segundo

Exemplo: Fatore as seguintes expressões:

(a) $x^2 - 9$

(b) $4y^2 - 25$

(c) $m^4 - 4$

Solução:

(a) $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$.

(b) $4y^2 - 25 = (2y + 5)(2y - 5)$.

(c) $m^4 - 4 = (m^2 + 2)(m^2 - 2) = (m^2 + 2)(m + \sqrt{2})(m - \sqrt{2})$.

Produtos notáveis

Quarto caso de produtos notáveis:

Diferença de dois cubos

$$x^3 - y^3 = (x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2)$$

Prova da fórmula:

$$(x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2) = x^3 + \cancel{x^2y} + \cancel{xy^2} - \cancel{yx^2} - \cancel{xy^2} - y^3 = x^3 - y^3$$

Exemplo: Fatore as seguintes expressões:

(a) $x^3 - 27$

(b) $8n^3 - 125$

(c) $y^3 - 2$

Solução:

(a) $x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$.

(b) $8n^3 - 125 = (2n - 5)(4n^2 + 10n + 25)$.

(c) $y^3 - 2 = (y - \sqrt[3]{2})(y^2 + y\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$.

Fatoração do trinômio do segundo grau

Um importante caso de fatoração é chamado de fatoração do **trinômio de segundo grau**.

$$ax^2 + bx + c$$

(trinômio pois há três termos na expressão e de segundo grau, pois o maior expoente é dois).

Fatoração do trinômio do segundo grau

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

x_1 e x_2 são as raízes da equação de segundo grau

Lembre que, para encontrar as raízes de uma equação de segundo grau, utiliza-se a **fórmula de Bháskara**.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

fórmula de Bháskara

Fatoração do trinômio do segundo grau

Exemplo: Fatore a expressão $x^2 + 3x - 4$.

Solução: Neste caso, tem-se $a = 1$, $b = 3$ e $c = -4$.

Aplicando a fórmula de Bháskara, tem-se

$$x = \frac{-(3) \pm \sqrt{(3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm 5}{2} \begin{cases} \rightarrow x_1 = \frac{-3 + 5}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ \rightarrow x_2 = \frac{-3 - 5}{2} = \frac{-8}{2} = -4 \end{cases}$$

Obtém-se duas raízes reais e distintas dadas por $x_1 = 1$ e $x_2 = -4$.

Reescrevendo o trinômio dado na forma fatorada, tem-se

$$x^2 + 3x - 4 = \underbrace{1}_a \cdot \underbrace{(x - 1)}_{x - x_1} \underbrace{(x + 4)}_{x - x_2} = (x - 1)(x + 4).$$

Fatoração do trinômio do segundo grau

Exemplo: Fatore a expressão $x^2 - 6x + 9$.

Solução: Neste caso, tem-se $a = 1$, $b = -6$ e $c = 9$.

Aplicando a fórmula de Bháskara, tem-se

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (9)}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm 0}{2} \begin{cases} \rightarrow x_1 = \frac{6 + 0}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \rightarrow x_2 = \frac{6 - 0}{2} = \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

Obtém-se duas raízes e idênticas $x_{1,2} = 3$.

Reescrevendo o trinômio dado na forma fatorada, tem-se

$$x^2 - 6x + 9 = \underbrace{1}_a \cdot \underbrace{(x - 3)}_{x - x_1} \underbrace{(x - 3)}_{x - x_2} = (x - 3)^2$$

Observação: Note que esta fatoração é um caso de trinômio quadrado perfeito.

Fatoração e produtos notáveis

Fator comum em evidência

$$mx + my = m(x + y)$$

Agrupamento

$$mx + my + nx + ny = (m + n)(x + y)$$

Fatoração por produtos notáveis

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Quadrado da soma
de dois termos

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Quadrado da diferença
de dois termos

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

Produto da soma pela diferença
de dois termos

$$x^3 - y^3 = (x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2)$$

Diferença de dois cubos

Fatoração do trinômio do segundo grau

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

x_1 e x_2 são as raízes da equação
de segundo grau

Exercícios Propostos



Exercícios



1) Fatore cada expressão algébrica:

(a) $xy - x$

(b) $25xy - 5xy^2 + 15x^2y^2$

(c) $4y^6 + 4y^5 + y + 1$

(d) $2a^3 + 6ax - 3a^2b - 9bx$

(e) $3x^2y^2 - 12xy + 12$

(f) $y^4 - 6mxy^2 + 9m^2x^2$

(g) $9a^2x^2 - 6ab^3x + b^6$

(h) $100 - x^2y^2$

(i) $ax^2 - ay^2$

(j) $25x^3 - 16x$

(k) $x^2 - x - 12$

(l) $2x^2 - 6x + 4$

Exercícios

2) Fatore cada expressão algébrica:

(a) $4x - 3xy$

(b) $xy + y^2 - y$

(c) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y$

(d) $x^2 - 81$

(e) $100 - x^2$

(f) $x^2 - \frac{4}{25}$

(g) $1 - x^2y^2$

(h) $x^{10} - 100$

(i) $4x^2 - 12xy + 9y^2$

(j) $y^2 + 10y + 25$

(k) $121x^2y^2 + 44xy + 4$

(l) $a^4 - b^4$

Respostas



Exercício 1:

a) $x(y - 1)$

b) $5xy(5 - y + 3xy)$

c) $(y + 1)(4y^5 + 1)$

d) $(a^2 + 3x)(2a - 3b)$

e) $3(xy - 2)^2$

f) $(y^2 - 3mx)^2$

g) $(3ax - b^3)^2$

h) $(10 - xy)(10 + xy)$

i) $a(x - y)(x + y)$

j) $x(5x - 4)(5x + 4)$

k) $(x + 3)(x - 4)$

l) $2(x - 1)(x - 2)$

Exercício 2:

a) $x(4 - 3y)$

b) $y(x + y - 1)$

c) $\frac{1}{3}(x + \frac{1}{2}y)$

d) $(x + 9)(x - 9)$

e) $(10 + x)(10 - x)$

f) $(x + \frac{2}{5})(x - \frac{2}{5})$

g) $(1 + xy)(1 - xy)$

h) $(x^5 + 10)(x^5 - 10)$

i) $(2x - 3y)^2$

j) $(y + 5)^2$

k) $(11xy + 2)^2$

l) $(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$

Monitorias!!



Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

<http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias>

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

<http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA>

O GAMA possui monitorias de:

- Matemática Elementar, Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e equivalentes)
 - ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
 - Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3 (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.



Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino



Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Apoio ao Cálculo

Aula 05

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em
Matemática

Expressões algébricas

Definição: Chama-se **expressão algébrica** toda expressão na qual estão presentes letras ou símbolos que denotam grandezas genéricas ou desconhecidas, que são chamadas de incógnitas ou variáveis.

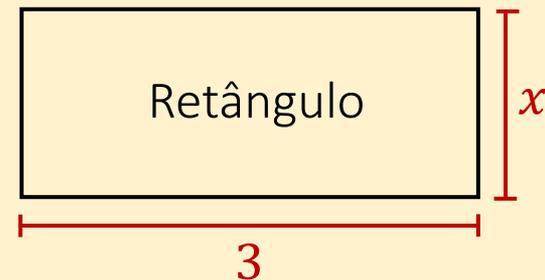
Exemplo: Considere um retângulo de base $3 m$ e altura $x m$. Expresse a área e o perímetro desse retângulo.

Solução:

Neste caso, a área e o perímetro do retângulo são expressões algébricas com incógnita x .

$$A = 3 \cdot x$$

$$P = 2x + 6$$



Exemplo: Se V é uma quantia de dinheiro que uma pessoa possui e o custo de um refrigerante é $R\$ 2,00$ e de um pastel é $R\$ 3,00$; escreva uma expressão que calcule o troco que ela receberá ao comprar x refrigerantes e y pastéis.

Solução:

$$T = V - 2x - 3y$$

Neste caso, o valor do troco é uma expressão algébrica com incógnitas V , x e y .

Valor numérico

Definição: O **valor numérico** de uma expressão algébrica é obtido quando se substitui a incógnita por um número em particular.

Exemplo: Considere a expressão algébrica:

$$y = \frac{2m - n}{n + 2}.$$

Calcule o valor numérico desta expressão para

$$m = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad n = -\frac{2}{5}.$$

Solução: Substituindo os valores atribuídos a m e n na expressão algébrica, obtém-se:

$$y = \frac{2m - n}{n + 2} = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{2}{5}\right)}{\left(-\frac{2}{5}\right) + 2} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{2}{5}}{\frac{-2 + 10}{5}} = \frac{\frac{10 + 6}{15}}{\frac{8}{5}} = \frac{16}{15} \cdot \frac{5}{8} = \frac{2}{3}.$$

Simplificação de frações algébricas

Um caso particularmente interessante de expressões algébricas são as frações algébricas.

Exemplo: São exemplos de frações algébricas:

(a) $\frac{y}{x}$

(b) $\frac{2}{xy}$

(c) $\frac{3x^2y^3}{z^3wt^5}$

(d) $\frac{x+y}{1+z}$

(e) $\frac{x^2 + 3xy - 5}{2z - 3}$

As **simplificações de frações algébricas** são efetuadas de forma similar às efetuadas com frações numéricas, ou seja, podem ser simplificados somente os fatores comuns ao numerador e ao denominador da fração.

Exemplo: Simplifique a expressão:

$$\frac{15xy^3w^2}{20x^4y}$$

Solução:

$$\frac{15xy^3w^2}{20x^4y} = \frac{3y^2w^2}{4x^3}$$

Simplificação de frações algébricas

Em alguns casos pode ser extremamente útil utilizar fatoração e produtos notáveis para simplificar uma fração algébrica.

Exemplo: Simplifique as expressões:

$$(a) \frac{x^2 - y^2}{4x + 4y}$$

$$(b) \frac{m^2 - 2mn + n^2}{m^2 - n^2}$$

$$(c) \frac{x^3y - 2x^2y^2}{x^2 - 4xy + 4y^2}$$

Solução:

$$(a) \frac{x^2 - y^2}{4x + 4y} = \frac{(x + y)(x - y)}{4(x + y)} = \frac{x - y}{4}.$$

$$(b) \frac{m^2 - 2mn + n^2}{m^2 - n^2} = \frac{(m - n)(m - n)}{(m - n)(m + n)} = \frac{m - n}{m + n}.$$

$$(c) \frac{x^3y - 2x^2y^2}{x^2 - 4xy + 4y^2} = \frac{x^2y(x - 2y)}{(x - 2y)(x - 2y)} = \frac{x^2y}{x - 2y}.$$

Multiplicação/divisão de frações algébricas

Assim como foi definida a multiplicação/divisão/potências de números racionais, efetua-se a **multiplicação/divisão/potências de frações algébricas**.

Exemplo. Calcule:

$$(a) \frac{3x}{x+1} \cdot \frac{x-2}{3x+1}$$

$$(b) \frac{3-x}{x^2+x} \div \frac{2x^2}{x+1}$$

$$(c) \left(\frac{x+2}{2y} \right)^{-2}$$

Solução:

(a)

$$\frac{3x}{x+1} \cdot \frac{x-2}{3x+1} = \frac{3x(x-2)}{(x+1)(3x+1)} = \frac{3x^2 - 6x}{3x^2 + x + 3x + 1} = \frac{3x^2 - 6x}{3x^2 + 4x + 1}$$

(b)

$$\frac{3-x}{x^2+x} \div \frac{2x^2}{x+1} = \frac{3-x}{x^2+x} \cdot \frac{x+1}{2x^2} = \frac{3-x}{x(x+1)} \cdot \frac{x+1}{2x^2} = \frac{3-x}{2x^3}$$

(c)

$$\left(\frac{x+2}{2y} \right)^{-2} = \left(\frac{2y}{x+2} \right)^2 = \frac{(2y)^2}{(x+2)^2} = \frac{4y^2}{x^2 + 4x + 4}$$

Soma/subtração de frações algébricas

Assim como foi definida a soma/subtração de frações, efetua-se a **soma/subtração de frações algébricas**. Observe que o método para encontrar o *mmc* dos denominadores é bastante similar ao utilizado para números racionais.

Exemplo: Calcule:

$$(a) \frac{2x - 3}{x} - \frac{2}{3x}$$

$$(b) \frac{x + 2}{2x} - \frac{x - 1}{3x^2} + \frac{2x - 1}{6x}$$

Solução: (a) Como $mmc(x, 3x) = 3x$, tem-se

$$\frac{2x - 3}{x} - \frac{2}{3x} = \frac{3(2x - 3) - 2}{3x} = \frac{6x - 9 - 2}{3x} = \frac{6x - 11}{3x}.$$

(b) Como $mmc(2x, 3x^2, 6x) = 6x^2$, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{x + 2}{2x} - \frac{x - 1}{3x^2} + \frac{2x - 1}{6x} &= \frac{3x(x + 2) - 2(x - 1) + x(2x - 1)}{6x^2} \\ &= \frac{3x^2 + 6x - 2x + 2 + 2x^2 - x}{6x^2} = \frac{5x^2 + 3x + 2}{6x^2}. \end{aligned}$$

Soma/subtração de frações algébricas

Exemplo. Calcule:

$$(a) \frac{x+2}{2x} + \frac{3}{x-1}$$

$$(b) \frac{x+1}{x^2-4} - \frac{2}{x-2} - \frac{5x-1}{3x}$$

Solução:

(a) Como $mmc(2x, x-1) = 2x(x-1)$, tem-se

$$\frac{x+2}{2x} + \frac{3}{x-1} = \frac{(x+2)(x-1) + 3(2x)}{2x(x-1)} = \frac{x^2 + x - 2 + 6x}{2x^2 - 2x} = \frac{x^2 + 7x - 2}{2x^2 - 2x}$$

(b) Como $mmc(x^2-4, x-2, 3x) = 3x(x^2-4)$, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x^2-4} - \frac{2}{x-2} - \frac{5x-1}{3x} &= \frac{3x(x+1) - 2(3x)(x+2) - (5x-1)(x^2-4)}{3x(x^2-4)} \\ &= \frac{3x^2 + 3x - 6x^2 - 12x - 5x^3 + 20x + x^2 - 4}{3x(x^2-4)} = \frac{-5x^3 - 2x^2 + 11x - 4}{3x^3 - 12x} \end{aligned}$$

Exercícios Propostos



Exercícios

1) Considere um pedaço de cartolina retangular de lados x *cm* e y *cm*.

Deseja-se montar uma caixa, em forma de paralelepípedo retângulo, sem a tampa de cima com esta cartolina.

Para isto, de cada ponta do retângulo vai-se tirar um quadrado de lado 2 *cm* (estamos então considerando $x > 4$ e $y > 4$).

Com estas informações, monte a expressão que informa o volume dessa caixa.

2) Em cada caso, calcule o valor numérico:

(a) $M = 3xy - y$, para $x = -\frac{1}{2}$ e $y = -\frac{2}{5}$

(b) $M = \frac{x+2y}{y-x}$, para $x = \frac{2}{3}$ e $y = -\frac{1}{7}$

Exercícios



3) Simplifique cada fração algébrica:

$$(a) \frac{20x^3y^2z^4}{15x^6y^6z}$$

$$(d) \frac{xy + y + 5x + 5}{3y + 15}$$

$$(b) \frac{x - 5}{x^2 - 25}$$

$$(e) \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2}$$

$$(c) \frac{x^2 - y^2}{xy + y^2}$$

$$(f) \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$$

4) Efetue as operações seguintes e simplifique:

$$(a) \left(\frac{-4m^2n^5p}{3r^2t^7} \right)^2$$

$$(c) \frac{x + y}{7x - 7y} \div \frac{x^2 + xy}{7x}$$

$$(b) \frac{x + 3}{x - 4} \cdot \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 9}$$

$$(d) \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right) \div \left(\frac{x}{y} + 1 \right)$$

Exercícios

5) Efetue as operações seguintes e simplifique:

$$(a) \frac{4x^2 - 7xy}{3x^2} + \frac{8y^2 - 3x}{6x} - \frac{5}{12}$$

$$(b) \frac{5}{2x + 2} - \frac{7}{3x - 3} + \frac{1}{6x - 6}$$

$$(c) \frac{x + 1}{2x - 2} - \frac{x - 1}{2x + 2} + \frac{4x}{x^2 - 1}$$

$$(d) \frac{4t^2}{t^2 - s^2} - \frac{t - s}{t + s} + \frac{t + s}{t - s}$$

6) Simplifique a seguinte expressão:

$$\frac{\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2}}$$

Exercícios



7) Peça a um amigo para pensar em um número, multiplicá-lo por 3, somar 6, multiplicar por 4 e dividir por 12, dizendo para você o resultado final. Você pode então “adivinhar” qual o número em que seu amigo pensou. Parece mágica, não é? Como isto é possível?

8) Determine o valor da expressão $a^{-3} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot c^{-1}$, quando $a = -1$, $b = -8$ e $c = \frac{1}{4}$

9) Calcule o valor numérico de cada expressão abaixo:

(a) $M = x^2y - y^2$, para $x = 2$ e $y = -1$

(b) $M = \frac{(x+y)^{-1}}{x^{-1}+y^{-1}}$, para $x = -\frac{2}{5}$ e $y = 5$

Exercícios



10) Simplifique cada fração algébrica:

$$(a) \frac{a - 2x}{2bx - ab}$$

$$(d) \frac{x^4 - 1}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

$$(b) \frac{x^2 - 4xy + 4y^2}{x^2 - 4y^2}$$

$$(e) \frac{x^2 - x - 6}{2x^2 + 4x}$$

$$(c) \frac{x^2 - y^2}{x^2 - 2xy + y^2}$$

$$(f) \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 2x + 1}$$

Exercícios

11) Efetue as operações seguintes e simplifique:

$$(a) \frac{x^4 - 256}{x^2 + xy + 4x + 4y} \cdot \frac{x^2 - y^2}{2x - 8}$$

$$(b) \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x - y} \div \frac{x + y}{x^2 - 2xy + y^2}$$

$$(c) \left(1 + \frac{x - a}{x + a}\right) \div \left(1 - \frac{x - a}{x + a}\right)$$

$$(d) \frac{m^2 - 36}{x^2 y^2} \div \frac{2m + 12}{xy^2}$$

$$(e) \left(\frac{3x^{\frac{3}{2}}y^3}{x^2y^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-2}$$

$$(f) \frac{2}{a + b} \div \frac{4}{ax + bx}$$

Exercícios

12) Calcule o valor numérico de cada expressão abaixo:

(a) $M = \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x}}$, para $x = 4$

(b) $M = x^2 - 2xy + y^2$, para $x = -1$ e $y = \frac{1}{4}$

(c) $M = \sqrt{\frac{a^2 + ax}{y}}$, para $\alpha = 8$, $x = 10$ e $y = 9$

(d) $M = \frac{y + \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{y}}$, para $x = 10$ e $y = 5$

13) Simplifique cada fração algébrica

(a) $\frac{ac - c}{c^2 - c}$

(b) $\frac{3x + 3y}{3 - 3a}$

(c) $\frac{a^2 - b^2}{a^3 - a^2b}$

(d) $\frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 16}$

Exercícios



14) Efetue as operações seguintes e simplifique:

$$(a) \frac{x+y}{y} - \frac{y}{x+y} - \frac{2x}{x+y}$$

$$(b) \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{2x}{x^2-1}$$

$$(c) \frac{x}{a+1} \div \frac{x^4}{a^2-1}$$

$$(d) \frac{a^2-1}{x^2-y^2} \div \frac{a^2-2a+1}{3x+3y}$$

$$(e) \frac{m^2-36}{x^2y^2} \div \frac{2m+12}{xy^2}$$

$$(f) \frac{3a^4}{x^7+x^6} \div \frac{9a^4}{2x+2}$$

Respostas



Exercício 1:

$$V = 2 \cdot (x - 4) \cdot (y - 4)$$

Exercício 2:

a) $M = 1$

b) $M = -\frac{8}{17}$

Exercício 3:

a) $\frac{4z^3}{3x^3y^4}$ e) $\frac{x+y}{x-y}$

b) $\frac{1}{x+5}$ f) $\frac{x-2}{x+3}$

c) $\frac{x-y}{y}$

d) $\frac{x+1}{3}$

Exercício 4:

a) $\frac{16m^4n^{10}p^2}{9r^4t^{14}}$

b) $\frac{(x-4)}{(x-3)}$

c) $\frac{1}{x-y}$

d) $1 - \frac{y}{x}$

Exercício 5:

a) $\frac{5x - 28y + 16y^2}{12x}$

b) $\frac{x-14}{3(x-1)(x+1)}$

c) $\frac{6x}{(x-1)(x+1)}$

d) $\frac{4t}{t-s}$

Exercício 6:

$$\frac{(x-y)(x^2+y^2)}{x+y}$$

Exercício 7:

O resultado é $y = x + 2$,
então o número pensado é $x =$
 $y - 2$, pois $y = \frac{(3x+6) \cdot 4}{12}$

Exercício 8:

8

Exercício 9:

a) $M = -5$

b) $M = -\frac{50}{23^2}$

Respostas



Exercício 10:

- a) $-\frac{1}{b}$
- b) $\frac{x-2y}{x+2y}$
- c) $\frac{x+y}{x-y}$
- d) $\frac{x^2-1}{x^2+1}$
- e) $\frac{x-3}{2x}$
- f) $\frac{x+5}{x-1}$

Exercício 11:

- a) $\frac{(x^2+16)(x-y)}{2}$
- b) $(x-y)(x+y)$
- c) $\frac{x}{a}$
- d) $\frac{m-6}{2x}$
- e) $\frac{x}{9y^7}$
- f) $\frac{x}{2}$

Exercício 12:

- a) 4
- b) $\frac{25}{16}$
- c) 4
- d) $\frac{1}{2}$

Exercício 13:

- a) $\frac{a-1}{c-1}$
- b) $\frac{x+y}{1-a}$
- c) $\frac{a+b}{a^2}$
- d) $\frac{x-4}{x+4}$

Exercício 14:

- a) $\frac{x^2}{y(x+y)}$
- b) $\frac{2}{x+1}$
- c) $\frac{a-1}{x^3}$
- d) $\frac{3(a+1)}{(x-y)(a-1)}$
- e) $\frac{m-6}{2x}$
- f) $\frac{2}{3x^6}$

Monitorias!!



Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

<http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias>

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

<http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA>

O GAMA possui monitorias de:

- Matemática Elementar, Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e equivalentes)
 - ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
 - Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3 (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.



Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino



Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Apoio ao Cálculo

Aula 06

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em
Matemática

Polinômios

Definição: Chama-se um polinômio de grau n na variável x a expressão $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, onde a_1, a_2, \dots, a_n são os coeficientes do polinômio com $a_n \neq 0$.

Exemplos:

$$p(x) = 3x^3 - 5x + 1 \quad \text{polinômio de grau três, ou de terceiro grau.}$$

$$q(x) = -x^5 + 2x^2 \quad \text{polinômio de grau cinco, ou de quinto grau.}$$

$$v(x) = 8 \quad \text{polinômio de grau zero.}$$

Operações com polinômios

Para **somar dois polinômios** somam-se os coeficientes dos termos de mesmo grau.

O mesmo é feito ao efetuar a **diferença de dois polinômios**.

Exemplo: Dados os polinômios

$$p(x) = 3x^4 - x^3 - 5x + 1 \text{ e } q(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 7$$

Calcule:

(a) a soma $p(x) + q(x)$

(b) a diferença $p(x) - q(x)$

Solução:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad p(x) + q(x) &= (3x^4 - x^3 - 5x + 1) + (2x^3 - x^2 + 3x - 7) \\ &= 3x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad p(x) - q(x) &= (3x^4 - x^3 - 5x + 1) - (2x^3 - x^2 + 3x - 7) \\ &= (3x^4 - x^3 - 5x + 1) - 2x^3 + x^2 - 3x + 7 \\ &= 3x^4 - x^3 - 2x^3 + x^2 - 5x - 3x + 1 + 7 \\ &= 3x^4 - 3x^3 + x^2 - 8x + 8. \end{aligned}$$

Operações com polinômios

Já para efetuar o **produto de polinômios** usamos propriedades distributivas, regras de sinais e propriedades de potência dos expoentes de x .

Exemplo: Calcule:

(a) $x \cdot (x - 1)$ (b) $(x + 1) \cdot (2x - x^2)$ (c) $(x^2 - 3x + 1) \cdot (x^2 - x)$

Solução:

(a)

$$x \cdot (x - 1) = x^2 - x.$$

(b)

$$(x + 1) \cdot (2x - x^2) = 2x^2 - x^3 + 2x - x^2 = -x^3 + x^2 + 2x.$$

(c)

$$\begin{aligned} (x^2 - 3x + 1) \cdot (x^2 - x) &= x^4 - x^3 - 3x^3 + 3x^2 + x^2 - x \\ &= x^4 - 4x^3 + 4x^2 - x. \end{aligned}$$

Operações com polinômios

Para efetuar a **divisão de polinômios** precisamos recorrer a um procedimento de divisão muito semelhante ao algoritmo para divisão de números inteiros, como no exemplo a seguir.

Exemplo: Em cada caso, efetue a divisão dos polinômios

(a) $(x^2 - 5x + 6) \div (x - 2)$

(b) $(x^4 - x^2 + 1) \div (x^2 - 2x + 3)$

Solução:

(a)

Dividendo	Divisor
$x^2 - 5x + 6$	$x - 2$
$-x^2 + 2x$	$x - 3$
$-3x + 6$	Quociente
$3x - 6$	
0	
Resto	

Portanto

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

(b)

Dividendo	Divisor
$x^4 + 0x^3 - x^2 + 0x + 1$	$x^2 - 2x + 3$
$-x^4 + 2x^3 - 3x^2$	$x^2 + 2x$
$2x^3 - 4x^2 + 0x + 1$	Quociente
$-2x^3 + 4x^2 - 6x$	
$-6x + 1$	
Resto	

Portanto

$$(x^4 - x^2 + 1) = (x^2 - 2x + 3)(x^2 + 2x) - 6x + 1$$

Dispositivo Prático de Briot- Ruffini

Exemplo: Efetue $(2x^3 + 3x^2 - 3x + 5) \div (x - 1)$.

Solução:

Passo 01

1	2	3	-3	5
a	a_3	a_2	a_1	a_0

Soma

Passo 02

1	2	3	-3	5
	2	5		

desce resultado

Passo 03

1	2	3	-3	5
	2	5	2	

resultado

Passo 04

1	2	3	-3	5
	2	5	2	7

resultado

Passo 05

1	2	3	-3	5
	2	5	2	7

$2x^2 + 5x + 2$ resto

quociente

Observação: O número de “passos” dependerá do grau do polinômio.

Dispositivo Prático de Briot- Ruffini

Exemplo: Efetue $(x^4 + 3x^3 - 2x - 6) \div (x + 3)$.

Solução:

Passo 01

-3	1	3	0	-2	-6
	↓	↓	↓	↓	↓
a	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0

Passo 02

Soma

-3	1	3	0	-2	-6
	↓	↓	↓	↓	↓
multiplica	1	0	↓	↓	↓
	desce	resultado			

Passo 03

Soma

-3	1	3	0	-2	-6
	↓	↓	↓	↓	↓
multiplica	1	0	↓	↓	↓
			resultado		

Passo 04

Soma

-3	1	3	0	-2	-6
	↓	↓	↓	↓	↓
multiplica	1	0	0	-2	↓
				resultado	

Passo 05

Soma

-3	1	3	0	-2	-6
	↓	↓	↓	↓	↓
multiplica	1	0	0	-2	↓
				resultado	↓

Passo 06

-3	1	3	0	-2	-6
	1	0	0	-2	0
	$x^3 - 2$ quociente				resto

Exercícios Propostos



Exercícios



1) Efetue as seguintes operações com polinômios:

(a) $(x^3 - 3x^2 + 1) + (1 - 3x^2 - x^3)$

(b) $(2x^3 - 7x + 3) - (4x^3 - x^2 - 3x)$

(c) $(3x^2 - 4x + 2) \cdot (x^3 - 2x)$

(d) $(-2x^3 - 3x^2 + 4x + 1) \div (x^2 + 1)$

(e) $(2x^5 - x^4 - 14x^3 + 9x^2 - 4x + 1) \div (2x^3 + 5x^2 - x + 1)$

(f) $(x^2 - x - 12) \div (x - 4)$

(g) $(2x^5 - 3x^3 + 4x - 3) \div (x - 1)$

(h) $(2x^4 - 3x^3 - 3) \div (x + 1)$

Exercícios

2) Efetue as seguintes operações com polinômios:

(a) $(4x^5 - 3x^3 - x^2) + (7x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 2)$

(b) $(1 - x) - (x^3 - 4x^5 - x + 2)$

(c) $(x^2 - 4x + 1) \cdot (3x^2 - x - 1)$

(d) $(3x^5 + 2x^4 + x^2 - 5) \div (-x^2 + x - 1)$

(e) $(x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x - 3) \div (2x^2 + x + 1)$

(f) $(x^2 - x - 6) \div (x + 2)$

(g) $(x^5 + 1) \div (x + 1)$

(h) $(x^5 - 4x^4 - 2x^2 - 3x + 2) \div (x - 4)$

Respostas



Exercício 1:

a) $-6x^2 + 2$

b) $-2x^3 + x^2 - 4x + 3$

c) $3x^5 - 4x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 4x$

d) $-2x - 3$ e resto $6x + 4$

e) $x^2 - 3x + 1$

f) $x + 3$

g) $2x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 3$

h) $2x^3 - 5x^2 + 5x - 5$ e resto 2

Exercício 2:

a) $4x^5 + 7x^4 - 5x^3 + x^2 - x + 2$

b) $4x^5 - x^3 - 1$

c) $3x^4 - 13x^3 + 6x^2 + 3x - 1$

d) $-3x^3 - 5x^2 - 2x + 2$ e resto $-4x - 3$

e) $\frac{x^2}{2} - \frac{9x}{4} + \frac{15}{8}$ e resto $-\frac{5x + 39}{8}$

f) $x - 3$

g) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

h) $x^4 - 2x - 11$ e resto -42

Monitorias!!



Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

<http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias>

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

<http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA>

O GAMA possui monitorias de:

- Matemática Elementar, Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e equivalentes)
 - ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
 - Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3 (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.



Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino



Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Apoio ao Cálculo

Aula 07

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em
Matemática

Inequações

Uma sentença matemática que envolve incógnitas e desigualdades é chamada de **inequação**. Neste curso, estudaremos inequações do primeiro e do segundo grau com uma variável.

Inequações do primeiro grau

Definição: Uma inequação do primeiro grau ou inequação linear em x pode ser escrita em uma das seguintes formas:

$$ax + b < 0$$

$$ax + b \leq 0$$

$$ax + b > 0$$

$$ax + b \geq 0$$

Observação: $y = ax + b$ é a função do primeiro grau associada à inequação.

Resolver uma inequação em x significa encontrar todos os valores de x para os quais a inequação é verdadeira.

O conjunto formado por todos esses valores é denominado **conjunto solução**.

Portanto, resolvemos uma inequação determinando o seu conjunto solução.

Inequações do primeiro grau

Exemplo: Resolva: $3(x - 1) + 2 \leq 5x + 6$

Solução:

$$3(x - 1) + 2 \leq 5x + 6$$

$$3x - 3 + 2 \leq 5x + 6$$

$$3x - 1 \leq 5x + 6$$

$$3x - 5x \leq 6 + 1$$

$$-2x \leq 7$$

$$2x \geq -7$$

$$x \geq -\frac{7}{2}$$

Portanto, o conjunto solução é:

$$S = \left[-\frac{7}{2}, +\infty \right[$$

Inequações do primeiro grau

Exemplo: Resolva: $\frac{x}{3} + \frac{1}{2} > \frac{x}{4} + \frac{1}{3}$

Solução:

$$\frac{x}{3} + \frac{1}{2} > \frac{x}{4} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{4x}{12} + \frac{6}{12} > \frac{3x}{12} + \frac{4}{12}$$

$$4x + 6 > 3x + 4$$

$$4x - 3x > -6 + 4$$

$$x > -2$$

Portanto, o conjunto solução é: $S =]-2, +\infty[$

Inequações duplas

As vezes duas inequações são combinadas em uma inequação dupla, que podem ser resolvidas simultaneamente ou separando-se as duas inequações envolvidas. Os exemplos a seguir ilustram esses casos.

Inequações duplas

Exemplo: Resolva: $-3 < \frac{2x + 5}{3} \leq 5$

Solução:

$$-3 < \frac{2x + 5}{3} \leq 5$$

$$-9 < 2x + 5 \leq 15$$

$$-9 - 5 < 2x \leq 15 - 5$$

$$-14 < 2x \leq 10$$

$$-7 < x \leq 5$$

Portanto, o conjunto solução é: $S =]-7,5]$

Inequações duplas

Exemplo: Resolva: $2 \leq 4x + 1 < 2x + 5$

Neste caso, a solução simultânea das duas inequações não é aconselhável, pois o membro direito da inequação envolve termos também na variável x e assim as operações não podem ser aplicadas simultaneamente a todos os membros.

Calcularemos então separadamente a solução de cada inequação, tomando como solução geral da inequação dupla a interseção dos conjuntos, pois desejamos valores de x que satisfaçam as duas inequações.

Inequações duplas

Exemplo: Resolva: $2 \leq 4x + 1 < 2x + 5$

Solução:

$$2 \leq 4x + 1$$

$$2 - 1 \leq 4x$$

$$1 \leq 4x$$

$$\frac{1}{4} \leq x$$

$$x \geq \frac{1}{4}$$

$$S_1 = \left[\frac{1}{4}, +\infty \right[$$

$$4x + 1 < 2x + 5$$

$$4x - 2x < -1 + 5$$

$$2x < 4$$

$$x < \frac{4}{2}$$

$$x < 2$$

$$S_2 =]-\infty, 2[$$

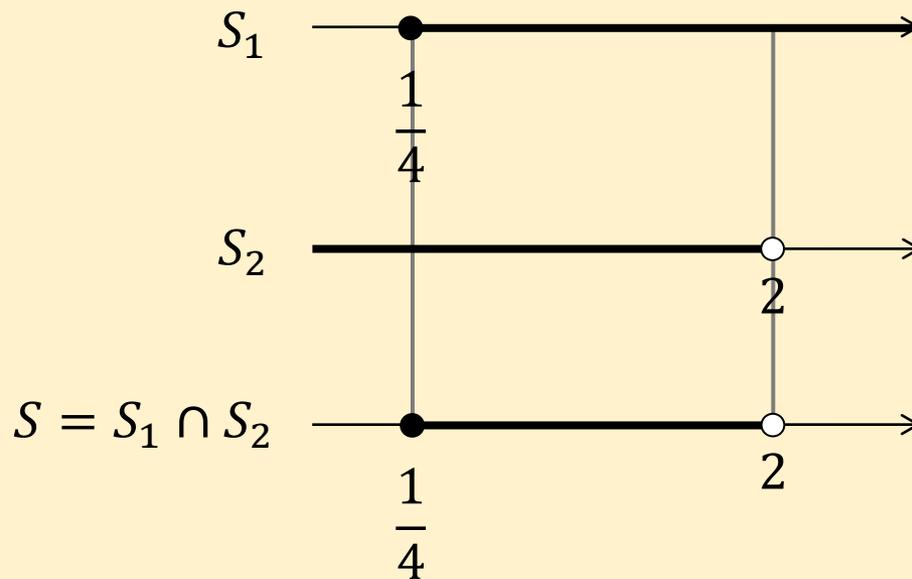
Inequações duplas

Exemplo: Resolva: $2 \leq 4x + 1 < 2x + 5$

Solução:

$$S_1 = \left[\frac{1}{4}, +\infty \right[$$

$$S_2 =]-\infty, 2[$$



Portanto, o conjunto solução é:

$$S = \left[\frac{1}{4}, 2 \right[$$

Inequações modulares

Inequações que envolvem o **valor absoluto** ou **módulo** de um número são também inequações duplas, pois por definição:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{se } x < 0 \\ x, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Assim, ao trabalharmos com uma inequação $|ax + b| \leq c$, queremos determinar todos os valores possíveis de x para os quais

$$-c \leq ax + b \leq c$$

Observação: O mesmo raciocínio continua válido se trocarmos “ \leq ” por “ $<$ ”.

Inequações modulares

Inequações que envolvem o **valor absoluto** ou **módulo** de um número são também inequações duplas, pois por definição:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{se } x < 0 \\ x, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Se buscamos a solução de uma inequação $|ax + b| \geq c$, então queremos determinar todos os valores possíveis de x para os quais

$$ax + b \geq c \quad \text{ou} \quad -(ax + b) \geq c$$

Observação: O mesmo raciocínio continua válido se trocarmos “ \geq ” por “ $>$ ”.

Inequações modulares

Exemplo: Resolva: $|x - 1| \leq 4$

Solução:

$$|x - 1| \leq 4 \Rightarrow -4 \leq x - 1 \leq 4$$

$$\Rightarrow -4 + 1 \leq x \leq 4 + 1$$

$$\Rightarrow -3 \leq x \leq 5$$

Portanto, o conjunto solução é: $S = [-3, 5]$

Inequações modulares

Exemplo: Resolva: $|2x + 3| > 1$

Neste caso não poderemos resolver simultaneamente as inequações, pois resolver $|2x + 3| > 1$ significa determinar todos os valores possíveis de x para os quais

$$2x + 3 > 1 \quad \text{ou} \quad -(2x + 3) > 1$$

Resolvemos então separadamente cada inequação e o conjunto solução será formado pela união dos dois resultados.

Inequações modulares

Exemplo: Resolva: $|2x + 3| > 1$

Solução:

$$2x + 3 > 1$$

$$2x > 1 - 3$$

$$2x > -2$$

$$x > \frac{-2}{2}$$

$$x > -1$$

$$S_1 =]-1, +\infty[$$

$$-(2x + 3) > 1$$

$$2x + 3 < -1$$

$$2x < -1 - 3$$

$$2x < -4$$

$$x < \frac{-4}{2}$$

$$x < -2$$

$$S_2 =]-\infty, -2[$$

Inequações modulares

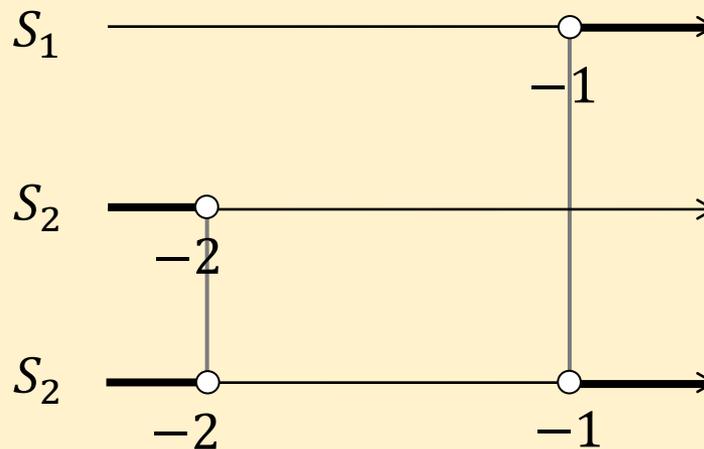
Exemplo: Resolva: $|2x + 3| > 1$

Solução:

$$S_1 =]-1, +\infty[$$

$$S_2 =]-\infty, -2[$$

$$S = S_1 \cup S_2$$



Portanto, o conjunto solução é:

$$S =]-\infty, -2[\cup]-1, +\infty[$$

Inequações produto e inequações quociente

Nos próximos exemplos abordaremos inequações que envolvem produtos ou quocientes, cujos fatores são expressões do primeiro grau da forma $ax + b$ (cuja representação gráfica é uma reta).

Utilizaremos funções do primeiro grau para resolver estes tipos de inequações.

Inequações produto e inequações quociente

O procedimento que vamos utilizar para resolver inequações produto ou inequações quociente, consiste nos seguintes passos:

1º Passo: Considerar cada fator da inequação como uma função do primeiro grau $y = ax + b$;

2º Passo: Determinar a raiz da função, ou seja, o valor de x onde a função se anula, que é o valor onde a reta intercepta o eixo x ;

3º Passo: Verificar se o gráfico da função é uma reta crescente ($a > 0$) ou decrescente ($a < 0$);

4º Passo: Fazer o estudo do sinal da função, determinando assim os intervalos onde a função é positiva e onde é negativa;

5º Passo: Montar um quadro, colocando os valores das raízes de cada função e o seu respectivo sinal em cada intervalo, para estudar o sinal do produto ou do quociente das duas funções e chegar à solução da inequação.

Inequações produto e inequações quociente

Exemplo: Resolva: $(4 - x)(2x - 3) > 0$

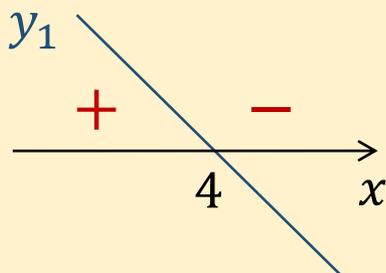
Solução:

$$y_1 = 4 - x$$

$$0 = 4 - x$$

$$x = 4 \text{ (raiz)}$$

y_1 é decrescente
pois $a = -1 < 0$

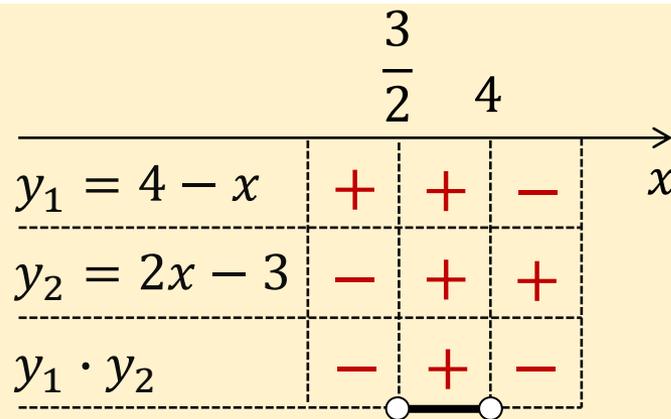
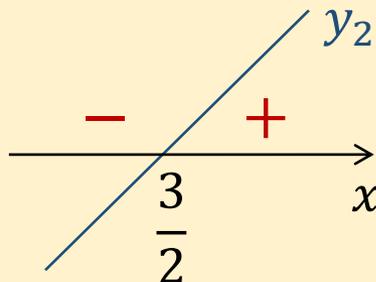


$$y_2 = 2x - 3$$

$$0 = 2x - 3$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ (raiz)}$$

y_2 é crescente
pois $a = 2 > 0$



Portanto, o conjunto
solução é:

$$S = \left] \frac{3}{2}, 4 \right[$$

Inequações produto e inequações quociente

Exemplo: Resolva: $\frac{5x - 3}{4 - 5x} \leq 0$

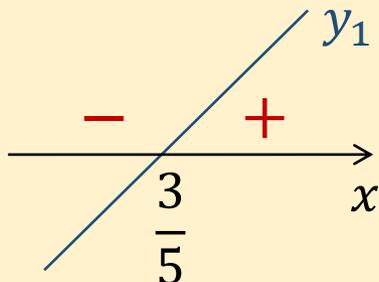
Solução:

$$y_1 = 5x - 3$$

$$0 = 5x - 3$$

$$x = \frac{3}{5} \quad (\text{raiz})$$

y_1 é crescente pois
 $a = 5 > 0$

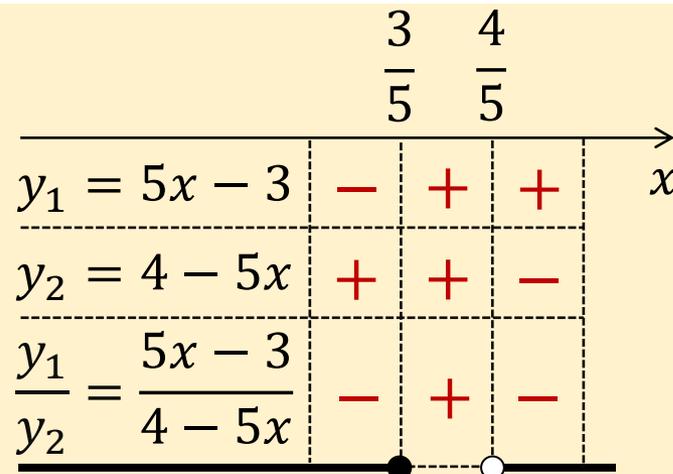
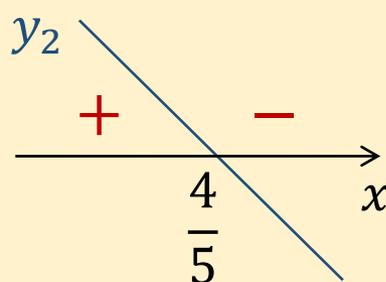


$$y_2 = 4 - 5x$$

$$0 = 4 - 5x$$

$$x = \frac{4}{5} \quad (\text{raiz})$$

y_2 é decrescente pois
 $a = -5 < 0$



Note que $\frac{4}{5} \notin S$ pois zera o denominador da fração $\frac{5x - 3}{4 - 5x}$.

Inequações produto e inequações quociente

Exemplo: Resolva: $\frac{5x - 3}{4 - 5x} \leq 0$

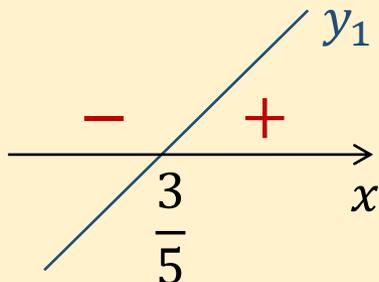
Solução:

$$y_1 = 5x - 3$$

$$0 = 5x - 3$$

$$x = \frac{3}{5} \quad (\text{raiz})$$

y_1 é crescente pois
 $a = 5 > 0$

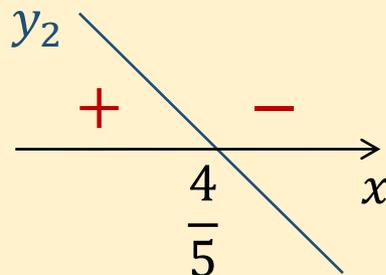


$$y_2 = 4 - 5x$$

$$0 = 4 - 5x$$

$$x = \frac{4}{5} \quad (\text{raiz})$$

y_2 é decrescente pois
 $a = -5 < 0$



	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	
$y_1 = 5x - 3$	-	+	+
$y_2 = 4 - 5x$	+	+	-
$\frac{y_1}{y_2} = \frac{5x - 3}{4 - 5x}$	-	+	-

x

Portanto, o conjunto solução é:

$$S = \left] -\infty, \frac{3}{5} \right] \cup \left] \frac{4}{5}, +\infty \right[$$

Inequações produto e inequações quociente

Exemplo: Resolva: $\frac{x + 3}{1 - x} \leq 3$

Se multiplicarmos ambos os membros por $1 - x$ (que pode ser positivo ou negativo, dependendo do valor de x), não saberemos se o sinal da desigualdade deverá ser mantido ou invertido. Por isso, utilizaremos um outro procedimento.

Solução:

$$\begin{aligned} \frac{x + 3}{1 - x} \leq 3 &\Leftrightarrow \frac{x + 3}{1 - x} - 3 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x + 3 - 3(1 - x)}{1 - x} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x + 3 - 3 + 3x}{1 - x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4x}{1 - x} \leq 0 \end{aligned}$$

Inequações produto e inequações quociente

Exemplo: Resolva:
$$\frac{x + 3}{1 - x} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{4x}{1 - x} \leq 0$$

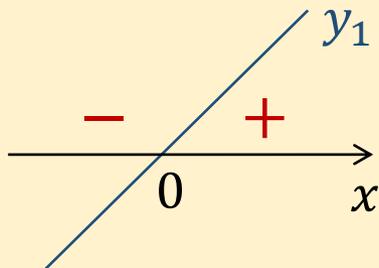
Solução:

$$y_1 = 4x$$

$$0 = 4x$$

$$x = 0 \text{ (raiz)}$$

y_1 é crescente pois
 $a = 4 > 0$

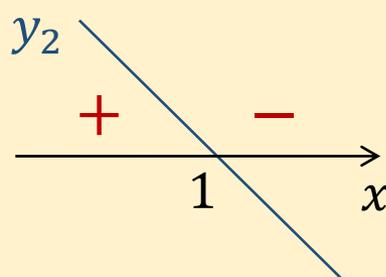


$$y_2 = 1 - x$$

$$0 = 1 - x$$

$$x = 1 \text{ (raiz)}$$

y_2 é decrescente pois
 $a = -1 < 0$



	0	1	
$y_1 = 4x$	-	+	+
$y_2 = 1 - x$	+	+	-
$\frac{y_1}{y_2} = \frac{4x}{1 - x}$	-	+	-

Portanto, o conjunto solução é:

$$S =]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$$

Exercícios Propostos



Exercícios



1) Resolva as inequações abaixo e apresente o conjunto solução em notação de intervalo:

(a) $2x + 5 < 3x - 7$

(h) $|6 - 5x| \leq 3$

(b) $3 \leq \frac{2x - 3}{5} < 7$

(i) $|3x - 7| \geq 5$

(c) $x^2 - x - 6 < 0$

(j) $|-11 - 7x| > 6$

(d) $x^2 - 2x - 5 > 3$

(k) $-5 \leq 3x + 4 < 7$

(e) $x(2x + 3) \geq 5$

(l) $|6x - 7| > 10$

(f) $|x + 3| < 0,01$

(m) $0 < 3x + 1 \leq 4x - 6$

(g) $|2x + 5| < 4$

(n) $|5 - 2x| \geq 7$

Exercícios



1) Resolva as inequações abaixo e apresente o conjunto solução em notação de intervalo:

(o) $-6 < 3x + 3 \leq 3$

(v) $x + 3 < 6x + 10$

(p) $|x - 4| \leq 16$

(w) $|2x - 3| > 4$

(q) $1 < x - 2 < 6 - x$

(x) $2 < 5x + 3 \leq 8x - 12$

(r) $x - 7 \geq -5$ ou $x - 7 \leq -6$

(y) $|2x - 3| \leq 5$

(s) $x < 6x - 10$ ou $x \geq 2x + 5$

(t) $2x - 1 > 1$ ou $x + 3 < 4$

(u) $1 \leq -2x + 1 < 3$

Exercícios



2) Resolva as inequações abaixo e apresente o conjunto solução em notação de intervalo:

(a) $(4x + 2)(x + 1) \leq 0$

(h) $\frac{x-1}{2x-3} \leq 0$

(b) $(x + 3)(3x + 1) \geq 0$

(i) $\frac{2x+7}{x+1} < 0$

(c) $(2x - 1)(x + 4) < 0$

(j) $\frac{x-2}{2x-5} > 0$

(d) $(x - 2)(x + 1) > 0$

(e) $(2x - 4)(x + 4) \geq 0$

(f) $\frac{2x+1}{x+2} \leq 0$

(g) $\frac{x+3}{5x-2} \geq 0$

Respostas



Exercício 1:

(a) $S =]12, +\infty[$

(b) $S = [9, 19[$

(c) $S =]-2, 3[$

(d) $S =]-\infty, -2[\cup]4, +\infty[$

(e) $S = \left] -\infty, -\frac{5}{2} \right] \cup [1, +\infty[$

(f) $S =]-3, 01, -2, 99[$

(g) $S = \left] -\frac{9}{2}, -\frac{1}{2} \right[$

(h) $S = \left[\frac{3}{5}, \frac{9}{5} \right]$

(i) $S = \left] -\infty, \frac{2}{3} \right] \cup [4, +\infty[$

(j) $S = \left] -\infty, -\frac{17}{7} \right[\cup \left] -\frac{5}{7}, +\infty \right[$

(k) $S = [-3, 1[$

(l) $S = \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{17}{6}, +\infty \right[$

(m) $S = [7, +\infty[$

(n) $S =]-\infty, -1] \cup [6, +\infty[$

Respostas



Exercício 1:

$$(o) S =]-3,0]$$

$$(p) S = [-12,20]$$

$$(q) S =]3,4[$$

$$(r) S =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$$

$$(s) S =]-\infty, -5] \cup]2, +\infty[$$

$$(t) S =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$(u) S =]-1,0]$$

$$(v) S = \left] -\frac{7}{5}, +\infty \right[$$

$$(w) S = \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{7}{2}, +\infty \right[$$

$$(x) S = [5, +\infty[$$

$$(y) S = [-1,4]$$

Respostas



Exercício 2:

$$(a) S = [-1, -\frac{1}{2}]$$

$$(b) S =]-\infty, -3] \cup [-\frac{1}{3}, +\infty[$$

$$(c) S =]-4, \frac{1}{2}[$$

$$(d) S =]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$$

$$(e) S =]-\infty, -4[\cup]2, +\infty[$$

$$(f) S =]-2, -\frac{1}{2}]$$

$$(g) S =]-\infty, -3] \cup]\frac{2}{5}, +\infty[$$

$$(h) S = [1, \frac{3}{2}[$$

$$(i) S =]-\frac{7}{2}, -1[$$

$$(j) S =]-\infty, 2[\cup]\frac{5}{2}, +\infty[$$

Monitorias!!



Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

<http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias>

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

<http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA>

O GAMA possui monitorias de:

- ❑ Matemática Elementar, Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e equivalentes)
 - ❑ ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
 - ❑ Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3 (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.



Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino



Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Apoio ao Cálculo

Aula 08

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em
Matemática

Função do segundo grau

Definição: Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $a \neq 0$, a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ é chamada de **função do segundo grau** ou **função quadrática**.

Exemplos:

1) $f(x) = x^2$

$a = 1, b = 0, c = 0$

2) $f(x) = -x^2 + 1$

$a = -1, b = 0, c = 1$

3) $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$

$a = 2, b = 3, c = -1$

Função do segundo grau

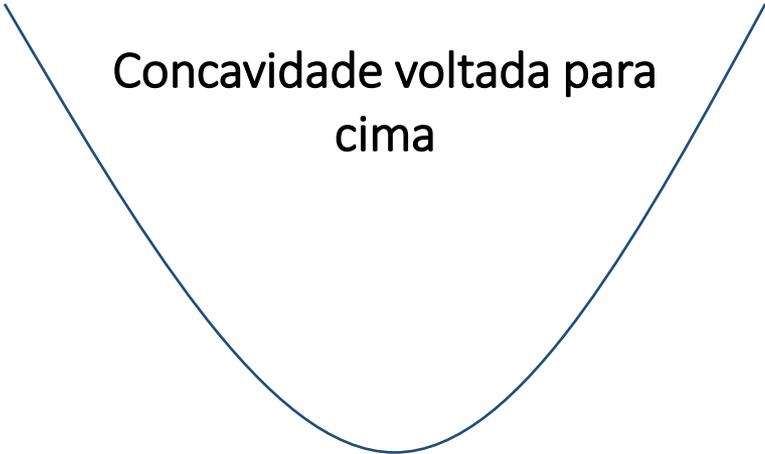
Teorema: O gráfico de uma função do segundo grau é uma **parábola**.

A parábola pode ter concavidade voltada para cima ou concavidade voltada para baixo, de acordo com o sinal do coeficiente a .

Concavidade:

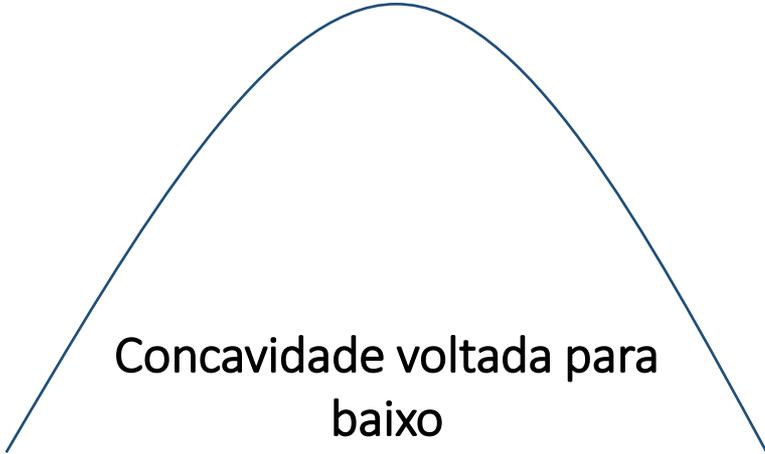
$$a > 0$$

Concavidade voltada para
cima



$$a < 0$$

Concavidade voltada para
baixo



Função do segundo grau

Os zeros da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ podem ser obtidos resolvendo a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ utilizando a **fórmula de Bhaskara**.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Observação: A quantidade de zeros reais obtidos para uma função quadrática depende do sinal de Δ .

$$\Delta > 0$$

Dois zeros

$$\Delta = 0$$

Um único zero

$$\Delta < 0$$

Nenhum zero

Função do segundo grau

O sinal da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ depende dos sinais de a (determina a concavidade) e de Δ (determina a quantidade de zeros).

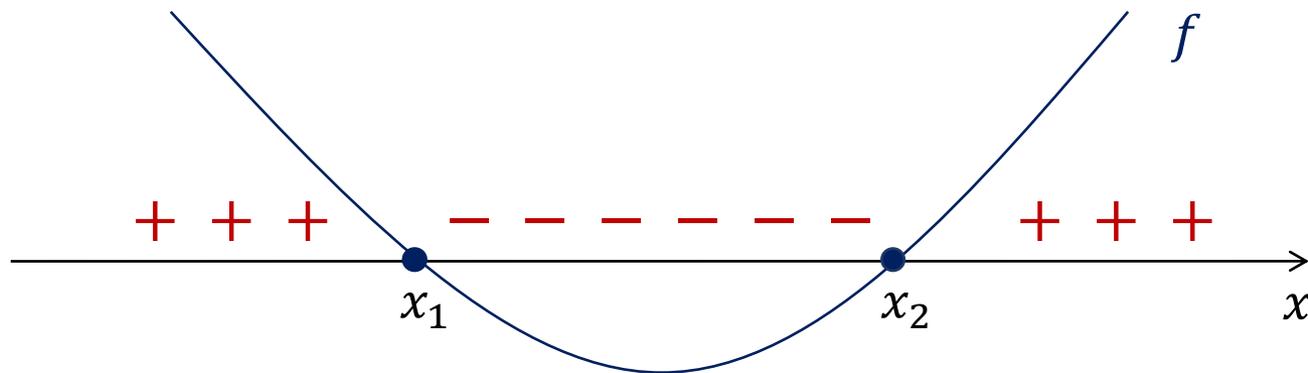
Como existem duas possibilidades para o coeficiente a ($a > 0$ ou $a < 0$) e três possibilidades para Δ ($\Delta > 0$ ou $\Delta = 0$ ou $\Delta < 0$), obtém-se seis combinações possíveis para o formato do gráfico da função quadrática.

Vamos fazer o estudo do sinal da função quadrática para cada um desses formatos.

Função do segundo grau

1ª Combinação: $a > 0$ e $\Delta > 0$

Concavidade voltada para cima e dois zeros

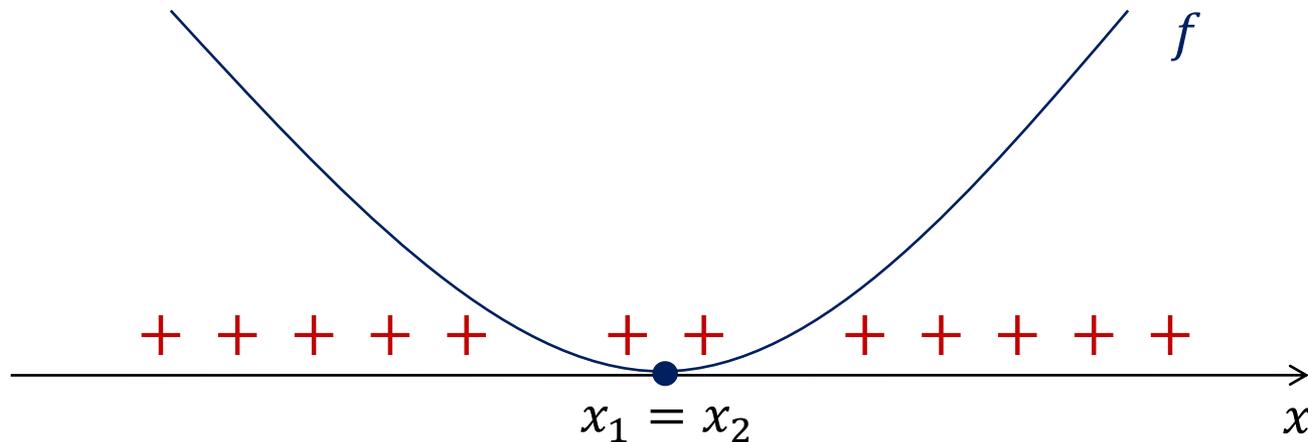


- $f(x) > 0$ em $]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[= \mathbb{R} - [x_1, x_2]$
- $f(x) = 0$ em $x = x_1$ e $x = x_2$
- $f(x) < 0$ em $]x_1, x_2[$

Função do segundo grau

2ª Combinação: $a > 0$ e $\Delta = 0$

Concavidade voltada para cima e um único zero

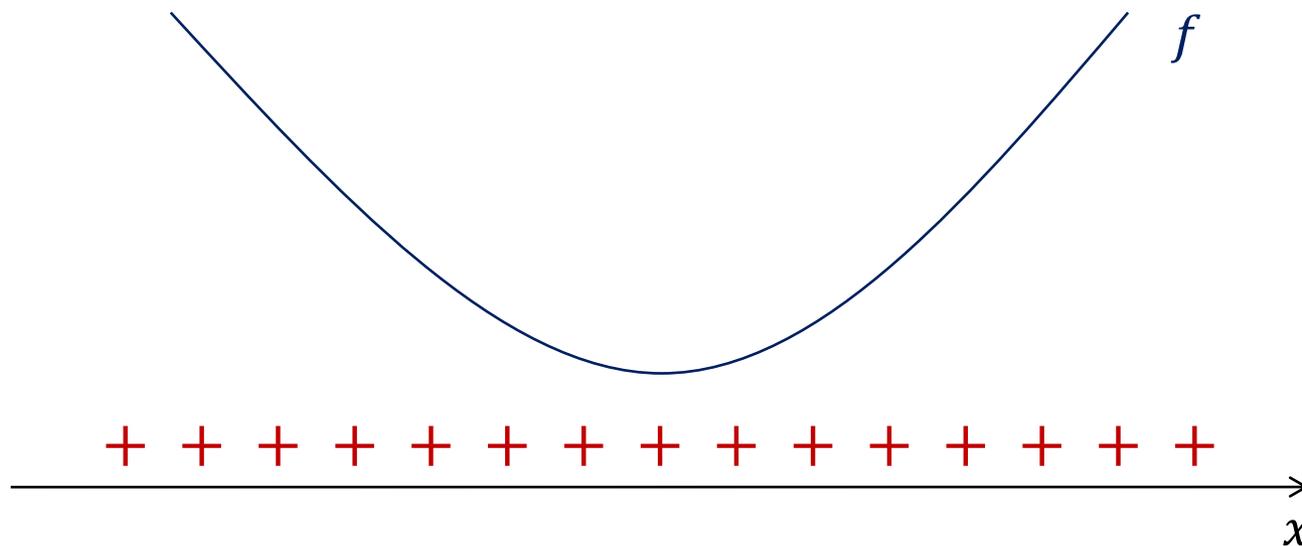


- $f(x) > 0$ em $]-\infty, x_1[\cup]x_1, +\infty[= \mathbb{R} - \{x_1\}$
- $f(x) = 0$ em $x = x_1 = x_2$
- $\nexists x \in \mathbb{R} : f(x) < 0$

Função do segundo grau

3ª Combinação: $a > 0$ e $\Delta < 0$

Concavidade voltada para cima e nenhum zero

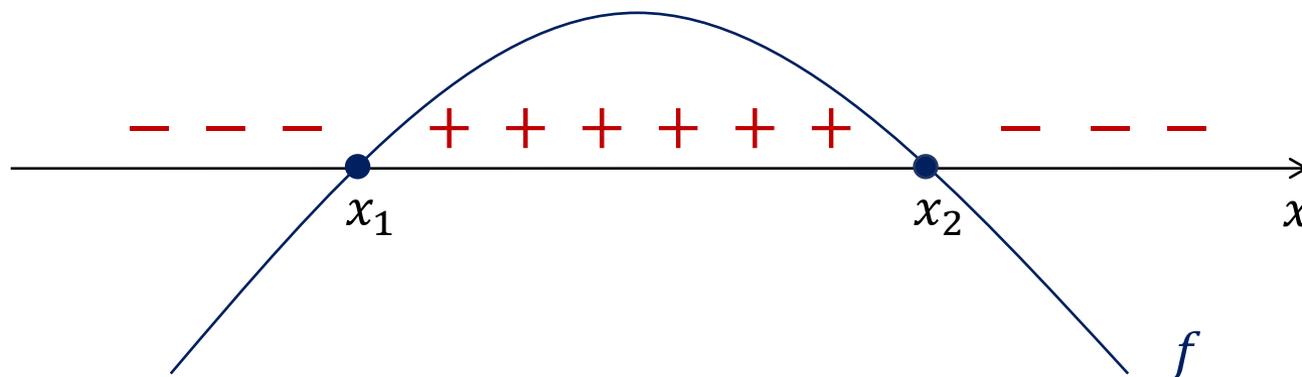


- $f(x) > 0$ em \mathbb{R}
- $\nexists x \in \mathbb{R} : f(x) = 0$
- $\nexists x \in \mathbb{R} : f(x) < 0$

Função do segundo grau

4ª Combinação: $a < 0$ e $\Delta > 0$

Concavidade voltada para baixo e dois zeros

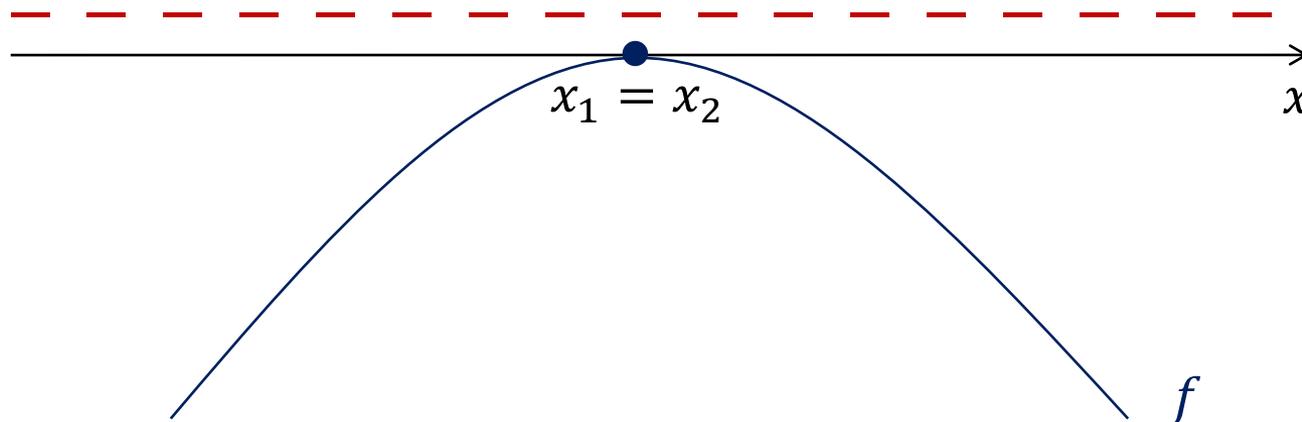


- $f(x) > 0$ em $]x_1, x_2[$
- $f(x) = 0$ em $x = x_1$ e $x = x_2$
- $f(x) < 0$ em $] -\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[= \mathbb{R} - [x_1, x_2]$

Função do segundo grau

5ª Combinação: $a < 0$ e $\Delta = 0$

Concavidade voltada para baixo e um único zero

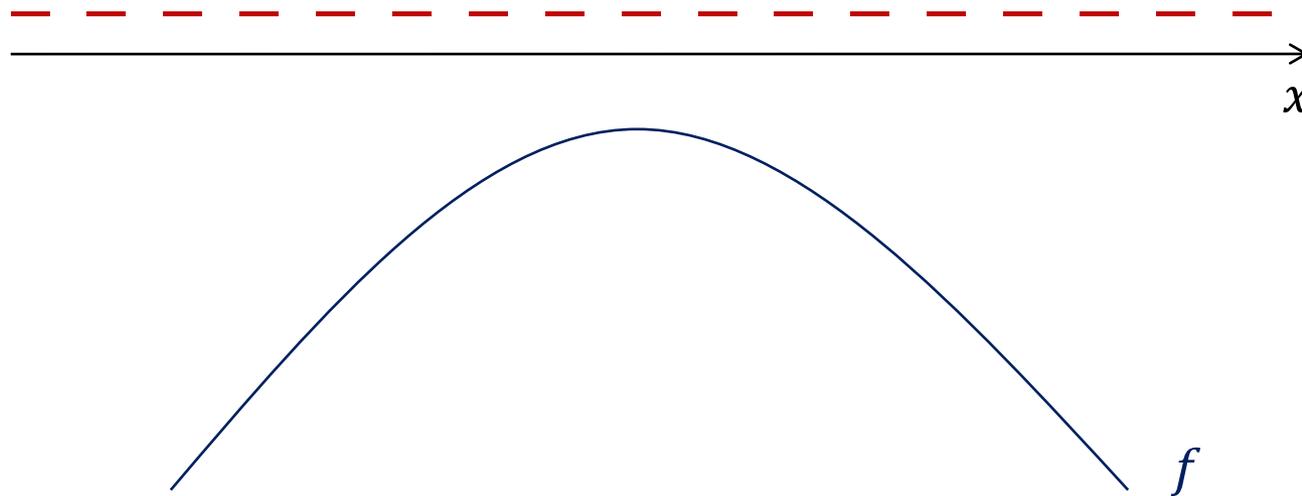


- $\nexists x \in \mathbb{R} : f(x) > 0$
- $f(x) = 0$ em $x = x_1 = x_2$
- $f(x) < 0$ em $] -\infty, x_1[\cup] x_1, +\infty[= \mathbb{R} - \{x_1\}$

Função do segundo grau

6ª Combinação: $a < 0$ e $\Delta < 0$

Concavidade voltada para baixo e nenhum zero



- $\nexists x \in \mathbb{R} : f(x) > 0$
- $\nexists x \in \mathbb{R} : f(x) = 0$
- $f(x) < 0$ em \mathbb{R}

Inequações do segundo grau

Definição: Uma inequação do segundo grau pode ser escrita em uma das seguintes formas:

$$ax^2 + bx + c < 0$$

$$ax^2 + bx + c > 0$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

Observação: $y = ax^2 + bx + c$ é a função do segundo grau associada à inequação.

Resolver uma inequação em x significa encontrar todos os valores de x para os quais a inequação é verdadeira.

O conjunto formado por todos esses valores é denominado **conjunto solução**.

Portanto, resolvemos uma inequação determinando o seu conjunto solução.

Inequações do segundo grau

O procedimento que vamos utilizar para resolver inequações do segundo grau, consiste nos seguintes passos:

1º Passo: Reescrever a inequação dada (se for necessário) até que ela fique em alguma das seguintes formas: $ax^2 + bx + c < 0$ ou $ax^2 + bx + c \leq 0$ ou $ax^2 + bx + c > 0$ ou $ax^2 + bx + c \geq 0$.

2º Passo: Considerar a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ associada à inequação.

3º Passo: Determinar a quantidade de zeros através do sinal de Δ .

4º Passo: Calcular os zeros da função (se existirem).

5º Passo: Determinar a concavidade da parábola através do sinal do coeficiente a .

6º Passo: Realizar o estudo do sinal da função e chegar à solução da inequação.

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $x^2 - 1 > x + 5$

Solução:

1º Passo: $x^2 - 1 > x + 5 \iff x^2 - 1 - x - 5 > 0$
 $\iff x^2 - x - 6 > 0$

2º Passo: $f(x) = x^2 - x - 6 \quad (a = 1, b = -1, c = -6)$

3º Passo: $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 1 + 24 = 25 > 0$

Portanto, f possui dois zeros.

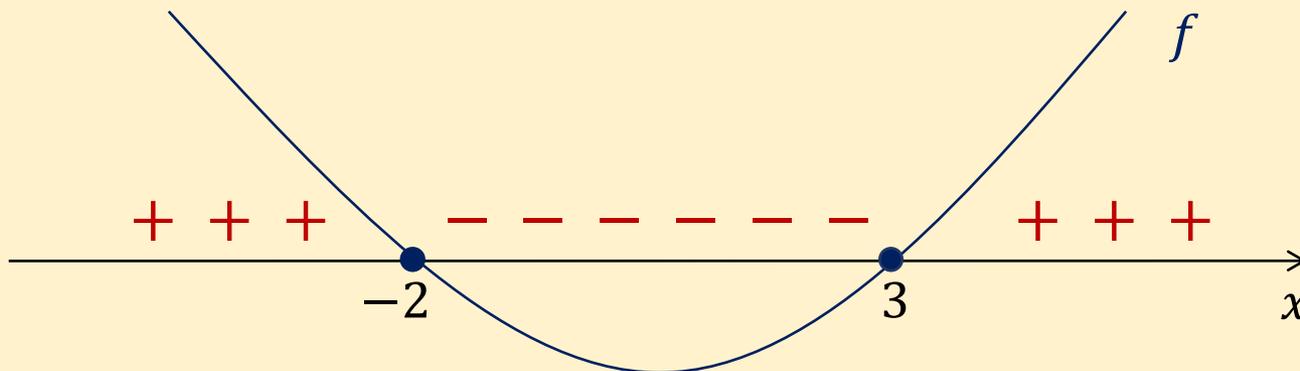
4º Passo: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2(1)} = \frac{1 \pm 5}{2} \implies x_1 = \frac{1 - 5}{2} = -2$
 $\implies x_2 = \frac{1 + 5}{2} = 3$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $x^2 - 1 > x + 5$

Solução:

5º Passo: Como $a = 1 > 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.



6º Passo: Lembre que

$$x^2 - 1 > x + 5 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$$

$$\text{Portanto, } S =]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[$$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $2x^2 + x \leq 6$

Solução:

$$2x^2 + x \leq 6 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 6 \leq 0$$

$$f(x) = 2x^2 + x - 6 \quad (a = 2, b = 1, c = -6)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(2)(-6) = 1 + 48 = 49 > 0$$

Portanto, f possui dois zeros.

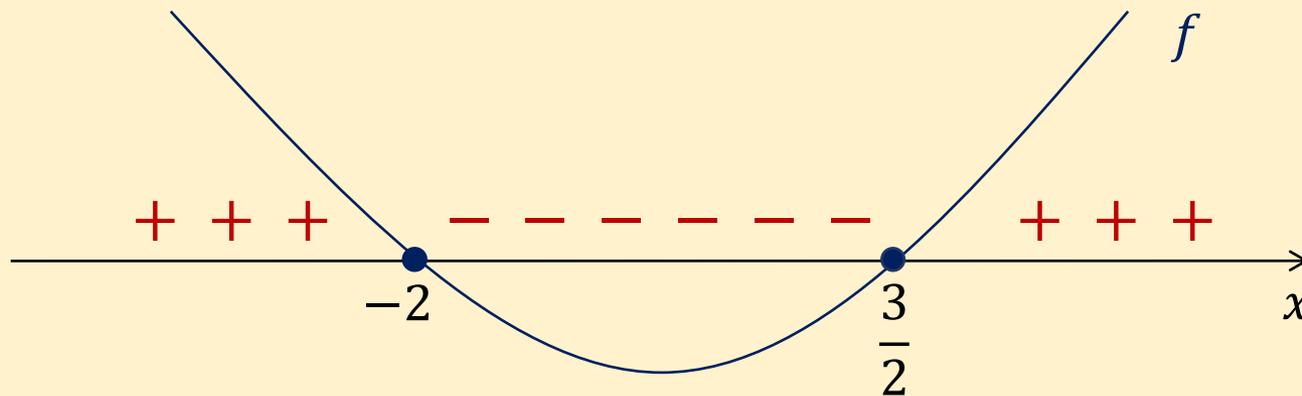
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2(2)} = \frac{-1 \pm 7}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{-1 - 7}{4} = -2$$
$$\Rightarrow x_2 = \frac{-1 + 7}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $2x^2 + x \leq 6$

Solução:

Como $a = 2 > 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.



Lembre que

$$2x^2 + x \leq 6 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 0$$

$$\text{Portanto, } S = \left[-2, \frac{3}{2}\right]$$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $x^2 + 3x + 3 \leq 0$

Solução:

$$f(x) = x^2 + 3x + 3 \quad (a = 1, b = 3, c = 3)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(1)(3) = 9 - 12 = -3 < 0$$

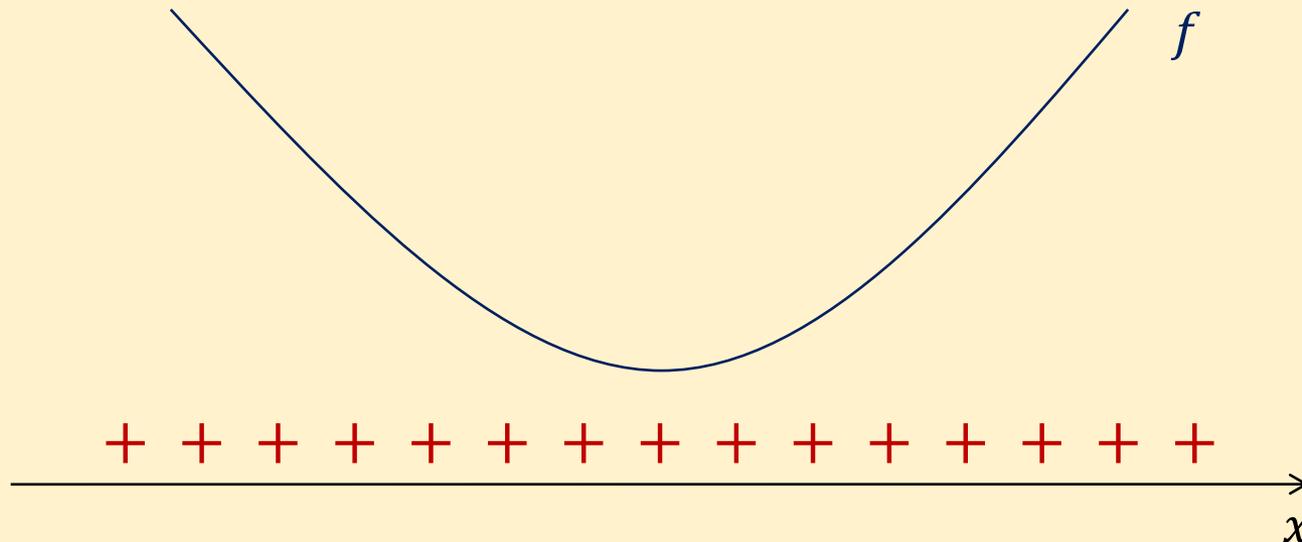
Portanto, f não possui zeros reais.

Como $a = 1 > 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $x^2 + 3x + 3 \leq 0$

Solução:



Lembre que $x^2 + 3x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 0$ e como

$\nexists x \in \mathbb{R} : f(x) \leq 0$ temos que: $S = \emptyset$

Observação: O conjunto solução da seguinte inequação $x^2 + 3x + 3 > 0$

é: $S = \mathbb{R}$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $x^2 - 6x + 9 \leq 0$

Solução:

$$f(x) = x^2 - 6x + 9 \quad (a = 1, b = -6, c = 9)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(9) = 36 - 36 = 0$$

Portanto, f possui um único zero.

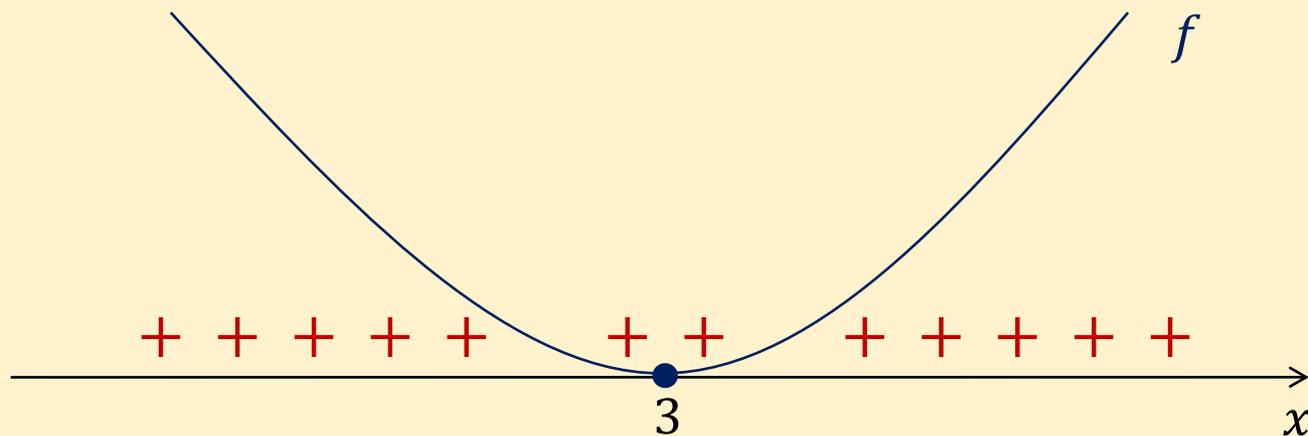
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2(1)} = \frac{6}{2} = 3$$

Como $a = 1 > 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $x^2 - 6x + 9 \leq 0$

Solução:



Lembre que $x^2 - 6x + 9 \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 0$ e como

$x = 3$ é o único valor que satisfaz $f(x) \leq 0$ temos que: $S = \{3\}$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $x^2 + 8x - 10 < 2(x^2 + 1)$

Solução:

$$\begin{aligned}x^2 + 8x - 10 < 2(x^2 + 1) &\Leftrightarrow x^2 + 8x - 10 < 2x^2 + 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x^2 + 8x - 10 - 2 < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -x^2 + 8x - 12 < 0\end{aligned}$$

$$f(x) = -x^2 + 8x - 12 \quad (a = -1, b = 8, c = -12)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4(-1)(-12) = 64 - 48 = 16 > 0$$

Portanto, f possui dois zeros.

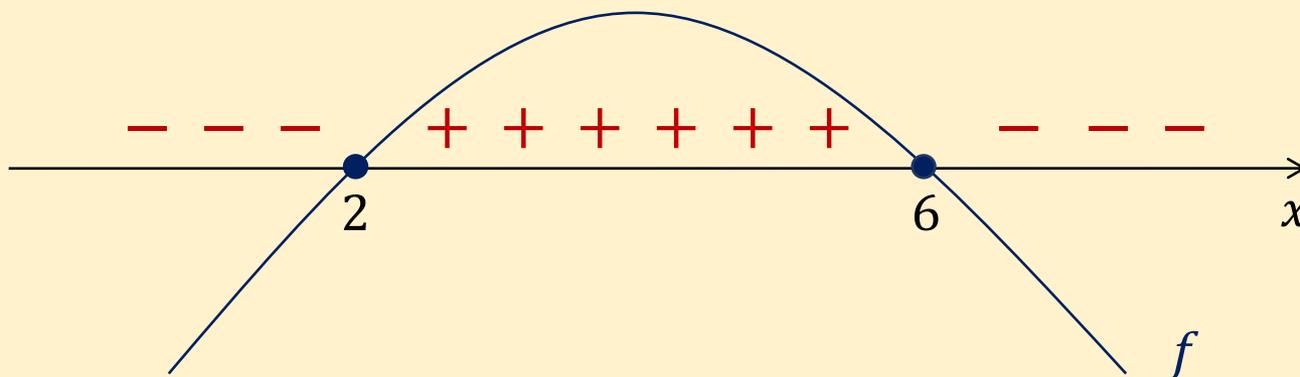
$$\begin{aligned}x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} &= \frac{-8 \pm \sqrt{16}}{2(-1)} = \frac{-8 \pm 4}{-2} \Rightarrow x_1 = \frac{-8 + 4}{-2} = 2 \\ &\Rightarrow x_2 = \frac{-8 - 4}{-2} = 6\end{aligned}$$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $x^2 + 8x - 10 < 2(x^2 + 1)$

Solução:

Como $a = -1 < 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para baixo.



Lembre que

$$x^2 + 8x - 10 < 2(x^2 + 1) \Leftrightarrow -x^2 + 8x - 12 < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0$$

$$\text{Portanto, } S =]-\infty, 2[\cup]6, +\infty[$$

Exercícios Propostos



Exercícios



1) Resolva as inequações abaixo e apresente o conjunto solução em notação de intervalo:

(a) $x^2 > 9$

(b) $x^2 \leq 5$

(c) $(x - 4)(x + 2) > 0$

(d) $(x - 3)(x + 4) < 0$

(e) $x^2 - 9x + 20 \leq 0$

(f) $2 - 3x + x^2 \geq 0$

Exercícios

2) Resolva as inequações abaixo e apresente o conjunto solução na reta numérica:

(a) $(2x + 1)(-x + 2) \geq 0$

(b) $(x + 2)(-x - 2) \leq 0$

(c) $x^2 - 6x + 9 > 0$

(d) $x^2 - 4x \geq 0$

(e) $(x + 2)(-x - 2) < 0$

Respostas



Exercício 1:

(a) $S =]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$

(b) $S = [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$

(c) $S =]-\infty, -2[\cup]4, +\infty[$

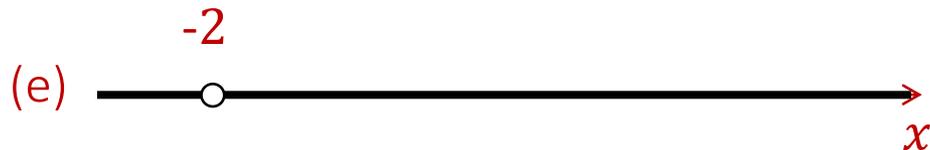
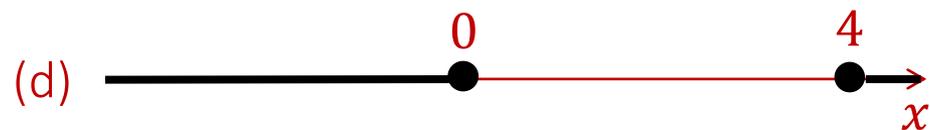
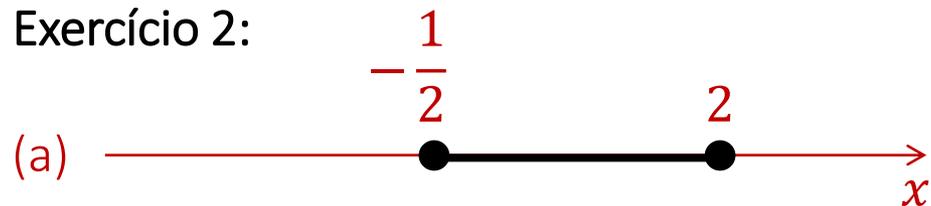
(d) $S =]-4, 3[$

(e) $S = [4, 5]$

(f) $S =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$

Respostas

Exercício 2:



Monitorias!!



Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

<http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias>

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

<http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA>

O GAMA possui monitorias de:

- ❑ Matemática Elementar, Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e equivalentes)
 - ❑ ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
 - ❑ Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3 (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.



Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino



Atividades de Revisão em Matemática

Módulo de

Apoio ao Cálculo

Aula 09

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em
Matemática

Inequações do segundo grau

As vezes duas inequações são combinadas em uma inequação dupla, que pode ser resolvida separando-se as duas inequações envolvidas. O exemplo a seguir ilustra esse caso.

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $4 < x^2 \leq 9$

Calcularemos então separadamente a solução de cada inequação, tomando como solução geral da inequação dupla a interseção dos conjuntos, pois desejamos valores de x que satisfaçam as duas inequações.

Solução:

$$a) \quad 4 < x^2 \Leftrightarrow 4 - x^2 < 0 \quad f(x) = 4 - x^2 \quad (a = -1, b = 0, c = 4)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4(-1)(4) = 0 + 16 = 16 > 0$$

Portanto, f possui dois zeros.

$$4 - x^2 = 0 \Rightarrow 2^2 - x^2 = 0 \Rightarrow (2 + x)(2 - x) = 0$$

$$\Rightarrow 2 + x = 0 \quad \text{ou} \quad 2 - x = 0 \Rightarrow x = -2 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

$$\Rightarrow x_1 = -2 \quad \text{e} \quad x_2 = 2$$

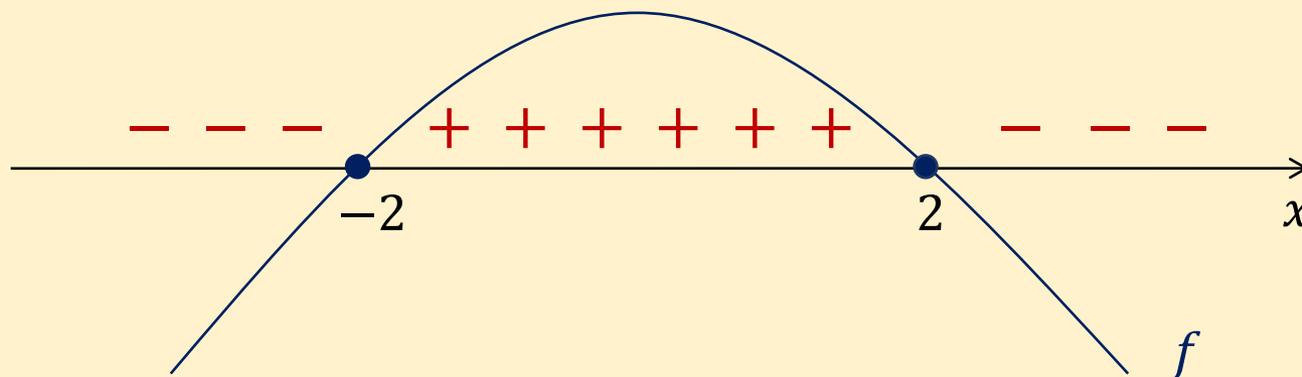
Como $a = -1 < 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para baixo.

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $4 < x^2 \leq 9$

Solução:

a)



Lembre que

$$4 < x^2 \Leftrightarrow 4 - x^2 < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0$$

$$\text{Portanto, } S_1 =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $4 < x^2 \leq 9$

Solução:

$$b) \quad x^2 \leq 9 \Leftrightarrow x^2 - 9 \leq 0 \quad g(x) = x^2 - 9 \quad (a = 1, b = 0, c = -9)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4(1)(-9) = 0 + 36 = 36 > 0$$

Portanto, g possui dois zeros.

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 3^2 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow x + 3 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \quad \text{ou} \quad x = 3$$

$$\Rightarrow x_1 = -3 \quad \text{e} \quad x_2 = 3$$

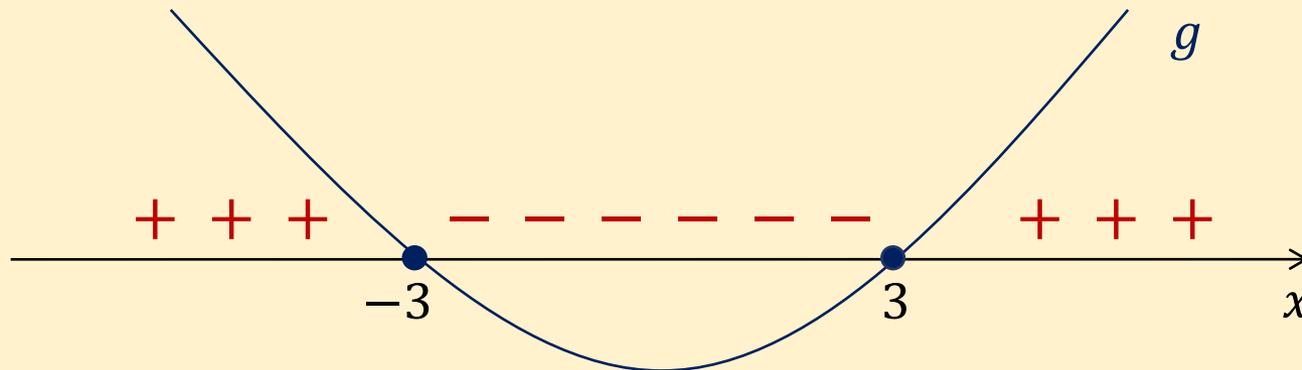
Como $a = 1 > 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $4 < x^2 \leq 9$

Solução:

b)



Lembre que

$$x^2 \leq 9 \Leftrightarrow x^2 - 9 \leq 0 \Leftrightarrow g(x) \leq 0$$

$$\text{Portanto, } S_2 = [-3, 3]$$

Inequações do segundo grau

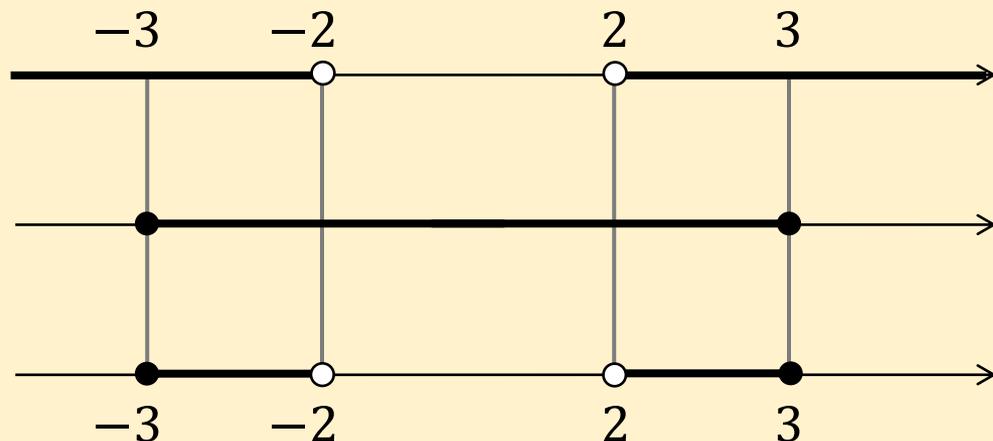
Exemplo: Resolva: $4 < x^2 \leq 9$

Solução:

$$S_1 =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$$

$$S_2 = [-3, 3]$$

$$S = S_1 \cap S_2$$



Portanto, o conjunto solução é: $S = [-3, -2[\cup]2, 3]$

Inequações do segundo grau

Nos próximos três exemplos abordaremos inequações que envolvem produtos ou quocientes, cujos fatores são expressões do segundo grau da forma $ax^2 + bx + c$ (cuja representação gráfica é uma parábola).

Utilizaremos funções do segundo grau para resolver estes tipos de inequações.

Exemplo: Resolva: $(2x^2 - 4x)(-x^2 + 3x + 4) < 0$

Solução:

$$a) \quad f(x) = 2x^2 - 4x \quad (a = 2, b = -4, c = 0)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(2)(0) = 16 - 0 = 16 > 0$$

Portanto, f possui dois zeros.

$$2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 2x(x - 2) = 0 \Rightarrow 2x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

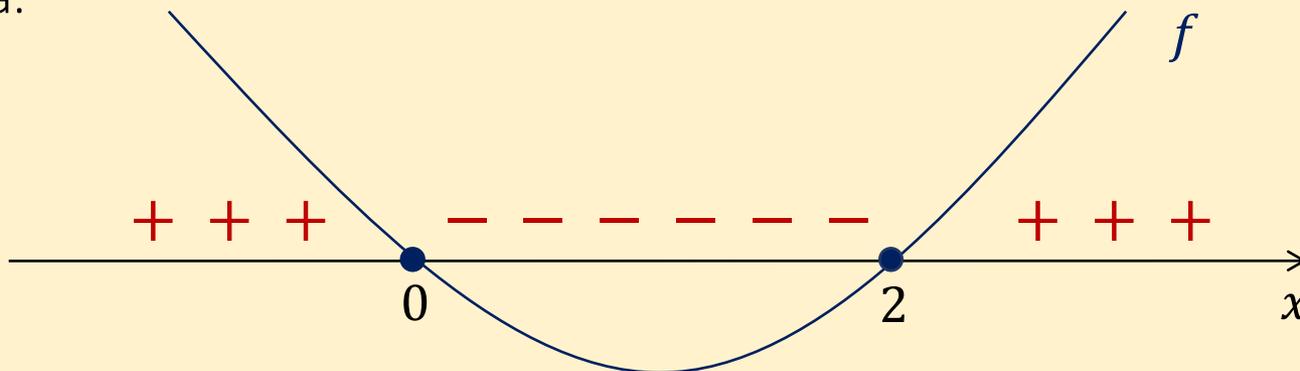
$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad \text{e} \quad x_2 = 2$$

Inequações do segundo grau

Exemplo: $(2x^2 - 4x)(-x^2 + 3x + 4) < 0$

Solução:

a) Como $a = 2 > 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.



- $f(x) > 0$ em $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$
- $f(x) = 0$ em $x = 0$ e $x = 2$
- $f(x) < 0$ em $]0, 2[$

Inequações do segundo grau

Exemplo: $(2x^2 - 4x)(-x^2 + 3x + 4) < 0$

Solução: Vamos agora realizar o mesmo procedimento para a função:

$$g(x) = -x^2 + 3x + 4.$$

b) $g(x) = -x^2 + 3x + 4$ ($a = -1, b = 3, c = 4$)

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(-1)(4) = 9 + 16 = 25 > 0$$

Portanto, g possui dois zeros.

$$-x^2 + 3x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2(-1)} = \frac{-3 \pm 5}{-2} \Rightarrow x_1 = \frac{-3 + 5}{-2} = -1$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{-3 - 5}{-2} = 4$$

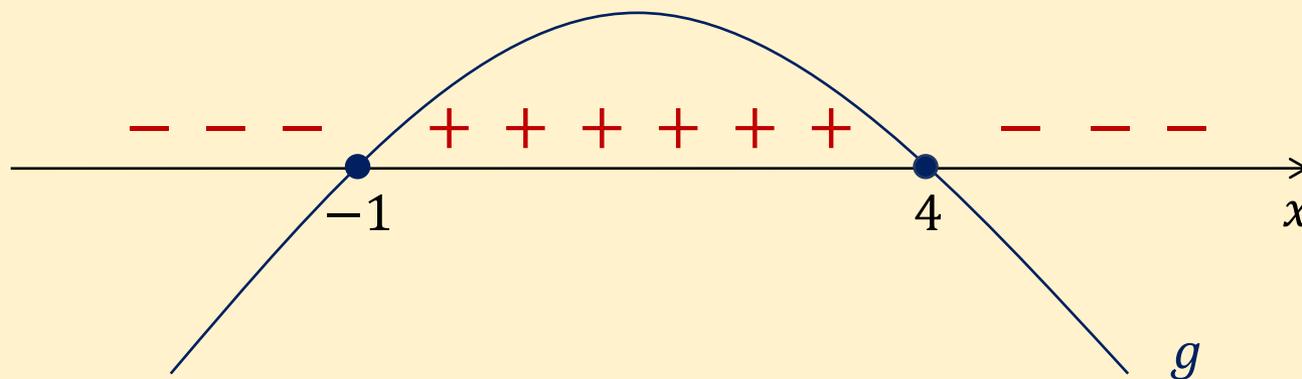
Como $a = -1 < 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para baixo.

Inequações do segundo grau

Exemplo: $(2x^2 - 4x)(-x^2 + 3x + 4) < 0$

Solução:

b)



- $g(x) > 0$ em $]-1,4[$
- $g(x) = 0$ em $x = -1$ e $x = 4$
- $g(x) < 0$ em $]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$

Inequações do segundo grau

Exemplo: $(2x^2 - 4x)(-x^2 + 3x + 4) < 0$

Solução:

Logo, dos itens a) e b) segue que:

	-1	0	2	4	
$f(x) = 2x^2 - 4x$	+	+	-	+	+
$g(x) = -x^2 + 3x + 4$	-	+	+	+	-
$f(x) \cdot g(x)$	-	+	-	+	-

x

Portanto, $S =]-\infty, -1[\cup]0, 2[\cup]4, +\infty[$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva:
$$\frac{3x^2 - 7x + 5}{-x^2 + 6x - 8} \leq 0$$

Solução:

a) $y_1 = 3x^2 - 7x + 5$ ($a = 3, b = -7, c = 5$)

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(3)(5) = 49 - 60 = -11 < 0$$

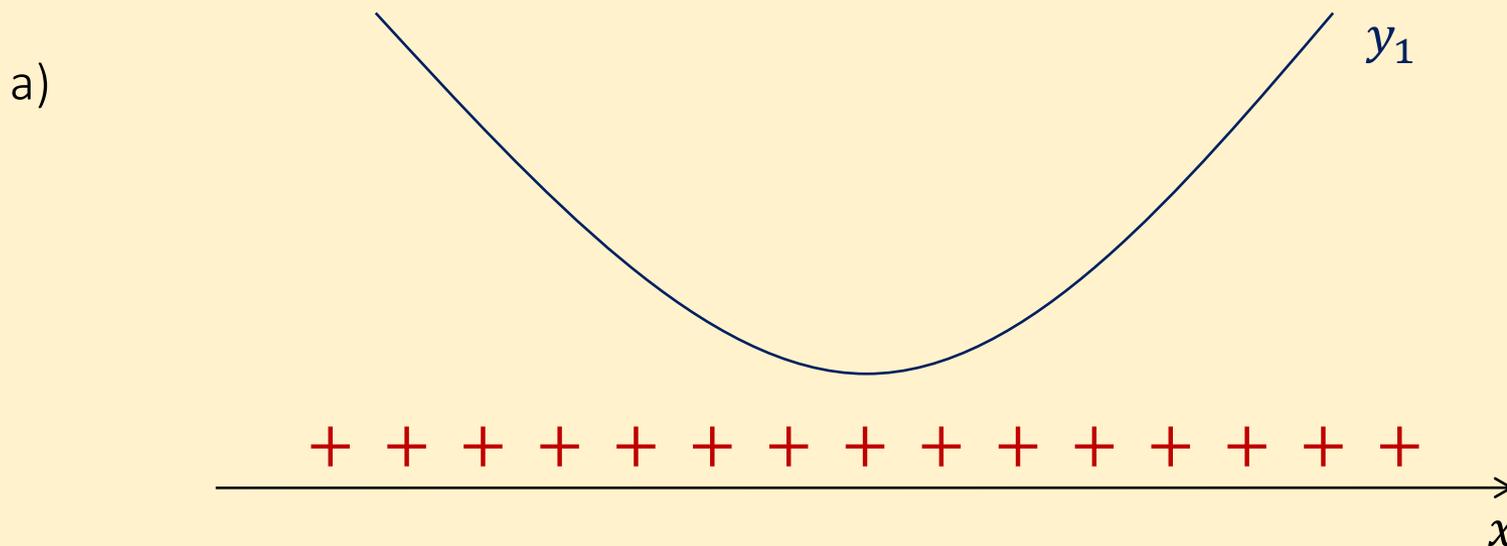
Portanto, y_1 não possui zeros reais.

Como $a = 3 > 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva:
$$\frac{3x^2 - 7x + 5}{-x^2 + 6x - 8} \leq 0$$

Solução:



- $y_1 > 0$ em \mathbb{R}
- $\nexists x \in \mathbb{R} : y_1 = 0$
- $\nexists x \in \mathbb{R} : y_1 < 0$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva:
$$\frac{3x^2 - 7x + 5}{-x^2 + 6x - 8} \leq 0$$

Solução: Vamos agora realizar o mesmo procedimento para a função $y_2 = -x^2 + 6x - 8$.

b) $y_2 = -x^2 + 6x - 8$ ($a = -1$, $b = 6$, $c = -8$)

$$\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(-1)(-8) = 36 - 32 = 4 > 0$$

Portanto, y_2 possui dois zeros.

$$-x^2 + 6x - 8 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{2(-1)} = \frac{-6 \pm 2}{-2} \Rightarrow x_1 = \frac{-6 + 2}{-2} = 2$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{-6 - 2}{-2} = 4$$

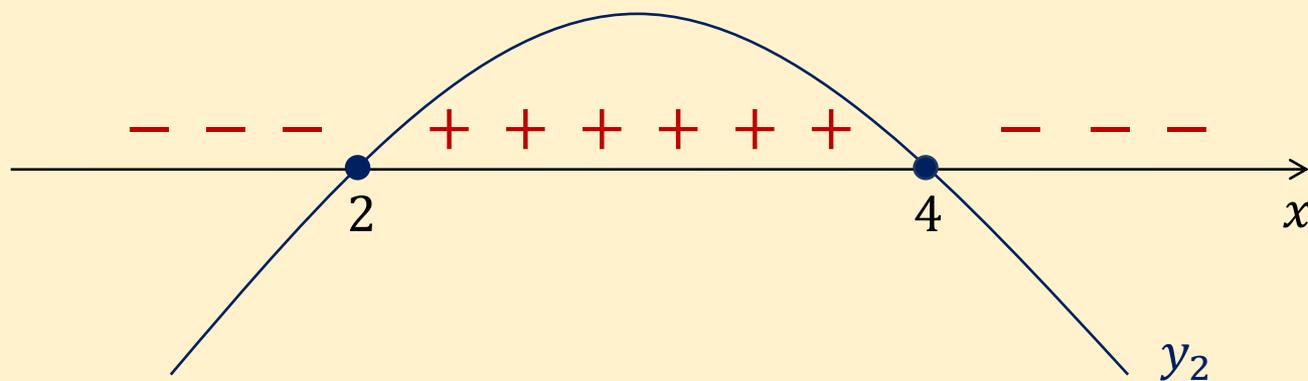
Como $a = -1 < 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para baixo.

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva:
$$\frac{3x^2 - 7x + 5}{-x^2 + 6x - 8} \leq 0$$

Solução:

b)



- $y_2 > 0$ em $]2,4[$
- $y_2 = 0$ em $x = 2$ e $x = 4$
- $y_2 < 0$ em $] -\infty, 2[\cup]4, +\infty[$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $\frac{3x^2 - 7x + 5}{-x^2 + 6x - 8} \leq 0$

Solução: Logo, dos itens a) e b) segue que:

	2	4	
$y_1 = 3x^2 - 7x + 5$	+	+	+
$y_2 = -x^2 + 6x - 8$	-	+	-
$\frac{y_1}{y_2} = \frac{3x^2 - 7x + 5}{-x^2 + 6x - 8}$	-	+	-

x

Note que $2 \notin S$ e $4 \notin S$ pois ambos os valores zeram o denominador da fração $\frac{3x^2 - 7x + 5}{-x^2 + 6x - 8}$.

Portanto, $S =]-\infty, 2[\cup]4, +\infty[$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $x^4 < 625$

Solução:

$$\begin{aligned}x^4 < 625 &\Leftrightarrow x^4 - 625 < 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 25^2 < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x^2 + 25)(x^2 - 25) < 0\end{aligned}$$

a) $f(x) = x^2 + 25$ $(a = 1, b = 0, c = 25)$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4(1)(25) = 0 - 100 = -100 < 0$$

Portanto, f não possui zeros reais.

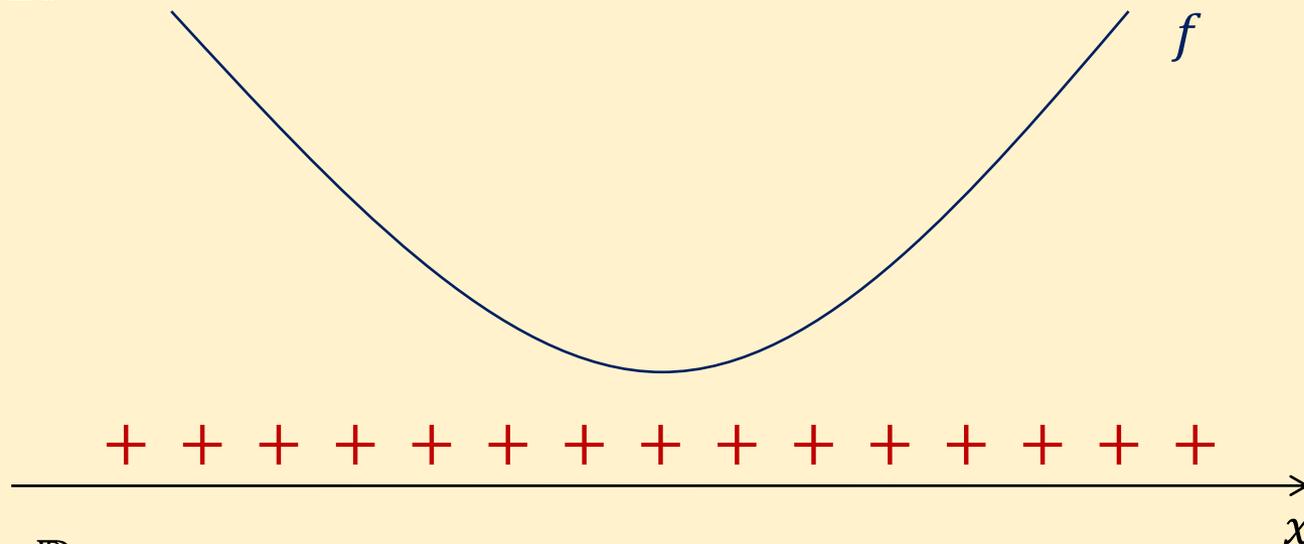
Como $a = 1 > 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $x^4 < 625$

Solução: $x^4 < 625 \Leftrightarrow (x^2 + 25)(x^2 - 25) < 0$

a) $f(x) = x^2 + 25$



- $f(x) > 0$ em \mathbb{R}
- $\nexists x \in \mathbb{R} : f(x) = 0$
- $\nexists x \in \mathbb{R} : f(x) < 0$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $x^4 < 625$

Solução: $x^4 < 625 \Leftrightarrow (x^2 + 25)(x^2 - 25) < 0$

Vamos agora realizar o mesmo procedimento para a função

$$g(x) = x^2 - 25.$$

b) $g(x) = x^2 - 25$ ($a = 1, b = 0, c = -25$)

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4(1)(-25) = 0 + 100 = 100 > 0$$

Portanto, g possui dois zeros.

$$\begin{aligned} x^2 - 25 = 0 &\Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{25} \Rightarrow |x| = 5 \Rightarrow x = \pm 5 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_1 = -5 \text{ e } x_2 = 5 \end{aligned}$$

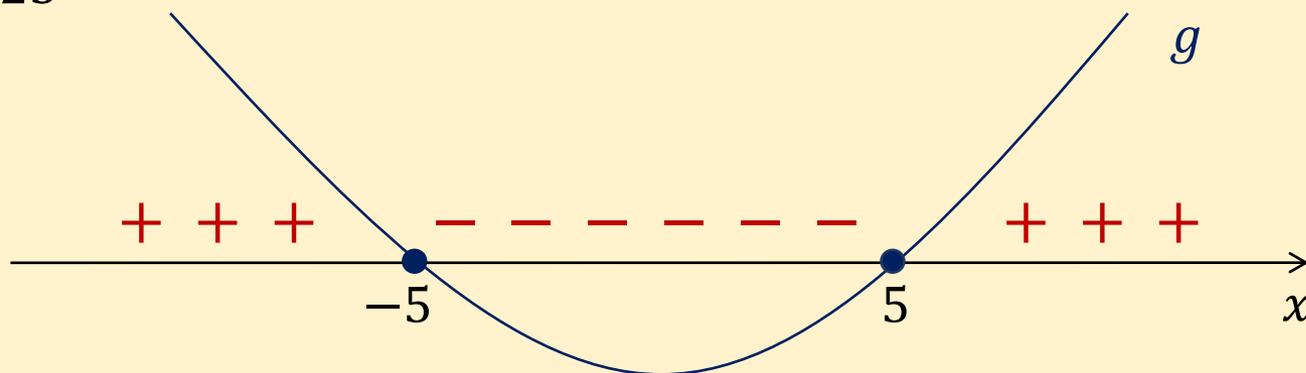
Como $a = 1 > 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $x^4 < 625$

Solução: $x^4 < 625 \Leftrightarrow (x^2 + 25)(x^2 - 25) < 0$

b) $g(x) = x^2 - 25$



- $g(x) > 0$ em $]-\infty, -5[\cup]5, +\infty[$
- $g(x) = 0$ em $x = -5$ e $x = 5$
- $g(x) < 0$ em $]-5, 5[$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $x^4 < 625$

Solução: $x^4 < 625 \Leftrightarrow (x^2 + 25)(x^2 - 25) < 0$

Logo, dos itens a) e b) segue que:

	-5	5	
$f(x) = x^2 + 25$	+	+	+
$g(x) = x^2 - 25$	+	-	+
$f(x) \cdot g(x)$	+	-	+

Portanto, $S =]-5,5[$

Inequações do segundo grau

Observação: Podem ocorrer inequações que envolvem produtos ou quocientes cujos alguns fatores são expressões do segundo grau, alguns são expressões do primeiro grau e ainda outros fatores que são de outros tipos.

Exemplos:

$$1) \frac{x^2 + 13}{x - 1} \leq 1$$

$$2) \frac{x(-3x^2 + 5)(-2x + 3)}{(x + 7)e^x} \geq 0$$

O método para resolver este tipo de inequação é o mesmo que utilizamos aqui em exemplos anteriores, ou seja, associar a cada um desses fatores uma função, analisar o sinal destas funções, montar a tabela e determinar o conjunto solução.

Deixamos como exercício a resolução dos dois exemplos anteriores, cujas respostas finais são:

$$1) \frac{x^2 + 13}{x - 1} \leq 1$$

$$S =]-\infty, 1[$$

$$2) \frac{x(-3x^2 + 5)(-2x + 3)}{(x + 7)e^x} \geq 0$$

$$S = \left] -7, -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \right] \cup \left[0, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty \right[$$

Inequações do segundo grau

Vamos ilustrar através do exemplo a seguir que algumas vezes podemos resolver a mesma inequação de várias formas.

Exemplo: Resolva: $(x + 9)(2x - 2) \leq 0$

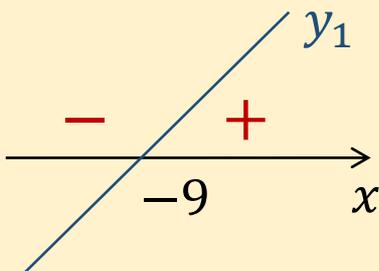
Solução 1:

$$y_1 = x + 9$$

$$0 = x + 9$$

$$x = -9 \text{ (raiz)}$$

y_1 é crescente pois
 $a = 1 > 0$

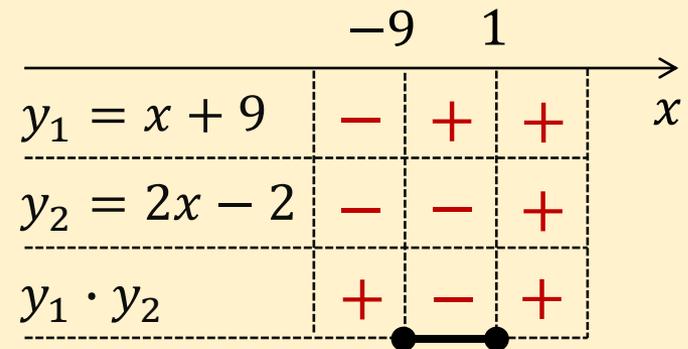
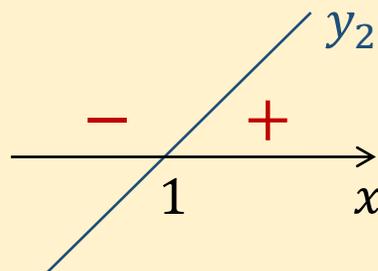


$$y_2 = 2x - 2$$

$$0 = 2x - 2$$

$$x = 1 \text{ (raiz)}$$

y_2 é crescente pois
 $a = 2 > 0$



Portanto, o conjunto
solução é:

$$S = [-9, 1]$$

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $(x + 9)(2x - 2) \leq 0$

Solução 2:

$$(x + 9)(2x - 2) \leq 0 \iff 2x^2 + 16x - 18 \leq 0$$

$$f(x) = 2x^2 + 16x - 18 \quad (a = 2, b = 16, c = -18)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (16)^2 - 4(2)(-18) = 256 + 144 = 400 > 0$$

Portanto, f possui dois zeros.

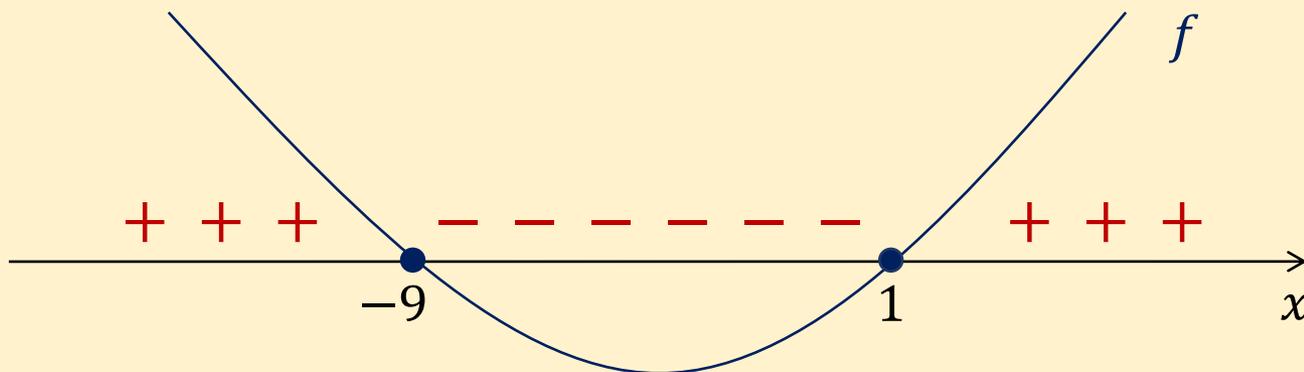
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 \pm \sqrt{400}}{2(2)} = \frac{-16 \pm 20}{4} \implies x_1 = \frac{-16 - 20}{4} = -9$$
$$\implies x_2 = \frac{-16 + 20}{4} = 1$$

Como $a = 2 > 0$ temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.

Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: $(x + 9)(2x - 2) \leq 0$

Solução 2:



Lembre que

$$(x + 9)(2x - 2) \leq 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 16x - 18 \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 0$$

Portanto, $S = [-9, 1]$

Exercícios Propostos



Exercícios



1) Resolva as inequações abaixo e apresente o conjunto solução em notação de intervalo:

(a) $\frac{2}{x} < \frac{3}{x-4}$

(b) $\frac{1}{x+1} \geq \frac{3}{x-2}$

(c) $x^3 - x^2 - x - 2 > 0$

(d) $x^3 - 3x + 2 \leq 0$

2) Ache todos os valores de x para os quais a expressão dada resulte em um número real:

(a) $\sqrt{x^2 + x - 6}$

(b) $\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$

Exercícios



3) Resolva as inequações abaixo e apresente o conjunto solução na reta numérica:

(a) $(x^2 + x - 2)(-x + 2) \leq 0$

(d) $\frac{x - 2}{x + 3} > 0$

(b) $x(1 - x)(x + 4) < 0$

(e) $\frac{3x - 1}{x + 1} \leq 2$

(c) $\frac{2x + 1}{x - 2} < 1$

(f) $-1 < 2x - 3 \leq x$

4) Determine o domínio das seguintes funções:

(a) $y = \sqrt{x(x - 5)}$

(c) $\sqrt{\frac{x - 2}{x + 4}}$

(b) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 15}$

(d) $y = \sqrt{\frac{x - 1}{-x + 3}} - \sqrt{\frac{-x^2 + 1}{x^2 - 4x}}$

Exercícios



5) Determine o conjunto solução das seguintes desigualdades:

$$(a) \quad m + \frac{3 - m^2}{m - 2} \geq -3$$

$$(b) \quad \frac{(x - 1)(x + 3)}{x - 5} > 0$$

6) Dadas as funções $f(x) = \frac{2x - 1}{x - 2}$ e $g(x) = 1$ determine os valores reais de x para que se tenha: $f(x) > g(x)$

Respostas



Exercício 1:

$$(a) S =]-8,0[\cup]4, +\infty[$$

$$(b) S = \left] -\infty, -\frac{5}{2} \right] \cup]-1,2[$$

$$(c) S =]2, +\infty[$$

$$(d) S =]-\infty, -2] \cup \{1\}$$

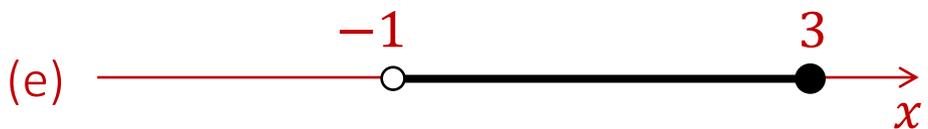
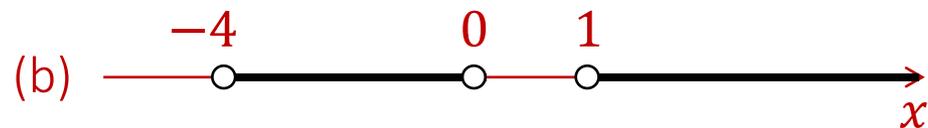
Exercício 2:

$$(a) S =]-\infty, -3] \cup [2, +\infty[$$

$$(b) S =]-\infty, -2] \cup]1, +\infty[$$

Respostas

Exercício 3:



Respostas



Exercício 4:

(a) $S =]-\infty, 0] \cup [5, +\infty[$

(c) $S =]-\infty, -4[\cup [2, +\infty[$

(b) $S =]-\infty, -3] \cup [5, +\infty[$

(d) $S = [1, 3[$

Exercício 5:

(a) $S =]-\infty, 2[\cup [3, +\infty[$

(b) $S =]-3, 1[\cup]5, +\infty[$

Exercício 6: $S =]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$

Monitorias!!



Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

<http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/monitorias>

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

<http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA>

O GAMA possui monitorias de:

- Matemática Elementar, Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e equivalentes)
 - ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
 - Cálculo A e B, Cálculo 2, Cálculo II e Cálculo 3 (e equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.