Universidade Federal de Pelotas
Instituto de Física e Matemática
Pró Reitoria de Ensino

Atividades de Revisão em Matemática

Projeto **GAMA**
Grupo de Apoio em Matemática
2022

Prefácio

Este material tem como objetivo reunir, de forma resumida, os principais conteúdos de Matemática Básica, Funções, Funções Trigonométricas, Exponenciais e Logarítmicas, Limites, Derivadas e Integrais, a fim de ajudar os alunos em suas disciplinas iniciais de cálculo.

A apostila está dividida em 6 (seis) capítulos e cada capítulo em aulas. Após cada aula, são propostos exercícios com a resposta em seguida. É possível acompanhar as aulas através das vídeo aulas disponíveis no canal do Projeto GAMA no YouTube, http://l.ufpel.edu.br/YouTubeGAMA .

Bons estudos!

SUMÁRIO

Capítulo 1: Matemática Básica

1. Aula 1

1.1 Conjuntos Numéricos

Números naturais

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

Subconjunto notável

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$ Naturais positivos

Números inteiros

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Subconjuntos notáveis

$\mathbb{Z}_- = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, \}$ Inteiros não- positivos

$\mathbb{Z}_+ = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ Inteiros não- negativos

$\mathbb{Z}_-^* = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1\}$ Inteiros negativos

$\mathbb{Z}_+^* = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ Inteiros positivos

$\mathbb{Z}^* = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ Inteiros não nulos

Números racionais

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

Decimais exatas

Dízimas periódicas

Subconjuntos notáveis $\mathbb{Q}_- \quad \mathbb{Q}_+ \quad \mathbb{Q}_-^* \quad \mathbb{Q}_+^* \quad \mathbb{Q}^*$

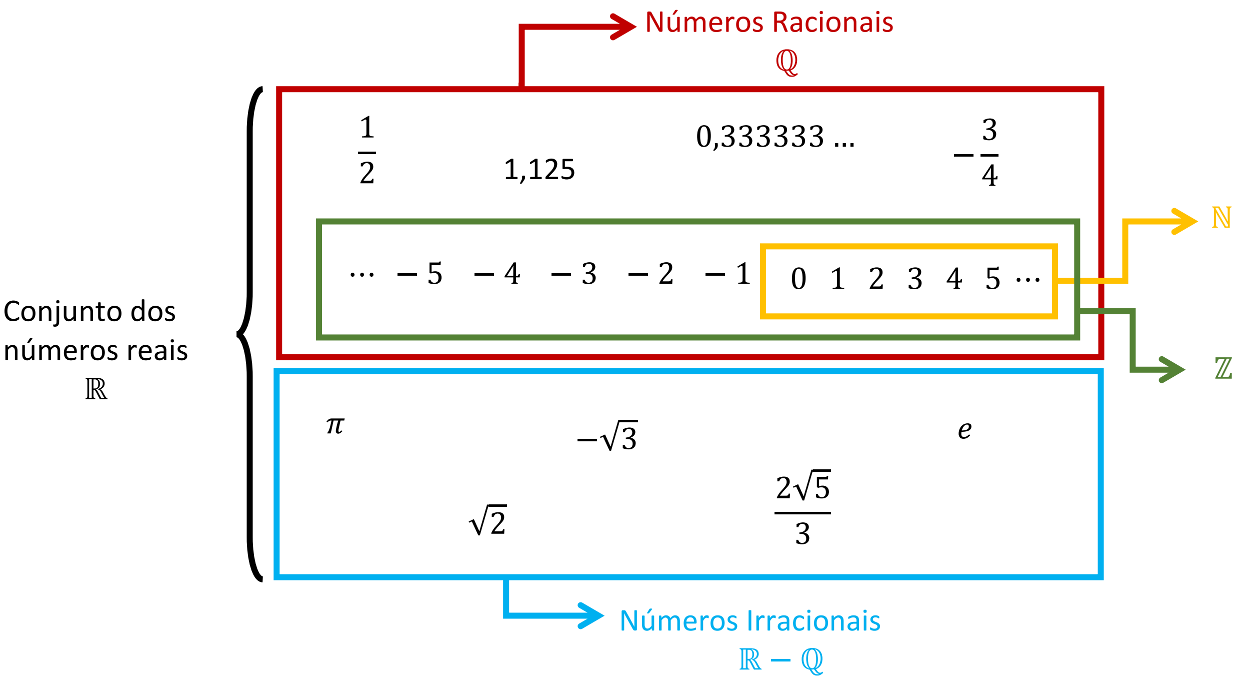
Números reais

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$

Irracionais
Todos os números reais
que não são racionais

Subconjuntos notáveis $\mathbb{R}_- \quad \mathbb{R}_+ \quad \mathbb{R}_-^* \quad \mathbb{R}_+^* \quad \mathbb{R}^*$

Representação dos conjuntos numéricos por diagramas



1.2 Pertinência e inclusão

Pertinência

Relaciona elemento e conjunto

$\in$	$\notin$
Pertence	Não pertence

Inclusão

Relaciona dois conjuntos.

$\subset$	$\not\subset$	$\supset$	$\not\supset$
Está contido	Não está contido	Contém	Não contém

O elemento x pertence ao conjunto A

$$\boldsymbol{x \in A}$$

O elemento x não pertence ao conjunto A

$$\boldsymbol{x \notin A}$$

A é subconjunto B

$$\mathbf{A \subset B}$$

$$\mathbf{B \supset A}$$

Todo elemento de A é também elemento de B

A não é subconjunto B

$$\mathbf{A \not\subset B}$$

$$\mathbf{B \not\supset A}$$

Nem todos elementos de A são elemento de B

Exemplos: Em cada caso, complete as lacunas com os símbolos $\in, \notin, \subset, \not\subset \supset, \not\supset$ da forma mais conveniente:

a) 2____$\mathbb{N}$

b) -5____$\mathbb{Z}$

c) -5____$\mathbb{N}$

d) 0____$\mathbb{N}^*$

e) $\{1, 2, 3\}$____$\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

f) $\mathbb{N}$____$\mathbb{Z}$

g) $\{-1, 0, 2\}$_____$\mathbb{N}$

h) $\mathbb{N}$____$\mathbb{Z}$____$\mathbb{Q}$____$\mathbb{R}$

i) $\mathbb{Z}$____$\mathbb{Q}$

j) $\mathbb{R}$____$\mathbb{Q}$

k) $\mathbb{N}$____$\mathbb{Z}^*$

Respostas:

a) $\in$ b) $\in$ c) $\notin$ d) $\notin$ e) $\subset$ f) $\subset$ g) $\not\supset$ h) $\subset, \subset, \subset$ i) $\not\supset$ j) $\supset$ k) $\not\subset$

1.3 Regra de sinais

Somas e subtrações:

Sinais iguais: soma-se e conserva o sinal.

Sinais diferentes: subtrai-se e conserva-se o sinal do maior (em módulo).

Exemplos:

$8 + 3 = 11$ $-7 - 3 = -10$ $5 - 3 = 2$ $-10 + 4 = -6$

Multiplicações e divisões:

Sinais iguais: resulta em sinal positivo.

Sinais diferentes: resulta em sinal negativo.

Exemplos:

$(2)\,.\,(3) = 6$ $(4)\,.\,(-8) = -32$ $(-7)\,.\,(2) = 15$ $(-5)\,.\,(-3) = 15$

1.4 Intervalos reais

Intervalo aberto

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

Intervalo fechado

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

Intervalo semiaberto à esquerda

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

Intervalo semiaberto à direita

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

Intervalo ilimitado aberto à esquerda

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

Intervalo ilimitado fechado à esquerda

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

Intervalo ilimitado aberto à direita

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

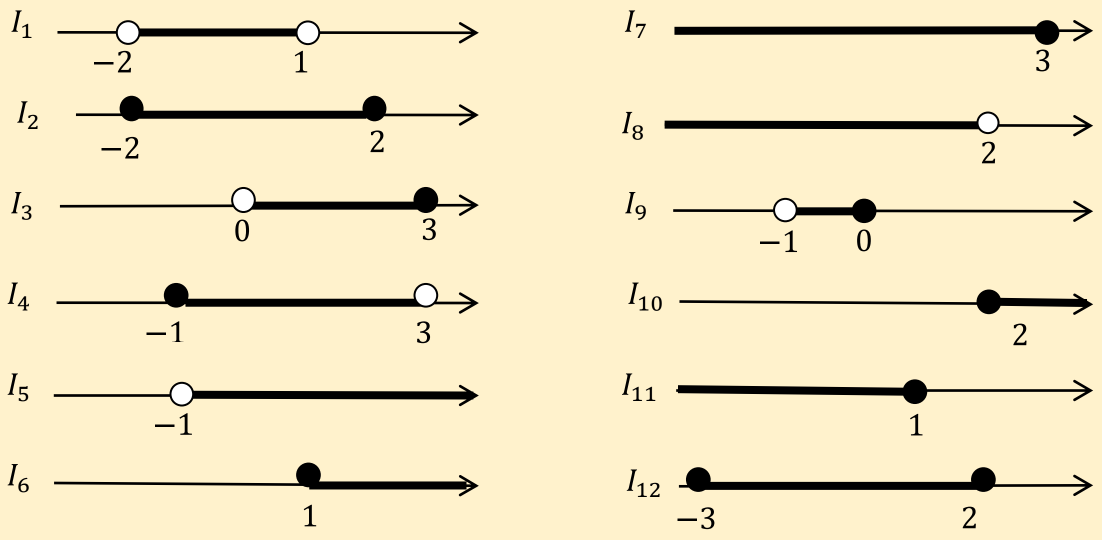
Intervalo ilimitado fechado à direita

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$$

Exemplo: Represente os seguintes intervalos na reta real:

$a)\ I_1 = (-2,1)$
$b)\ I_2 = [-2,2]$
$c)\ I_3 = (0,3]$
$d)\ I_4 = [-1,3)$
$e)\ I_5 = (-1,+\infty)$
$f)\ I_6 = [1,+\infty)$
$g)\ I_7 = (-\infty,3]$
$h)\ I_8 = (-\infty,2)$
$i)\ I_9 = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 0\}$
$j)\ I_{10} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$
$k)\ I_{11} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$
$l)\ I_{12} = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 2\}$

Solução:



1.5 Operações com Intervalos

União

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A ou B

Interseção

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Elementos que pertencem simultaneamente aos conjuntos A e B

Diferença

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Elementos que pertencem ao conjunto A e não pertencem ao conjunto B

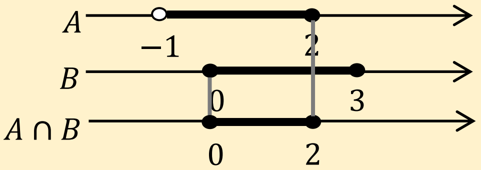
Complementar

$$A' = \{x \mid x \notin A\}$$

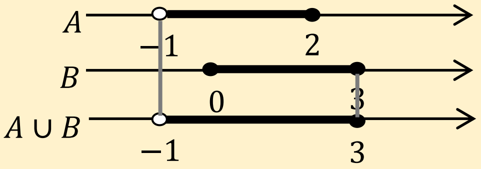
Elementos que não pertencem ao conjunto A

Exemplo: Sendo $A = (-1, 2]$ e $B = [0,3]$, determine $A \cup B$ e $A \cap B$:

Solução:



$A \cap B = [0, 2]$

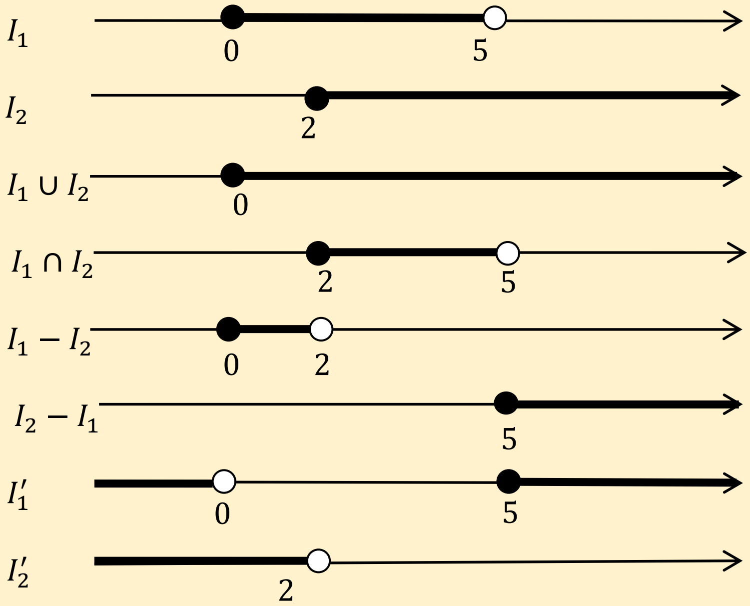


$A \cup B = (-1, 3]$

Exemplo: Sendo $I_1 = [0, 5)$ e $I_2 = [2, +\infty)$, determine:

$a)\ I_1 \cup I_2$ $\quad b)\ I_1 \cap I_2$ $\quad c)\ I_1 - I_2$ $\quad d)\ I_2 - I_1$ $\quad e)\ I_1'$ $\quad f)\ I_2'$

Solução:



1.6 Decomposição em fatores primos

Definição: Um número natural p é chamado de número primo se $p \geq 2$ e p é divisível apenas por 1 e por p.

Exemplos:

2 é primo

3 é primo

4 Não é primo
$4 = 2 . 2$
Divisível por 2

5 é primo

6 Não é primo
$6 = 2 . 3$
Divisível por 2 e 3

Exemplo: Em cada caso, decomponha o número dado como um produto de fatores primos:

$a)$ 12 $\qquad b)$ 125 $\qquad c)$ 232

Solução:

$$a)\quad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ \hline 1 & 2^2 \cdot 3 \end{array}$$

Decomposição em fatores primos
$12 = 2^2 \cdot 3$

$$b)\quad \begin{array}{r|l} 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ \hline 1 & 5^3 \end{array}$$

Decomposição em fatores primos
$125 = 5^3$

$$c)\quad \begin{array}{r|l} 232 & 2 \\ 116 & 2 \\ 58 & 2 \\ 29 & 29 \\ \hline 1 & 2^3 \cdot 29 \end{array}$$

Decomposição em fatores primos
$232 = 2^3 \cdot 29$

1.7 Mínimo múltiplo comum

Definição: O mínimo múltiplo comum de dois inteiros positivos a e b, denotado por $\mathrm{mmc}(a,b)$ é o menor múltiplo comum de a e b.

Exemplos: Encontre

$$\mathrm{mmc}(6,15)$$

Solução: Note que os múltiplos positivos de 6 e de 15 são:

$$M(6) = \{6,12,18,24,30,36,42,\dots\} \quad \text{e} \quad M(15) = \{15,30,45,\dots\}$$

Portanto,

$$\mathrm{mmc}(6,15) = 30 \qquad \text{Menor múltiplo comum de } 6 \text{ e } 15$$

Na prática, encontra-se o $\mathrm{mmc}(6,15)$ utilizando-se o seguinte método prático, que utiliza a forma fatorada de a e b:

$$\begin{array}{c|l} 6 - 15 & 2 \\ 3 - 15 & 3 \\ 1 - 5 & 5 \\ \hline 1 - 1 & 2\cdot 3\cdot 5 \end{array}$$

Portanto,

$$\mathrm{mmc}(6,15) = 2\cdot 3\cdot 5 = 30$$

Pode-se calcular o mínimo múltiplo comum entre três ou mais números utilizando-se um método parecido ao do exemplo anterior.

Exemplo: Encontre

$$mmc(10,28,35)$$

Solução: Utilizando a fatoração simultânea de10, 28 e 35, tem-se:

$$\begin{array}{c|l} 10 - 28 - 35 & 2 \\ 5 - 14 - 35 & 2 \\ 5 - 7 - 35 & 5 \\ 1 - 7 - 7 & 7 \\ \hline 1 - 1 - 1 & 2^2\cdot 5\cdot 7 \end{array}$$

Portanto,

$$\mathrm{mmc}(10,28,35) = 2^2\cdot 5\cdot 7 = 140$$

1.8 Operações e propriedades das frações

Igualdade de frações

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a\cdot d = b\cdot c$$

Duas frações são iguais sempre que a multiplicação cruzada resultar em números iguais.

Exemplo:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \quad pois \quad \underbrace{2\cdot 6}_{12} = \underbrace{3\cdot 4}_{12}$$

Exemplo:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad pois \quad \underbrace{1\cdot 2}_{2} = \underbrace{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}_{2}$$

Simplificação

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$$

Fatores comuns ao numerador e denominador podem ser simplificados.

Exemplo:

$$\frac{15}{12} = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{5}{4}$$

Exemplo:

$$\frac{25a}{5ab} = \frac{5 \cdot 5 \cdot a}{5 \cdot a \cdot b} = \frac{5}{b}$$

Soma/subtração

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{\frac{m}{b} \cdot a \pm \frac{m}{d} \cdot c}{m}$$

$m = m.m.c.(b, d)$ mínimo múltiplo comum entre b e d.

Exemplo:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{5} = \frac{\frac{10}{2} \cdot 1 + \frac{10}{5} \cdot 3}{10} = \frac{5+6}{10} = \frac{11}{10}$$

$$\begin{array}{cc|l} 2 & -5 & 2 \\ 1 & -5 & 5 \\ \cline{3-3} 1 & -1 & 2 \cdot 5 \end{array}$$

$$mmc(2,5) = 2 \cdot 5 = 10$$

Exemplo:

$$\frac{3}{4} - \frac{7}{10} = \frac{\frac{20}{4} \cdot 3 - \frac{20}{10} \cdot 7}{20} = \frac{15 - 14}{20} = \frac{1}{20}$$

$$\begin{array}{cc|l} 4 & -10 & 2 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & -5 & 5 \\ \cline{3-3} 1 & -1 & 2 \cdot 2 \cdot 5 \end{array}$$

$$mmc(4,10) = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$$

Multiplicação

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Multiplica-se o de cima pelo de cima e o de baixo pelo de baixo.

Exemplo:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 8} = \frac{3}{40}$$

Exemplo:

$$\frac{a+1}{2a} \cdot \frac{b}{a} = \frac{(a+1) \cdot b}{(2a) \cdot a} = \frac{ab+b}{2a^2}$$

Divisão

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Multiplica-se a primeira pelo inverso da segunda.

Exemplo:

$$\frac{5}{3} \div \frac{2}{7} = \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{2} = \frac{5 \cdot 7}{3 \cdot 2} = \frac{35}{6}.$$

Exemplo:

$$\frac{a^2}{2b} \div \frac{a}{b} = \frac{a^2}{2b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot a \cdot b}{2 \cdot b \cdot a} = \frac{a}{2}.$$

1.9 Operações com frações

Exemplo: Efetue as seguintes operações com frações:

$a)\ \frac{1}{5}+\frac{2}{3}$ $\quad b)\ \frac{1}{8}-\frac{5}{4}$ $\quad c)\ \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}$ $\quad d)\ \frac{4}{9}\div\frac{1}{2}$ $\quad e)\ \frac{3}{4}+\frac{1}{3}-\frac{4}{15}$

Solução:

$$a)\ \frac{1}{5}+\frac{2}{3}=\frac{\frac{15}{5}\cdot 1+\frac{15}{3}\cdot 2}{10}=\frac{3+10}{15}=\frac{13}{15}.$$

$$\begin{array}{ll|l} 5 & -3 & 3 \\ 5 & -1 & 5 \\ \hline 1 & -1 & 3\cdot 5 \end{array}$$

$$mmc(5,3)=3\cdot 5=15$$

$$b)\ \frac{1}{8}-\frac{5}{4}=\frac{\frac{8}{8}\cdot 1-\frac{8}{4}\cdot 5}{8}=\frac{1-10}{8}=-\frac{9}{8}.$$

$$\begin{array}{ll|l} 8 & -4 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ \hline 1 & -1 & 2\cdot 2\cdot 2 \end{array}$$

$$mmc(8,4)=2^3=8$$

$$c)\ \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}=\frac{1\cdot 5}{3\cdot 2}=\frac{5}{6}.$$

$$d)\ \frac{4}{9}\div\frac{1}{2}=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{1}=\frac{4\cdot 2}{9\cdot 1}=\frac{8}{9}.$$

$$\begin{array}{lll|l} 4 & -3 & -15 & 2 \\ 2 & -3 & -15 & 2 \\ 1 & -3 & -15 & 3 \\ 1 & -1 & -\ 5 & 5 \\ \hline 1 & -\ 1 & -\ 1 & 2^2\cdot 3\cdot 5 \end{array}$$

$$mmc(4,3,15)=2^2\cdot 3\cdot 5=60$$

$$e)\ \frac{3}{4}+\frac{1}{3}-\frac{4}{15}=\frac{\frac{60}{4}\cdot 3+\frac{60}{3}\cdot 1-\frac{60}{15}\cdot 4}{60}=\frac{15\cdot 3+20\cdot 1-4\cdot 4}{60}=\frac{45+20-16}{60}=\frac{49}{60}.$$

1.10 Exercícios Propostos

1) Represente graficamente os intervalos a seguir e verifique se os números

$$5;\quad \pi;\quad \sqrt{5};\quad -0{,}2;\quad 5/2;$$

pertencem a cada intervalo:

$a)\ A=[-2{,}5)$ $\qquad b) B=(2{,}7)$ $\qquad c)\ C=(6,+\infty)$

2) Sendo: $A=[-2,5]$, $B=(2,7)$ e $C=(6,+\infty)$. Determine:

$a)\ A\cap C$ $\qquad b)\ A\cap B$ $\qquad c)\ \ A-B$

$d)\ A\cup C$ $\qquad e)\ (A\cup C)\cup B$ $\qquad f)\ (A-C)\cap B$

3) Sendo $\mathrm{U}=\mathbb{R}$ represente cada um dos intervalos indicados por compreensão e na reta real:

a) conjunto dos números maiores que -3 e menores que 1;
b) conjunto dos números menores ou iguais a -4;

c) conjunto dos números maiores que −1 ou menores que −3.

4) Realize cada uma das operações envolvendo frações:

$a)\ \frac{3}{5}-\frac{2}{15}+\frac{1}{3}$

$b)\ -\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{3}$

$c)\ \left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{4}\right)$

$d)\ \frac{1}{\left(1+\frac{1}{3}\right)}$

$e)\ \frac{4}{3}\div 2$

$f)\ \frac{-\frac{5}{3}}{\frac{15}{6}}$

5) Calcule:

$a)\ \frac{3}{2}-\frac{1}{5}\div\frac{3}{10}+1$ $\quad b)\ 2+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$ $\quad c)\ \frac{1}{3}+\left[\frac{1}{3}\div\left(\frac{1}{4}+1\right)\right]\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)$

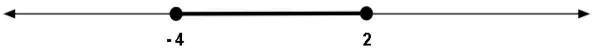
6) Represente graficamente na reta real os seguintes intervalos:

$a)\ \{x\in\mathbb{R}\,|-1<x<3\}$ $\quad b)\ (-\infty,2]$ $\quad c)\ [-3,\frac{1}{2}]$

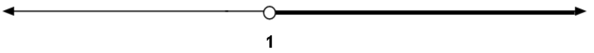
$d)\ \{x\in\mathbb{R}\,|\,2\ \leq x\ <7\}$ $\quad e)\ \{x\in\mathbb{R}\,|\,x\ <4$ $\quad f)\ [0,6)$

7) Escreva os intervalos representados graficamente:

$a)$

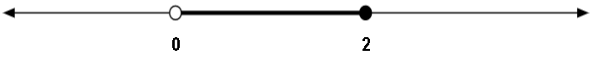


$b)$

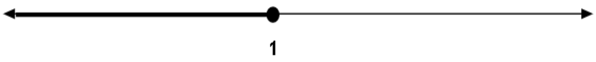


$c)$

$d)$



$e)$



8) Dados os conjuntos a seguir, determine o que se pede.

$a)\ A=[2,4]$ e $B=[3,6]$:

$A\cap B \qquad A\cup B \qquad A-B \qquad B-A$

$b)\ A=\{\,x\in\mathbb{R}\,|\,x<4\}$ e $B=\{\,x\in\mathbb{R}\,|\,x<1\}$:

$A\cap B \qquad A\cup B$

9) Dados os intervalos $A=[-1,4]$, $\mathrm{B}=[1,5]$, $\mathrm{C}=[2,4]$ e $\mathrm{D}=[1,3]$, verifique se 1 pertence ao conjunto $(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})-(\mathrm{C}-\mathrm{D})$.

10) Realize as seguintes operações envolvendo frações:

$a)\ \frac{25}{3}+\frac{5}{2}\div 2$

$b)\ \left(-\frac{3}{4}\right)\div\left(-\frac{5}{2}\right)+\left(\frac{27}{16}\right)$

$c)\ -1+\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{8}$

$d)\ \frac{12}{5}-\frac{24}{15}$

$e)\ \frac{2}{100}+\frac{98}{10}$

$f)\ \frac{27}{8}\div\frac{5}{16}$

$g)\ -2\,\frac{23}{8}-\frac{1}{2}$

$h)\ 2\,\frac{1}{8}+\frac{2}{7}-\frac{81}{9}$

1.11 Respostas

Exercício 1:

$a)\ \pi\,,\sqrt{5}\,,-0{,}2\,,\frac{5}{2}$

$b)\ 5\,,\pi\,,\sqrt{5},5/2$

$c)$ Nenhum

Exercício 2:

$a)\ \emptyset$
$b)\ (2{,}5]$
$c)\ [-2{,}2]$
$d)\ [-2{,}5]\ \cup\ (6,+\infty)$
$e)\ [-2,,+\infty)$
$f)\ (2{,}5]$

Exercício 3:

$a)\ \{x \in \mathrm{R}\ |\text{-}3 < x < 1\}$
$b)\ \{x \in \mathbb{R}\,|\,x\ \leq\ -4\}$
$c)\ \{x \in\ \mathbb{R}\,|\,x < -3\ ou\ x > -1\}$

Exercício 4:

$a)\ \frac{4}{5}$ $b)\ -\frac{8}{21}$ $c)\ \frac{3}{10}$

$d)\ \frac{3}{4}$ $e)\ \frac{2}{3}$ $f)\ -\frac{2}{3}$

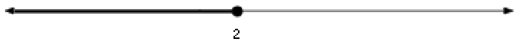
Exercício 5:

$a)\ \frac{11}{6}$ $b)\ \frac{1}{2}$ $c)\ \frac{41}{135}$

Exercício 6:

$a)$

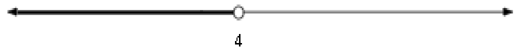
$b)$



$c)$

$d)$

$e)$



$f)$

Exercício 7:

$a)\ \{x \in \mathbb{R}\,\big|\,-4 \leq x \leq 2\}\ ou\ [-4,2]$

$b)\ \{x \in \mathbb{R}\,\big|\,x > 1\}\ ou\ (1,+\infty)$

$c)\ \{x \in \mathbb{R}\,\big|\,-3 < x < 3\}\ ou\ (-3,3)$

$d)\ \{x \in \mathbb{R}\,\big|\,0 < x \leq 2\}\ ou\ (0,2]$

$e)\ \{x \in \mathbb{R}\,\big|\,x \leq 1\}\ ou\ (-\infty,1]$

Exercício 8:

$a)\ A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 3 \leq x \leq 4\}\ ou\ [3,4]$

$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 2 \leq x \leq 6\}\ ou\ [2,6]$

$A - B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 2 \leq x < 3\}\ ou\ [2,3)$

$B - A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 4 < x \leq 6\}\ ou\ (4,6]$

$b)\ A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < 1\}\ ou\ (-\infty, 1)$

$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < 4\}\ ou\ (-\infty, 4)$

Exercício 9:

$\{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 \leq x \leq 3\}\ ou\ [1,3], portanto\ 1 \in (A \cap B) - (C - D).$

Exercício 10:

$a)\ \frac{115}{12}$ $b)\ \frac{159}{80}$ $c)\ -\frac{5}{12}$ $d)\ \frac{4}{5}$

$e)\ \frac{491}{50}$ $f)\ \frac{54}{5}$ $g)\ -\frac{25}{4}$ $h) -\frac{237}{28}$

2. Aula 2

2.1 Potências em $\mathbb{R}$

Dados $a \in \mathbb{R}^*$ e $n \in \mathbb{N}$, definimos a **potência enésima** como:

Expoente

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\boldsymbol{n} \text{ fatores}}$$

Base

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^0 = 1$$

Exemplo: Calcule as seguintes potências:

$a)\ 2^3$ $\qquad b)\ 5^{-2}$ $\qquad c)\ 3^0$

Solução: Utilizando a definição de potência, tem-se:

$$a)\ 2^3 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ Fatores}} = 8 \qquad b)\ 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{\underbrace{5 \cdot 5}_{2 \text{ Fatores}}} = \frac{1}{25} \qquad c)\ 3^0 = 1$$

2.2 Propriedades das potências

Produto de potências de mesma base

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Exemplo:
$$2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$$

Exemplo:
$$3^{2a} \cdot 3^5 = 3^{2a+5}$$

Quociente de potências de mesma base

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Exemplo:
$$\frac{3^5}{3^3} = 3^{5-3} = 3^2$$

Exemplo:
$$\frac{a^{5+b}}{a^c} = a^{5+b-c}$$

Potência de potência

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Exemplo:
$$(5^3)^4 = 5^{3 \cdot 4} = 5^{12}$$

Exemplo:
$$(a^2)^{2b} = a^{2 \cdot 2b} = a^{4b}$$

Fração com expoente negativo

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

Exemplo:
$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

Exemplo:
$$\left(\frac{1}{b}\right)^{-3} = b^3$$

Produto de potências de mesmo expoente

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

Exemplo:
$$2^5 \cdot 3^5 = (2 \cdot 3)^5 = 6^5$$

Exemplo:
$$4 \cdot a^2 = (2 \cdot a)^2$$

Quociente de potências de mesmo expoente

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

Exemplo:
$$\frac{2^7}{5^7} = \left(\frac{2}{5}\right)^7$$

Exemplo:
$$\frac{b^3}{27} = \left(\frac{b}{3}\right)^3$$

Potência de base negativa e expoente par

$$(-a)^n = a^n$$

Exemplo:
$$(-2)^6 = 2^6 = 64$$

Exemplo:
$$(-2x)^2 = (2x)^2 = 4 \cdot x^2$$

Potência de base negativa e expoente ímpar

$$(-a)^n = -a^n$$

Exemplo:
$$(-2)^5 = -2^5 = -32$$

Exemplo:
$$\left(-\frac{1}{2a}\right)^3 = -\frac{1}{8a^3}$$

Exemplo: Calcule as seguintes potências:

$a)\ (-3)^4$ $\quad b)\ (-2)^5$ $\quad c)\ \left(\frac{1}{5}\right)^3$ $\quad d)\ \left(\frac{5}{2}\right)^0$ $\quad e)\ \left(\frac{2}{7}\right)^{-2}$ $\quad f)\ (2^4)^3$

Solução: Utilizando as propriedades de potência, tem-se:

$$a)\ (-3)^4 = 3^4 = 81$$

$$b)\ (-2)^5 = -2^5 = -32$$

$$c)\ \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1^3}{5^3} = \frac{1}{125}$$

$$d)\ \left(\frac{5}{2}\right)^0 = 1$$

$$e)\ \left(\frac{2}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{7^2}{2^2} = \frac{49}{4}$$

$$f)\ (2^4)^3 = 2^{12} = 4096$$

2.3 Potências de Base 10

Com o uso do sistema numérico decimal, as potências de base 10 são particularmente importantes! Note que:

$$\overbrace{10^2}^{Potência\ 2} = 1\overbrace{00}^{2\ Zeros}$$

$$\overbrace{10^3}^{Potência\ 3} = 1\overbrace{000}^{3\ Zeros}$$

$$\overbrace{10^4}^{Potência\ 4} = 1\overbrace{0000}^{4\ Zeros}$$

$$\overbrace{10^5}^{Potência\ 5} = 1\overbrace{00000}^{5\ Zeros}$$

$$\overbrace{10^{-1}}^{Potência\ -1} = \overbrace{0,}^{1\ Zero}\ 1$$

$$\overbrace{10^{-2}}^{Potência\ -2} = \overbrace{0,0}^{2\ Zeros}1$$

$$\overbrace{10^{-3}}^{Potência\ -3} = \overbrace{0,00}^{3\ Zeros}1$$

$$\overbrace{10^{-4}}^{Potência\ -4} = \overbrace{0,000}^{4\ Zeros}1$$

No caso geral:

Expoente positivo

$$\overbrace{10^{\mathrm{n}}}^{Potência\ \mathrm{n}} = 1\overbrace{00\ldots0}^{\mathrm{n}\ Zeros}$$

Expoente negativo

$$\overbrace{10^{-\mathrm{n}}}^{Potência\ -\mathrm{n}} = \overbrace{0,0\ldots0}^{\mathrm{n}\ Zeros}1$$

No geral, quando multiplicamos um número decimal por uma potência 10^{n}, onde n é um número inteiro, podemos dizer que,

“a vírgula anda n casas para a esquerda ou n casas para a direita”

de acordo com o sinal do expoente n.

- ✓ Se n é positivo, a vírgula se desloca n unidades para a direita;
- ✓ Se n é negativo, a vírgula se desloca $|n|$ unidades para a esquerda;

Exemplo: Efetue os seguintes produtos:

$a)\ (12{,}5)\cdot 10^4$ $\qquad$ $b)(12{,}5)\cdot 10^{-4}$

Solução:

$$a)\ (12{,}5)\cdot 10^4=\left(12\,,\underbrace{5000}_{\substack{\text{"A vírgula se desloca}\\ \text{4 casas para a direita "}}}0000\ \ldots\right)\cdot 1\,\overbrace{0.000}^{\text{4 Zeros}}=125.000.$$

$$a)\ (12{,}5)\cdot 10^{-4}=\left(\ldots 000\,\underbrace{0012,}_{\substack{\text{"A vírgula se desloca}\\ \text{4 casas para a esquerda "}}}5\right)\cdot\overbrace{0{,}000}^{\text{4 Zeros}}\,1=0{,}00125.$$

2.4 Unidades de medida

Prefixos das principais unidades de medida

Potências	Prefixo	Símbolo	Metro (m)	Grama (g)	Litro (L)
10^{12}	*Tera*	T	Tm	Tg	Tl
10^9	*Giga*	G	Gm	Gg	Gl
10^6	*Mega*	M	Mm	Mg	Ml
10^3	*Kilo*	k	km	kg	kl
10^2	*Hecto*	h	hm	hg	hl
10	*Deca*	da	dam	dag	dal
10^0			m	g	l
10^{-1}	*Deci*	d	dm	dg	dl
10^{-2}	*Centi*	c	cm	cg	cl
10^{-3}	*Mili*	m	mm	mg	ml
10^{-6}	*Micro*	μ	μm	μg	μl
10^{-9}	*Nano*	n	nm	ng	nl
10^{-12}	*Pico*	ρ	ρm	ρg	ρl

2.5 Conversões de unidades de medida

Comprimento: a unidade padrão é o metro.

Quilômetro	Hectômetro	Decâmetro	Metro	Decímetro	Centímetro	Milímetro
km	hm	dam	m	dm	cm	mm
$10^3 m$	$10^2 m$	$10^1 m$	$10^0 m$	$10^{-1} m$	$10^{-2} m$	$10^{-3} m$
$1.000m$	$100m$	$10m$	$1m$	$0{,}1m$	$0{,}01m$	$0{,}001m$
Múltiplos				Submúltiplos		

Conversão de comprimento

Da direita para a esquerda, divide-se por 10 em cada passo

$\div 10$ $\div 10$ $\div 10$ $\div 10$ $\div 10$ $\div 10$

↶ ↶ ↶ ↶ ↶ ↶

km	hm	dam	m	dm	cm	mm

↪ ↪ ↪ ↪ ↪ ↪

$\cdot 10$ $\cdot 10$ $\cdot 10$ $\cdot 10$ $\cdot 10$ $\cdot 10$

Da esquerda para a direita, multiplica-se por 10 em cada passo

Conversão de área

$\div 10^2$ $\div 10^2$ $\div 10^2$ $\div 10^2$ $\div 10^2$ $\div 10^2$

↶ ↶ ↶ ↶ ↶ ↶

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2

↪ ↪ ↪ ↪ ↪ ↪

$\cdot 10^2$ $\cdot 10^2$ $\cdot 10^2$ $\cdot 10^2$ $\cdot 10^2$ $\cdot 10^2$

Conversão de volume

$\div 10^3$ $\div 10^3$ $\div 10^3$ $\div 10^3$ $\div 10^3$ $\div 10^3$

↶ ↶ ↶ ↶ ↶ ↶

km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3

↪ ↪ ↪ ↪ ↪ ↪

$\cdot 10^3$ $\cdot 10^3$ $\cdot 10^3$ $\cdot 10^3$ $\cdot 10^3$ $\cdot 10^3$

Exemplo: Converta:

$a)$ 5,2 hectômetros para centímetros

$b)$ 130 $milímetros\ para\ metros$

$c)$ $1500m^2\ para\ km^2$

$d)$ $230dam^3\ para\ mm^2$

Solução:

$a)$5,2 $hm\ para\ cm$ ↱ Unidade informada ↱ Unidade pretendida

km	hm	dam	m	dm	cm	mm

↪ ↪ ↪ ↪

$\cdot 10$ $\cdot 10$ $\cdot 10$ $\cdot 10$

$$\begin{array}{ccc} \mathit{Hectômetros} & \Rightarrow & \mathit{Centímetros} \\ 5{,}2 & \Rightarrow & (5{,}2)\cdot 10^4 \\ 5{,}2 & \Rightarrow & (5{,}2)\cdot 10.000 \\ 5{,}2 & \Rightarrow & 52.000 \end{array}$$

Resposta: 5,2 hectômetros equivalem a 52.000 centímetros

$b)$ $130\ mm\ para\ m$

$\div 10$ ↶ $\div 10$ ↶ $\div 10$ ↶

km	hm	dam	m	dm	cm	mm

Unidade pretendida ↲ Unidade informada ↲

$$\begin{array}{ccc} \mathit{Milímetros} & \Rightarrow & \mathit{Metros} \\ 130 & \Rightarrow & 130\cdot 10^{-3} \\ 130 & \Rightarrow & 130\cdot 0{,}001 \\ 130 & \Rightarrow & 0{,}13 \end{array}$$

Resposta: 130 milímetros equivalem a 0,13 metros

$c)$ $1500m^2\ para\ km^2$

$\div 10^2$ ↶ $\div 10^2$ ↶ $\div 10^2$ ↶

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2

↳ Unidade pretendida ↳ Unidade informada

$$\begin{array}{ccc} \mathit{Metros\ quadrados} & \Rightarrow & \text{Quilômetros quadrados} \\ 1500 & \Rightarrow & 1500\cdot 10^{-6} \\ 1500 & \Rightarrow & 1500\cdot 0{,}000001 \\ 1500 & \Rightarrow & 0{,}0015 \end{array}$$

Resposta: 1500 metros quadrados equivalem a 0,0015 quilômetros quadrados.

$d)$ $230dam^3\ para\ mm^2$

Unidade informada ↰ Unidade pretendida ↰

km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3

↪ $\cdot 10^3$ ↪ $\cdot 10^3$ ↪ $\cdot 10^3$ ↪ $\cdot 10^3$

$$\begin{array}{ccc} \mathit{Decâmetros\ cúbicos} & \Rightarrow & \text{Milímetros cúbicos} \\ 230 & \Rightarrow & 230\cdot 10^{12} \\ 230 & \Rightarrow & 230\cdot 1000000000000 \\ 230 & \Rightarrow & 230.000.000.000.000 \end{array}$$

Resposta: 230 decâmetros cúbicos equivalem a 230.000.000.000.000 milímetros cúbicos.

2.6 Exercícios Propostos

1) Calcule as seguintes potências:

$a)\ (-2)^3$ $b)\ (-2)^2$ $c)\ -2^2$ $d)\ 2^{-2}$

$e)\ (-2)^{-2}$ $f)\ -3^{-3}$ $g)\ 3^{2^3}$ $h)\ (3^2)^3$

2) Calcule as seguintes potências:

$a)\ \left(\frac{2}{3}\right)^3$ $b)\ \left(-\frac{3}{4}\right)^3$ $c)\ \left(-\frac{3}{4}\right)^2$ $d)\ \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

$e)\ \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$ $f)\ \left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$ $g)\ \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$ $h)\ \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$

3) Efetue os seguintes produtos:

$a)\ 25 \cdot 10^5$

$b)\ (3{,}2) \cdot 10^4$

$c)\ (0{,}041) \cdot 10^2$

$d)\ (0{,}0243) \cdot 10^7$

$e)\ 3 \cdot 10^{-2}$

$f)\ 452 \cdot 10^{-5}$

$g)\ (7{,}02) \cdot 10^{-3}$

$h)\ 224{,}5 \cdot 10^{-1}$

4) Efetue as seguintes conversões:

$a)$ 512 hectômetros para metros;

$b)$ 1255 decímetros para decâmetros;

$c)$ 1,2 quilômetros para centímetros;

$d)$ 0,230 decâmetros para decímetros;

$e)$ $(1{,}7) \cdot 10^5$milímetros para metros;

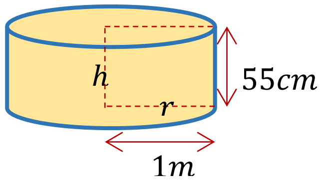
$f)$ 1200 metros quadrados para hectômetros quadrados;

$g)$ 1,25 decâmetros quadrados para metros quadrados;

$h)$ 3,42 metros cúbicos para decímetros cúbicos.

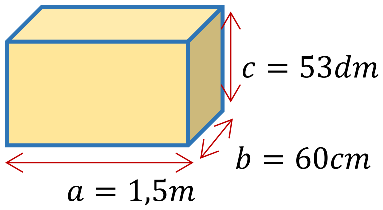
5) O metro cúbico, no Sistema Internacional de Unidade (SI), é a unidade fundamental para o cálculo do volume/capacidade. Sabendo que 1 litro equivale a 1 decímetro cúbico, determine a capacidade, em litros, dos seguintes reservatórios:

$a)$

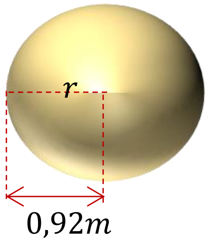


Utilizar $\pi \cong 3.14$

$b)$



$c)$



Utilizar $\pi \cong 3{,}14$

6) Calcule as seguintes potências:

$a)\ 3^5.3^{-3}$

$b)\ (-5)^{2^3}$

$c)\ (-4)^{2+5}$

$d)\ \left(-\frac{1}{3}\right)^4$

$e)\ ((-5)^2)^3$

$f)\ (-5^2)^3$

$g)\ \left(\left(-\frac{1}{5}\right)^3\right)^{2-3}$

$h)\ \left(\frac{2^3}{5}\right)^3$

$i)\ ((-6)^3)^5.(-216)^{-7+2}$

$j)\ \left(\frac{5^3}{5^6}\right)$

7) Calcule os seguintes produtos:

$a)\ 3{,}75\ .\ 10^3$

$b)\ 49.10^3.0{,}1.10^{-1}$

$c)\ 0{,}005.10^2$

$d)\ 10007{,}06.10^{-3}$

$e)\ 0{,}1005.10^4$

$f)\ 65345{,}7.10^{-5}$

$g)\ 0{,}120005.10^1$

$h)\ 0{,}007.10^{-2}$

$i)\ 2{,}504.10^7$

$j)\ 679.10^{-1}$

8) Efetue as conversões de unidades como solicitado em cada letra:

$a)\ 25.10^{-3}\ hm\ \rightarrow m$

$b)\ 0{,}0000012Tm\ \rightarrow m$

$c)\ 2005\ cm\ \rightarrow km$

$d)\ 2\ dam\ \rightarrow cm$

$e)\ 37.10^3\ mm\ \rightarrow dm$

$f)\ 1.10^9\ pm\ \rightarrow \mu m$

$g)\ 342\ \mu m^2 \rightarrow nm^2$

$h)\ 100\ km^3\ \rightarrow m^3$

$i)\ 49.10^6\ Mm \rightarrow Gm$

$j)\ 999{,}8\ hm\ \rightarrow dam$

9) Sabendo que 1L (um litro) equivale a $1dm^3$, quantos litros possui um reservatório d'água de $50m^3$? Foram consumidos $25000cm^3$ de água do reservatório. Quantos litros restaram?

2.7 Respostas

Exercício 1:

$a) -8$ $b)\ 4$ $c) -4$

$d)\ \frac{1}{4}$ $e)\ \frac{1}{4}$ $f) -\frac{1}{27}$

$g)\ 6561$ $h)\ 729$

Exercício 2:

$a)\ \frac{8}{27}$ $b) -\frac{27}{64}$ $c)\ \frac{9}{16}$ $d)\ \frac{9}{4}$

$e)\ \frac{2}{3}$ $f)\ 64$ $g) -\frac{27}{8}$ $h)\ 9$

Exercício 3:

$a)\ 2500000$ $b)\ 32000$ $c)\ 4{,}1$

$d)\ 243000$ $e)\ 0{,}03$ $f)\ 0{,}00452$

$g)\ 0{,}00702$ $h)\ 22{,}45$

Exercício 4:

$a)\ 51.200$ $b)\ 12{,}55$ $c)\ 120.000$

$d)\ 23$ $e)\ 170$ $f)\ 0{,}12$

$g)\ 125$ $h)\ 3.420$

Exercício 5:

$a)\ Volume \cong\ 1.727\ litros$

$b)\ Volume \cong 4.770\ litros$

$c)\ Volume\ \cong 3.260{,}11\ litros$

Exercício 6:

$a)\ 9$ $b)\ 390625$ $c)\ -16384$

$d)\ \frac{1}{81}$ $e)\ 15625$ $f)\ -15625$

$g) - 125$ $h)\ \frac{512}{125}$ $i)\ 1$

$j)\ \frac{1}{125}$

Exercício 7:

$a)\ 3750$ $b)\ 490$ $c)\ 0{,}5$

$d)\ 10{,}00706$ $e)\ 1005$ $f)\ 0{,}653457$

$g)\ 1{,}20005$ $h)\ 0{,}00007$ $i)\ 25040000$

$j)\ 67{,}9$

Exercício 8:

$a)\ 2{,}5\ m$ $b)\ 1200000\ m$

$c)\ 0{,}02005\ km$ $d)\ 2000\ cm$

$e)\ 370dm$ $f)\ 1000\ \mu m$

$g)\ 342.10^{6}\ nm^{2}$ $h)\ 1.10^{11}\ m^{3}$

$i)\ 49.10^{3}\ Gm$ $j)\ 9998\ dam$

Exercício 9:

$50000\ litros, 49975\ litros.$

3. Aula 3

3.1 Raízes em $\mathbb{R}$

Dados $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$, definimos a raiz enésima como:

Índice

$$\sqrt[n]{b} = a \text{ se, e somente se, } a^n = b.$$

Radicando

3.2 Propriedades das Raízes

Raiz como expoente fracionário

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Exemplo:

$$\sqrt{6} = 6^{\frac{1}{2}}$$

Exemplo:

$$\sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$$

Potência de raiz

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Exemplo:

$$\left(\sqrt{x}\right)^6 = \sqrt{x^6}$$

Exemplo:

$$\left(\sqrt[5]{3}\right)^2 = \sqrt[5]{9}$$

Produto de raízes de mesmo índice

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Exemplo:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10}$$

Exemplo:

$$\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{2b}$$

Raiz de raiz

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Exemplo:

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[12]{2}$$

Exemplo:

$$\sqrt[5]{\sqrt{x}} = \sqrt[10]{x}$$

Quociente de raízes de mesmo índice

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Exemplo:

$$\frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[4]{\frac{6}{5}}$$

Exemplo:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$$

Exemplo: Calcule:

$a)\ \sqrt{1024}$ $\quad b)\ \sqrt[5]{32}$ $\quad c)\ (-8)^{\frac{1}{3}}$ $\quad d)\ 16^{\frac{3}{2}}$ $\quad e)\ \left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}$

Solução: Utilizando a definição de raiz e suas propriedades, tem-se:

$$a)\ \sqrt{1024} = \sqrt{2^{10}} = 2^{\frac{10}{2}} = 2^5 = 32$$

$$b)\ \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$$

$$c)\ (-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$$

$$d)\ 16^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{16^3} = \sqrt{(2^4)^3} = \sqrt{2^{12}} = 2^{\frac{12}{2}} = 2^6 = 64$$

$$e)\ \left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}} = (81)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$$

Exemplo: Simplifique ao máximo:

$a)\ \sqrt{24}$ $\quad b)\ \sqrt[3]{32}$ $\quad c)\ \sqrt[4]{512}$

Solução: Utilizando a definição de raiz e suas propriedades, tem-se:

$$a)\ \sqrt{24} = \sqrt{2^2\cdot 2\cdot 3} = \sqrt{2^2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = 2\cdot\sqrt{2\cdot 3} = 2\sqrt{6}$$

$$b)\ \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^3\cdot 2^2} = \sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2^2} = 2\sqrt[3]{4}$$

$$c)\ \sqrt[4]{512} = \sqrt[4]{2^9} = \sqrt[4]{2^4\cdot 2^4\cdot 2} = \sqrt[4]{2^4}\cdot\sqrt[4]{2^4}\cdot\sqrt[4]{2} = 2\cdot 2\cdot\sqrt[4]{2} = 4\sqrt[4]{2}$$

3.3 Racionalização

Racionalizar uma fração significa multiplicar e dividir a fração por um fator racionalizante de modo a simplificar as raízes do denominador.

Os casos mais comuns de racionalização são os seguintes:

Caso 1: o denominador é uma raiz quadrada.

Neste caso, o fator racionalizante é a própria raiz quadrada que aparece no denominador.

Exemplo	Fator	Forma racionalizada
$\frac{1}{\sqrt{a}}$	$\sqrt{a}$	$\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^2}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{2}{\sqrt{6}}$	$\sqrt{6}$	$\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6^2}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Caso 2: o denominador é uma raiz de índice n.
Neste caso, se no denominador há a raiz $\sqrt[\mathrm{n}]{\mathrm{a}^{\mathrm{m}}}$, o fator racionalizante será $\sqrt[\mathrm{n}]{\mathrm{a}^{\mathrm{n-m}}}$.

Exemplo	Fator	Forma racionalizada
$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$	$\sqrt[n]{a^{n-m}}$	$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}\cdot\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}}=\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^n}}=\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$
$\frac{1}{\sqrt[5]{7^2}}$	$\sqrt[5]{7^3}$	$\frac{1}{\sqrt[5]{7^2}}\cdot\frac{\sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^3}}=\frac{\sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^5}}=\frac{\sqrt[5]{7^3}}{7}=\frac{\sqrt[5]{343}}{7}$
$-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$	$\sqrt[3]{2^2}$	$-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}}=-\frac{3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}}=-\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$
$\frac{5}{\sqrt[4]{8}}$	$\sqrt[4]{2}$	$\frac{5}{\sqrt[4]{8}}=\frac{5}{\sqrt[4]{2^3}}=\frac{5}{\sqrt[4]{2^3}}\cdot\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}}=\frac{5\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^4}}=\frac{5\sqrt[4]{2}}{2}$

Caso 3: o denominador é uma soma/diferença envolvendo uma raiz quadrada.
Neste caso, o fator racionalizante será o "conjugado" do denominador.

Exemplo	Fator	Forma racionalizada
$\frac{1}{\sqrt{a}+b}$	$\sqrt{a}-b$	$\frac{1}{\sqrt{a}+b}\cdot\frac{\sqrt{a}-b}{\sqrt{a}-b}=\frac{\sqrt{a}-b}{(\sqrt{a})^2-\sqrt{a}\cdot b+\sqrt{a}\cdot b-b^2}=\frac{\sqrt{a}-b}{a-b^2}$
$\frac{1}{\sqrt{a}-b}$	$\sqrt{a}+b$	$\frac{1}{\sqrt{a}-b}\cdot\frac{\sqrt{a}+b}{\sqrt{a}+b}=\frac{\sqrt{a}+b}{(\sqrt{a})^2-\sqrt{a}\cdot b+\sqrt{a}\cdot b-b^2}=\frac{\sqrt{a}+b}{a-b^2}$
$\frac{3}{\sqrt{2}+1}$	$\sqrt{2}-1$	$\frac{3}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}=\frac{3(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2})^2-\sqrt{2}+\sqrt{2}-(1)^2}=\frac{3\sqrt{2}-3}{2-1}=3\sqrt{2}-3$
$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}-2}$	$\sqrt{7}+2$	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}-2}\cdot\frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}+2}=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7})^2-2\sqrt{7}+2\sqrt{7}-(2)^2}=\frac{\sqrt{35}+2\sqrt{5}}{3}$
$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$	$\sqrt{3}+\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-\sqrt{2}\sqrt{3}+-\sqrt{2}\sqrt{3}-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$

Exemplo: Racionalize as frações:

$a)\ \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad b)\ \frac{2}{3\sqrt{5}}$ $\quad c)\ \frac{2}{\sqrt[3]{2}}$ $\quad d)\ \frac{2}{\sqrt[5]{9}}$ $\quad e)\ \frac{1}{3-\sqrt{2}}$ $\quad f)\ \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

Solução:

$$a)\ \frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$b)\ \frac{2}{3\sqrt{5}}=\frac{2}{3\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{3\cdot\sqrt{25}}=\frac{2\sqrt{5}}{3\cdot 5}=\frac{2\sqrt{5}}{15}.$$

$$c)\ \frac{2}{\sqrt[3]{2}}=\frac{2}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}}=\frac{2\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}}=\frac{2\sqrt[3]{2^2}}{2}=\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3]{4}.$$

$$d)\ \frac{2}{\sqrt[5]{9}}=\frac{2}{\sqrt[5]{3^2}}=\frac{2}{\sqrt[5]{3^2}}\cdot\frac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^3}}=\frac{2\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}}=\frac{2\sqrt[5]{3^3}}{3}=\frac{2\sqrt[5]{27}}{3}.$$

$$e)\ \frac{1}{3-\sqrt{2}}=\frac{1}{3-\sqrt{2}}\cdot\frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}=\frac{3+\sqrt{2}}{3^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{3+\sqrt{2}}{9-2}=\frac{3+\sqrt{2}}{7}.$$

3.4 Exercícios Propostos

1) Simplifique os radicais:

$a)\ \sqrt{576}$ $\quad b)\ \sqrt[3]{64}$ $\quad c)\ \sqrt{12}$ $\quad d)\ \sqrt[3]{2^7}$

2) Reduza os radicais a seguir e efetue as operações indicadas em cada caso:

$a)\ \sqrt{2}-\sqrt{8}$ $\quad b)\ \sqrt{3}-2\sqrt{12}+\sqrt{27}$

$c)\ \sqrt{125}+\sqrt{20}-\sqrt{45}$ $\quad d)\ \sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{250}+\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{16}$

3) Calcule cada produto abaixo:

$a)\ \left(2\sqrt{5}+8\right)\left(\sqrt{5}-1\right)$ $\quad b)\ \left(-5+3\sqrt{2}\right)\left(4-\sqrt{2}\right)$

$c)\ \left(\sqrt{6}-2\right)\left(9-\sqrt{6}\right)$ $\quad d)\ \left(1-2\sqrt{7}\right)\left(1+2\sqrt{7}\right)$

4) Calcule o valor numérico da expressão:

$$8^{\frac{1}{2}}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[6]{8}-32^{\frac{1}{2}}+128^{\frac{1}{2}}-\sqrt{32}$$

5) Efetue as operações com as raízes:

$a)\ \sqrt{2}\cdot\sqrt{18}$ $\quad b)\ \sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{6}$ $\quad c)\ \sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{18}$ $\quad d)\ \sqrt{6}\div\sqrt{3}$

6) Introduza cada expressão a seguir em um só radical:

$a)\ \sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{5}$ $\quad b)\ \sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[4]{2}$ $\quad c)\ \sqrt[3]{40}\div\sqrt{2}$ $\quad d)\sqrt{8}\div\sqrt[3]{16}$

7) Determine o valor de x na expressão:

$$x=\sqrt{7+\sqrt[3]{6+\sqrt[4]{16}}}$$

8) Racionalize as frações abaixo:

$a)\ \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad b)\ \frac{2}{3\sqrt{3}}$ $\quad c)\ \frac{\sqrt{x}}{y\sqrt{y}}$

9) Racionalize as frações abaixo:

$a)\ \frac{3}{\sqrt[3]{3}}$ $b)\ \frac{2}{\sqrt[4]{8}}$ $c)\ \frac{xy}{\sqrt[5]{x^2y^3}}$

10) Racionalize as frações abaixo:

$a)\ \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ $b)\ \frac{2}{\sqrt{5}-1}$ $c)\ \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}$ $d)\ \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}$

11) Simplifique os radicais:

$a)\ \sqrt{24}$ $b)\ \sqrt{75}$ $c)\ \sqrt[3]{250}$ $d)\ \sqrt[5]{-972}$

12) Reduza os radicais e calcule o valor numérico das expressões:

$a)\ \sqrt{3}+\sqrt{48}$ $b)3\sqrt{32}+2\sqrt{8}-2\sqrt{18}$

$c)\ \sqrt{28}-10\sqrt{7}$ $d)\ 6\sqrt{3}+\sqrt{75}$

$e)\ \sqrt{98}+5\sqrt{18}$ $f)\ \sqrt{75}-2\sqrt{12}+\sqrt{27}$

$g)\ \sqrt{12}-9\sqrt{3}+\sqrt{75}$ $h)\ 5\sqrt{180}+\sqrt{245}-17\sqrt{5}$

13) Efetue as operações com raízes:

$a)\ \sqrt{2}.\sqrt{7}$ $b)\ \sqrt[3]{5}.\sqrt[3]{10}$ $c)\ \sqrt[3]{30}\div\sqrt[3]{10}$ $d)\ \sqrt[4]{15}\div\sqrt[4]{5}$

$e)\ (\sqrt{2}-2).(3-\sqrt{2})$ $f)\ (7\sqrt{7}+1).(\sqrt{7}-1)$

14) Para cada expressão reduza a um só radical:

$a)\ \sqrt{2}.\sqrt[3]{16}$ $b)\ \sqrt{5}.\sqrt[3]{15}$ $c)\ \sqrt[3]{25}\div\sqrt[4]{2}$ $d)\ \sqrt[3]{10}\div\sqrt[5]{3}$

15) Racionalize as frações abaixo:

$a)\ \frac{5}{\sqrt{3}}$ $b)\ \frac{2}{\sqrt{18}}$ $c)\ \frac{1}{10\sqrt{7}}$ $d)\ \frac{5}{\sqrt[5]{25}}$

$e)\ \frac{1}{\sqrt{3}+5}$ $f)\ \frac{2}{2\sqrt{2}-1}$

3.5 Respostas

Exercício 1:

$a)\ 24$ $b)\ 4$ $c)\ 2\sqrt{3}$ $d)\ 4\sqrt[3]{2}$

Exercício 2:

$a)\ -\sqrt{2}$ $b)\ 0$ $c)\ 4\sqrt{5}$ $d)\ 10\sqrt[3]{2}$

Exercício 3:

$a)\ 2+6\sqrt{5}$ $b)\ 17\sqrt{2}-26$

$c)\ 11\sqrt{6}-24$ $d)\ -27$

Exercício 4:

$4\sqrt{2}$

Exercício 5:

$a)\ 6$ $b)\ 2\sqrt[3]{3}$

$c)\ 6$ $d)\ \sqrt{2}$

Exercício 6:

$a)\ \sqrt[6]{3^3 5^2}$ $b)\ \sqrt[12]{2^{11}}$

$c)\ \sqrt[6]{2^3 5^2}$ $d)\ \sqrt[6]{2}$

Exercício 7:

$x = 3$

Exercício 8:

$a)\ \frac{\sqrt{5}}{5}$ $b)\ \frac{2\sqrt{3}}{9}$ $c)\ \frac{\sqrt{xy}}{y^2}$

Exercício 9:

$a)\ \sqrt[3]{9}$ $b)\ \sqrt[4]{2}$ $c)\ \sqrt[5]{x^3y^2}$

Exercício 10:

$a)\ \sqrt{2}+1$ $b)\ \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ $c)\ \frac{-3\sqrt{2}-4}{2}$

$d)\ \frac{4-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}$

Exercício 11:

$a)\ 2\sqrt{6}$ $b)\ 5\sqrt{3}$

$c)\ 5\sqrt[3]{2}$ $d)\ -3\sqrt[5]{4}$

Exercício 12:

$a)\ 5\sqrt{3}$ $b)\ 10\sqrt{2}$ $c)\ -8\sqrt{7}$

$d)\ 11\sqrt{3}$ $e)\ 22\sqrt{2}$ $f)\ 4\sqrt{3}$

$g)\ -2\sqrt{3}$ $h)\ 20\sqrt{5}$

Exercício 13:

$a)\ \sqrt{14}$ $b)\ \sqrt[3]{50}$ $c)\ \sqrt[3]{3}$

$d)\ \sqrt[4]{3}$ $e)\ 5\sqrt{2}-8$ $f)\ -6\sqrt{7}+48$

Exercício 14:

$a)\ \sqrt[6]{2^3.16^2}$ $b)\ \sqrt[6]{5^3.15^2}$

$c)\ \sqrt[12]{\frac{25^4}{2^3}}$ $d)\ \sqrt[15]{\frac{10^5}{3^3}}$

Exercício 15:

$a)\ \frac{5\sqrt{3}}{3}$ $b)\ \frac{\sqrt{18}}{9}$ $c)\ \frac{\sqrt{7}}{70}$

$d)\ \sqrt[5]{124}$ $e)\ \frac{-\sqrt{3}+5}{22}$ $f)\ \frac{4\sqrt{2}+2}{7}$

4. Aula 4

4.1 Fatoração

De maneira geral, fatorar uma expressão significa escrevê-la como um produto de dois ou mais fatores.

Estudaremos a seguir os casos mais comuns de fatoração de expressões algébricas.

Fatoração por fator comum em evidência

$$mx \pm my = m(x \pm y)$$

Prova da fórmula:

$$m(x + y) = mx + my$$

Exemplo: Fatore as seguintes expressões:

$a)\ 7x + 7y$ $b)\ 10m - 25n$ $c)\ 2m - 4n + 10$ $d)\ x^5 + 3x^2$

Solução:

$a)\ 7x + 7y = 7(x + y)$ $b)\ 10m - 25n = 5(2m - 5n)$

$c)\ 2m - 4n + 10 = 2(m - 2n + 5)$ $d)\ x^5 + 3x^2 = x^2(x^3 + 3)$

Fatoração por agrupamento

$$mx + my + nx + ny = (m + n)(x + y)$$

Prova da fórmula:

$$(m + n)(x + y) = mx + my + nx + ny$$

Exemplo: Fatore as seguintes expressões:

$a)\ xy + 2x + 5y + 10$ $b)\ 2xy^2 + 4xy - 6y^2 - 12y$

Solução:

$a)\ xy + 2x + 5y + 10 = x(y + 2) + 5(y + 2) = (x + 5)(y + 2)$

$b)\ 2xy^2 + 4xy - 6y^2 - 12y = 2[xy^2 + 2xy - 3y^2 - 6y]$
$= 2[x(y^2 + 2y) - 3(y^2 + 2y)] = 2(x - 3)(y^2 + 2y)$
$= 2y(x - 3)(y + 2).$

4.2 Produtos notáveis

Primeiro caso de produtos notáveis:

Quadrado da soma de dois termos

$$\boxed{(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2}$$

Prova da fórmula:

$$\underbrace{(x+y)^2}_{\substack{Quadrado\\ da\ soma\ de\\ dois\ termos}} = (x+y)\cdot(x+y) = x^2 + \underbrace{xy + yx}_{2xy} + y^2$$

$$= \underbrace{x^2}_{\substack{Quadrado\\ do\\ primeiro}} + \underbrace{2xy}_{\substack{mais\ duas\ vezes\\ o\ produto\ do\\ primeiro\ pelo\\ segundo}} + \underbrace{y^2}_{\substack{quadrado\\ do\\ segundo}}$$

Exemplo: Fatore as seguintes expressões:

$a)\ x^2 + 4x + 4$ $\qquad b) x^2 + 6xy + 9y^2$ $\qquad c)\ 4m^2 + 28m + 49$

Solução:

$a)\ x^2 + 4x + 4 \ = x^2 + 2x(2) + 2^2 \ = (x+2)^2.$

$b)\ x^2 + 6xy + 9y^2 \ = x^2 + 2x(3y) + (3y)^2 \ = (x+3y)^2.$

$c)\ 4m^2 + 28m + 49 \ = (2m)^2 + 2(2m)(7) + (7)^2 = (2m+7)^2.$

Segundo caso de produtos notáveis:

Quadrado da diferença de dois termos

$$\boxed{(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2}$$

Prova da fórmula:

$$\underbrace{(x-y)^2}_{\substack{Quadrado\\ da\ diferença\\ de\ dois\ termos}} = (x-y)\cdot(x-y) = x^2 - \underbrace{xy - yx}_{-2xy} + y^2$$

$$= \underbrace{x^2}_{\substack{Quadrado\\ do\\ primeiro}} - \underbrace{2xy}_{\substack{menos\ duas\ vezes\\ o\ produto\ do\\ primeiro\ pelo\\ segundo}} + \underbrace{y^2}_{\substack{quadrado\\ do\\ segundo}}$$

Exemplo: Fatore as seguintes expressões:

$a)\ x^2 - 6x + 9$ $\qquad b)\ x^2 - 4xy + 4y^2$ $\qquad c)\ x^2 - 2x\sqrt{3} + 3$

Solução:

$a)\ x^2 - 6x + 9 \ = x^2 - 2x(3) + 3^2 \ = (x-3)^2.$

$b)\ x^2 - 4xy + 4y^2 \ = x^2 - 2x(2y) + (2y)^2 \ = (x - 2y)^2.$

$c)\ x^2 - 2x\sqrt{3} + 3 \ = x^2 - 2x\left(\sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(x - \sqrt{3}\right)^2.$

Terceiro caso de produtos notáveis:

Diferença de dois quadrados

$$\boxed{(x + y)(x - y) = x^2 - y^2}$$

Prova da fórmula:

$$\underbrace{(x + y)(x - y)}_{\substack{\text{Produto da soma}\\ \text{pela diferença}\\ \text{de dois termos}}} = x^2 \cancel{-xy} + \cancel{yx} - y^2 = \underbrace{x^2}_{\substack{\text{Quadrado}\\ \text{do}\\ \text{Primeiro}}} - \underbrace{y^2}_{\substack{\text{Quadrado}\\ \text{do}\\ \text{segundo}}}$$

Exemplo: Fatore as seguintes expressões:

$a)\ x^2 - 9$ $\qquad b)\ 4y^2 - 25$ $\qquad c)\ m^4 - 4$

Solução:

$a)\ x^2 - 9 \ = (x + 3)(x - 3).$

$b)\ 4y^2 - 25 \ = (2y + 5)(2y - 5).$

$c)\ m^4 - 4 \ = (m^2 + 2)(m^2 - 2) = (m^2 + 2)\left(m + \sqrt{2}\right)\left(m - \sqrt{2}\right).$

Quarto caso de produtos notáveis:

Diferença de dois cubos

$$\boxed{x^3 - y^3 = (x - y).(x^2 + xy + y^2)}$$

Prova da fórmula:

$$(x - y).(x^2 + xy + y^2) = x^3 + \cancel{x^2y} + \cancel{xy^2} - \cancel{yx^2} - \cancel{xy^2} - y^3 = x^3 - y^3$$

Exemplo: Fatore as seguintes expressões:

$a)\ x^3 - 27$ $\qquad b) 8n^3 - 125$ $\qquad c)\ y^3 - 2$

Solução:

$a)\ x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9).$

$b)\ 8n^3 - 125 = (2n - 5)(4n^2 + 10n + 25).$

$c)\ y^3 - 2 = \left(y - \sqrt[3]{2}\right)\left(y^2 + y\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right).$

4.3 Fatoração do trinômio do segundo grau

Um importante caso de fatoração é chamado de fatoração do trinômio de segundo grau.

$$\underbrace{ax^2 + bx + c}_{\substack{\textit{Trinômio pois há três termos}\\ \textit{na expressão e de segundo grau,}\\ \textit{pois o maior expoente é dois}}}$$

Fatoração do trinômio do segundo grau

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

x_1 e x_2 são as raízes da equação de segundo grau

Lembre-se que, para encontrar as raízes de uma equação de segundo grau, utiliza-se a fórmula de Bháskara.

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

fórmula de Bháskara

Exemplo: Fatore a expressão $x^2 + 3x - 4$:

Solução: Neste caso, tem-se $a = 1$, $b = 3$ e $c = -4$.

Aplicando a fórmula de Bháskara, tem-se

$$x = \frac{-(3) \pm \sqrt{(3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} =$$

$$= \begin{cases} x_1 = \dfrac{-3 + 5}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ x_2 = \dfrac{-3 - 5}{2} = \dfrac{-8}{2} = -4 \end{cases}$$

Obtém-se duas raízes reais e distintas dadas por $\boldsymbol{x_1 = 1}$ e $\boldsymbol{x_2 = -4}$.

Reescrevendo o trinômio dado na forma fatorada, tem-se

$$x^2 + 3x - 4 = \underbrace{1}_{a} \cdot \underbrace{(x - 1)}_{x - x_1}\underbrace{(x + 4)}_{x - x_2} = (x - 1)(x + 4).$$

Exemplo: Fatore a expressão $x^2 - 6x + 9$:

Solução: Neste caso, tem-se $a = 1$, $b = -6$ e $c = 9$.

Aplicando a fórmula de Bháskara, tem-se

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (9)}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \frac{6 \pm 0}{2}$$

$$= \begin{cases} x_1 = \dfrac{6 + 0}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \dfrac{6 + 0}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

Obtém-se duas raízes e idênticas $\boldsymbol{x_{1,2} = 3}$.

Reescrevendo o trinômio dado na forma fatorada, tem-se

$$x^2 - 6x + 9 = \underbrace{1}_{a} \cdot \underbrace{(x-3)}_{x-x_1}\underbrace{(x-3)}_{x-x_2} = (x-3)^2.$$

Observação: Note que esta fatoração é um caso de trinômio quadrado perfeito.

4.4 Fatoração e produtos notáveis

Fator comum em evidência

$$mx + my = m(x + y)$$

Agrupamento

$$mx + my + nx + ny = (m + n)(x + y)$$

Fatoração por produtos notáveis

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Quadrado da soma de dois termos

$$(\mathrm{x} + \mathrm{y})(\mathrm{x} - \mathrm{y}) = \mathrm{x}^2 - \mathrm{y}^2$$

Produto da soma pela diferença de dois termos

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Quadrado da diferença de dois termos

$$x^3 - y^3 = (x - y).(x^2 + xy + y^2)$$

Diferença de dois cubos

Fatoração do trinômio do segundo grau

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

x_1 e x_2 são as raízes da equação de segundo grau

4.5 Exercícios Propostos

1) Fatore cada expressão algébrica:

$a)\ xy - x$

$b)\ 25xy - 5xy^2 + 15x^2y^2$

$c)\ 4y^6 + 4y^5 + y + 1$

$d)\ 2a^3 + 6ax - 3a^2b - 9bx$

$e)\ 3x^2y^2 - 12xy + 12$

$f)\ y^4 - 6mxy^2 + 9m^2x^2$

$g)\ 9a^2x^2 - 6ab^3x + b^6$

$h)\ 100 - x^2y^2$

$i)\ ax^2 - ay^2$

$j)\ 25x^3 - 16x$

$k)\ x^2 - x - 12$

$l)\ 2x^2 - 6\mathrm{x} + 4$

2) Fatore cada expressão algébrica:

$a)\ 4x - 3xy$

$b)\ xy + y^2 - y$

$c)\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y$

$d)\ x^2 - 81$

$e)\ 100 - x^2$

$f)\ x^2 - \frac{4}{25}$

$g)\ 1 - x^2y^2$

$h)\ x^{10} - 100$

$i)\ 4x^2 - 12xy + 9y^2$

$j)\ y^2 + 10y + 25$

$k)\ 121x^2y^2 + 44xy + 4$

$l)\ a^4 - b^4$

4.6 Respostas

Exercício 1:

a) $x(y-1)$
b) $5xy(5-y+3xy)$
c) $(y+1)(4y^5+1)$
d) $(a^2+3x)(2a-3b)$
e) $3(xy-2)^2$
f) $(y^2-3mx)^2$
g) $(3ax-b^3)^2$
h) $(10-xy)(10+xy)$
i) $a(x-y)(x+y)$
j) $x(5x-4)(5x+4)$
k) $(x+3)(x-4)$
l) $2(x-1)(x-2)$

Exercício 2:

a) $x(4-3y)$
b) $y(x+y-1)$
c) $\frac{1}{3}(x+\frac{1}{2}y)$
d) $(x+9)(x-9)$
e) $(10+x)(10-x)$
f) $(x+\frac{2}{5})(x-\frac{2}{5})$
g) $(1+xy)(1-xy)$
h) $(x^5+10)(x^5-10)$
i) $(2x-3y)^2$
j) $(y+5)^2$
k) $(11xy+2)^2$
l) $(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$

5. Aula 5

5.1 Expressões algébricas

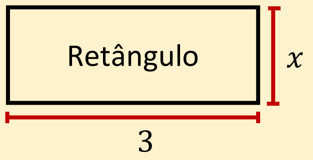
Definição: Chama-se expressão algébrica toda expressão na qual estão presentes letras ou símbolos que denotam grandezas genéricas ou desconhecidas, que são chamadas de incógnitas ou variáveis.

Exemplo: Considere um retângulo de base 3 m e altura x m. Expresse a área e o perímetro desse retângulo:

Solução:

Neste caso, a área e o perímetro do retângulo são expressões algébricas com incógnita x.

$$A = 3 \cdot x \qquad\qquad P = 2x + 6$$



Exemplo: Se Vé uma quantia de dinheiro que uma pessoa possui e o custo de um refrigerante é $R\$$ 2,00 e de um pastel é $R\$$ 3,00, escreva uma expressão que calcule o troco que ela receberá ao comprar x refrigerantes e y pastéis:

Solução:

$$T = V - 2x - 3y$$

Neste caso, o valor do troco é uma expressão algébrica com incógnitas V, x e y.

5.2 Valor numérico

Definição: O valor numérico de uma expressão algébrica é obtido quando se substitui a incógnita por um número em particular.

Exemplo: Considere a expressão algébrica:

$$y = \frac{2m - n}{n + 2}.$$

Calcule o valor numérico desta expressão para $m = \frac{1}{3}$ e $n = -\frac{2}{5}$.

Solução: Substituindo os valores atribuídos a m e n na expressão algébrica, obtém-se:

$$y = \frac{2m - n}{n + 2} = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{2}{5}\right)}{\left(-\frac{2}{5}\right) + 2} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{2}{5}}{\frac{-2 + 10}{5}} = \frac{\frac{10 + 6}{15}}{\frac{8}{5}} = \frac{16}{15} \cdot \frac{5}{8} = \frac{2}{3}.$$

5.3 Simplificação de frações algébricas

Um caso particularmente interessante de expressões algébricas são as frações algébricas.

Exemplo: São exemplos de frações algébricas:

$a)\ \frac{y}{x}$ $\qquad b)\ \frac{2}{xy}$ $\qquad c)\ \frac{3x^2y^3}{z^3wt^5}$ $\qquad d)\ \frac{x + y}{1 + z}$ $\qquad e)\ \frac{x^2 + 3xy - 5}{2z - 3}$

As simplificações de frações algébricas são efetuadas de forma similar às efetuadas com frações numéricas, ou seja, podem ser simplificados somente os fatores comuns ao numerador e ao denominador da fração.

Exemplo: Simplifique a expressão:

$$\frac{15xy^3w^2}{20x^4y}$$

Solução:

$$\frac{15xy^3w^2}{20x^4y} = \frac{3y^2w^2}{4x^3}.$$

Em alguns casos pode ser extremamente útil utilizar fatoração e produtos notáveis para simplificar uma fração algébrica.

Exemplo: Simplifique as expressões:

$$a)\ \frac{x^2 - y^2}{4x + 4y} \qquad b)\ \frac{m^2 - 2mn + n^2}{m^2 - n^2} \qquad c)\ \frac{x^3y - 2x^2y^2}{x^2 - 4xy + 4y^2}$$

Solução:

$$a)\ \frac{x^2 - y^2}{4x + 4y} = \frac{(x + y)(x - y)}{4(x + y)} = \frac{x - y}{4}.$$

$$b)\ \frac{m^2 - 2mn + n^2}{m^2 - n^2} = \frac{(m - n)(m - n)}{(m - n)(m + n)} = \frac{m - n}{m + n}.$$

$$c)\ \frac{x^3y - 2x^2y^2}{x^2 - 4xy + 4y^2} = \frac{x^2y(x - 2y)}{(x - 2y)(x - 2y)} = \frac{x^2y}{x - 2y}.$$

5.4 Multiplicação/divisão de frações algébricas

Assim como foi definida a multiplicação/divisão/potências de números racionais, efetua-se a multiplicação/divisão/potências de frações algébricas.

Exemplo: Calcule:

$$a)\ \frac{3x}{x + 1} \cdot \frac{x - 2}{3x + 1} \qquad b)\ \frac{3 - x}{x^2 + x} \div \frac{2x^2}{x + 1} \qquad c)\ \left(\frac{x + 2}{2y}\right)^{-2}$$

Solução:

$$a)\ \frac{3x}{x + 1} \cdot \frac{x - 2}{3x + 1} = \frac{3x(x - 2)}{(x + 1)(3x + 1)} = \frac{3x^2 - 6x}{3x^2 + x + 3x + 1} = \frac{3x^2 - 6x}{3x^2 + 4x + 1}.$$

$$b)\ \frac{3 - x}{x^2 + x} \div \frac{2x^2}{x + 1} = \frac{3 - x}{x^2 + x} \cdot \frac{x + 1}{2x^2} = \frac{3 - x}{x(x + 1)} \cdot \frac{x + 1}{2x^2} = \frac{3 - x}{2x^3}.$$

$$c)\ \left(\frac{x + 2}{2y}\right)^{-2} = \left(\frac{2y}{x + 2}\right)^2 = \frac{(2y)^2}{(x + 2)^2} = \frac{4y^2}{x^2 + 4x + 4}.$$

5.5 Soma/subtração de frações algébricas

Assim como foi definida a soma/subtração de frações, efetua-se a soma/subtração de frações algébricas. Observe que o método para encontrar o mmc dos denominadores é bastante similar ao utilizado para números racionais.

Exemplo: Calcule:

$a)\ \frac{2x-3}{x}-\frac{2}{3x}$

$b)\ \frac{x+2}{2x}-\frac{x-1}{3x^2}+\frac{2x-1}{6x}$

$c)\ \frac{x+2}{2x}+\frac{3}{x-1}$

$d)\ \frac{x+1}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}-\frac{5x-1}{3x}$

Solução:

$a)$ Como $\mathrm{mmc}(\mathrm{x}, 3\mathrm{x}) = 3\mathrm{x}$, tem-se

$$\frac{2x-3}{x}-\frac{2}{3x}=\frac{3(2x-3)-2}{3x}=\frac{6x-9-2}{3x}=\frac{6x-11}{3x}.$$

$b)$ Com $\mathrm{mmc}(2\mathrm{x}, 3\mathrm{x}^2, 6\mathrm{x}) = 6\mathrm{x}^2\mathrm{o}$, tem-se

$$\frac{x+2}{2x}-\frac{x-1}{3x^2}+\frac{2x-1}{6x}=\frac{3x(x+2)-2(x-1)+x(2x-1)}{6x^2}$$

$$=\frac{3x^2+6x-2x+2+2x^2-x}{6x^2}=\frac{5x^2+3x+2}{6x^2}.$$

$c)$ Como $mmc(2x, x-1) = 2x(x-1)$, tem-se

$$\frac{x+2}{2x}+\frac{3}{x-1}=\frac{(x+2)(x-1)+3(2x)}{2x(x-1)}=\frac{x^2+x-2+6x}{2x^2-2x}=\frac{x^2+7x-2}{2x^2-2x}.$$

$d)$ Como $\mathrm{mmc}(\mathrm{x}^2-4, \mathrm{x}-2{,}3\mathrm{x}) = 3\mathrm{x}(\mathrm{x}^2-4)$, tem-se

$$\frac{x+1}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}-\frac{5x-1}{3x}=\frac{3x(x+1)-2(3x)(x+2)-(5x-1)(x^2-4)}{3x(x^2-4)}$$

$$=\frac{3x^2+3x-6x^2-12x-5x^3+20x+x^2-4}{3x(x^2-4)}=\frac{-5x^3-2x^2+11x-4}{3x^3-12x}.$$

5.6 Exercícios Propostos

1) Considere um pedaço de cartolina retangular de lados $x\ cm$ e $y\ cm$. Deseja-se montar uma caixa, em forma de paralelepípedo retângulo, sem a tampa de cima, com esta cartolina. Para isto, de cada ponta do retângulo, tira-se um quadrado de lado 2 cm (estamos então considerando x >4 e y >4). Com estas informações, encontre uma expressão para o volume dessa caixa.

2) Em cada caso, calcule o valor numérico:

$a)\ M = 3xy - y, para\ x = -\frac{1}{2}\ e\ y = -\frac{2}{5}$

$b)\ M = \frac{x + 2y}{y - x}, para\ x = \frac{2}{3}\ e\ y = -\frac{1}{7}$

3) Simplifique cada fração algébrica:

$a)\ \frac{20x^3y^2z^4}{15x^6y^6z}$ $b)\ \frac{x - 5}{x^2 - 25}$ $c)\ \frac{x^2 - y^2}{xy + y^2}$

$d)\ \frac{xy + y + 5x + 5}{3y + 15}$ $e)\ \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2}$ $f)\ \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$

4) Efetue as operações seguintes e simplifique:

$a)\ \left(\frac{-4m^2n^5p}{3r^2t^7}\right)^2$ $b)\ \frac{x + 3}{x - 4} \cdot \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 9}$

$c)\ \frac{x + y}{7x - 7y} \div \frac{x^2 + xy}{7x}$ $d)\ \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) \div \left(\frac{x}{y} + 1\right)$

5) Efetue as operações seguintes e simplifique:

$a)\ \frac{4x^2 - 7xy}{3x^2} + \frac{8y^2 - 3x}{6x} - \frac{5}{12}$ $b)\ \frac{5}{2x + 2} - \frac{7}{3x - 3} + \frac{1}{6x - 6}$

$c)\ \frac{x + 1}{2x - 2} - \frac{x - 1}{2x + 2} + \frac{4x}{x^2 - 1}$ $d)\ \frac{4t^2}{t^2 - s^2} - \frac{t - s}{t + s} + \frac{t + s}{t - s}$

6) Simplifique a seguinte expressão:

$$\frac{\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2}}$$

7) Peça a um amigo para pensar em um número, multiplicá-lo por 3, somar 6, multiplicar por 4 e dividir por 12, dizendo para você o resultado final. Você pode então “adivinhar” qual o número em que seu amigo pensou. Parece mágica, não é? Como isto é possível?

8) Determine o valor da expressão $\mathrm{a}^{-3} \cdot \sqrt[3]{\mathrm{b}} \cdot \mathrm{c}^{-1}$o, quando $a = -1$, $b = -8$ e $c = \frac{1}{4}$:

9) Calcule o valor numérico de cada expressão abaixo:

$a)\ M = x^2y - y^2, para\ x = 2\ e\ y = -1$

$b)\ M = \frac{(x + y)^{-1}}{x^{-1} + y^{-1}}, para\ x = -\frac{2}{5}\ e\ y = 5$

10) Simplifique cada fração algébrica:

$a)\ \dfrac{a-2x}{2bx-ab}$ $\qquad b)\ \dfrac{x^2-4xy+4y^2}{x^2-4y^2}$ $\qquad c)\ \dfrac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}$

$d)\dfrac{x^4-1}{x^4+2x^2+1}$ $\qquad e)\ \dfrac{x^2-x-6}{2x^2+4x}$ $\qquad f)\ \dfrac{x^2+4x-5}{x^2-2x+1}$

11) Efetue as operações seguintes e simplifique:

$a)\ \dfrac{x^4-256}{x^2+xy+4x+4y}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{2x-8}$ $\qquad b)\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x-y}\div\dfrac{x+y}{x^2-2xy+y^2}$

$c)\ \left(1+\dfrac{x-a}{x+a}\right)\div\left(1-\dfrac{x-a}{x+a}\right)$ $\qquad d)\ \dfrac{m^2-36}{x^2y^2}\div\dfrac{2m+12}{xy^2}$

$e)\ \left(\dfrac{3x^{\frac{3}{2}}y^3}{x^2y^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-2}$ $\qquad f)\ \dfrac{2}{a+b}\div\dfrac{4}{ax+bx}$

12) Calcule o valor numérico de cada expressão abaixo:

$a)\ M=\dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x}}, para\ x=4$

$b)\ M=x^2-2xy+y^2, para\ x=-1\ e\ y=\dfrac{1}{4}$

$c)\ M=\sqrt{\dfrac{a^2+ax}{y}}, para\ a=8, x=10\ e\ y=9$

$d)\ M=\dfrac{y+\dfrac{1}{x}}{x+\dfrac{1}{y}}, para\ x=10\ e\ y=5$

13) Simplifique cada fração algébrica:

$a)\ \dfrac{ac-c}{c^2-c}$ $\qquad b)\ \dfrac{3x+3y}{3-3a}$ $\qquad c)\ \dfrac{a^2-b^2}{a^3-a^2b}$ $\qquad d)\ \dfrac{x^2-8x+16}{x^2-16}$

14) Efetue as operações seguintes e simplifique:

$a)\ \dfrac{x+y}{y}-\dfrac{y}{x+y}-\dfrac{2x}{x+y}$ $\qquad b)\ \dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2x}{x^2-1}$

$c)\ \dfrac{x}{a+1}\div\dfrac{x^4}{a^2-1}$ $\qquad d)\dfrac{a^2-1}{x^2-y^2}\div\dfrac{a^2-2a+1}{3x+3y}$

$e)\ \dfrac{m^2-36}{x^2y^2}\div\dfrac{2m+12}{xy^2}$ $\qquad f)\ \dfrac{3a^4}{x^7+x^6}\div\dfrac{9a^4}{2x+2}$

5.7 Respostas

Exercício 1:

$V = 2 \cdot (x-4) \cdot (y-4)$

Exercício 2:

$a)\ M = 1 \qquad b)\ M = -\dfrac{8}{17}$

Exercício 3:

$a)\ \dfrac{4z^3}{3x^3y^4} \qquad b)\ \dfrac{1}{x+5} \qquad c)\ \dfrac{x-y}{y}$

$d)\ \dfrac{x+1}{3} \qquad e)\ \dfrac{x+y}{x-y} \qquad f)\ \dfrac{x-2}{x+3}$

Exercício 4:

$a)\ \dfrac{16m^4n^{10}p^2}{9r^4t^{14}} \qquad b)\ \dfrac{(x-4)}{(x-3)}$

$c)\ \dfrac{1}{x-y} \qquad d)\ 1-\dfrac{y}{x}$

Exercício 5:

$a)\ \dfrac{5x-28y+16y^2}{12x} \qquad b)\ \dfrac{x-14}{3(x-1)(x+1)}$

$c)\ \dfrac{6x}{(x-1)(x+1)} \qquad d)\ \dfrac{4t}{t-s}$

Exercício 6:

$$\frac{(x-y)(x^2+y^2)}{x+y}$$

Exercício 7:

O resultado é $y = x + 2$, então o número pensado é $x = y - 2$, pois $y = \frac{(3x+6)\cdot 4}{12}$

Exercício 8:

8

Exercício 9:

$a)\ M = -5 \qquad b)\ M = \dfrac{50}{23^2}$

Exercício 10:

$a)\ -\dfrac{1}{b} \qquad b)\ \dfrac{x-2y}{x+2y} \qquad c)\ \dfrac{x+y}{x-y}$

$d)\ \dfrac{x^2-1}{x^2+1} \qquad e)\ \dfrac{x-3}{2x} \qquad f)\ \dfrac{x+5}{x-1}$

Exercício 11:

$a)\ \dfrac{(x^2+16)(x-y)}{2} \qquad d)\ \dfrac{m-6}{2x}$

$b)\ (x-y)(x+y) \qquad e)\ \dfrac{x}{9y^7}$

$c)\ \dfrac{x}{a} \qquad f)\ \dfrac{x}{2}$

Exercício 12:

$a)\ 4 \qquad b)\ \dfrac{25}{16} \qquad c)\ 4 \qquad d)\ \dfrac{1}{2}$

Exercício 13:

$a)\ \dfrac{a-1}{c-1} \qquad b)\ \dfrac{x+y}{1-a}$

$c)\ \dfrac{a+b}{a^2} \qquad d)\ \dfrac{x-4}{x+4}$

Exercício 14:

$a)\ \dfrac{x^2}{y(x+y)} \qquad b)\ \dfrac{2}{x+1}$

$c)\ \dfrac{a-1}{x^3} \qquad d)\ \dfrac{3(a+1)}{(x-y)(a+1)}$

$e)\ \dfrac{m-6}{2x} \qquad f)\ \dfrac{2}{3x^6}$

6. Aula 6

6.1 Polinômios

Definição: Chama-se um polinômio de grau n na variável x a expressão

$$\mathrm{p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0},$$

onde a_1, a_2, ...,a_n são os coeficientes do polinômio com $a_n \neq 0$.

Exemplos:

$p(x) = 3x^3 - 5x + 1$	polinômio de grau três, ou de terceiro grau.
$q(x) = -x^5 + 2x^2$	polinômio de grau cinco, ou de quinto grau.
$v(x) = 8$	polinômio de grau zero.

6.2 Operações com polinômios

Para somar dois polinômios somam-se os coeficientes dos termos de mesmo grau.

O mesmo é feito ao efetuar a diferença de dois polinômios.

Exemplo: Dados os polinômios

$$p(x) = 3x^4 - x^3 - 5x + 1 \quad e \quad q(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 7,$$

calcule:

$a)\ a\ soma\ p(x) + q(x)$ $\qquad$ $b)\ a\ diferença\ p(x) - q(x)$

Solução:

$a)\ p(x) + q(x) = (3x^4 - x^3 - 5x + 1) + (2x^3 - x^2 + 3x - 7)$

$= 3x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 6.$

$b)\ p(x) - q(x) = (3x^4 - x^3 - 5x + 1) - (2x^3 - x^2 + 3x - 7)$

$= (3x^4 - x^3 - 5x + 1) - 2x^3 + x^2 - 3x + 7$

$= 3x^4 - x^3 - 2x^3 + x^2 - 5x - 3x + 1 + 7$

$= 3x^4 - 3x^3 + x^2 - 8x + 8.$

Já para efetuar o produto de polinômios usamos propriedades distributivas, regras de sinais e propriedades de potência dos expoentes de x.

Exemplo: Calcule:

$a)\ x \cdot (x - 1)$ $\qquad$ $b)\ (x + 1) \cdot (2x - x^2)$ $\qquad$ $c)\ (x + 1) \cdot (2x - x^2)$

Solução:

$a)\ x \cdot (x - 1) = x^2 - x.$

$b)\ (x + 1) \cdot (2x - x^2) = 2x^2 - x^3 + 2x - x^2 = -x^3 + x^2 + 2x.$

$$c)\ (x^2-3x+1)\cdot(x^2-x)=x^4-x^3-3x^3+3x^2+x^2-x=x^4-4x^3+4x^2-x.$$

Para efetuar a divisão de polinômios precisamos recorrer a um procedimento de divisão muito semelhante ao algoritmo para divisão de números inteiros, como no exemplo a seguir.

Exemplo: Em cada caso, efetue a divisão dos polinômios:

$a)\ (x^2-5x+6)\div(x-2)$ $\quad$ $b)\ (x^4-x^2+1)\div(x^2-2x+3)$

Solução:

$a)$

$$\begin{array}{r|l}
\overbrace{x^2-5x+6}^{\textit{Dividendo}} & \overbrace{x-2}^{\textit{divisor}} \\ \cline{2-2}
-x^2+2x & \underbrace{x-3}_{\textit{quociente}} \\ \hline
-3x+6 & \\
3x-6 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

Portanto,

$(x^2-5x+6)=(x-2)(x-3)$

$b)$

$$\begin{array}{r|l}
\overbrace{x^4+0x^3-x^2+0x+1}^{\textit{Dividendo}} & \overbrace{x^2-2x+3}^{\textit{divisor}} \\ \cline{2-2}
-x^4+2x^3-3x^2 & \underbrace{x^2-2x}_{\textit{quociente}} \\ \hline
2x^3-4x^2+0x+1 & \\
-2x^3+4x^2-6x & \\ \hline
\underbrace{-6x+1}_{\textit{Resto}} &
\end{array}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}&(x^4-x^2+1)\\ &=(x^2-2x+3)(x^2+2x)-6x+1\end{aligned}$$

6.3 Dispositivo Prático de Briot- Ruffini

O dispositivo prático de Briot-Ruffini é um método utilizado para efetuar a divisão de um polinômio

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

por um binômio do primeiro grau

$$q(x)=x-a$$

O primeiro passo consiste em dispor os valores de a e os coeficientes do polinômio (em ordem decrescente em relação ao grau) da seguinte forma:

$$q(x)=x-a \qquad p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
a & a_n & a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline
 & & & & & &
\end{array}$$

Vamos mostrar como este dispositivo é aplicado por meio de um exemplo resolvido!

Exemplo: Efetue $(2x^3 + 3x^2 - 3x + 5) \div (x - 1)$:

Solução:

Passo 01

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 & 5 \\ \hline \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{array}$$

Passo 02

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 \text{↱}^{3º} & \downarrow^{1º} 2 & \downarrow^{+} 3 & -3 & 5 \\ \hline \uparrow^{x} & \text{↲}^{2º} 2 & \text{↲}^{=}_{4º} 5 & & \end{array}$$

Passo 03

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 \text{↱}^{5º} & 2 & 3 & \downarrow^{+} -3 & 5 \\ \hline \uparrow^{x} & 2 & \text{↲}^{=}_{4º} 5 & \text{↲}^{=}_{6º} +2 & \end{array}$$

Passo 04

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 \text{↱}^{7º} & 2 & 3 & -3 & \downarrow^{+} 5 \\ \hline \uparrow^{x} & 2 & 5 & \text{↲}^{=}_{6º} +2 & = 7 \end{array}$$

Passo 05

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 & 5 \\ \hline & 2 & 5 & 2 & \underbrace{7}_{Resto} \end{array}$$

$$\underbrace{2x^2 + 5x + 2}_{quociente}$$

Exemplo: Efetue $(x^4 + 3x^3 - 2x - 6) \div (x + 3)$:

Solução:

Passo 01

$$\begin{array}{c|cccc|c} -3 & 1 & 3 & 0 & -2 & -6 \\ \hline \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{array}$$

Passo 02

$$\begin{array}{c|cccc|c} -3 \text{↱}^{3º} & \downarrow^{1º} 1 & \downarrow^{+} 3 & 0 & -2 & -6 \\ \hline \uparrow^{x} & \text{↲}^{2º} 1 & \text{↲}^{=}_{4º} 0 & & & \end{array}$$

Passo 03

$$\begin{array}{c|cccc|c} -3 \text{↱}^{5º} & 1 & 3 & \downarrow^{+} 0 & -2 & -6 \\ \hline \uparrow^{x} & 1 & \text{↲}^{=}_{4º} 0 & \text{↲}^{=}_{6º} 0 & & \end{array}$$

Passo 04

$$\begin{array}{c|cccc|c} -3 \text{↱}^{7º} & 1 & 3 & 0 & \downarrow^{+} -2 & -6 \\ \hline \uparrow^{x} & 1 & 0 & \text{↲}^{=}_{6º} 0 & \text{↲}^{=}_{8º} 0 & \end{array}$$

Passo 05

$$\begin{array}{c|cccc|c} -3 \text{↱}^{9º} & 1 & 3 & 0 & -2 & \downarrow^{+} -6 \\ \hline \uparrow^{x} & 1 & 0 & 0 & \text{↲}^{=}_{8º} -2 & 0 \end{array}$$

Passo 06

$$\begin{array}{c|cccc|c} -3 & 1 & 3 & 0 & -2 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & -2 & \underbrace{0}_{Resto} \end{array}$$

$$\underbrace{x^3 - 2}_{quociente}$$

6.4 Exercícios Propostos

1) Efetue as seguintes operações com polinômios:

$a)\ (x^3 - 3x^2 + 1) + (1 - 3x^2 - x^3)$

$b)\ (2x^3 - 7x + 3) - (4x^3 - x^2 - 3x)$

$c)\ (3x^2 - 4x + 2) \cdot (x^3 - 2x)$

$d)\ (-2x^3 - 3x^2 + 4x + 1) \div (x^2 + 1)$

$e)\ (2x^5 - x^4 - 14x^3 + 9x^2 - 4x + 1) \div (2x^3 + 5x^2 - x + 1)$

$f)\ (x^2 - x - 12) \div (x - 4)$

$g)\ (2x^5 - 3x^3 + 4x - 3) \div (x - 1)$
$h)\ (2x^4 - 3x^3 - 3) \div (x + 1)$

2) Efetue as seguintes operações com polinômios:

$a)\ (4x^5 - 3x^3 - x^2) + (7x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 2)$
$b)\ (1 - x) - (x^3 - 4x^5 - x + 2)$
$c)\ (x^2 - 4x + 1) \cdot (3x^2 - x - 1)$
$d)\ (3x^5 + 2x^4 + x^2 - 5) \div (-x^2 + x - 1)$
$e)\ (x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x - 3) \div (2x^2 + x + 1)$
$f)\ (x^2 - x - 6) \div (x + 2)$
$g)\ (x^5 + 1) \div (x + 1)$
$h)\ (x^5 - 4x^4 - 2x^2 - 3x + 2) \div (x - 4)$

6.5 Respostas

Exercício 1:

$a)\ -6x^2 + 2$

$b)\ -2x^3 + x^2 - 4x + 3$

$c)\ 3x^5 - 4x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 4x$

$d)\ -2x - 3$ e resto $6x + 4$

$e)\ x^2 - 3x + 1$

$f)\ x + 3$

$g)\ 2x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 3$

$h)\ 2x^3 - 5x^2 + 5x - 5$ e resto 2

Exercício 2:

$a)\ 4x^5 + 7x^4 - 5x^3 + x^2 - x + 2$

$b)\ 4x^5 - x^3 - 1$

$c)\ 3x^4 - 13x^3 + 6x^2 + 3x - 1$

$d)\ -3x^3 - 5x^2 - 2x + 2$ e resto $-4x - 3$

$e)\ \frac{x^2}{2} - \frac{9x}{4} + \frac{15}{8}\ e\ resto\ -\frac{5x + 39}{8}$

$f)\ x - 3$

$g)\ x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

$h)\ x^4 - 2x - 11\ e\ resto\ -42$

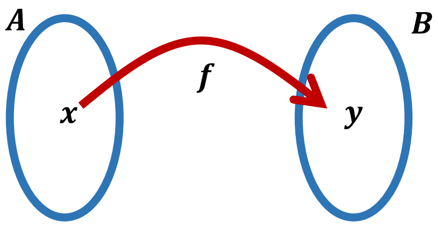
Capítulo 2: Funções

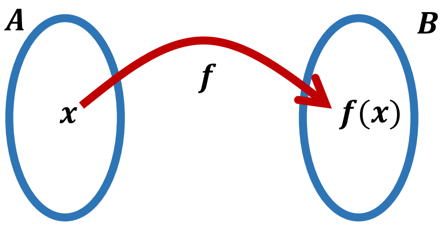
7. Aula 1

7.1 Definição de função

Definição: Sejam A e B dois conjuntos não vazios.

Uma função f de A em B é uma relação que associa cada elemento $x \in A$ a um **ÚNICO** elemento $y \in B$.





Notação: $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ "y é igual a $f(x)$" ou "$f(x)$ é igual a y"

Definição: Sejam A e B dois conjuntos e f uma função de A em B.

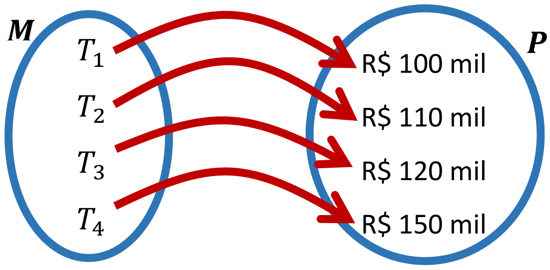
O conjunto A é chamado de conjunto de partida.

O conjunto B é chamado de conjunto de chegada.

Exemplo 1: Uma empresa revendedora de máquinas agrícolas possui 4 modelos diferentes de tratores: T_1, T_2, T_3 e T_4. O preço à vista a ser pago pelo comprador é dado em função do modelo de trator escolhido. Temos nesse caso um modelo de função.

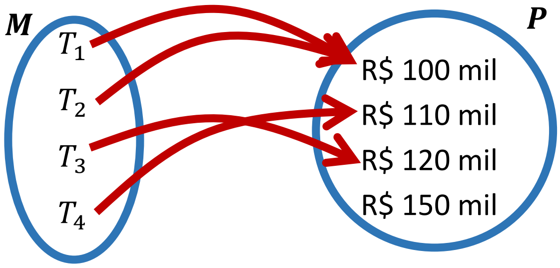
Vejamos a seguir 4 possibilidades que podem ocorrer:

Possibilidade 1:



É uma função pois cada elemento do conjunto M está relacionado a um único elemento do conjunto P.

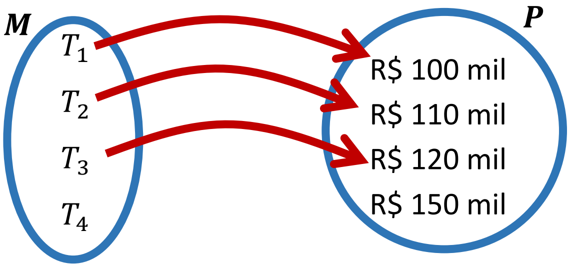
Possibilidade 2:



É uma função pois cada elemento do conjunto M está relacionado a um único elemento do conjunto P.

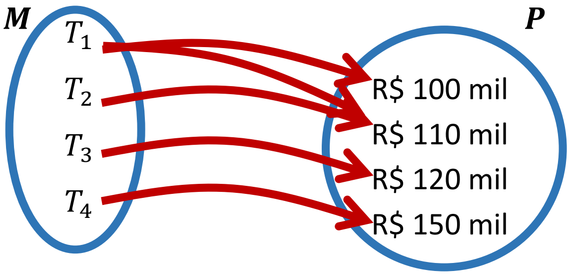
Vejamos a seguir alguns exemplos que não podem ocorrer nesta relação:

Possibilidade 3:



Não é uma função pois existe elemento do conjunto M que não se relaciona a elemento algum do conjunto P.

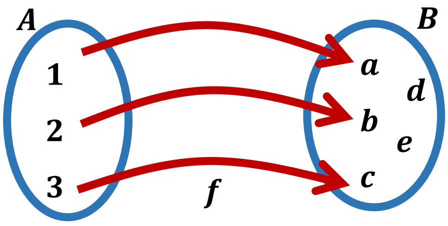
Possibilidade 4:



Não é uma função pois existe elemento do conjunto Mque se relaciona com mais de um elemento do conjunto P.

Exemplo 2: Determine se a relação abaixo representa uma função:

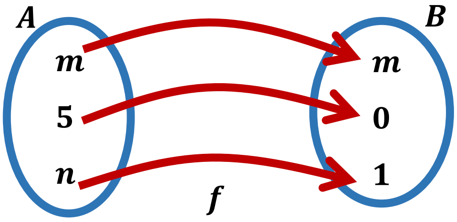
$a)$



Solução:

É uma função pois cada elemento do conjunto A está relacionado a um único elemento do conjunto B.

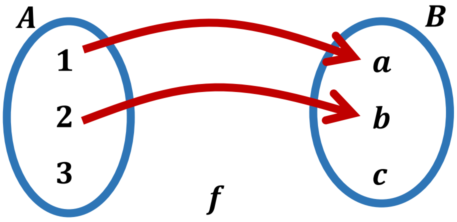
$b)$



Solução:

É uma função pois cada elemento do conjunto A está relacionado a um único elemento do conjunto B.

$c)$

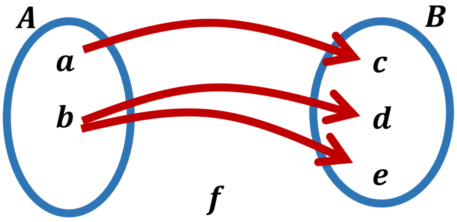


Não existe relação do **3** com elementos de $\boldsymbol{B}$.

Solução:

Não é uma função pois existe elemento do conjunto A que não se relaciona a elemento algum do conjunto B.

$d)$



Existem duas relações de $\boldsymbol{b}$ com elementos de $\boldsymbol{B}$.

Solução:

Não é uma função pois existe elemento do conjunto A relacionado a mais de um elemento do conjunto B.

7.2 Domínio, Contra-domíno e Imagem

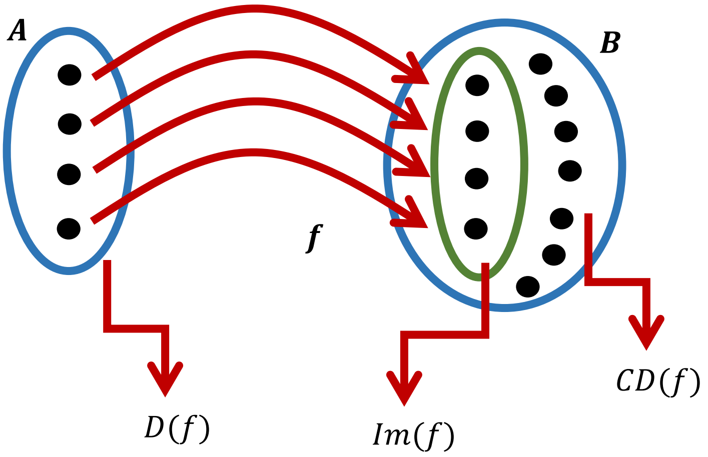
Definição: Sejam A e B dois conjuntos e f uma função de A em B.

O conjunto A é chamado de domínio da função f.

O conjunto B é chamado de contradomínio da função f.

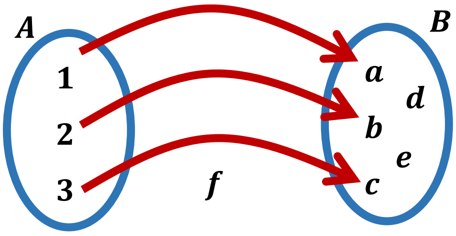
Os elementos do conjunto B que foram relacionados na função f formam o conjunto imagem da função f.

Notação:
$$\begin{cases} O\ \boldsymbol{domínio}\ \acute{e}\ indicado\ por\ \boldsymbol{D(f)}. \\ O\ \boldsymbol{contradomínio}\ \acute{e}\ indicado\ por\ \boldsymbol{CD(f)}. \\ A\ \boldsymbol{imagem}\ \acute{e}\ indicada\ por\ \boldsymbol{Im(f)}. \end{cases}$$



Exemplo 3: Dados os conjuntos A e B e a relação f a seguir, determine os conjuntos $D(f)$, $CD(f)$ e $Im(f)$.

$a)$



Solução:

$f(1) = a$ (f de 1 é igual a a)

$f(2) = b$ (f de 2 é igual a b)

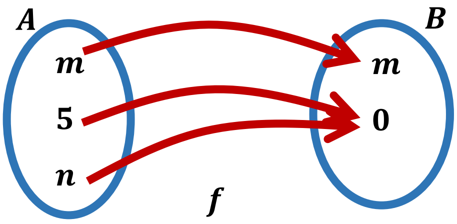
$f(3) = c$ (f de 3 é igual a c)

$D(f) = \{1, 2, 3\}$

$CD(f) = \{a, b, c, d, e\}$

$Im(f) = \{a, b, c\}$

$b)$



Solução:

$f(m) = m$ (f de m é igual a m)

$f(5) = 0$ (f de 5 é igual a 0)

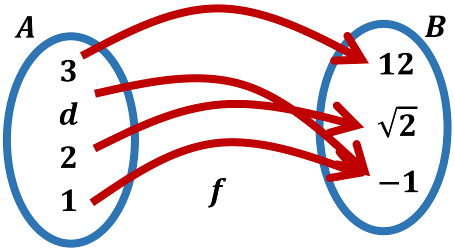
$f(n) = 0$ (f de n é igual a 0)

$D(f) = \{m, 5, n\}$

$CD(f) = \{m, 0\}$

$Im(f) = \{m, 0\}$

$c)$



Solução:

$f(3) = 12$ (f de 3 é igual a 12)

$f(2) = \sqrt{2}$ (f de 2 é igual a $\sqrt{2}$)

$f(d) = -1$ (f de d é igual a -1)

$f(1) = -1$ (f de 1 é igual a -1)

$D(f) = \{1, 2, 3, d\}$

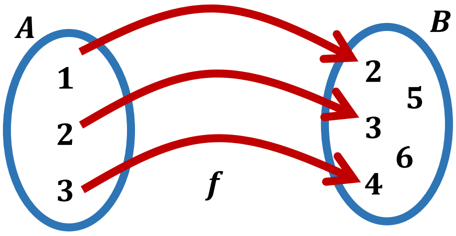
$CD(f) = \{-1, \sqrt{2}, 12\}$

$Im(f) = \{-1, \sqrt{2}, 12\}$

7.3 Representação de uma função

Uma mesma função pode ser representada de várias formas:

Diagrama de flechas



Tabela

x	1	2	3
$f(x)$	2	3	4

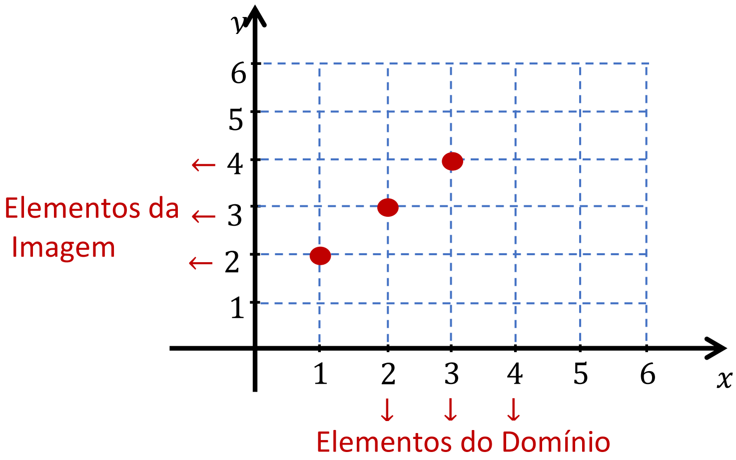
Pares ordenados

Elementos do Domínio!

$$\begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \end{array}$$

Elementos da Imagem!

Representação Cartesiana

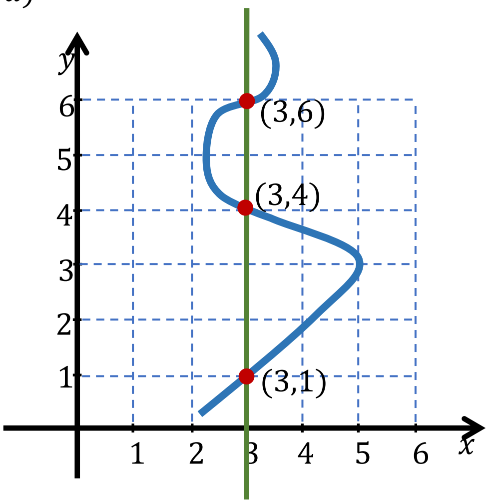


7.4 O teste da reta vertical

Teste: Uma curva no plano xy representa o gráfico de uma função f se, e somente se, nenhuma reta vertical intercepta a curva mais de uma vez.

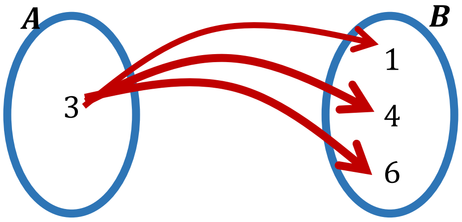
Exemplo 4: Determine para cada relação a seguir, se representam funções. Se for função, determine $D(f)$ e $Im(f)$.

$a)$

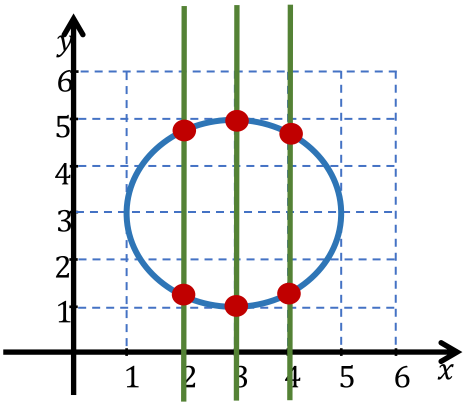


Não é Função!

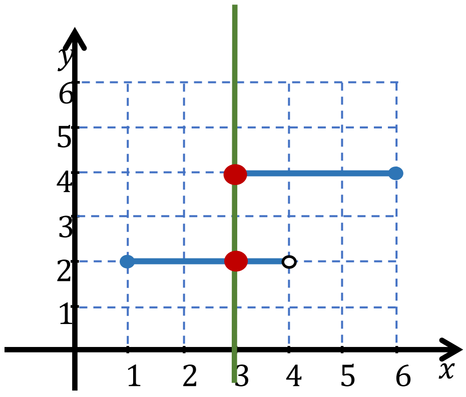
Pois um mesmo elemento do domínio tem "mais de uma imagem", o que contradiz a definição de função!



$b)$



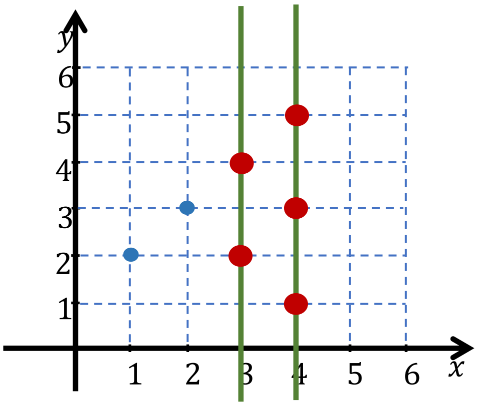
Não é Função!



Não é Função!

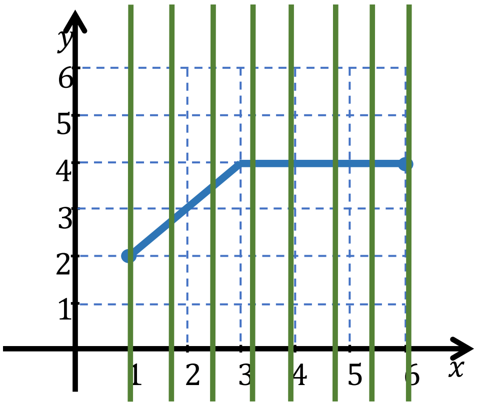
c)

$d)$



Não é Função!

$e)$

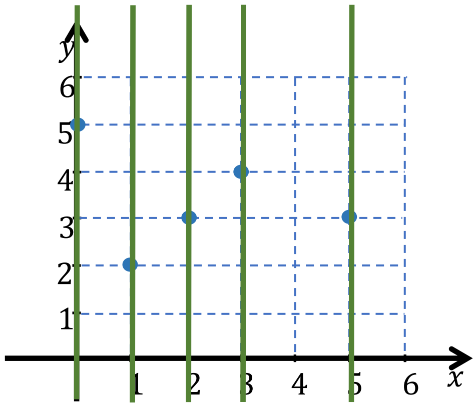


Não é Função!

$D(f) = [1, 6]$ *ou* $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 6\}$

$Im(f) = [2, 4]$ *ou* $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 2 \leq y \leq 4\}$

$f)$

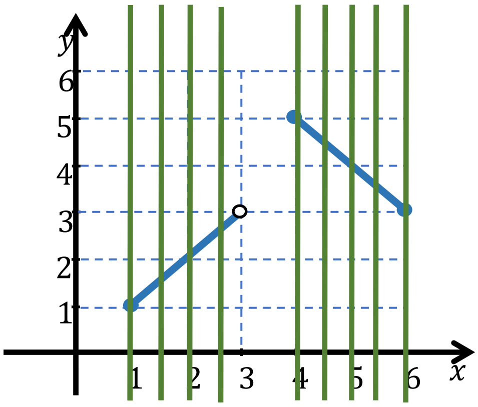


É Função!

$D(f) = \{0, 1, 2, 3, 5\}$

$Im(f) = \{2, 3, 4, 5\}$

$g)$



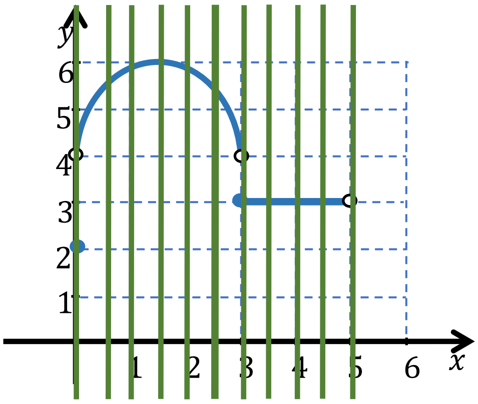
É Função!

$D(f) = [1, 3) \cup [4, 6]$ *ou*

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 3 \text{ ou } 4 \leq x \leq 6\}$

$Im(f) = [1, 5]$ *ou* $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 5\}$

$h)$



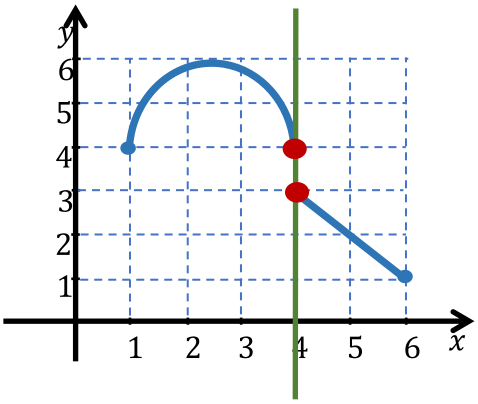
É função!

$D(f) = [0, 5)$ *ou* $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 5\}$

$Im(f) = \{2, 3\} \cup (4, 6]$ *ou*

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = 2, y = 3 \text{ ou } 4 < y \leq 6\}$

$i)$



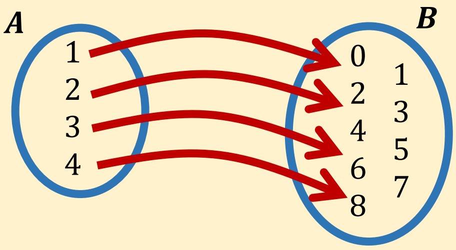
Não é função!

7.5 Lei de formação

Definição: A Lei de Formação de uma função $f: A \rightarrow B$ é a fórmula matemática que estabelece a forma com que cada elemento $x \in A$ se relacionará com o respectivo $y \in B$.

Exemplos 5: Sejam os conjuntos $\mathrm{A} = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\mathrm{B} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Se a função $\mathrm{f}: \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ tem a lei de formação dada por $\mathrm{f(x)} = 2\mathrm{x}$, tem-se:

Solução:



$f(1) = 2(1) = 2$ 1 está relacionado ao 2

$f(2) = 2(2) = 4$ 2 está relacionado ao 4

$f(3) = 2(3) = 6$ 3 está relacionado ao 6

$f(4) = 2(4) = 8$ 4 está relacionado ao 8

7.6 Valor numérico

Para determinar o valor numérico de uma função $\mathrm{y} = \mathrm{f(x)}$ em um elemento específico $\mathrm{x} = \mathrm{a}$ do domínio, basta substituir "a" no lugar de "x" na lei de formação da função f.

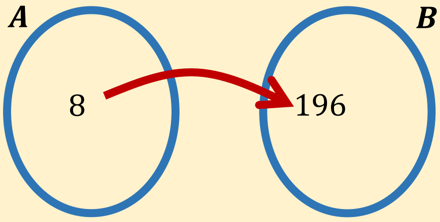
Definição: O valor de $\mathrm{f(a)}$ é chamado de imagem de a pela função f.

(lê-se $\mathrm{f(a)}$ como "f de a")

Exemplo 6: Determine a imagem de $x = 8$ para a função $f(x) = 3x^2 + 4$.

Solução:

Substituindo $\mathrm{x} = 8$ na lei de formação da função f, obtém-se:



196 é a imagem de 8 pela função f.

$$
\begin{aligned}
f(8) &= 3(8)^2 + 4 \\
&= 3(64) + 4 \\
&= 192 + 4 \\
&= 196
\end{aligned}
$$

Exemplo 7: Numa determinada cidade, houve um período sem chuva que durou 152 dias, ocasionando a diminuição do nível de água no reservatório desta cidade. Se no início da estiagem o nível de água no reservatório era de 12m e se o nível diminuiu em média $5cm$ por dia, neste período, determine:

a) A função que descreve o nível de água no reservatório em função do tempo.

b) Qual era o nível do reservatório depois de 30 dias?

c) Depois de quantos dias o nível do reservatório caiu pela metade?

Solução:

$a)$

Nível inicial: $N(0) = 12m$

Nível depois de um dia: $\mathrm{N(1) = 12\ - (0{,}05).1 = 11{,}95m:}$

Nível depois de dois dias: $\mathrm{N(2) = 12\ - (0{,}05).2 = 11{,}90m}$

Nível depois de três dias: $\mathrm{N(3) = 12\ - (0{,}05).3 = 11{,}85m}$

Nível depois de t dias: $\mathrm{N(t) = 12\ - (0{,}05).t}$

Lei de formação: $N(t) = 12\ - (0{,}05).t \qquad 0 \leq t \leq 152$

$b)$

$$N(t) = 12 - (0{,}05) \cdot t$$

Portanto, no trigésimo dia ($t = 30$) tem-se:

$$N(30) = 12 - (0{,}05) \cdot 30$$
$$N(30) = 12 - 1{,}5$$
$$N(30) = 10{,}5m$$

$c)$

$$N(t) = 6m$$

$$\underbrace{12 - (0{,}05) \cdot t = 6}_{N(t)}$$

$$(0{,}05) \cdot t = 6$$

$$t = \frac{6}{0{,}05} = \frac{6}{\frac{5}{100}} = \frac{6}{1} \cdot \frac{100}{5}$$

$$t = \frac{600}{5} = 120\ dias.$$

7.7 Exercícios Propostos

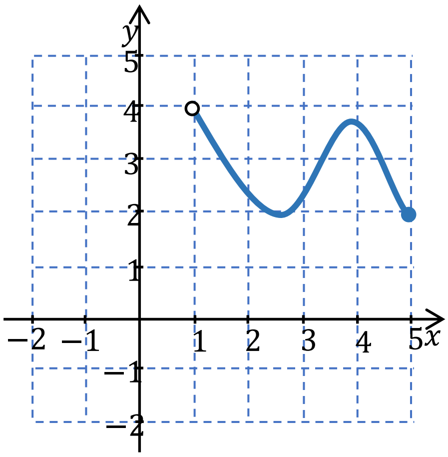
1) Sabendo que a posição de um objeto que parte da posição inicial $\mathrm{s_0} = 2\mathrm{m}$ e desloca-se com velocidade constante de $v_0 = 5m/s$ e dada pela tabela a seguir:

t	0	1	2	3	...
$f(x)$	2	7	12	17	...

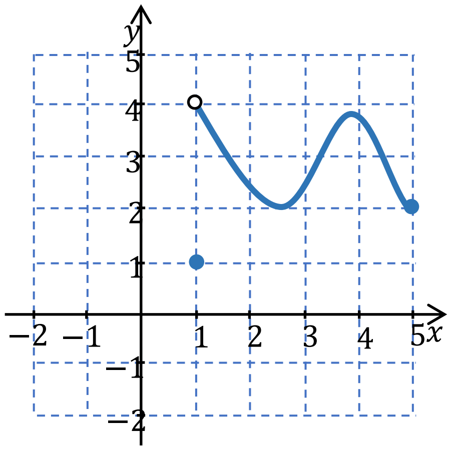
a) Escreva a função que expressa a posição em função do tempo t.
b) Qual é a posição do objeto após 20 segundos?
c) Quanto tempo é necessário para o objeto atingir a posição 152m?

2) Em cada caso, determine o domínio e a imagem da função f.

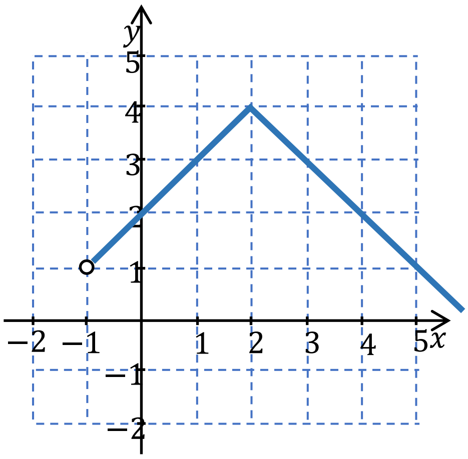
$a)$



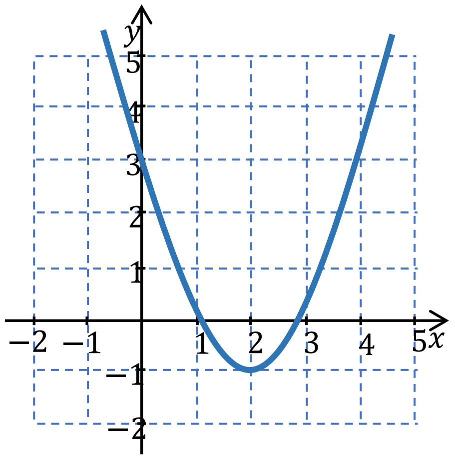
$b)$



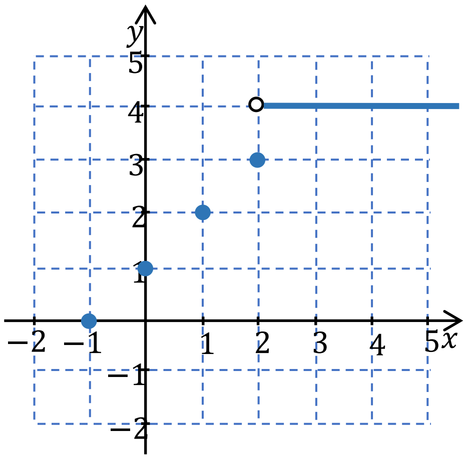
$c)$



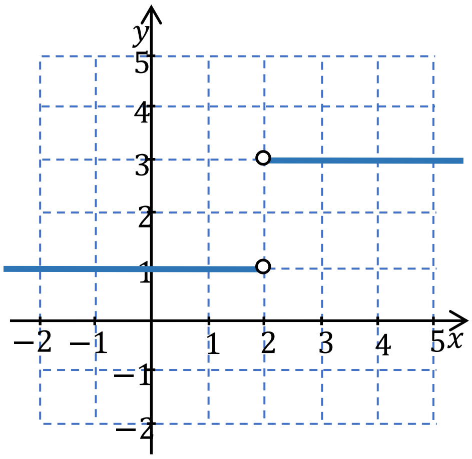
$d)$



$e)$



$f)$



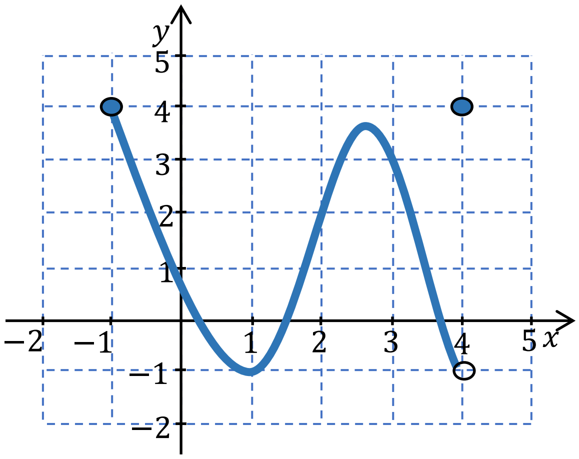
3) Considerando o gráfico da função f ao lado, determine:

a) O domínio e a imagem de f;

b) $f(1), f(2), f(3)\ e\ f(4)$;

c) Os valores de x para os quais $y = 4$;

d) Quantos valores de x possuem imagem igual a 3? Você pode citar um deles?



4) Considere a função f dada pela sentença:

$$f(x) = \frac{5x-4}{2}$$

a) Calcule $f(2)$ e $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

b) Calcule $f(2m+6)$.

c) Qual é o número real que tem 8 como imagem?

5) Sendo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela lei

$$\mathrm{f(x) = 3x + 1},$$

calcule:

a) $f(-2)$.

b) O valor de x para o qual $f(x) = 3$.

c) O valor de x para o qual $f(x) = 0$.

d) A imagem de $\frac{2}{3}$.

e) O número cuja imagem é 7.

f) O valor de x que é igual a sua imagem.

6) Considere o gráfico da função f ao lado:

a) Qual o domínio e a imagem de f;

b) Qual é a imagem de 2?

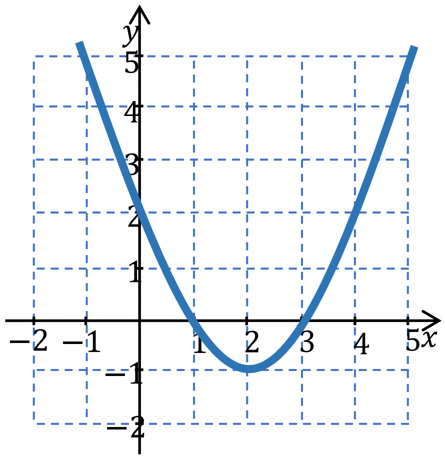
c) Determine $f(0)$;

d) Determine para quais valores de x se tem $f(x) = 2$?

e) Quais valores de x possuem imagem igual a 0?

f) Para quais valores de x as imagens são números positivos?

g) Para quais valores de x as imagens são números negativos?



7) O custo de fabricação de x unidades de um produto é dado pela função:

$$\mathrm{C(x) = 100 + 2x}.$$

a) Qual o custo de fabricação de 10 unidades?

b) Qual o custo de fabricação de 20 unidades?

c) Quantas unidades podem ser fabricadas com um custo de $ 200,00 ?

d) Quantas unidades podem ser fabricadas com um custo de $ 350,00 ?

8) Um vendedor de assinaturas de uma revista ganha \$ $\mathbf{2.000,00}$ de salário fixo mensal, mais uma comissão de \$ $\mathbf{50,00}$ por assinatura. Sendo x o número de assinaturas vendidas por mês, expresse seu salário total S como função de x.

9) Uma livraria vende uma revista por \$ $\mathbf{5,00}$ a unidade. Seja x a quantidade vendida.

a) Obtenha a função receita $\boldsymbol{R\ (x)}$**.**

b) Calcule $\boldsymbol{R\ (40)}$**.**

c) Qual a quantidade que deve ser vendida para dar uma receita igual a \$ $\mathbf{700,00}$?

10) Chama-se **custo médio de fabricação** de um produto o custo de produção dividido pela quantidade produzida. Indicando o custo médio correspondente a x unidades produzidas por $Cme\ (x)$, teremos:

$$Cme\ (x) = \frac{C(x)}{x}$$

O custo de fabricação de x unidades de um produto é $C\ (x) = 500 + 4x$.

a) Qual o custo médio de fabricação de $\mathbf{20}$ unidades?

b) Qual o custo médio de fabricação de $\mathbf{40}$ unidades?

c) Quantas unidades podem ser produzidas quando o custo médio de fabricação é de \$ $\mathbf{24,00}$?

7.8 Respostas

Exercício 1:

$a)\ S(t) = 2 + 5t$

$b) S(20) = 2 + 5(20) = 102\ m$

$c)$ 30 segundos

Exercício 2:

$a)\ \ D(f) = (1, 5]\ ou$

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 5\}$

$Im(f) = [2, 4) ou$

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 2 \leq y < 4\}$

$b)\ D(f) = [1, 5]\ ou$

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 5\}$

$Im(f) = \{1\} \cup [2, 4)\ ou$

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = 1\ ou\ 2 \leq y < 4\}$

$c)\ D(f) = (-1, +\infty)\ ou$

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

$Im(f) = (-\infty, 4]\ ou$

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 4\}$

$d)\ D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = [-1, +\infty)\ ou$

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y\}$

$e)\ D(f) = \{-1, 0, 1\} \cup [2, +\infty)$

$Im(f) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$f)\ D(f) = \mathbb{R} - \{2\}\ ou$

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$

$Im(f) = \{1, 3\}$

Exercício 3:

$a)\ D(f) = [-1, 4]\ e\ Im(f) = [-1, 4]$

$b)\ f(1) = -1 \qquad f(2) = 2$

$f(3) = 3 \qquad f(4) = 4$

$c)\ x = -1 \qquad x = 4$

$d)$ Existem três valores de x tais que $f(x) = 3$, um deles é o $x = 3$.

Exercício 4:

$a)\ f(2) = 3 \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$

$c)\ f(2m + 6) = 5m + 13$

$c)\ x = 4$

Exercício 5:

$a)\ f(-2) = -5$

$b)\ x = \frac{2}{3}$

$c)\ x = -\frac{1}{3}$

$d)\ f\left(\frac{2}{3}\right) = 3$

$e)\ x = 2$

$f)\ x = a \rightarrow f(a) = a \rightarrow \quad a = -\frac{1}{2}$

Exercício 6:

$a)\ D(f) = \mathbb{R} \quad Im(f) = [-1, +\infty)$

$b)\ f(2) = -1$

$c)\ f(0) = 2$

$d)\ x = 0 \qquad x = 4$

$e)\ x = 1 \qquad x = 3$

$f)\ (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

$g)\ (1,3)$

Exercício 7:

$a)$ $ 120,00

$b)$ $ 140,00

$c)$ 50 unidades

$d)$ 125 unidades

Exercício 8:

$\mathrm{S}(x) = 2000 + 50x$

Exercício 9:

$a)\ R(x) = 5x$

$b)\ R(40) = 5\ (40) = 200{,}00$

$c)\ x = 140\ unidades$

Exercício 10:

$a)$ $ 29,00

$b)$ $ 16,50

$c)$ 25 unidades

8. Aula 2

8.1 Função do Primeiro Grau

Definição: Dados a e $b \in \mathbb{R}$ tais que $a \neq 0$.
A função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$ é chamada de função do primeiro grau.

Exemplos:

1) $f(x) = x$	$a = 1, b = 0$
2) $f(x) = 2x + 1$	$a = 2, b = 1$
3) $f(x) = -5x$	$a = -5, b = 0$
5) $f(x) = 4 - 3x$	$a = -3,\ b = 4$

Em uma função do primeiro grau o número a é chamado de coeficiente angular e o número b é chamado de coeficiente linear.

$$y = ax + b$$
$$\swarrow \qquad\qquad \searrow$$

"a" é Coeficiente angular "b" é Coeficiente linear

Quando $b = 0$, a função $y = ax$ é chamada de função linear.

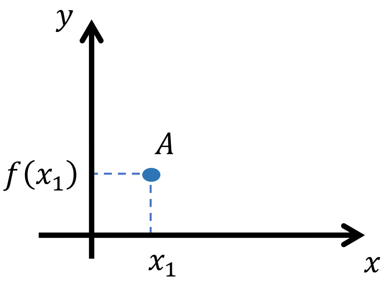
8.2 Gráfico da função do primeiro grau

Teorema: O gráfico de uma função do primeiro grau é uma reta.

Passos para o esboço do gráfico:

1) Escolha livremente um número x_1 e calcule $f(x_1)$.

2) Indique o $A(x_1, f(x_1))$ no plano cartesiano.



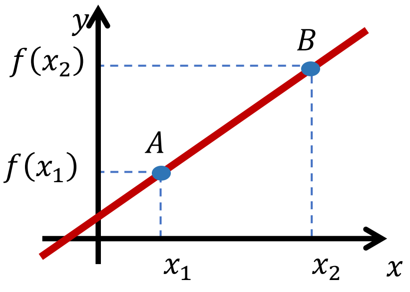
3) Escolha um número x_2, diferente de x_1, e calcule

$f(x_2)$.

4) Indique o $B(x_2, f(x_2))$ no plano cartesiano.

Por dois pontos distintos passa uma única reta!

5) Trace a reta passando pelos pontos A e B.



Exemplo: Esboce o gráfico da função $f(x) = x + 1$.

Solução:

Escolhendo $x_1 = 1$, tem-se

$$f(x_1) = f(1) = 1 + 1 = 2$$

e, portanto,

$A(-1, 0)$ (primeiro ponto)

Escolhendo $x_2 = 2$*, tem-se*

$$f(x_2) = f(2) = 2 + 1 = 3.$$

e, portanto,

$B(2, 3)$ (segundo ponto)

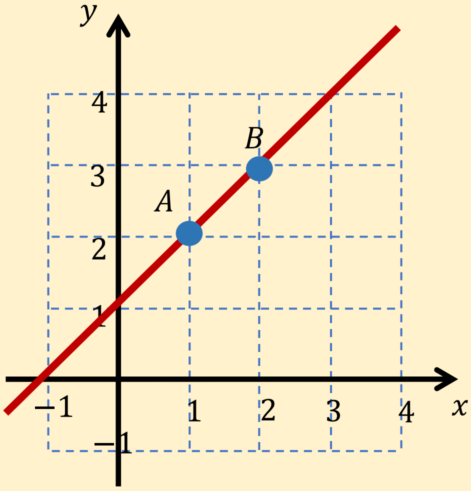


Gráfico da função

Observação: Se escolhermos $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$, por exemplo, o gráfico será o mesmo!

Escolhendo $x_1 = -1$, tem-se

$$f(x_1) = f(-1) = -1 + 1 = 0$$

e, portanto,

$C(-1, 0)$ (Terceiro ponto)

Escolhendo $x_2 = 3$*, tem-se*

$$f(x_2) = f(3) = 3 + 1 = 4.$$

e, portanto,

$B(3, 4)$ (Quarto ponto)

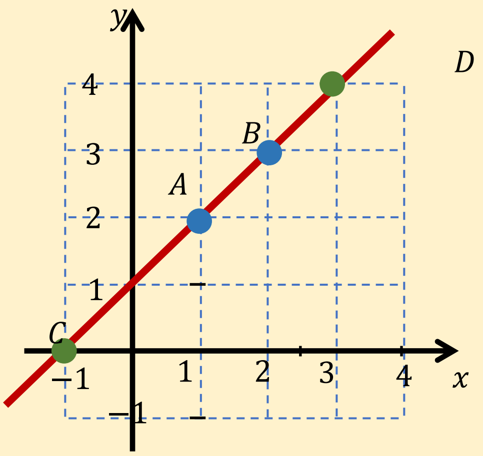
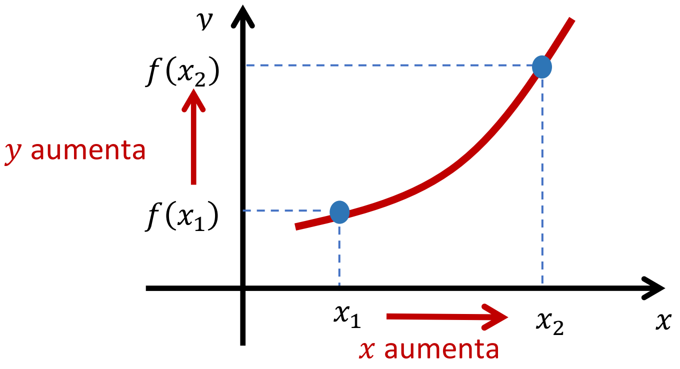


Gráfico da função

8.3 Monotonia (crescimento/decrescimento)

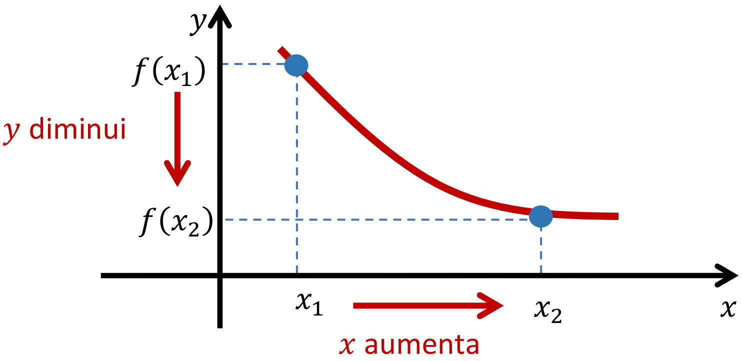
Definição: Uma função f é dita crescente em um intervalo I se, para quaisquer x_1, x_2 pertencentes a I, tais que $x_1 < x_2$ tem-se

$$f(x_1) < f(x_2)$$



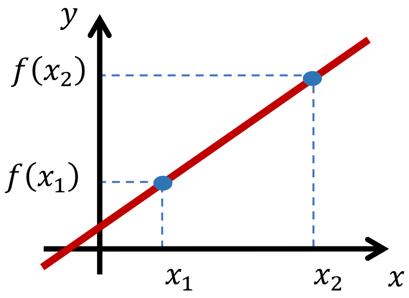
Definição: Uma função f é dita decrescente em um intervalo I se, para quaisquer x_1, x_2 pertencentes a I, tais que $x_1 < x_2$ tem-se

$$f(x_1) > f(x_2)$$

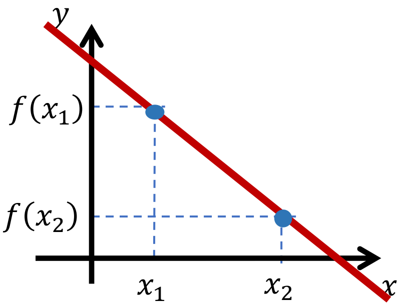


O crescimento e o decrescimento de uma função do primeiro grau dada por $\boldsymbol{y = ax + b}$ está diretamente ligado ao sinal do coeficiente angular.

1) Se $\mathbf{a > 0}$, então a função é crescente:



2) Se $\mathbf{a < 0}$, então a função é decrescente:



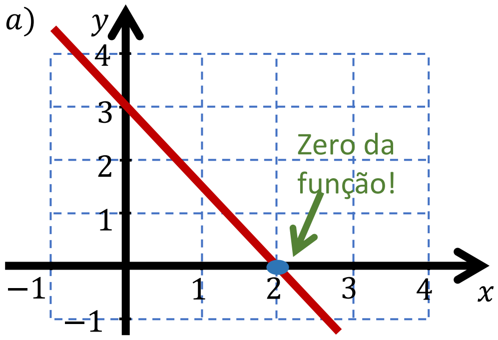
8.4 Zeros de uma função

Definição: Um número c é chamado de zero da função se

$$f(c) = 0$$

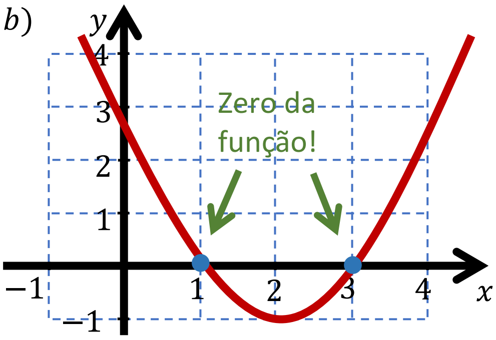
No gráfico, um zero de uma função pode ser interpretado como um intercepto da curva com o eixo x.

Exemplo: Determine os zeros da função dos gráficos abaixo:



Solução:
Um único zero em $x = 2$.

$b)$



Solução:
Dois zeros, em $x = 1$ e $x = 3$.

Observação: Os zeros de uma função $y = f(x)$ podem ser obtidos resolvendo a equação $f(x) = 0$. Se obtém, assim, os valores de x para os quais $y = 0$, ou seja, os interceptos do gráfico da função com o eixo x.

Zeros da função do primeiro grau.

$$f(x) = ax + b$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0$$
$$\Rightarrow ax = -b$$
$$\Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Exemplo: Determine o zero da função $\mathrm{f(x) = 2x - 4}$.

Solução:
1) Resolvendo a equação.

$$2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{2} \Rightarrow x = 2$$

2) Utilizando diretamente a fórmula.

$$x = -\frac{b}{a} \Rightarrow x = -\frac{-4}{2} \Rightarrow x = \frac{4}{2} \Rightarrow x = 2$$

Portanto, o gráfico desta função intercepta o eixo x no ponto $(2,0)$.

8.5 Sinal de uma função

Definição: Uma função f é positiva em um número c se

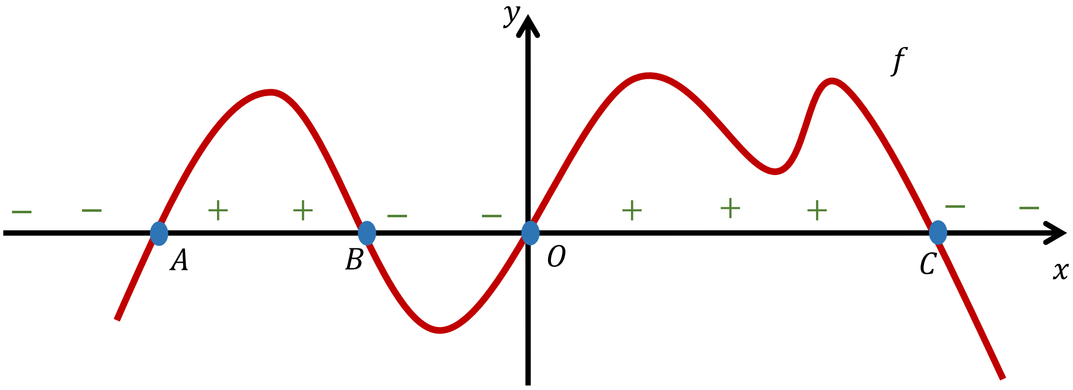
$$f(c) > 0.$$

Uma função f é negativa em um número c se

$$f(c) < 0.$$

Observação: Determinar o sinal de uma função f significa encontrar todos os valores de x para os quais f é positiva e todos os valores de x para os quais f é negativa.

No gráfico, a função é positiva nos intervalos onde o gráfico está acima do eixo x e negativa nos intervalos onde o gráfico está abaixo do eixo x.



A função é positiva em: $(A, B) \cup (O, C)$.

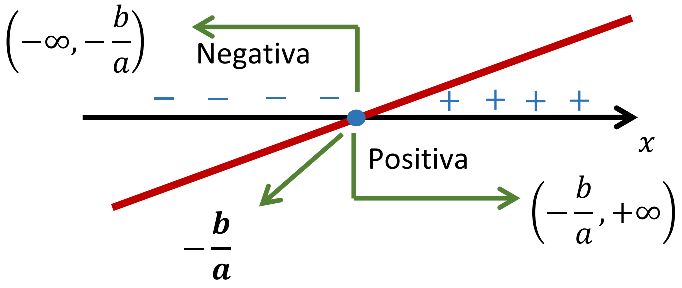
A função é negativa em: $(-\infty, A) \cup (B, O) \cup (C, +\infty)$.

Para determinar o sinal de uma função do primeiro grau

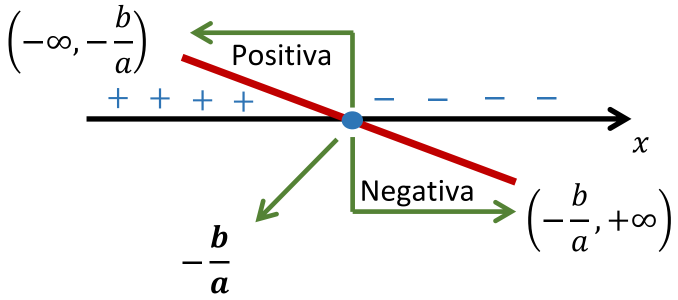
$$y = ax + b$$

basta encontrar o zero da função e verificar se ela é crescente ou decrescente.

Crescente: $a > 0$



Decrescente: $a < 0$



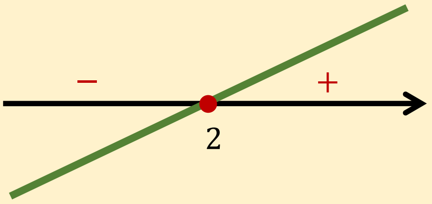
Exemplo: Determine o sinal da função $f(x) = 2x - 4$.

Solução:

Como $a = 2$ e $b = -4$ temos:

$$-\frac{b}{a} = -\frac{-4}{2} = 2 \quad (Zero\ da\ Função)$$

$$a = 2 > 0 \quad (Crescente)$$



Negativa: $(-\infty, 2)$

Positiva: $(2, +\infty)$

Exemplo: Encontre o domínio da função $f(x) = \sqrt{1-3x}$.

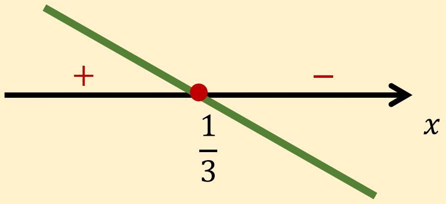
Solução:
A função que está dentro da raiz deve ser não negativa, ou seja

$$y = 1 - 3x \geq 0$$

Como $a = -3$ e $b = 1$ temos:

$$-\frac{b}{a} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3} \qquad (Zero\ da\ Função)$$

$$a = -3 < 0 \qquad (Decrescente)$$



$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{3}\right\}$$

Exemplo: Encontre o domínio da função

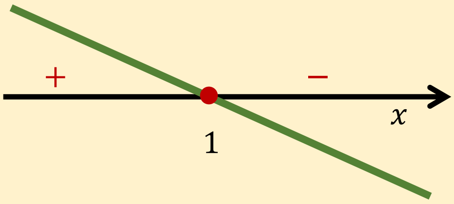
$$\mathrm{f(x)} = \sqrt{\frac{1-\mathrm{x}}{3\mathrm{x}+6}}.$$

Solução:

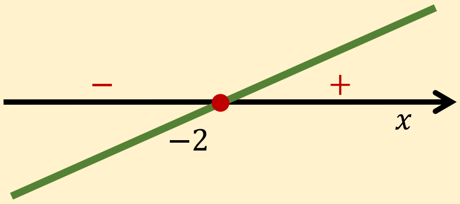
Neste caso, a condição imposta pela raiz quadrada é:

$$\frac{1-x}{3x+6} \geq 0$$

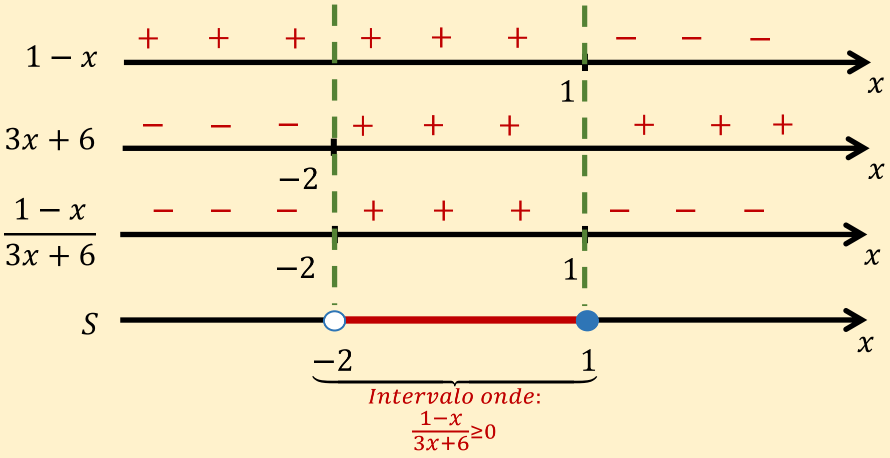
Sinal do fator $1 - x$:



Sinal do fator $3x + 6$:



Analisando o sinal do quociente, tem-se:



Note que $-2 \notin D(f)$ pois -2 zera o denominador!!
Portanto,

$$D(f) = (-2{,}1]$$

8.6 Função do Segundo Grau

Definição: Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $a \neq 0$.

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ é chamada de função do segundo grau ou função quadrática.

Exemplos:

$a)\ f(x) = x^2$	$a = 1,$	$b = 0,$	$c = 0$
$b)\ f(x) = -x^2 + 1$	$a = -1,$	$b = 0,$	$c = 1$
$c)\ f(x) = 2x^2 + 3x - 1$	$a = 2,$	$\mathrm{b} = 3,$	$c = -1$

8.7 Gráfico da função do segundo grau

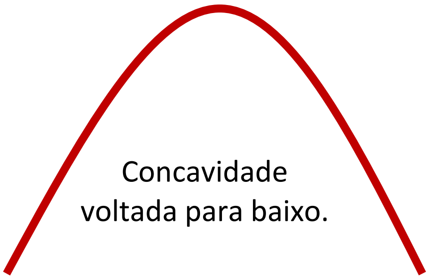
Teorema: O gráfico de uma função do primeiro grau é uma parábola.

A parábola pode ter concavidade voltada para cima ou concavidade voltada para baixo, de acordo com o sinal do coeficiente $\boldsymbol{a}$.

Concavidade:

$a > 0$

$a < 0$



Exemplo: Esboce o gráfico da função $f(x) = x^2$.

Solução:

$$f(-3) = (-3)^2 = 9$$

$$f(-2) = (-2)^2 = 4$$

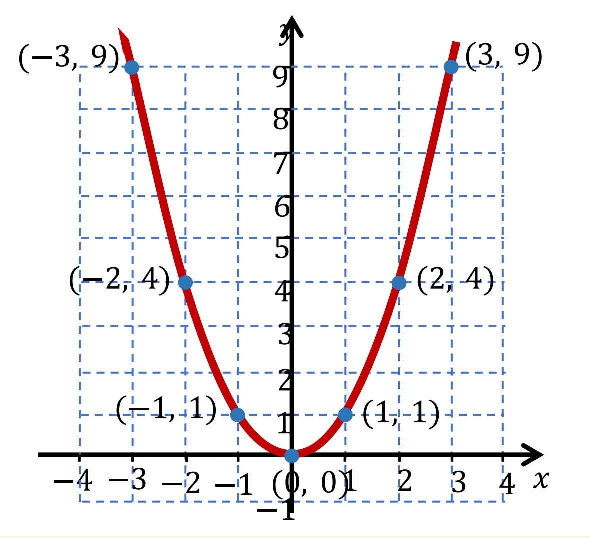
$$f(-1) = (-1)^2 = 1$$

$$f(0) = 0^2 = 0$$

$$f(1) = (1)^2 = 1$$

$$f(2) = (2)^2 = 4$$

$$f(3) = (3)^2 = 9$$



8.8 Zeros da função do segundo grau

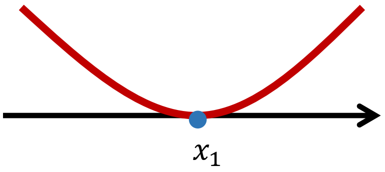
Os zeros da função $y = ax^2 + bx + c$ podem ser obtidos resolvendo a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ utilizando a fórmula de Bháskara.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

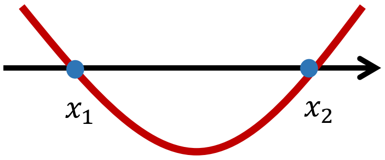
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

A quantidade de zeros reais obtidas para uma função quadrática depende do sinal de Δ.

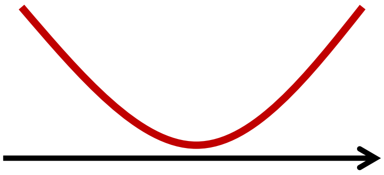
$\Delta = 0$
Um único zero



$\Delta > 0$
Dois zeros



$\Delta < 0$
Nenhum zero

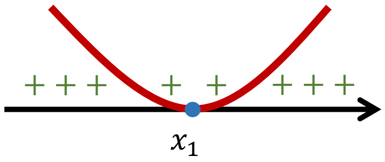


8.9 Sinal da função do segundo grau

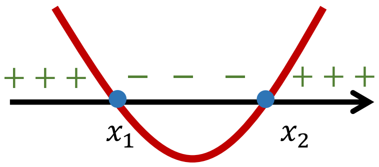
O sinal da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ depende dos sinais de a (determina a concavidade) e de Δ (determina a quantidade de zeros).

Concavidade voltada para cima
$(a > 0)$

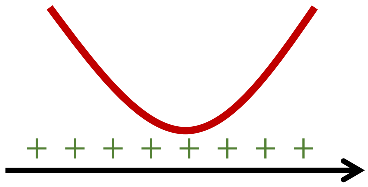
Para $\Delta = 0$



Para $\Delta > 0$.



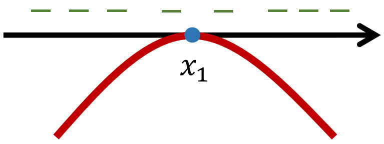
Para $\Delta < 0$.



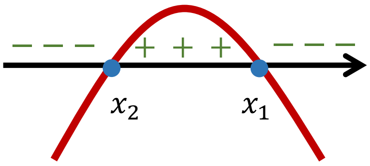
Concavidade voltada para baixo

$(a < 0)$

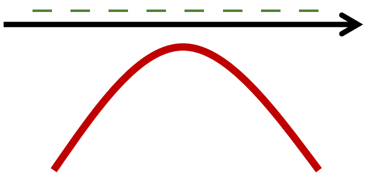
Para $\Delta = 0$



Para $\Delta > 0.$



Para $\Delta < 0.$



Exemplo: Esboce o gráfico, determine os zeros e o sinal da função quadrática

$$y = x^2 - 4x + 3.$$

Solução:
Neste caso, tem-se

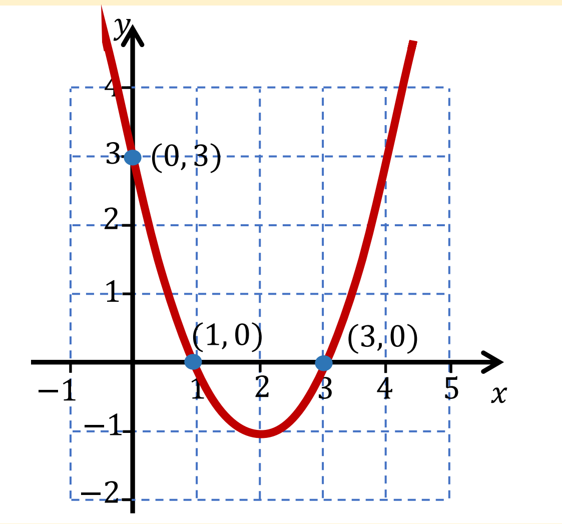
$$a = 1, \quad b = -4 \quad e \quad c = 3.$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4.(1).(3) = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2(1)} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1.$$

Portanto,

$$x_1 = 1 \quad \text{e} \quad x_2 = 3 \qquad \text{(Zeros de } f\text{)}$$



Como $c = 3$, tem-se que o gráfico intercepta o eixo y no ponto (0, 3).

Como $a > 0$, a concavidade é voltada para cima.

Sinal

Positiva: $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$
Negativa: (1,3)

Exemplo: Determine o domínio da função

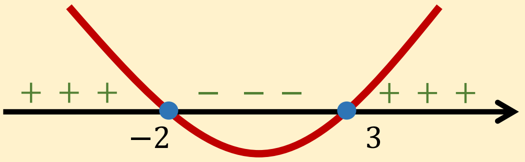
$$f(x) = \sqrt[4]{x^2 - x + 6}.$$

Solução:
Será necessário determinar os valores de x para os quais a função $y = x^2 - x - 6$ é não negativa.
Para isso, será analisado o sinal desta função.
Usando a fórmula de Bháskara para encontrar os zeros desta função, tem-se:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = \frac{1+5}{2} = 3 \quad ; \quad x_2 = \frac{1-5}{2} = -2$$

Como $a > 0$, a parábola possui concavidade voltada para cima.



Sinal da função

Portanto, o conjunto solução da inequação:

$$x^2 - x - 6 \geq 0$$

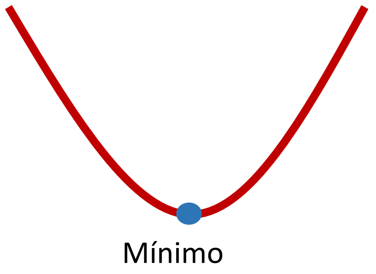
é dado por:

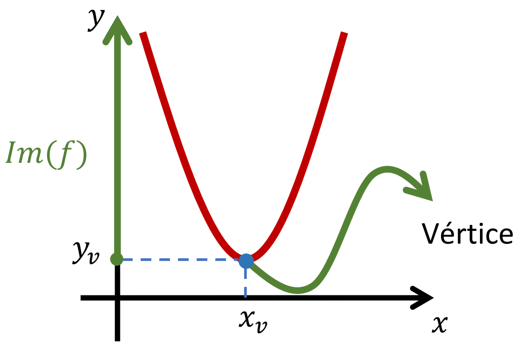
$$D(f) = (-\infty, -2] \cup [3, +\infty).$$

8.10 Coordenadas do vértice

No gráfico de uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, o ponto mínimo (quando $a > 0$) ou ponto máximo (quando $a < 0$) é chamado de vértice da parábola.

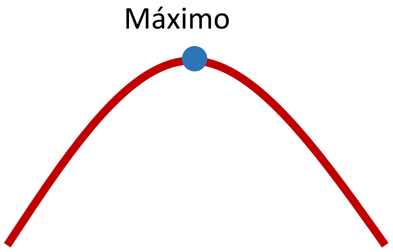
Quando $a > 0$:

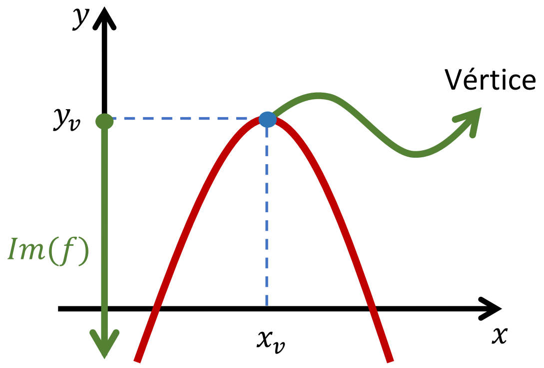




Se $a > 0$, então: $Im(f) = [y_v, +\infty)$.

Quando $a < 0$:





Se $a < 0$, então: $Im(f) = (-\infty, y_v]$.

Coordenadas:

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

Exemplo: Esboce o gráfico da função

$$y = x^2 - 4x + 5.$$

Solução:

Neste caso, tem-se:

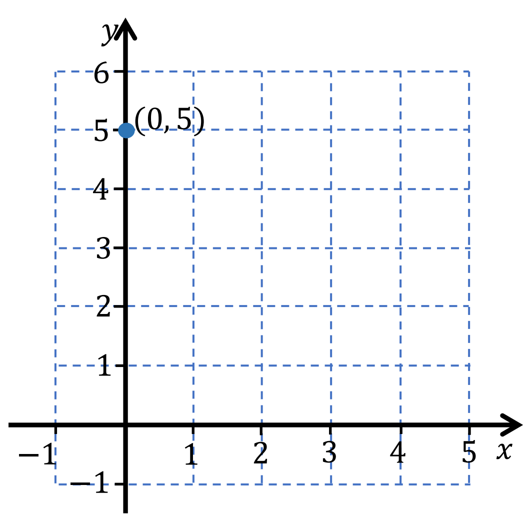
$$a = 1,\ \ b = -4\ \ e\ \ c = 5.$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4.(1).(5) = -4$$

Portanto, f não possui zeros.

Como $c = 5$, tem-se que o gráfico intercepta o eixo y no ponto $(0, 5)$.

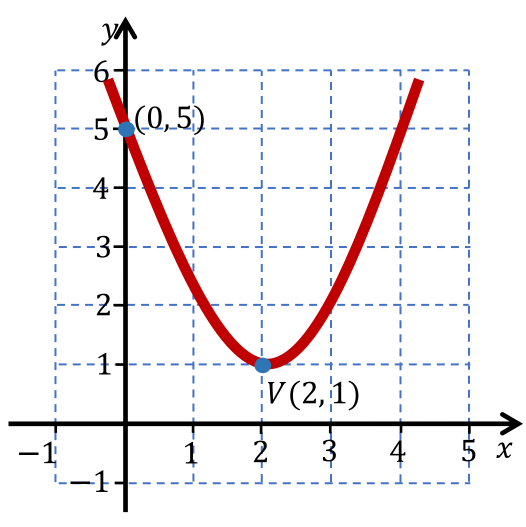


$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2.(1)} = 2$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-4)}{4.(1)} = 1$$

Portanto, o vértice da parábola é dado por $V(2,1)$.

Como $a > 0$, a concavidade é voltada para cima.



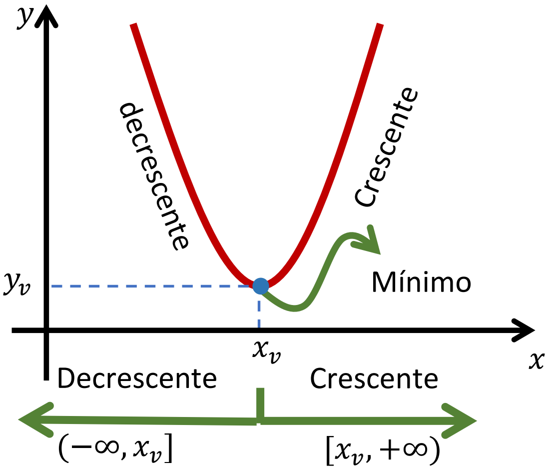
8.11 Monotonia (crescimento/decrescimento)

A abscissa do vértice (x_v) na função quadrática $y = ax^2 + bx + c,$ delimita onde ocorre uma mudança de comportamento no gráfico da função.

Mínimo

Muda de decrescente para crescente.

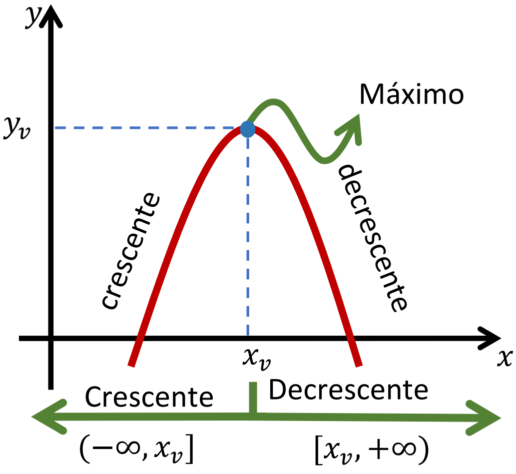
$(a > 0)$



Máximo

Muda de crescente para decrescente.

$(a < 0)$



Exemplo: Determine os intervalos de crescimento e decrescimento da função

$$y = x^2 - 4x + 5.$$

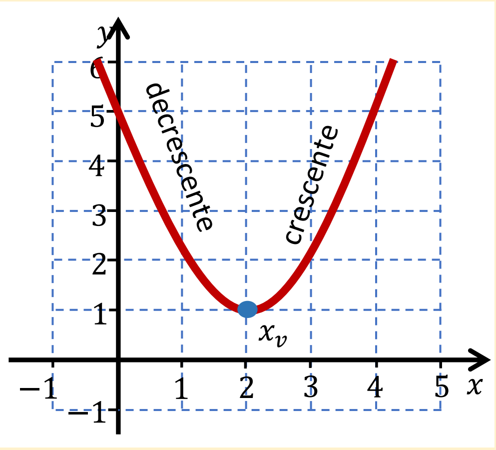
Solução:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2.(1)} = 2$$

$(a > 0)$ ⇒Função côncava para cima!

Decrescente: $(-\infty, 2]$

Crescente: $[2, +\infty)$



Exemplo: Determine o domínio da função

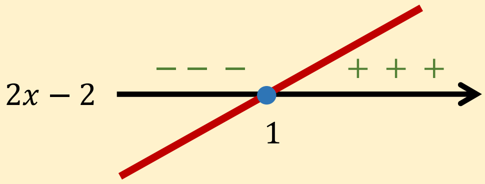
$$y = \sqrt{\frac{2x-2}{x^2-9}}$$

Solução:

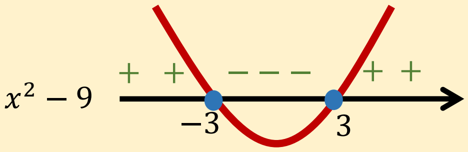
O domínio da função é formado pelos valores de x nos quais:

$$\frac{(2x-2)}{(x^2-9)} \geq 0$$

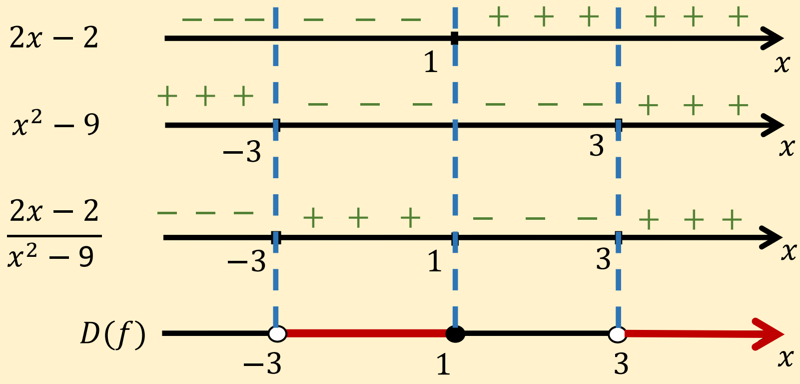
Sinal do numerador



Sinal do denominador



Analisando o sinal do quociente, tem-se:



Portanto,

$$D(f) = (-3, 1] \cup (3, +\infty).$$

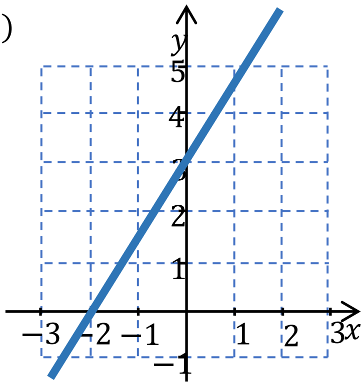
8.12 Exercícios Propostos

1) Para cada uma das funções de 1º grau abaixo, classifique-as em crescente ou decrescente, encontre o zero da função e esboce o gráfico.

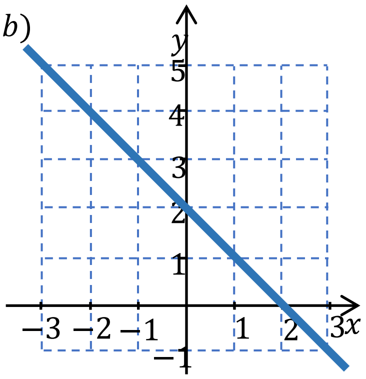
$a)\ y = 2x + 3$	$b)\ y = -x + 3$
$c)\ y = 2x - 1$	$d)\ y = -3x + 4$

2) Em cada caso, determine a lei de formação da função representada pelo gráfico.

$a)$



$b)$



3) Para cada uma das funções de 2º grau a seguir, determine os zeros (se existirem), as coordenadas do vértice, o conjunto imagem e esboce o gráfico.

$a)\ y = x^2 - 2x$ $\qquad$ $b)\ y = -x^2 + 2x + 3$

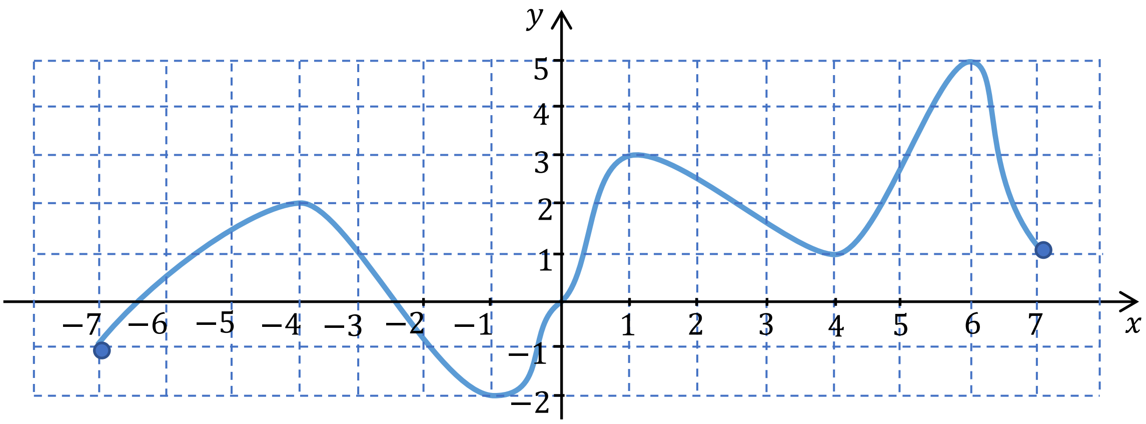
$c)\ y = -x^2 - 1$ $\qquad$ $d)\ y = x^2 - 4x + 4$

4) Determine o domínio de cada uma das funções dadas:

$a)\ y = \sqrt{x+3}$ $\qquad$ $b)\ y = \sqrt{5-x}$ $\qquad$ $c)\ f(x) = \sqrt{5x - x^2}$

$d)\ f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x-6}}$ $\qquad$ $e)\ f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+2x-8}{-x^2+9}}$ $\qquad$ $f)\ y = \dfrac{2x+1}{\sqrt[3]{2-x}}$

5) Obtenha os intervalos nos quais a função dada é **crescente** e nos quais é **decrescente**, indicando pontos de **máximo** e de **mínimo** para a figura a seguir:



6) Obtenha a equação da reta que passa pelos pontos A e B nos seguintes casos e esboce o gráfico:

$a)\ A(1,2)\ B(2,3)$ $\qquad$ $b)\ A(-1,0)\ B(4,2)$ $\qquad$ $c)\ A(2,1)\ B(0,4)$

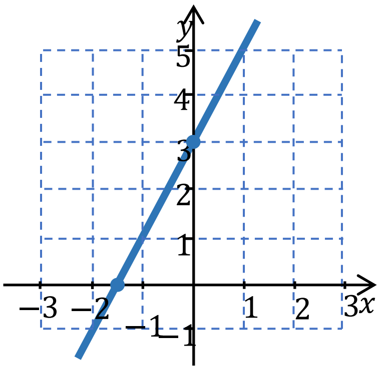
7) Construa os gráficos das funções definidas em $\mathbb{R}$ e faça o estudo de sinal.

$a)\ y = x^2 - 3x + 2$ $\qquad$ $b)\ \ y = -x^2 + 7x - 10$ $\qquad$ $c)\ \ y = x^2 + 2x + 1$

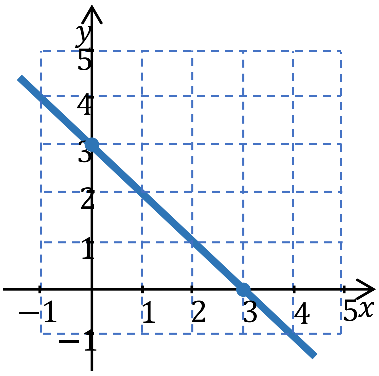
8.13 Respostas

Exercício 1:

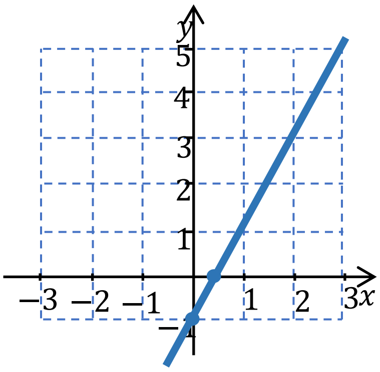
$a)$ Crescente; Zero: $x = -\frac{3}{2}$



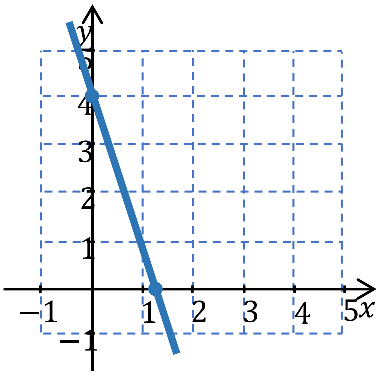
$b)$ Decrescente; Zero: $x = 3$



$c)$ Crescente; Zero: $x = \frac{1}{2}$



$d)$ Decrescente; Zero: $x = \frac{4}{3}$



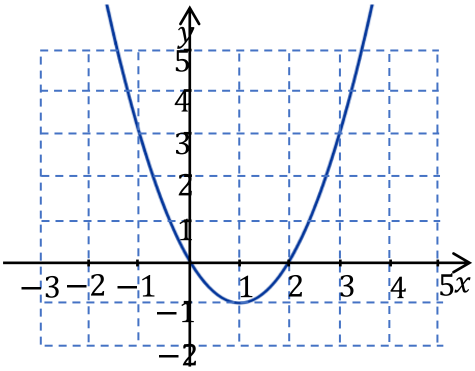
Exercício 2:

$$y = \frac{3x}{2} + 3$$

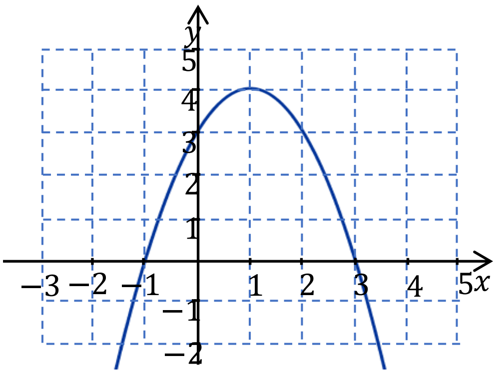
$$y = -x + 2$$

Exercício 3:

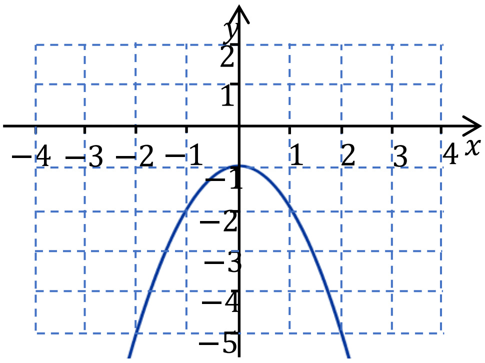
$a)$ Zeros: $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$
Vértice: $\mathrm{V}(1, -1)$
Imagem: $Im(f) = [-1, +\infty)$



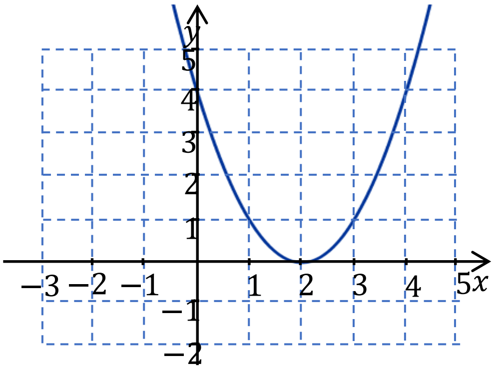
$b)$ Zeros: $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$
Vértice: $V(1, 4)$
Imagem: $Im(f) = (-\infty, 4]$



$c)$ Zeros: Não existem.
Vértice: $V(0, -1)$
Imagem: $Im(f) = (-\infty, -1]$



$d)$ Zeros: $x = 2$
Vértice: $V(2,0)$
Imagem: $Im(f) = [0,+\infty)$



Exercício 4:

$a)\ D(f) = [-3,+\infty)$

$b)\ D(f) = (-\infty,5]$

$c)\ D(f) = [0,5]$

$d)\ D(f) = (-\infty,-3) \cup (2,+\infty)$

$e)\ D(f) = [-4,-3) \cup [2,3)$

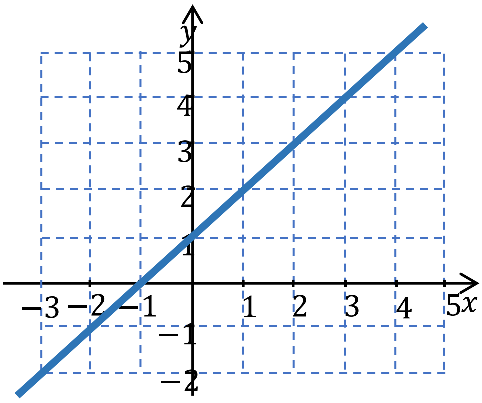
$f)\ D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

Exercício 5:

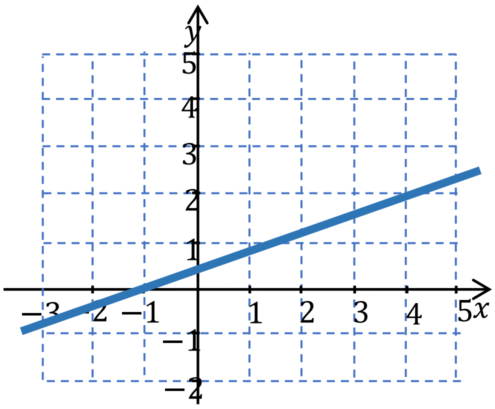
Intervalos crescentes:
$(-7\,,-4)\ U\ (-1\,,1)\ U\ (4\,,6)$
Intervalos decrescentes:
$(-4\,,-1)\ U\ (1\,,4)\ U\ (6\,,7)$
Pontos de máximos:
$\{\ (-4\,,2),(1\,,3),(6\,,5)\ \}$
Pontos de mínimo: $\{\ (-1\,,-2),(4\,,1)\ \}$

Exercício 6:

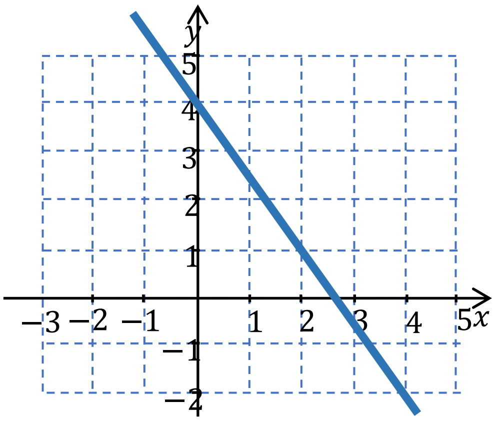
$a)\ y = x + 1$



$b)\ y = \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}$

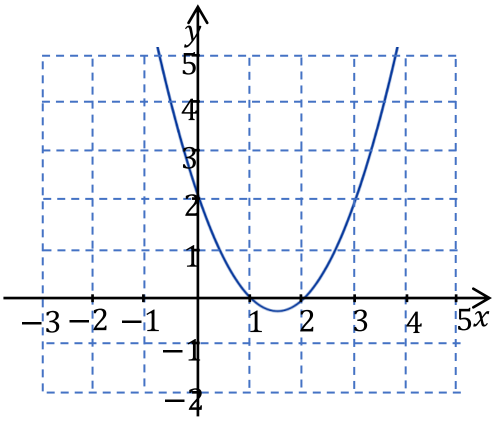


$c)\ y = -\frac{3}{2}x + 4$



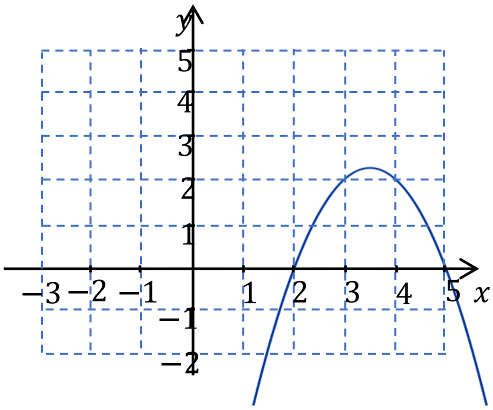
Exercício 7:

$a)$ Positiva: $(-\infty,1) \cup (2,+\infty)$
Negativa: $(1,2)$

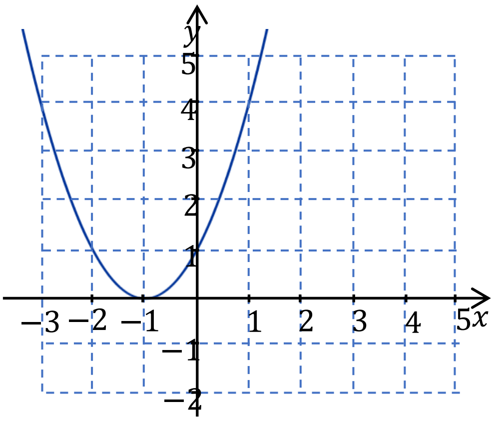


$b)$ Positiva: $(2,5)$

Negativa: $(-\infty,2)\cup(5,+\infty)$



$c)$ Positiva: $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$



9. Aula 3

9.1 Funções definidas por várias sentenças

Frequentemente utilizam-se funções definidas por sentenças diferentes em determinados intervalos do seu domínio.

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & se \quad x < 0 \\ x^2 - 2x + 1, & se \quad x \geq 0 \end{cases}$$

é definida pela sentença $y = x + 3$ no intervalo $(-\infty, 0)$;
e pela sentença $y = x^2 - 2x + 1$ no intervalo $[0, +\infty)$.

Este tipo de função é chamada de função definida por várias sentenças.

9.2 Gráfico

O gráfico de uma função definida por várias sentenças é obtido ao esboçar o gráfico de cada sentença, no seu respectivo intervalo de definição.

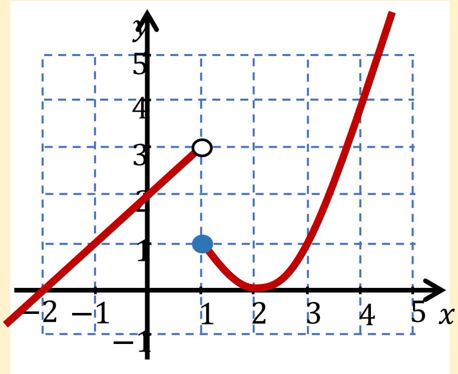
Exemplo: Esboce o gráfico da função

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & se \quad x < 1 \\ x^2 - 4x + 4, & se \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Solução:

A função dada é definida pela sentença
$y = x + 2$,
no intervalo $(-\infty, 1)$.

E definida pela sentença
$y = x^2 - 4x + 4$,
no intervalo $[1, +\infty)$.



Exemplo: Esboce o gráfico da função

$$f(x) = |x|.$$

Solução:

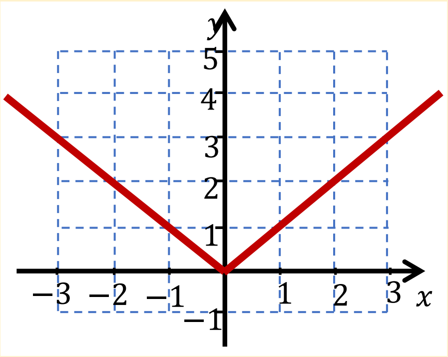
Como o módulo de x é dado por:

$$|x| = \begin{cases} -x, & se \quad x < 0 \\ x, & se \quad x \geq 0 \end{cases}$$

tem-se,

$$f(x) = \begin{cases} -x, & se \quad x < 0 \\ x, & se \quad x \geq 0 \end{cases}$$

O gráfico de f, portanto, será dado por:
$y = -x$, no intervalo $(-\infty, 0)$.
$y = -x$, no intervalo $(-\infty, 0)$.



Exemplo: Esboce o gráfico da função

$$f(x) = |x+1|.$$

Solução:

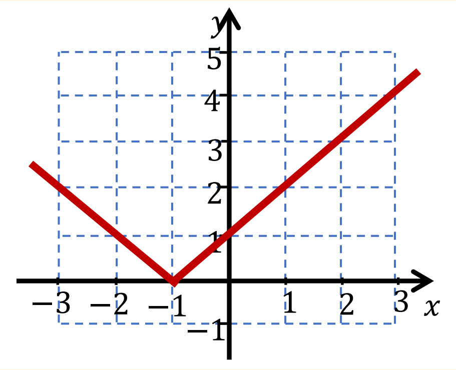
Como o módulo de $x+1$ é dado por:

$$|x+1| = \begin{cases} -(x+1), & se \quad x+1<0 \\ x+1, & se \quad x+1 \geq 0 \end{cases}$$

tem-se,

$$f(x) = \begin{cases} -x-1, & se \quad x<-1 \\ x+1, & se \quad x \geq -1 \end{cases}$$

O gráfico de f, portanto, será dado por:
$y = -x-1$, no intervalo $(-\infty, -1)$.
$y = x+1$, no intervalo $[-1, +\infty)$.



Exemplo: Esboce o gráfico da função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & se \quad x \neq 1 \\ 3, & se \quad x = 1 \end{cases}$$

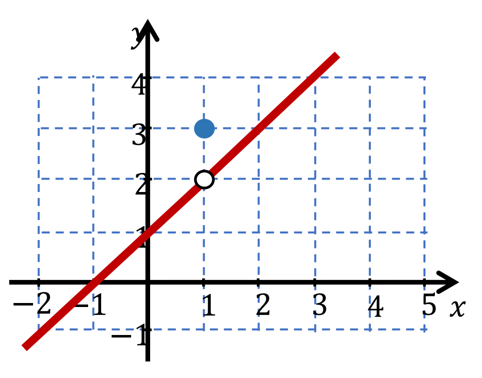
Solução:

Note que, para $x \neq 1$, a função f pode ser escrita como:

$$y = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$$

Portanto, a função dada pode escrita como:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & se \quad x \neq 1 \\ 3, & se \quad x = 1 \end{cases}$$



9.3 Função potência e função raiz

Definição: Dado $n \in \mathbb{N}^*$, a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^n$ é chamada de função potência enésima.

Exemplo: São exemplos de funções potências:

Solução:

$y = x$ (função identidade)

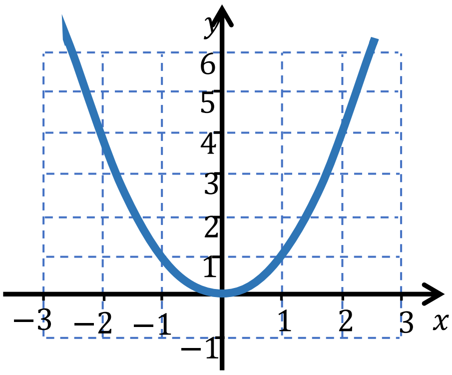
$y = x^2$ (função quadrática)

$y = x^3$ (função cúbica)

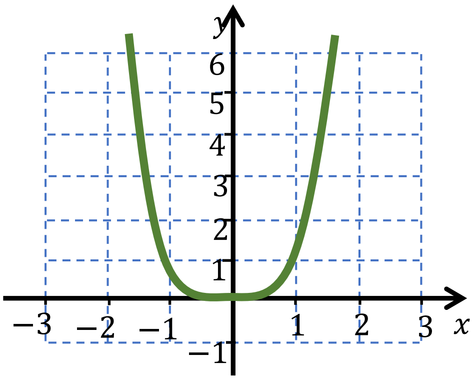
9.4 Gráfico da função potência

Os gráficos das funções potência $y = x^n$ para n par, são semelhantes ao gráfico da função $y = x^2$, mas não são chamados de parábolas.

$f(x) = x^2$
$D(f) = \mathbb{R}\,;\quad Im(f) = \mathbb{R}_+$

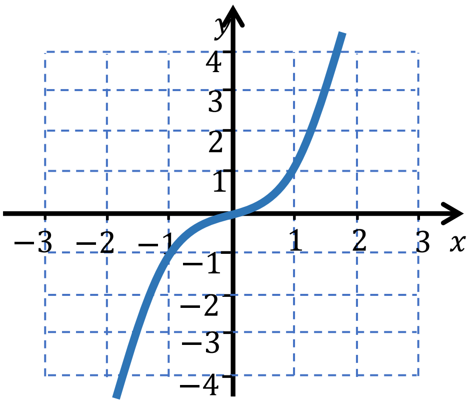


$f(x) = x^4$
$D(f) = \mathbb{R}\,;\quad Im(f) = \mathbb{R}_+$

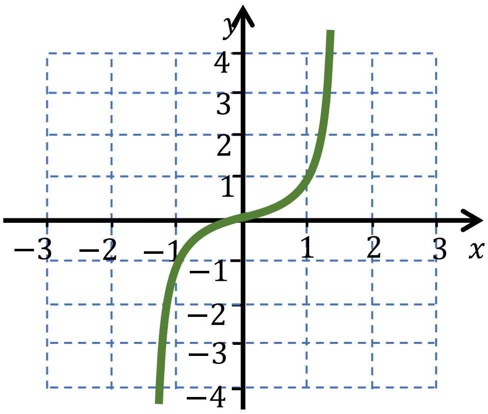


Os gráficos das funções potência $y = x^n$ para n ímpar, são semelhantes ao gráfico da função $y = x^3$.

$f(x) = x^3$
$D(f) = \mathbb{R}\,;\quad Im(f) = \mathbb{R}$



$f(x) = x^5$
$D(f) = \mathbb{R}\,;\quad Im(f) = \mathbb{R}$



9.5 Função potência e função raiz

Definição: Dado $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2)$, a função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$ é chamada de função raiz enésima.

Obs.: $A = \mathbb{R}_+$ se n é par e $A = \mathbb{R}$ se n é impar

Exemplo: São exemplos de funções raízes:

Solução: $y = \sqrt{x}$ (função raiz quadrada)

$y = \sqrt[3]{x}$ (função raiz cúbica)

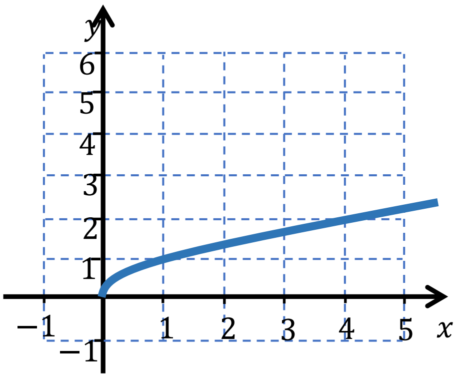
$y = \sqrt[4]{x}$ (função raiz quarta)

9.6 Gráfico da função raiz

Os gráficos das funções $y = \sqrt[n]{x}$ para n par, são semelhantes ao de $y = \sqrt{x}$.

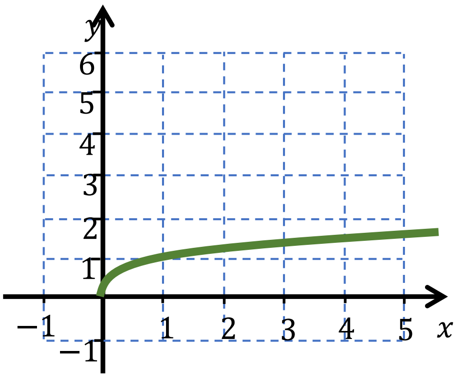
$f(x) = \sqrt{x}$

$D(f) = \mathbb{R}_+; \quad Im(f) = \mathbb{R}_+$



$f(x) = \sqrt[4]{x}$

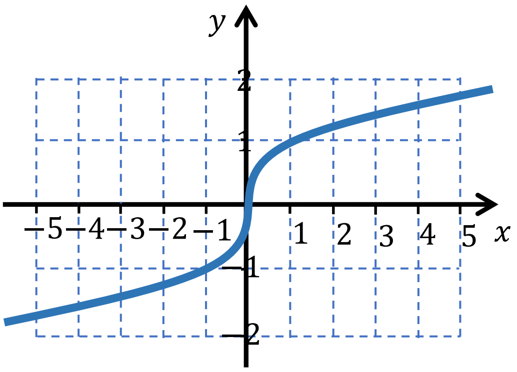
$D(f) = \mathbb{R}_+; \quad Im(f) = \mathbb{R}_+$



Os gráficos das funções $y = \sqrt[n]{x}$ para n ímpar, são semelhantes ao de $y = \sqrt[3]{x}$.

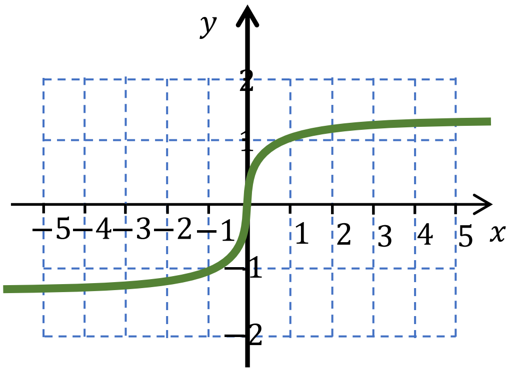
$f(x) = \sqrt[3]{x}$

$D(f) = \mathbb{R}; \quad Im(f) = \mathbb{R}$



$f(x) = \sqrt[5]{x}$

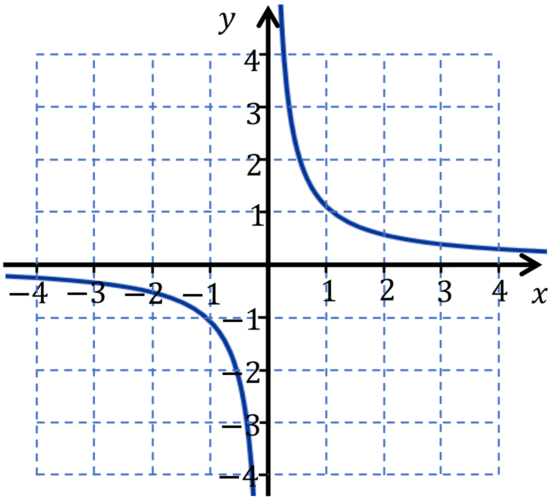
$D(f) = \mathbb{R}; \quad Im(f) = \mathbb{R}$



9.7 Função recíproca

Definição: A função $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$ é chamada de função recíproca.

O gráfico da função recíproca é chamado de hipérbole.



9.8 Exercícios Propostos

1) Esboce o gráfico das seguintes funções:

$$a)\ f(x) = \begin{cases} x+2, & se\ x < 0 \\ 2, & se\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$b)\ f(x) = \begin{cases} -2, & se\ x < -2 \\ x^2, & se - 2 \leq x < 0 \\ x, & se\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$c)\ f(x) = \begin{cases} 4, & se\ x < -1\ ou\ x > 3 \\ x^2 - 2x + 1, & se - 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$d)\ f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & se\ x \geq 0 \\ x^2 - 2, & se\ x < 0 \end{cases}$$

$$e)\ f(x) = \begin{cases} -x+2, & se\ x < -1 \\ x^3, & se - 1 \leq x < 1 \\ \sqrt{x}, & se\ x > 1 \end{cases}$$

$$f)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2 - 2x}, & se\ x \neq 0 \\ 2, & se\ x = 0 \end{cases}$$

2) Na função real

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2, & se\ x > -2 \\ -\dfrac{x}{2} + 1, & se\ x \leq -2 \end{cases}$$

determine os valores do domínio que tem imagem 4:

3) Considere a função $y = f(x)$ definida por:

$$\begin{cases} y = 4x, & se\ 0 \leq x \leq 2 \\ y = -x^2 + 6x, & se\ 2 < x \leq 6 \end{cases}$$

$a)$ Esboce o gráfico de $y = f(x)$ no intervalo $0 \leq x \leq 6$.

$b)$ Para quais valores de x temos $f(x) = 5$?

4) Esboce o gráfico da função:

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1}, & se\ x \geq 2 \\ x^2 - 1, & se\ 0 \leq x < 2 \\ |x|, & se\ x < 0 \end{cases}$$

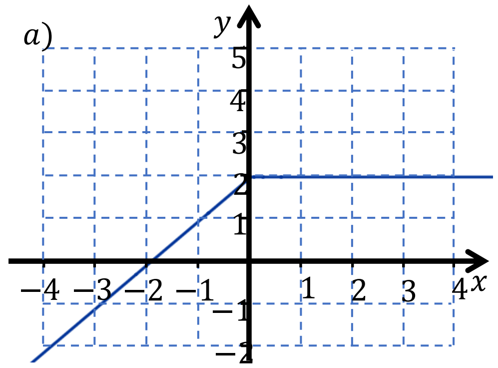
5) Construa os gráficos das seguintes funções reais:

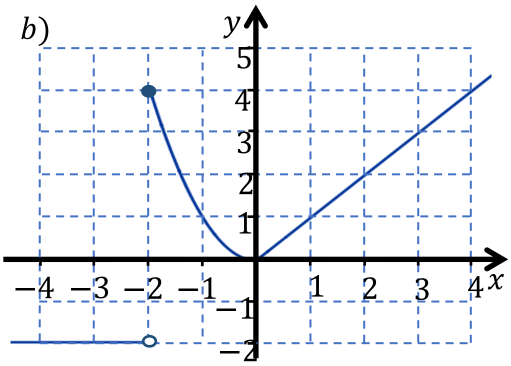
$a)\ f(x) = |2x - 1|$

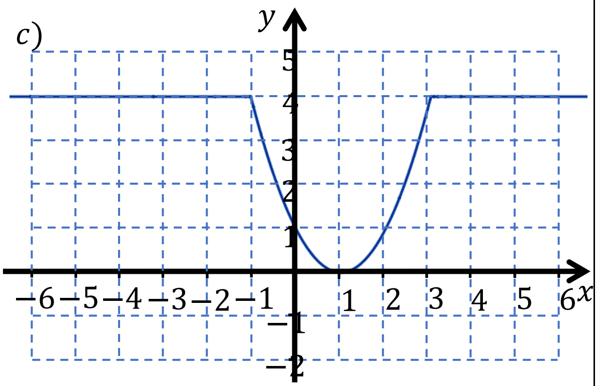
$b)\ f(x) = |2 - 3x|$

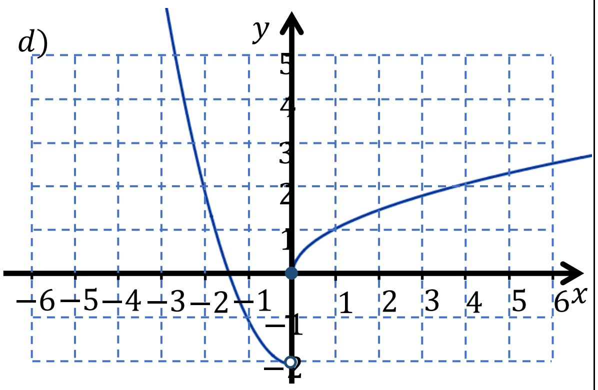
9.9 Respostas

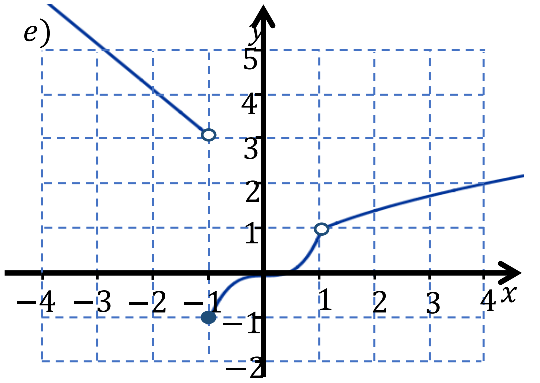
Exercício 1:

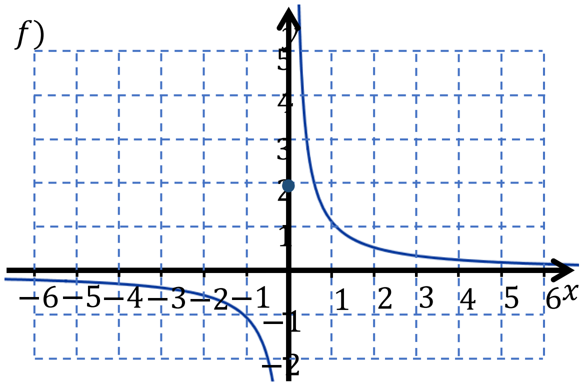




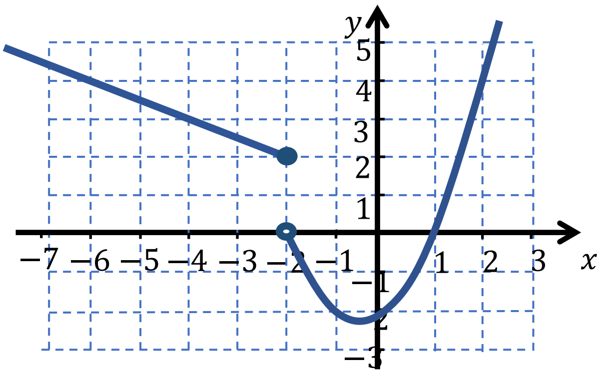






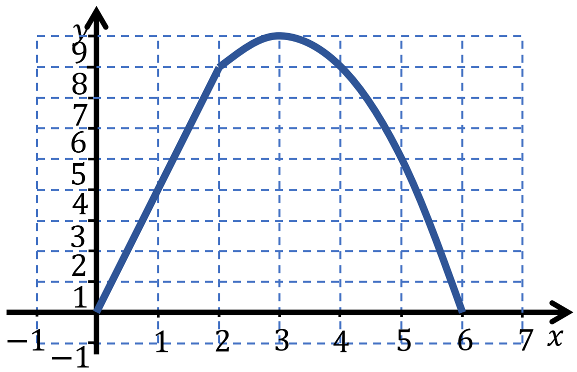


Exercício 2:



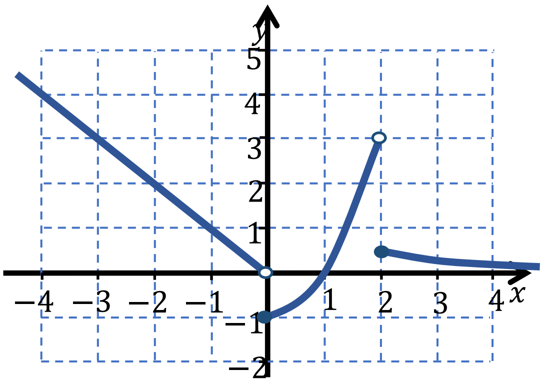
$x = -6$

Exercício 3:



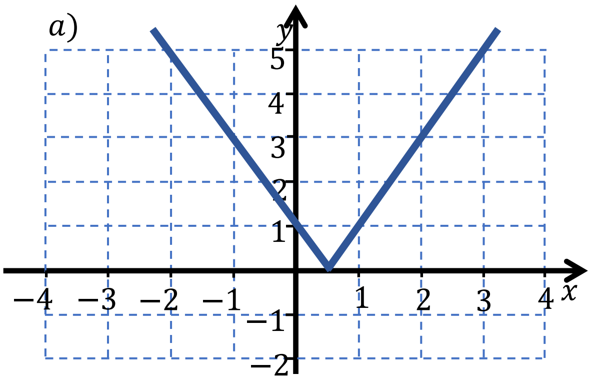
$b)\ f(x) = 5\ para\ x = \frac{5}{4}\ ou\ x = 5$

Exercício 4:

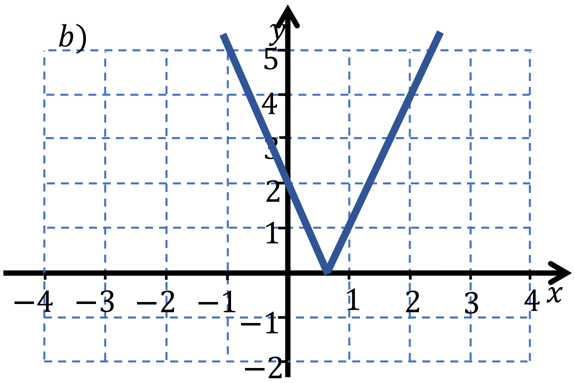


Exercício 5:

$a)$



$b)$



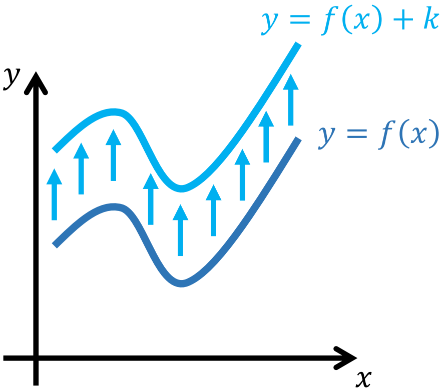
10. Aula 4

10.1 Translações verticais

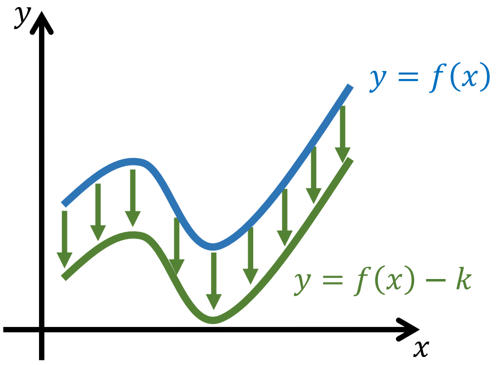
Utiliza-se translações verticais quando se tem o objetivo de esboçar o gráfico da função $y = f(x) \pm k$, onde k é uma constante positiva.

Considerando o gráfico de uma função conhecida $y = f(x)$.

O gráfico da função $y = f(x) + k$, é obtido deslocando-se o gráfico da função f em k unidades para cima.



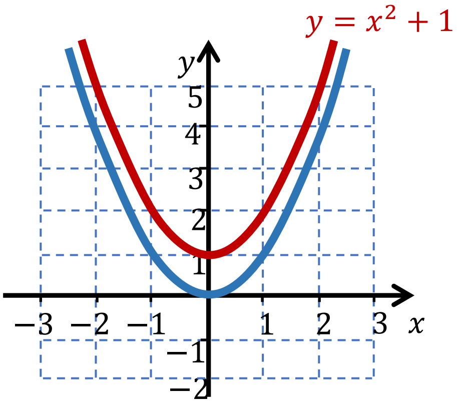
O gráfico da função $y = f(x) - k$, é obtido deslocando-se o gráfico da função f em k unidades para baixo.



Exemplo: Esboce o gráfico da função $y = x^2 + 1$.

Solução:

Utilizando translações verticais, desloca-se o gráfico da função $y = x^2$ em uma unidade para cima.

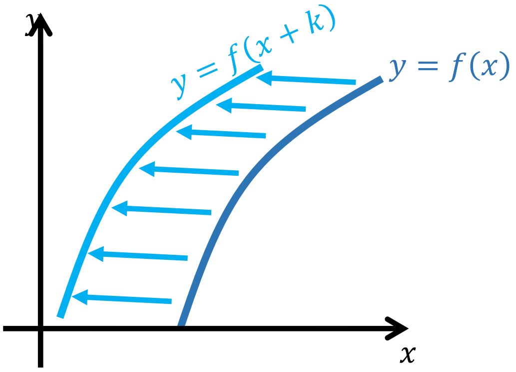


10.2 Translações horizontais

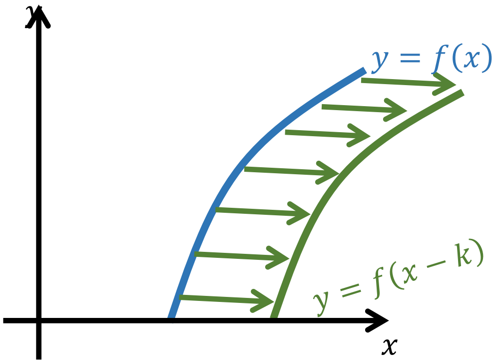
Utiliza-se translações horizontais quando se tem o objetivo de esboçar o gráfico da função $y = f(x \pm k)$, onde k é uma constante positiva.

Considerando o gráfico de uma função conhecida $y = f(x)$.

O gráfico da função $y = f(x + k)$, é obtido deslocando-se o gráfico da função f em k unidades para a esquerda.



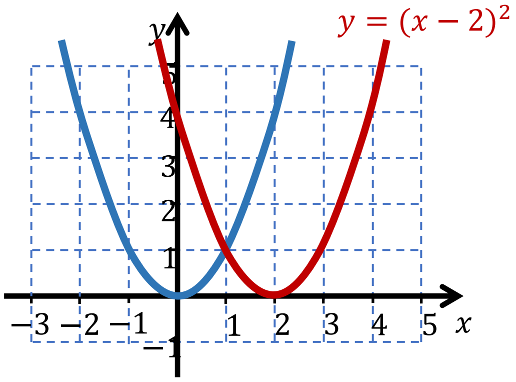
O gráfico da função $y = f(x - k)$, é obtido deslocando-se o gráfico da função f em k unidades para a direita.



Exemplo: Esboce o gráfico da função $y = (x - 2)^2$:

Solução:

Utilizando translações horizontais, do gráfico da função $y = x^2$, desloca-se o gráfico da função em duas unidades para a direita.

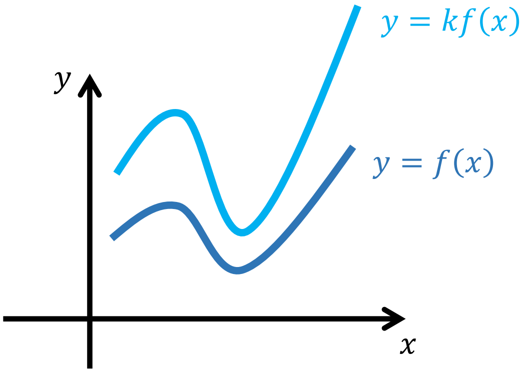


10.3 Alongamentos/compressões verticais

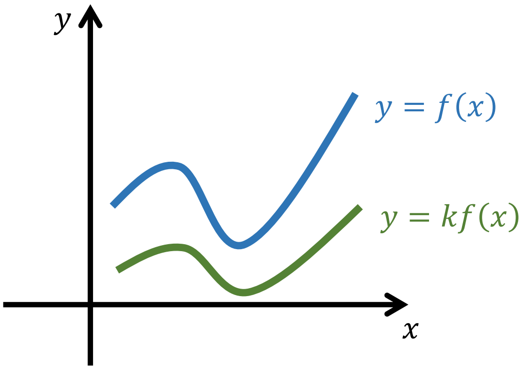
Utiliza-se alongamentos (ou compressões) verticais quando se tem o objetivo de esboçar o gráfico da função $y = kf(x)$, onde k é uma constante positiva.

Considerando o gráfico de uma função conhecida $y=f(x)$.

Se $k > 1$: o gráfico da função $y = kf(x)$, é obtido alongando verticalmente o gráfico da função f pelo fator k.



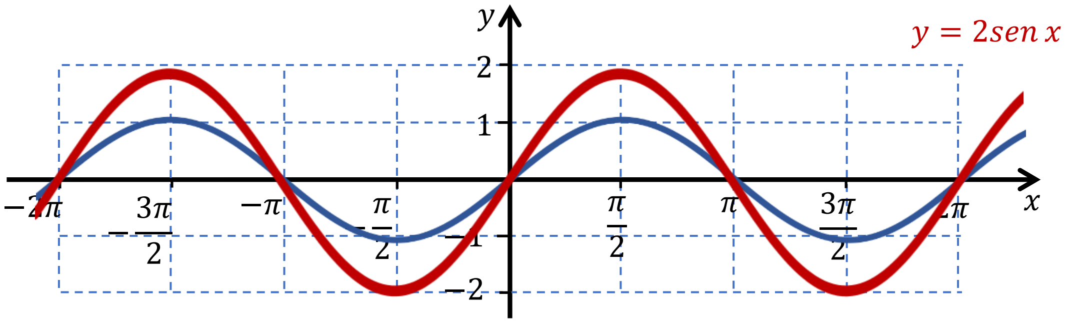
Se $0 < k < 1$: o gráfico da função $y = kf(x)$, é obtido comprimindo verticalmente o gráfico da função f pelo fator k.



Exemplo: Esboce o gráfico da função $y = 2\,\text{sen}\,x$:

Solução:

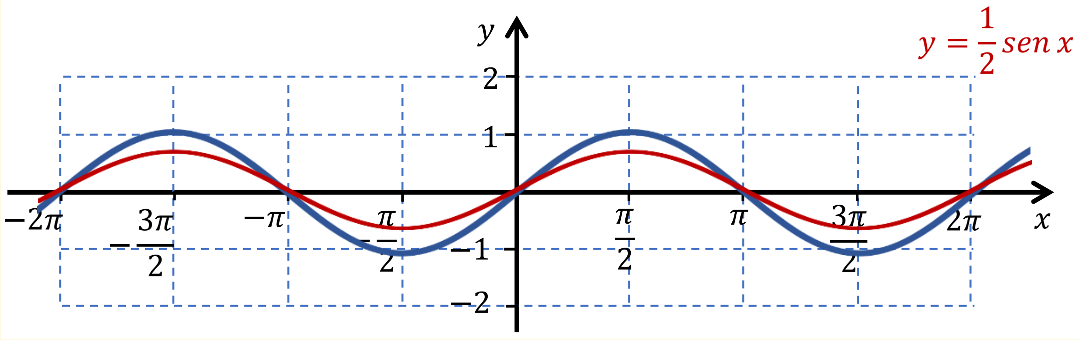
Utilizando alongamentos e compressões verticais, alonga-se o gráfico da função $\boldsymbol{y = sen\ x}$ verticalmente em dobro.



Exemplo: Esboce o gráfico da função $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x$:

Solução:

Utilizando alongamentos e compressões verticais, comprime-se o gráfico da função $\boldsymbol{y = sen\, x}$ verticalmente pela metade.

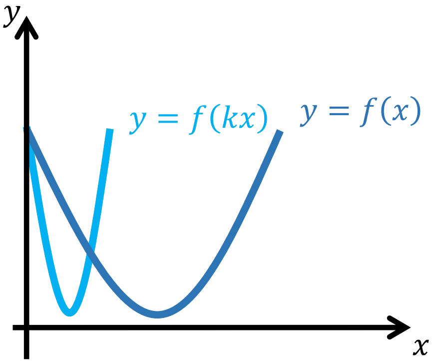


10.4 Alongamentos/compressões horizontais

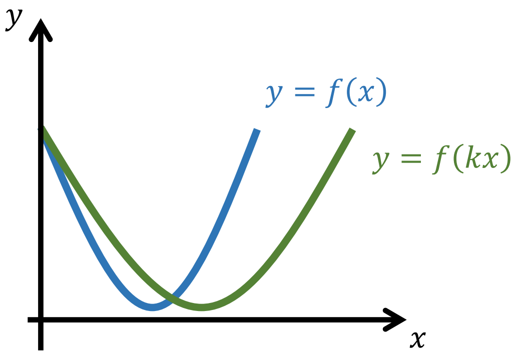
Utiliza-se alongamentos (ou compressões) horizontais quando se tem o objetivo de esboçar o gráfico da função $y = f(kx)$, onde k é uma constante positiva.

Considerando o gráfico de uma função conhecida $y = f(x)$.

Se $k > 1$: o gráfico da função $y = f(kx)$, é obtido comprimindo horizontalmente o gráfico da função f pelo fator k.



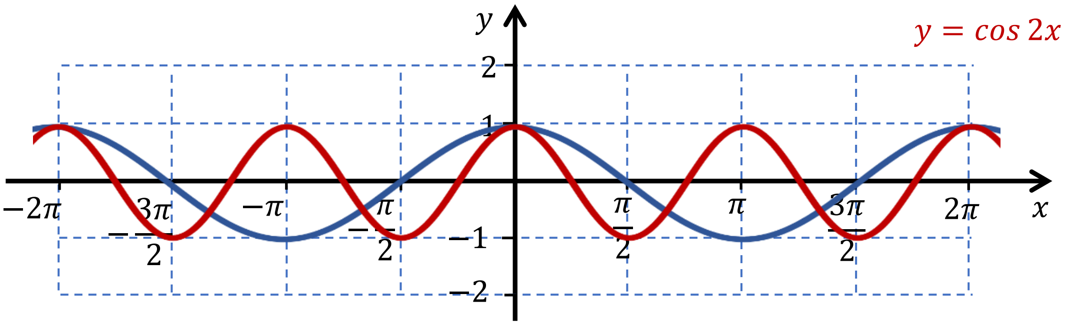
Se $0 < k < 1$: o gráfico da função $y = f(kx)$, é obtido alongando horizontalmente o gráfico da função f pelo fator k.



Exemplo: Esboce o gráfico da função $y = \cos 2x$:

Solução:

Utilizando alongamentos e compressões horizontais, comprime-se o gráfico da função $\boldsymbol{y = cos\ x}$ pelo fator 2.

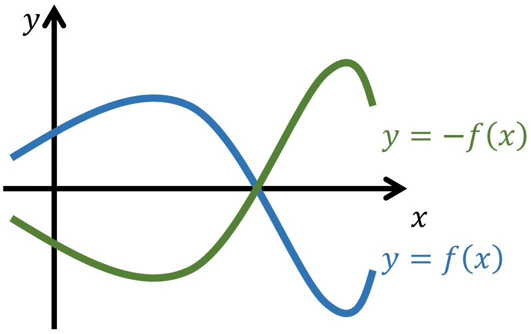


10.5 Reflexão em relação ao eixo horizontal

Utiliza-se reflexão em relação ao eixo horizontal quando se tem o objetivo de esboçar o gráfico da função $y = -f(x)$, onde k é uma constante positiva.

Considerando o gráfico de uma função conhecida $y = f(x)$.

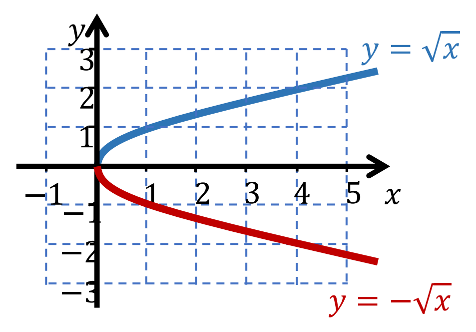
O gráfico da função $y = -f(x)$, é obtido refletindo os pontos do gráfico da função f em relação ao eixo x.



Exemplo: Esboce o gráfico da função $y = -\sqrt{x}$:

Soluções:

Reflete - se o gráfico da função $\boldsymbol{y = \sqrt{x}}$ em relação ao eixo horizontal.

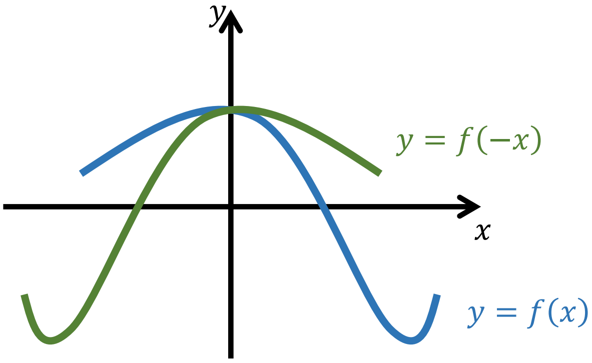


10.6 Reflexão em relação ao eixo vertical

Utiliza-se reflexão em relação ao eixo vertical quando se tem o objetivo de esboçar o gráfico da função $y = f(-x)$, onde k é uma constante positiva.

Considerando o gráfico de uma função conhecida $y = f(x)$.

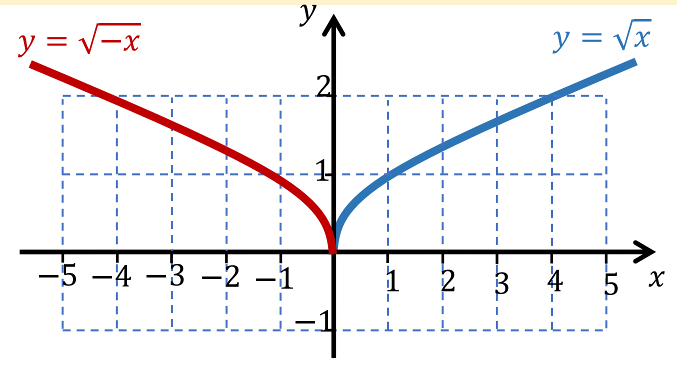
O gráfico da função $y = f(-x)$, é obtido refletindo os pontos do gráfico da função f em relação ao eixo y.



Exemplo: Esboce o gráfico da função $y = \sqrt{-x}$:

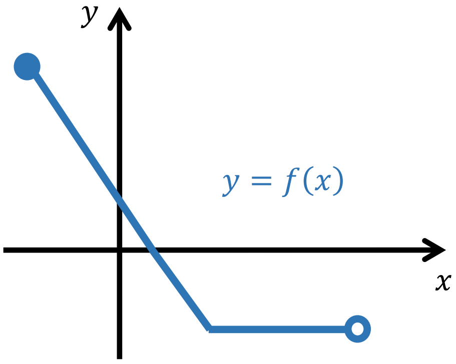
Solução:

Reflete o gráfico da função $y = \sqrt{x}$ em relação ao eixo vertical.



10.7 Transformação ocasionada pelo módulo

Considerando o gráfico de uma função conhecida $y = f(x)$.

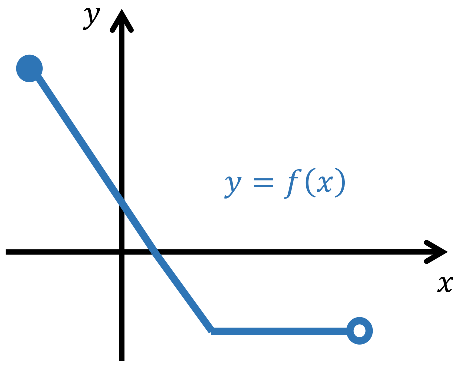


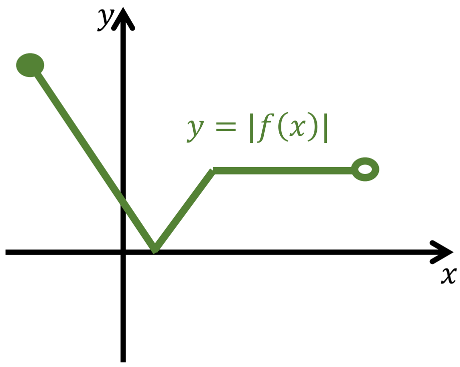
Ao considerar a função dada por $y = |f(x)|$, podem acontecer duas situações:

$$y = |f(x)| = f(x), \text{ se } f(x) \geq 0.$$

$$y = |f(x)| = -f(x), \text{ se } f(x) < 0.$$

Assim, o gráfico da função $y = |f(x)|$ é obtido refletindo, em relação ao eixo x, os pontos do gráfico da função f que possuem imagem negativa.

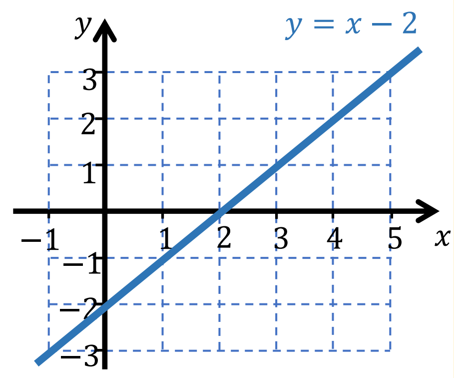


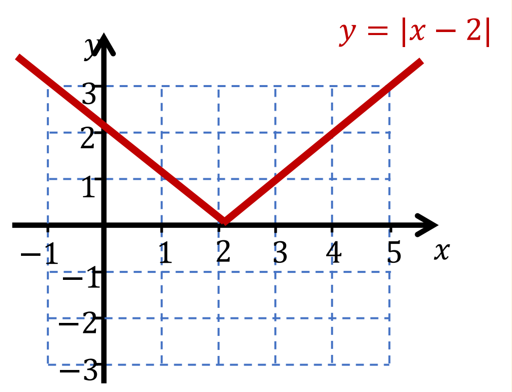


Exemplo: Esboce o gráfico da função $y = |x - 2|$:

Solução:

Reflete, em relação ao eixo x, todos os pontos do gráfico de $\boldsymbol{y = x - 2}$ que possuem imagens negativas.

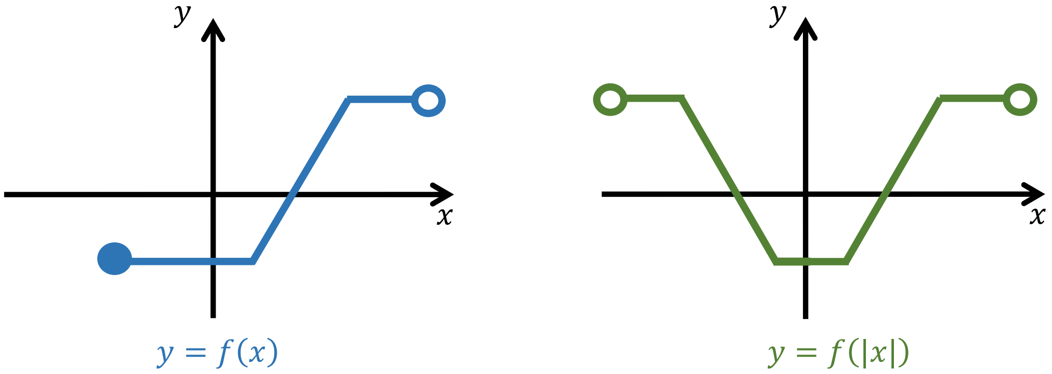




10.8 Transformação ocasionada pelo módulo

Considerando o gráfico de uma função conhecida $y = f(x)$.

O gráfico da função dada por $y = f(|x|)$, é obtido replicando os pontos do gráfico de f que estão do lado direito do plano $(x \geq 0)$ também no lado esquerdo do plano $(x \leq 0)$, através de reflexão em relação ao eixo vertical.



Tendo em vista que o módulo de um número positivo é ele mesmo, conclui-se que o gráfico permanece inalterado para todos os pontos cujos domínios são positivos, ou seja,

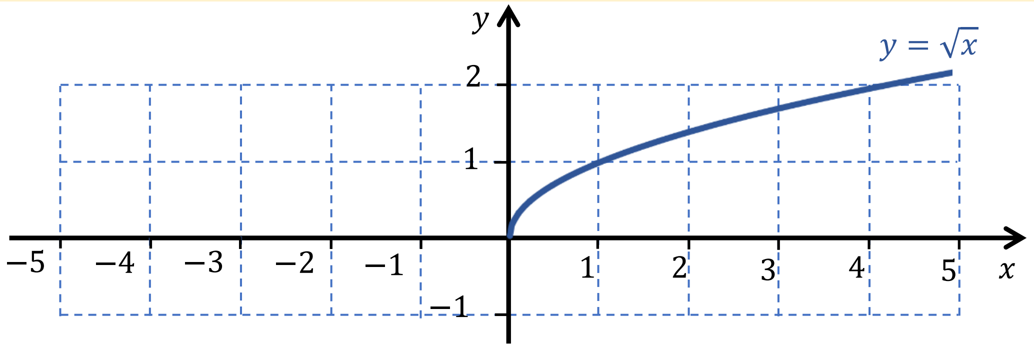
$$y = f(|x|) = f(x), \text{ se } x \geq 0.$$

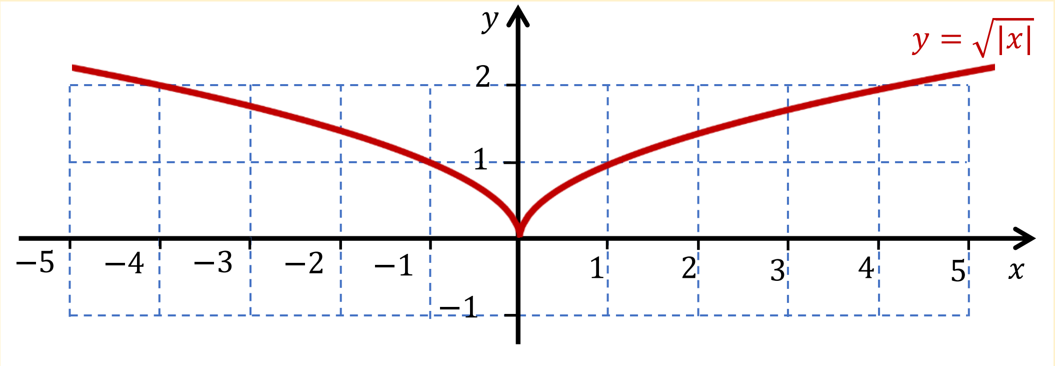
Desta forma, o gráfico da função obtida fica simétrico em relação ao eixo vertical.

Exemplo: Esboce o gráfico da função $y = \sqrt{|x|}$:

Solução:

Usando como base o gráfico da função $\boldsymbol{y = \sqrt{x}}$, replica-se todos os pontos do gráfico de f do lado direito $(x \geq 0)$ no lado esquerdo $(x \leq 0)$.

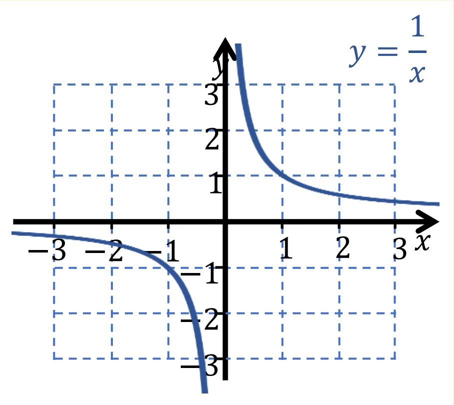


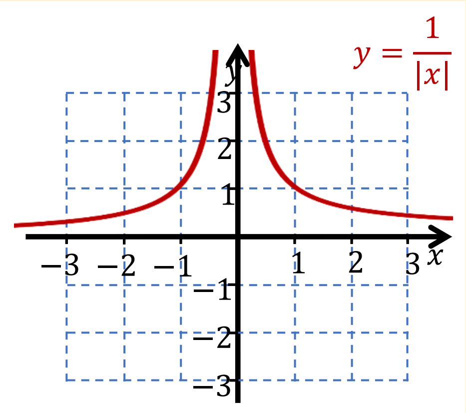


Exemplo: Esboce o gráfico da função $y = \frac{1}{|x|}$:

Solução:

Usando como base o gráfico da função $y = \frac{1}{x}$, replica-se todos os pontos do gráfico de f do lado direito $(x \geq 0)$ no lado esquerdo $(x \leq 0)$.





10.9 Exercícios Propostos

1) Considerando a função$f(x) = \sqrt{x+1} + 2$, determine:

a) $f(3)$

b) $f(t^2 - 1)$

c) Domínio de f.

d) Imagem de f.

e) Esboce o gráfico de f utilizando translações do gráfico da função $y = \sqrt{x}$.

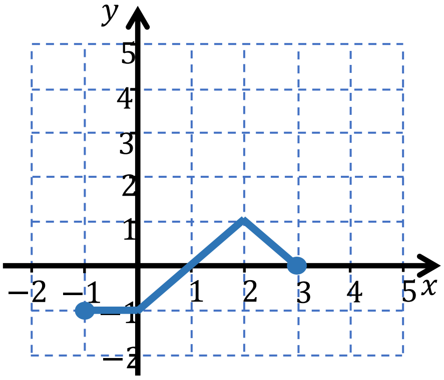
2) Considere o gráfico de uma função f representado na figura a seguir.

a) Determine o domínio e a imagem de f.

b) Considerando como base o gráfico da função f, represente graficamente cada função a seguir, determinando o domínio e a imagem.

$f_1(x) = f(x) - 1$ $\quad f_2(x) = f(x-1)$ $\quad f_3(x) = 2f(x)$ $\quad f_4(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$

$f_5(x) = -f(x)$ $\quad f_6(x) = f(-x)$ $\quad f_7(x) = |f(x)|$ $\quad f_8(x) = f(|x|)$



3) Esboce os gráficos das funções, por deslocamentos, alongamentos, compressões e reflexões do gráfico de $f(x) = x^2$ de maneira apropriada.

a) $f(x) = (x+1)^2$

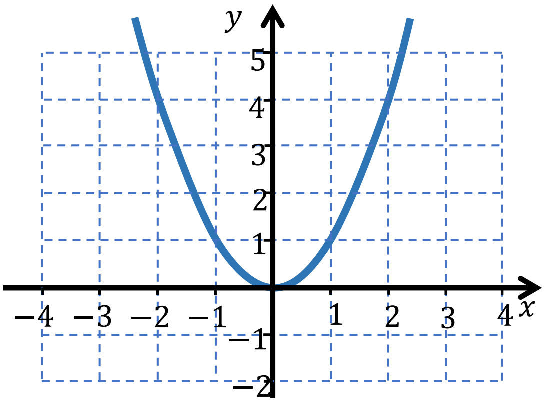
b) $f(x) = (x-2)^2$

c) $f(x) = -x^2$

d) $f(x) = x^2 + 1$

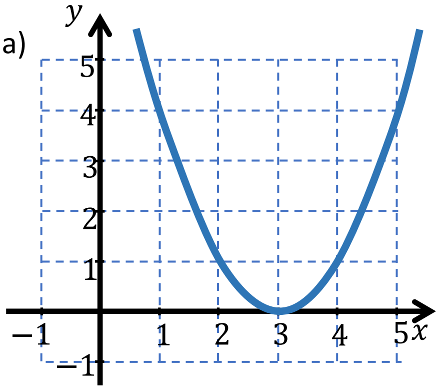
e) $f(x) = x^2 - 2$

f) $f(x) = (x+2)^2 - 1$

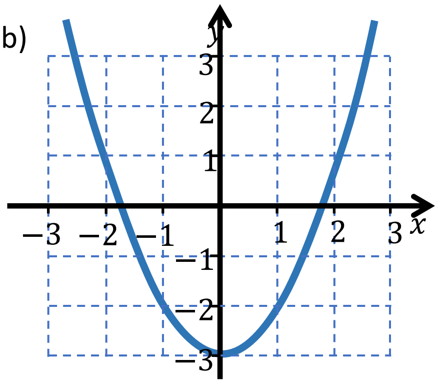


4) Dados os gráficos de funções quadráticas, determinar a lei da função.

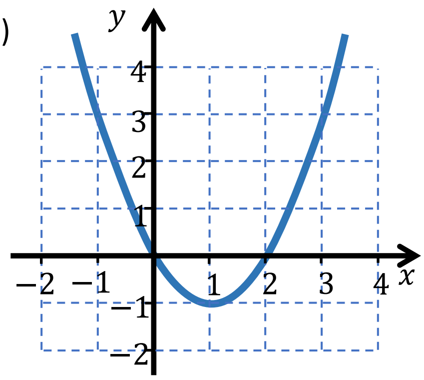
a)



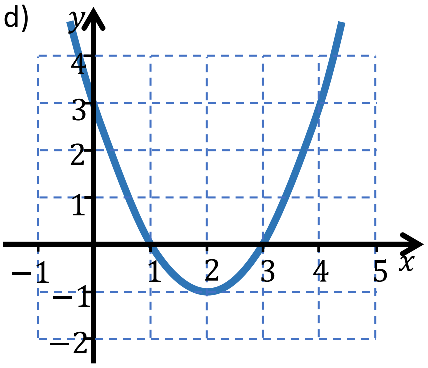
b)



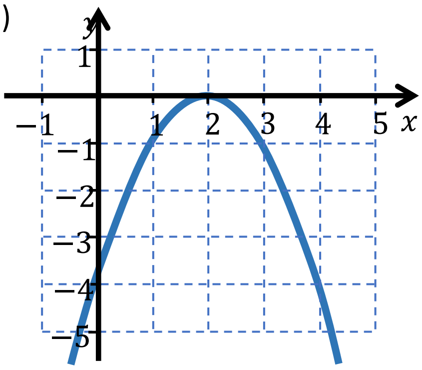
c)



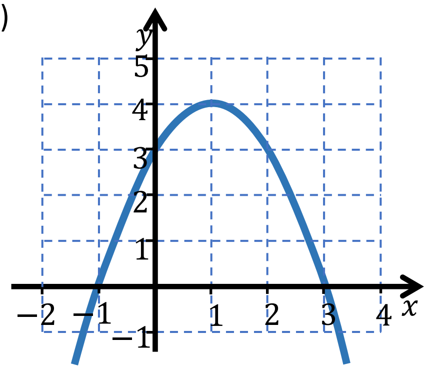
d)



e)



f)



5) Dada a função $y = |2x + 2|$, determine:

a) Domínio da função.

b) Imagem da função.

c) $f(-4),\ f(-2), f(-1), f(0)$ e $f(3)$.

d) Esboce o gráfico.

6) Esboce os gráficos das funções, por deslocamentos, alongamentos, compressões e reflexões de maneira apropriada.

a) $f(x) = |2x - 1| + 1$

b) $f(x) = |x + 2| + 2$

c) $f(x) = \sqrt{x - 1} + 3$

d) $f(x) = \sqrt{x + 3} - 2$

e) $f(x) = 2 \sin 2x$

f) $f(x) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

10.10 Respostas

Exercício 1:

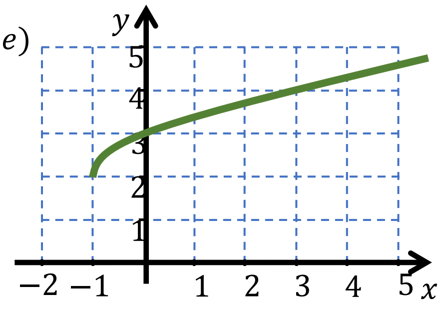
$a)\ f(3) = 4$

$b)\ f(t^2 - 1) = |t| + 2$

$c)\ D(f) = [-1; +\infty)$

$d)\ Im(f) = [2; +\infty)$

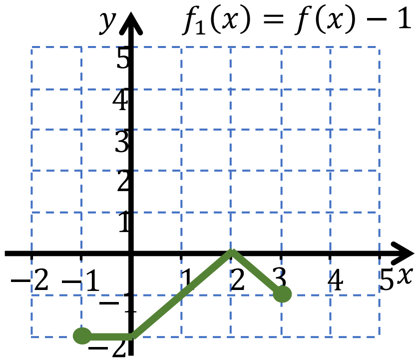
$e)$



Exercício 2:

$a)\ D(f) = [-1, 3] \quad Im(f) = [-1, 1]$

$b)$

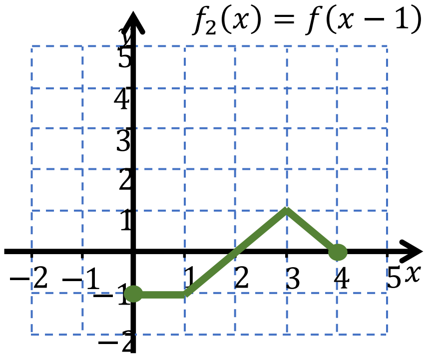


$f_1(x) = f(x) - 1$

f_1

$D(f_1) = [-1, 3] \quad Im(f_1) = [-2, 0]$

Deslocamento vertical do gráfico de f em uma unidade para baixo.

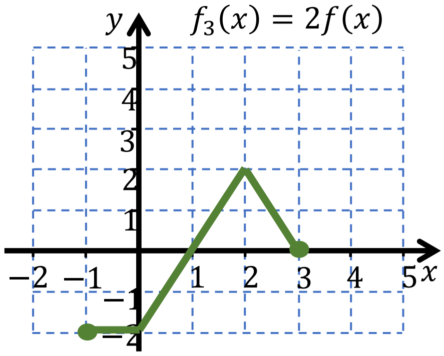


$f_2(x) = f(x - 1)$

f_2

$D(f_2) = [0, 4] \quad Im(f_2) = [-1,\ 1]$

Deslocamento horizontal do gráfico de f em uma unidade para a direita.

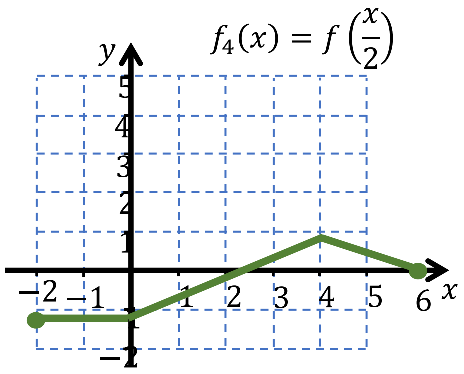


$f_3(x) = 2f(x)$

f_3

$D(f_3) = [-1, 3] \quad Im(f_3) = [-2,\ 2]$

Alongamento vertical do gráfico de f pelo fator 2.

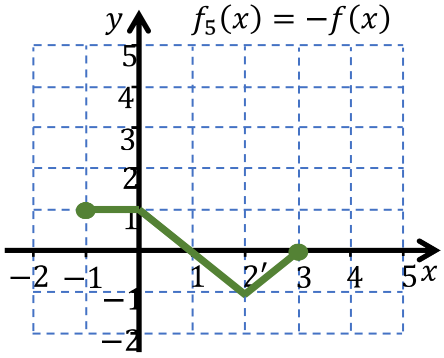


$f_4(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$

f_4

$D(f_4) = [-2, 6] \quad Im(f_4) = [-1, 1]$

Alongamento horizontal do gráfico de f pelo fator 2.

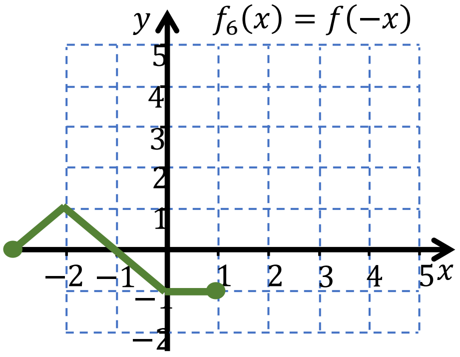


$f_5(x) = -f(x)$

f_5

$D(f_5) = [-1, 3] \quad Im(f_5) = [-1, 1]$

Reflexão do gráfico de f em relação ao eixo horizontal.

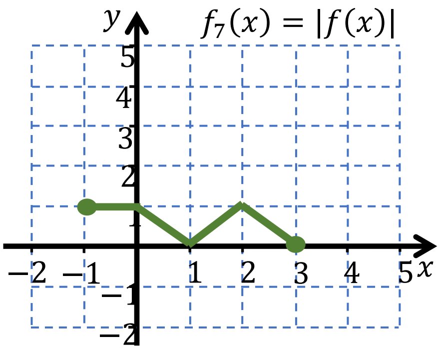


$f_6(x) = f(-x)$

f_6

$D(f_6) = [-3, 1] \quad Im(f_6) = [-1, 1]$

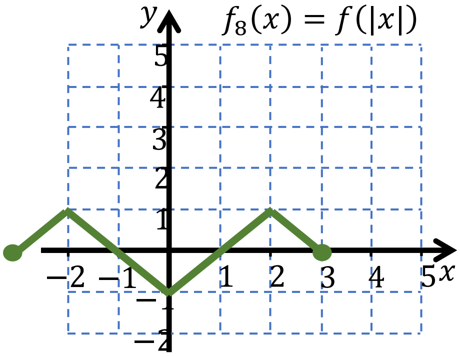
Reflexão do gráfico de f em relação ao eixo horizontal.



f_7

$D(f_7) = [-1, 3] \quad Im(f_7) = [0, 1]$

Reflexão, em relação ao eixo horizontal os pontos do gráfico de f que possuem ordenada negativa.

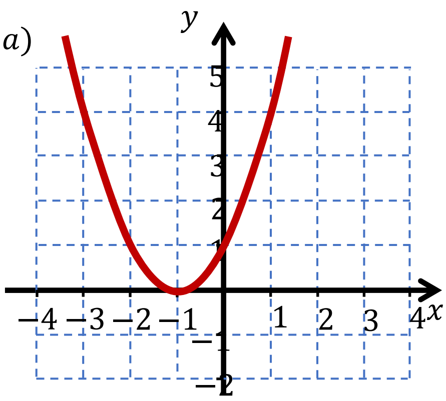


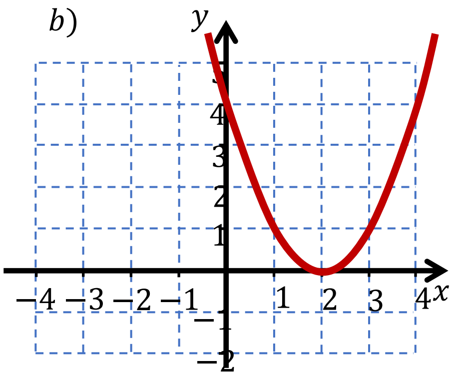
f_8

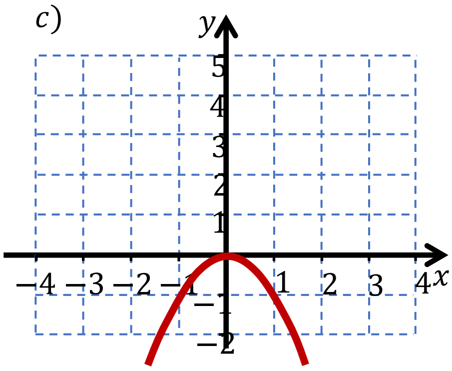
$D(f_8) = [-3, 3] \quad Im(f_8) = [-1, 1]$

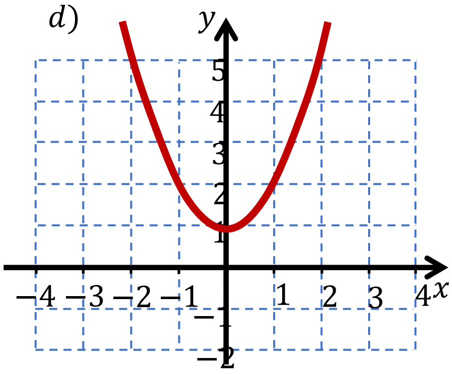
Replica do lado esquerdo do pano ($x \leq 0$) o gráfico do lado direito ($x \geq 0$), na forma de uma reflexão em relação ao eixo vertical.

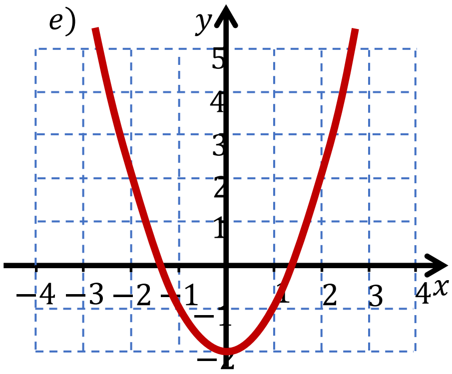
Exercício 3:

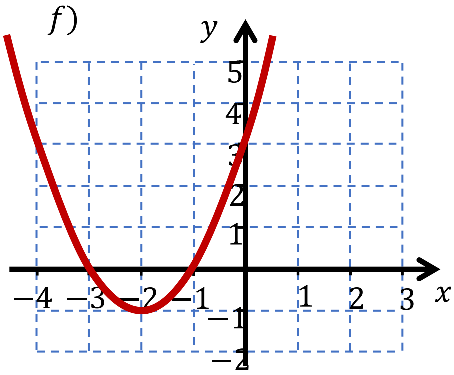












Exercício 4:

$a)\ y = (x-3)^2$

$b)\ y = x^2 - 3$

$c)\ y = (x-1)^2 - 1$

$d)\ y = (x-2)^2 - 1$

$e)\ y = -(x-2)^2$

$f)\ y = -(x-1)^2 + 4$

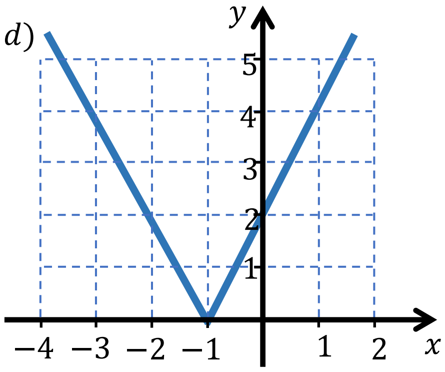
Exercício 5:

$a)\ D(f) = \mathbb{R}$

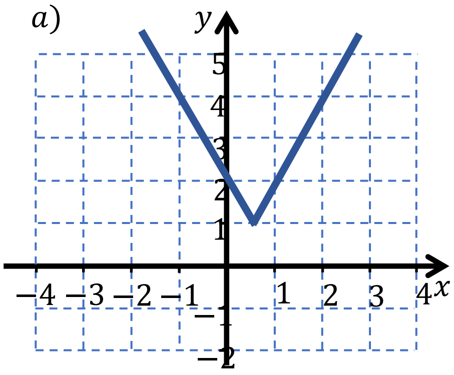
$b)\ Im(f) = [0, +\infty)$

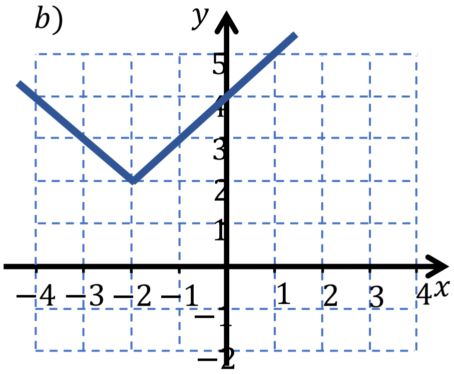
$c)\ f(-4) = 6 \quad f(-1) = 0$

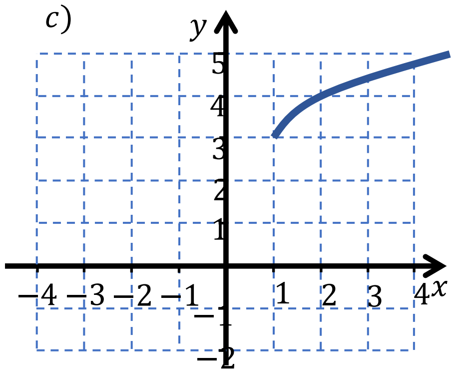
$f(3) = 8 \quad f(-2) = 2 \quad f(0) = 2$

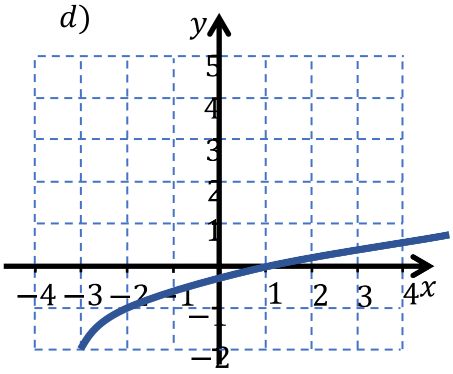


Exercício 6:

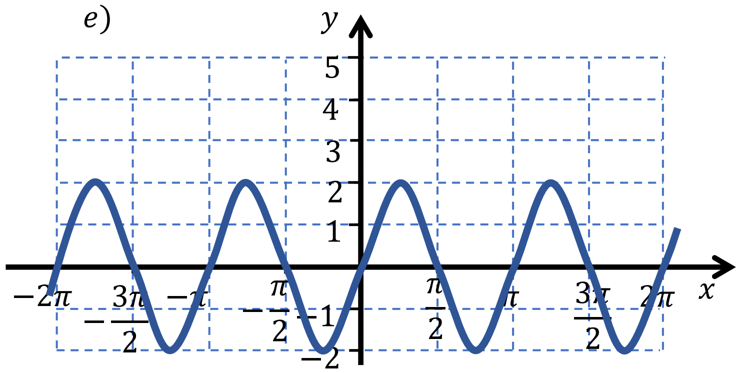






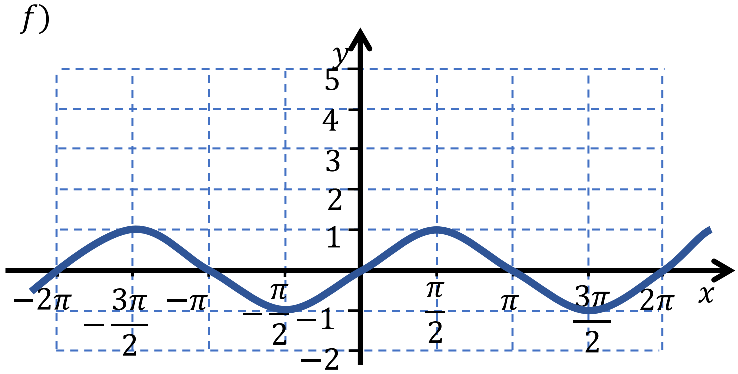


$e)$



y
5
4
3
2
1
x
-2π
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
-1
-2
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π

$f)$



y
5
4
3
2
1
x
-2π
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
-1
-2
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π

11. Aula 5

11.1 Função composta

De forma simplificada, suponha que seja necessário realizar dois cálculos, onde o resultado do segundo cálculo depende do resultado encontrado no primeiro.

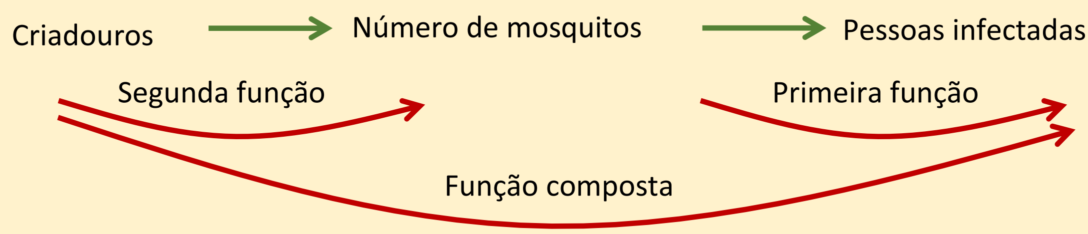
A ideia de função composta é acoplar ou compor os dois cálculos em uma única fórmula.

Exemplo 1: A incidência de Dengue é dada em função da proliferação do mosquito Aedes aegypti, que é o transmissor desta doença.

Contudo, a proliferação do referido mosquito é dada em função do número de criadouros do mesmo.

Solução:

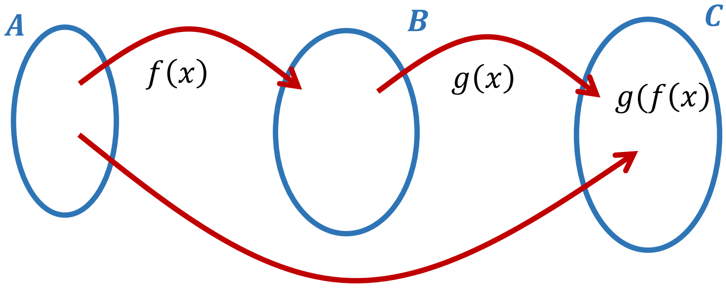
Portanto, pode-se dizer que a incidência desta doença pode ser dada em função do número de criadouros.



Definição: Dadas as funções $f: A \to B$ e $g: B \to C$, a função $g \circ f: A \to C$, dada por $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)\ \forall x \in A$ é chamada de **função composta** de f e g.

Observação: Na expressão $g \circ f$.

- f é chamada de **função de dentro**;
- g é chamada de **função de fora**.



$g \circ f$ ⇒ Função Composta!

Exemplo 2: Uma determinada empresa fabrica placas de trânsito (quadradas) de vários tamanhos, a um custo de R\$ $\mathbf{25,00}$ o metro quadrado da placa.

Determine a lei da função que estabelece:
a) a área de uma placa em função do comprimento do lado do quadrado;
b) o custo de uma placa em função de sua área, em metros quadrados;
c) o custo final de uma placa em função do comprimento do seu lado.

Solução:

a) x: comprimento do lado de cada placa;
$f(x)$: área de uma placa de lado x;

$$f(x) = x^2$$

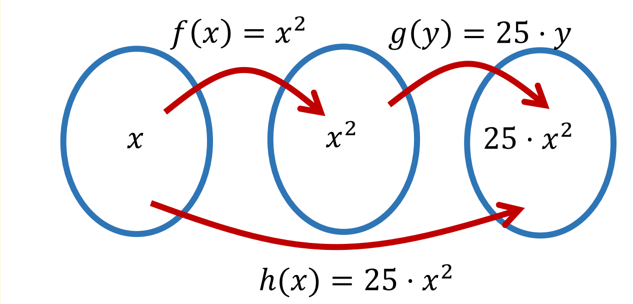
b) y: área do lado de cada placa;
$g(y)$: custo para fabricação de uma placa de área y;

$$g(y) = 25.y$$

c) x: comprimento do lado de cada placa;
$h(x)$: custo para fabricação de uma placa de lado x;

$$h(x) = 25.x^2$$

Representação na forma de diagrama.



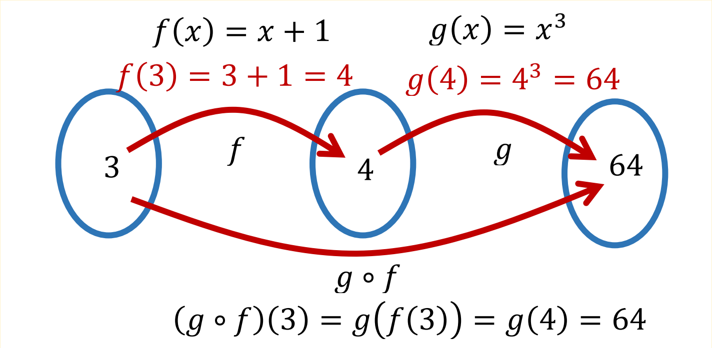
Note que $h(x) = g(f(x))$ é a função composta, que “acopla” as duas informações anteriores.

Exemplo 3: Dadas as funções $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x^3$, calcule $(g \circ f)(3)$.

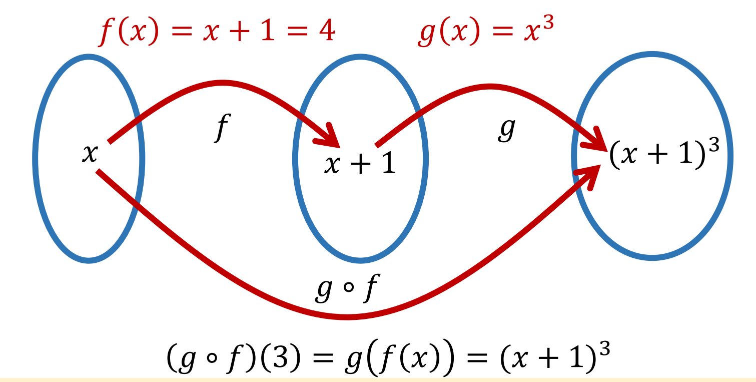
Solução:

$$(g \circ f)(3) = g(\underbrace{f(3)}_{f(3)=3+1=4}) = g(4) = (4)^3 = 64.$$

Representação na forma de diagrama:



Note que a função de dentro (neste caso, f) é a primeira função que age quando se substitui o valor de x.



Exemplo 4: Dadas as funções $f(x) = 3x + 2$ e $g(x) = x^2 - 5$, calcule:

$a)\ (g \circ f)(x)$ $\qquad$ $b)\ (g \circ f)(2)$ $\qquad$ $c)\ (f \circ g)(x)$ $\qquad$ $d)\ (f \circ g)(2)$

Solução:

$a)\ (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) \ = g(3x + 2) \ = 9x^2 + 12x + 4 - 5 \ = 9x^2 + 12x - 1.$

$b)\ (g \circ f)(2) = \ 9(2)^2 + 12(2) + 4 - 1 \ = 36 + 24 - 1 \ = 59.$

$c)\ (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) \ = f(x^2 - 5) \ = 3(x^2 - 5) + 2 \ = 3x^2 - 15 + 2 = 3x^2 - 13.$

$d)\ (f \circ g)(2) = \ 3(2)^2 - 13 \ = 12 - 13 \ = -1.$

Exemplo 5: Em cada caso, encontre duas funções h e g tais que $f = h \circ g$:

$a)\ f(x) = \sqrt{5x + 6}$ $\qquad$ $b)\ f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

Solução:

$a)\ f(x) = \sqrt{5x + 6}$

$$g(x) = 5x + 1 \qquad h(x) = \sqrt{x}$$

Função de dentro $\qquad$ *Função de fora*

"Prova real"

$$(h \circ g)(x) = h\big(g(x)\big) \ = h(5x + 1) \ = \sqrt{5x + 6} \ = f(x)$$

$b)\ f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

$$g(x) = x^2 + 1 \qquad h(x) = \frac{1}{x}$$

Função de dentro $\qquad$ *Função de fora*

"Prova real"

$$(h \circ g)(x) = h\big(g(x)\big) \ = h(x^2 + 1) \ = \frac{1}{x^2 + 1} \ = f(x)$$

11.2 Exercícios Propostos

1) Sabendo que $h(x) = x^2 + 3x - 1$ e $i(x) = -12x + 2$, determine:

$a)\ h \circ i$

$b)\ i \circ h$

$c)\ i \circ i$

$d)\ h \circ h$

2) Sejam $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e $h: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ dadas por

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad g(x) = x^2 + 1 \qquad h(x) = \frac{1}{x}$$

Obtenha:

$a)\ f \circ g \qquad b)\ g \circ h \qquad c)\ f \circ f \circ g \qquad d)\ f \circ g \circ h \qquad e)\ f \circ h \circ f$

3) Em cada caso, expresse a função dada em uma composta de duas funções mais simples.

$a)\ f(x) = \sqrt{x+1} \qquad b)\ f(x) = \dfrac{2}{2-3x}$

$c)\ f(x) = sin(2x+1) \qquad d)\ f(x) = tan(x^2 - x)$

4) Sejam as funções reais f e g, definidas por $f(x) = x^2 + 4x - 5$ e $g(x) = 2x - 3$.

$a)$ Obtenha as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$.

$b)$ Calcule $(f \circ g)(2)$ e $(g \circ f)(2)$.

$c)$ Determine os valores do domínio da função $(f \circ g)(x)$ que produzem imagem 16.

5) Dadas as funções reais definidas por $f(x) = 3x + 2$ e $g(x) = 2x + a$, determine o valor de a de modo que se obtenha $f \circ g = g \circ f$.

6) Considerando a função em reais definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$.

Quais as leis que definem $f(-x), f\left(\frac{1}{x}\right)$ e $f(x-1)$?

7) Sejam as funções reais $f(x) = 3x - 5$ e $(f \circ g)(x) = x^2 - 3$. Determine a lei da g.

8) Dadas $f(x) = 3$ e $\mathrm{g}(x) = x^2$. Determine $f(g(x))$.

9) Se $f(x) = \frac{1}{1-x}$, determine $(f \circ (f \circ f))(x)$.

11.3 Respostas

Exercício 1:

$a)\ (h \circ i)(x) = 144x^2 - 84x + 9$

$b)\ (i \circ h)(x) = -12x^2 - 36x + 14$

$c)\ (i \circ i)(x) = 144x - 22$

$d)\ (h \circ h)(x) = x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 3x - 3$

Exercício 2:

$a)\ (f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

$b)\ (g \circ h)(x) = \dfrac{1 + x^2}{x^2}$

$c)\ (f \circ f \circ g)(x) = \sqrt[4]{x^2 + 1}$

$d)\ (f \circ g \circ h)(x) = \dfrac{\sqrt{1 + x^2}}{x}$

$e)\ (f \circ h \circ f)(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$

Exercício 3:

$a)\ h(x) = x + 1 \quad g(x) = \sqrt{x}$

$b)\ h(x) = 2 - 3x \quad g(x) = \dfrac{2}{x}$

$c)\ h(x) = (2x + 1) \quad g(x) = sin\, x$

$d)\ h(x) = x^2 - x \quad g(x) = tan\, x$

Exercício 4:

$a)\ (f \circ g)(x) = 4x^2 - 4x - 8$

$(g \circ f)(x) = 2x^2 + 8x - 13$

$b)\ (f \circ g)(2) = 0 \quad (g \circ f)(2) = 11$

$c)\ (f \circ g)(x) = 16 \longrightarrow x = 3\ ou\, x = -2$

Exercício 5:

$a = 1$

Exercício 6:

$f(-x) = -x^3 - 3x^2 - 2x - 1$

$f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{x} - 1$

$f(x - 1) = x^3 - 6x^2 + 11x - 7$

Exercício 7:

$g(x) = \dfrac{x^2 + 2}{3}$

Exercício 8:

$f\big(g(x)\big) = 3$

Exercício 9:

$\big(f \circ (f \circ f)\big)(x) = x$

12. Aula 6

12.1 Funções injetoras

Definição: Uma função $f: A \to B$ é chamada de **função injetora** se não existem dois elementos do domínio com uma mesma imagem.

Isto quer dizer que, para quaisquer $x_1, x_2 \in A$, é válido que, sempre que:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Elementos diferentes do domínio possuem imagens diferentes.

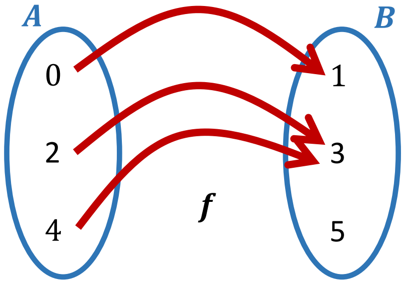
Ou, de forma equivalente,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Se dois elementos do domínio possuem a mesma imagem, então eles são iguais.

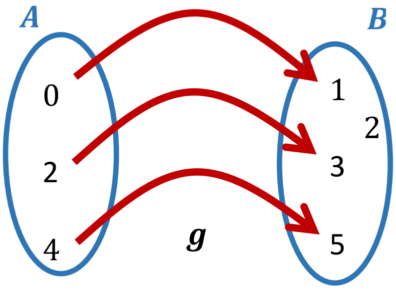
Exemplo: Determine se as funções a seguir são injetoras:

1)



Não é injetora, pois $f(2) = f(4)$.

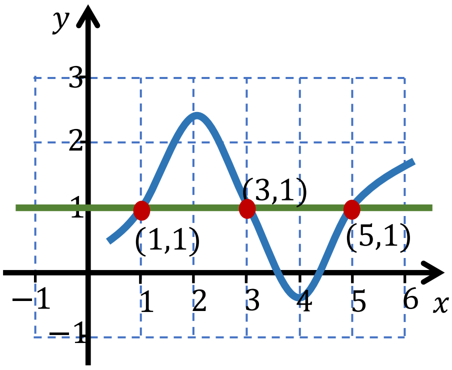
2)



É injetora

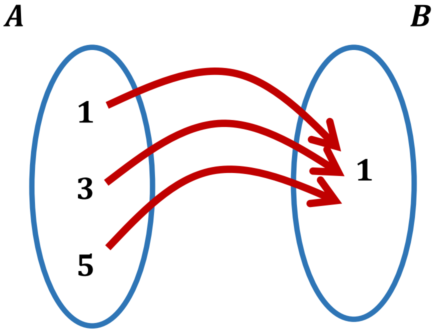
12.2 Teste da reta horizontal

Teste: Se alguma reta horizontal intercepta o gráfico da função em mais de um ponto, então esta função não é injetora.



Existe um mesmo elemento da imagem relacionado a mais de um elemento do domínio e, portanto, a função não é injetora!

Três elementos diferentes do domínio com a mesma imagem!



Não é injetora!

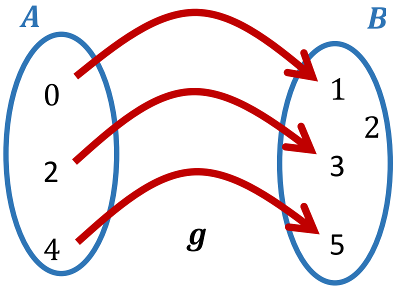
12.3 Funções sobrejetoras

Definição: Uma função $f: A \to B$ é chamada de função sobrejetora se o contradomínio é igual a imagem, isto é, se $Im(f) = B$.

Isto quer dizer que , para cada $y \in B$, existe pelo menos um $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

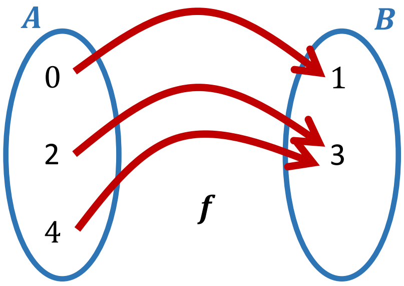
Exemplo: Determine se as funções a seguir são sobrejetoras:

3)



Não é sobrejetora!

4)



É sobrejetora!

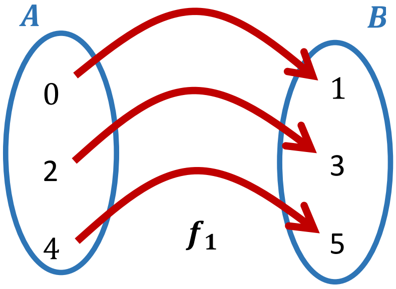
12.4 Funções bijetoras

Definição: Uma função $f: A \to B$ é chamada de função bijetora se ela é injetora e sobrejetora.

Isto quer dizer que, para cada $y \in B$, existe um único $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

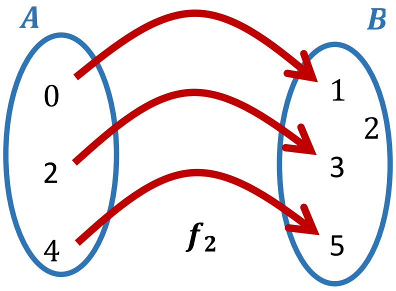
Exemplo: Determine se as funções a seguir são bijetoras.

5)



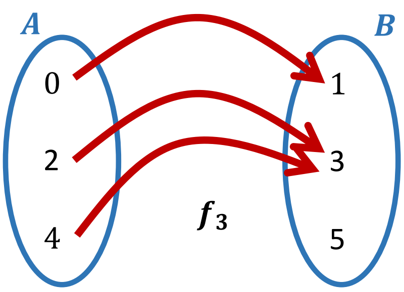
É bijetora, pois é injetora e sobrejetora.

6)



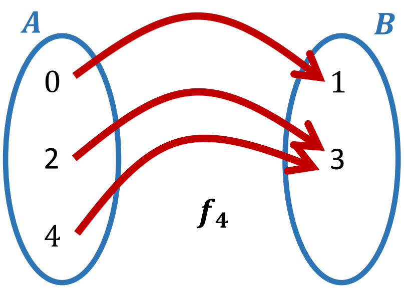
Não é bijetora, pois não é sobrejetora.

7)



Não é bijetora, pois não é injetora nem sobrejetora.

8)

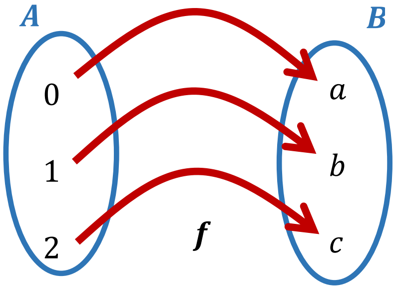


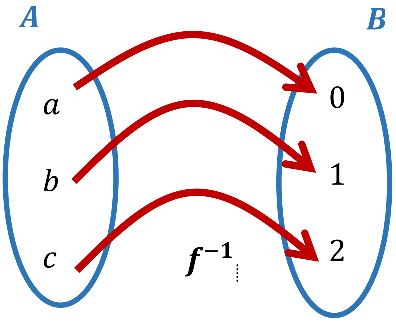
Não é bijetora, pois não é injetora.

12.5 Função inversa

Em uma função bijetora se pode definir uma função g com domínio igual a B e contra domínio igual a A que faz as relações inversas das relações determinadas pela função f.

A função g acima é chamada de função inversa da função f, e é denotada por f^{-1}.





$f(0) = 1 \quad f(1) = b \quad f(2) = c$

$f: A \to B$

Domínio: A Imagem: B

$f^{-1}(a) = 0 \quad f^{-1}(b) = 1 \quad f^{-1}(c) = 2$

$f^{-1}: B \to A$

Domínio: B Imagem: A

Observação: Note que f^{-1} possui domínio igual a B e contradomínio igual a A.
"o que era domínio vira imagem e o que era imagem vira domínio" .

$$f^{-1}: B \to A$$

Observação: Somente funções bijetoras possuem inversa.
Por este motivo, as funções bijetoras são ditas funções inversíveis.

Para determinar a lei de formação da função inversa de uma função bijetora, basta seguir os passos:

1) Substitua x por y e y por x na lei de formação da função $y = f(x)$.
2) Isole a variável y na equação obtida no passo anterior.
3) O resultado obtido será a função inversa $y = f^{-1}(x)$.

Exemplo: Determine a função inversa de $f(x) = 2x + 4$.

Solução:

Seguindo os passos para encontrar a função inversa, tem-se:

1) Substitua x por y e y por x na lei de formação da função $y = f(x)$.

$$x = 2y + 4$$

2) Isole a variável y na equação obtida no passo anterior.

$$x = 2y + 4 \qquad 2y = x - 4 \qquad y = \frac{x-4}{2}$$

Portanto, a função inversa é dada por:

$$f^{-1}(x) = \frac{x-4}{2}.$$

Exemplo: Determine a função inversa de $f(x) = x^3 - 5$.

Solução:

Seguindo os passos para encontrar a função inversa, tem-se:

1) Substitua x por y e y por x na lei de formação da função $y = f(x)$.

$$x = y^3 - 5$$

2) Isole a variável y na equação obtida no passo anterior.

$$x = y^3 - 5 \qquad y^3 = x + 5 \qquad y = \sqrt[3]{x+5}$$

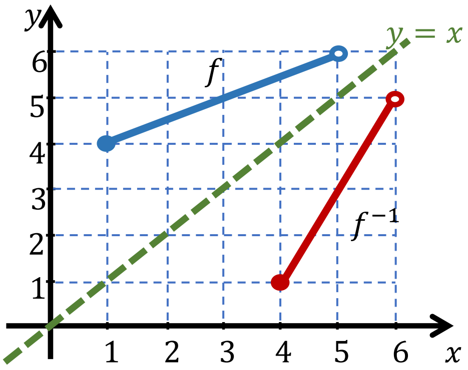
Portanto, a função inversa é dada por:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+5}.$$

12.6 Gráfico da função inversa

Para obter a função inversa de uma função bijetora, o processo consiste em "inverter os papéis de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$" na lei de formação da função.

Desta inversão, resulta que os gráficos das funções f e f^{-1} são simétricos em relação à reta $y = x$.



($y = x$, bissetriz dos quadrantes ímpares).

Exemplo: Dada a função $f(x) = x^3$,
$a)$ determine a lei de formação de f^{-1};
$b)$ Esboce os gráficos de f e f^{-1};

Solução:

$a)$ Determinando a função f^{-1}:

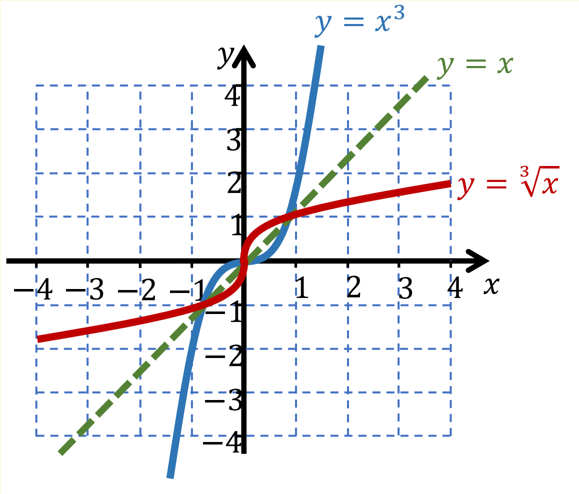
$$y = x^3$$

$$x = y^3$$

$$y = \sqrt[3]{x}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

$b)$ Esboçando os gráficos:



12.7 Função logarítmica e função exponencial

Observação: A inversa da função exponencial de base a é a função logarítmica de mesma base.

Em outras palavras, função exponencial de base a é bijetora e sua função inversa é a função logarítmica de base a.

$$f(x) = a^x \qquad\qquad f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

$$f^{-1}(x) = \log_a x \qquad\qquad f^{-1}: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

Exemplo: Em cada caso, determine a função inversa da função dada.

$a)\ f(x) = \log_5 x$ $\qquad$ $b)\ f(x) = 4^x$

Solução:

$$a)\ f^{-1}(x) = 5^x$$

A inversa da função logarítmica de base 5 é a função exponencial de base 5.

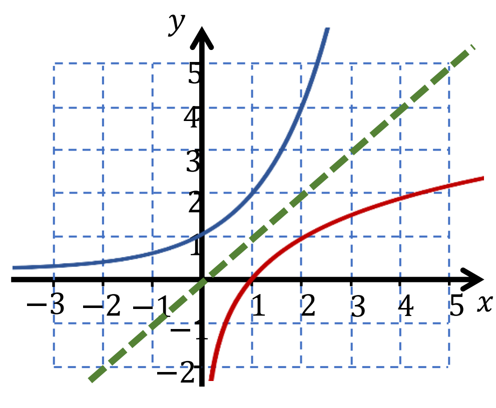
$$b)\ f^{-1}(x) = log_4 x$$

A inversa da função exponencial de base 4 é a função logarítmica de base 4.

Exemplo: Determine a função inversa da função exponencial $f(x) = 2^x$ e esboce os gráficos de f e f^{-1}.

Solução:

A função inversa da função exponencial $f(x) = 2^x$ é a função $f^{-1}(x) = \log_2 x$.



12.8 Funções trigonométricas inversas

Observação: As funções trigonométricas não são bijetoras em todo os seus domínios.

O teste da reta horizontal comprova, por exemplo, que a função seno não é bijetora em todo o seu domínio, pois a reta intercepta o gráfico da função mais de uma vez.

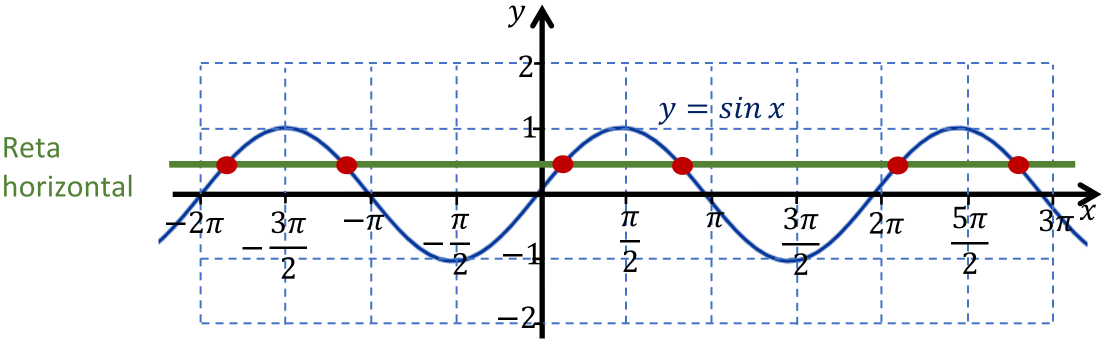


Gráfico da função seno

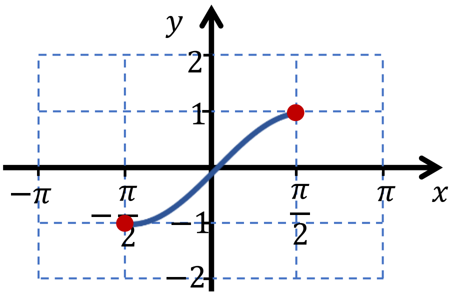
As funções trigonométricas inversas (arco seno, arco cosseno, arco tangente, arco cotangente, arco secante e arco cossecante) são as funções inversas de restrições convenientes das funções trigonométricas.

Definição: A função arco seno é a função inversa da restrição da função seno ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Restrição da função seno:

$$f(x) = \sin x\,, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

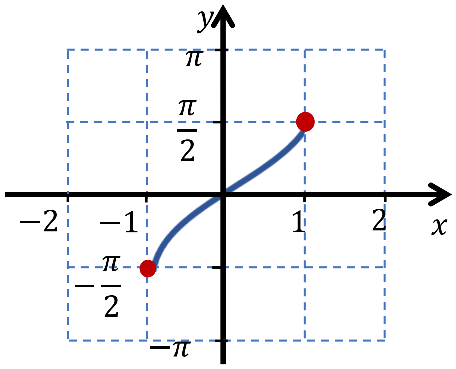
$$f\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1{,}1]$$

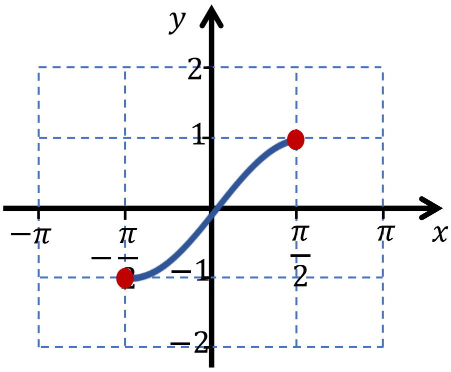


Função arco seno

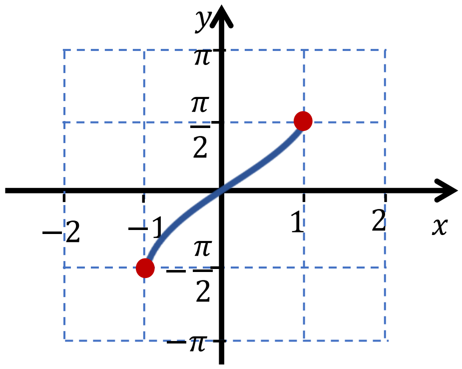
$$f^{-1}: [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$f^{-1}(x) = \arcsin x\,, \forall x \in [-1,1]$$





$\sin(\arcsin x) = x\,, \forall x \in [-1,1]$



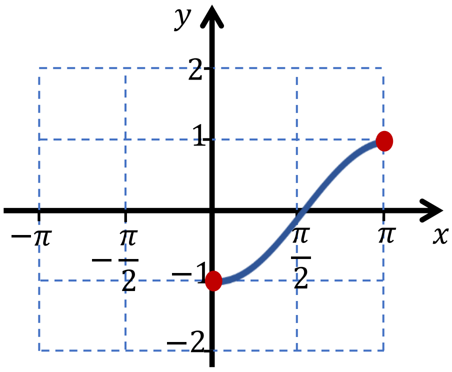
$\arcsin(\sin x) = x\,, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Definição: A função **arco cosseno** é a função inversa da restrição da função seno ao intervalo $[0, \pi]$.

Restrição da função cosseno:

$$f(x) = \cos x\,, \forall x \in [0, \pi]$$

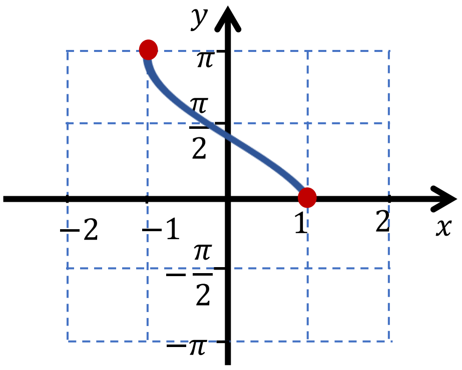
$$f: [0, \pi] \longrightarrow [-1,1]$$

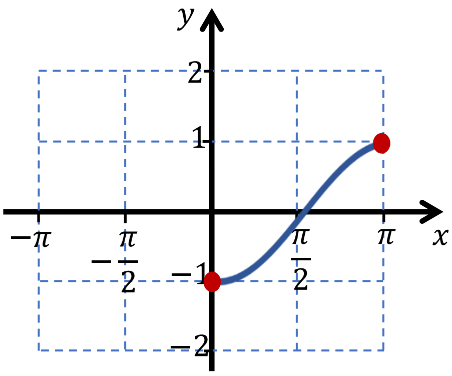


Função arco cosseno

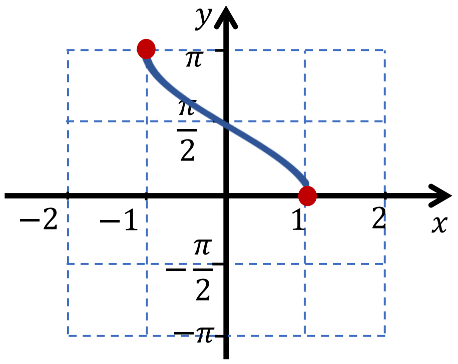
$$f^{-1}: [-1,1] \longrightarrow [0, \pi]$$

$$f^{-1}(x) = \arccos x\,,\ \forall x \in [-1,1]$$





$\cos(\arccos x) = x\,,\ \forall x \in [-1,1]$



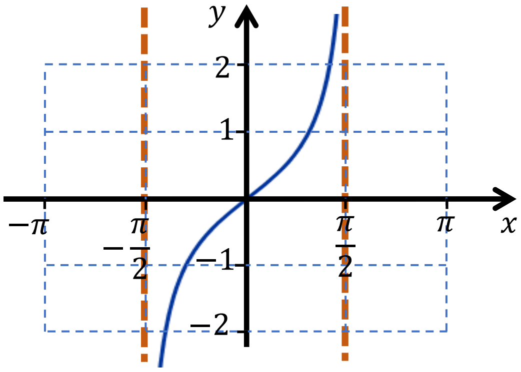
$\arccos(\cos x) = x\,, \forall x \in [0,\pi]$

Definição: A função arco tangente é a função inversa da restrição da função seno ao intervalo$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Restrição da função tangente:

$$f(x) = \tan x\,, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

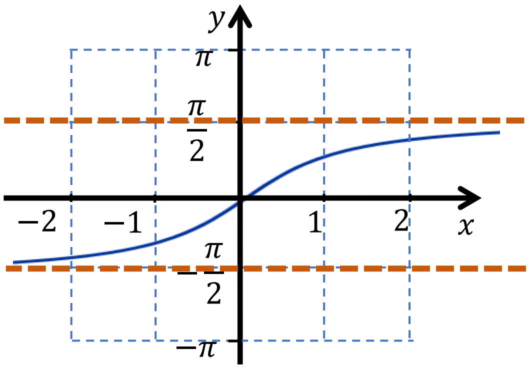
$$f\colon \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow (-\infty,+\infty)$$

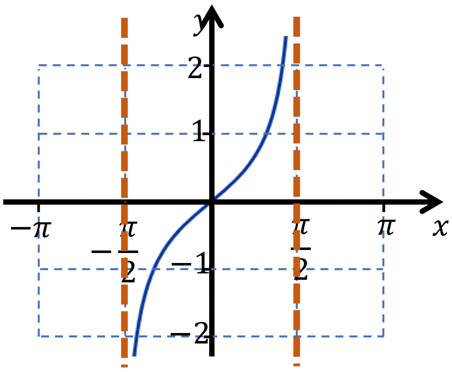


Função arco tangente

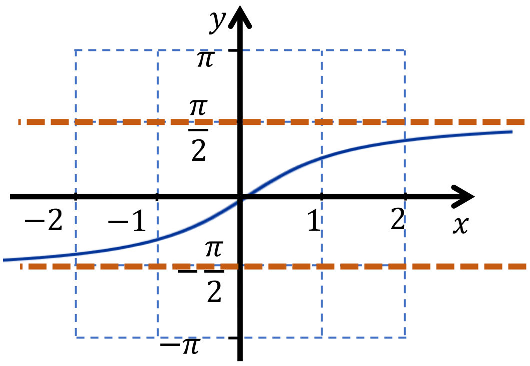
$$f^{-1}\colon (-\infty,+\infty) \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{-1}(x) = \arctan x\,, \forall x \in (-\infty,+\infty)$$





$\tan(\arctan x) = x\,, \forall x \in (-\infty,+\infty)$



$\arctan(\tan x) = x\,, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

12.9 Exercícios Propostos

1) Determine a lei da função inversa às seguintes funções:

$a)\ y = x + 3$ $\qquad b)\ y = 6x$

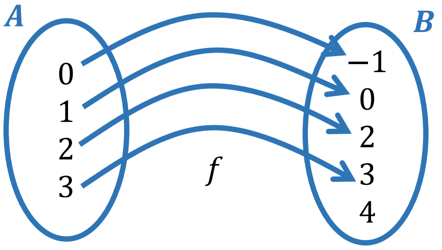
$c)\ y = 2x - 1$ $\qquad d)\ y = \dfrac{x+2}{x-2}, para\ x \neq 2$

2) Dada a função $f(x) = 5x + 11$, calcule $f^{-1}(6)$.

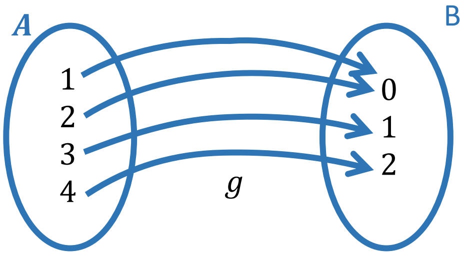
3) Calcule $f^{-1}(2) + f^{-1}(3)$, sabendo que $f(x) = 2x - 2$.

4) Indique quais das funções abaixo é injetora, sobrejetora ou bijetora:

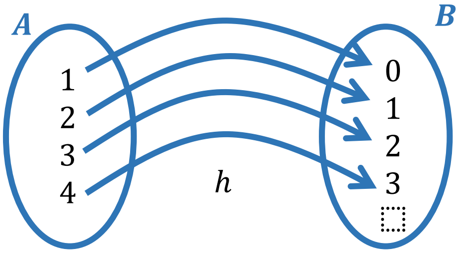
$a)$



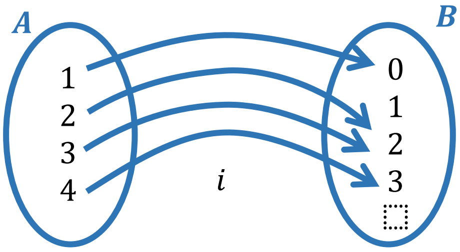
$b)$



$c)$

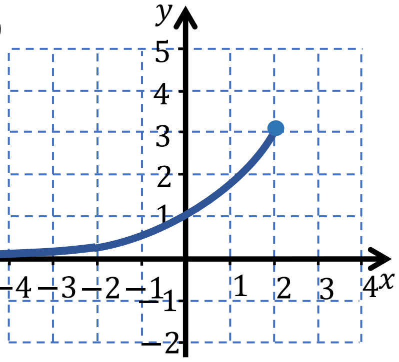


$d)$

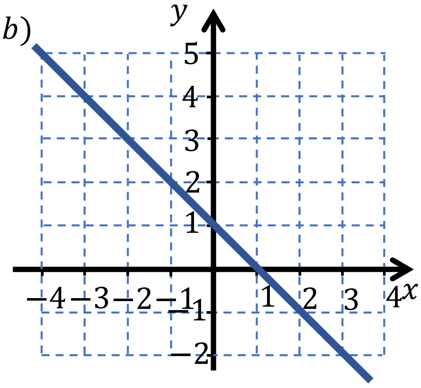


5) Para as funções em reais abaixo representadas, qual é injetora, sobrejetora e bijetora?

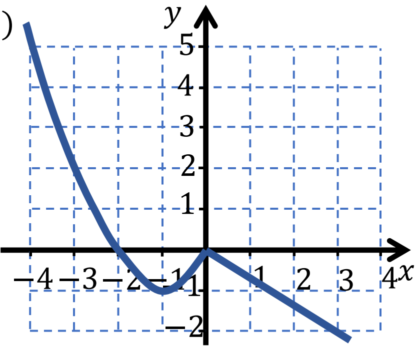
$a)$



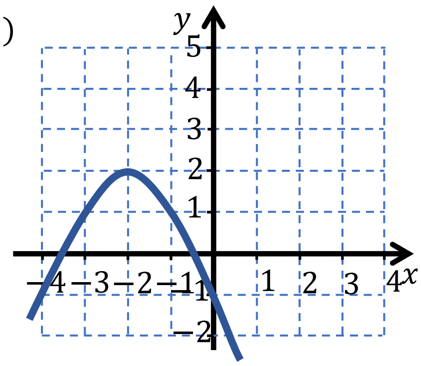
$b)$



$c)$



$d)$



6) Nas funções seguintes classifique em:

(I) *Injetora*, (II) $Sobrejetora$, (III) $Bijetora$, (IV) $Não$ é $sobrejetora$ $nem\ injetora$.

$a)\ f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = 2x + 1$

$b)\ g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $g(x) = 1 - x^2$

$c)\ h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *tal que* $h(x) = |x - 1|$

$d)\ m: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $m(x) = 3x + 2$

$e)\ p: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ *tal que* $p(x) = \frac{1}{x}$

$f)\ q: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $q(x) = x^3$

7) Nas funções bijetoras abaixo, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, obtenha a lei de correspondência que define a função inversa.

$a)\ g(x) = \dfrac{4x - 1}{3}$ $b)\ h(x) = x^3 + 2$ $c)\ p(x) = (x - 1)^3 + 2$

$d)\ r(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ $e)\ s(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$

12.10 Respostas

Exercício 1:

$a)\ y^{-1} = x - 3$

$b)\ y^{-1} = \dfrac{x}{6}$

$c)\ y^{-1} = \dfrac{x + 1}{2}$

$d)\ y^{-1} = \dfrac{2x + 2}{x - 1}$

Exercício 2:

$f^{-1}(6) = -1$

Exercício 3:

$f^{-1}(2) + f^{-1}(3) = \dfrac{9}{2}$

Exercício 4:

$a)$ Injetora
$b)$ Sobrejetora
$c)$ Bijetora
$d)$ Não é injetora nem sobrejetora.

Exercício 5:

$a)$ Injetora
$b)$ Bijetora
$c)$ Sobrejetora
$d)$ Não é injetora nem sobrejetora.

Exercício 6:

$a)\ (III)$ $b)\ (IV)$ $c)(II)$
$d)\ (I)$ $e)\ (III)$ $f)\ (III)$

Exercício 7:

$a)\ g^{-1} = \dfrac{3x + 1}{4}$

$b)\ h^{-1} = \sqrt[3]{x - 2}$

$c)\ p^{-1} = 1 + \sqrt[3]{x - 2}$

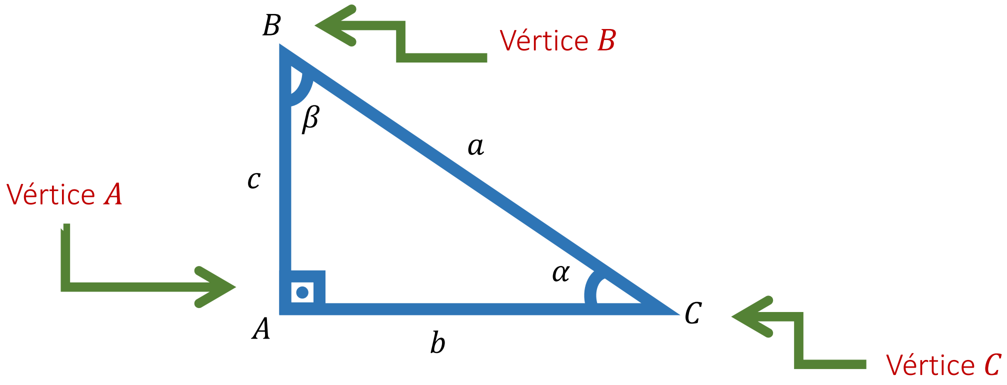
$d)\ r^{-1} = x^3 + 1$

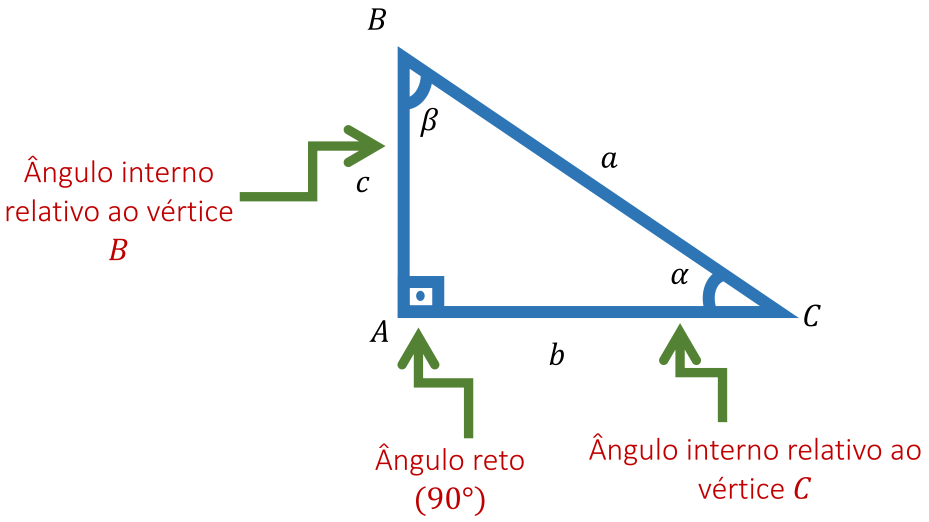
$e)\ s^{-1} = \sqrt[3]{1 - x^3}$

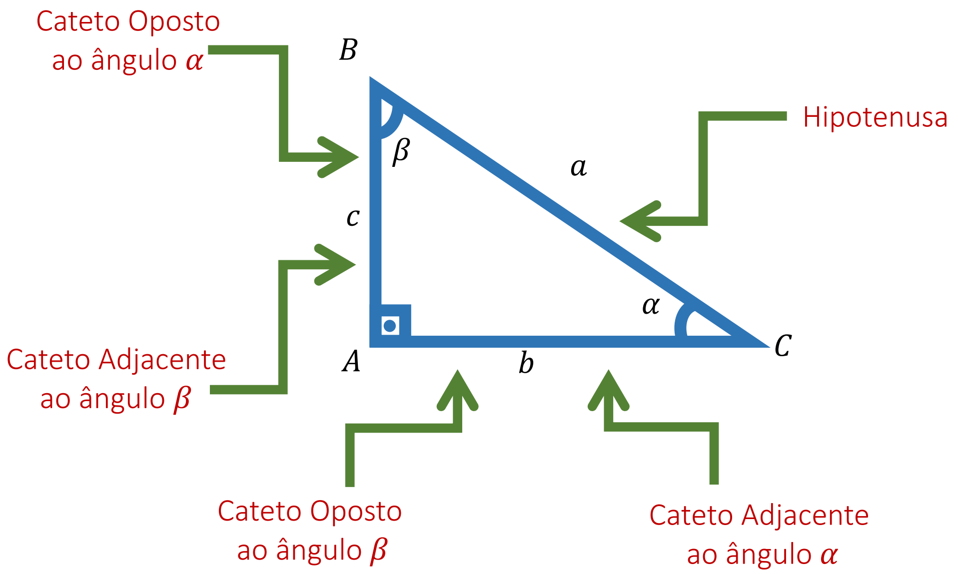
Capítulo 3: Funções Trigonométricas, Exponenciais e Logarítmicas

13. Aula 1

13.1 Triângulo Retângulo

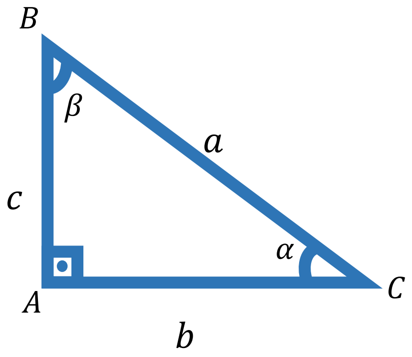






13.2 Razões Trigonométricas

Considerando o triângulo ΔABC abaixo, temos as seguintes razões trigonométricas:



Razão Cosseno

Divisão do cateto adjacente pela hipotenusa.

$$\cos\alpha = \frac{b}{a} \qquad \cos\beta = \frac{c}{a}$$

Razão Seno

Divisão do cateto oposto pela hipotenusa.

$$\sin\alpha = \frac{c}{a} \qquad \sin\beta = \frac{b}{a}$$

Razão Cossecante

Divisão da hipotenusa pelo cateto oposto.

$$\csc\alpha = \frac{a}{c} \qquad \csc\beta = \frac{a}{b}$$

Razão Tangente

Divisão do cateto oposto pelo cateto adjacente.

$$\tan\alpha = \frac{c}{b} \qquad \tan\beta = \frac{b}{c}$$

Razão Cotangente

Divisão do cateto adjacente pelo cateto oposto.

$$\cot\alpha = \frac{b}{c} \qquad \cot\beta = \frac{c}{b}$$

Razão Secante

Divisão da hipotenusa pelo cateto adjacente.

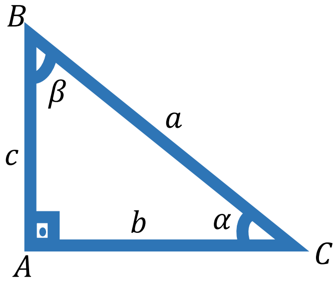
$$\sec\alpha = \frac{a}{b} \qquad \sec\beta = \frac{a}{c}$$

A soma dos ângulos internos de um triângulo retângulo qualquer é 180°, logo considerando o mesmo triângulo ΔABC, temos que:

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

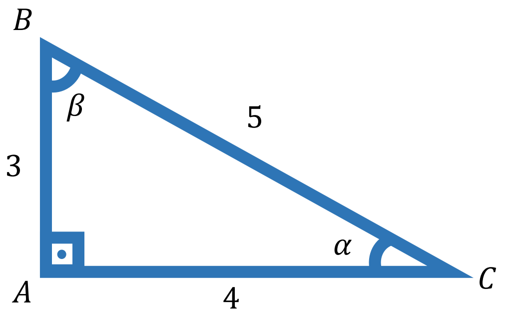
$$\alpha = 90^\circ - \beta$$



$$\sin\alpha = \cos\beta$$
$$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$\cos\alpha = \sin\beta$$
$$\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$$

Exemplo: Considere o triângulo abaixo, determine as suas razões trigonométricas para α e β.



$$Seno = \frac{Cateto\ oposto}{Hipotenusa} \qquad Cosseno = \frac{Cateto\ adjacente}{Hipotenusa}$$

$$\sin\alpha = \frac{3}{5} \qquad \sin\beta = \frac{4}{5} \qquad \cos\alpha = \frac{4}{5} \qquad \cos\beta = \frac{3}{5}$$

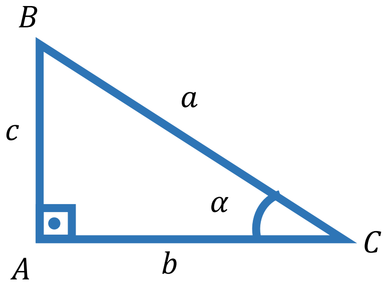
$$Tangente = \frac{Cateto\ oposto}{Cateto\ adjacente} \qquad Cossecante = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ oposto}$$

$$\tan\alpha = \frac{3}{4} \qquad \tan\beta = \frac{4}{3} \qquad \csc\alpha = \frac{5}{3} \qquad \csc\beta = \frac{5}{4}$$

$$Secante = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ adjacente} \qquad Cotangente = \frac{Cateto\ adjacente}{Cateto\ oposto}$$

$$\sec\alpha = \frac{5}{4} \qquad \sec\beta = \frac{5}{3} \qquad \cot\alpha = \frac{4}{3} \qquad \cot\beta = \frac{3}{4}$$

13.3 Relação entre as Razões Trigonométricas



Razão Tangente

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{c}{\cancel{a}}\cdot\frac{\cancel{a}}{b} = \frac{c}{b} = \tan\alpha$$

Razão Cossecante

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

$$\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\frac{c}{a}} = \frac{1}{1}\cdot\frac{a}{c} = \frac{a}{c} = \csc\alpha$$

Razão Secante

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{1}{1}\cdot\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

Razão Cotangente

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{\cancel{a}}\cdot\frac{\cancel{a}}{c} = \frac{b}{c} = \cot\alpha$$

Exemplo: Sabendo que para um ângulo β em um triângulo retângulo, temos $\sin\beta = \frac{4}{5}$ e $\cos\beta = \frac{3}{5}$ calcule:

$a)\ tan\,\beta$ $\quad(b)\ csc\,\beta$ $\quad(c)\ sec\,\beta$ $\quad(d)\ cot\,\beta$

Solução:

a) $Tangente = \dfrac{Seno}{Cosseno}$

$$\tan\beta = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{5}}{3} = \frac{4}{3}$$

b) $Cossecante = \dfrac{1}{Seno}$

$$\csc\beta = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{1}\cdot\frac{5}{4} = \frac{5}{4}$$

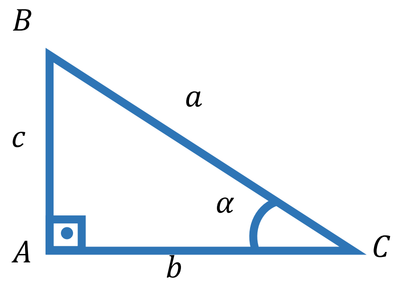
c) $Secante = \dfrac{1}{Cosseno}$

$$\sec\beta = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{1}\cdot\frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

d) $Cotangente = \dfrac{1}{Tangente}$

$$\cot\beta = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{1}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

13.4 Identidades Trigonométricas



Teorema de Pitágoras:

$$\cos\alpha = \frac{b}{a}$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$

$$\sin\alpha = \frac{c}{a}$$

Dividindo os lados da igualdade por a^2:

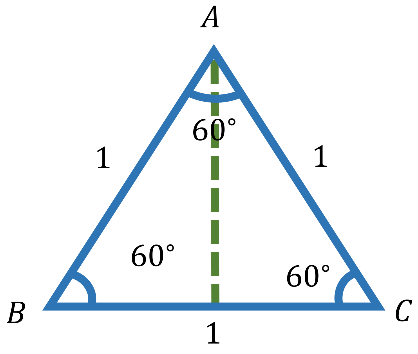
$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} \quad \Longrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1$$

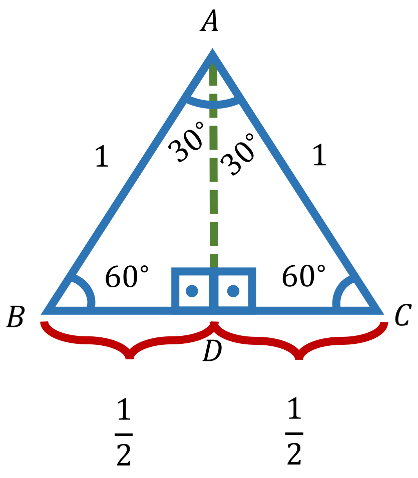
$$\Longrightarrow \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

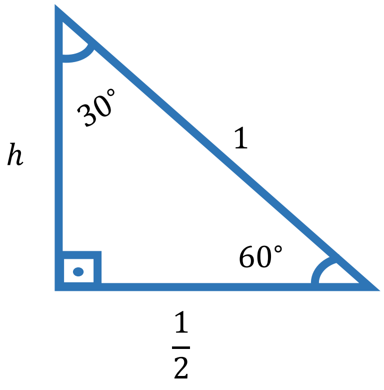
13.5 Seno, Cosseno e Tangente de 30°, 45°e 60°

Considerando o triângulo equilátero:





Calculando a altura do triângulo abaixo:



Por Pitágoras:

$$1^2 = h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

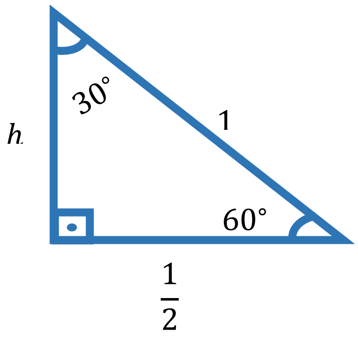
$$h^2 = 1 - \frac{1}{4} \Longrightarrow h^2 = \frac{4-1}{4} \Longrightarrow h^2 = \frac{3}{4}$$

$$h = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} \quad \Longrightarrow h = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Seno = \frac{Cateto\ oposto}{Hipotenusa}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1} \qquad \sin 60^\circ = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Como o valor de h se trata da medida de uma distância, então:

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Seno = \frac{Cateto\ oposto}{Hipotenusa}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1} \qquad \sin 60^\circ = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Cosseno = \frac{Cateto\ adjacente}{Hipotenusa}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1} \qquad \cos 60^\circ = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1}$$

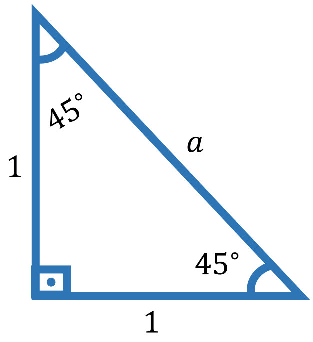
$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$Tangente = \frac{Cateto\ oposto}{Cateto\ adjacente}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3}$$

Considerando o triângulo isósceles abaixo:



Por Pitágoras:

Calculando a hipotenusa do triângulo:

$$a^2 = 1^2 + 1^2$$

$$a^2 = 1 + 1 \quad \Longrightarrow a^2 = 2 \Longrightarrow a = \pm\sqrt{2}$$

Como o valor de a se trata da medida de uma distância, então:

$$a = \sqrt{2}$$

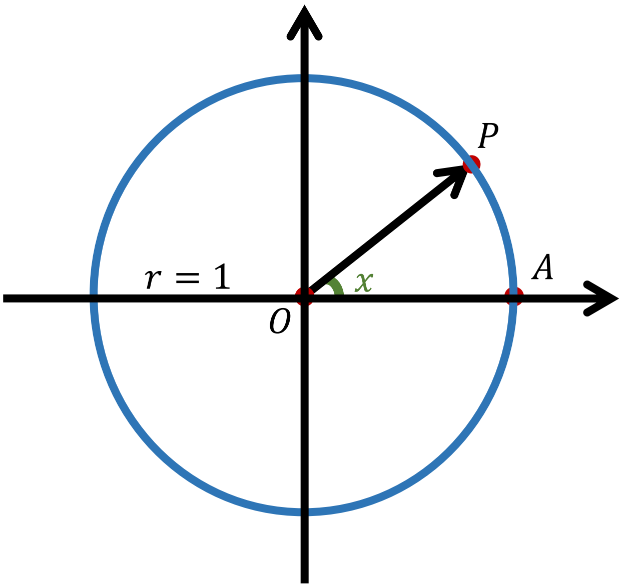
13.6 O Ciclo Trigonométrico

Considerando uma circunferência de raio unitário ($r = 1$) e centro na origem do plano cartesiano.

Fixando os pontos:

$O(0,\ 0)$

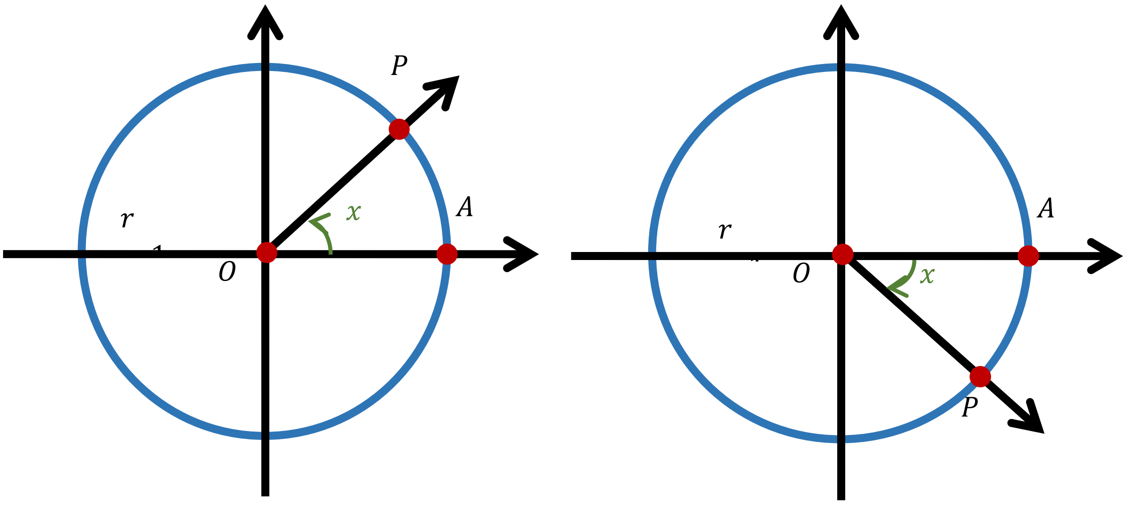
$A(1,\ 0)$



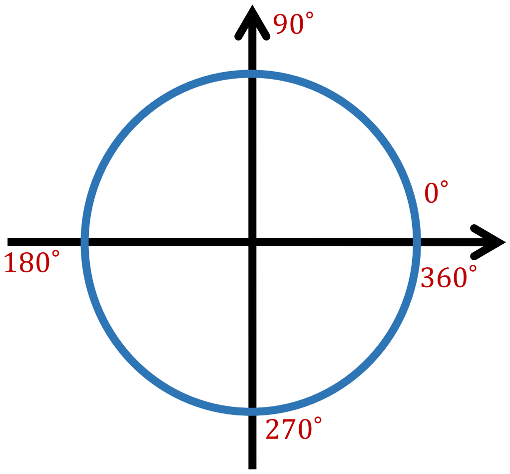
Cada ponto ***P*** sobre a circunferência determina um ângulo $x = AOP$.

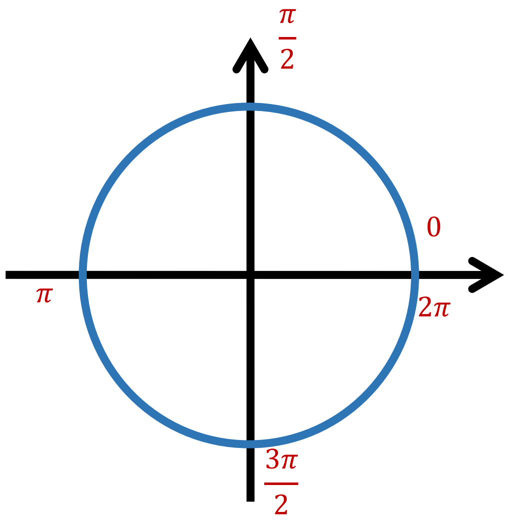
Estes ângulos podem ser medidos nos sentidos:

- positivo (anti-horário)
- negativo (horário)



A circunferência é chamada de: Ciclo Trigonométrico.





Conversão:

$180° \longleftrightarrow \pi$

Graus Radianos

Exemplo: Em cada caso, faça a respectiva conversão:

a) $120°$ para radianos.

b) $\frac{3\pi}{4}$ radianos para graus.

Solução:

a) $120°$ para radianos.

$$180x = 120\pi \Longrightarrow x = \frac{12\cancel{0}\pi}{18\cancel{0}}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{12\pi \div 6}{18 \div 6} \Longrightarrow x = \frac{2\pi}{3} rad$$

(b) $\frac{3\pi}{4}$ radianos para graus.

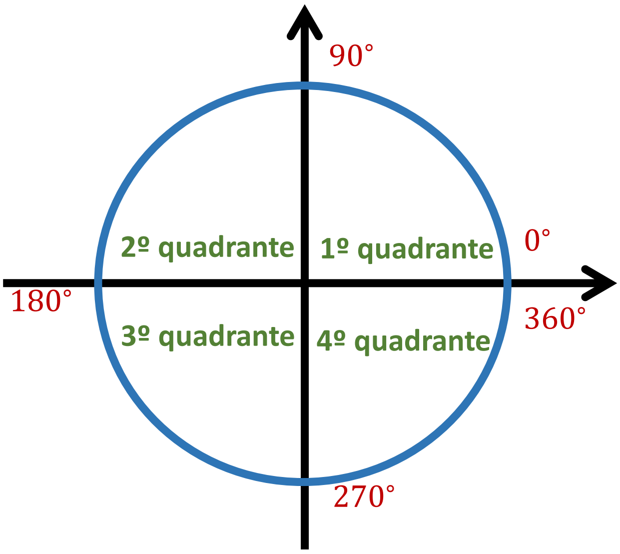
$$\pi x = 180.\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Longrightarrow x = \left(\frac{\cancel{540}\pi}{\cancel{4}}\right).\frac{1}{\pi}$$

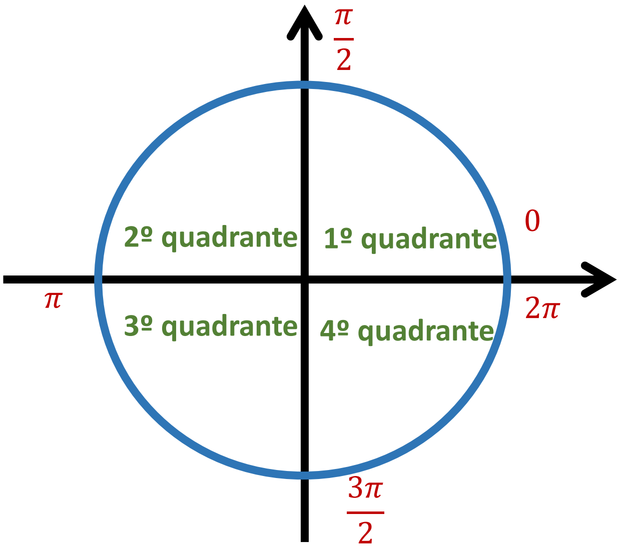
$$\Longrightarrow x = \frac{135\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}} \Longrightarrow x = 135°$$

Regra de três:

Graus	Radianos
$180°$	π
x	$\frac{3\pi}{4}$

O ciclo é dividido em quatro regiões (quadrantes).





Exemplo: Indique em que quadrante pertencem os ângulos abaixo:

$a)\ \frac{\pi}{6}$ $\qquad b)\ \frac{3\pi}{4}$ $\qquad c)\ \frac{4\pi}{3}$ $\qquad d)\ \frac{11\pi}{6}$

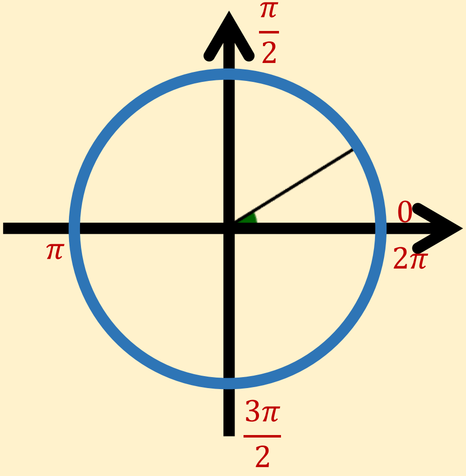
Solução:

$$a)\ \frac{\pi}{6} = \frac{\cancel{180}°}{\cancel{6}} = 30°$$

Podemos ver que $30°$ está entre $0°$ e $90°$. Então, $\frac{\pi}{6}$ está entre 0 e $\frac{\pi}{2}$.

Então, $\frac{\pi}{6}$ está entre 0 e $\frac{\pi}{2}$.

Portanto, $\frac{\pi}{6}$ pertence ao 1º quadrante.

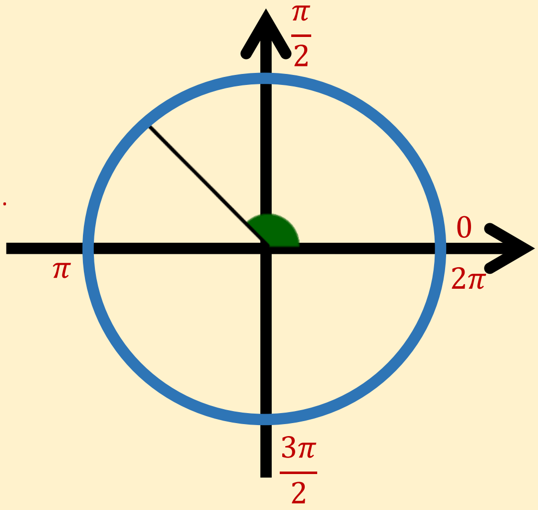


$$b)\ \frac{3\pi}{4} = \frac{3.(\cancel{180}°)}{\cancel{4}} = 3\cdot(45°) = 135°$$

Podemos ver que $135°$ está entre $90°$ e $180°$. Então, $\frac{3\pi}{4}$ está entre $\frac{\pi}{2}$ e π.

Então, $\frac{3\pi}{4}$ está entre $\frac{\pi}{2}$ e π.

Portanto, $\frac{3\pi}{4}$ pertence ao 2º quadrante.



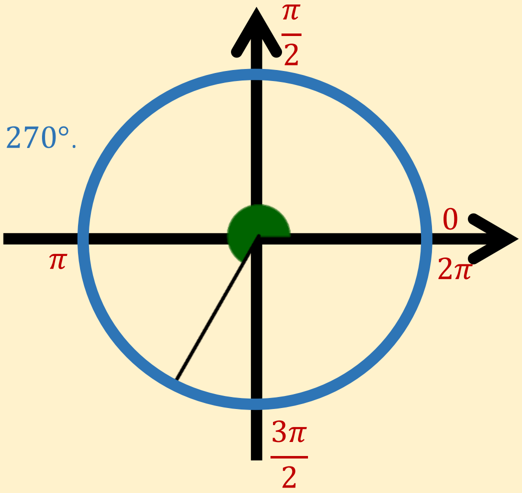
Solução:

$c)\ \frac{4\pi}{3} = \frac{4.(\cancel{180°})}{\cancel{3}} = 4.(60°) = 240°$

Podemos ver que $240°$ está entre $180°$ e $270°$.

Então, $\frac{4\pi}{3}$ está entre π e $\frac{3\pi}{2}$.

Portanto, $\frac{4\pi}{3}$ pertence ao 3º quadrante.

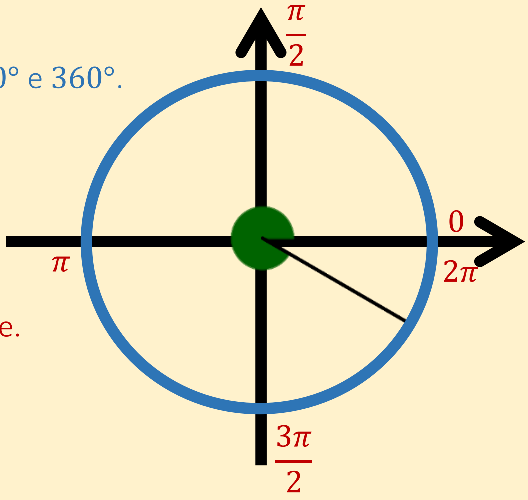


$d)\ \frac{11\pi}{6} = \frac{11.(180°)}{6} = 11.(30°) = 330°$

Podemos ver que $330°$ está entre $270°$ e $360°$.

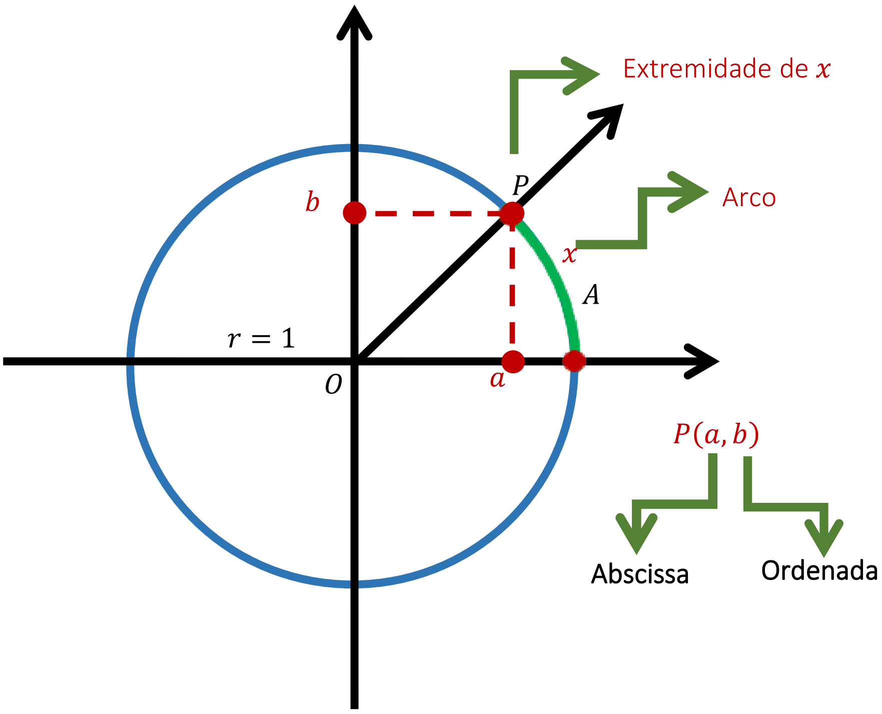
Então, $\frac{11\pi}{6}$ está entre $\frac{3\pi}{2}$ e 2π.

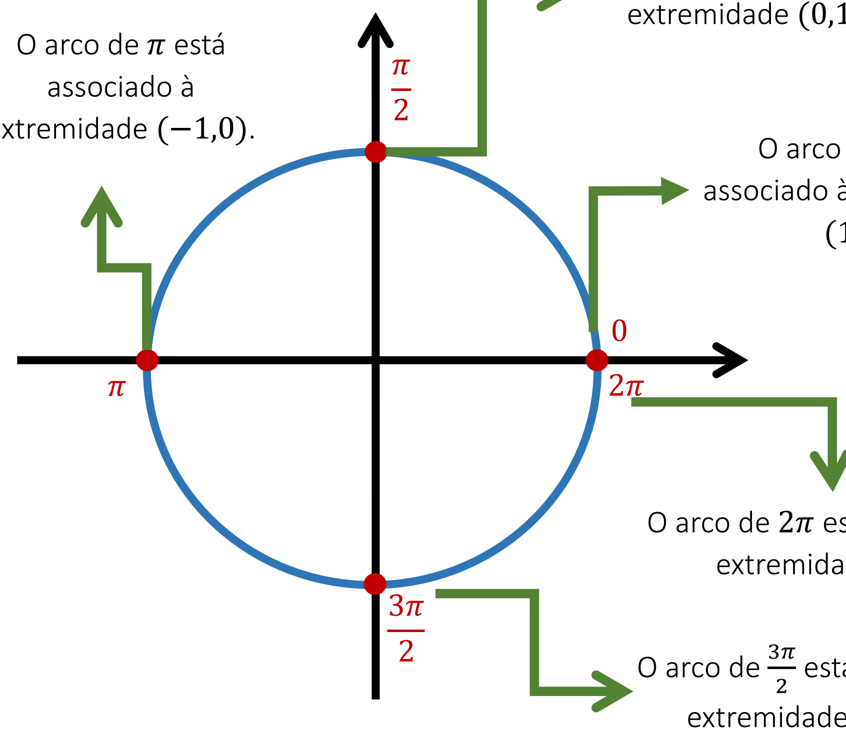
Portanto, $\frac{11\pi}{6}$ pertence ao 4º quadrante.



13.7 Trigonometria no Ciclo Trigonométrico

A cada ponto $P(a, b)$ no ciclo trigonométrico está associado um arco x de extremidade P.





O arco de $\frac{\pi}{2}$ está associado à extremidade $(0,1)$.

O arco de π está associado à extremidade $(-1,0)$.

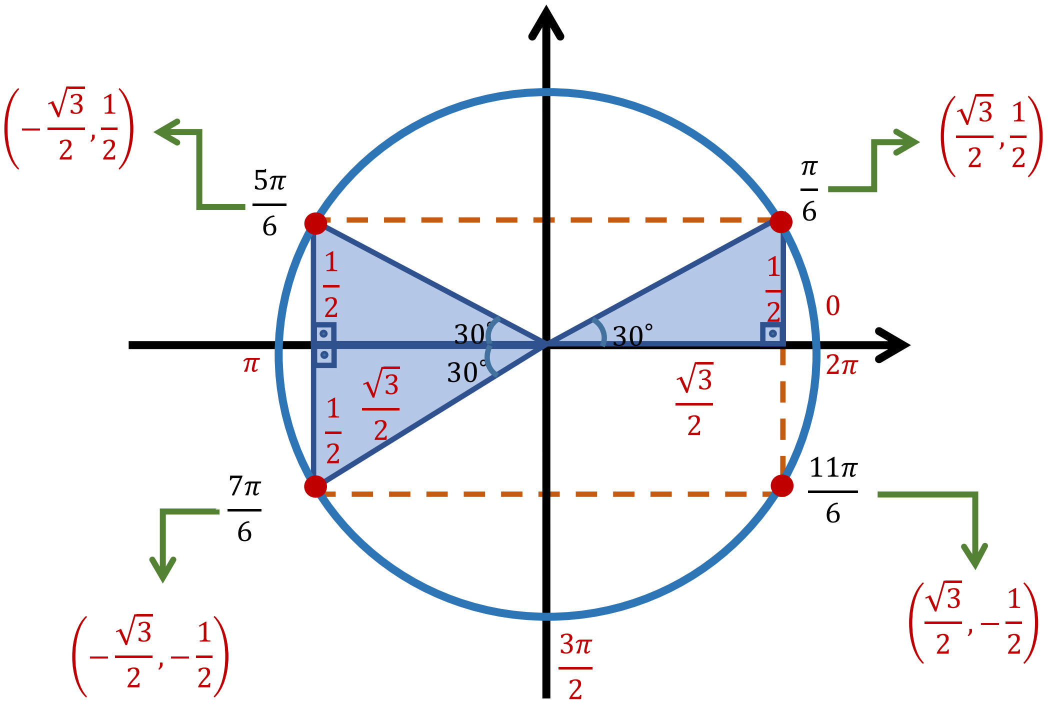
O arco de 0 está associado à extremidade $(1,0)$.

O arco de 2π está associado à extremidade $(0,1)$.

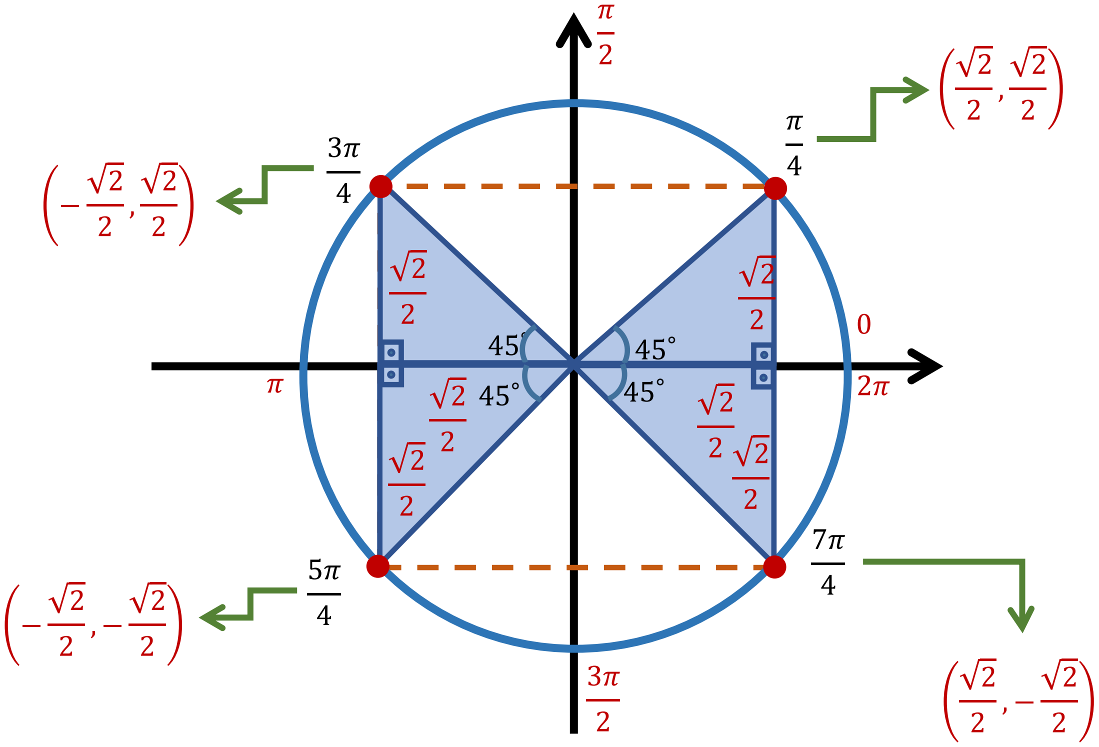
O arco de $\frac{3\pi}{2}$ está associado à extremidade $(0, -1)$.

13.8 Imagem dos Arcos Especiais no Ciclo

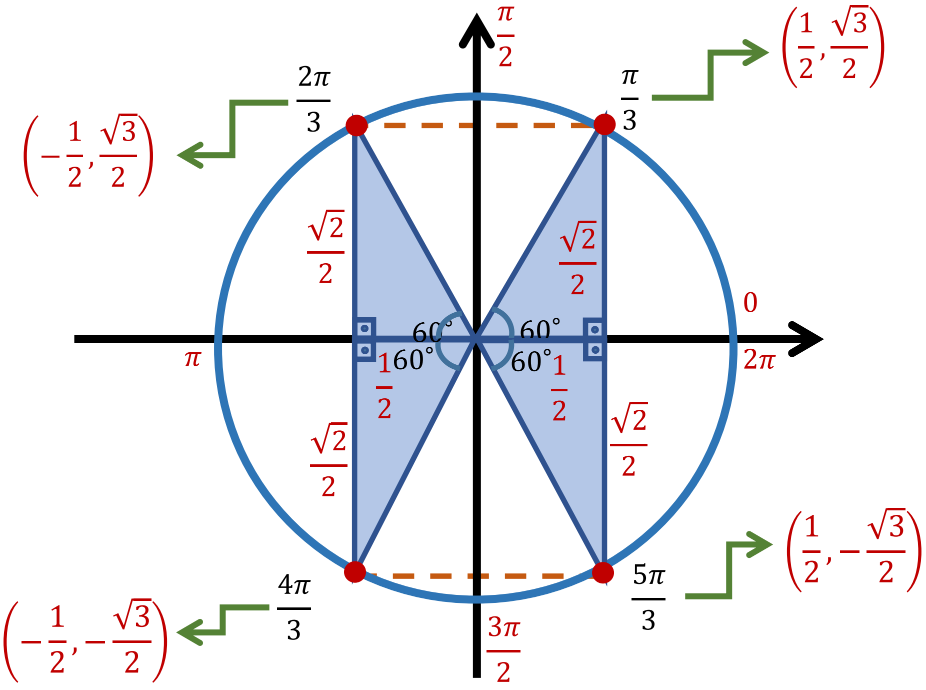
Extremidade do arco $\frac{\pi}{6}$ e seus correspondentes:



Extremidade do arco $\frac{\pi}{4}$ e seus correspondentes:



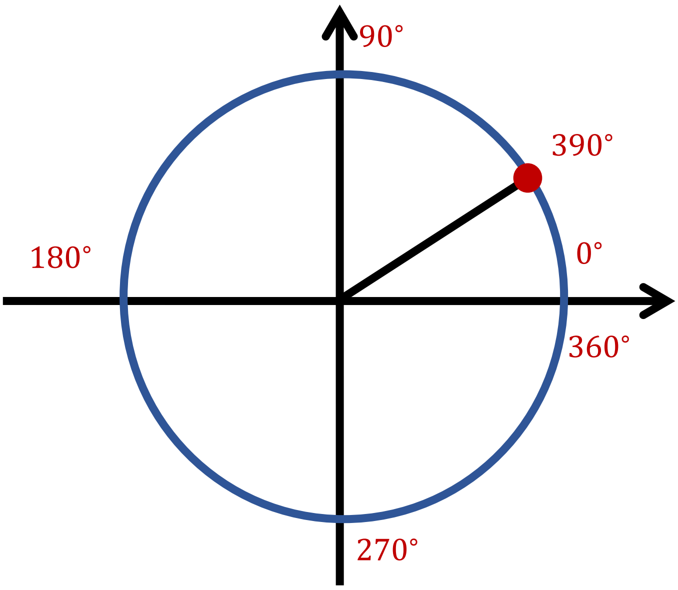
Extremidade do arco $\frac{\pi}{3}$ e seus correspondentes:



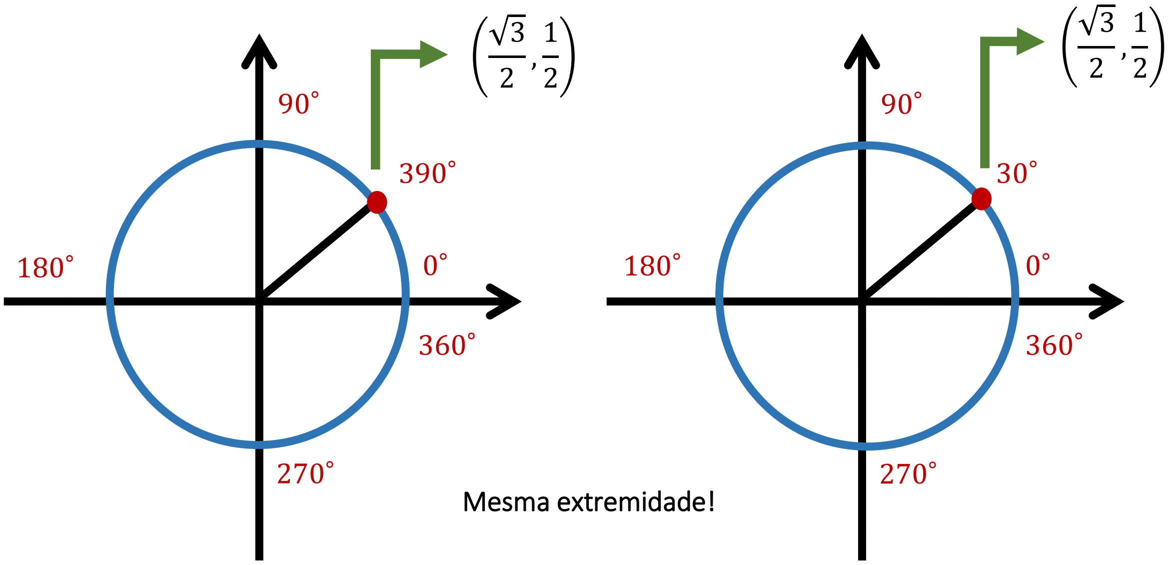
13.9 Arcos Côngruos

Existem casos em que um arco pode ser maior que uma volta completa!

- ✓ Tanto no sentido positivo.
- ✓ Quanto no sentido negativo.



Exemplo: Note que o arco de 390° equivale a uma volta completa (360°) mais um arco de 30°.



Mesma extremidade!

Definição: Dois arcos α_1 e α_2 são ditos **côngruos ou congruentes** se ambos possuem a mesma extremidade (mesma abscissa e mesma ordenada) no ciclo trigonométrico.

Ou seja, α_1 e α_2 diferem apenas por um certo número de voltas completas.

A expressão geral que define todos os demais arcos congruentes a α_0 é dada por:

Arcos dados em graus

$$\alpha = \alpha_0 + k \cdot (360^\circ)$$

Número de voltas completas

Arcos dados em radianos

$$\alpha = \alpha_0 + k \cdot (2\pi)$$

Número de voltas completas

Exemplo: Determine a expressão geral de cada arco dado:

$a)\ 150°$

$b)\ \frac{4\pi}{3}$

Solução:

$a)\ \ 150°$

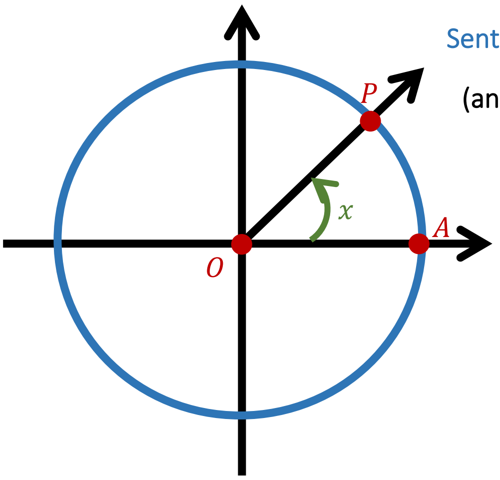
$$\alpha = 150^\circ + k \cdot (360^\circ)$$

$b)\ \ \frac{4\pi}{3}$

$$\alpha = \frac{4\pi}{3} + k \cdot (2\pi)$$

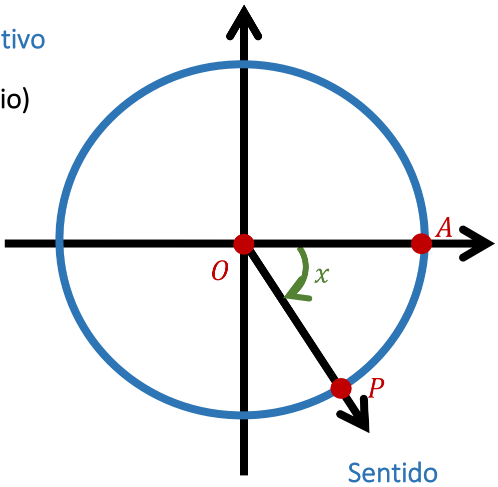
13.10 Voltas no Ciclo Trigonométrico

Fixados os pontos $\boldsymbol{O}$ e $\boldsymbol{A}$, cada ponto $\boldsymbol{P}$ sobre o Ciclo, determina um ângulo $\boldsymbol{x = AOP}$, que pode ser medido nos sentidos positivo ou negativo.



Sentido Positivo

(anti-horário)



Sentido Negativo

(horário)

13.11 Menor determinação positiva

Definição: O menor arco congruente a α tal que $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ (graus) ou $0 \leq \alpha < 2\pi$ (radianos) é chamado de **menor determinação positiva**.

Menor determinação positiva

$$\mathbf{0^\circ \leq \alpha_0 < 360^\circ}$$

$$\alpha = \alpha_0 + k \cdot (360^\circ)$$

Número de voltas completas

Menor determinação positiva

$$\mathbf{0^\circ \leq \alpha_0 < 2\pi}$$

$$\alpha = \alpha_0 + k \cdot (2\pi)$$

Número de voltas completas

$$\alpha = \alpha_0 + k \cdot (360^\circ)$$

$$\alpha = \alpha_0 + k \cdot (2\pi)$$

Nas expressões acima, $k \in \mathbb{Z}$.

- ✓ $k > 0$ *indica* n *voltas no sentido anti-horário.*

  (sentido positivo do ciclo)

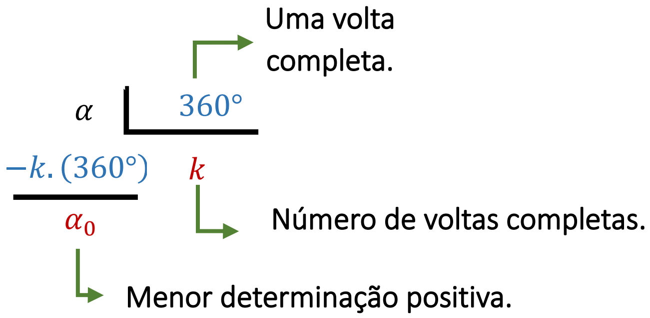
- ✓ $k < 0$ *indica* n *voltas no sentido horário.*

  (sentido negativo do ciclo)

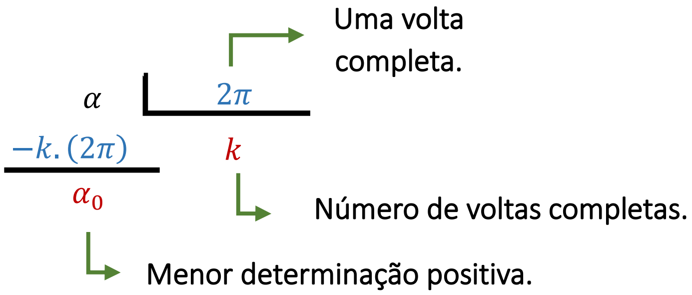
A menor determinação positiva de um arco α é encontrada da seguinte maneira:

Se $\alpha > 0$ temos que o ponto deu n voltas no sentido anti-horário, ou seja, no sentido positivo!

Logo:



De maneira análoga:



A menor determinação positiva de um arco α é encontrada da seguinte maneira:

Se $\alpha < 0$ temos que o ponto deu n voltas no sentido horário, ou seja, no sentido negativo!

Logo:

Fazemos a soma, até obtermos um arco positivo.

$$\alpha + 360° \quad \textit{ou} \quad \alpha + 2\pi$$

Exemplo: Encontre a menor determinação positiva do arco:

$a)\ 390°$ $(b)\ 840°$ $(c) - 1024°$ $(d)\ -\dfrac{21\pi}{4}$

Solução:

(a) $390°$

$$\begin{array}{r|l} 390^\circ & 360^\circ \\ \cline{2-2} -360^\circ & 1 \\ \hline 30^\circ & \end{array}$$

Logo, $390^\circ = 30^\circ + 1 \cdot (360^\circ)$

Portanto a menor determinação positiva de $390°$ será $30°$.

(b) $840°$

$$\begin{array}{r|l} 840^\circ & 360^\circ \\ \cline{2-2} -720^\circ & 2 \\ \hline 120^\circ & \end{array}$$

Logo, $840^\circ = 120^\circ + 2 \cdot (360^\circ)$

Portanto a menor determinação positiva de 840° será 120°.

(c) $-1024°$

$$-1024° + 360° = -664°$$

$$\Rightarrow \quad -664° + 360° = -304°$$

$$\Rightarrow \quad -304° + 360° = 56°$$

Portanto a menor determinação positiva de $-1024°$ será $56°$.

(d) $-\dfrac{21\pi}{4}$

$$-\frac{21\pi}{4} + 2\pi = \frac{-21\pi + 8\pi}{4} = -\frac{13\pi}{4}$$

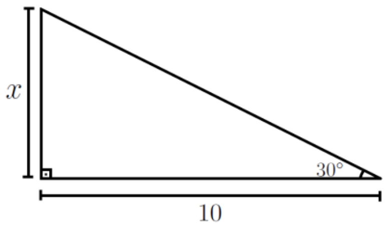
$$\Rightarrow \ -\frac{13\pi}{4} + 2\pi = \frac{-13\pi + 8\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4}$$

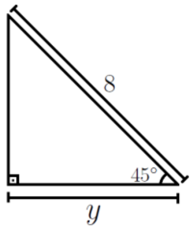
$$\Rightarrow \ -\frac{5\pi}{4} + 2\pi = \frac{-5\pi + 8\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

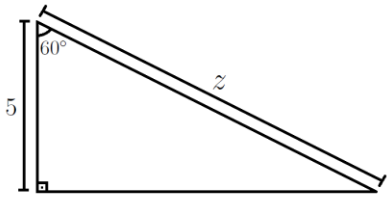
Portanto a menor determinação positiva de $-\frac{21\pi}{4}$ será $\frac{3\pi}{4}$.

13.12 Exercícios Propostos

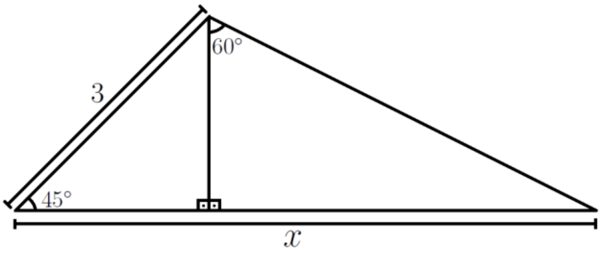
1) Em cada caso, determine os valores de x, y e z.





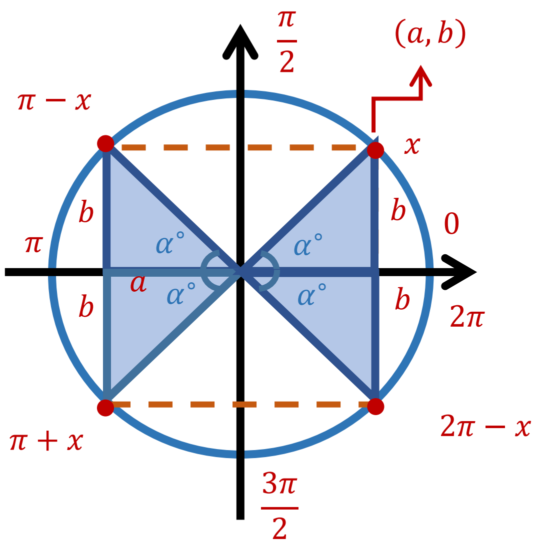


2) Determine o valor de x.



3) Considerando o arco x representado no ciclo trigonométrico abaixo, determine e represente no ciclo os arcos e as respectivas coordenadas correspondentes ao arco x nos demais quadrantes:

$$x \longrightarrow (a, b)$$



4) Em cada caso, encontre a menor determinação positiva do arco dado.

(a) $2205°$ (b) $-840°$ (c) $-1440°$ (d) 9π (e) $-\frac{37\pi}{3}$

13.13 Respostas

Exercício 1:

$$x = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

$$y = 4\sqrt{2}$$

$$z = 10$$

Exercício 2:

$$x = \frac{3\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{3})$$

Exercício 3:

a) $45°$

b) $240°$

c) 0

d) π

e) $\frac{5\pi}{3}$

Exercício 4:

Correspondente de x no segundo quadrante

$$\pi - x \longrightarrow (-a, b)$$

Correspondente de x no terceiro quadrante

$$\pi + x \longrightarrow (-a, -b)$$

Correspondente de x no quarto quadrante

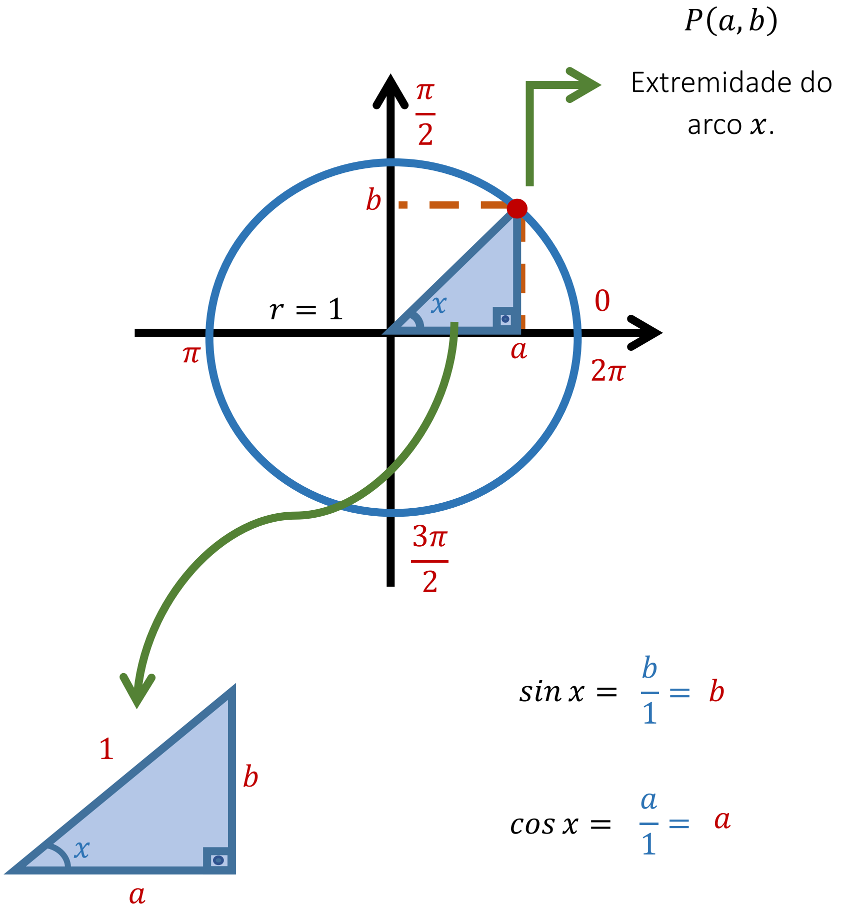
$$2\pi - x \longrightarrow (a, -b)$$

14. Aula 2

14.1 Seno e Cosseno no Ciclo Trigonométrico

Lembrando...

Para cada arco x, o ciclo associa um ponto $P(a,\ b)$ do plano cartesiano, chamado de extremidade do arco $\boldsymbol{x}$.



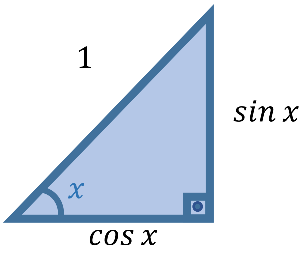
$$\sin x = \frac{b}{1} = b$$

$$\cos x = \frac{a}{1} = a$$

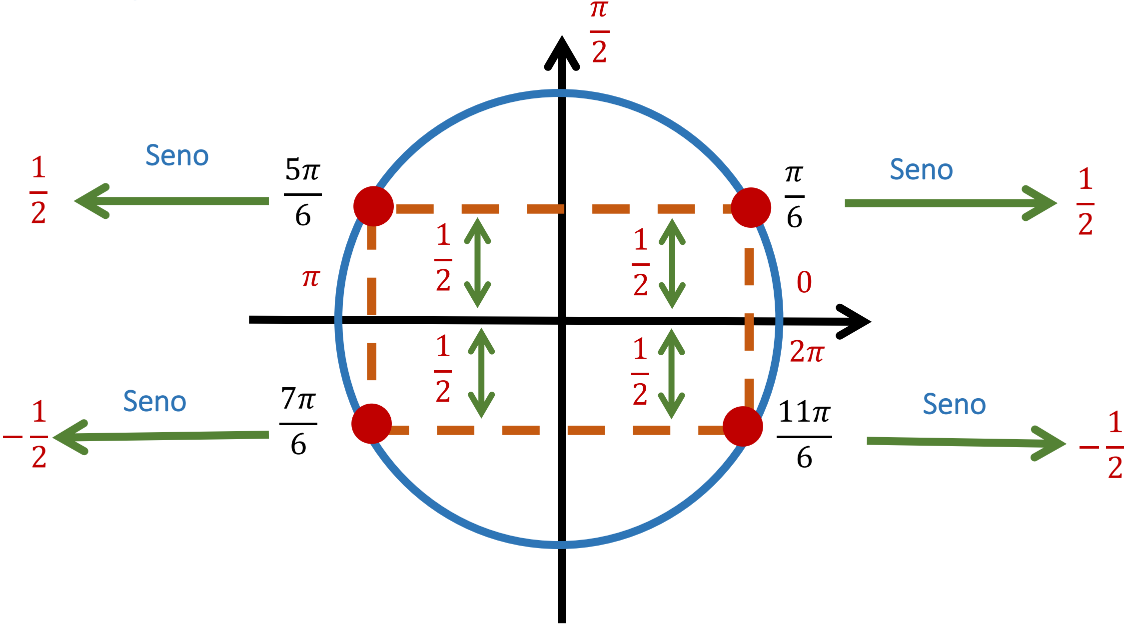
Portanto:

Abscissa de $\boldsymbol{P}$ é igual ao cosseno do arco $\boldsymbol{x}$.

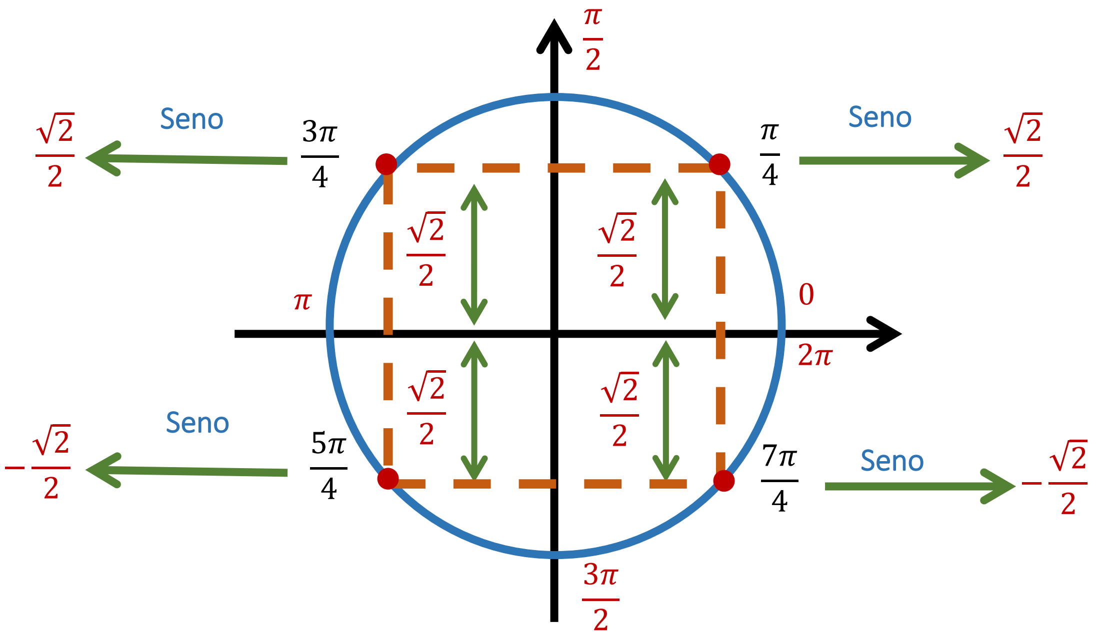
Ordenada de $\boldsymbol{P}$ é igual ao seno do arco $\boldsymbol{x}$.



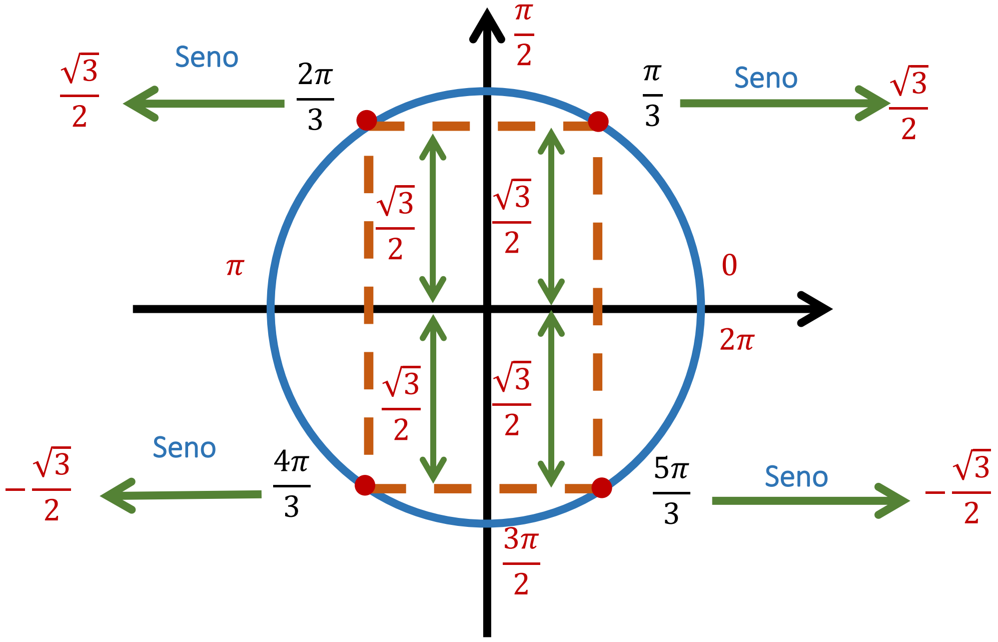
Arco $\frac{\pi}{6}$ e seus representantes:



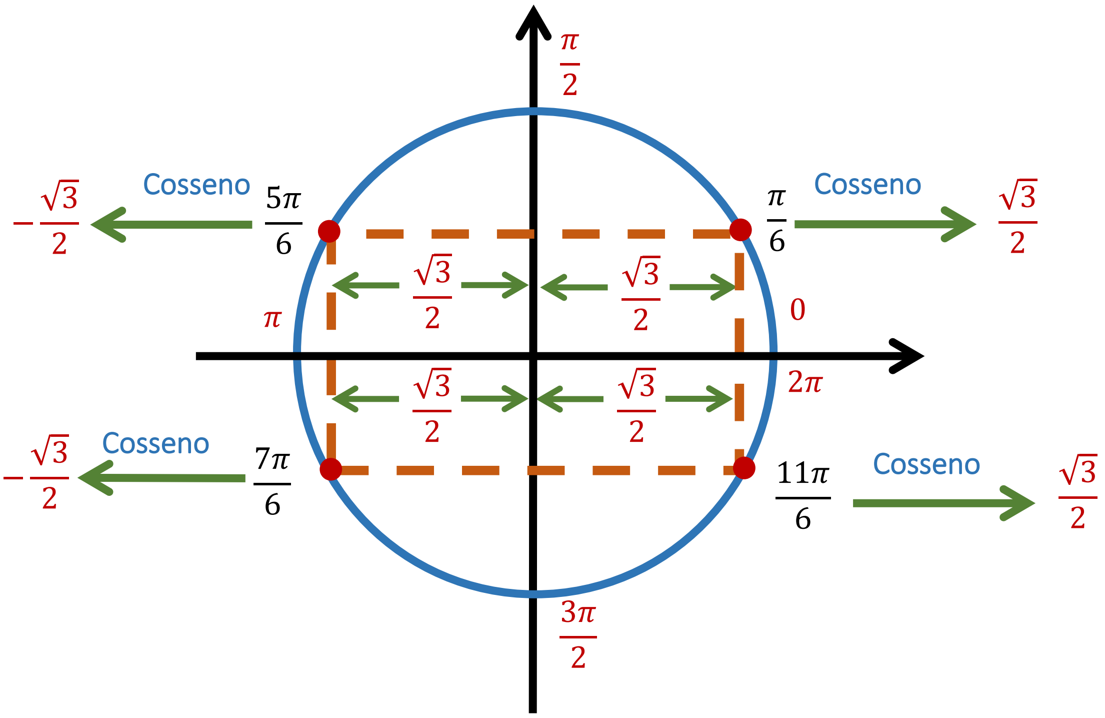
Arco $\frac{\pi}{4}$ e seus representantes:



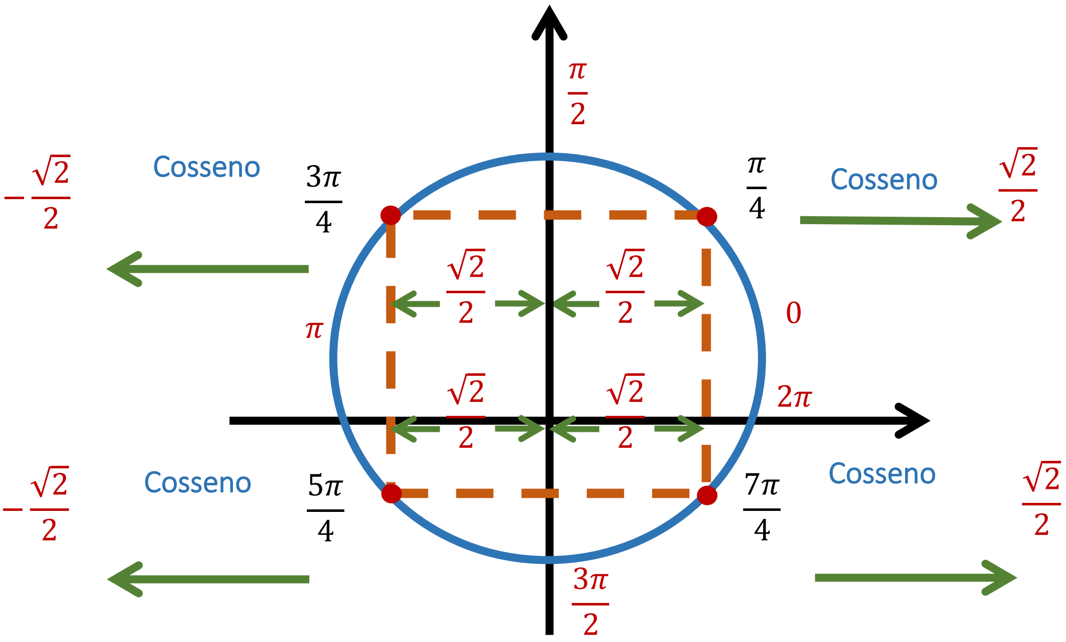
Arco $\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$ e seus representantes:



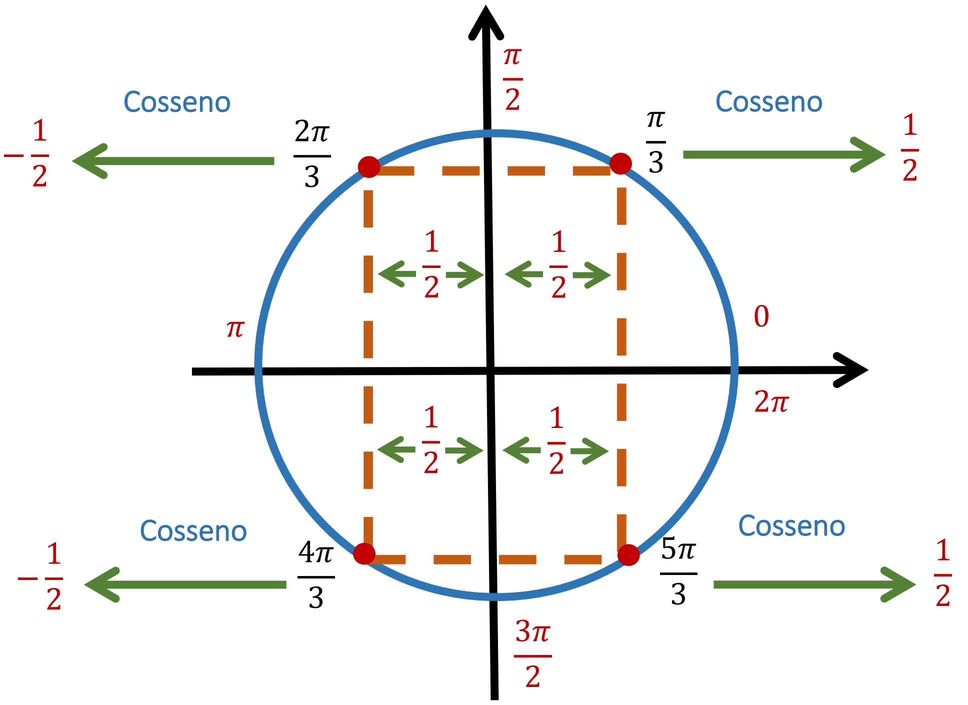
Arco $\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$ e seus representantes:



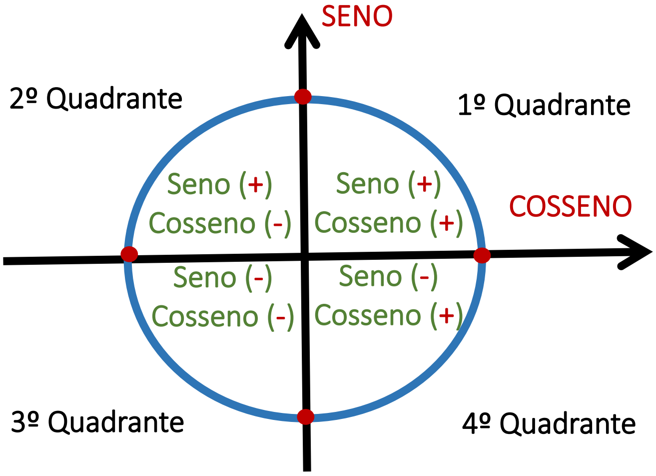
Arco $\frac{\pi}{4}$ e seus representantes:



Arco $\frac{\pi}{3}$ e seus representantes:



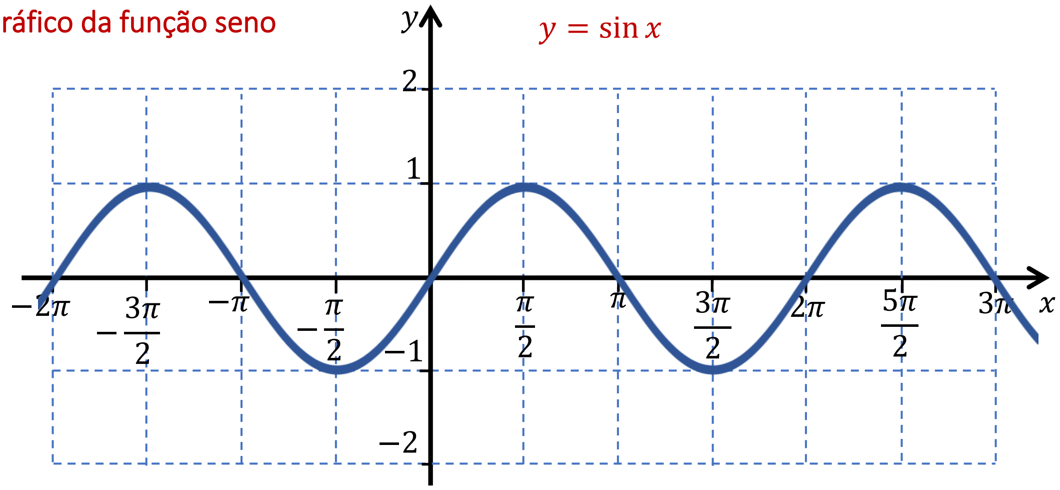
14.2 Sinais do Seno e do Cosseno



14.3 Função Seno

Definição: A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\sin x$ é chamada de **função seno.**

Gráfico da função seno



Domínio

$D(f)=\mathbb{R}$

Imagem

$Im(f)=[-1,1]$

Período

$P(f)=2\pi$

1º quadrante:

- ✓ Função positiva.
- ✓ Função crescente.

2º quadrante:

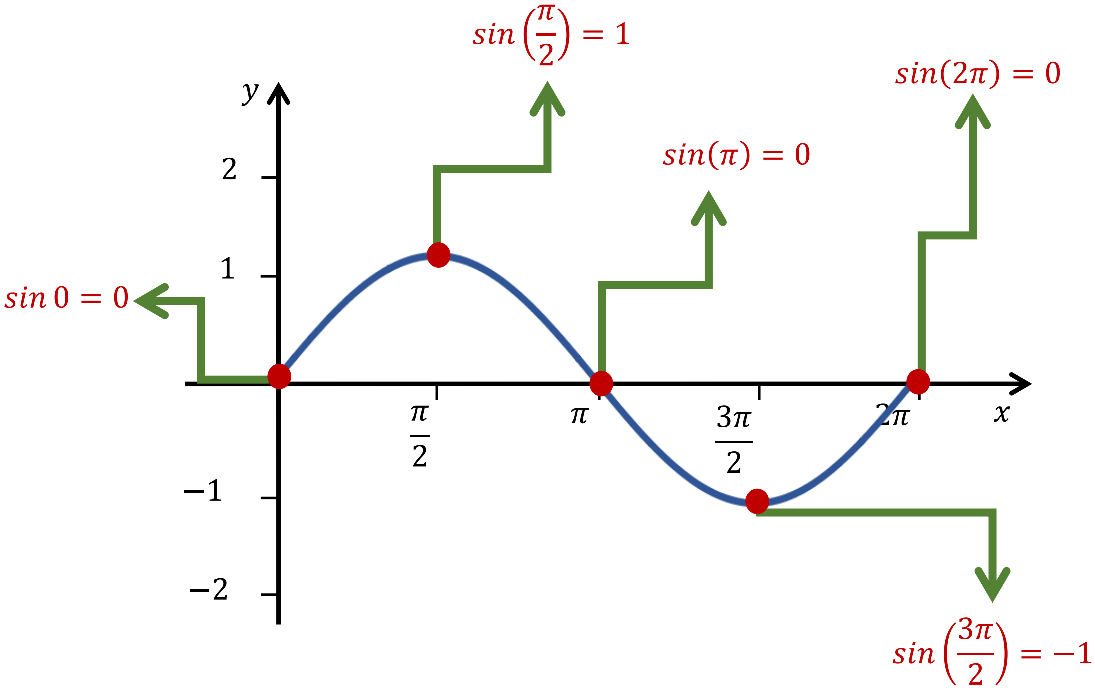
- ✓ Função positiva.
- ✓ Função decrescente.

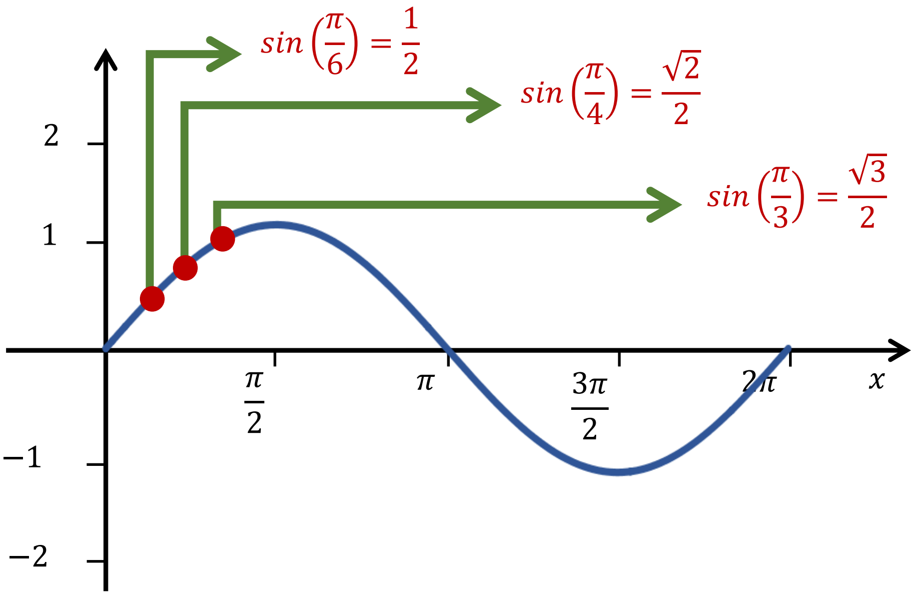
3º quadrante:

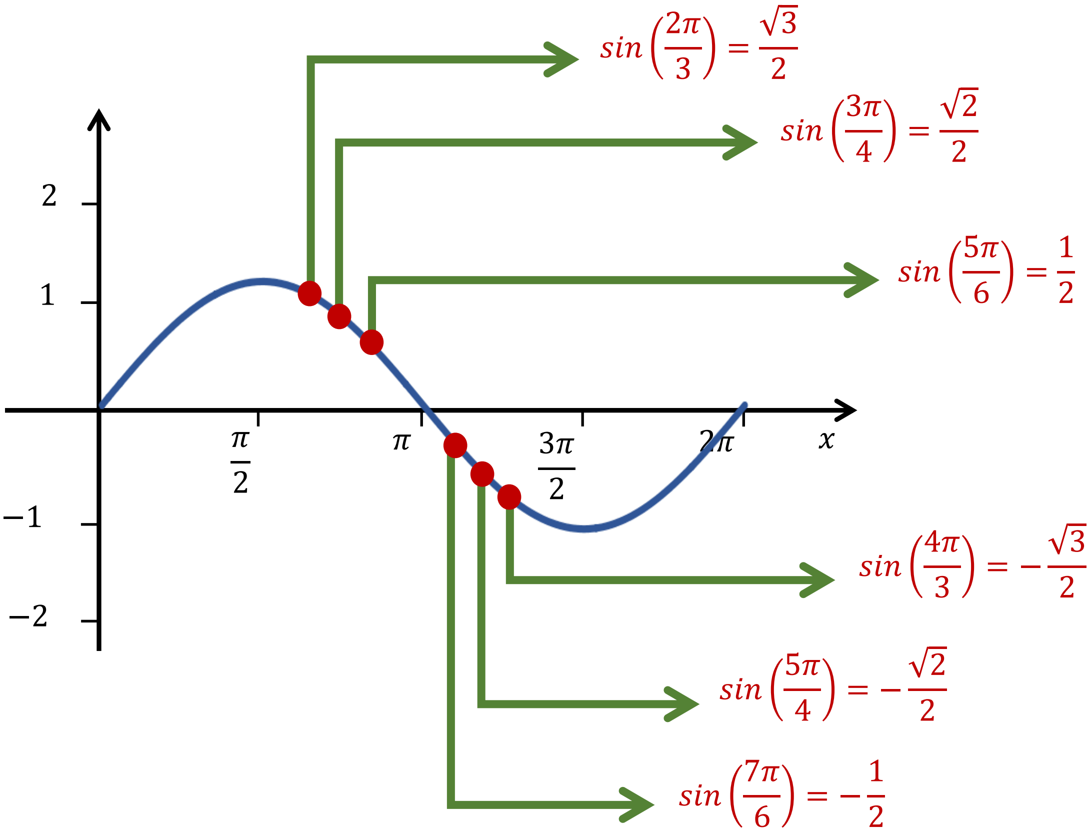
- ✓ Função negativa.
- ✓ Função decrescente.

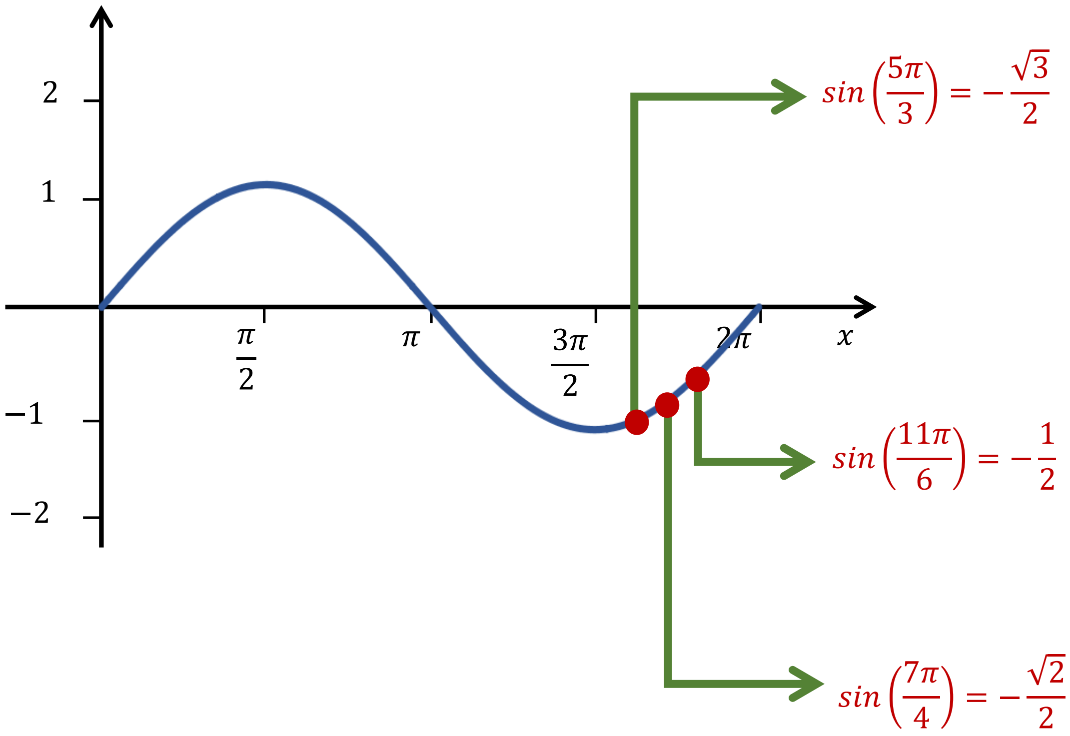
4º quadrante:

- ✓ Função negativa.
- ✓ Função crescente.


$sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
$sin(2\pi) = 0$
$sin(\pi) = 0$
$sin\,0 = 0$
$sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$
y
2
1
-1
-2
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
x

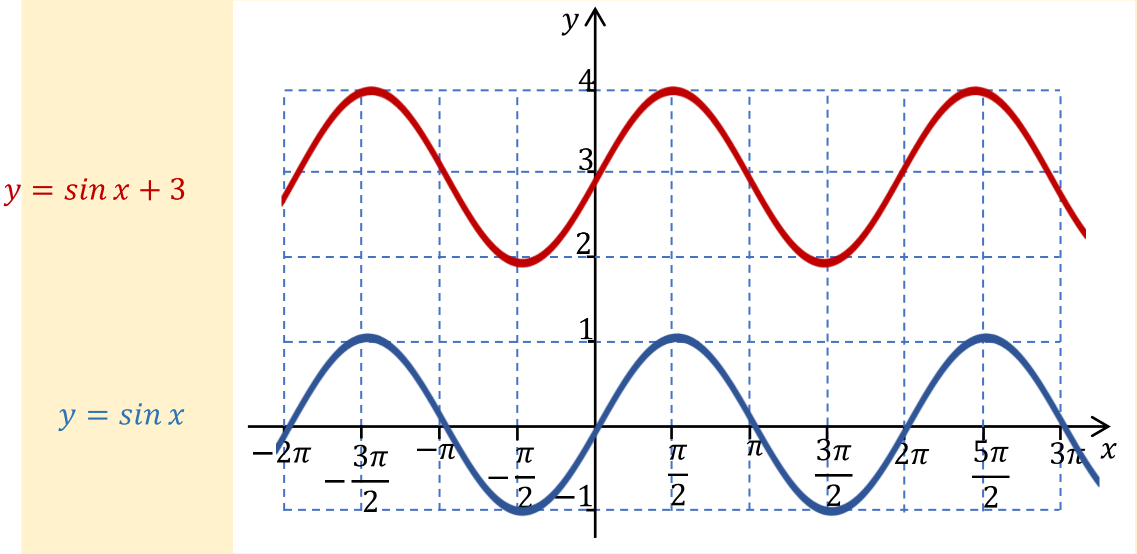

$sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
$sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
2
1
-1
-2
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
x


$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
2
1
-1
-2
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
x
$\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$


$\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
2
1
-1
-2
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
x
$\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$
$\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exemplo: Esboce o gráfico da função $f(x) = \sin x + 3$.

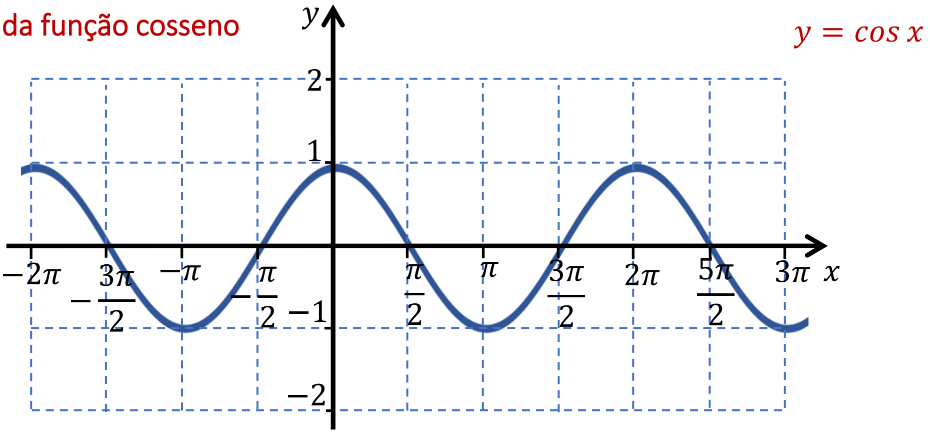
Solução: $D(f) = \mathbb{R}$ $\quad Im(f) = [2,4]$ $\quad P(f) = 2\pi$



14.4 Função Cosseno

Definição: A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos x$ é chamada de **função cosseno.**

Gráfico da função cosseno



Domínio	Imagem	Período
$D(f) = \mathbb{R}$	$Im(f) = [-1,1]$	$P(f) = 2\pi$

1º quadrante:

- ✓ Função positiva.
- ✓ Função decrescente.

2º quadrante:

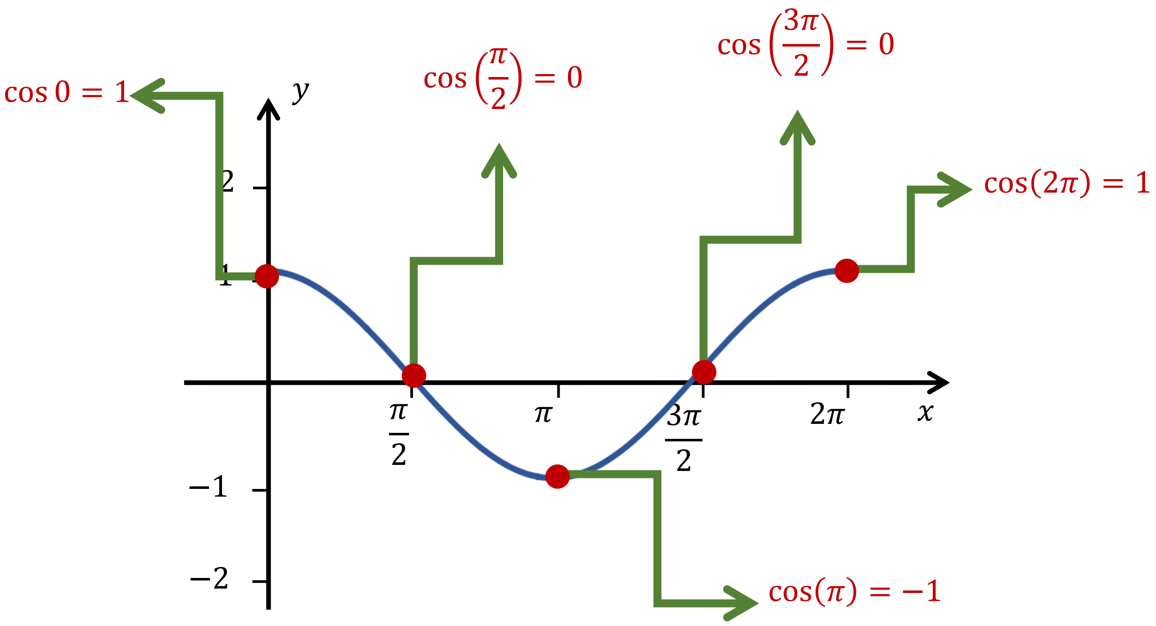
- ✓ Função negativa.
- ✓ Função decrescente.

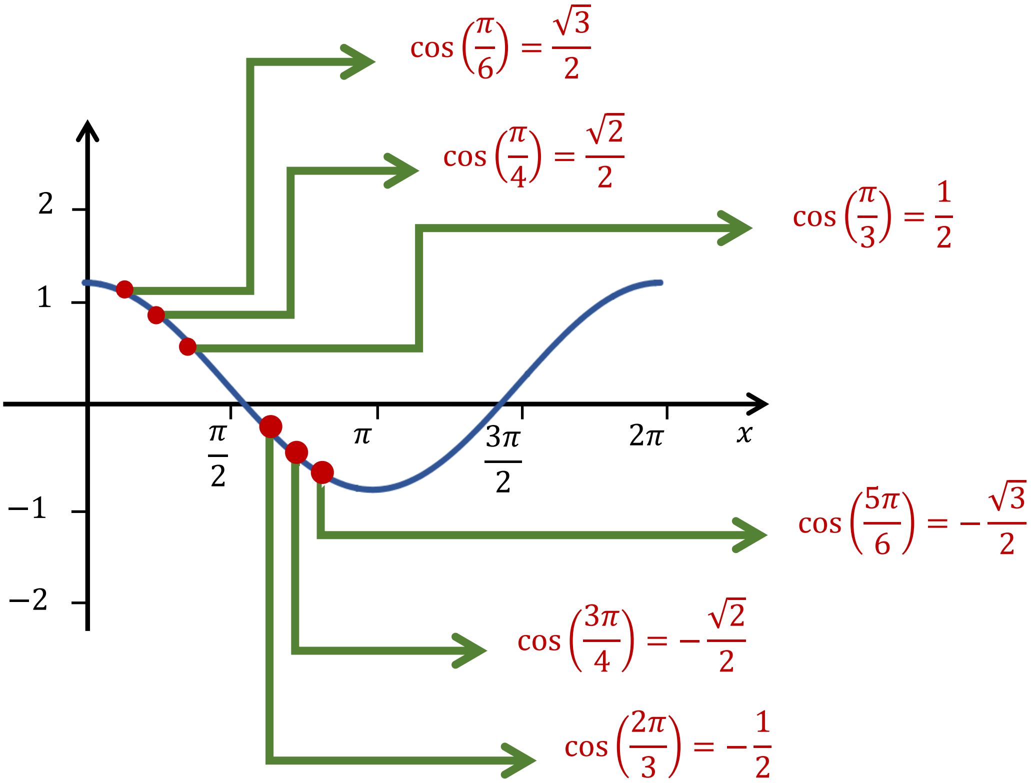
3º quadrante:

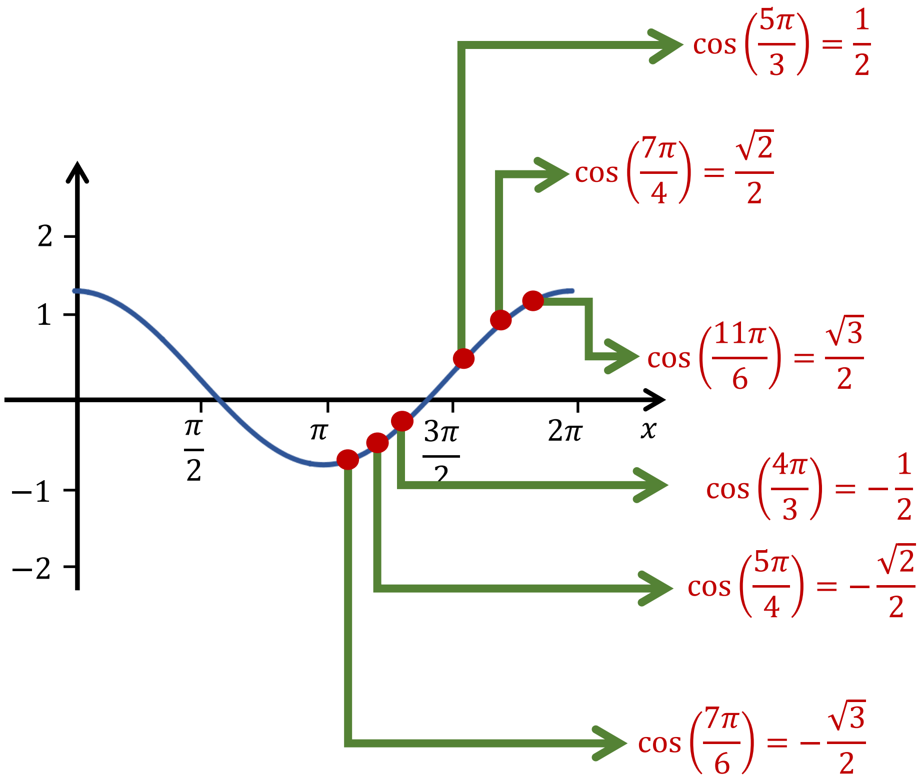
- ✓ Função negativa.
- ✓ Função crescente.

4º quadrante:

- ✓ Função positiva.
- ✓ Função crescente.


$\cos 0 = 1$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$
$\cos(2\pi) = 1$
$\cos(\pi) = -1$
y
x
2
1
-1
-2
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π

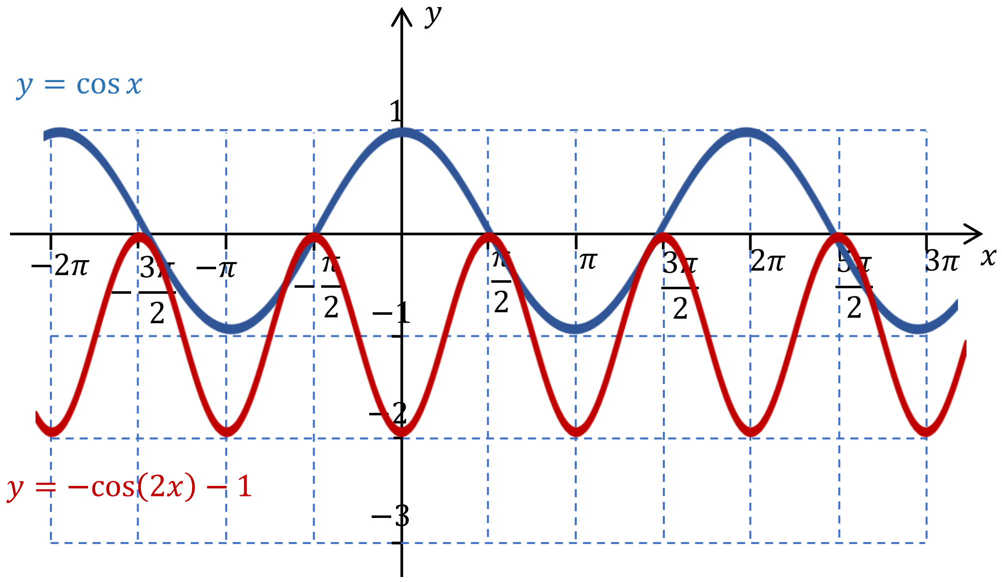

$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$
$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$
2
1
-1
-2
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
x



Exemplo: Esboce o gráfico da função $f(x) = -\cos(2x) - 1$.

Solução:

$D(f) = \mathbb{R}$ $\qquad Im(f) = [-2,0]$ $\qquad P(f) = \pi$



14.5 Exercícios Propostos

1) Esboce o gráfico das funções trigonométricas, e determine o período (T), amplitude (A), domínio e imagem das funções:

(a) $y = 2 + \sin x$

(b) $y = 2\sin 4x$

(c) $y = -3\cos(0{,}5x)$

(d) $y = 3\sin 2\pi x$

(e) $y = 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

14.6 Respostas

Exercício 1:

a) $T = 2\pi$ $A = 1$ $D(f) = \mathbb{R}$ $Im(f) = [1{,}3]$

b) $T = 4\pi$ $A = 3$ $D(f) = \mathbb{R}$ $Im(f) = [-3{,}3]$

c) $T = \frac{\pi}{2}$ $A = 2$ $D(f) = \mathbb{R}$ $Im(f) = [-2{,}2]$

d) $T = 1$ $A = 3$ $D(f) = \mathbb{R}$ $Im(f) = [-3{,}3]$

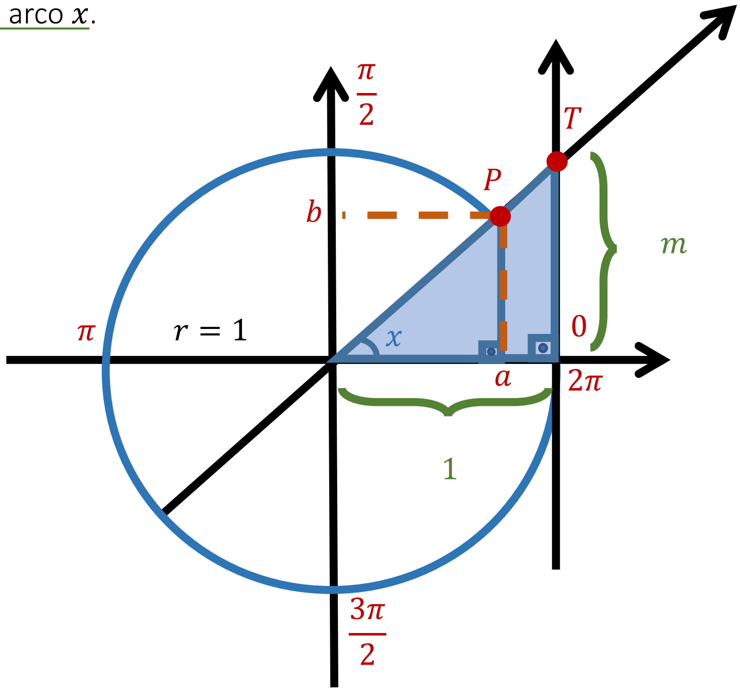
e) $T = \pi$ $A = 3$ $D(f) = \mathbb{R}$ $Im(f) = [-3{,}3]$

15. Aula 3

15.1 Tangente no Ciclo Trigonométrico

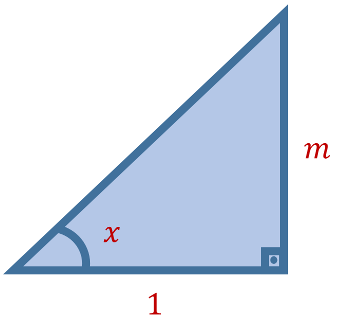
Lembrando...

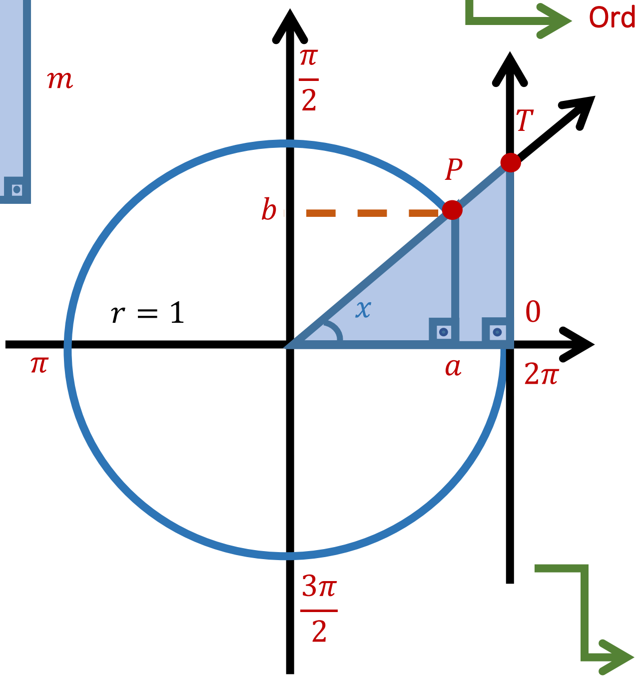
Para cada arco x, o ciclo associa um ponto $P(a,\ b)$ do plano cartesiano, chamado de extremidade do arco x.



$$tan\,x = \frac{m}{1} = m$$

Ordenada de $\boldsymbol{T}$.

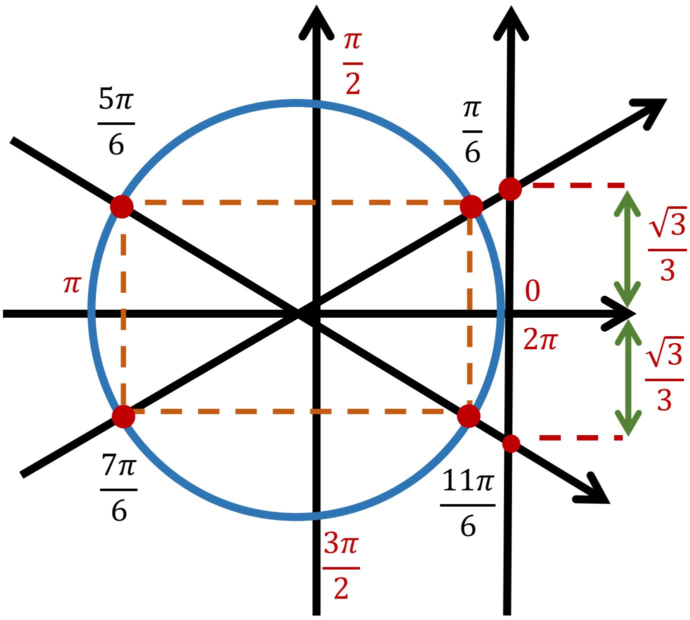




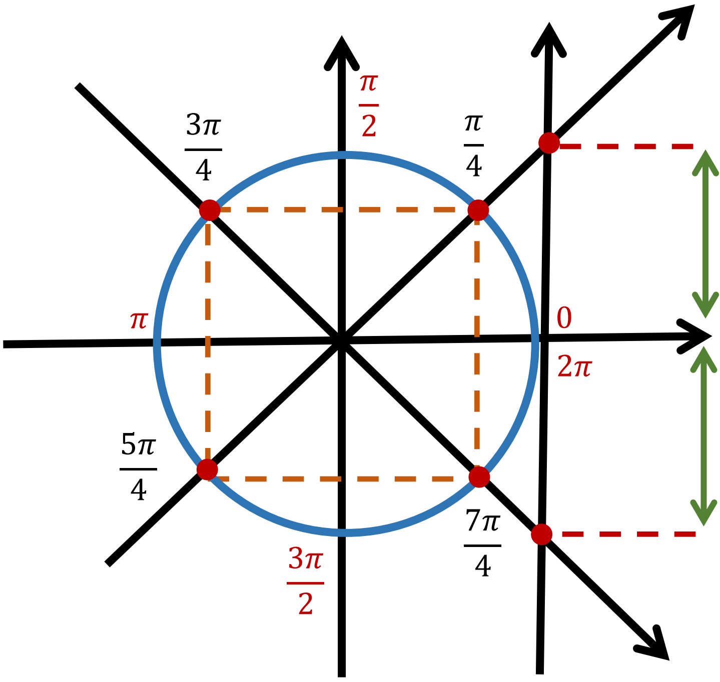
Eixo das tangentes

15.2 Tangente dos arcos notáveis

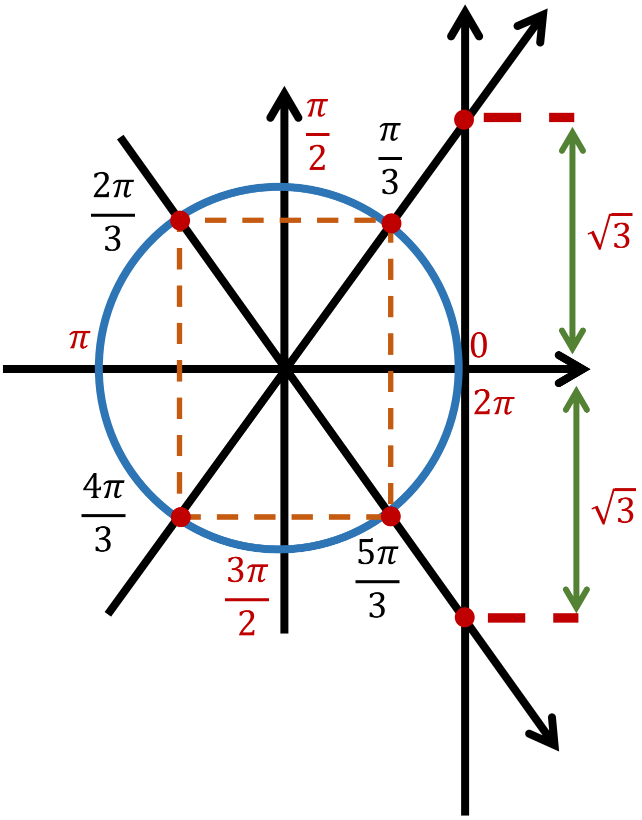
Arco $\frac{\pi}{6}$	Tangente
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$



Arco $\frac{\pi}{4}$	Tangente
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{3\pi}{4}$	-1
$\frac{5\pi}{4}$	1
$\frac{7\pi}{4}$	-1



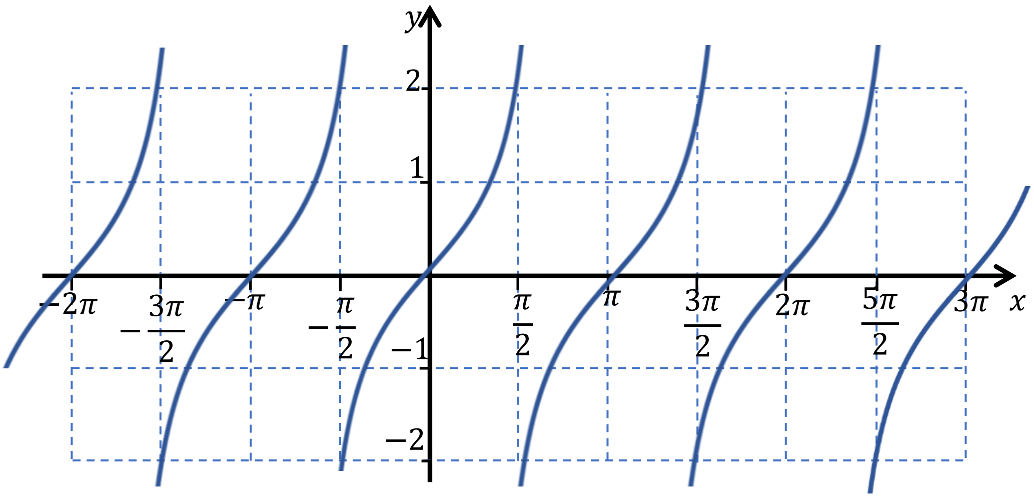
Arco $\frac{\pi}{3}$	Tangente
$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{2\pi}{3}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{4\pi}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{3}$	$-\sqrt{3}$

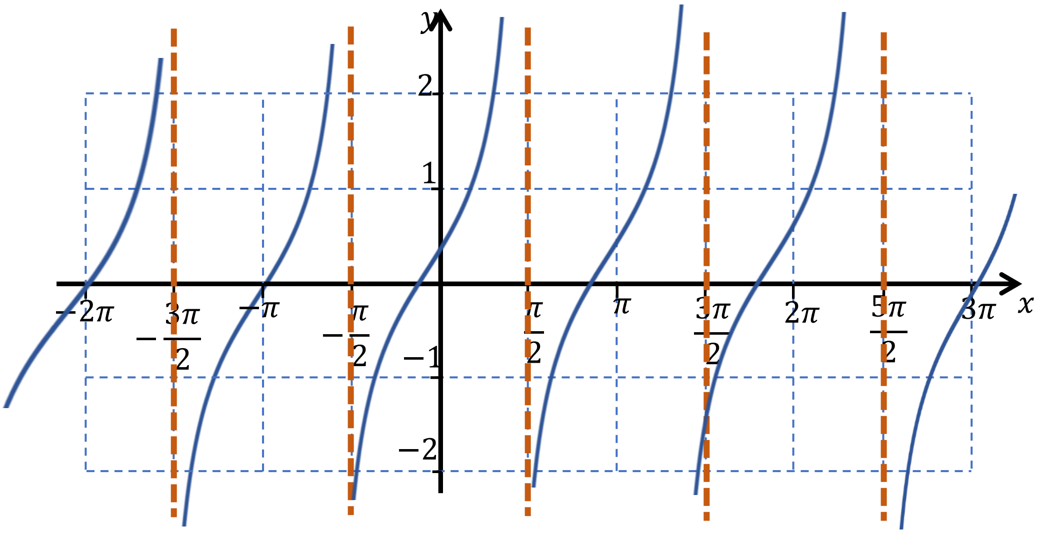


15.3 Função Tangente

Definição: A função f dada por $f(x) = \tan x$ é chamada de **função tangente.**

Gráfico da função tangente $y = tan\, x$





Domínio

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Imagem

$$Im(f) = \mathbb{R}$$

Período

$$P(f) = \pi$$

Lembre que:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

⇩

Assíntotas

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$$

1º quadrante:

- ✓ Função positiva.
- ✓ Função crescente.

2º quadrante:

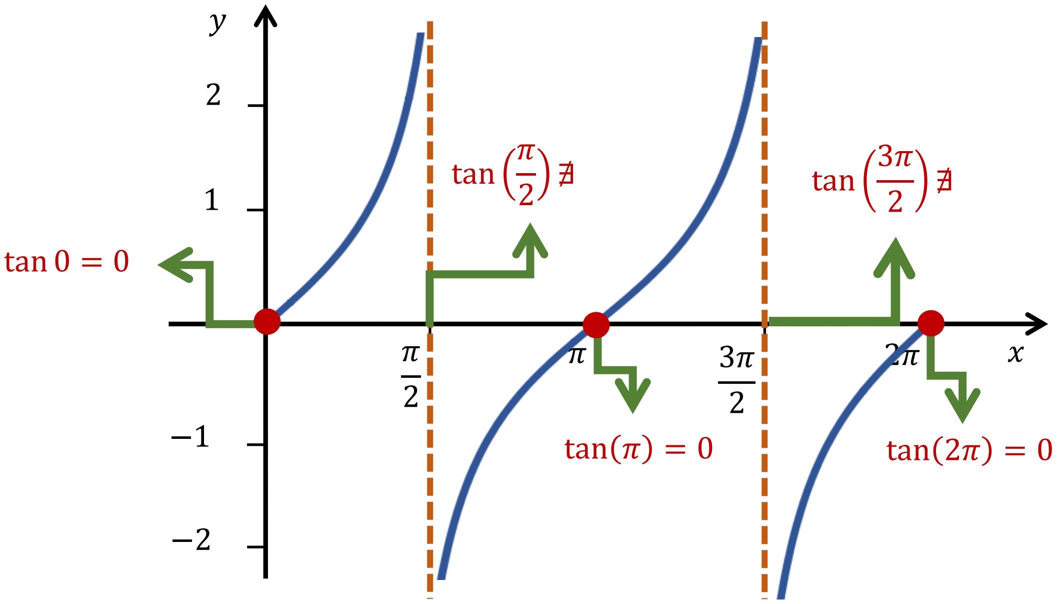
- ✓ Função negativa.
- ✓ Função crescente.

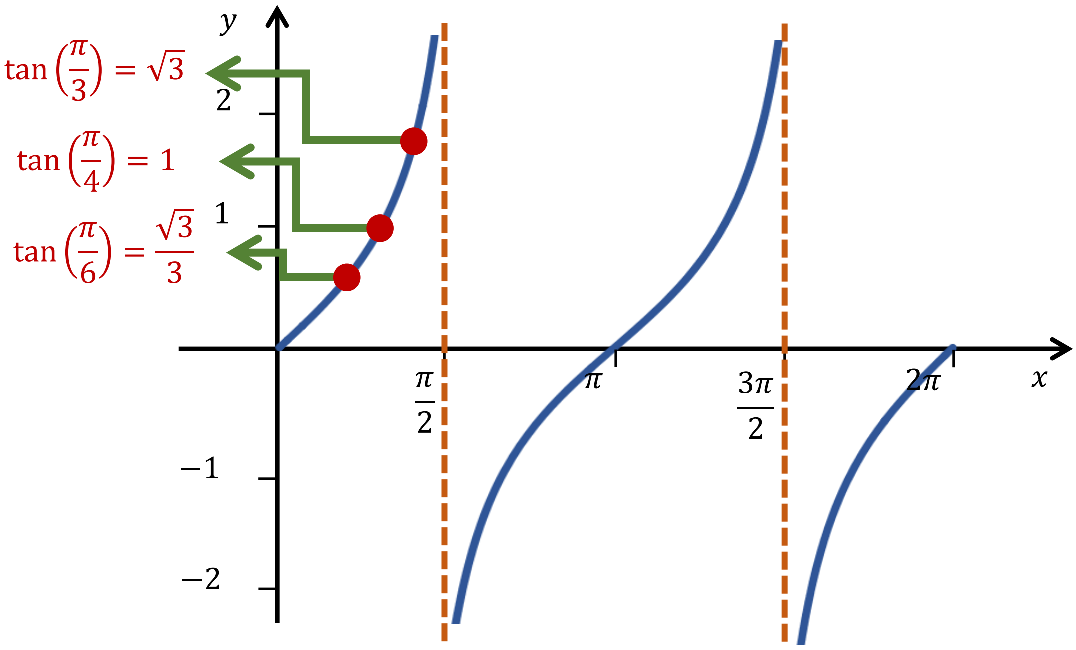
3º quadrante:

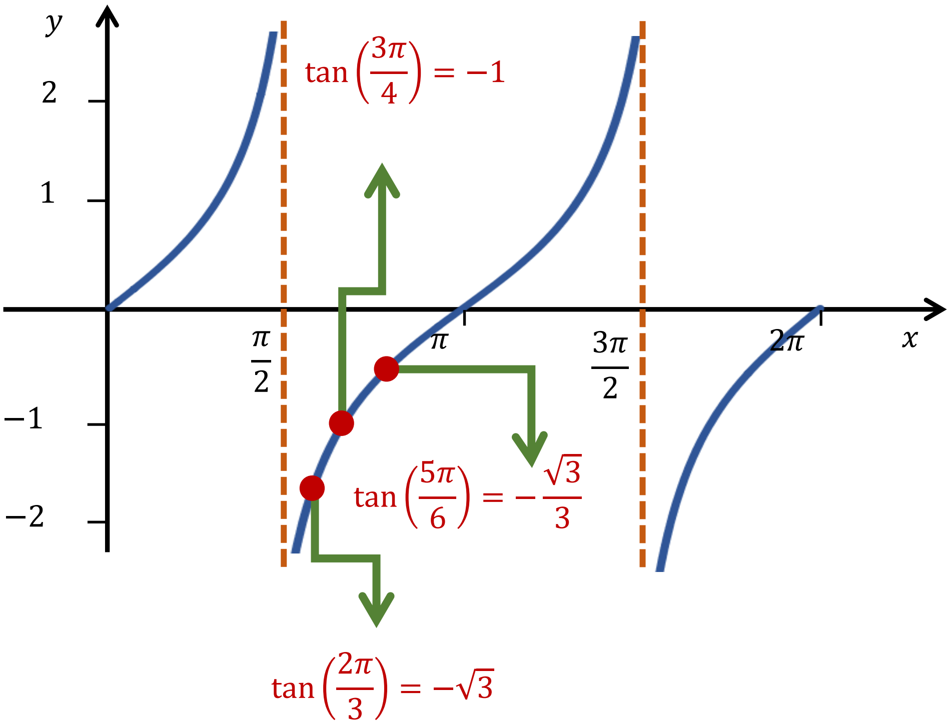
- ✓ Função positiva.
- ✓ Função crescente.

4º quadrante:

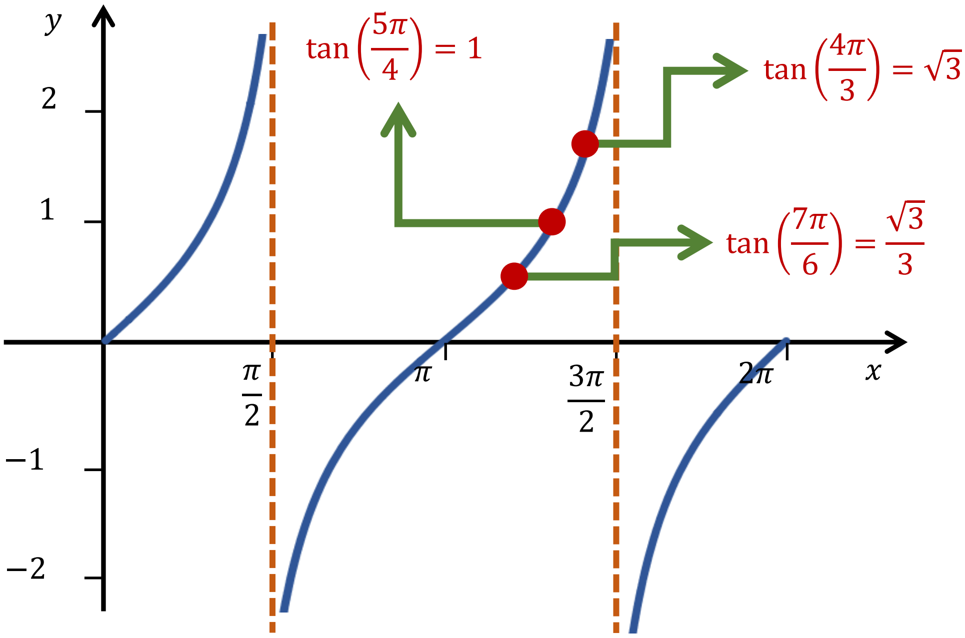
- ✓ Função negativa.
- ✓ Função crescente.


y
2
1
-1
-2
x
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
$\tan 0 = 0$
$\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) \nexists$
$\tan\left(\frac{3\pi}{2}\right) \nexists$
$\tan(\pi) = 0$
$\tan(2\pi) = 0$

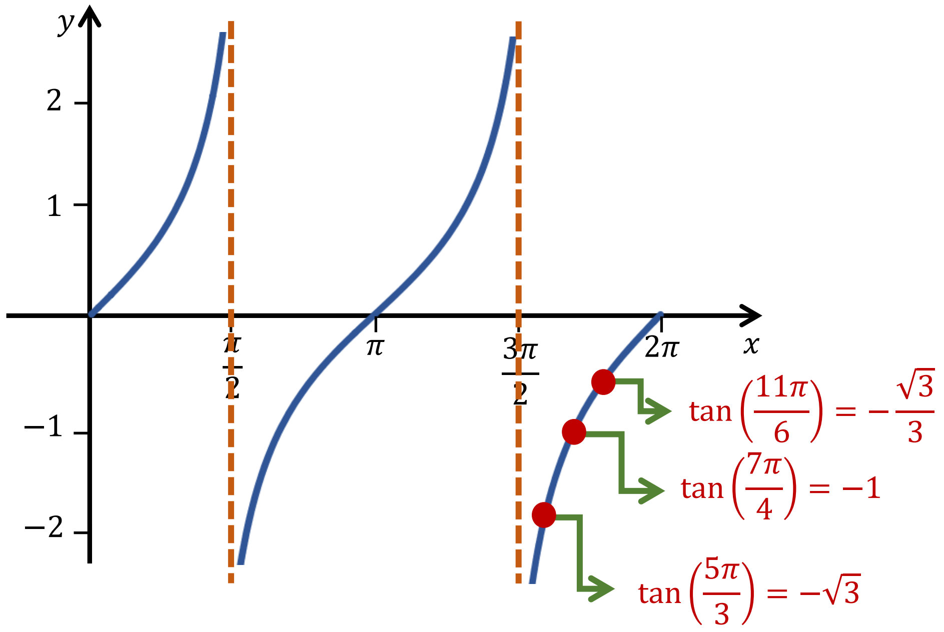

y
2
1
-1
-2
x
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$
$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$
$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$



y
2
1
−1
−2
π/2
π
3π/2
2π
x
tan(3π/4) = −1
tan(5π/6) = −√3/3
tan(2π/3) = −√3



y
2
1
−1
−2
π/2
π
3π/2
2π
x
tan(5π/4) = 1
tan(4π/3) = √3
tan(7π/6) = √3/3



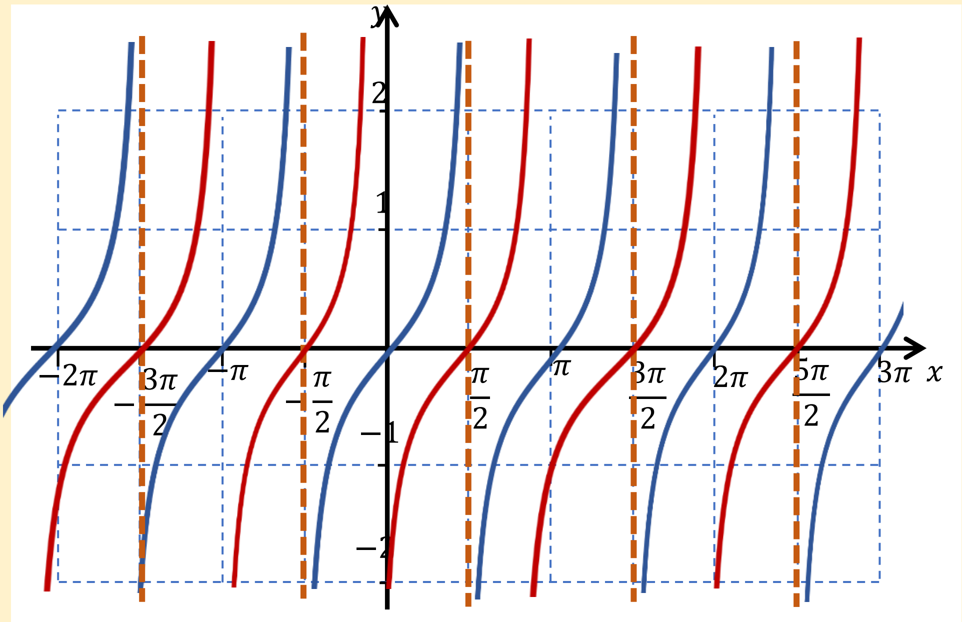
Exemplo: Esboce o gráfico, determine o domínio, a imagem e o período e as assíntotas da função $f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Solução:

$$Im(f) = \mathbb{R}$$

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$$

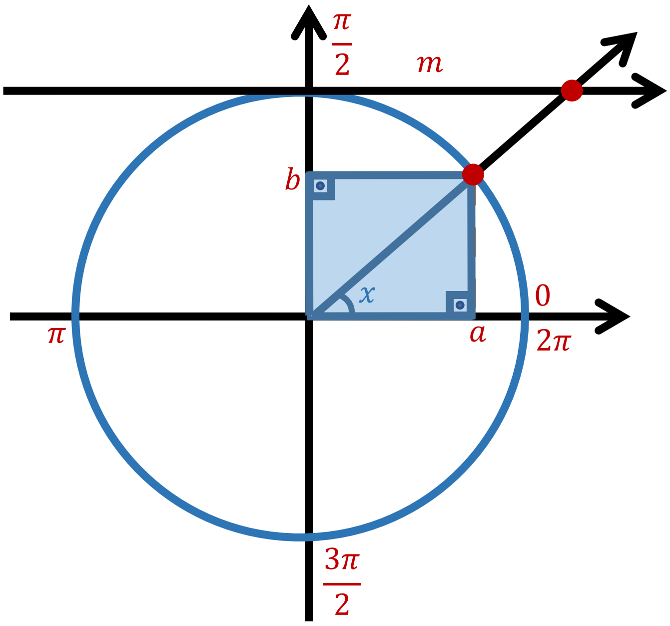
$$P(f) = \pi$$



15.4 Cotangente no Ciclo Trigonométrico

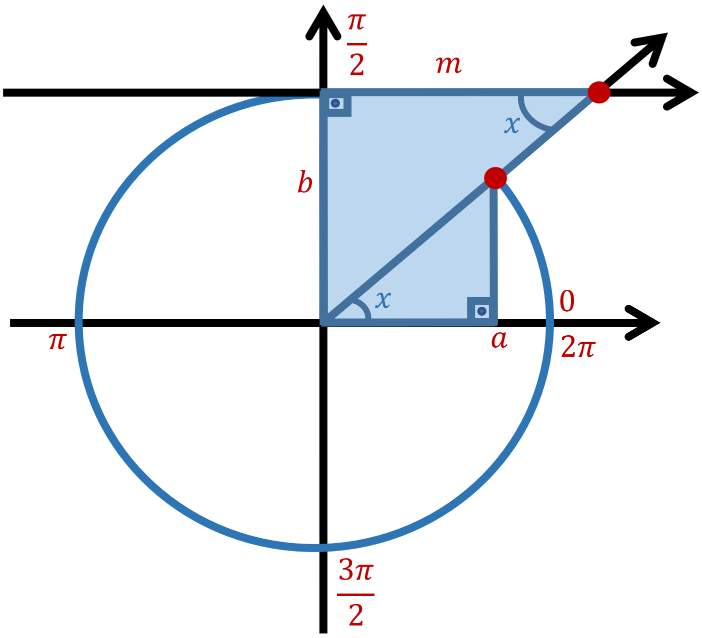
Lembrando...

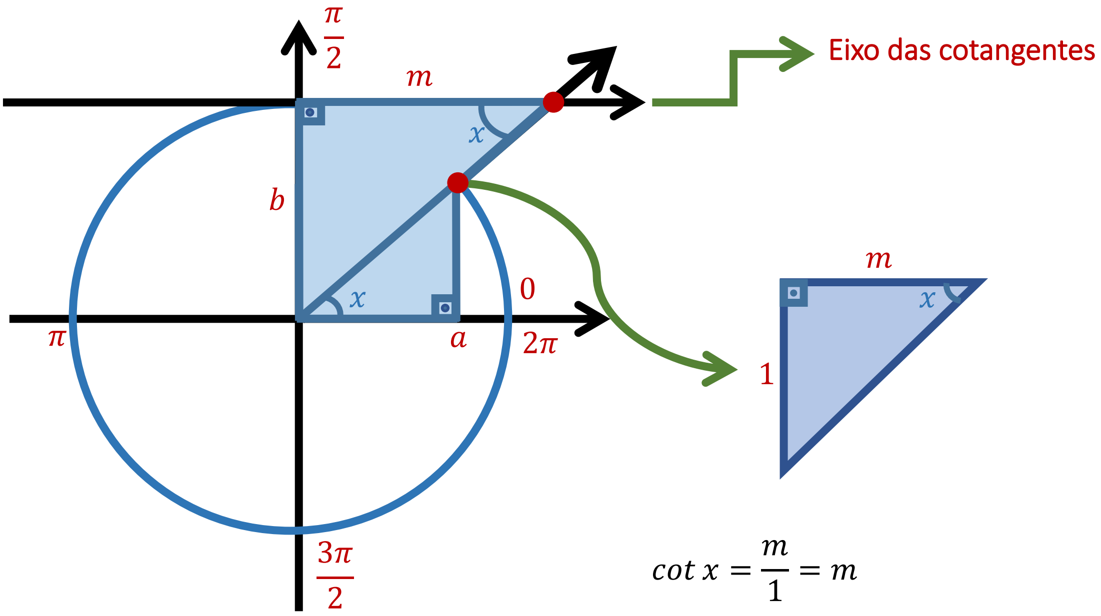
Para cada arco x, o ciclo associa um ponto $P(a,\ b)$ do plano cartesiano, chamado de extremidade do arco x.



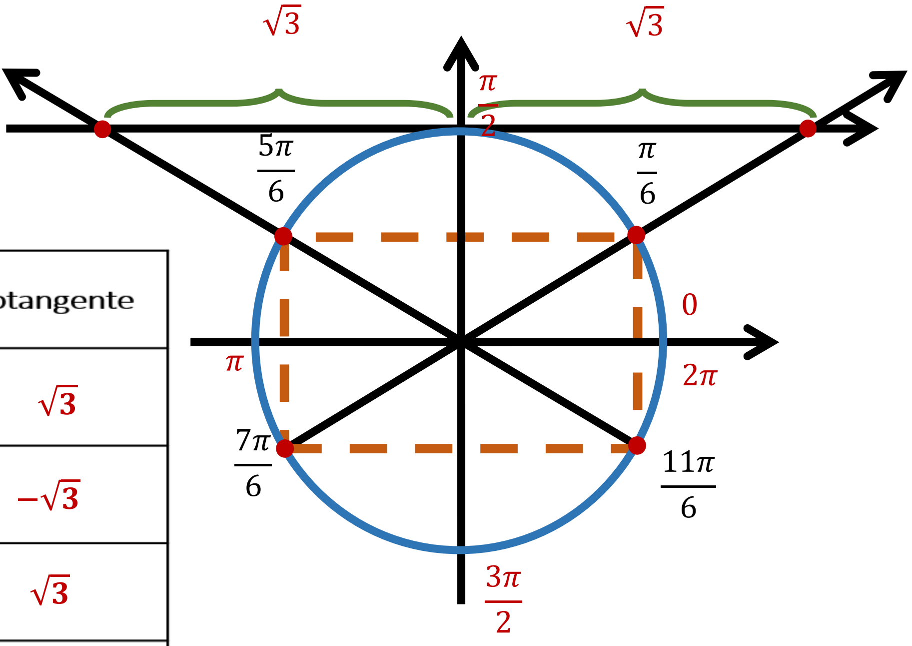
Lembrando...

Para cada arco x, o ciclo associa um ponto $P(a,\ b)$ do plano cartesiano, chamado de extremidade do arco x.



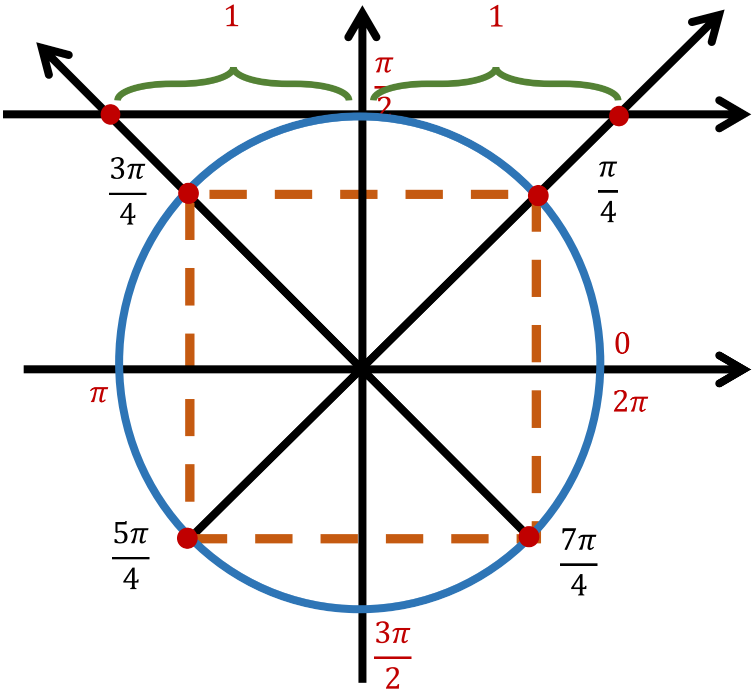


$$cot\, x = \frac{m}{1} = m$$

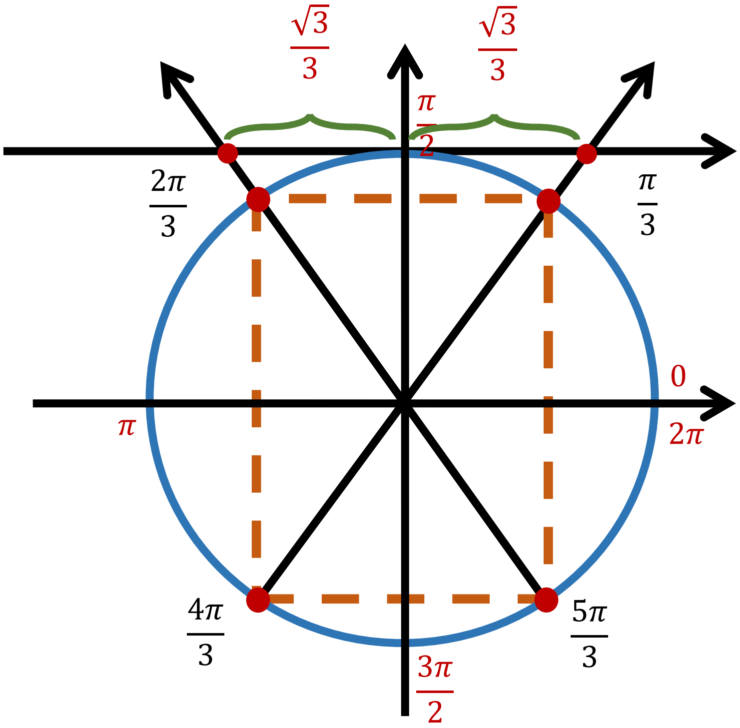


Arco $\frac{\pi}{6}$	Cotangente
$\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$	$\sqrt{3}$
$\boldsymbol{\frac{5\pi}{6}}$	$-\sqrt{3}$
$\boldsymbol{\frac{7\pi}{6}}$	$\sqrt{3}$
$\boldsymbol{\frac{11\pi}{6}}$	$-\sqrt{3}$

Arco $\frac{\pi}{4}$	Cotangente
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{3\pi}{4}$	-1
$\frac{5\pi}{4}$	1
$\frac{7\pi}{4}$	-1



Arco $\frac{\pi}{3}$	Cotangente
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

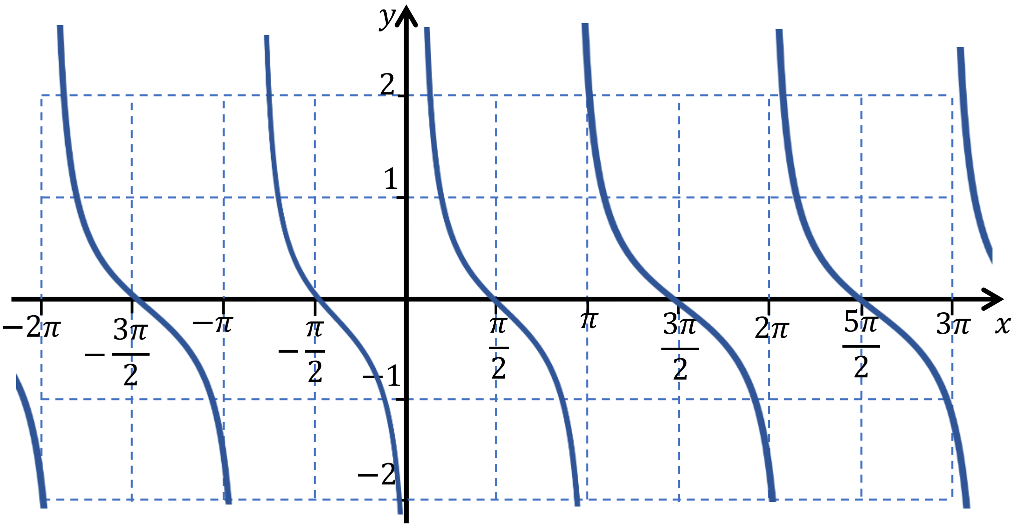


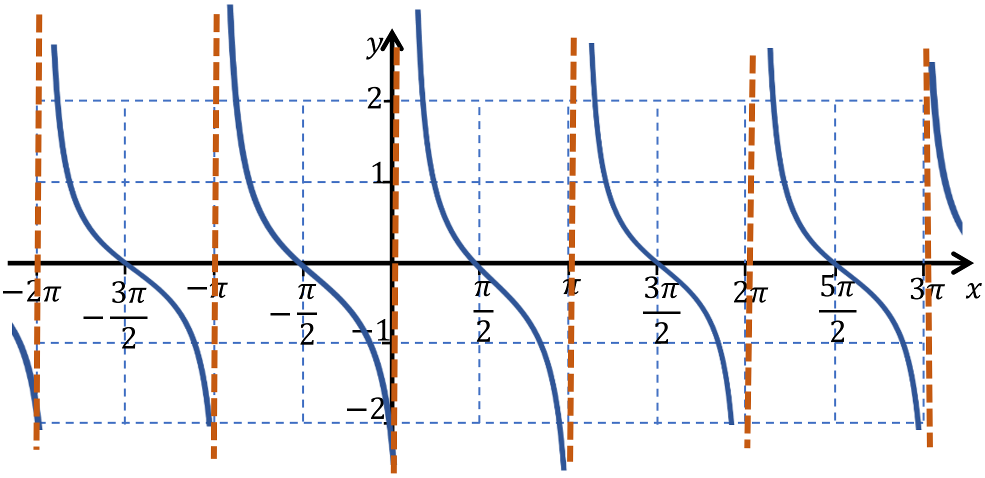
15.5 Função Cotangente

Definição: A função f dada por $f(x) = \cot x$ é chamada de **função cotangente.**

Gráfico da função cotangente

$y = cot\ x$





Domínio

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

Lembre que:

$cot\ x = \frac{cos\ x}{sin\ x}$

⇩

Assíntotas

$x = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

Imagem

$Im(f) = \mathbb{R}$

Período

$P(f) = \pi$

1º quadrante:

- ✓ Função positiva.
- ✓ Função decrescente.

2º quadrante:

- ✓ Função negativa.
- ✓ Função decrescente.

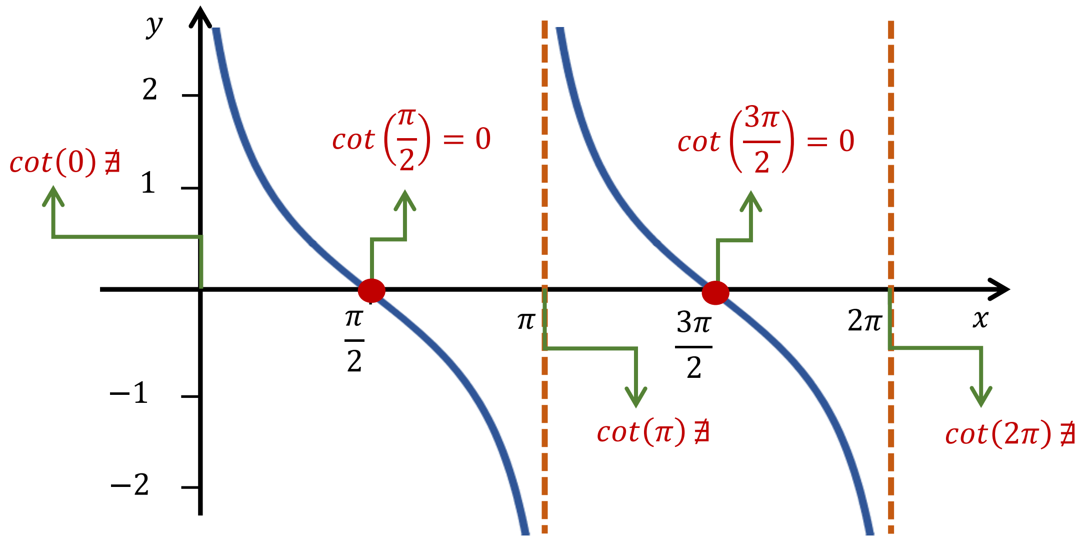
3º quadrante:

- ✓ Função positiva.
- ✓ Função decrescente.

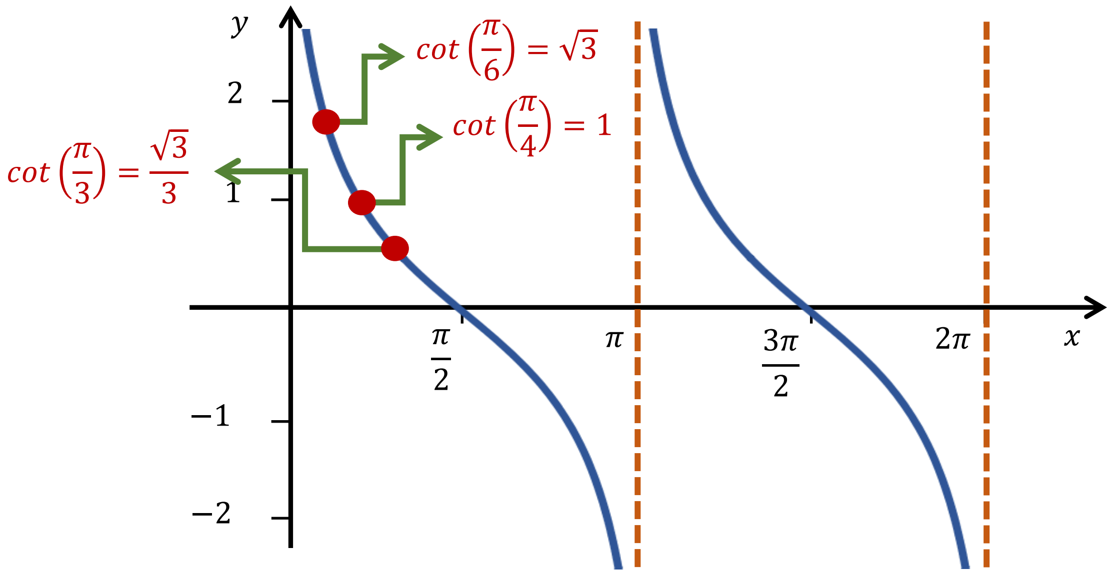
4º quadrante:

- ✓ Função negativa.
- ✓ Função decrescente.

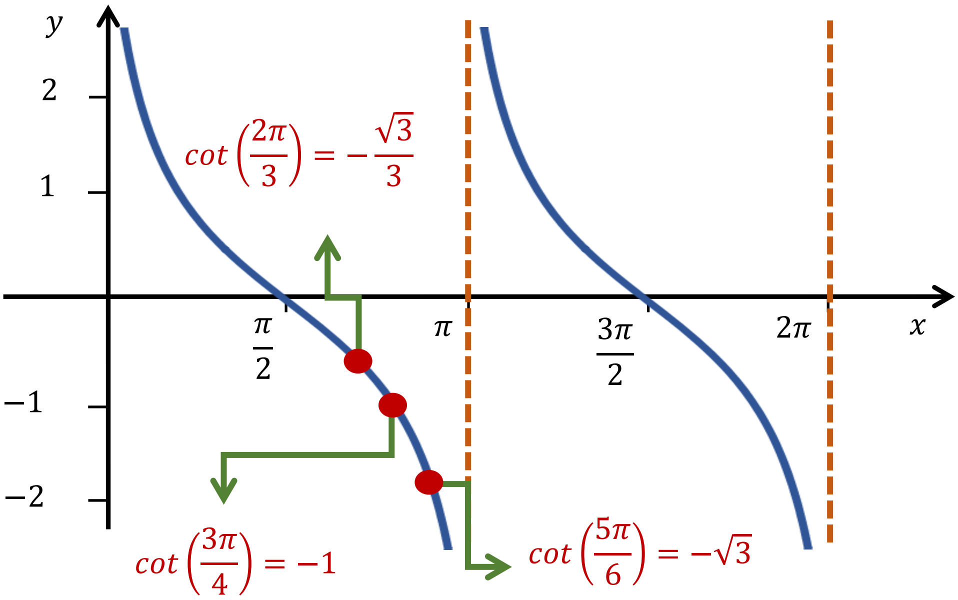
15.6 Função Cotangente



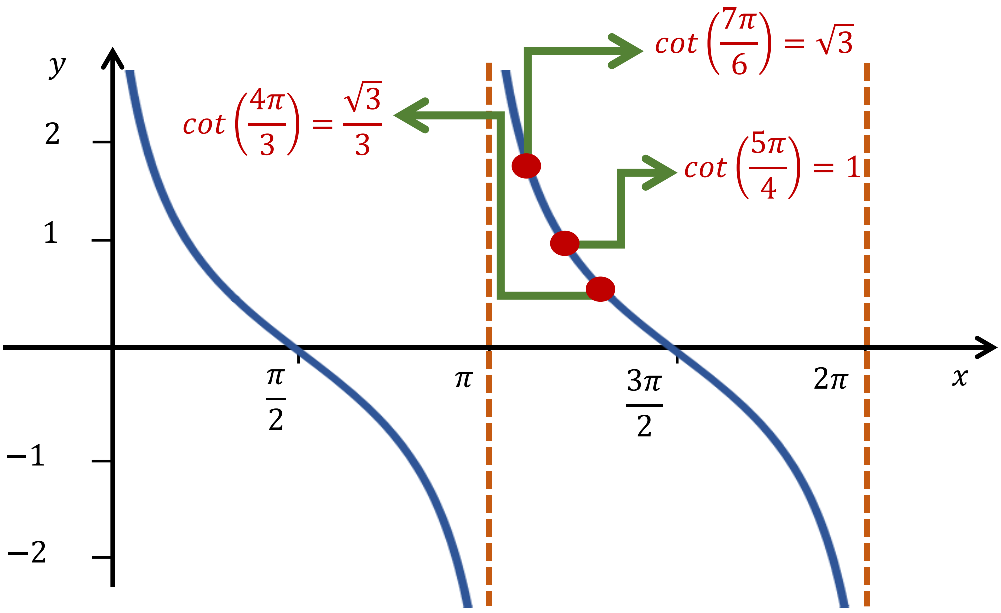
Função Cotangente: primeiro quadrante



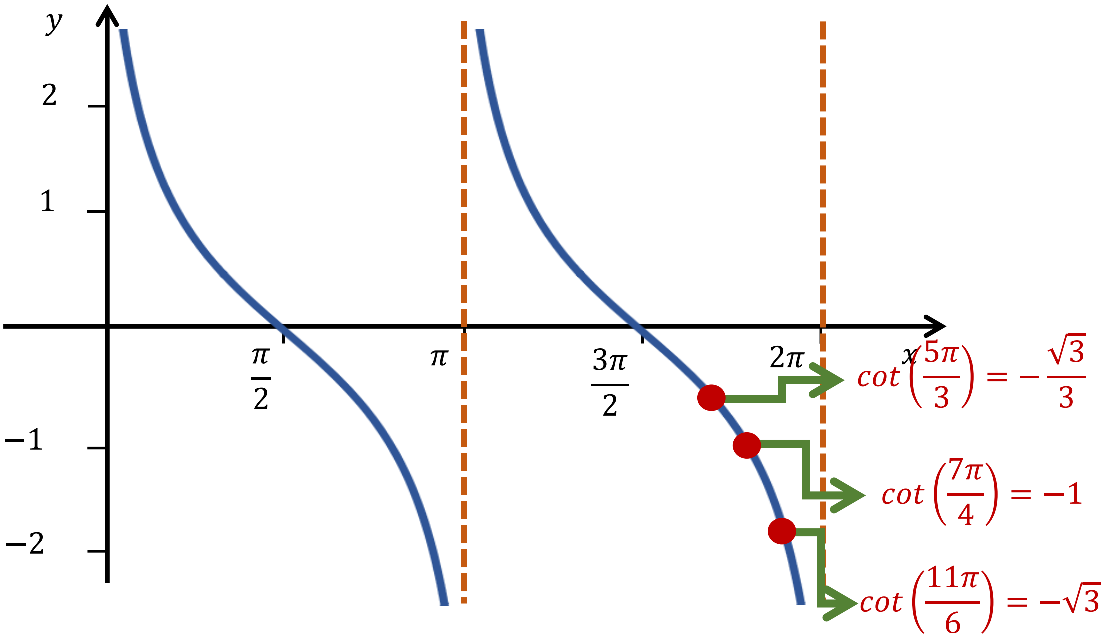
Função Cotangente: segundo quadrante



Função Cotangente: terceiro quadrante

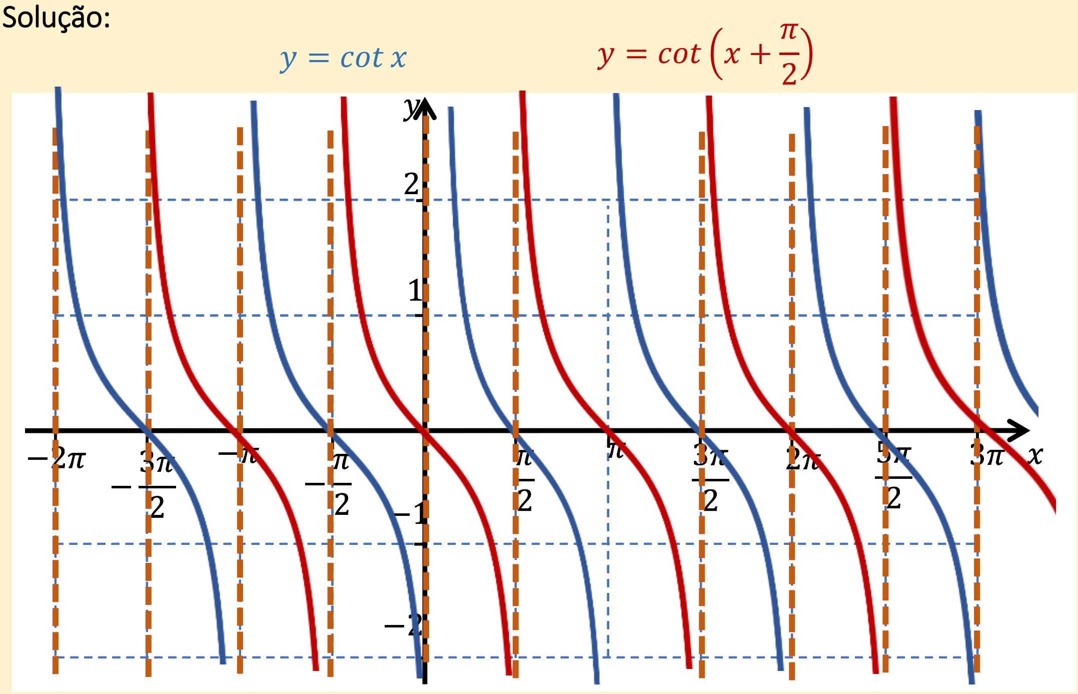


Função Cotangente: quarto quadrante



Exemplo: Esboce o gráfico, determine o domínio, a imagem e o período e as assíntotas da função $f(x) = \cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Solução:



15.7 Exercícios Propostos

1) Esboce o gráfico das funções trigonométricas, e determine o período (T), o domínio e imagem das funções:

(a) $y = \tan(2x) + 1$

(b) $y = 2\tan(3x)$

(c) $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

(d) $y = \frac{1}{2}\cot(x - \pi)$

15.8 Respostas

Exercício 1:

$T = \frac{\pi}{2}$ $\quad D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\quad Im(f) = \mathbb{R}$

$T = \frac{\pi}{3}$ $\quad D(f) = \left\{x \in R \middle| x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\quad Im(f) = \mathbb{R}$

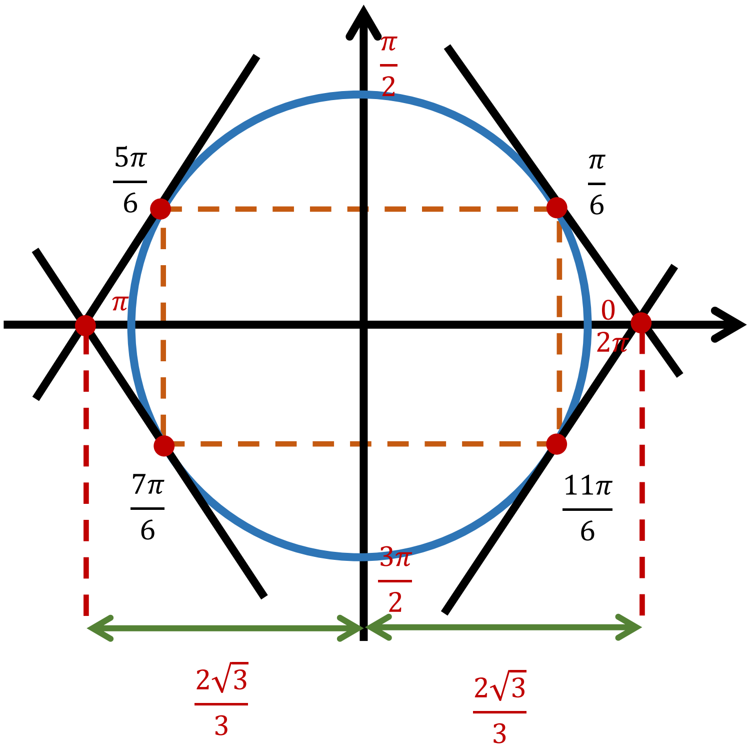
$T = \pi$ $\quad D(f) = \left\{x \in R \middle| x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\quad Im(f) = \mathbb{R}$

$T = \pi$ $\quad D(f) = \{x \in R | x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ $\quad Im(f) = \mathbb{R}$

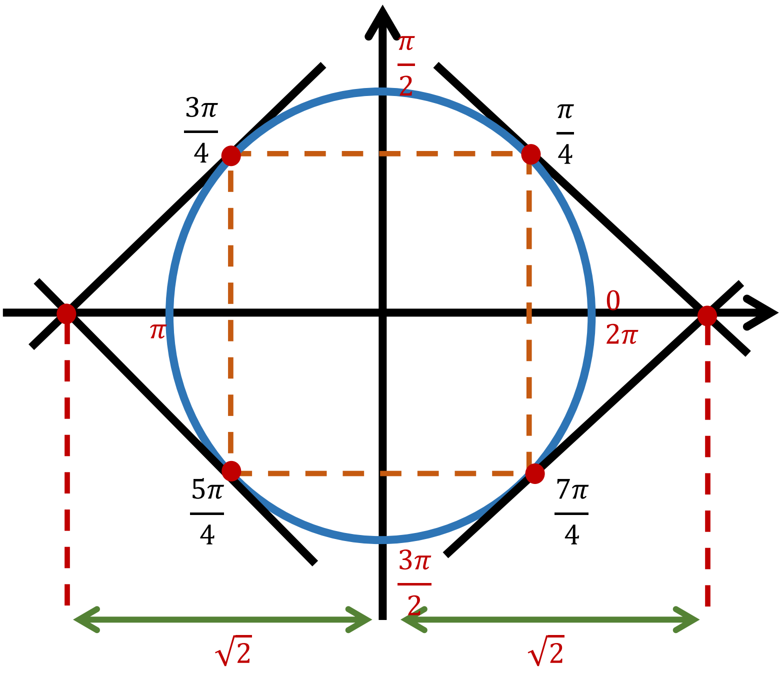
16. Aula 4

16.1 Secante no Ciclo Trigonométrico

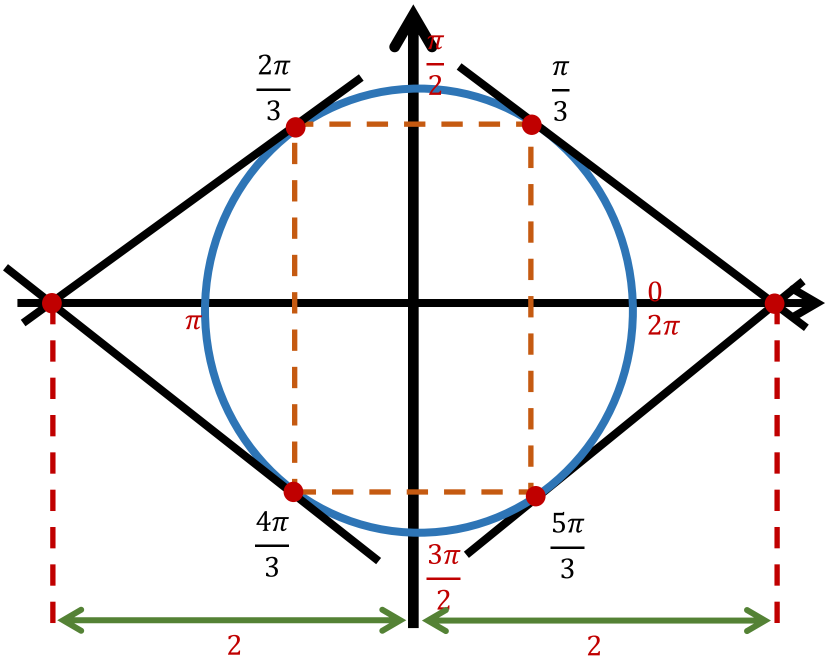
Arco $\frac{\pi}{6}$	Secante
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$



Arco $\frac{\pi}{4}$	Secante
$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$-\sqrt{2}$
$\frac{5\pi}{4}$	$-\sqrt{2}$
$\frac{7\pi}{4}$	$\sqrt{2}$



Arco $\frac{\pi}{3}$	Secante
$\frac{\pi}{3}$	2
$\frac{2\pi}{3}$	-2
$\frac{4\pi}{3}$	-2
$\frac{5\pi}{3}$	2

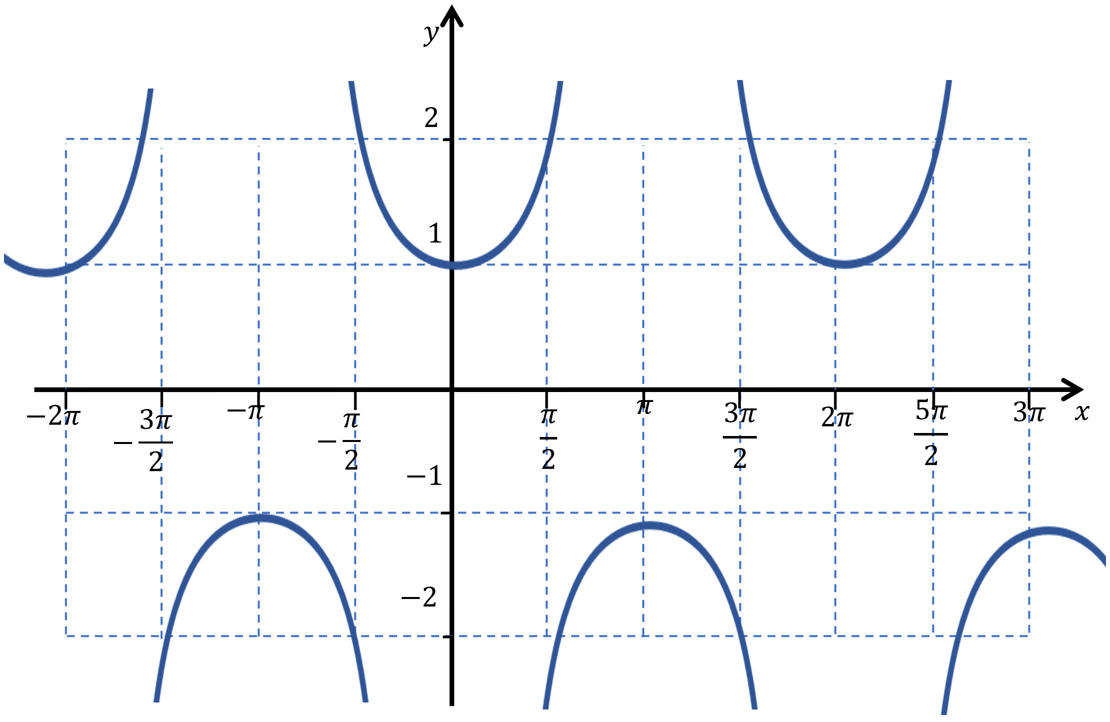


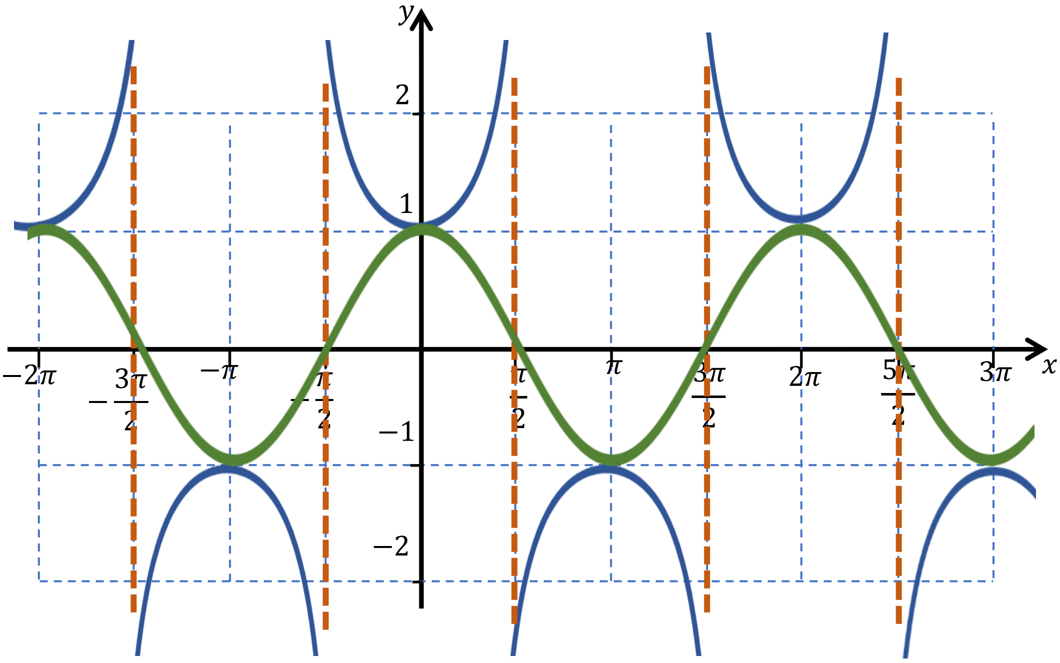
16.2 Função Secante

Definição: A função f dada por $f(x) = \sec x$ é chamada de **função secante.**

Gráfico da função secante

$y = sec\, x$





Domínio

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Lembre que:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

⇩

Assíntotas

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$$

Imagem

$$Im(f) = \mathbb{R} - (-1,1)$$

Período

$$P(f) = 2\pi$$

1º quadrante:

- ✓ Função positiva.
- ✓ Função crescente.

2º quadrante:

- ✓ Função negativa.
- ✓ Função crescente.

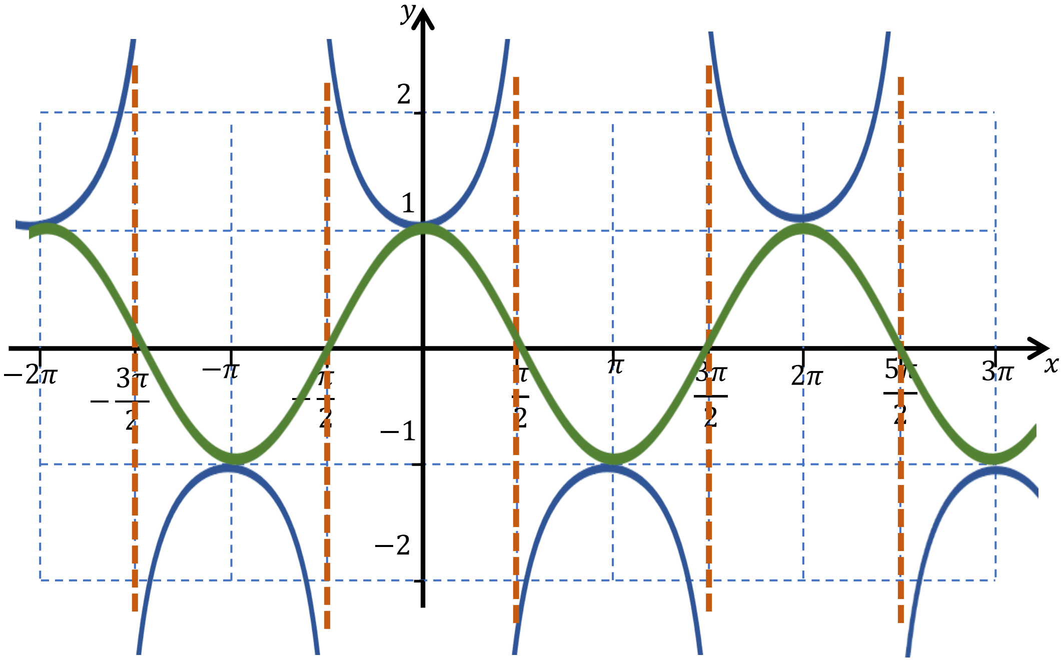
3º quadrante:

- ✓ Função negativa.
- ✓ Função decrescente.

4º quadrante:

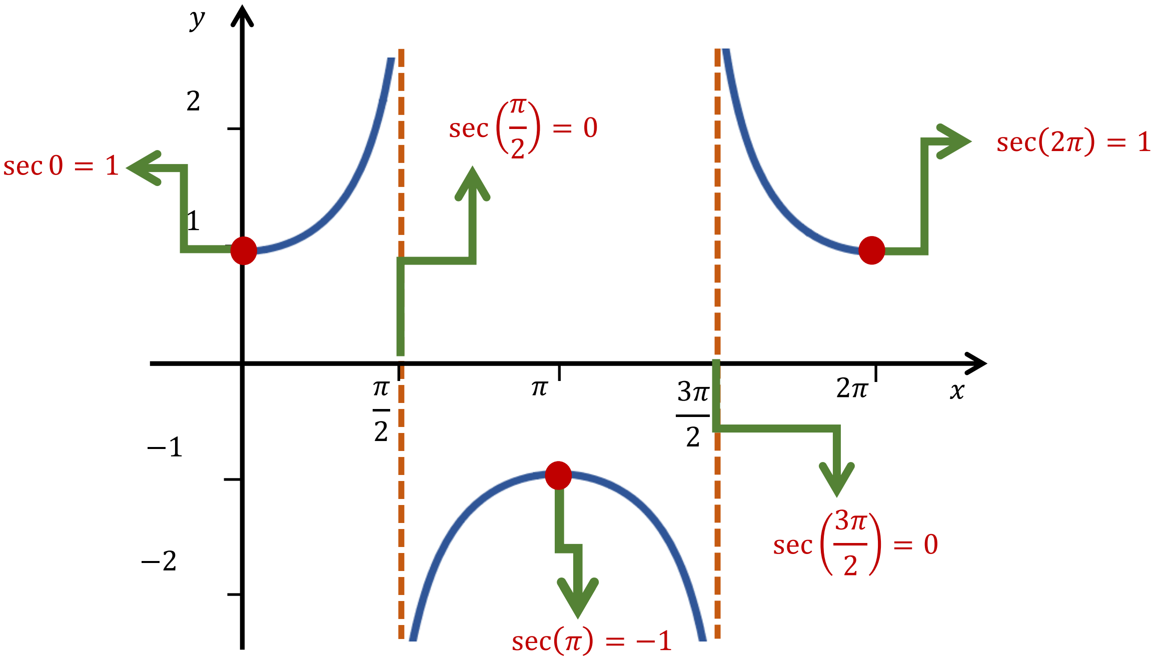
- ✓ Função positiva.
- ✓ Função decrescente.

Relação gráfica entre as funções secante e cosseno:

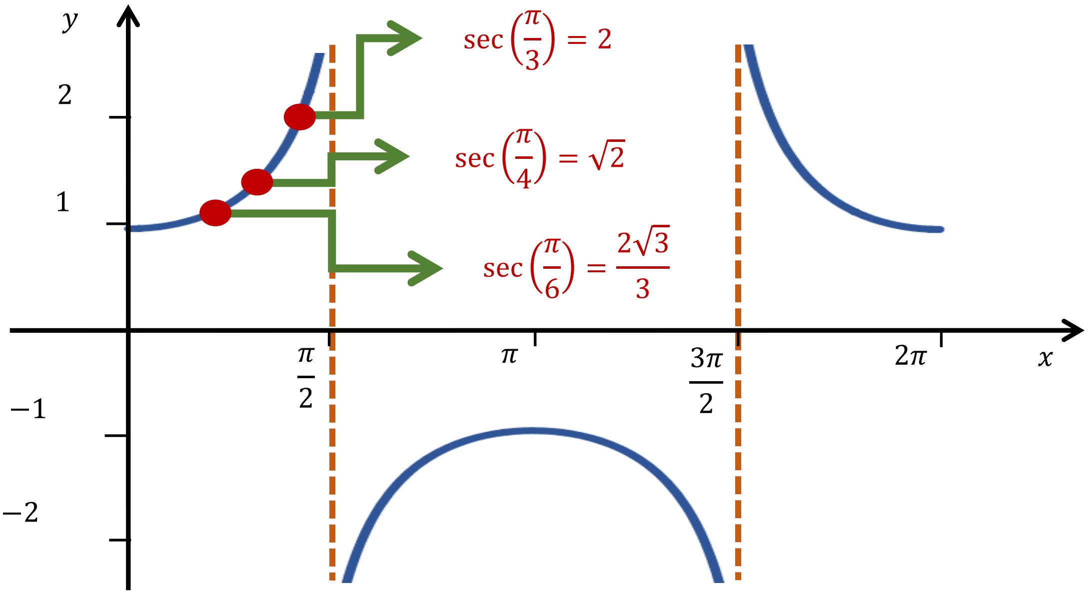


$$f(x) = sec\,x = \frac{1}{cos\,x}$$

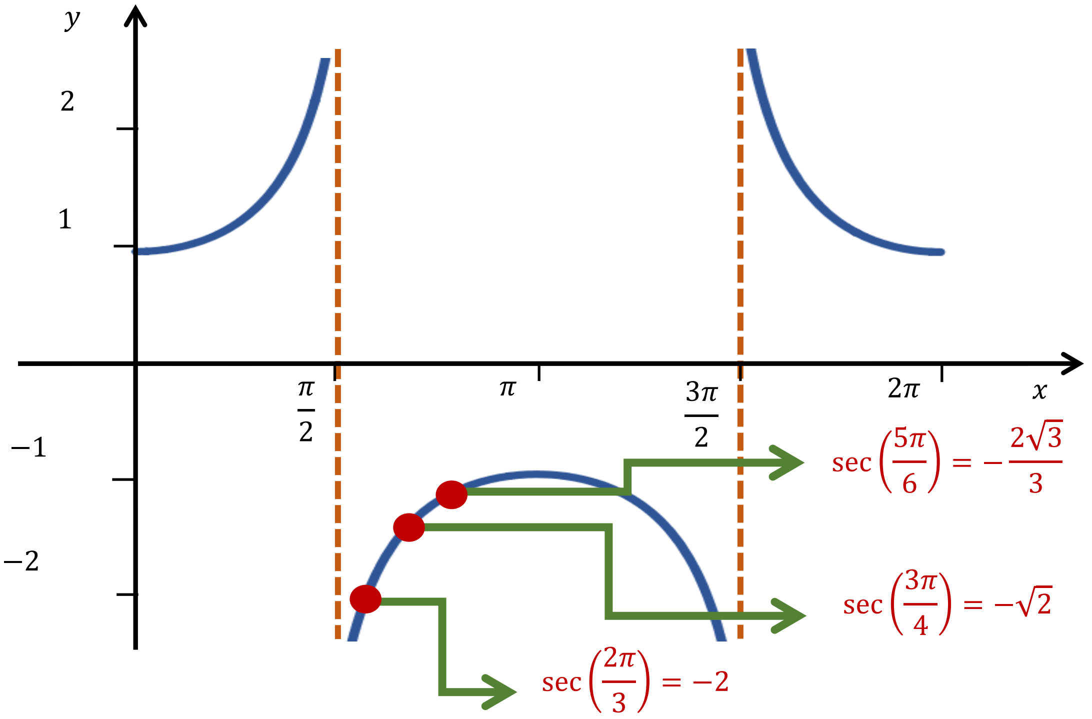
- ✓ Onde o cosseno cresce, a secante decresce, e vice-versa;
- ✓ Onde o cosseno se anula, a secante não está definida;
- ✓ O sinal da secante acompanha o sinal do cosseno, em cada quadrante.



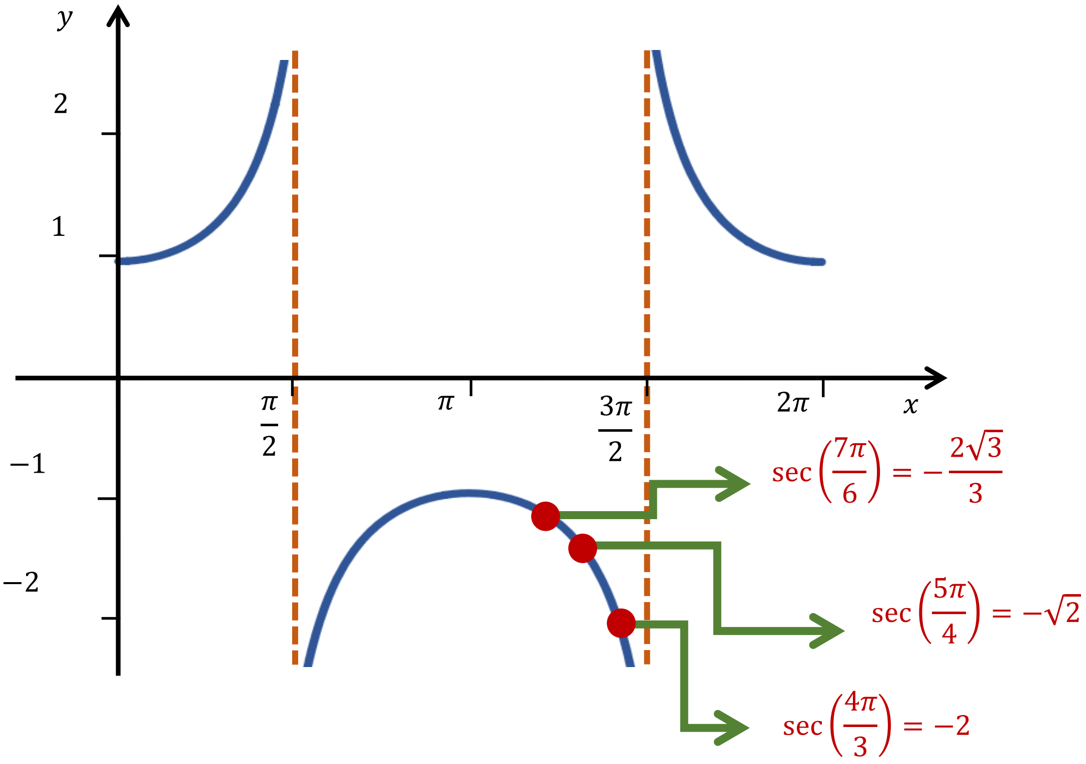
Função Secante: primeiro quadrante



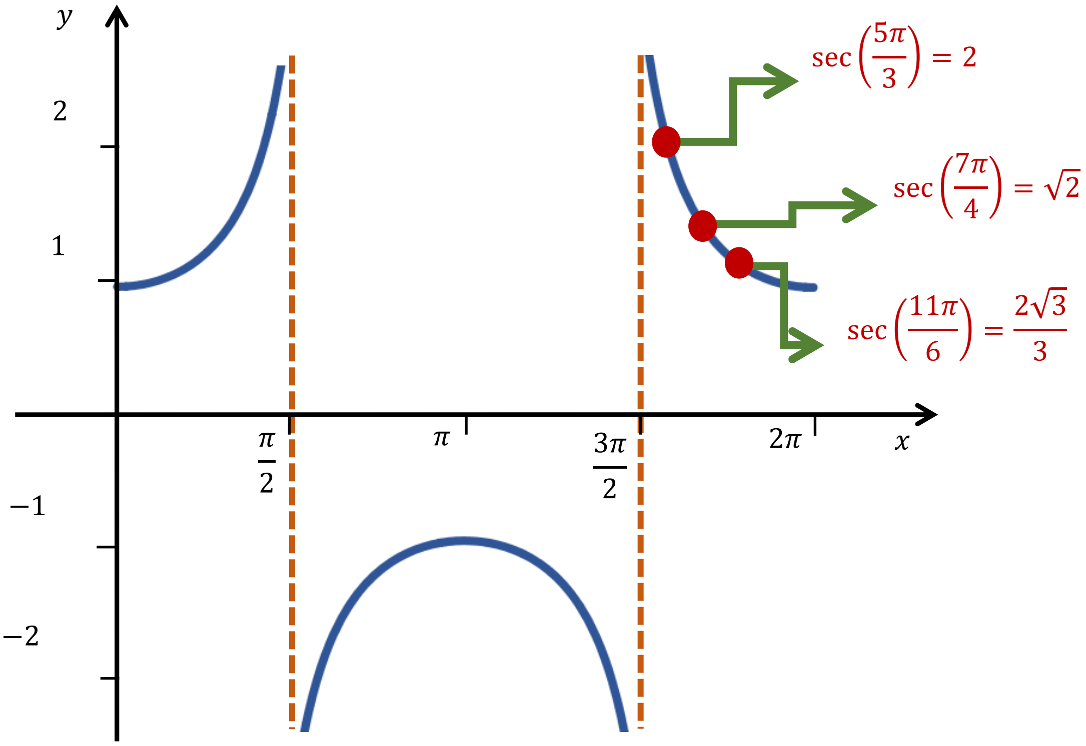
Função Secante: segundo quadrante



Função Secante: terceiro quadrante



Função Secante: quarto quadrante



Exemplo: Esboce o gráfico, determine o domínio, a imagem e o período e as assíntotas da função $f(x) = -\sec\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Solução:

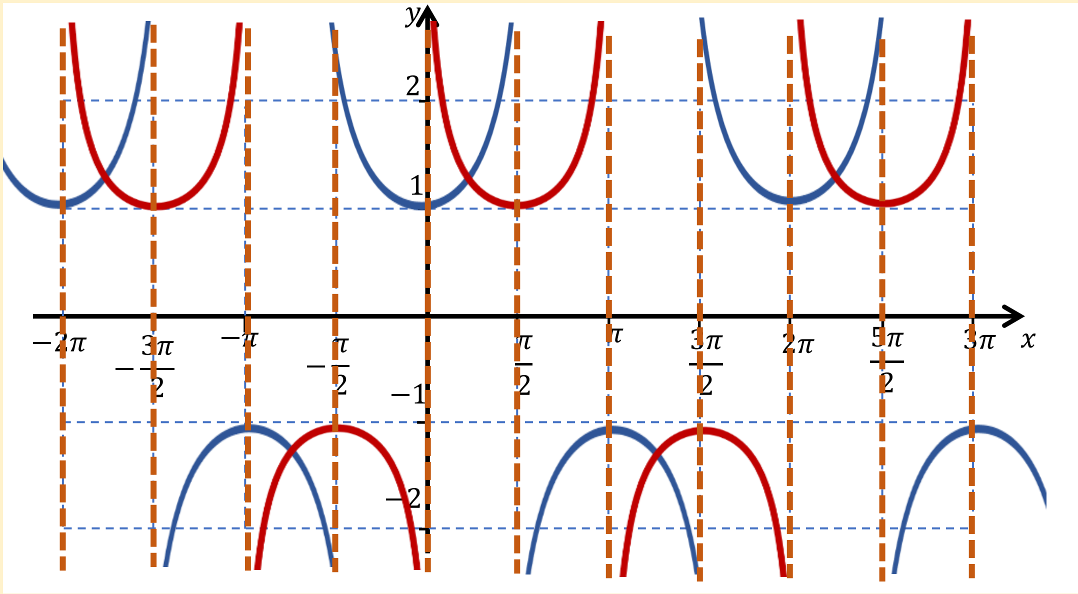
$Im(f) = \mathbb{R} - (-1,\ 1)$

$y = \sec x$

$y = -\sec\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

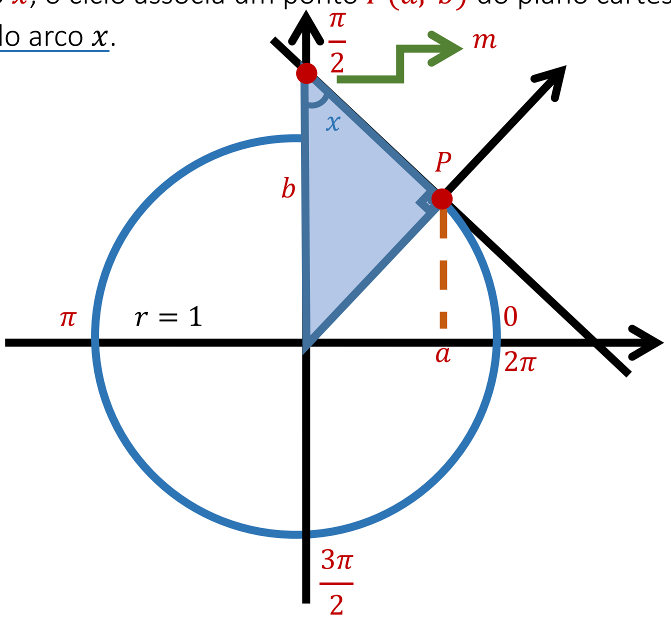
$P(f) = 2\pi$

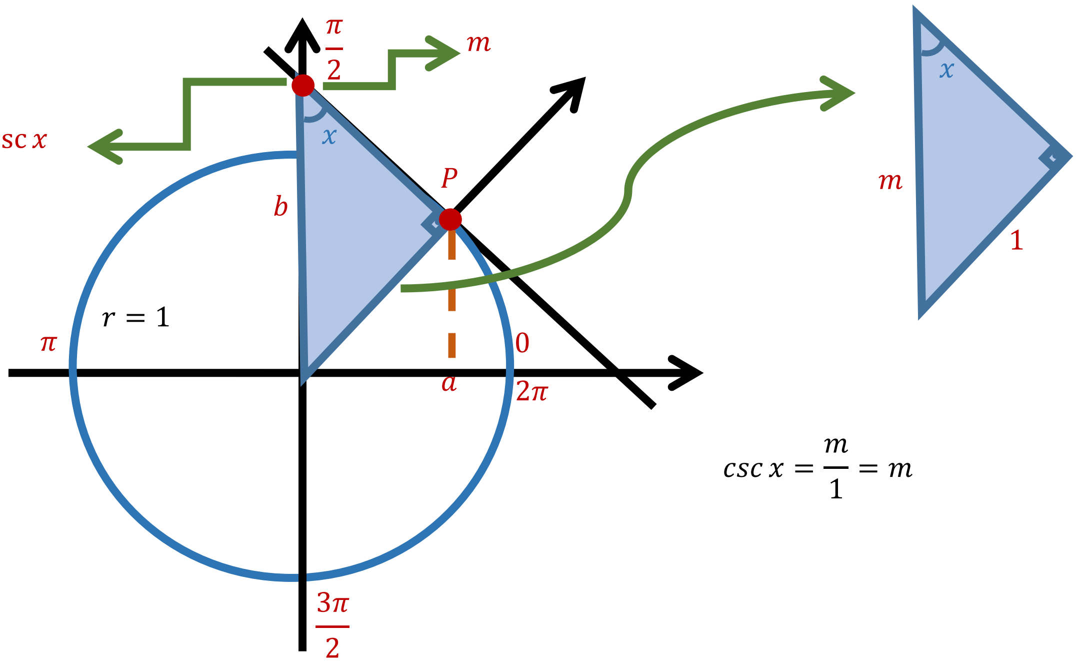


Cossecante no Ciclo Trigonométrico

Lembrando...

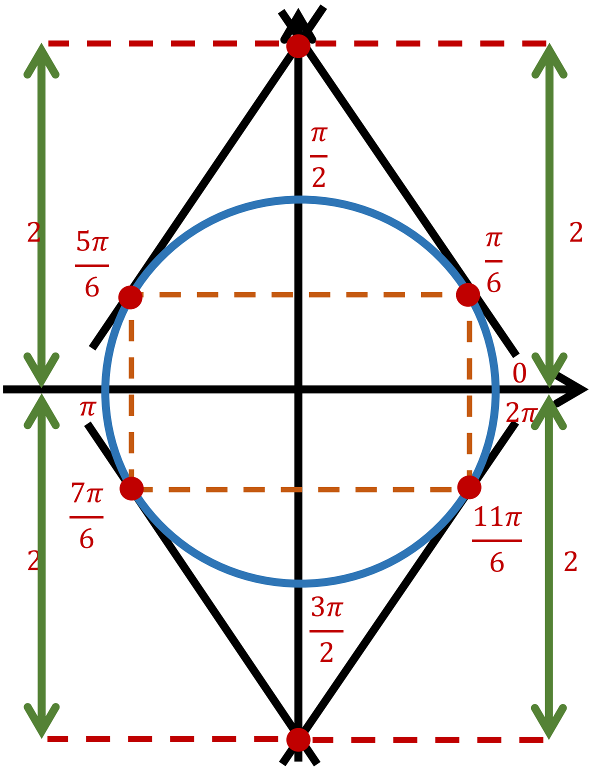
Para cada arco x, o ciclo associa um ponto $P(a,\ b)$ do plano cartesiano, chamado de extremidade do arco x.



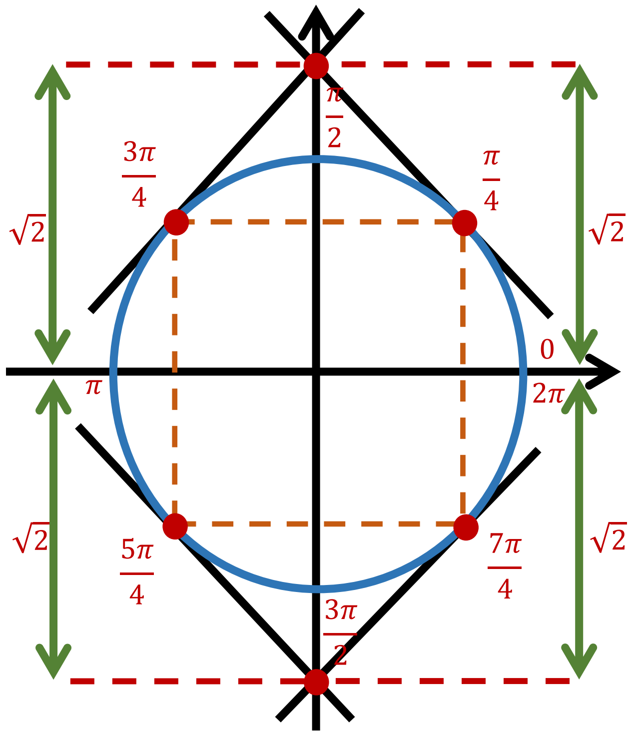


$$csc\, x = \frac{m}{1} = m$$

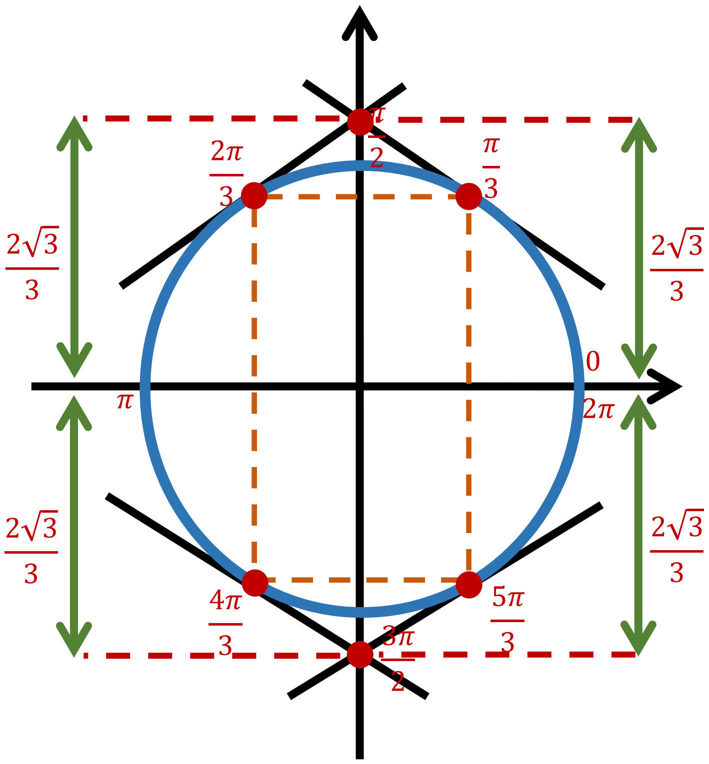
Arco $\frac{\pi}{6}$	Cossecante
$\frac{\pi}{6}$	**2**
$\frac{5\pi}{6}$	**2**
$\frac{7\pi}{6}$	$-$**2**
$\frac{11\pi}{6}$	$-$**2**



Arco $\frac{\pi}{4}$	Cossecante
$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\sqrt{2}$
$\frac{5\pi}{4}$	$-\sqrt{2}$
$\frac{7\pi}{4}$	$-\sqrt{2}$



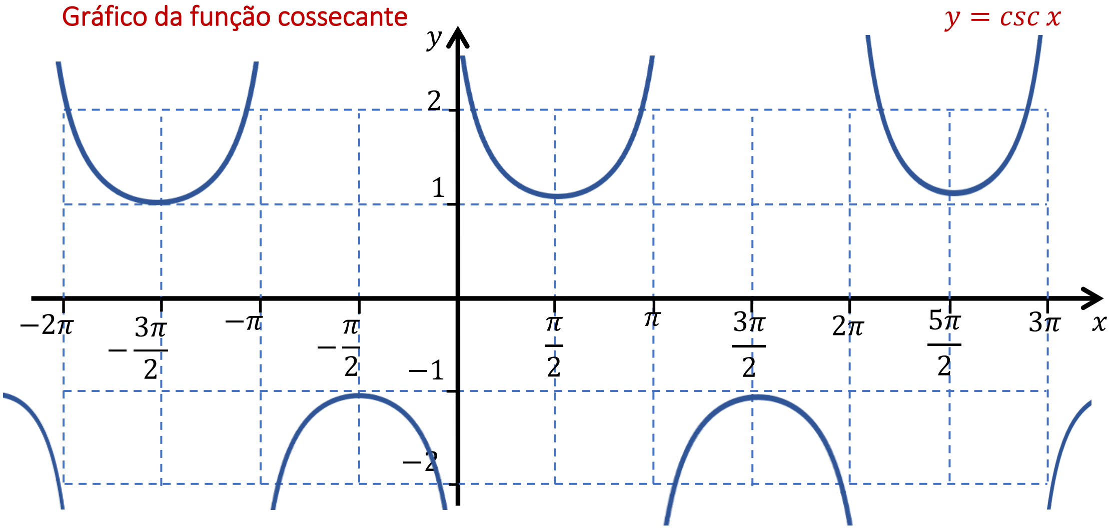
Arco $\frac{\pi}{3}$	Cossecante
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$



16.3 Função Cossecante

Definição: A função f dada por $f(x) = \csc x$ é chamada de **função cossecante.**

Gráfico da função cossecante



Domínio

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$$

Lembre que:

$$csc\, x = \frac{1}{sin\, x}$$

⇩

Assíntota

$$x = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$$

Imagem

$$Im(f) = \mathbb{R} - (-1{,}1)$$

Período

$$P(f) = 2\pi$$

1º quadrante:

- ✓ Função positiva.
- ✓ Função decrescente.

2º quadrante:

- ✓ Função positiva.
- ✓ Função crescente.

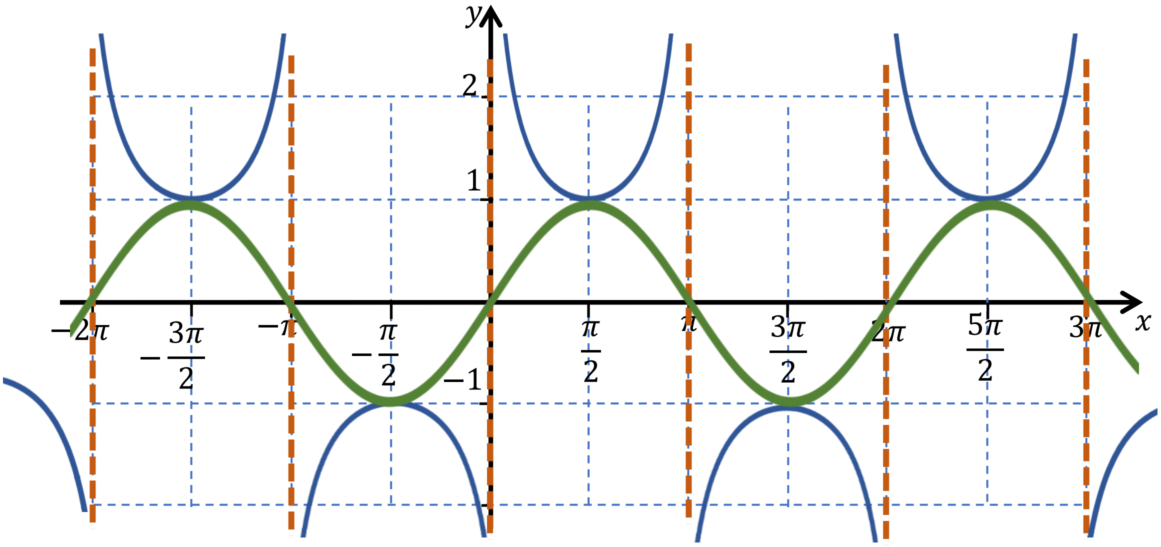
3º quadrante:

- ✓ Função negativa.
- ✓ Função crescente.

4º quadrante:

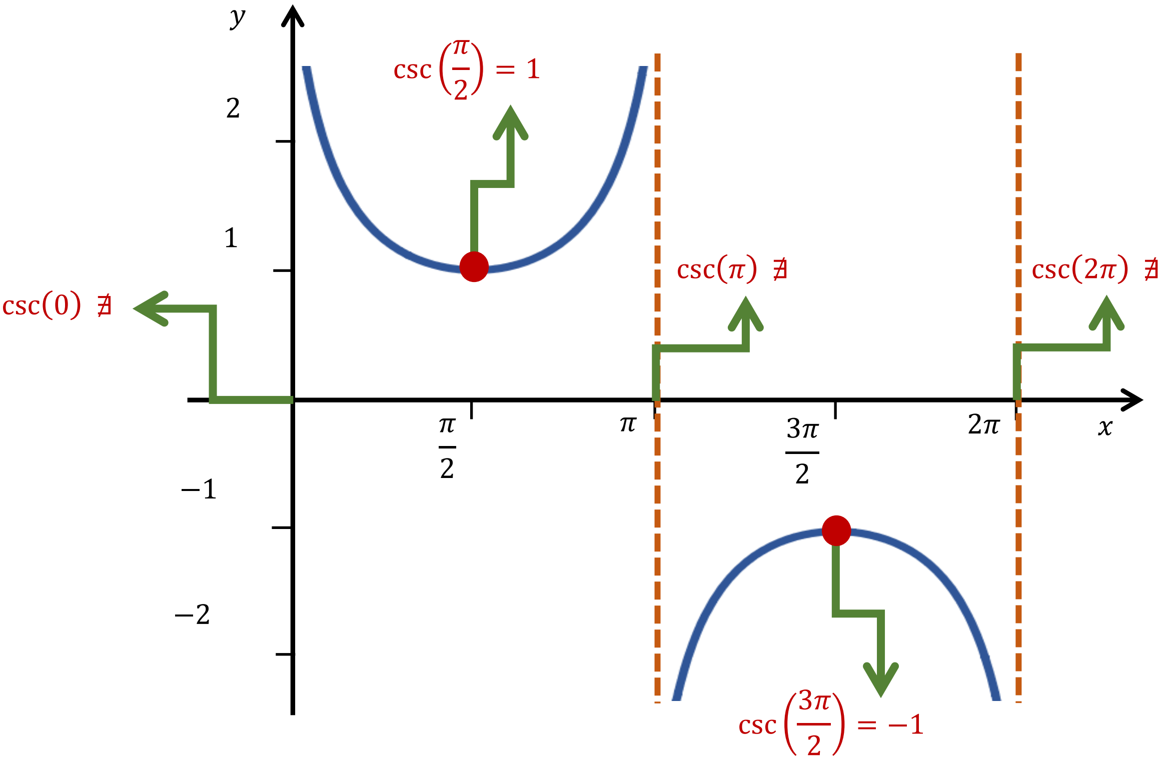
- ✓ Função negativa.
- ✓ Função decrescente.

Relação gráfica entre as funções cossecante e seno:

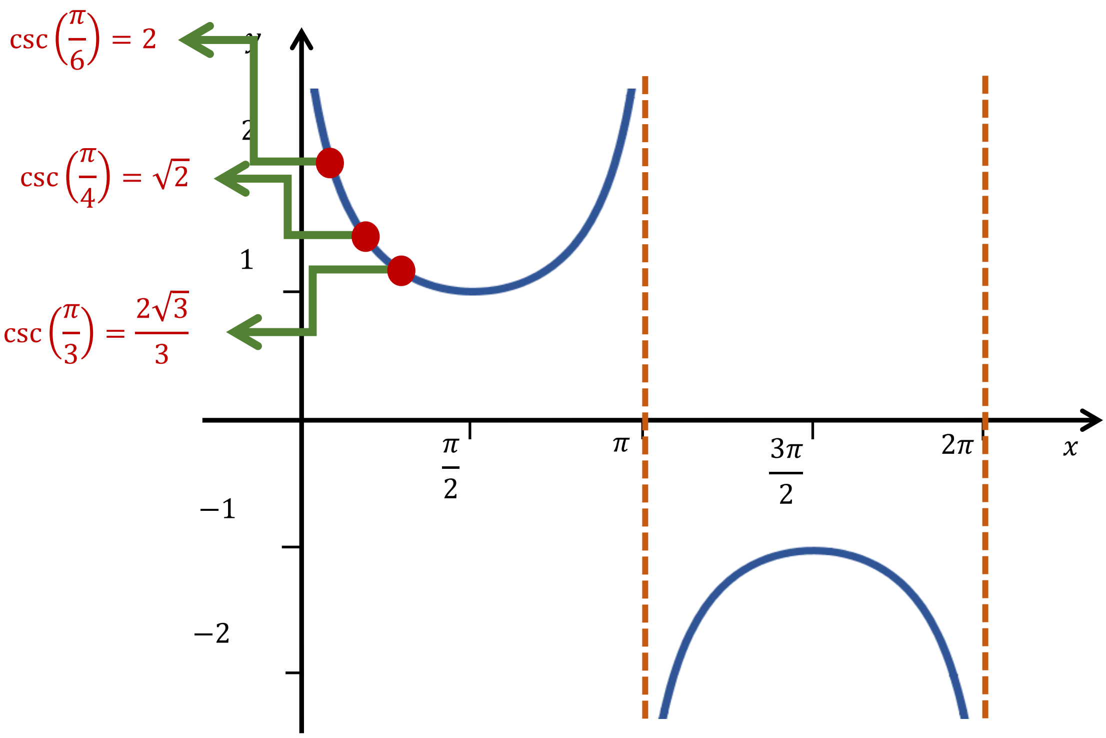


$$f(x) = csc\, x = \frac{1}{sin\, x}$$

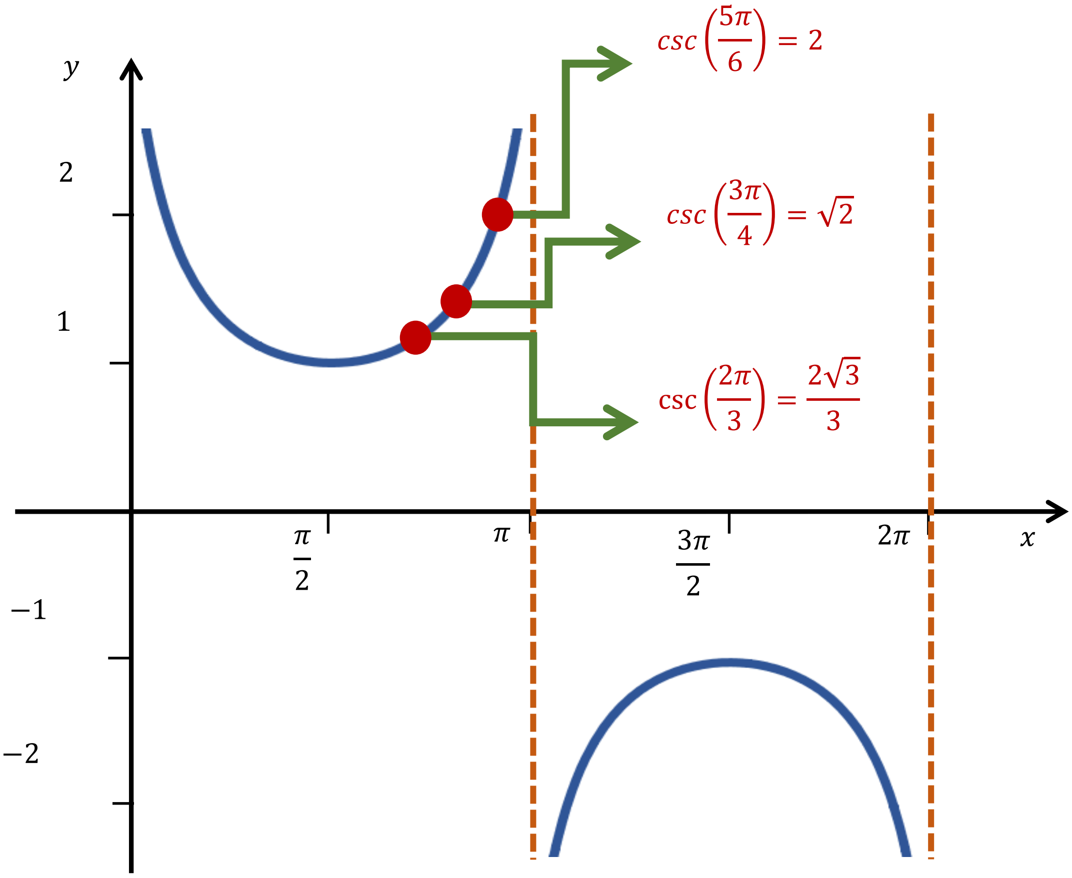
- ✓ Onde o seno cresce, a cossecante decresce, e vice-versa;
- ✓ Onde o seno se anula, a cossecante não está definida;
- ✓ O sinal da cossecante acompanha o sinal do seno, em cada quadrante.



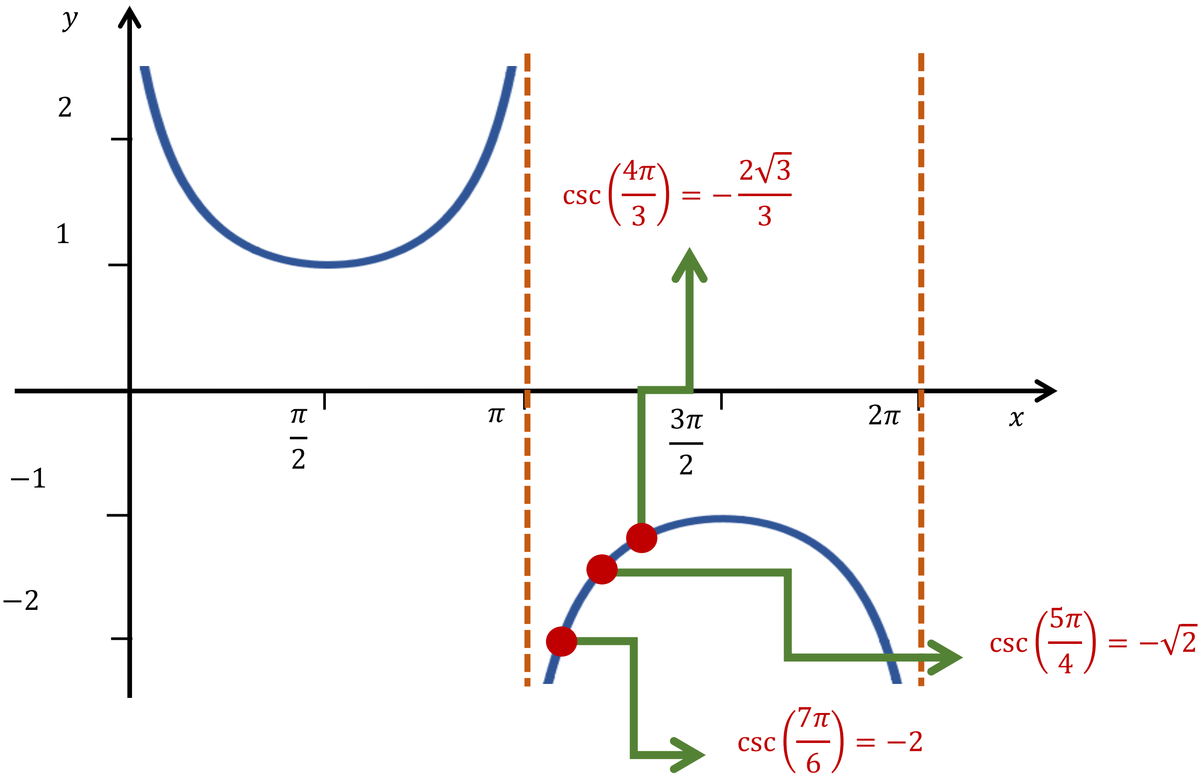
Função Cossecante: **primeiro quadrante**



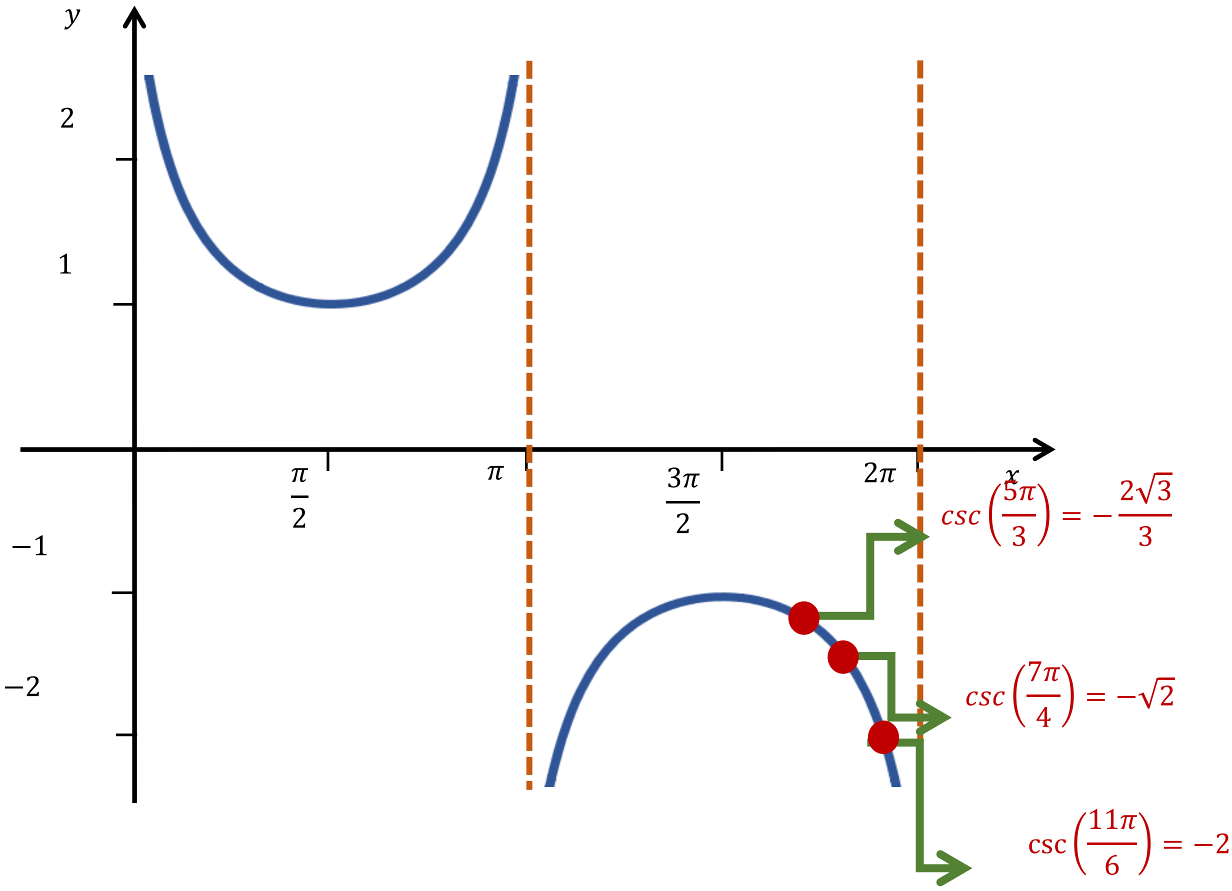
Função Cossecante: **segundo quadrante**



Função Cossecante: **terceiro quadrante**



Função Cossecante: **quarto quadrante**



Exemplo: Esboce o gráfico, determine o domínio, a imagem e o período e as assíntotas da função $f(x) = \csc\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

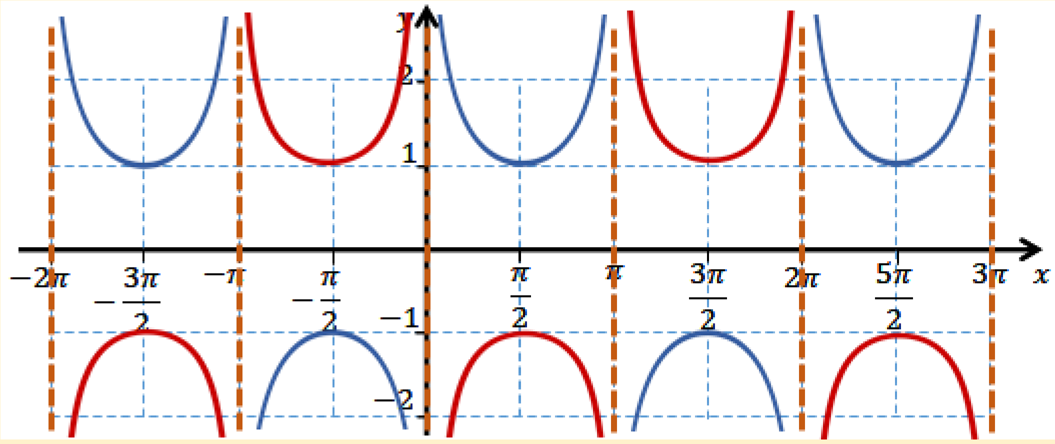
$y = \csc x$ $\qquad$ $y = cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Solução:

$Im(f) = \mathbb{R} - (-1, 1)$

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

$P(f) = 2\pi$



16.4 Exercícios Propostos

1) Esboce o gráfico das funções trigonométricas, e determine o período (T), o domínio e imagem das funções:

(a) $y = \sec(2x)$

(b) $y = 2\sec(3x)$

(c) $y = -\sec\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

(d) $y = 3\csc(3x)$

(e) $y = -\csc(2\pi x)$

(f) $y = 2 - \csc(x)$

16.5 Respostas

Exercício 1:

a) $T = \pi$ $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$ $Im(f) = \mathbb{R} - (-1,1)$

b) $T = \frac{2\pi}{3}$ $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}\right\}$ $Im(f) = \mathbb{R} - (-2,2)$

c) $T = 2\pi$ $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ $Im(f) = \mathbb{R} - (-1,1)$

d) $T = \frac{2\pi}{3}$ $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq \frac{k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}\right\}$ $Im(f) = \mathbb{R} - (-3,3)$

e) $T = 1$ $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq \frac{k}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$ $Im(f) = \mathbb{R} - (-1,1)$

f) $T = 2\pi$ $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ $Im(f) = \mathbb{R} - (1,3)$

17. Aula 5

17.1 Funções Exponenciais

Definição: Dado $a \in \mathbb{R}$ tal que $a > 0$ e $a \neq 1$, função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = a^x$$

é chamada de **função exponencial de base a.**

Exemplos

1) $y = 2^x$ Função exponencial de base 2.

2) $y = 3^x$ Função exponencial de base 3.

3) $y = 10^x$ Função exponencial de base 10.

4) $y = \pi^x$ Função exponencial de base π.

Número Pi, seu valor aproximado com duas casas decimais é $3{,}14$.

5) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ Função exponencial de base $\frac{1}{2}$.

6) $y = e^x$ Função exponencial de base e.

Número de Euler, seu valor aproximado com três casas decimais é $2{,}718$.

17.2 Gráfico

Exemplo: Esboce o gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = 2^x}$.

Obs: função crescente.

Solução: Destacando alguns pontos, tem-se:

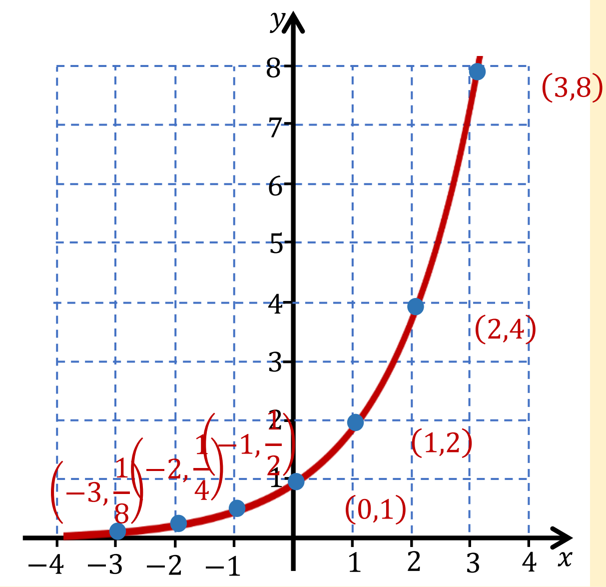
$f(-3) = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

$f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

$f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$

$f(0) = 2^0 = 1$ $\quad f(2) = 2^2 = 4$

$f(1) = 2^1 = 2$ $\quad f(3) = 2^3 = 8$



Exemplo: Esboce o gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x}$.

Solução: Destacando alguns pontos, tem-se:

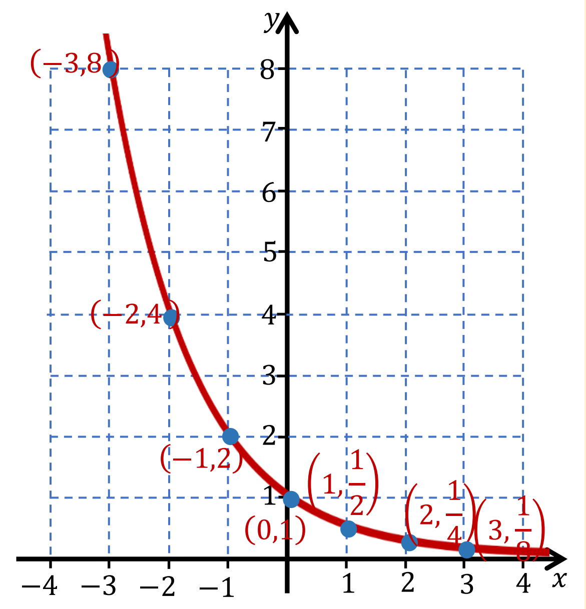
$f(-3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$

$f(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$

$f(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2^1 = 2$

$f(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ $\quad f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$f(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$ $\quad f(3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$



17.3 Gráfico, Domínio e Imagem

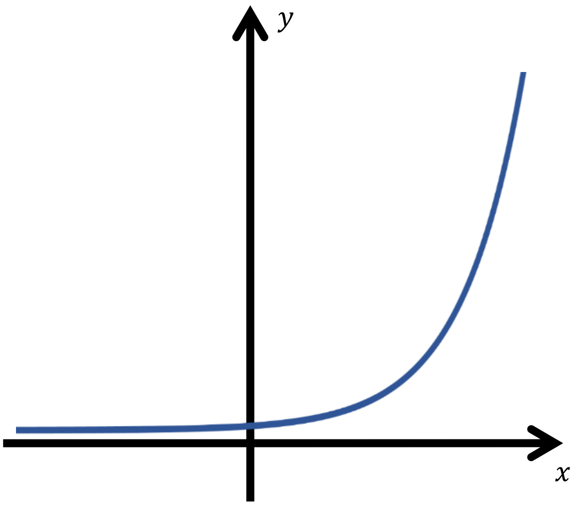
O gráfico de uma função exponencial pode assumir dois formatos distintos:

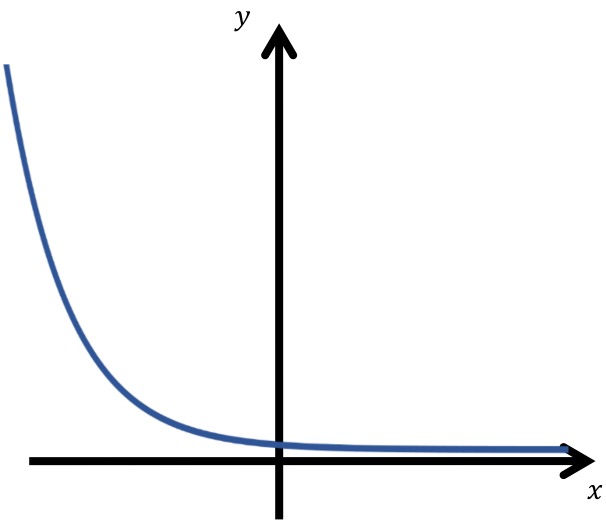
Primeiro caso: $\boldsymbol{a > 1}$

Função Crescente

$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \mathbb{R}_+^*.$





Segundo caso: $0 < a < 1$

Função Decrescente

$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \mathbb{R}_+^*.$

Em ambos os casos (crescente ou decrescente), a reta $y = 0$ é chamada de **assíntota horizontal** do gráfico da função.

Observação:

Para esboçar o gráfico de uma função $f(x) = a^x$, basta:

i. identificar o comportamento do gráfico (crescente ou decrescente)
ii. lembrar que os pontos $(0,1)$ e $(1, a)$ sempre pertencem ao gráfico destas funções, pois:

$$f(0) = a^0 = 1 \implies (0,1) \in f$$

$$f(1) = a^1 = a \implies (1, a) \in f$$

Exemplo: Esboce os gráficos das funções:

$a) f(x) = 3^x$ $b)\ f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ $c) f(x) = 2^x + 1$ $d) f(x) = 4^{x-2}$

Solução:

a) $f(x) = 3^x$

$3 > 1 \quad \Longrightarrow f(x)\ é\ crescente$

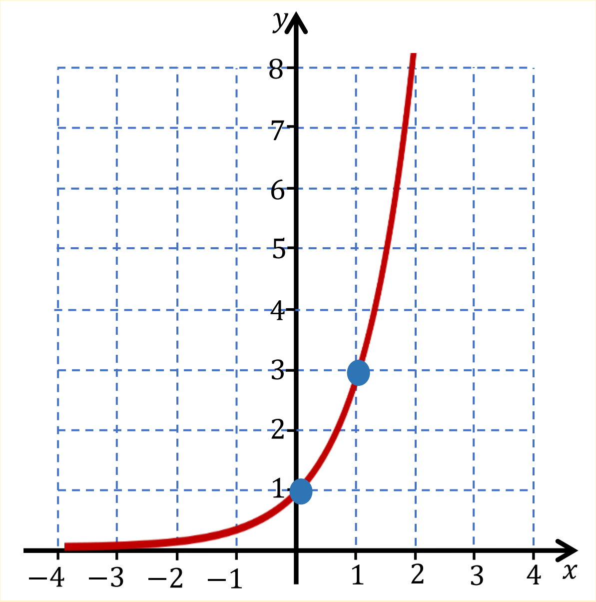
Definindo os pontos:

$(0\ ,\ 1)\ e\ (1\ ,\ a)$

Temos,

$(0\ ,\ 1)\ e\ (1\ ,\ 3)$

$D(f) = \mathbb{R}$ $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$



Solução:

b)$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

$0 < \frac{1}{4} < 1 \quad \Longrightarrow f(x)\ é\ decrescente$

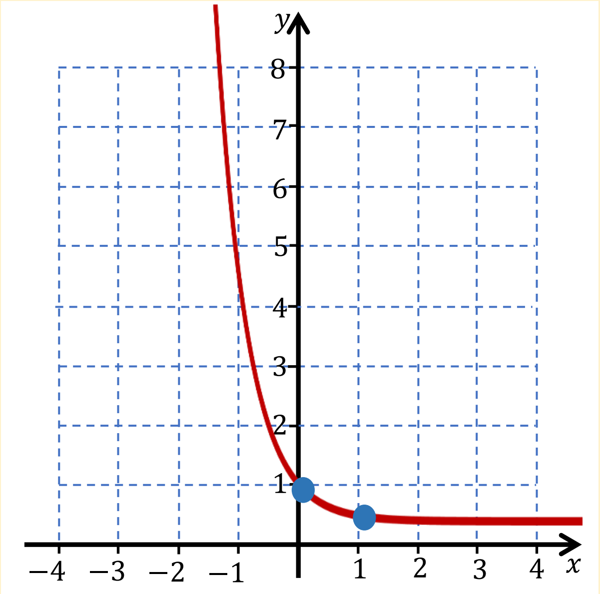
Definindo os pontos:

$(0\ ,\ 1)\ e\ (1\ ,\ a)$

Temos

$(0\ ,\ 1)\ e\left(1\ ,\frac{1}{4}\right)$

$D(f) = \mathbb{R}$ $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$



Solução:

c)$f(x) = 2^x + 1$

$2 > 1 \quad \Longrightarrow f(x)\ é\ crescente$

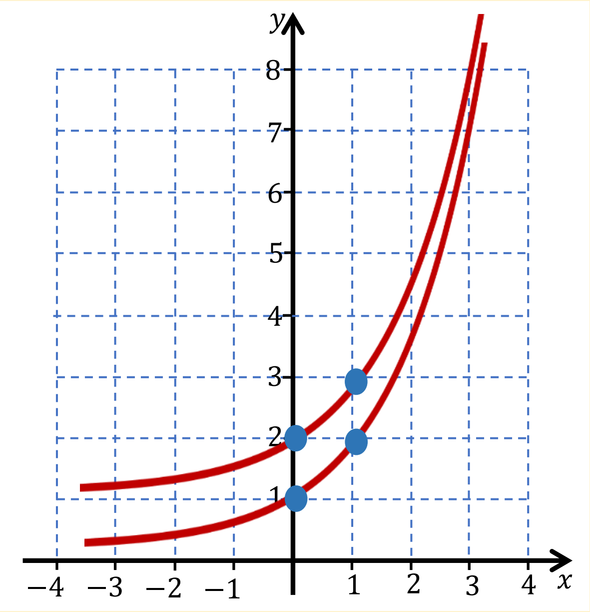
Definindo os pontos:

$(0\ ,\ 1)\ e\ (1\ ,\ a)$

Temos,

$(0\ ,\ 1)\ e\ (1\ ,\ 2)$

$D(f) = \mathbb{R}$ $\qquad Im(f) = (1, +\infty)$



Solução:

d)$f(x) = 4^{x-2}$

$4 > 1 \quad \Longrightarrow f(x)\ é\ crescente$

Definindo os pontos:

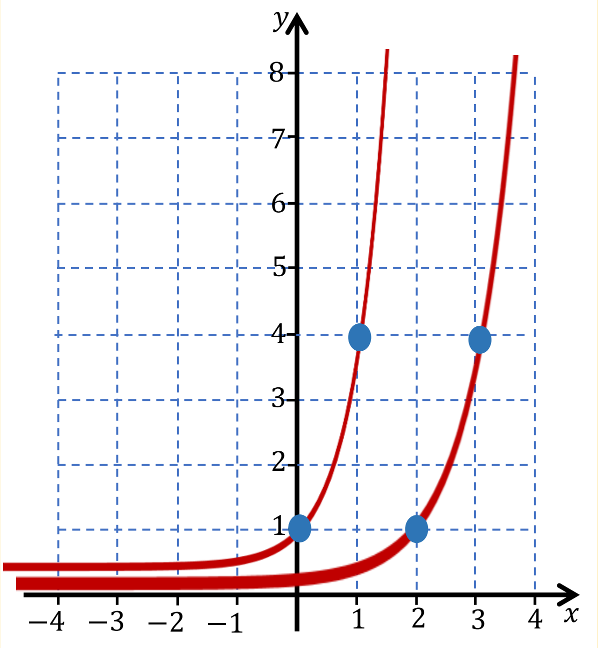
$(0\ ,\ 1)\ e\ (1\ ,\ a)$

Temos

$(0\ ,\ 1)\ e\ (1\ ,\ 4)$

Deslocamos 2 unidades para esquerda!

$D(f) = \mathbb{R}$ $\qquad Im(f) = \mathbb{R}_+^*$



17.4 Exercícios Propostos

1) Em cada caso, esboce o gráfico da função dada e determine o domínio, a imagem e a equação da assíntota horizontal.

(a) $f(x) = 2^x + 2$

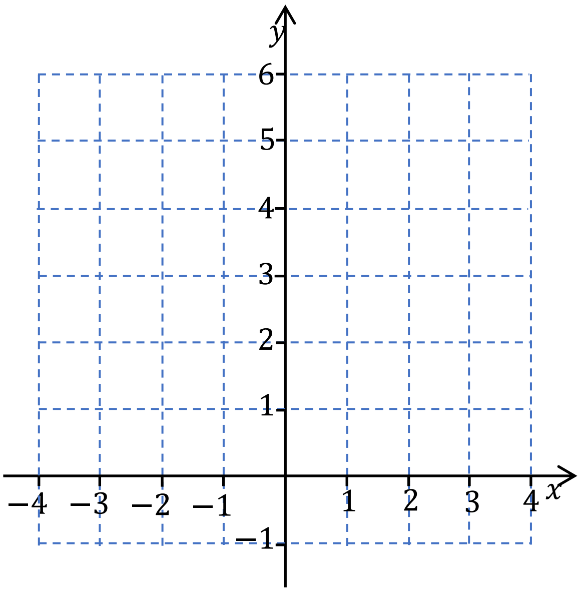
(b) $f(x) = 3^x - 1$

(c) $f(x) = 2^{x-1}$

(d) $f(x) = 4^{x+2}$

(e) $f(x) = -2^x$

(f) $f(x) = 2^{-x}$



2) Em cada caso, determine a composta fog.

(a) $f(x) = 2x + 5$ e $g(x) = 3^x$

(b) $f(x) = 5^x$ e $g(x) = x^2 + 3x$

(c) $f(x) = x^2 - x$ e $g(x) = 2^x$

3) Em cada caso, escreva a função dada como uma composta de duas funções.

a) $f(x) = 3^{x^2-2x+1}$

b) $f(x) = 2^{\sqrt{x}}$

4) A função exponencial é injetora? É sobrejetora? É bijetora? Justifique.

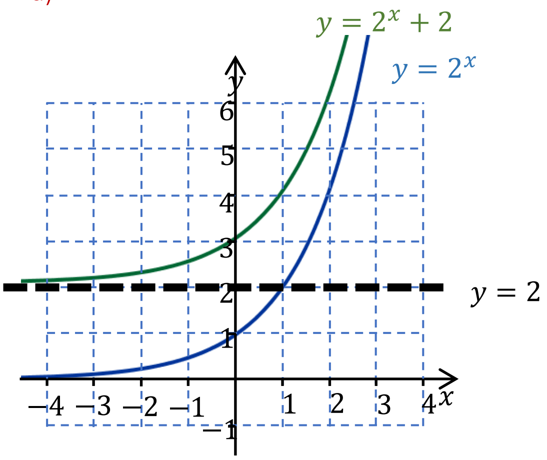
5) Esboce o gráfico das funções inversas das seguintes funções exponenciais:

(a) $f(x) = 2^x$ (b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

17.5 Respostas

Exercício 1:

a)

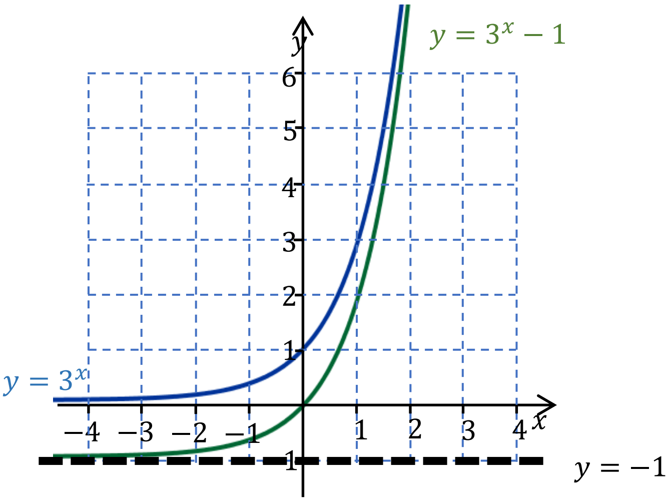


$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = (2, +\infty)$

Assíntota: $y = 2$

b)

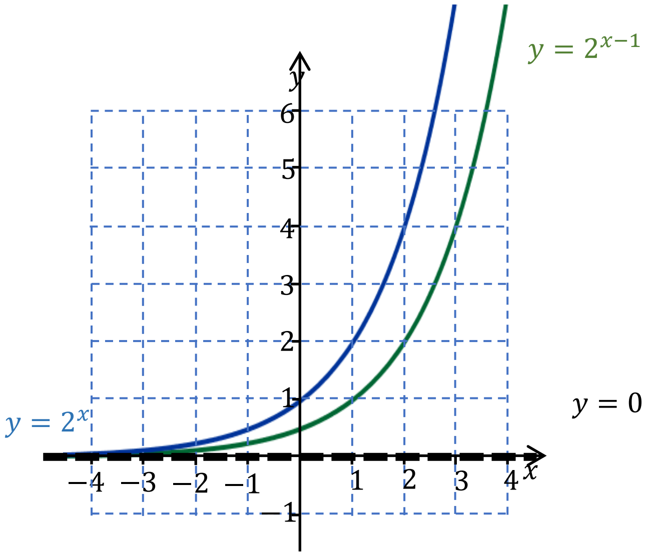


$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = (-1, +\infty)$

Assíntota: $y = -1$

c)

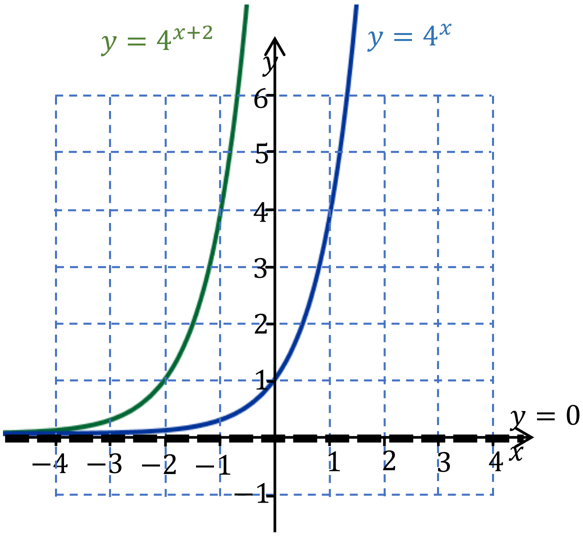


$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \mathbb{R}_+^*$

Assíntota: $y = 0$

d)

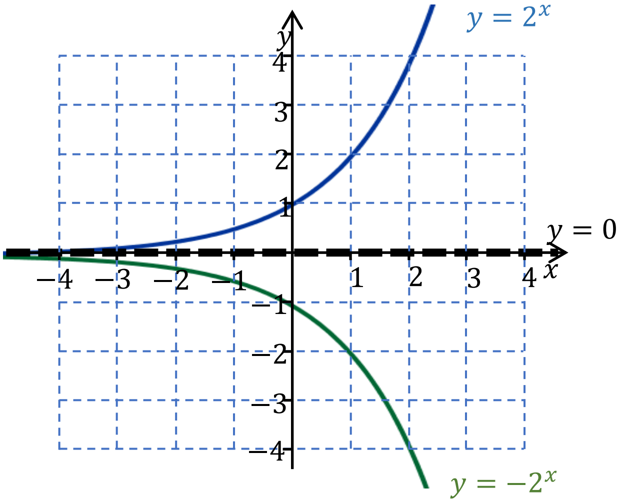


$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \mathbb{R}_+^*$

Assíntota: $y = 0$

e)

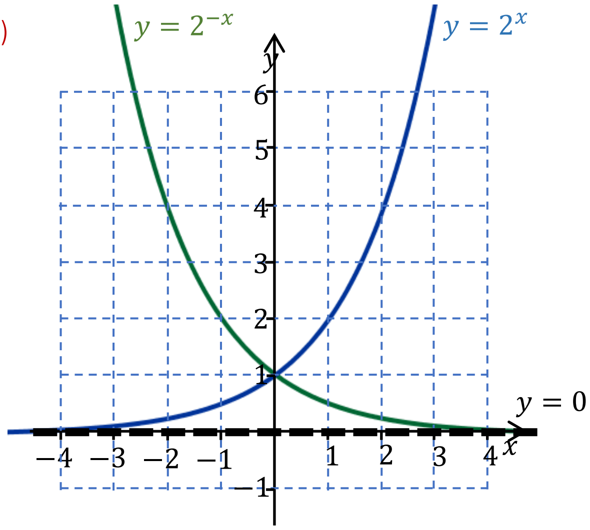


$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \mathbb{R}_-^*$

Assíntota: $y = 0$

f)



$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \mathbb{R}_+^*$

Assíntota: $y = 0$

18. Aula 6

18.1 Logaritmos

Definição: Chamamos de **logaritmo** o número $x = \log_a b$, o número x que satisfaz a equação exponencial,

$$a^x = b$$

tal que $a > 0$, $b > 0$ e $a \neq 1$ ambos números reais.

Notação:

$$x = log_a\, b.$$

Da definição acima segue que,

$$log_a\, b = x \Leftrightarrow a^x = b.$$

Observação:

$log_{10}\, a = log\, a$ (Quando a base do logaritmo é 10, se escreve $\log a$ para representar $\log_{10} a$)

$\log_e a = \ln a$ (Quando a base do logaritmo é e, se escreve $\ln e$ para representar $\log_e a$)

Logaritmando

$$x = log_a\, b.$$

Base

Exemplo: Resolva a equação exponencial $2^x = 8$.

Solução:

$$2^x = 8.$$

Igualando as bases, tem-se:

$$2^x = 2^3 \Longrightarrow x = 3,$$

portanto, se diz que 3 é o logaritmo de 8 na base 2.

Ou seja,

$$\log_2 8 = 3.$$

Exemplo: Calcule $\log_2 64$.

Solução:

Usando a definição de logaritmo, tem-se:

$$log_b\, a = x \iff b^x = a.$$

Então,

$$log_2\, 64 = x \iff 2^x = 64.$$

Resolvendo a equação $2^x = 64$, tem-se:

$$2^x = 64 \quad \Longrightarrow 2^x = 2^6 \quad \Longrightarrow x = 6.$$

Portanto, $$log_2\, 64 = 6.$$

Exemplo: Calcule $\log_4 0{,}25$.

Solução:

Usando a definição de logaritmo, tem-se:

$$log_4\, 0{,}25 = x \iff 4^x = 0{,}25 \iff 4^x = \frac{1}{4} \iff 4^x = 4^{-1} \iff x = -1$$

Portanto,

$$log_4\, 0{,}25 = -1.$$

Exemplo: Calcule $\log_2 1$.

Solução:

Usando a definição de logaritmo, tem-se:

$$log_2\, 1 = x \iff 2^x = 1 \iff 2^x = 2^0 \iff x = 0.$$

Portanto,

$$log_2\, 1 = 0.$$

Exemplo: Calcule $\log_5 5$.

Solução:

Usando a definição de logaritmo, tem-se:

$$log_5\, 5 = x \iff 5^x = 5 \iff 5^x = 5^1 \iff x = 1.$$

Portanto,

$$log_5\, 5 = 1.$$

18.2 Consequências da definição de Logaritmo

Primeira consequência:

O logaritmo de 1, em qualquer base, é sempre igual a 0.

$$log_a 1 = 0.$$

Para todo $a > 0$ e $a \neq 1$.

Segunda consequência:

O logaritmo de um número na própria base, é sempre igual a 1.

$$log_a a = 1.$$

Para todo $a > 0$ e $a \neq 1$.

Terceira consequência:

Quando temos uma potência com expoente logarítmico de base igual a base dessa potência, o resultado será o logaritmando do expoente.

$$a^{log_a n} = n.$$

Para todo $a > 0$, $a \neq 1$ e $n > 0$.

Quarta consequência:

Dois logaritmos de mesma base serão iguais se, e somente se, seus logaritmandos forem iguais.

$$log_a n = log_a m \Leftrightarrow n = m.$$

Para todo $a > 0$, $a \neq 1$, $n > 0$ e $m > 0$.

Exemplo: Calcule $\log_2 1$.

Solução:

$$log_2 1 = 0,$$

pois: $2^0 = 1.$

Exemplo: Calcule $\log_2 2$.

Solução:

$$log_2 2 = 1,$$

pois: $2^1 = 2.$

Exemplo: Calcule $2^{\log_2 4}$.

Solução:

$$2^{log_2 4} = 4,$$

Pois se considerarmos $\log_2 4 = x$, teremos $x = 2$,

logo: $2^{log_2 4} = 2^x = 2^2 = 4.$

Exemplo: Encontre a solução da equação $\log_2(2x+4) = \log_2(3x+1)$.

Solução:

$$log_2(2x+4) = log_2(3x+1)$$

$$2x + 4 = 3x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 3x = 1 - 4 \quad \Leftrightarrow \quad -x = -3$$

$x = 3$ Log $S = \{3\}$

18.3 Propriedades logarítmicas

Logaritmo do produto: logaritmo do produto é a soma dos logaritmos.

$$log_a(m.n) = log_a m + log_a n.$$

Logaritmo do quociente: logaritmo do quociente é a diferença dos logaritmos.

$$log_a\left(\frac{m}{n}\right) = log_a m - log_a n.$$

Exemplo: Represente as expressões abaixo como um único logaritmo:

(a) $log_6 4 + log_6 8$ (b) $log_5 3 - log_5 8$

Solução:

(a) $log_6 4 + log_6 8 = log_6(4.8) = log_6 32.$

(b) $log_5 3 - log_5 8 = log_5\left(\frac{3}{8}\right).$

18.4 Logaritmo da potência

Logaritmo da potência: o expoente do logaritmando passa para frente do logaritmo multiplicando o mesmo.

$$log_a n^m = m\,.\;\; log_a n.$$

Exemplo: Calcule:

(a) $log_2 8^4$ (b) $log_2 \sqrt[3]{4}$

Solução:

(a) $log_2 8^4 \; = 4\,.\, log_2 8 = 4\,.\, 3 \; = 12.$

(b) $log_2 \sqrt[3]{4} \; = log_2 4^{\frac{1}{3}} \; = \frac{1}{3}\,.\; log_2 4 \; = \frac{1}{3}\,.\, 2 = \frac{2}{3}.$

18.5 Mudança de base

Mudança de base: dados um logaritmo de $\boldsymbol{b}$ na base $\boldsymbol{a}$, fazemos a sua mudança para uma base $\boldsymbol{c}$ da seguinte forma.

$$log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}.$$

Exemplo: Passe $\log_2 16$, para base 10.

Solução:

$$log_2 16 = \frac{log\ 16}{log\ 2}$$

18.6 Funções Logarítmicas

Definição:

Dado $a \in \mathbb{R}$ tal que $a > 0$ e $a \neq 1$, a função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = log_a\, x$$

é chamada de função logarítmica de base $\boldsymbol{a}$.

Exemplos

1) $y = log_2\, x$ Função logarítmica de base 2.

2) $y = log\, x$ Função logarítmica de base 10.

3) $y = log_{\frac{1}{2}}\, x$ Função logarítmica de base $\frac{1}{2}$.

4) $y = log_3\, x$ Função logarítmica de base 3.

5) $y = log_{\pi}\, x$ Função logarítmica de base π.

Número Pi, seu valor aproximado com duas casas decimais é 3,14.

6) $y = ln\, x$ Função logarítmica de base e.

Número de Euler, seu valor aproximado com três casas decimais é $2,718$.

18.7 Gráfico

Exemplo: Esboce o gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = \log_2 x}$.

Obs: função crescente.

Solução: Destacando alguns pontos do gráfico, tem-se:

$$f\left(\frac{1}{8}\right) = log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$$

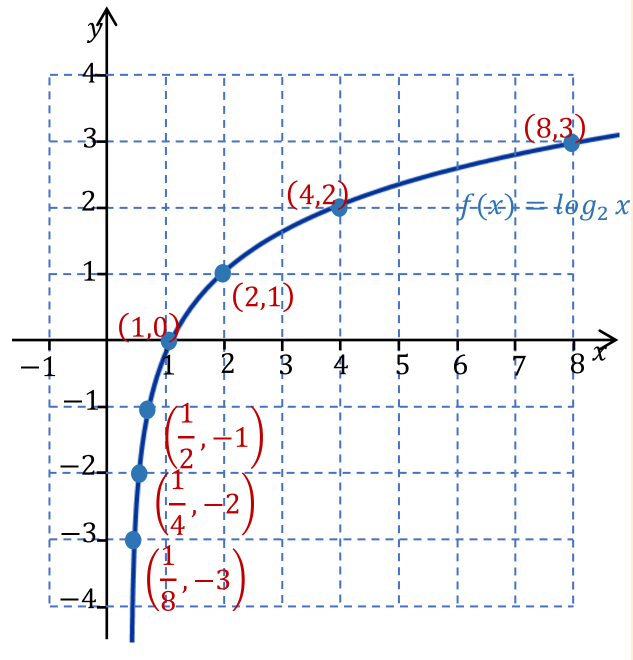
$$f\left(\frac{1}{4}\right) = log_2\left(\frac{1}{4}\right) = -2$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$f(1) = log_2(1) = 0$$

$$f(2) = log_2(2) = 1$$

$$f(4) = log_2(4) = 2$$



Exemplo: Esboce o gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x}$.

Obs: função decrescente.

Solução: Destacando alguns pontos do gráfico, tem-se:

$$f\left(\frac{1}{8}\right) = log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{8}\right) = 3$$

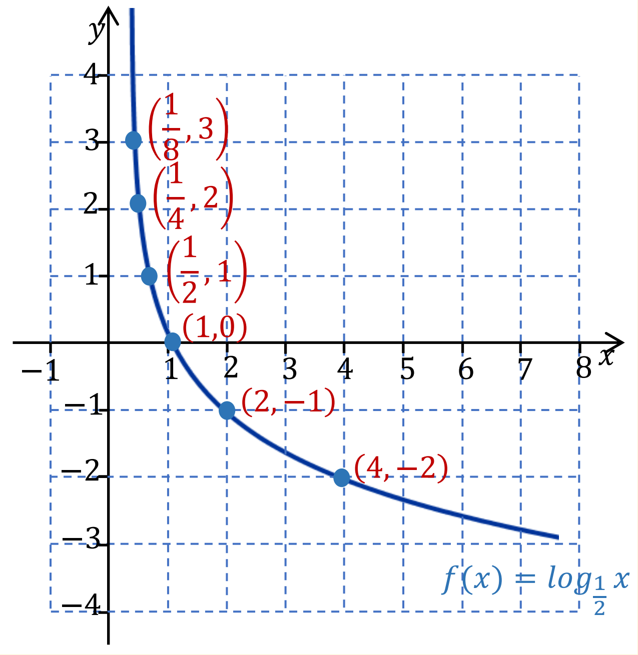
$$f\left(\frac{1}{4}\right) = log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right) = 2$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$f(1) = log_{\frac{1}{2}}(1) = 0$$

$$f(2) = log_{\frac{1}{2}}(2) = -1$$

$$f(4) = log_{\frac{1}{2}}(4) = -2$$



18.8 Gráfico, Domínio e Imagem

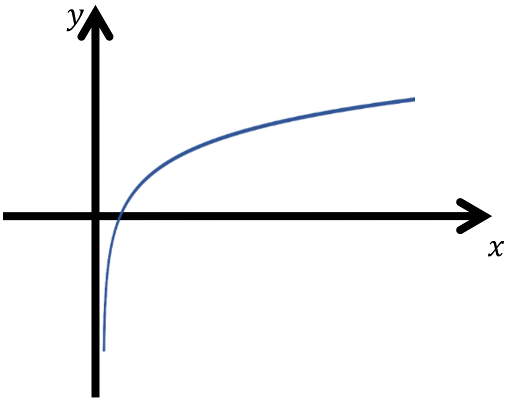
O gráfico de uma função logarítmica pode assumir dois formatos distintos:

Primeiro caso: $\boldsymbol{a > 1}$

Função Crescente

$D(f) = \mathbb{R}_+^*$

$Im(f) = \mathbb{R}.$

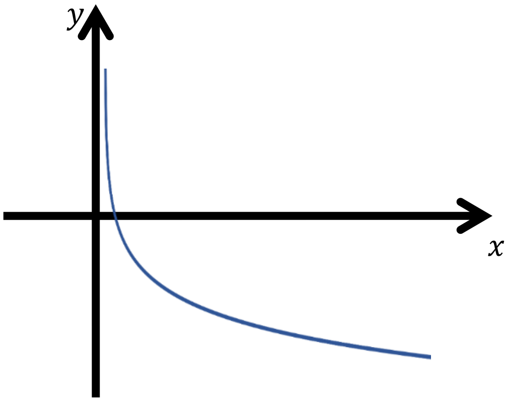


Segundo caso: $0 < a < 1$

Função Decrescente

$D(f) = \mathbb{R}_+^*$

$Im(f) = \mathbb{R}.$



Em ambos os casos (crescente ou decrescente), a reta $x = 0$ é chamada de assíntota vertical do gráfico da função.

Observação:

Para esboçar o gráfico de uma função $f(x) = \log_a x$, basta:

i. identificar o comportamento do gráfico (crescente ou decrescente)
ii. lembrar que os pontos $(1{,}0)$ e $(a, 1)$ sempre pertencem ao gráfico destas funções, pois:

$$f(1) = \log_a 1 = 0 \Longrightarrow (1{,}0) \in f$$

$$f(a) = log_a\, a = 1 \Longrightarrow (a, 1) \in f$$

Exemplo: Esboce os gráficos das funções:

$a) f(x) = log_{\frac{5}{2}} x$ $\quad$ $b)\ f(x) = ln\, x$ $\quad$ $c) f(x) = log_{\frac{1}{3}} x$ $\quad$ $d) f(x) = log_{\frac{1}{4}} x$

Solução:

(a)$f(x) = \log_3 x$

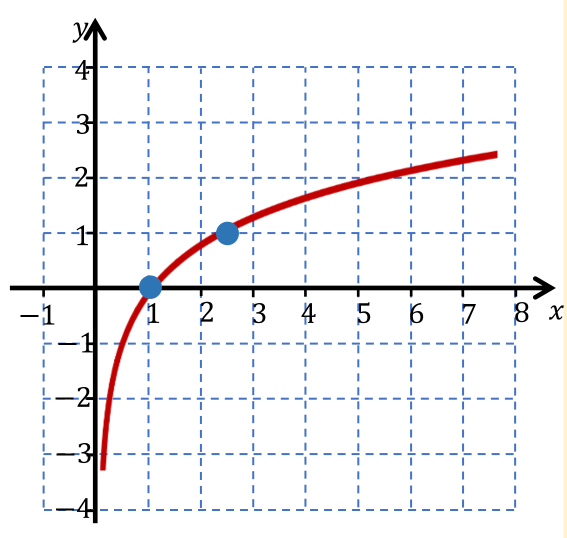
$\frac{5}{2} > 1 \quad \Longrightarrow f(x)\ é\ crescente$

Definindo os pontos:

$(1\ ,\ 0)\ e\ (a\ ,\ 1)$

Temos,

$(1\ ,\ 0)\ e\ \left(\frac{5}{2}\ ,\ 1\right)$



(b)$f(x) = \ln x$

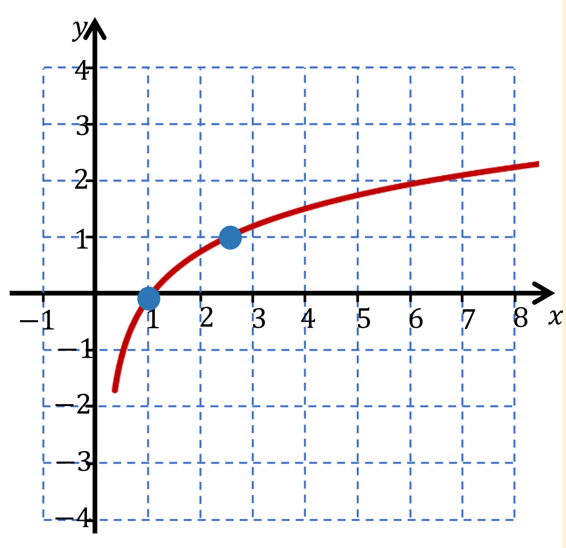
$e > 1 \quad \Longrightarrow f(x)\ é\ crescente$

Definindo os pontos:

$(1\ ,\ 0)\ e\ (a\ ,\ 1)$

Temos,

$(1\ ,\ 0)\ e\ (e\ ,\ 1)$



(c)$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

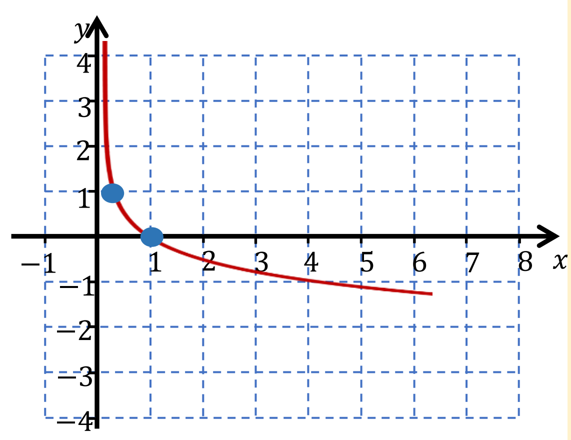
$$0 < \frac{1}{3} > 1 \Longrightarrow f(x)\ \textit{é decrescente}$$

Definindo os

$(1\ ,\ 0)\ e\ (a\ ,\ 1)$

Temos

$(1\ ,\ 0)\ e\ \left(\frac{1}{3}\ ,\ 1\right)$



(d)$f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

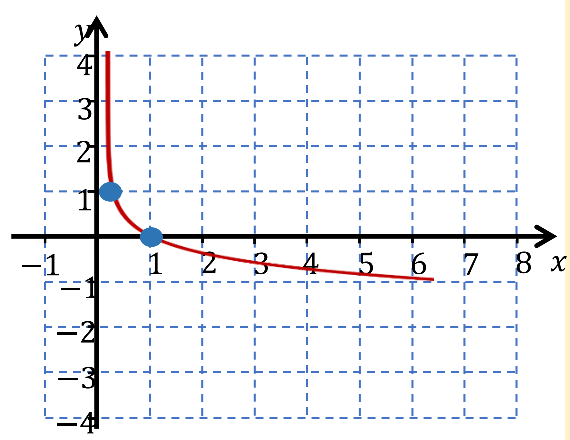
$$0 < \frac{1}{4} < 1 \Longrightarrow f(x)\ \textit{é decrescente}$$

Definindo os pontos:

$(1\ ,\ 0)\ e\ (a\ ,\ 1)$

Temos,

$(1\ ,\ 0)\ e\ \left(\frac{1}{4}\ ,\ 1\right)$



Observação:

A inversa da função exponencial é uma função bijetora!

Logo, a função inversa da função exponencial de base a é a função logarítmica de mesma base.

Ou seja, $f(x) = a^x$ $\quad f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$

$$f^{-1}(x) = log_a x \qquad f^{-1}: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

Exemplo: Em cada caso, determine a função inversa da função dada.

$a) f(x) = log_5 x$ $\qquad b)\ f(x) = 4^x$

Solução:

a)$f(x) = \log_5 x$

A função inversa de $f(x)$ é a função exponencial de base 5.

Logo,

$$f^{-1}(x) = 5^x$$

b)$f(x) = 4^x$

A função inversa de $f(x)$ é a função logarítmica de base 4.

Logo,

$$f^{-1}(x) = log_4 x$$

Observação:

Lembre que existe simetria, em relação à reta $y = x$, entre os gráficos de uma função f e de sua inversa f^{-1}.

Exemplo: Determine a função inversa da função exponencial 2^x e esboce os gráficos de ambas.

Solução:

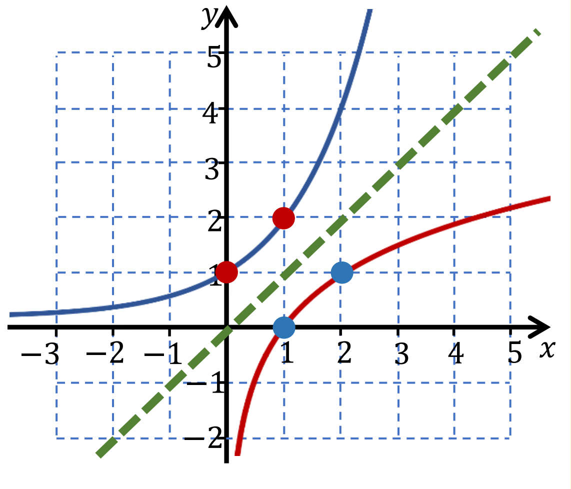
A função inversa de $f(x)$ é a função logarítmica de base 2.

Logo,

$$f^{-1}(x) = \log_2 x.$$

Definindo os pontos de $f(x) = 2^x$: $(0,\ 1)\ (1,\ 2)$

Definindo os pontos de $f^{-1}(x) = \log_2 x$: $(0,\ 1)\ (1,\ 2)$



18.9 Exercícios Propostos

1) Calcule:

(a) $\log_4 64$ (b) $\log_{\frac{1}{4}} 16$

2) Calcule o valor de y em cada equação:

(a) $\log_4 y = 3$ (b) $\log_y 36 = 2$

3) Calcule o valor de y em cada equação:

(a) $\log_4 5 + \log_4 9$ (c) $8\log 1 + \log 0{,}777 - \log 0{,}11$

(b) $3\log_8 4 - \log_8 16$ (d) $\frac{1}{3}\log_3 8 - \log_3 10 + 4\log_3 2$

4) Considerando $\log 2 = 0{,}3$, $log\ 3 = 0{,}5$ e $log\ 5 = 0{,}7$ determine:

(a) $\log 15$

(b) $\log 30$

(c) $\log 45$

(d) $\log 1{,}2$

(e) $(\log 1{,}5)^2$

(f) $\log \sqrt{0{,}3}$

5) Calcule:

(a) $\log_4 x + \log_4(x+3) = 1$

(b) $\log(x-3) + \log x$=1

(c) $\log_6(x-1)^2 - \log_6(x-1) = 0$

(d) $\log_4 2x + \log_4(9-x) = 2$

6) Em cada caso, esboce o gráfico da função dada e determine o domínio, a imagem e a equação da assíntota vertical.

(a) $f(x) = 1 + \log_2 x$

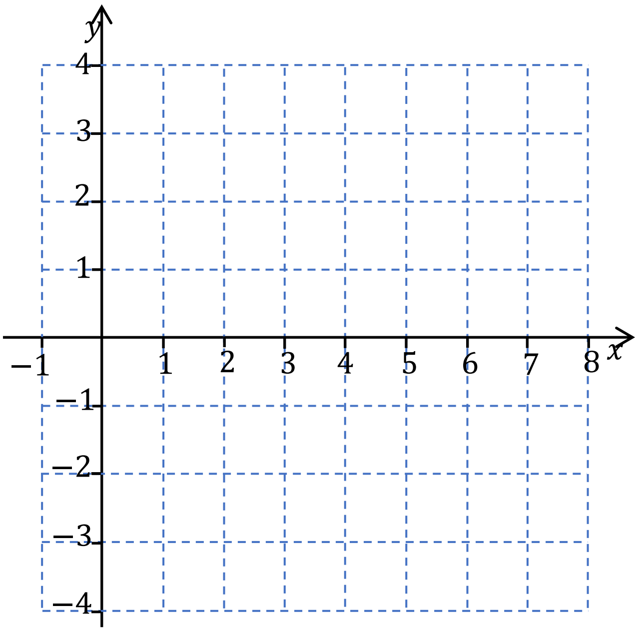
(b) $f(x) = 2\log_2 x$

(c) $f(x) = \log_3(x-2)$

(d) $f(x) = 2 + \log_3(x+1)$

(e) $f(x) = -\ln x$

(f) $f(x) = -\ln(-x)$



7) Determine o domínio das seguintes funções:

(a) $f(x) = 1 + 3\log_2(x-5)$

(b) $f(x) = \log(x^2-1)$

(c) $f(x) = \log_5(x^2 - x - 12) + \ln(x+2)$

8) Em cada caso, determine a composta fog.

(a) $f(x) = \log_2(x)$ e $g(x) = 12 - 3x$

(b) $f(x) = \log_5(x)$ e $g(x) = 5^x$

(c) $f(x) = 5^x$ e $g(x) = \log_5(x)$

(d) $f(x) = \ln x$ e $g(x) = e^{x^2+\sqrt{x}}$

9) Em cada caso, escreva a função dada como uma composta de duas funções.

a) $f(x) = \log(x^3 + 2x)$

b) $f(x) = \sqrt{\ln x}$

18.10 Respostas

Exercício 1:

a) $x = 3$

b) $x = -2$

Exercício 2:

a) $y = 64$

b) $y = 6$

Exercício 3:

a) $\log_4 45$

b) $log_8 4$

c) $\log\left(\frac{777}{110}\right)$

d) $log_3\left(\frac{16}{5}\right)$

Exercício 4:

a) $0{,}8$

b) $1{,}5$

c) $1{,}7$

d) $0{,}1$

e) $0{,}04$

f) $-0{,}25$

Exercício 5:

a) $S = \{-4,\ 1\}$

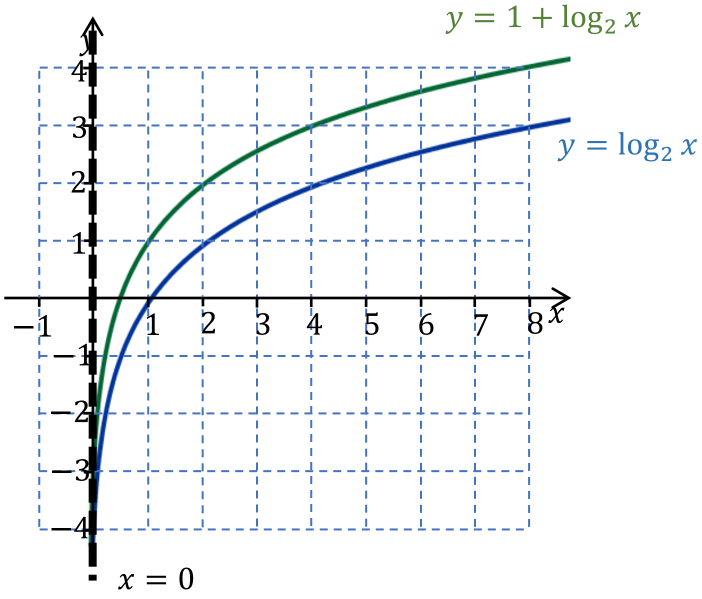
b) $S = \{-2,\ 5\}$

c) $S = \{2\}$

d) $S = \{1,\ 8\}$

Exercício 6:

a)

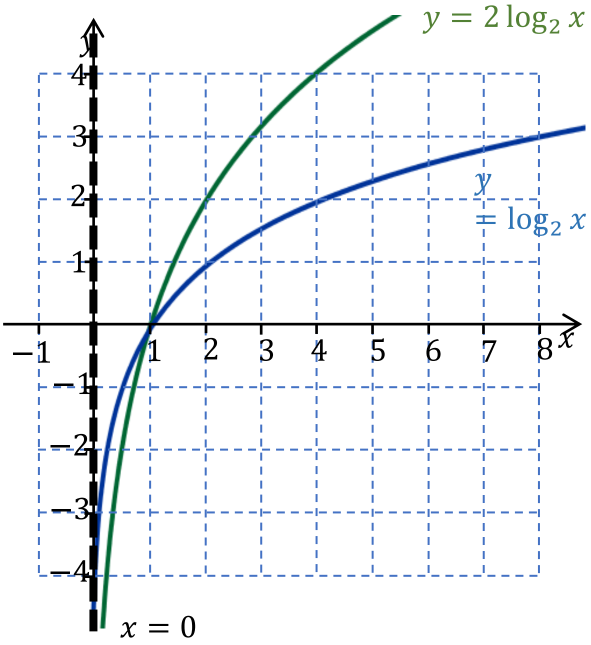


$D(f) = \mathbb{R}_+^*$

$Im(f) = \mathbb{R}$

Assíntota: $x = 0$

b)

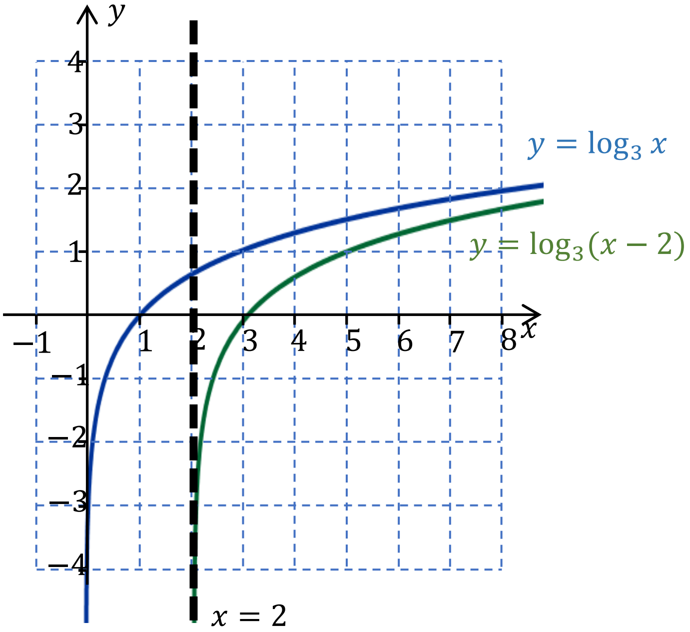


$D(f) = \mathbb{R}_+^*$

$Im(f) = \mathbb{R}$

Assíntota: $x = 0$

c)

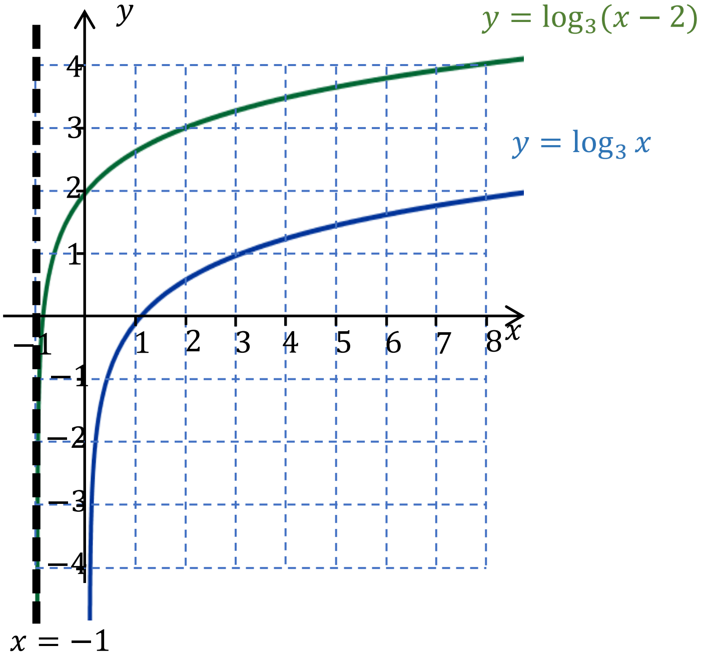


$D(f) = (2, +\infty)$

$Im(f) = \mathbb{R}$

Assíntota: $x = 2$

d)

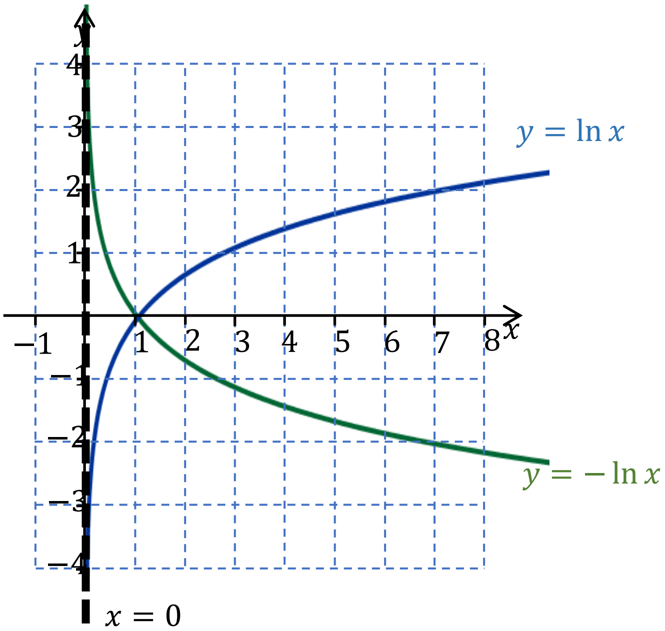


$D(f) = (-1, +\infty)$

$Im(f) = \mathbb{R}$

Assíntota: $x = -1$

e)

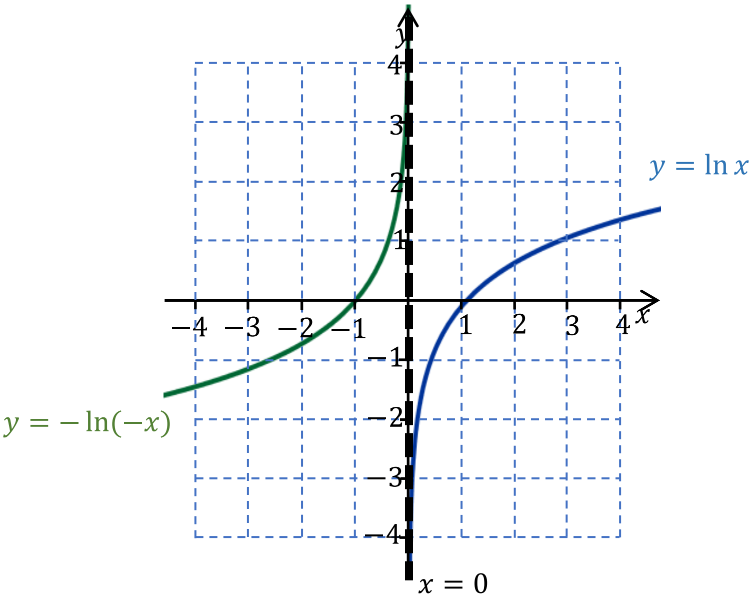


$D(f) = (0, +\infty)$

$Im(f) = \mathbb{R}$

Assíntota: $x = 0$

f)



$D(f) = (-\infty, 0)$

$Im(f) = \mathbb{R}$

Assíntota: $x = 0$

Exercício 7:

a) $D(f) = (5, \ +\infty)$

b) $D(f) = (-\infty, -1) \cup (1, \ +\infty)$

c) $D(f) = (4, \ +\infty)$

Exercício 8:

a) $(fog)(x) = log_2(12 - 3x)$

b) $(fog)(x) = x$

c) $(fog)(x) = x$

d) $(fog)(x) = x^2 + \sqrt{x}$

Exercício 9:

a) $f = f_2 o f_1$ $\quad f_1(x) = x^3 + 2x$

$f_2(x) = log(x)$

b) $f = f_2 o f_1$ $\quad f_1(x) = \ln x$

$f_2(x) = \sqrt{x}$

Capítulo 4: Limites

19. Aula 1

19.1 Ideia Intuitiva de limite

Como motivação para o estudo de limites, considere a função:

$$y = x^2.$$

Pergunta: Ao aproximarmos x de 2, os valores de y se aproximam de algum número?

Para responder esta pergunta, vamos considerar alguns valores de x próximos de 2 e verificar se y se aproxima de algum número.

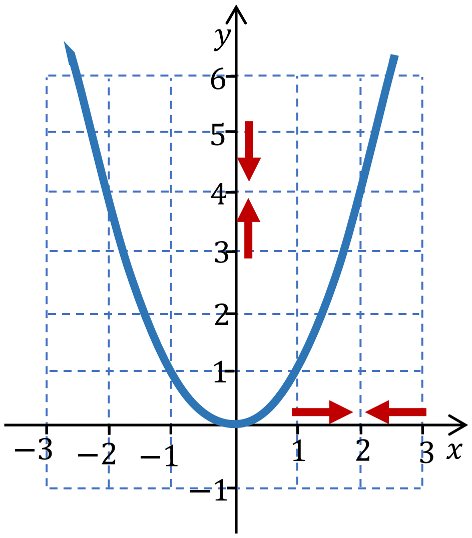
x	$y = x^2$
1,9	3,61
1,99	3,9601
1,999	3,996001
1,9999	3,99960001
1,99999	3,99996

x	$y = x^2$
2,1	4,41
2,01	4,0401
2,001	4,004001
2,0001	4,00040001
2,00001	4,00004

Resposta: Ao aproximarmos x de 2, aparentemente os valores de y se aproximam de 4.

Observe, no gráfico da função quadrática $y = x^2$ que, ao aproximarmos x de 2 veremos que os valores de y se aproximam de 4.

Note que podemos tornar y tão próximo de 4 quanto queiramos, desde que x esteja suficientemente próximo de 2.



Dizemos que

O limite da função $y = x^2$ quando x tende a 2 é igual a 4.

Denota-se,

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4$$ ou $$x^2 \to 4 \; quando \; x \to 2$$

19.2 Definição de Limite

Definição: Diz-se que o limite $\boldsymbol{f(x)}$ é igual a $\boldsymbol{L}$, quando $\boldsymbol{x}$ tende a $\boldsymbol{a}$, e escreve-se:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

quando pudermos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de L quanto queiramos, desde que tomemos valores de $\boldsymbol{x}$ suficientemente próximos (mas diferentes) de $\boldsymbol{a}$.

De forma equivalente, podemos escrever:

O limite de $\boldsymbol{f(x)}$ quando $\boldsymbol{x}$ tende a $\boldsymbol{a}$ é igual a $\boldsymbol{L}$.

Ou:

O limite bilateral de $\boldsymbol{f(x)}$ quando $\boldsymbol{x}$ tende a $\boldsymbol{a}$ é igual a $\boldsymbol{L}$.

Ou ainda:

$$\boldsymbol{f(x) \to L \; quando \; x \to a.}$$

19.3 Limites Laterais

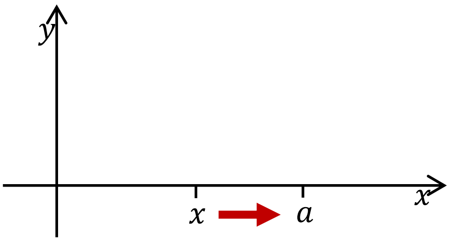
Quando escreve-se "$x \to a$" se quer dizer que x se aproxima de a.

Vamos estudar duas formas particulares de aproximar x de a:

Primeira forma: x se aproxima de a por valores menores que a.

Notação $x \to a^-$

Se lê: x tende a a pela esquerda.



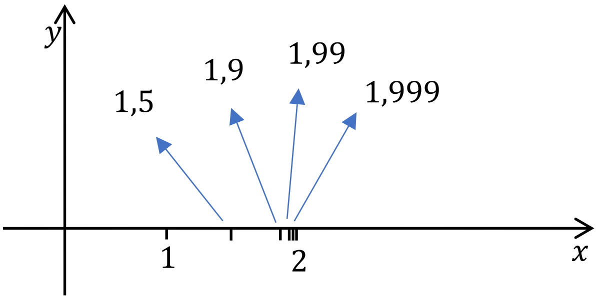
Dizer que x tende a a pela esquerda significa que pode-se tomar valores de x tão próximos de a quanto queiramos, mas menores que a.

Exemplo:

Se x tende a 2 pela esquerda.

$$x \to 2^-$$

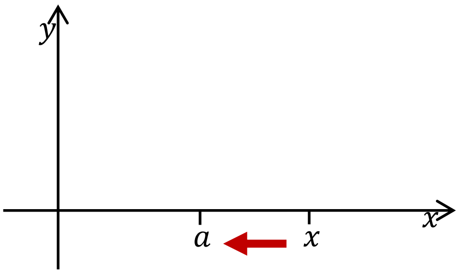
"Cada vez se considera valores de x mais próximos de 2, mas que sejam menores que 2".



Segunda forma: $\boldsymbol{x}$ se aproxima de a por valores maiores que a.

Notação: $x \to a^+$

Se lê: x tende a a pela direita.



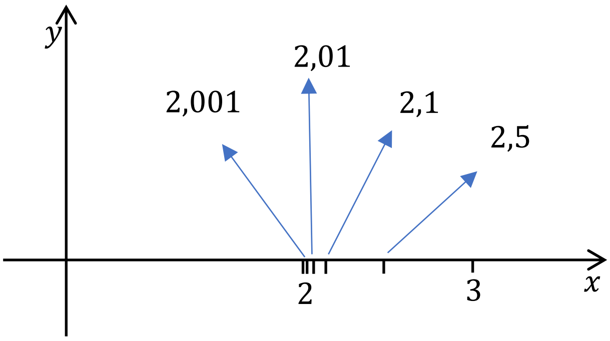
Dizer que x tende a a pela direita significa que pode-se tomar valores de x tão próximos de a quanto queiramos, mas maiores que a.

Exemplo:

Se x tende a 2 pela direita.

$$x \to 2^+$$

"Cada vez se considera valores de x mais próximos de 2, mas que sejam maiores que 2".



Definição: Diz-se que o limite de $f(x)$ é igual a L, quando x tende a a pela esquerda, e escreve-se

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

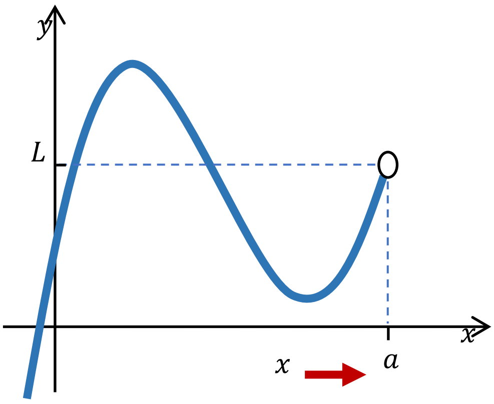
quando pudermos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de L quanto queiramos, desde que tomemos valores de x suficientemente próximos de a, mas menores que a.

Notação:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

$$f(x) \to L \text{ quando } x \to a^-$$

$f(x)$ se aproxima de L quando x se aproxima de a por valores menores que a.



Definição: Diz-se que o limite de $f(x)$ é igual a L, quando x tende a a pela direita, e escreve-se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

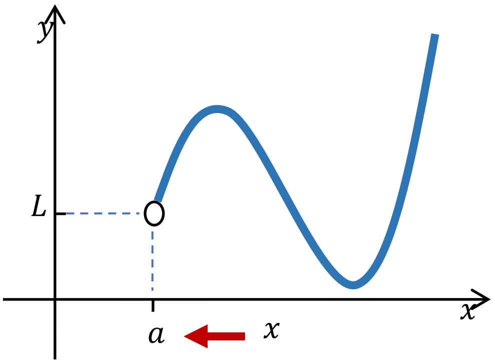
quando pudermos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de L quanto queiramos, desde que tomemos valores de x suficientemente próximos de a, mas maiores que a.

Notação:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

$$f(x) \to L \text{ quando } x \to a^+$$

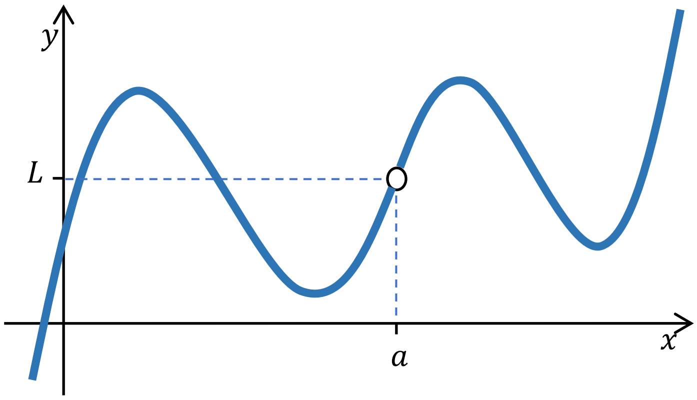
$f(x)$ se aproxima de L quando x se aproxima de a por valores maiores que a.



19.4 Limite Bilateral

Teorema: O limite (bilateral) de $f(x)$ quando x tende a a é igual a L se e somente se os limites laterais existem e são iguais a L.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L \end{cases}$$



Exemplo: Use o gráfico da função f para determinar cada expressão, se ela existir.

(a) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ -1

(b) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ 2

(c) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ $\nexists$

(d) $f(-1)$ 2

(e) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ 3

(f) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ 4

(g) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ $\nexists$

(h) $f(1)$ -1

(i) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ 1

(j) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ 1

(k) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 1

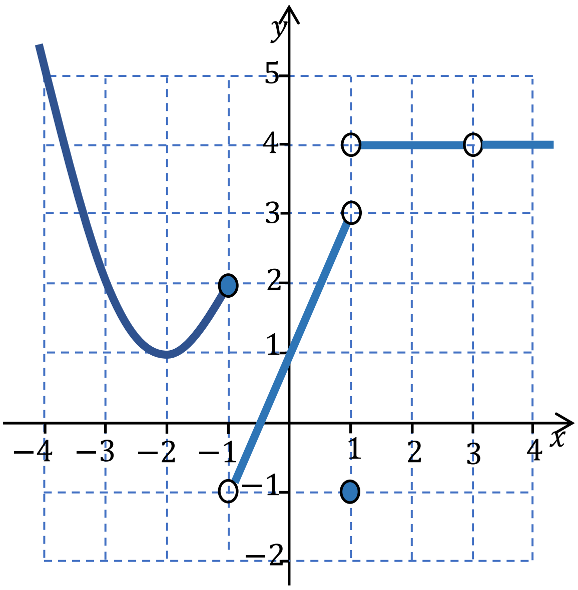
(l) $f(0)$ 1

(m) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ 4

(n) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ 4

(o) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ 4

(p) $f(3)$ $\nexists$



Exemplo: Em cada caso, use o gráfico da função identidade para determinar o valor do limite dado.

(a) $\lim\limits_{x\to -1^+} x \qquad -1$

(b) $\lim\limits_{x\to -1^-} x \qquad -1$

(c) $\lim\limits_{x\to -1} x \qquad -1$

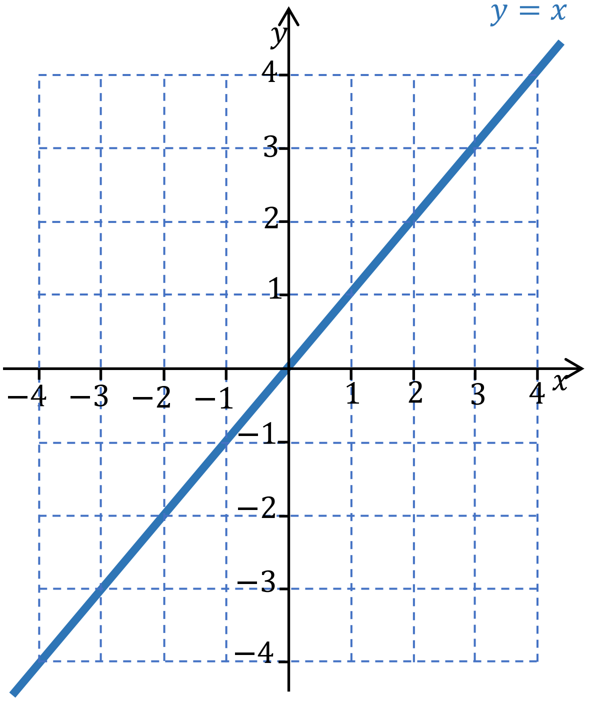
(d) $\lim\limits_{x\to 0} x \qquad 0$

(e) $\lim\limits_{x\to \pi} x \qquad \pi$

(f) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} f(x) \qquad \dfrac{1}{2}$

(g) $\lim\limits_{x\to -e} x \qquad -e$

(h) $\lim\limits_{x\to \frac{\sqrt{3}}{2}} x \qquad \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



Considerando o gráfico da função identidade, tem-se

19.5 Propriedades dos Limites

Seja c uma constante, e suponha que existam os limites:

$$\lim_{x\to a} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to a} g(x)$$

Vamos estudar as propriedades dos limites:

Propriedade da soma/diferença

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

“O limite da soma/diferença é a soma/diferença dos limites”

Exemplos:

$$\lim_{x\to 0}\left[x^2 + \sqrt{2x+3}\right] = \lim_{x\to 0} x^2 + \lim_{x\to 0} \sqrt{2x+3}$$

$$\lim_{x\to -1}\left[e^x + x\right] = \lim_{x\to -1} e^x + \lim_{x\to -1} x$$

$$\lim_{x\to 3}\left[x^2 - x^4\right] = \lim_{x\to 3} x^2 - \lim_{x\to 3} x^4$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\sqrt[3]{x^2+1} - \cos 2x\right] = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x^2+1} - \lim_{x\to 0} \cos 2x$$

Propriedade da multiplicação por constante

$$\lim_{x\to a} c\cdot f(x) = c\cdot \lim_{x\to a} f(x)$$

"O limite da função multiplicada por uma constante é igual a constante multiplicada pelo limite"

Exemplo:

$$\lim_{x\to 5}[2\cdot \log_2 x] = 2\cdot \lim_{x\to 5} log_2\, x$$

Propriedade do Produto

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a}\ g(x)$$

"O limite do produto é o produto dos limites"

Exemplo:

$$\lim_{x\to 0}[e^{2x}\cdot \cos x^2] = \lim_{x\to 0} e^{2x}\cdot \lim_{x\to 0} cos\, x^2$$

Propriedade do Quociente $\left(\lim_{x\to a} g(x) \neq 0\right)$

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

"O limite do quociente é o quociente dos limites"

Exemplo:

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^3+\sqrt[4]{x}}{e^x}\right] = \frac{\lim_{x\to 1}(x^3+\sqrt[4]{x})}{\lim_{x\to 1} e^x}$$

Propriedade da Potência

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n \quad (n\in\mathbb{R})$$

"O limite da potência é a potência do limite"

Exemplo:

$$\lim_{x\to -1}[2x+1]^{10} = \left[\lim_{x\to -1}(2x+1)\right]^{10}$$

Propriedade da Raiz

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

"O limite da raiz é a raiz do limite"

Exemplo:

$$\lim_{x\to 3} \sqrt[5]{x^2+2x-1} = \sqrt[5]{\lim_{x\to 3}(x^2+2x-1)}$$

Propriedade do Módulo

$$\lim_{x\to a}|f(x)| = \left|\lim_{x\to a} f(x)\right|$$

"O limite do módulo é o módulo dos limites"

Exemplo:

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}} |\tan x| = \left|\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}} tan\, x\right|$$

Todas as propriedades de limites vistas nesta aula continuam válidas se consideramos os limites laterais

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \quad e \quad \lim_{x\to a^+} f(x) \quad ou \quad \lim_{x\to a^-} g(x) \quad e \quad \lim_{x\to a^+} g(x)$$

em vez do limite bilateral.

Exemplo: Dado que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4 \qquad \lim_{x\to 2} g(x) = -2 \qquad \lim_{x\to 2} h(x) = 0$$

encontre, se existir, o limite. Caso não exista, explique por quê?

(a) $\lim_{x\to 2}[f(x)+5g(x)]$

(b) $\lim_{x\to 2}[g(x)]^3$

(c) $\lim_{x\to 2}\sqrt{f(x)}$

(d) $\lim_{x\to 2}\frac{3f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x\to 2}\frac{h(x)}{g(x)}$

(f) $\lim_{x\to 2}\frac{g(x)h(x)}{f(x)}$

Solução: Como sabemos os cada um dos limites individualmente, precisamos simplesmente utilizar as propriedades para calcular os limites:

(a) $\lim_{x\to 2}[f(x)+5g(x)] = 4+5(-2) = -6$

(b) $\lim_{x\to 2}\,[g(x)]^3 = (-2)^3 = -8$

(c) $\lim_{x\to 2}\sqrt{f(x)} = \sqrt{4} = 2$

(d) $\lim_{x\to 2}\frac{3f(x)}{g(x)} = \frac{3\cdot 4}{-2} = -6$

(e) $\lim_{x\to 2}\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{0}{-2} = 0$

(f) $\lim_{x\to 2}\frac{g(x)h(x)}{f(x)} = -\frac{2\cdot 0}{4} = 0$

19.6 Exercícios Propostos

1) Use o gráfico dado da f para determinar cada expressão, se ela existir. Se não existir, explique por quê?

(a) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$

(b) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

(c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

(d) $f(0)$

(e) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

(f) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

(g) $\lim_{x\to 2} f(x)$

(h) $f(2)$

(i) $\lim_{x\to 5^-} f(x)$

(j) $\lim_{x\to 5^+} f(x)$

(k) $\lim_{x\to 5} f(x)$

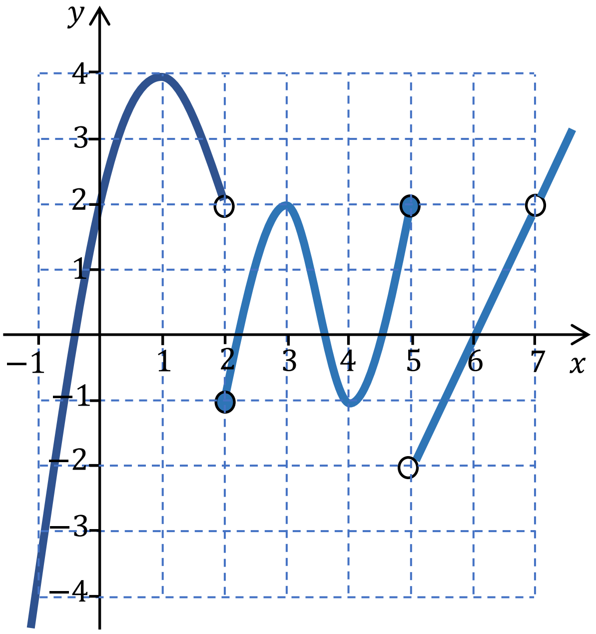
(l) $f(5)$

(m) $\lim_{x\to 7^-} f(x)$

(n) $\lim_{x\to 7^+} f(x)$

(o) $\lim_{x\to 7} f(x)$

(p) $f(7)$



2) Use o gráfico da função f para determinar cada expressão, se ela existir. Se não existir, explique por quê?

(a) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$

(b) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

(c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

(d) $f(0)$

(e) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$

(f) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$

(g) $\lim_{x\to 1} f(x)$

(h) $f(1)$

(i) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

(j) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

(k) $\lim_{x\to 2} f(x)$

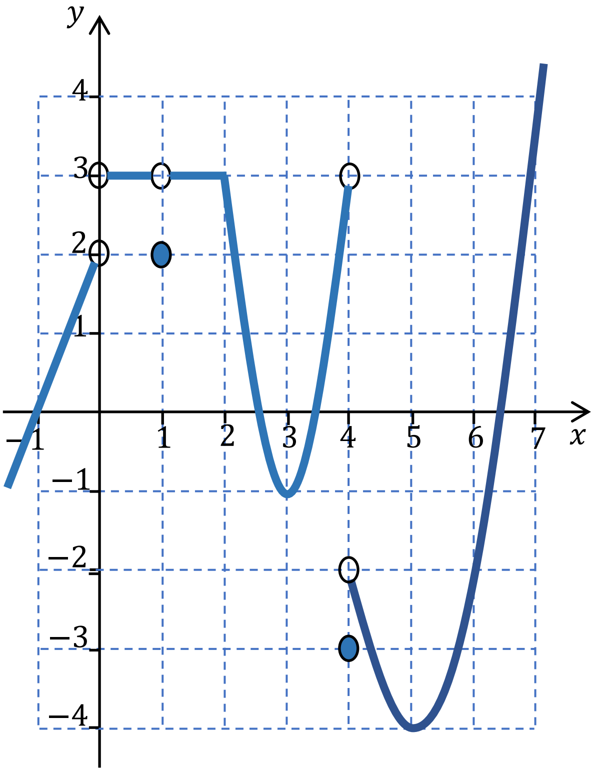
(l) $f(2)$

(m) $\lim_{x\to 4^-} f(x)$

(n) $\lim_{x\to 4^+} f(x)$

(o) $\lim_{x\to 4} f(x)$

(p) $f(4)$



3) Esboce o gráfico de uma função f qualquer que satisfaça todas as condições dadas:

(a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2$ $\quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -2$ $\quad f(1) = 2$

(b) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 2$ $\quad \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 4$ $\quad f(3) = 3$

$\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 2$ $\quad f(-2) = 1$

(c) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 1$ $\quad \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} f(x) = -2$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 2$ $\quad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 3$ $\quad f(1) = 2$

(d) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = 3$ $\quad \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 3$ $\quad \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3$ $\quad f(1) = -1$ $\quad f(-2) = 0$

19.7 Respostas

Exercício 1:

a) 2
b) 2
c) 2
d) 2
e) 2
f) -1
g) $\nexists$
h) -1
i) 2
j) -2
k) $\nexists$
l) 2
m) 2
n) 2
o) 2
p) $\nexists$

Exercício 2:

a) 2
b) 3
c) $\nexists$
d) $\nexists$
e) 3
f) 3
g) 3
h) 2
i) 3
j) 3
k) 3
l) 3
m) 3
n) -2
o) $\nexists$
p) -3

20. Aula 2

20.1 Limites Infinitos

Como motivação para o estudo de limites infinitos, considere a função

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

Pergunta: Quando x tende a 2, o que acontece com $f(x)$?

Para responder esta pergunta, vamos considerar alguns valores de x próximos de 2.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
1,9	100
1,99	10000
1,999	1000000
1,9999	100000000

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
2,1	100
2,01	10000
2,001	1000000
2,0001	100000000

Resposta: Ao aproximarmos x de 2, os valores de $f(x)$ se tornam cada vez maiores, ou seja, tendem a infinito.

Matematicamente, se representa o comportamento da função

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$$

Se lê: o limite de f quando x tende a 2 pela esquerda é igual a mais infinito.

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$$

Se lê: o limite de f quando x tende a 2 pela direita é igual a mais infinito.

De forma semelhante, se pode concluir que

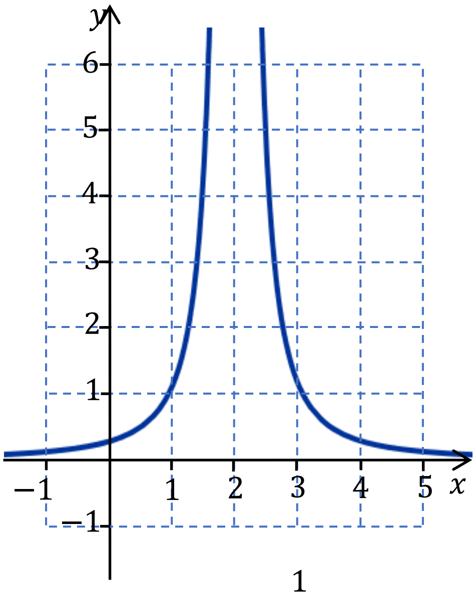
$$\lim_{x\to 2^-} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$$

Se lê: o limite de f quando x tende a 2 pela esquerda é igual a menos infinito.

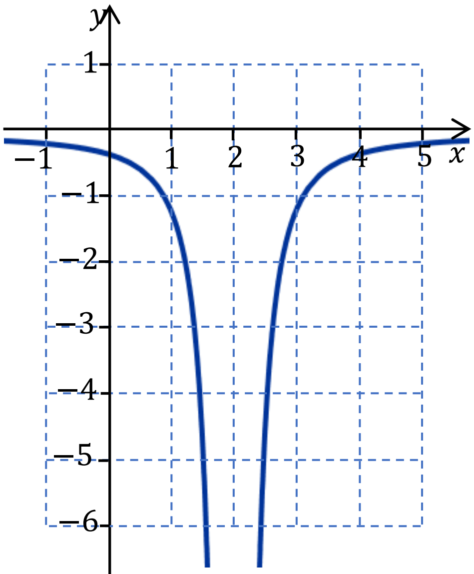
$$\lim_{x\to 2^+} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$$

Se lê: o limite de f quando x tende a 2 pela direita é igual a menos infinito.

Os gráficos das funções do exemplo anterior são dados por:



$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$



$$f(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}$$

Note que, em ambos os casos, as funções tendem a infinito quando x se aproxima de 2.

No geral, tem-se:

Expressão	Significado	Se lê
$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$	*$f(x)$ cresce (ou decresce) infinitamente quando x tende a a pela esquerda.*	O limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda é igual a mais (ou menos) infinito.
$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$	*$f(x)$ cresce (ou decresce) infinitamente quando x tende a a pela direita.*	O limite de $f(x)$ quando x tende a a pela direita é igual a mais (ou menos) infinito.

$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$	*$f(x)$ cresce (ou decresce) infinitamente quando x tende a a pela direita.*	O limite de $f(x)$ quando x tende a a pela direita é igual a mais (ou menos) infinito.
$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$	$f(x)$ cresce (ou decresce) infinitamente quando x tende a a.	O limite de $f(x)$ quando x tende a a é igual a mais (ou menos) infinito.

20.2 Assíntotas verticais

Exemplo: Com base no gráfico abaixo, determine:

(a) $\lim_{x\to -3^-} f(x) = +\infty$

(b) $\lim_{x\to -3^+} f(x) = -\infty$

(c) $\lim_{x\to -3} f(x) = \nexists$

(d) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$

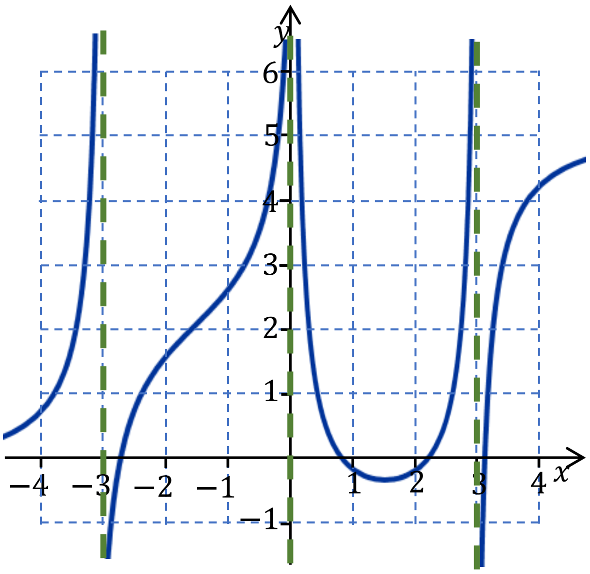
(e) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

(f) $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$

(g) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$

(h) $\lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$

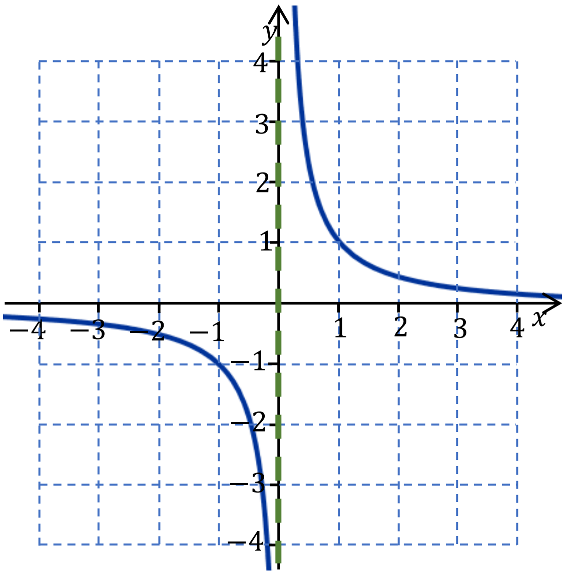
(i) $\lim_{x\to 3} f(x) = \nexists$



(j) As assíntotas verticais: $x = -3$, $x = 0$ e $x = 3$

Exemplo: Considere o gráfico da função

$$y = \frac{1}{x}$$



Determine:

(a) $\lim_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$

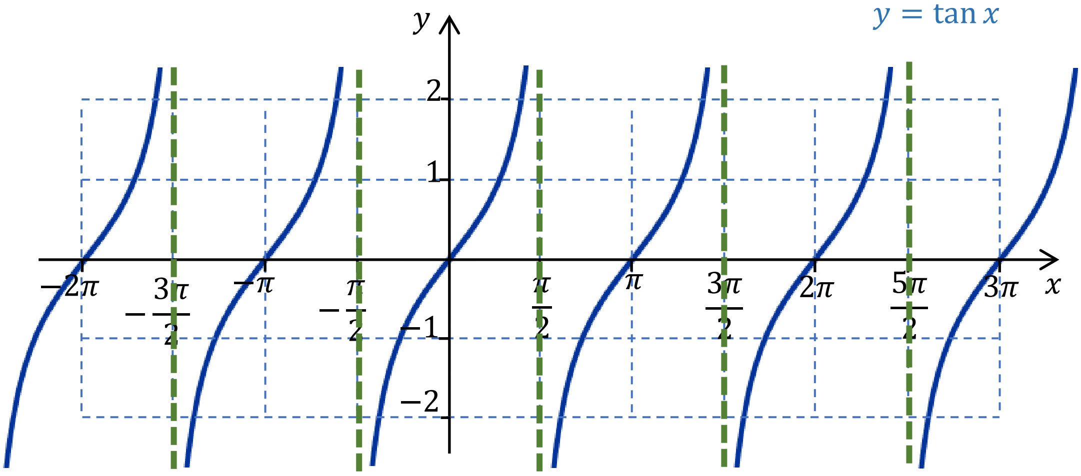
(b) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$

(c) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right) = \nexists$

(d) Esta função possui assíntotas verticais?

Sim, uma assíntota vertical em $x = 0$.

Exemplo: Considere o gráfico da função tangente



Determine:

(a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$

(b) $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$

(c) $\lim\limits_{x \to \frac{5\pi}{2}} \tan x = \nexists$

(d) O gráfico desta função possui assíntotas verticais?

Sim, o gráfico da função tangente possui infinitas assíntotas verticais da forma

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \text{onde}\ k \in \mathbb{Z}.$$

20.3 Limites infinitos e função quocientes

Observação: Lembre que, quando dividimos um número positivo por números positivos próximos de zero, o resultado da divisão será um número muito grande.

Exemplo: Dividindo o número 5 por

(a) 1 (b) $0{,}1$ (c) $0{,}01$ (d) $0{,}001$

temos

(a) $\frac{5}{1} = 5$ (b) $\frac{5}{0{,}1} = 50$ (c) $\frac{5}{0{,}01} = 500$ (d) $\frac{5}{0{,}001} = 5000$

Note que, quanto mais próximo de zero está o denominador, maior será o resultado da divisão!!

$$\lim_{x\to a}\frac{\overset{C>0}{f(x)}}{\underset{0^{+}}{g(x)}} = +\infty$$

Um raciocínio análogo pode ser usado quando consideramos o limite de uma função quociente, quando o numerador tende a uma constante positiva e o denominador tende a zero por valores positivos!!

O resultado do limite será igual a mais infinito!

Observação: Lembre que, quando dividimos um número positivo por números negativos próximos de zero, o resultado da divisão será um número muito grande, mas negativo.

Exemplo: Dividindo o número 5 por

(a) -1 (b) $-0{,}1$ (c) $-0{,}01$ (d) $-0{,}001$

temos

(a) $\frac{5}{-1} = -5$ (b) $\frac{5}{-0{,}1} = -50$ (c) $\frac{5}{-0{,}01} = -500$ (d) $\frac{5}{-0{,}001} = -5000$

Note que, quanto mais próximo de zero está o denominador, menor será o resultado da divisão!!

$$\lim_{x\to a}\frac{\overset{C>0}{f(x)}}{\underset{0^{-}}{g(x)}} = -\infty$$

O resultado do limite será menos infinito!

Um raciocínio análogo pode ser usado quando consideramos o limite de uma função quociente, quando o numerador tende a uma constante positiva e o denominador tende a zero por valores negativos!!

Exemplo: Os limites

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x+1}{x} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{x+1}{x}$$

são infinitos, pois

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x+1 \xrightarrow{} 1}{x \xrightarrow{} 0^+} = +\infty$$

1 O numerador tende a 1.

O limite tende a $+\infty$.

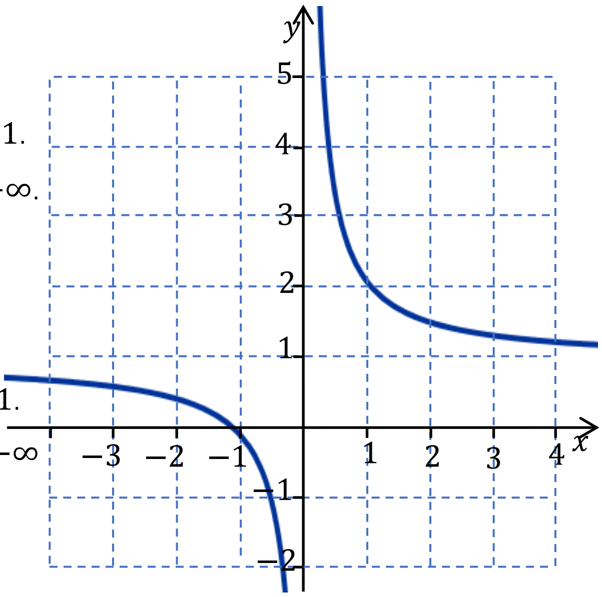
0^+ O denominador tende a zero por valores positivos.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x+1 \xrightarrow{} 1}{x \xrightarrow{} 0^-} = -\infty$$

1 O numerador tende a 1.

O limite tende a $-\infty$

0^- O denominador tende a zero por valores negativos.



$$y = \frac{x+1}{x}$$

Descrição	Representação	Resultado
O numerador tende a uma constante positiva e o denominador tende a zero por valores positivos.	$\lim_{x\to a}\frac{f(x) \xrightarrow{} C>0}{g(x) \xrightarrow{} 0^+}$	$+\infty$
O numerador tende a uma constante positiva e o denominador tende a zero por valores negativos.	$\lim_{x\to a}\frac{f(x) \xrightarrow{} C>0}{g(x) \xrightarrow{} 0^-}$	$-\infty$
O numerador tende a uma constante negativa e o denominador tende a zero por valores positivos.	$\lim_{x\to a}\frac{f(x) \xrightarrow{} C<0}{g(x) \xrightarrow{} 0^+}$	$-\infty$
O numerador tende a uma constante negativa e o denominador tende a zero por valores negativos.	$\lim_{x\to a}\frac{f(x) \xrightarrow{} C<0}{g(x) \xrightarrow{} 0^-}$	$+\infty$

Exemplo: Calcule os limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x+1}{x-1}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cos x - 2}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+2}{x-2}$

(d) $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{-4}{1+x}$

Solução: Note que em todos os casos o numerador tende a uma constante e o denominador tende a zero. Portanto, todos os limites são infinitos.

Para determinar se a resposta é $+\infty$ ou $-\infty$, precisamos analisar o sinal do numerador e do denominador.

(a) $$\lim_{x\to 1^+} \frac{\overset{3>0}{2x+1}}{\underset{0^+}{x-1}} = +\infty$$

(c) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\overset{-1<0}{\cos x - 2}}{\underset{0^+}{x}} = -\infty$$

(b) $$\lim_{x\to 2^-} \frac{\overset{6>0}{x^2+2}}{\underset{0^-}{x-2}} = -\infty$$

(d) $$\lim_{x\to -1^-} \frac{\overset{-4<0}{-4}}{\underset{0^-}{1+x}} = +\infty$$

Descrição	Representação	Resultado
O numerador tende a mais infinito e o denominador tende a uma constante positiva.	$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\overset{+\infty}{f(x)}}{\underset{C>0}{g(x)}}$	$+\infty$
O numerador tende a menos infinito e o denominador tende a uma constante positiva.	$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\overset{-\infty}{f(x)}}{\underset{C>0}{g(x)}}$	$-\infty$
O numerador tende a mais infinito e o denominador tende a uma constante negativa.	$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\overset{+\infty}{f(x)}}{\underset{C<0}{g(x)}}$	$-\infty$
O numerador tende a menos infinito e o denominador tende a uma constante negativa.	$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\overset{-\infty}{f(x)}}{\underset{C<0}{g(x)}}$	$+\infty$

Observação: As mesmas regras valem se trocarmos

"$x \to a$" por "$x \to a^+$" ou "$x \to a^-$".

Exemplo: Calcule os limites:

(a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\tan x}{2x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^2-5x+1}$ (c) $\lim\limits_{x\to\pi^+} \frac{\cot x}{3-x}$ (d) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{x}}{\cos x-2}$

Solução: Note que em todos os casos o numerador tende a infinito e o denominador tende a uma constante. Portanto, todos os limites são infinitos.

Para determinar se a resposta é $+\infty$ ou $-\infty$, precisamos analisar o sinal do numerador e do denominador.

(a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\overset{+\infty}{\tan x}}{\underset{\pi\geq 0}{2x}} = +\infty$

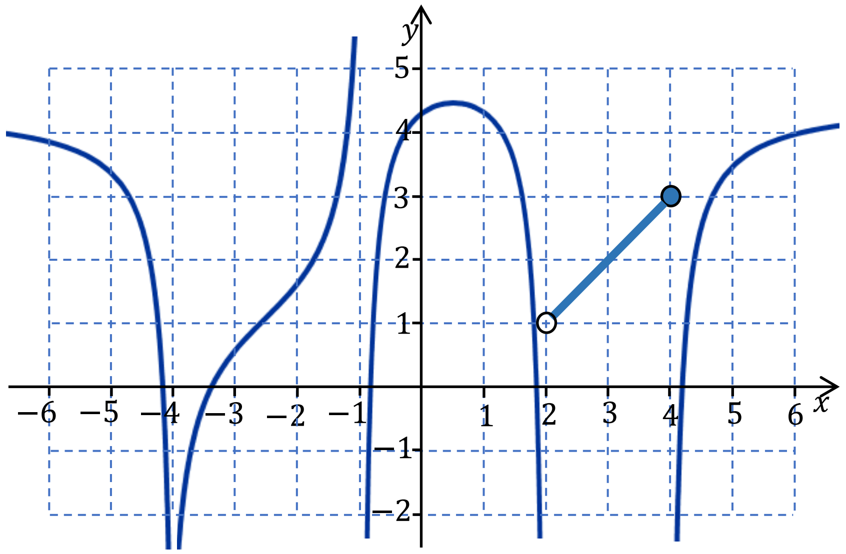
(c) $\lim\limits_{x\to\pi^+} \frac{\overset{+\infty}{\cot x}}{\underset{3-\pi\leq 0}{3-x}} = -\infty$

(b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\overset{-\infty}{\ln x}}{\underset{1\geq 0}{x^2-5x+1}} = -\infty$

(d) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\overset{-\infty}{\frac{1}{x}}}{\underset{-1\leq 0}{\cos x-2}} = +\infty$

20.4 Exercícios Propostos

1) Com base no gráfico abaixo, determine:



(a) $\lim\limits_{x\to-4^-} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x\to-4} f(x)$ (e) $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$

(b) $\lim\limits_{x\to-4^+} f(x)$ (d) $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$ (f) $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$

(g) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

(h) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

(i) $\lim_{x\to 2} f(x)$

(j) $\lim_{x\to 4^-} f(x)$

(k) $\lim_{x\to 4^+} f(x)$

(l) $\lim_{x\to 4} f(x)$

(m) As assíntotas verticais.

2) Determine os limites abaixo:

(a) $\lim_{x\to 2^-} \frac{x+5}{x-2}$

(b) $\lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{x-2}$

(c) $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+2}{x-1}$

(d) $\lim_{x\to -3^+} \frac{\sqrt{x+5}}{x+3}$

(e) $\lim_{x\to 2^+} \frac{3^x}{2-x}$

(f) $\lim_{x\to 3^-} \frac{5}{x^2-9}$

(g) $\lim_{x\to 3^-} \frac{x-5}{x^2-9}$

(h) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-5x+2}{x^2-4x+4}$

(i) $\lim_{x\to 0^+} \frac{2-3x}{\sqrt{x}}$

(j) $\lim_{x\to 3^-} \frac{5-2^x}{2x-6}$

(k) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x-4}{\sin x}$

(l) $\lim_{x\to \pi^-} \frac{10}{\tan x}$

(m) $\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt[3]{x^2+2}}{\ln x}$

(n) $\lim_{x\to 1^-} \frac{|x-4|}{\ln x}$

(o) $\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{25-x}}{x-9}$

(p) $\lim_{x\to 0} \frac{5+x}{x^2}$

(q) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\tan x}{2x-1}$

(r) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\tan x}{2x-1}$

(s) $\lim_{x\to \pi^+} \frac{\cot x}{x}$

(t) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\log_3 x}{\sqrt{x+\pi}}$

(u) $\lim_{x\to 0^+} \frac{|\log_2 x|}{x^2+3x-2}$

(v) $\lim_{x\to 0^+} \frac{2-\ln x}{5^{x+3}}$

(x) $\lim_{x\to \pi^-} \frac{2x+\csc x}{x^2-9}$

(z) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sqrt{\sec x}}{2-2x}$

20.5 Respostas

Exercício 1:

a) $-\infty$

b) $-\infty$

c) $-\infty$

d) $+\infty$

e) $-\infty$

f) $\nexists$

g) $-\infty$

h) 1

i) $\nexists$

j) 3

k) $-\infty$

l) $\nexists$

m) $x = -4, \quad x = -1,$
$x = 2, \quad x = 4$

Exercício 2:

a) $-\infty$

b) $+\infty$

c) $+\infty$

d) $+\infty$

e) $-\infty$

f) $-\infty$

g) $+\infty$

h) $-\infty$

i) $+\infty$

j) $+\infty$

k) $-\infty$

l) $-\infty$

m) $+\infty$

n) $-\infty$

o) $\nexists$

p) $+\infty$

q) $+\infty$

r) $-\infty$

s) $+\infty$

t) $-\infty$

u) $-\infty$

v) $+\infty$

x) $+\infty$

z) $-\infty$

21. Aula 3

21.1 Limites no Infinito

Como motivação para o estudo de limites no infinito, considere a função

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Pergunta: Quando x tende a $-\infty$ ou $+\infty$, o que acontece com $f(x)$?

Para responder esta pergunta, vamos considerar alguns valores de x e os valores correspondentes de $f(x)$.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
-10	$-0{,}1$
-100	$-0{,}01$
-1.000	$-0{,}001$
-10.000	$-0{,}0001$
-100.000	$-0{,}00001$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
10	$0{,}1$
100	$0{,}01$
1.000	$0{,}001$
10.000	$0{,}0001$
100.000	$0{,}00001$

Resposta: Ao fazermos $x \longrightarrow -\infty$ ou $x \longrightarrow +\infty$, aparentemente os valores de $f(x)$ se tornam cada vez mais próximos de 0.

O gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ está representado ao lado.

Note que:
Se $x \longrightarrow -\infty$ então $f(x) \longrightarrow 0.$
Se $x \longrightarrow +\infty$ então $f(x) \longrightarrow 0.$

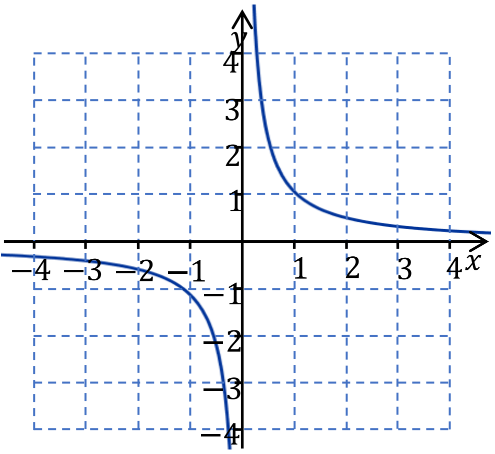
Em geral, se escreve:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Se lê: o limite de f quando x tende a menos infinito é igual a 0.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Se lê: o limite de f quando x tende a mais infinito é igual a 0.



Esta função é chamada de função recíproca.

No geral, limites do tipo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Os valores de x diminuem sem cota, isto é, x tende a menos infinito.

e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

Os valores de x aumentam sem cota, isto é, x tende a mais infinito.

são chamados de limites no infinito.

21.2 Propriedades dos limites no infinito

Supondo que existam os limites

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x)$$

as propriedades dadas na Aula 01 continuam válidas para limites no infinito.

Propriedade da soma/diferença

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to+\infty} f(x) \pm \lim_{x\to+\infty} g(x)$$

Propriedade da Potência

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to+\infty} f(x)\right]^n$$

Propriedade da multiplicação por constante

$$\lim_{x\to+\infty} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

Propriedade da Raiz

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to+\infty} f(x)}$$

Propriedade do Produto

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to+\infty} f(x) \cdot \lim_{x\to+\infty} g(x)$$

Propriedade do Módulo

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = \left|\lim_{x\to+\infty} f(x)\right|$$

Propriedade do Quociente

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to+\infty} f(x)}{\lim_{x\to+\infty} g(x)} \quad \left(\lim_{x\to a} g(x) \neq 0\right)$$

Obs.: Estas propriedades continuam válidas ao trocar $+\infty$ por $-\infty$.

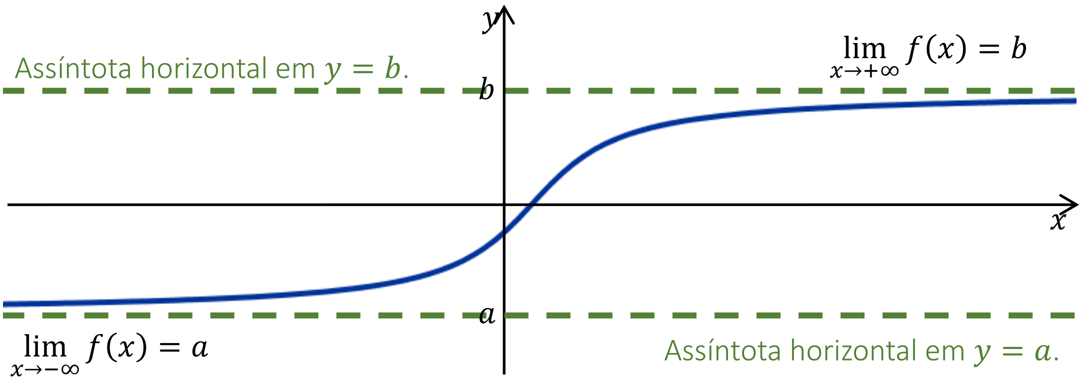
21.3 Assíntotas horizontais

Se os limites no infinito existem, e digamos,

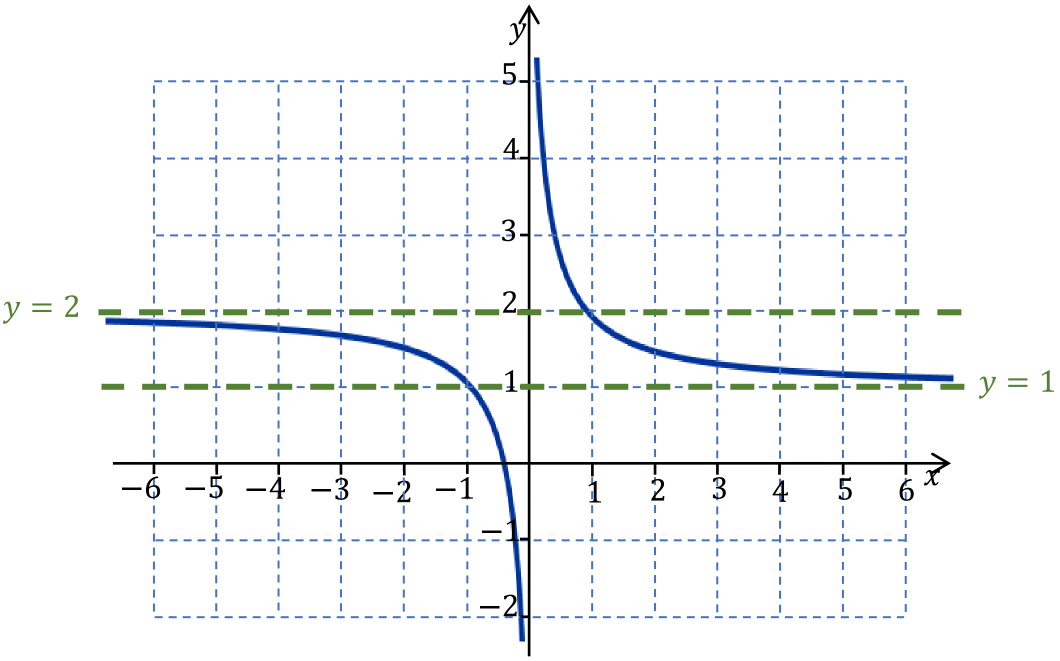
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = b$$

então as retas $y = a$ e $y = b$ são chamadas de assíntotas horizontais do gráfico de f.

Graficamente, as assíntotas horizontais são geralmente representadas por retas horizontais tracejadas, como nas figuras abaixo.



Exemplo: Considere o gráfico abaixo:

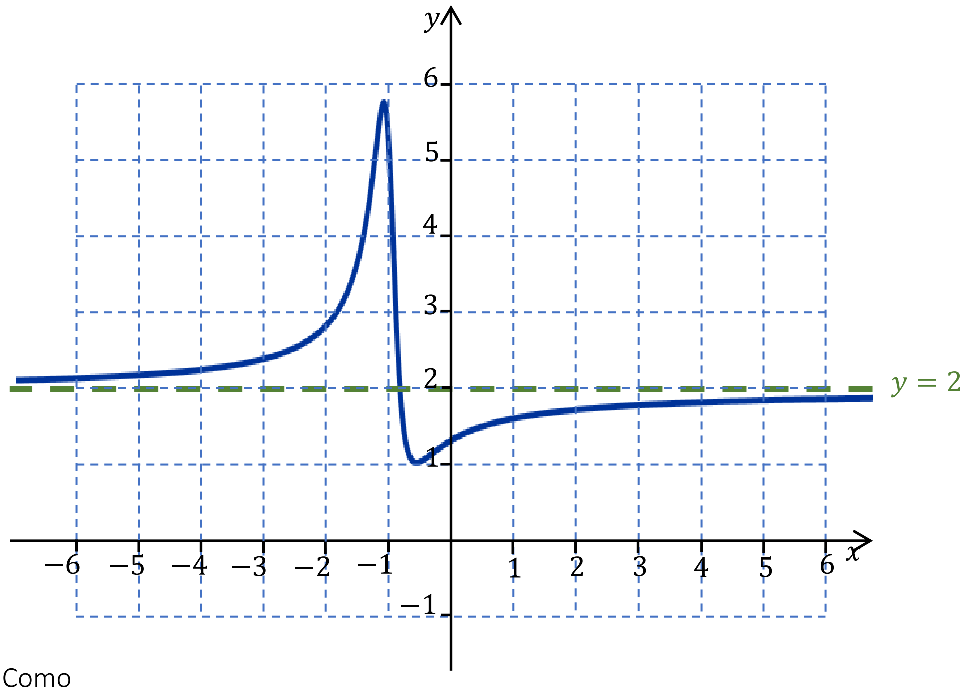


Como

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

então este gráfico possui duas assíntotas horizontais, dadas por $y = 1$ e $y = 2$.

Exemplo: Considere o gráfico abaixo:



Como

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

então este gráfico possui uma única assíntota horizontal, dada por $y = 2$.

21.4 Limites no infinito e funções quocientes

Teorema: Se r for um número racional positivo, então:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^r} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

quando for possível calcular este limite para $x \longrightarrow -\infty$.

Exemplo: Calcule os limites:

(a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$ (b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{5}{\sqrt{x}}$ (c) $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x^5} + 2\right)$ (d) $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2}\right)$

Solução:

(a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

(b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{5}{\sqrt{x}} = 5 \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = 5 \cdot 0 = 0$

(c) $\lim_{x\to-\infty} \left(\cancelto{0}{\frac{1}{x^5}} + 2\right) = 2$

(d) $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(1 - \cancelto{0}{\frac{1}{x}} + \cancelto{0}{\frac{1}{x^2}}\right) = 1$

Exemplo: Calcule o limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+3x^2-x+1}{x^3+2x}$$

Solução:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+3x^2-x+1}{x^3+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^3+3x^2-x+1}{x^3}}{\frac{x^3+2x}{x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cdot\frac{x^3}{x^3}+3\cdot\frac{x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+2\cdot\frac{x}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cdot1+3\cdot\cancelto{0}{\frac{1}{x}}-\cancelto{0}{\frac{1}{x^2}}+\cancelto{0}{\frac{1}{x^3}}}{1+2\cdot\cancelto{0}{\frac{1}{x^2}}}=\frac{2}{1}=2$$

Portanto,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+3x^2-x+1}{x^3+2x}=2.$$

Exemplo: Calcule o limite:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2+2x-3}{2x^3+3}$$

Solução:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2+2x-3}{2x^3+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{5x^2+2x-3}{x^3}}{\frac{2x^3+3}{x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{5\cdot\frac{x^2}{x^3}+2\cdot\frac{x}{x^3}-3\cdot\frac{1}{x^3}}{2\cdot\frac{x^3}{x^3}+3\cdot\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5\cdot\cancelto{0}{\frac{1}{x}}+2\cdot\cancelto{0}{\frac{1}{x^2}}-3\cdot\cancelto{0}{\frac{1}{x^3}}}{2+3\cdot\cancelto{0}{\frac{1}{x^3}}}=\frac{0}{2}=0$$

Portanto,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2+2x-3}{2x^3+3}=0.$$

Exemplo: Calcule o limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x+1}$$

Solução:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}}{\frac{x+1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\overset{\nearrow 0}{\frac{2}{x^2}}}}{1+\underset{\searrow 0}{\frac{1}{x}}}=\frac{\sqrt{1}}{1}=1$$

Portanto,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x+1}=1.$$

Exemplo: Calcule o limite:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+5x-2}}$$

Solução:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+5x-2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x-1}{|x|}}{\frac{\sqrt{x^2+5x-2}}{|x|}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x-1}{-x}}{\frac{\sqrt{x^2+5x-2}}{\sqrt{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x}{-x}-\frac{1}{-x}}{\sqrt{\frac{x^2+5x-2}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2+\overset{\nearrow 0}{\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+5\cdot\underset{\searrow 0}{\frac{1}{x}}-2\cdot\underset{\searrow 0}{\frac{1}{x^2}}}}=\frac{-2}{\sqrt{1}}=-2$$

Portanto,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+5x-2}}=-2.$$

21.5 Limites infinitos no infinito

Como motivação para o estudo de limites infinitos no infinito, considere a função

$$f(x) = x^2$$

Pergunta: Quando x tende a $-\infty$ ou $+\infty$, o que acontece com $f(x)$?

Para responder esta pergunta, vamos considerar alguns valores de x e os valores correspondentes de $f(x)$.

x	$f(x)$
-10	100
-100	10.000
-1.000	$1.000.000$
-10.000	$100.000.000$

x	$f(x)$
10	100
100	10.000
1.000	$1.000.000$
10.000	$100.000.000$

Resposta: Ao fazermos $x \longrightarrow -\infty$ ou $x \longrightarrow +\infty$, aparentemente os valores de $f(x)$ se tornam cada vez maiores.

Escreve-se

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

Matematicamente, se representa o comportamento deste tipo de função como:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Lê-se: o limite de f quando x tende a menos infinito é igual a menos infinito.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Lê-se: o limite de f quando x tende a menos infinito é igual a mais infinito.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

Lê-se: o limite de f quando x tende a mais infinito é igual a menos infinito.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Lê-se: o limite de f quando x tende a mais infinito é igual a mais infinito.

Estes limites são chamados de limites infinitos no infinito.

21.6 Funções quocientes

Situação	Resultado
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)\xrightarrow{} C>0}{g(x)\xrightarrow{} 0^+}$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)\xrightarrow{} C>0}{g(x)\xrightarrow{} 0^-}$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)\xrightarrow{} C<0}{g(x)\xrightarrow{} 0^+}$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)\xrightarrow{} C<0}{g(x)\xrightarrow{} 0^-}$	$+\infty$

Situação	Resultado
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)\xrightarrow{} +\infty}{g(x)\xrightarrow{} C>0}$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)\xrightarrow{} -\infty}{g(x)\xrightarrow{} C>0}$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)\xrightarrow{} +\infty}{g(x)\xrightarrow{} C<0}$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)\xrightarrow{} -\infty}{g(x)\xrightarrow{} C<0}$	$+\infty$

Observação: As mesmas regras valem se trocarmos

$$"x\to+\infty" \quad \text{por} \quad "x\to-\infty".$$

Exemplo: Calcule os limites:

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{2^x+1}$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-5}{e^{-2x}}$

Solução: Precisamos analisar o sinal do numerador e do denominador para determinar a resposta do limite.

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1\xrightarrow{} +\infty}{2^x+1\xrightarrow{} 1>0} = +\infty$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-5\xrightarrow{} -5<0}{e^{-2x}\xrightarrow{} 0^+} = -\infty$

21.7 Funções polinomiais e funções racionais

Para calcular limites no infinito de funções polinomiais ou funções racionais, basta considerar os monômios de maior grau, que são também chamados de termos dominantes, para calcular o limite.

Exemplo: Calcule os limites:

(a) $\lim_{x \to -\infty} x^5 - 100x^4 + 2x^2 - 10.000$

(b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{25x^3 - 12x^2 + 80x}{3x^3 + 1}$

Solução:

(a) $\lim_{x \to -\infty} x^5 - 100x^4 + 2x^2 - 10.000 \;=\; \lim_{x \to -\infty} x^5 \;=\; -\infty$

(b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{25x^3 - 12x^2 + 80x}{3x^3 + 1} \;=\; \lim_{x \to +\infty} \frac{25x^3}{3x^3} \;=\; \lim_{x \to +\infty} \frac{25}{3} \;=\; \frac{25}{3}$

21.8 Exercícios Propostos

1) Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{5x + 6}$

(b) $\lim_{x \to +\infty} \left(3 - \frac{5}{x^2 + 1}\right)$

(c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2\sqrt{x} + x^2}{2x^2 - 1}$

(d) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{5 - x}$

(e) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{5x^2 - 2}}{x + 3}$

(f) $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{5x^2 - 2}}{x + 3}$

(g) $\lim_{x \to -\infty} x^4$

(h) $\lim_{x \to +\infty} (x^6 + 2x)$

(i) $\lim_{x \to -\infty} (x^7 + 2x^4 - 3x^3)$

(j) $\lim_{x \to -\infty} (x^3 + 7x^4 - 2x^5)$

(k) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{x + 3}$

(l) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 4x + 2}{2x^2 - 7x + 1}$

(m) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 + x^3 - 3}{10 - 3x}$

2) Em cada caso, verifique se a função dada possui assíntotas horizontais e\ou verticais.

No caso afirmativo, determine as equações destas assíntotas.

(a) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2+5x-2}{x^2-9}$

(c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x-5}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^3+x}{x^2-5x+6}$

(e) $f(x) = \dfrac{3x^3+x-1}{x^2+2x+2}$

21.9 Respostas

Exercício 1:

a) 0

b) 3
1/2

c) 1/2

d) $+\infty$

e) $\sqrt{5}$

f) $-\sqrt{5}$

g) $+\infty$

h) $+\infty$

i) $-\infty$

j) $+\infty$

k) $-\infty$

l)

m) $+\infty$

Exercício 2:

a) Assíntotas verticais: Não possui.
Assíntotas horizontais: $y = 2$

$x = \pm 3$
b) Assíntotas verticais: $y = 1$
Assíntotas horizontais:

$x = 5$
c) Assíntotas verticais: $y = \pm 1$
Assíntotas horizontais: $x = 2$ e $x = 3$

d) Assíntotas verticais:
Assíntotas horizontais: Não possui.

e) Assíntotas verticais: Não possui.

22. Aula 4

22.1 Funções contínuas

Definição: Uma função f é contínua em um número $x = a$ se forem satisfeitas as seguintes condições:

1) $f(a)$ existe; 2) Existe o limite $\lim_{x\to a} f(x)$; 3 $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Do contrário, se diz que a função f é descontínua em $x = a$.

Observação: As condições acima dizem que:

1) $f(a)$ existe.

Quer dizer que o número a pertence ao domínio da função f, ou seja, é possível calcular $f(a)$.

2) Existe o limite $\lim_{x\to a} f(x)$.

Quer dizer que os limites laterais existem e são iguais entre si. $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$

3) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Quer dizer que valores encontrados em 1) e 2) são iguais entre si.

Exemplo: Determine se a função representada pelo gráfico a seguir é contínua em cada número dado. Justifique.

(a) $x = -2$

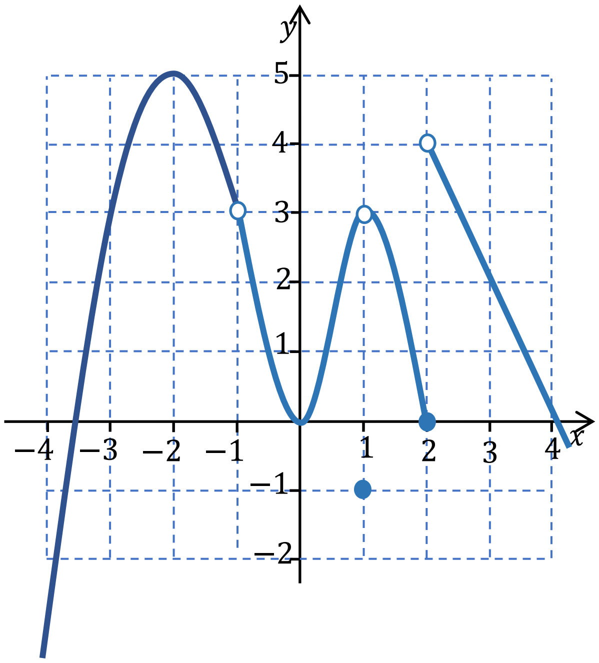
(b) $x = -1$

(c) $x = 0$

(d) $x = 1$

(e) $x = 2$

(f) $x = 3$



Solução:

(a) Como

$$f(-2) = 5 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to -2} f(x) = 5$$

então f é contínua em $x = -2$.

(b) Como

$$f(-1) \nexists \quad \text{e} \quad \lim_{x\to -1} f(x) = 3$$

então f é descontínua em $x = -1$.

Exemplo: Determine se a função representada pelo gráfico a seguir é contínua em cada número dado. Justifique.

(a) $x = -2$

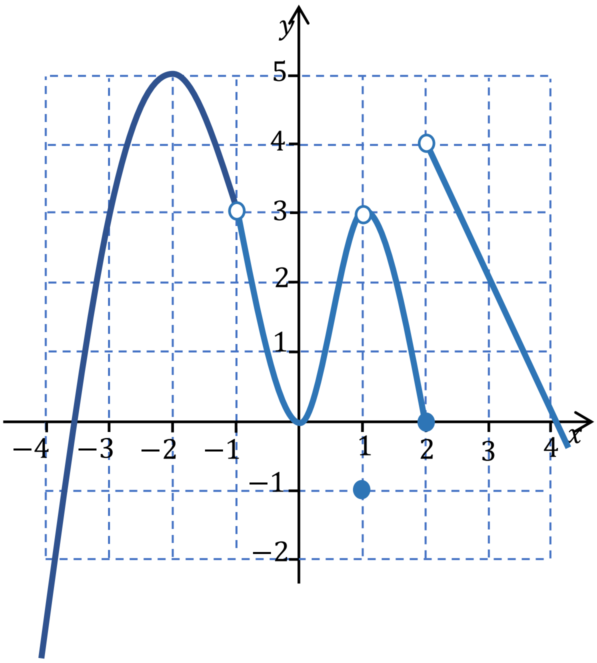
(b) $x = -1$

(c) $x = 0$

(d) $x = 1$

(e) $x = 2$

(f) $x = 3$



Solução:

(c) Como

$$f(0) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

então f é contínua em $x = 0$.

(d) Como

$$f(1) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1} f(x) = 3$$

então f é descontínua em $x = 1$.

Exemplo: Determine se a função representada pelo gráfico a seguir é contínua em cada número dado. Justifique.

(a) $x = -2$

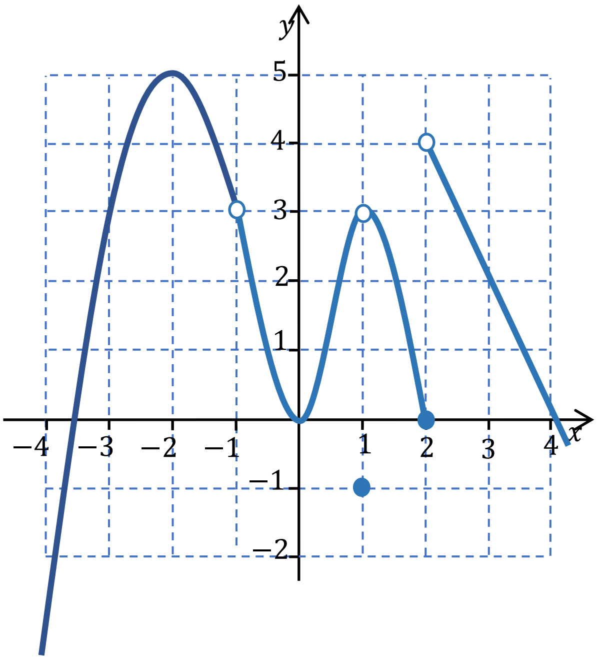
(b) $x = -1$

(c) $x = 0$

(d) $x = 1$

(e) $x = 2$

(f) $x = 3$



Solução:

(e) Como

$$f(2) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 2} f(x) \nexists$$

então f é descontínua em $x = 2$.

(f) Como

$$f(3) = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 3} f(x) = 2$$

então f é contínua em $x = 3$.

Exemplo: Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 - 3x + 4, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

(a) Verifique se f é contínua em $x = 1$.

(b) Esboce o gráfico desta função.

Solução: É necessário verificar cada uma das condições abaixo!

1) $f(1)$ existe. Sim! $f(1) = 1 + 1 = 2.$

2) Existe o limite $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$. Sim! $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x+1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 - 3x + 4) = 2 \end{cases}$

3) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$. Sim!

Conclui-se então que f é contínua em $x = 1$.

Exemplo: Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 - 3x + 4, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

(a) Verifique se f é contínua em $x = 1$.

(b) Esboce o gráfico desta função.

Solução: A função dada foi definida por duas sentenças, portanto:

$y = x + 1$ em $(-\infty, 1]$

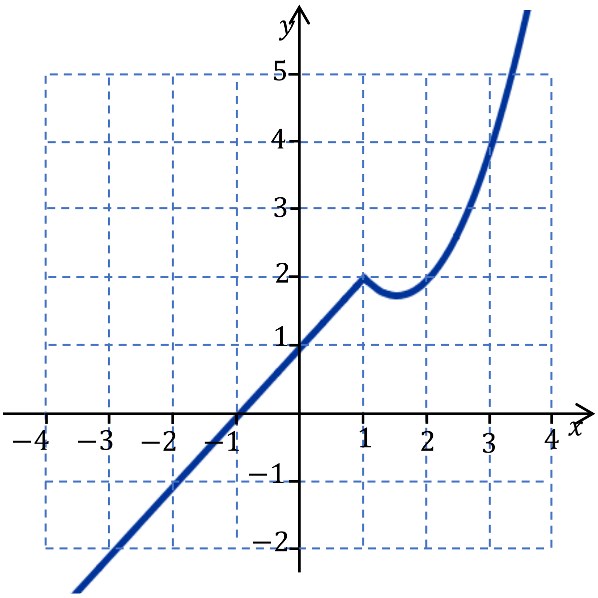
Função do primeiro grau!

O gráfico é uma reta!

$y = x^2 - 3x + 4$ em $(1, +\infty)$

Função do segundo grau!

O gráfico é uma parábola!



22.2 Classificação de descontinuidades

Descontinuidade removível: Existe o limite

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

mas uma das seguintes situações acontece:

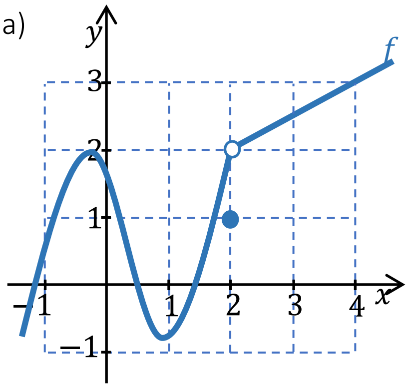
(i) $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$. ou (ii) f não está definida em $x = a$.

Neste caso, se diz que a função f possui uma **descontinuidade removível** em $x = a$.

"o gráfico de f tem um furo em $x = a$."

Exemplo: Em cada caso, classifique a descontinuidade da função em $x = 2$.

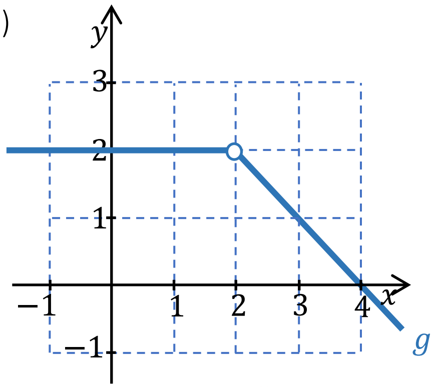
(a)



existe $\lim_{x\to 2} f(x$ existe $f(2)$ porém $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$.

Descontinuidade removível em $x = 2$.

(b)



existe $\lim_{x\to 2} g(x)$ não existe $g(2)$

Descontinuidade removível em $x = 2$.

Descontinuidade em salto: Os limites laterais existem e são diferentes entre si, ou seja,

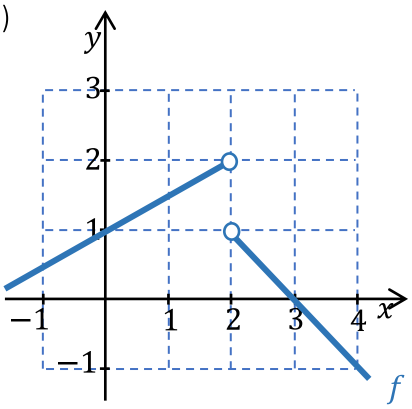
(i) $\lim_{x\to a^-} f(x)$ *existe* (ii) $\lim_{x\to a^+} f(x)$ *existe* (iii) $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$.

Neste caso, se diz que a função f possui uma **descontinuidade em salto** em $x = a$.

"o gráfico de f tem um salto em $x = a$."

Exemplo: Em cada caso, classifique a descontinuidade da função em $x = 2$.

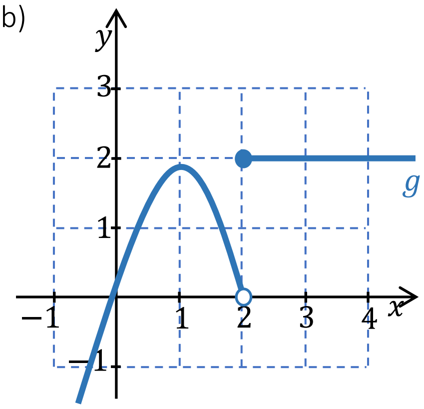
(a)



$2 = \lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x) = 1.$

Descontinuidade em salto em $x = 2$.

(b)



$0 = \lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x) = 2.$

Descontinuidade em salto em $x = 2$.

22.3 Funções contínuas

Exemplo: Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 2x+5, & \text{se } x < -1 \\ 4x^2-1, & \text{se } -1 < x < 1 \\ 1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

(a) f é contínua em $x = 1$?

(b) f é contínua em $x = -1$?

(c) Esboce o gráfico de f.

Solução: (a) Como

1) $f(1)$ existe? Sim! $f(1) = 1$.

2) Existe o limite $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. Não!
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 4x^2 - 1 = 3 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 1 = 1 \end{cases}$$

Conclui-se, portanto, que f é descontínua em $x = 1$.

Exemplo: Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 2x+5, & \text{se } x < -1 \\ 4x^2-1, & \text{se } -1 < x < 1 \\ 1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

(a) f é contínua em $x = 1$?

(b) f é contínua em $x = -1$?

(c) Esboce o gráfico de f.

Solução: (b) Como

1) $f(-1)$ existe? Não!

Conclui-se que f é descontínua em $x = -1$.

Exemplo: Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 2x+5, & \text{se } x < -1 \\ 4x^2 - 1, & \text{se } -1 < x < 1 \\ 1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

(a) f é contínua em $x = 1$?

(b) f é contínua em $x = -1$?

(c) Esboce o gráfico de f.

Solução: A função dada foi definida por três sentenças, portanto:

$y = 2x + 5$ em $(-\infty, \ -1)$

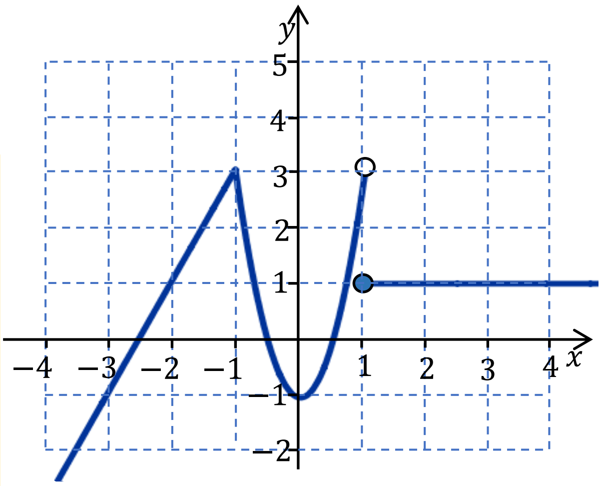
Função do primeiro grau!

$y = 4x^2 - 1$ em $(-1, \ 1)$

Função do segundo grau!

$y = 1$ em $[1, \ +\infty)$

Função constante!



22.4 Continuidade lateral

Definição: Uma função f é contínua à direita em um número a se forem satisfeitas as seguintes condições:

1) $f(a)$ existe; 2) Existe o limite $\lim_{x \to a^+} f(x)$; 3) $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

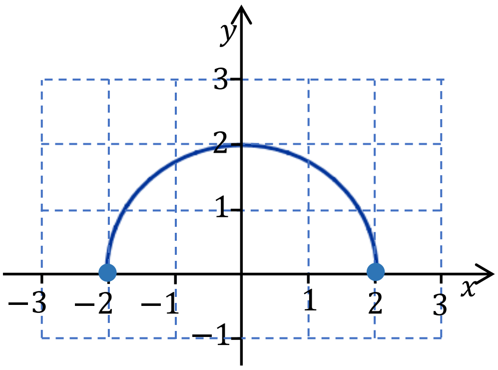
Definição: Uma função f é contínua à esquerda em um número a se forem satisfeitas as seguintes condições:

1) $f(a)$ existe; 2) Existe o limite $\lim_{x \to a^-} f(x)$; 3) $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Exemplo: A função

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

é contínua em $[-2, \ 2]$, sendo contínua à direita em $x = -2$ e contínua à esquerda em $x = 2$.



22.5 Propriedades das funções contínuas

Continuidade da Soma/diferença: Sejam f e g funções contínuas em $x = a$.

Então $f \pm g$ *é contínua em* $x = a$.

Isto é, a soma/diferença de funções contínuas é uma função contínua.

Continuidade do produto: Sejam f e g funções contínuas em $x = a$.

Então $f \cdot g$ *é contínua em* $x = a$.

Isto é, o produto de funções contínuas é uma função contínua.

Continuidade do quociente: Sejam f e g funções contínuas em $x = a$ tais que $g(a) \neq 0$.

Então $\frac{f}{g}$ é contínua em $x = a$.

Isto é, o quociente de funções contínuas é uma função contínua.

22.6 Continuidade das funções elementares

Continuidade das funções polinomiais:

As funções polinomiais são contínuas em todos números reais.

Isto é, se f é uma função polinomial, então:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Exemplo: Calcule o limite:

$$\lim_{x \to 3} x^2 - 3x + 2$$

Solução: Como a função $f(x) = x^2 - 3x + 1$ é polinomial, o limite acima pode ser calculado facilmente como:

$$\lim_{x \to 3} (x^2 - 3x + 2) = (3)^2 - 3(3) + 2 \quad = 2.$$

Continuidade das funções racionais:

As funções racionais são contínuas em todos números dos seu domínios.

Isto é, se f é uma função racional (quociente de duas funções polinomiais) e $a \in D(f)$, então:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Exemplo: Calcule o limite:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{2x^4-x+3}$$

Solução: Como a função f é racional e $2 \in D(f)$, o limite acima pode ser calculado facilmente como:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{2x^4-x+3} = \frac{(2)^3-1}{2(2)^4-(2)+3} = \frac{7}{33}.$$

Continuidade das funções raízes:

As funções raízes são contínuas em todos números dos seu domínios.

Isto é, se f é uma função raiz e $a \in D(f)$, então:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Exemplo: Calcule os limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 16}\sqrt{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to -32}\sqrt[5]{x}$

Solução: Os limites acima podem ser calculados facilmente como:

(a) $\lim\limits_{x\to 16}\sqrt{x} = \sqrt{16} = \sqrt{(4)^2} = 4.$

(b) $\lim\limits_{x\to -32}\sqrt[5]{x} = \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2.$

Continuidade das funções trigonométricas:

As funções trigonométricas são contínuas em todos números dos seu domínios.

Isto é, se f é uma função trigonométrica e $a \in D(f)$, então:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Exemplo: Calcule os limites:

(a) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\sin x$

(b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\tan x$

Solução: Os limites acima podem ser calculados facilmente como:

(a) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\sin x = sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

(b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\tan x = tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

Continuidade das funções exponenciais e logarítmicas:

As funções exponenciais e logarítmicas são contínuas em todos números dos seu domínios.

Isto é, se f é uma função exponencial ou uma função logarítmica e $a \in D(f)$, então:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Exemplo: Calcule os limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 5} 2^x$

(b) $\lim\limits_{x\to 9} \log_3 x$

Solução: Os limites acima podem ser calculados facilmente como:

(a) $\lim\limits_{x\to 5} 2^x \quad = 2^5 \quad = 32.$

(b) $\lim\limits_{x\to 9} \log_3 x \quad = log_3 9 \quad = 2.$

Continuidade da função composta:

Se uma função f é contínua em $x = a$ e a função g é contínua em $f(a)$ então a função composta gof é contínua em $x = a$.

Isto é,

$$\lim_{x\to a}(f \circ g)(x) = (f \circ g)(a).$$

Exemplo: Calcule os limites:

(a) $\lim\limits_{x\to -1} cos\,(x^2 - 1)$

(b) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x^3 + 2x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} 2^{3-\tan x}$

Solução: Utilizando a continuidade da função composta temos:

(a) $\lim\limits_{x\to -1} cos\,(x^2 - 1) = \quad cos((-1)^2 - 1)cos(0) = 1.$

(b) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x^3 + 2x} = \quad \sqrt{(2)^3 + 2(2)} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} 2^{3-\tan x} = 2^{3-tan\,0} \quad = 2^{3-0} \quad = 2^3 \quad = 8.$

22.7 Exercícios Propostos

1) Determine se a função representada pelo gráfico a seguir é contínua em cada número dado.

(a) $x = -6$

(b) $x = -5$

(c) $x = -4$

(d) $x = -3$

(e) $x = -2$

(f) $x = -1$

(g) $x = -\frac{1}{2}$

(h) $x = 0$

(i) $x = 1$

(j) $x = \frac{5}{4}$

(k) $x = 2$

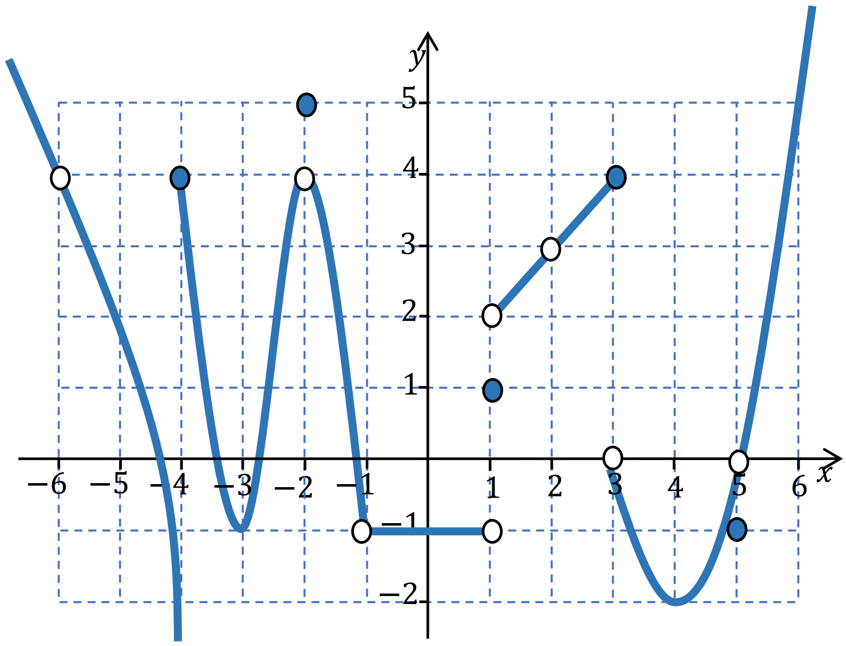
(l) $x = 3$

(m) $x = \pi$

(n) $x = 4$

(o) $x = 5$

(p) $x = 6$



2) Usando as propriedades dos limites, diga se as funções abaixo são contínuas nos pontos dados.

(a) $f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{se } x \leq 5 \\ 3x-7, & \text{se } x > 5 \end{cases}$ em $x = 5$

(b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{se } x \neq 3 \\ 7, & \text{se } x = 3 \end{cases}$ em $x = 3$

(c) $f(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{se } x < 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \\ x^2 - \sqrt{x}, & \text{se } x > 1 \end{cases}$ em $x = 1$

(d) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ 2^{3x} - 1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$ em $x = 0$

(e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & \text{se } x \neq 0 \\ 2, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ em $x = 0$

(f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+6}{x+3}, & \text{se } x \neq -3 \\ 2, & \text{se } x = -3 \end{cases}$ em $x = -3$

(g) $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{5x+7}, & \text{se } x < 4 \\ x-1, & \text{se } x > 4 \end{cases}$ em $x = 4$

(h) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-25}{x-5}, & \text{se } x < 5 \\ 10, & \text{se } x = 5 \\ \dfrac{10x-50}{x-5}, & \text{se } x > 5 \end{cases}$ em $x = 5$

3) Determine o valor de m para que a função abaixo seja contínua em $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} 12 - x^3, & \text{se } x < 2 \\ m, & \text{se } x = 2 \\ \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

4) Determine o valos de k para que $g(x)$ seja contínua em $x = -3$.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x+3}, & \text{se } x \neq -3 \\ k, & \text{se } x = -3 \end{cases}$$

22.8 Respostas

Exercício 1:

a) Não

b) Sim

c) Não

d) Sim

e) Não

f) Não

g) Sim

h) Sim

i) Não

j) Sim

k) Não

l) Não

m) Sim

n) Sim

o) Não

p) Sim

Exercício 2:

a) Contínua em $x = 5$

b) Descontínua em $x = 3$

c) Descontínua em $x = 1$

d) Contínua em $x = 0$

e) Descontínua em $x = 0$

f) Contínua em $x = -3$

g) Descontínua em $x = 4$

h) Contínua em $x = 5$

Exercício 3:

m = 4

Exercício 4:

k = - 6

23. Aula 5

23.1 Indeterminações

Nesta aula, iremos estudar algumas formas indeterminadas que aparecem muito frequentemente no Cálculo.

As indeterminações mais frequentes são representadas por:

$\frac{0}{0}$	Quociente de duas funções tais que, no limite, a função do numerador e a do denominador tendem a zero simultaneamente.
$\frac{\infty}{\infty}$	Quociente de duas funções tais que, no limite, a função do numerador e a do denominador tendem a infinito simultaneamente.
$\infty - \infty$	Diferença de duas funções tais que, no limite, ambas tendem a infinito simultaneamente.
$0 \cdot \infty$	Produto de duas funções tais que, no limite, uma tende a zero e outra tende a infinito.
1^{∞}	Potência de duas funções tais que, no limite, a base tende a um e o expoente tende a infinito.
0^{0}	Potência de duas funções tais que, no limite, a base e o expoente tende a zero simultaneamente.
∞^{0}	Potência de duas funções tais que, no limite, a base tende a infinito e o expoente tende a zero.

Nesta aula, estudaremos quatro tipos de indeterminações.

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \infty - \infty \qquad 0 \cdot \infty$$

Exemplos:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\overset{\nearrow\, 0}{x^2-4}}{\underset{\searrow\, 0}{x^2-x-2}}$$

Indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\overset{\infty}{x} - \overset{\infty}{\sqrt{x+1}}\right)$$

Indeterminação do tipo $\infty - \infty$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overset{\nearrow\, \infty}{3x^2-4}}{\underset{\searrow\, \infty}{2x^2-4x+4}}$$

Indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\overset{0}{\frac{1}{\sqrt{x}}}\cdot\overset{\infty}{(x^2+1)}$$

Indeterminação do tipo $0 \cdot \infty$

Exemplo: Calcule o limite

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-x-2}$$

Solução: Primeiramente note que

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-x-2} \qquad \begin{array}{l} x^2-4 \to 0 \quad (2)^2-4=4-4=0 \\ x^2-x-2 \to 0 \quad (2)^2-(2)-2=4-4=0 \end{array}$$

Indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$

Note que:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{(x+1)\cancel{(x-2)}} = \lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x+1} = \frac{4}{3}.$$

$$x^2-4=(x+2)(x-2)$$

$$x^2-x-2=(x+1)(x-2)$$

Observação: O fator $x-2$ que “causava” a indeterminação no exemplo acima pode ser simplificado por meio de uma fatoração e conseguimos constatar que, neste caso, o limite existe e é igual a $\frac{4}{3}$.

Exemplo: Calcule o limite

$$\lim_{x\to 4}\frac{2x-8}{\sqrt{x}-2}$$

Solução: Primeiramente note que

$$\lim_{x\to 4}\frac{2x-8}{\sqrt{x}-2} \qquad \begin{array}{l} 2x-8 \to 0 \quad 2(4)-8=8-8=0 \\ \sqrt{x}-2 \to 0 \quad \sqrt{4}-2=2-2=0 \end{array}$$

Indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$

Note que:

$$\lim_{x\to 4}\frac{2x-8}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to 4}\frac{2x-8}{\sqrt{x}-2}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x\to 4}\frac{2\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)}{\cancel{x-4}}$$

$$= \lim_{x\to 4} 2\,(\sqrt{x}+2) = 2\,(\sqrt{4}+2) = 8\,\cdot$$

$$2x-8=2(x-4) \quad (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)=\left(\sqrt{x}\right)^2-2^2=x-4$$

Exemplo: Calcule o limite

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-2x^2+5}{3x^5+7x^4-4x}$$

Solução: Primeiramente note que

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-2x^2+5 \xrightarrow{} -\infty}{3x^5+7x^4-4x \xrightarrow{} -\infty}$$

Indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Como neste caso temos uma função racional (quociente de duas funções polinomiais) , basta considerar os monômios de maior grau :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-2x^2+5}{3x^5+7x^4-4x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{3x^5} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3x^2} = 0.$$

Exemplo: Calcule o limite

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Solução: Primeiramente note que

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x \xrightarrow{} -\infty}{\sqrt{x^2+1} \xrightarrow{} +\infty}$$

Indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Note que:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2}}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x}{|x|}}{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x}{-x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\cancelto{0}{\frac{1}{x^2}}}} = \frac{-1}{\sqrt{1}} = -1.$$

Exemplo: Calcule o limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x+1}\right)$$

Solução: Como

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\overset{\infty}{x}-\overset{\infty}{\sqrt{x+1}}\right)$$

Indeterminação
do tipo

$\infty-\infty$

temos uma indeterminação do tipo $\infty-\infty$.

Para calcular este limite, fazemos:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x+1}\right)\cdot\left(\frac{x+\sqrt{x+1}}{x+\sqrt{x+1}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2}{x+\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-1}{x+\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2-x-1}{x^2}}{\frac{x+\sqrt{x+1}}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x}{x^2}+\sqrt{\frac{x}{x^4}+\frac{1}{x^4}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\overset{0}{\frac{1}{x}}-\overset{0}{\frac{1}{x^2}}}{\underset{0}{\frac{1}{x}}+\sqrt{\underset{0}{\frac{1}{x^3}}+\underset{0}{\frac{1}{x^4}}}}=+\infty.$$

Exemplo: Calcule o limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot(x^2+1)\right)$$

Solução: Como

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\overset{0}{\frac{1}{\sqrt{x}}}\cdot\overset{+\infty}{(x^2+1)}\right)$$

Indeterminação
do tipo

$0\cdot\infty$

temos uma indeterminação do tipo $\mathbf{0}\cdot\infty$.

Para calcular este limite, fazemos:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot(x^2+1)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\overset{+\infty}{x^{\frac{3}{2}}}+\overset{0}{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)=+\infty.$$

Exemplo: Calcule o limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}(\sqrt{2x}-100)\right)$$

Solução: Como

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\overset{\nearrow 0}{\frac{1}{x^2}}(\overset{\nearrow +\infty}{\sqrt{2x}-100})\right)$$

Indeterminação
do tipo
$0\cdot\infty$

temos uma indeterminação do tipo $\mathbf{0}\cdot\infty$.

Para calcular este limite, fazemos:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\cdot(\sqrt{2x}-100)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2x}}{x^2}-\frac{100}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\overset{\nearrow 0}{\frac{\sqrt{2}}{x^{\frac{3}{2}}}}-\overset{\nearrow 0}{\frac{100}{x^2}}\right)=\quad 0.$$

23.2 Exercícios Propostos

1) Calcule os limites indicados:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$

b) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-8x+16}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-6x+9}{x-3}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-2}\;-\sqrt{x^2+10}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{x^2+x}(\sqrt{x}-5)\right)$

f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$

g) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x-6}{x^2-6x+9}$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-9x+20}{x^3-5}$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+4x^2}}{4+x}$

k) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

l) $\lim\limits_{x\to 11}\dfrac{11-x}{x^2-121}$

m) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+6)\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+3}}$

n) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^2+2x+1}$

2) Calcule os limites indicados:

a) $\lim\limits_{x\to-7}\dfrac{49+14x+x^2}{7+x}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x-1}{2x^2-8x+7}$

c) $\lim\limits_{s\to9}\dfrac{9-s}{3-\sqrt{s}}$

d) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{x^2-7x+12}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+x}{x^2-7x}$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{49-x^2}{7+x}$

g) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(4-x^2)}{x^2-4x+4}$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3x^2+x}\,-2x$

i) $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{4}{(x+9)(3-x)}$

j) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x}-5}{x^2-25}$

k) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h}$

l) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}$

m) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^3}{2x^3+1}$

23.3 Respostas

Exercício 1:

a) 6

b) ∄

c) -∞

d) -∞

e) 0

f) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

g) +∞

h) 0

i) -1

j) 2

k) -1

l) $-\frac{1}{22}$

m) $\frac{1}{2}$

n) 1

Exercício 2:

a) 0

b) 0

c) 6

d) 1

e) 3

f) +∞

g) 0

h) -∞

i) -∞

j) ∄

k) ½

l) ½

m) -½

24. Aula 6

24.1 Teorema do confronto

Em alguns limites, é bastante trabalhoso obter o valor do limite diretamente. Neste caso, se torna útil uma tentativa de cálculo utilizando o Teorema do Confronto.

Este teorema afirma que se uma função f está limitada por outras duas funções, g e h, *em uma vizinhança do "a"* e se g e h tiverem o mesmo limite quando $x \to a$, então f também terá esse limite $x \to a$.

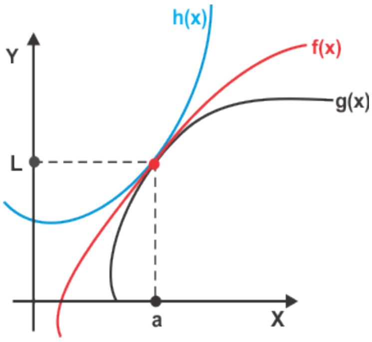
Teorema do Confronto: Suponha que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para qualquer x em um intervalo abertos contendo a, exceto possivelmente em a.

Suponha também que

$$lim_{x \to a} g(x) = lim_{x \to a} h(x) = L$$

Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$



Observação: O Teorema do Confronto continua válido se substituirmos $x \to a$ por $x \to a^+$ ou $x \to a^-$.

Exemplo: Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e suponha que

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

onde $g(x) = -x^2 + 4x - 3$ e $h(x) = x^2 - 4x + 5$.

Determine

$$\lim_{x \to 2} f(x).$$

Solução: Como

$$-x^2 + 4x - 3 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 5$$

e

$$lim_{x \to 2}(-x^2 + 4x - 3) = -(2)^2 + 4(2) - 3 = 1$$

$$lim_{x \to 2}(x^2 - 4x + 5) = 2^2 - 4(2) + 5 = 1$$

segue do Teorema do Confronto que:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 1.$$

Exemplo: Determine

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Solução: Como

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

temos

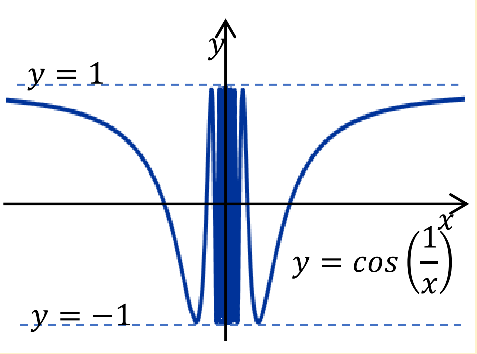
$$-1\cdot x \leq x\cdot cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1\cdot x$$

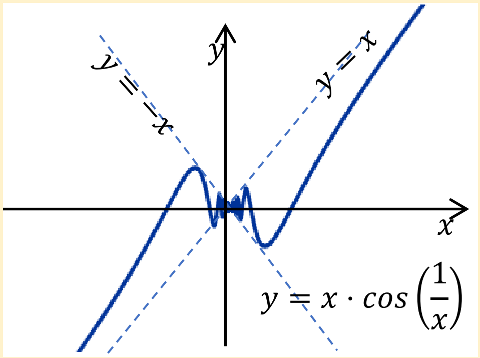
Como

$$\lim_{x\to 0^+} -x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

temos, pelo Teorema do Confronto, que

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$





24.2 Limites Fundamentais

Existem alguns limites que são chamados de limites fundamentais.

São eles:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$$

primeiro limite fundamental

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

segundo limite fundamental

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = ln\, a \quad (onde\ a > 0)}$$

terceiro limite fundamental

Observação: Note que os três limites fundamentais são indeterminações.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\overset{\to 0}{\sin x}}{\underset{\to 0}{x}}$$

Indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\underset{\to 1}{1+\frac{1}{x}}\right)^{\overset{\to\infty}{x}}$$

Indeterminação do tipo 1^∞

$$\lim_{x\to 0}\frac{\overset{\to 0}{a^x-1}}{\underset{\to 0}{x}}$$

Indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$

O primeiro limite fundamental é dado por:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$$

Exemplo: Calcule os limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{8x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{2x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 7x}$

Importante: Em geral, para calcular um limite fundamental, utilizamos uma substituição conveniente na variável do limite.

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{8x}$

Solução: Fazemos

$u = 8x$ ⇐ Substituição

Se $u = 8x$ e $x \to 0$ então $u \to 0$.

Portanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{8x} = \lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 1.$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{2x}$

Solução: Fazemos

$u = 5x$ ⇐ Substituição

Se $u = 5x$ e $x \to 0$ então $u \to 0$. Portanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}\cdot\frac{5}{5} = \frac{5}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x} = \frac{5}{2}\cdot\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = \frac{5}{2}.$$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 7x}$

Solução: Neste caso, vamos reescrever o limite dado da seguinte forma:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 7x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot\frac{3x}{3x}}{\sin 7x\cdot\frac{7x}{7x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin 7x}{7x}}\cdot\frac{3x}{7x}$$

$$= \frac{3}{7}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin 7x}{7x}} = \frac{3}{7}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}} = \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{1} = \frac{3}{7}.$$

O segundo limite fundamental é dado por:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

No limite acima, o valor do limite permanece o mesmo se trocarmos “$+\infty$” por “$-\infty$”.

Por este motivo, é comum escrever-se $x \to \pm\infty$ no limite acima, ou seja,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

Exemplo: Calcule os limites:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{4x}\right)^{4x}$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{2x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

Importante: Em geral, para calcular um limite fundamental, utilizamos uma substituição conveniente na variável do limite.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{4x}$

Solução: Fazemos

$u = 4x$ ⇦ Substituição

Se $u = 4x$ e $x \to +\infty$ então $u \to +\infty$. Portanto

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{4x} = \lim_{u\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u} = e.$$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x}$

Solução: Fazemos

$u = -\frac{x}{3}$ ⇦ Substituição

Se $u = -\frac{x}{3}$ e $x \to +\infty$ então $u \to -\infty$.

Portanto

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\left(-\frac{x}{3}\right)}\right)^{2x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\left(-\frac{x}{3}\right)}\right)^{\left(-\frac{x}{3}\right)\cdot(-6)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\left(-\frac{x}{3}\right)}\right)^{\left(-\frac{x}{3}\right)}\right)^{-6} = \left(\lim_{u\to-\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right)^{-6} = e^{-6}.$$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

Solução: Fazemos

$u = \frac{1}{x}$ ⇦ Substituição

Se $u = \frac{1}{x}$ e $x \to 0$ então $u \to \infty$.

Portanto

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{u\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u} = e.$$

Importante: O limite

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

dado pelo exemplo acima também é chamado de segundo limite fundamental.

O terceiro limite fundamental é dado por:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \qquad (onde\ a > 0)$$

Exemplo: Calcule os limites:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^{3x} - 1}{3x}$ (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x - 4\sqrt{x}}$ (c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^{5x} - 3^{2x}}{x}$

Importante: Em geral, para calcular um limite fundamental, utilizamos uma substituição conveniente na variável do limite.

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^{3x} - 1}{3x}$

Solução: Fazemos

$u = 3x$ ⇦ Substituição

Se $u = 3x$ e $x \to 0$ então $u \to 0$.

Portanto

$$\lim_{x \to 0} \frac{2^{3x} - 1}{3x} = \lim_{u \to 0} \frac{2^u - 1}{u} = \ln 2.$$

(b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x - 4\sqrt{x}}$

Solução: Fazemos

$u = \sqrt{x}$ ⇦ Substituição

Se $u = \sqrt{x}$ e $x \to 0^+$ então $u \to 0$.

Portanto

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x - 4\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 4)}$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{e^u - 1}{u} \cdot \frac{1}{u - 4} = \ln e \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}.$$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^{5x} - 3^{2x}}{x}$

Solução: Fazemos

$u = 3x$ ⇐ Substituição

Se $u = 3x$ e $x \to 0$ então $u \to 0$.

Portanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{3^{5x} - 3^{2x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3^{2x}(3^{3x} - 1)}{x} = \lim_{x\to 0} 3^{2x} \cdot \frac{3^{3x} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} 3^{2x} \cdot \frac{3^{3x} - 1}{x} \cdot \frac{3}{3} = \lim_{x\to 0} 3^{2x+1} \cdot \frac{3^{3x} - 1}{3x}$$

$$= 3 \cdot \lim_{u\to 0} \frac{3^{u} - 1}{u} = 3 \cdot ln\, 3.$$

24.3 Exercícios Propostos

1) Mostre que

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

2) Se

$$x^2 - 4x + 7 \le f(x) \le 4x - 9, \text{ para todo } x \ge 0,$$

encontre

$$\lim_{x\to 4} f(x).$$

3) Dado que, para todo x tem-se,

$$|g(x) - 2| \le 3(x - 1)^2$$

encontre

$$\lim_{x\to 1} g(x).$$

4) Prove que

$$\lim_{x\to 0} \left| xsen\left(\frac{1}{x}\right)\right| = 0.$$

5) Utilizando os limites fundamentais, calcule:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x}$

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x}$

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin \pi x}{sin\, 3x}$

(d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$

(e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{cos\, x - 1}$

(f) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$

(g) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x}$

(h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}$

(i) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{5x}}$

(j) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+3}$

(k) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2e^x - 2}{x}$

(l) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{e^{-x} - 1}$

24.4 Respostas

Exercício 5:

a) 3

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{\pi}{3}$

d) 0

e) -2

f) 1

h) e^2

i) $\sqrt[5]{e}$

j) e

k) 2

l) -3

Capítulo 5: Derivadas

25. Aula 1

25.1 Equação da reta

Lembre que a fórmula para o coeficiente angular ou inclinação da reta que contém os pontos $\mathrm{A}(x_A, y_A)$ e $\mathrm{B}(x_B, y_B)$ é dada por:

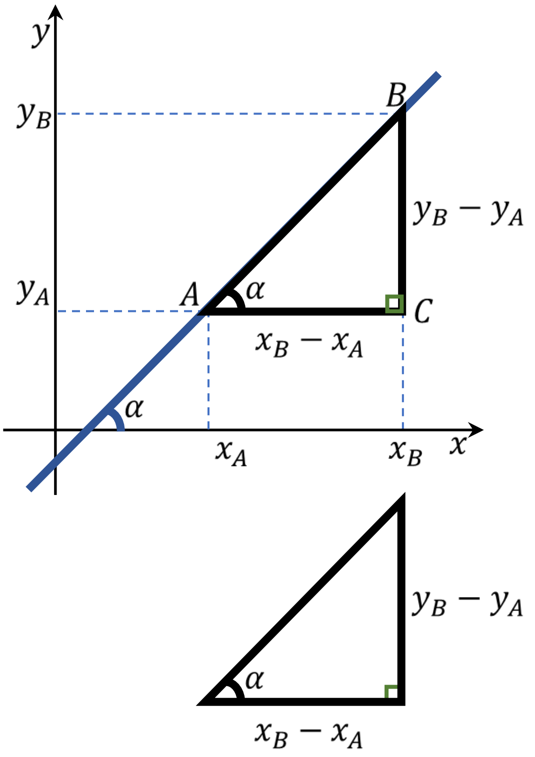
$$m = \tan\alpha$$

Ou ainda:

$$m = \tan\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

A equação da reta que possui coeficiente m e que contém o ponto $\mathrm{A}(x_A, y_A)$ é dada por:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$



Exemplo: Encontre a equação da reta que contém os pontos $\mathrm{A}(2,1)$ e $\mathrm{B}(5,3)$.

Solução: Determinando o coeficiente angular (inclinação) da reta, temos:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-1}{5-2} = \frac{2}{3}$$

Determinando a equação da reta:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

$$y - 1 = \frac{2}{3}(x - 2)$$

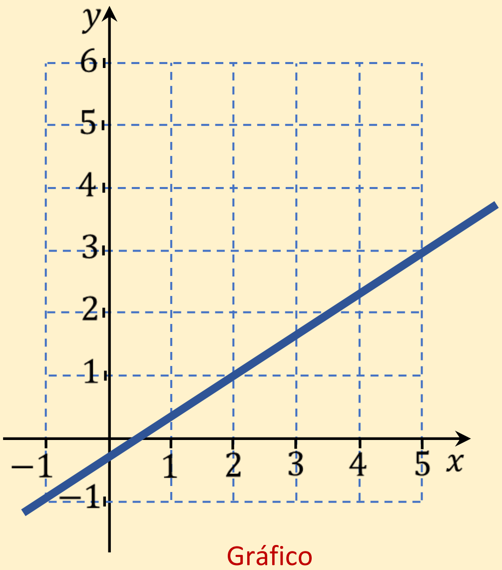
Portanto:

$$2x - 3y - 1 = 0$$

Equação geral

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

Equação reduzida



Gráfico

25.2 Reta tangente

Considere uma reta secante à curva $y = f(x)$ nos pontos $A(a, f(a))$ e $P(x, y)$, isto é, a reta intercepta a curva nos pontos A e P.

Ao aproximarmos os pontos A e P, isto é, fazendo

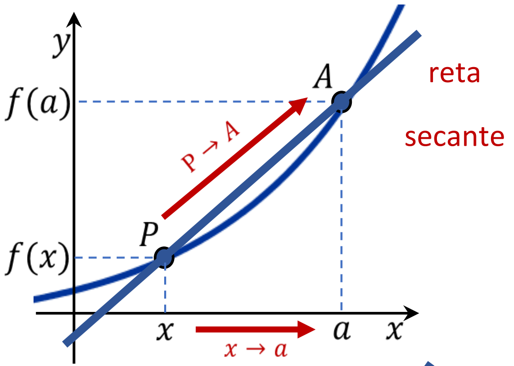
$$P \to A$$

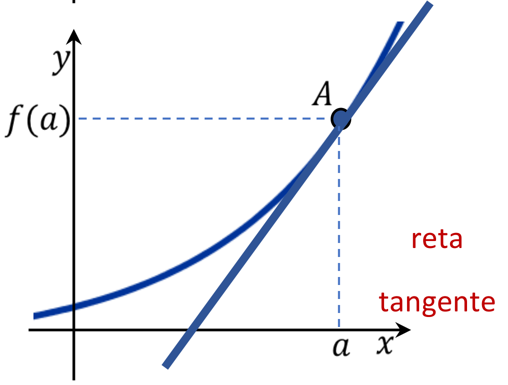
ou, equivalentemente,

$$x \to a$$

teremos, na situação limite, uma reta tangente a curva $y = f(x)$ no ponto fixado $A(a, f(a))$.

Isto é, uma reta que apenas tangencia a curva dada no ponto fixado A.





25.3 Inclinação da reta tangente

Definição: A reta tangente à uma curva $y = f(x)$ em um ponto $A(a,\ f(a))$ é a reta que contém o ponto A e tem inclinação

(desde que este limite exista).

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Observação: Fazendo a substituição

$$h = x - a$$

no limite acima, temos que $x = a + h$ e como $x \to a$ temos $h \to 0$.

Podemos então reescrever m como:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

25.4 Equação reta tangente

Exemplo: (a) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função no ponto $A(1,\ 2)$.

$$f(x) = x^2 + 1$$

(b): Esboce, no mesmo plano cartesiano, os gráficos de f e da reta tangente.

Solução a): Calculando a inclinação desta reta, teremos:

$$m = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[(1+h)^2+1]-[(1)^2+1]}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{[1+2h+h^2+1]-2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2+2h}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h(h+2)}{h} = \lim_{h\to 0}(h+2) = 2.$$

Portanto, a equação da reta tangente será dada por:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$
$$y - 2 = 2(x - 1)$$
$$y - 2x = 0$$
$$y = 2x$$

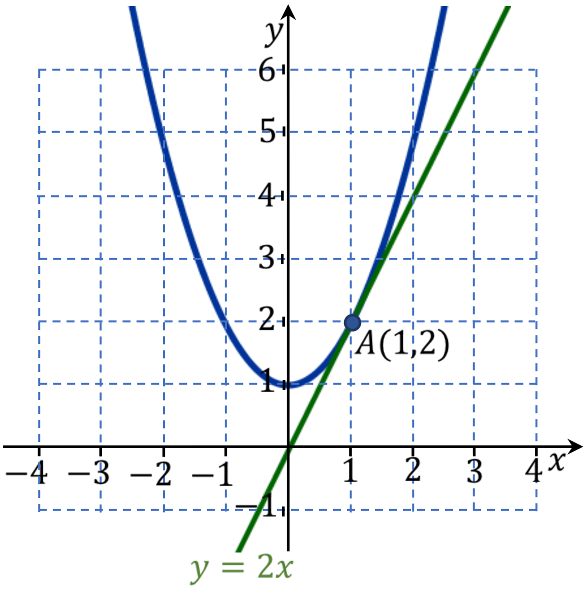
Solução b): Esboçando, no mesmo plano cartesiano, os gráficos da função

$$f(x) = x^2 + 1$$

e da equação da reta tangente

$$y = 2x$$

ao gráfico de f no ponto $A(1,2)$, obtém-se os gráficos ao lado.



25.5 Definição de Derivada

Definição: A derivada de uma função $y = f(x)$ em um número a denotada por $f'(a)$, é dada por

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

(desde que este limite exista).

Se o limite acima existe, se diz que a f é derivável no número a. Do contrário, se diz que f é não derivável em a.

Uma forma equivalente de denotar a derivada seria:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Portanto, a equação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $A\big(a, f(a)\big)$ pode ser escrita como

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

calcule $f'(1)$.

Solução: Calculando a derivada pela definição temos

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{1 + h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1 - 1 - h}{1 + h}}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{-h}{1 + h} \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{1 + h} = -1$$

Portanto,

$$f'(1) = -1$$

Observação: Uma função f não possui derivada nos pontos onde não existe o limite (bilateral):

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Isto ocorre geralmente quando uma das situações a seguir ocorrem:

(a) A função f não está definida em $x=a$, isto é, $f(a)$ não existe;

(b) O limite acime é infinito.

(c) Os limites laterais

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad \text{e} \qquad \lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

não existem ou são diferentes entre si.

Definição: A derivada de uma função $y=f(x)$, denotada por f', é a função que associa a cada $x\in D(f)$ o número

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(desde que este limite exista).

Notações: Outras notações para a derivada de uma função $y=f(x)$ em um número x são:

$$f' \qquad y' \qquad D_x(f) \qquad \frac{dy}{dx} \qquad \frac{df}{dx}$$

Notação: A notação

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$$

também pode ser utilizada para denotar $f'(a)$.

25.6 Exercícios Propostos

1) Calcule as derivadas pela definição:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

(b) $f(x) = 3x^2 - 8x + 5$

(c) $f(x) = \sqrt{x}$

2) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função

$$f(x) = x^2 - 8x + 9$$

no ponto $P(2,-3)$. Obs.: Utilize o limite para encontrar a inclinação da reta!!

3) Esboce o gráfico da função

$$f(x) = \sqrt{x}$$

e a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1,1)$.

Obs.: Utilize o limite para encontrar a inclinação da reta tangente!!

4) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$$

no ponto $x = -1$. Obs.: Utilize o limite para encontrar a inclinação da reta!!

5) Calcule a derivada da função

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

utilizado a definição de derivada (pelo limite).

25.7 Respostas

Exercício 1:

a) $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$

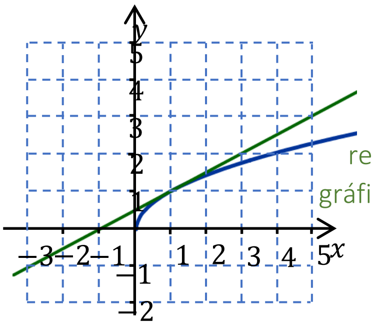
b) $f'(x) = 6x - 8$

c) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Exercício 2:

$y = -4x + 5$

Exercício 3:



$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

reta tangente ao gráfico de f no ponto (1,1).

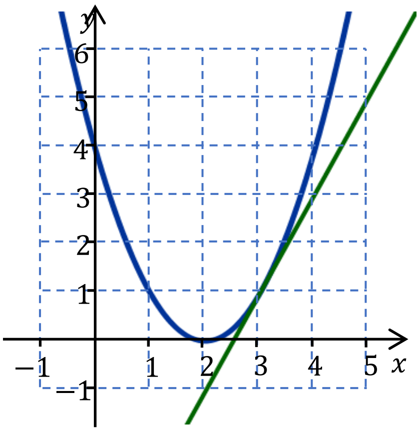
Exercício 4:

$y = 12x + 9$

Exercício 5:

$f'(x) = \frac{2}{x^2 + 2x + 1}$

Exercício 6:



$y = 2x - 5$

reta tangente ao gráfico de f no ponto (3,1).

26. Aula 2

26.1 Regras de Derivação

Nesta aula, estudaremos algumas regras de derivação.

Derivada da constante: A derivada de uma função constante $f(x) = c$, onde c é qualquer número real, é igual a zero, ou seja,

$$[c]' = 0$$

De fato, sendo f uma função constante, digamos $f(x) = c$, teremos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0.$$

Exemplo: Calcule a derivada das funções:

(a) $f(x) = 5$ (b) $f(x) = \sqrt{2+\pi}$ (c) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{e} - e}{\ln \pi}$

Solução: Como todas as funções são constantes, tem-se

(a) $f'(x) = (5)' = 0$

(b) $f'(x) = \left(\sqrt{2+\pi}\right)' = 0$

(c) $f'(x) = \left(\dfrac{\sqrt[3]{e} - e}{\ln \pi}\right)' = 0$

Derivada da potência: A derivada da função $f(x) = x^n$ é dada por

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

para todo n real.

Exemplo: Calcule a derivada das funções:

(a) $f(x) = x^8$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x^6}$ (c) $f(x) = \sqrt[4]{x}$

$$f'(x) = (x^8)' = 8x^{(8-1)} = 8x^7$$

(b) Como podemos reescrever a função como $f(x) = x^{-6}$, temos:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^6}\right)' = (x^{-6})' = -6x^{(-6-1)} = -6x^{-7} = -\frac{6}{x^7}$$

(c) Reescrevendo a função como $f(x) = x^{1/4}$, temos:

$$f'(x) = (\sqrt[4]{x})' = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4}x^{\left(\frac{1}{4}-1\right)} = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

Derivada do Múltiplo Constante: Se k é uma constante e u for uma função derivável, então

$$[ku]' = k[u]'$$

Isto é, a derivada do produto de uma constante por uma função é igual ao produto da constante pela derivada da função.

Exemplo: Calcule a derivada das funções:

(a) $f(x) = 6x^8$ (b) $f(x) = \frac{5}{x^6}$ (c) $f(x) = -4\sqrt[3]{x}$

Solução:

(a) $f'(x) = (6x^8)' = 6(x^8)' = 6(8)x^7 = 48x^7$

(b) $f'(x) = \left(\frac{5}{x^6}\right)' = 5\left(\frac{1}{x^6}\right)' = 5(x^{-6})' = 5(-6)x^{-7} = -\frac{30}{x^7}$

(c) $f'(x) = (-4\sqrt[3]{x})' = -4\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = -4\left(\frac{1}{3}\right)x^{\frac{1}{3}-1} = -\frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} = -\frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}}$

Derivada da Soma/diferença: Sejam u e v funções deriváveis, então

$$[u \pm v]' = u' \pm v'$$

Isto é, a derivada da soma/diferença é igual a soma/diferença das derivadas.

Exemplo: Calcule a derivada das funções:

(a) $f(x) = 6x^8 + 9x^2$ (b) $f(x) = \frac{5}{x^6} - 9\sqrt[3]{x^4} - 20x + 5$

Solução:

$$f'(x) = (6x^8 + 9x^2)' = (6x^8)' + (9x^2)' = 48x^7 + 18x.$$

(b) $f'(x) = \left(\frac{5}{x^6} - 9\sqrt[3]{x^4} - 20x + 5\right)' = (5x^{-6})' - \left(9x^{\frac{4}{3}}\right)' - (20x)' + (5)'$

$$= 5(-6)x^{-7} - 9\left(\frac{4}{3}\right)x^{\frac{1}{3}} - 20 = -30x^{-7} - 12x^{\frac{1}{3}} - 20.$$

Derivada do produto: Sejam u e v funções deriváveis, então

$$[u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Isto é, a derivada do produto de duas funções é igual a derivada da primeira vezes a segunda mais a primeira vezes a derivada da segunda.

Exemplo: Calcule a derivada das funções:

(a) $f(x) = (x^2 - 2)(2x^5 + 4)$ (b) $f(x) = (x^4 - 3x)\left(\sqrt[5]{x^7} - 100\right)$

Solução: (a)

$$f'(x) = [(x^2 - 2)(2x^5 + 4)]' = (x^2 - 2)'(2x^5 + 4) + (x^2 - 2)(2x^5 + 4)'$$

$$= 2x(2x^5 + 4) + (x^2 - 2)(10x^4) = 14x^6 - 20x^4 + 8x$$

(b) $f'(x) = (x^4 - 3x)'\left(\sqrt[5]{x^7} - 100\right) + (x^4 - 3x)\left(\sqrt[5]{x^7} - 100\right)' =$

$$(4x^3 - 3)\left(\sqrt[5]{x^7} - 100\right) + (x^4 - 3x)\frac{7}{5}x^{\frac{2}{5}} = \frac{27}{5}x^{\frac{22}{5}} - \frac{36}{5}x^{\frac{7}{5}} - 400x^3 + 300$$

Derivada do quociente: Sejam u e v funções deriváveis, então

$$\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Isto é, a derivada do quociente de duas funções é igual a derivada da de cima vezes a função de baixo, menos a função de cima vezes a derivada da função de baixo, tudo dividido pelo quadrado da função de baixo.

Exemplo: Calcule a derivada das funções:

(a) $f(x) = \frac{x^2+2}{x-3}$ (b) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x+1}$

Solução:

(a)
$$f'(x) = \left[\frac{x^2 + 2}{x - 3}\right]' = \frac{(x^2 + 2)'(x - 3) - (x^2 + 2)(x - 3)'}{(x - 3)^2}$$

$$= \frac{(2x)(x - 3) - (x^2 + 2)(1)}{(x - 3)^2} = \frac{x^2 - 6x - 2}{x^2 - 6x + 9}$$

(b)
$$f'(x) = \left[\frac{\sqrt{x}}{2x + 1}\right]' = \frac{\left(\sqrt{x}\right)'(2x + 1) - \left(\sqrt{x}\right)(2x + 1)'}{(2x + 1)^2} =$$

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(2x + 1) - \left(\sqrt{x}\right)(2)}{(2x + 1)^2} = \frac{\frac{2x + 1}{2\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}}{4x^2 + 4x + 1} = \frac{\frac{2x + 1 - 4x}{2\sqrt{x}}}{4x^2 + 4x + 1}$$

$$= \frac{-2x + 1}{2\sqrt{x}(4x^2 + 4x + 1)}$$

26.2 Derivada de algumas funções elementares

Funções trigonométricas

$[\sin x]' = \cos x$	$[\cos x]' = -\sin x$
$[\tan x]' = \sec^2 x$	$[\cot x]' = -\csc^2 x$
$[\sec x]' = \sec x \tan x$	$[\csc x]' = -\csc x \cot x$

Funções trigonométricas inversas

$[\arcsin x]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[\arccos x]' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$[\arctan x]' = \dfrac{1}{x^2+1}$	$[\operatorname{arccot} x]' = -\dfrac{1}{x^2+1}$
$[\operatorname{arcsec} x]' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$[\operatorname{arccsc} x]' = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Funções exponenciais
$(a > 0,\ a \neq 1)$

$$[a^x]' = a^x \ln a$$

$$[e^x]' = e^x$$

Funções logarítmicas
$(a > 0,\ a \neq 1)$

$$[\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$[\ln x]' = \frac{1}{x}$$

26.3 Exercícios Propostos

1) Calcule a derivada das seguintes funções, utilizando a regra da potência.

(a) $f(x) = x^2$

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$

(c) $f(x) = \sqrt{x}$

(d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

(e) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

(f) $f(t) = \sqrt[5]{t^2}$

(g) $p(m) = m^{\frac{2}{3}}$

(h) $n(q) = \frac{1}{q^2}$

2) Calcule a derivada das funções dadas:

(a) $f(r) = \pi r^2$

(b) $f(x) = \frac{1}{2}x^{-3} - 14$

(c) $f(x) = (7x - 1)(x^2 + 4)$

(d) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$

3) Encontre uma equação da reta tangente à curva

$$f(x) = x^4 + 2x^2 - x$$

no ponto $(1,2)$.

4) Calcule a derivada das funções dadas:

(a) $f(x) = sen\, x + \frac{1}{2}\, cot\, x$

(b) $f(x) = -4x^2 \cos x$

(c) $f(x) = \frac{5-\cos x}{5+sen\, x}$

(d) $h(y) = ye^y$+10

(e) $m(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

5) Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

(a) $y = \ e^x \cos x$ $(0,\ 1)$

(b) $y = \sec x$ $\left(\frac{\pi}{3},\ 2\right)$

6) Calcule a derivada das funções dadas:

(a) $f(x) = x^3 + 5x - 2$

(b) $f(x) = \sqrt[5]{x^4} + 2x^3 - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{3}}$

(c) $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$

(d) $f(x) = \frac{x^4-2x}{x-2}$

7) Encontre uma equação da reta tangente à curva

$$f(x) = \sqrt[4]{x}$$

no ponto $x = 1.$

8) Calcule a derivada das funções dadas:

(a) $f(x) = x^3 + \sin x + 2\cos x$

(b) $g(t) = t^3 \cos t$

(c) $f(\theta) = \frac{\sec\theta}{1+\sec\theta}$

(d) $f(x) = 2x \log x$

9) Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

(a) $y = x^2 \ln x$ $(1,\ 0)$

(b) $y = 1 + 2\sin x$ $\left(\frac{\pi}{2},\ 3\right)$

26.4 Respostas

Exercício 1:

a) $f'(x) = 2x$

b) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

e) $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

f) $f'(t) = \dfrac{2}{5\sqrt[5]{t^3}}$

g) $p'(m) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{m}}$

h) $n'(q) = \dfrac{-2}{q^3}$

Exercício 2:

a) $f'(x) = 2\pi r$

b) $f'(x) = -\dfrac{3}{2x^4}$

c) $f'(x) = 21x^2 - 2x + 28$

d) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

Exercício 3:

$y = 7x - 5$

Exercício 4:

a) $f'(x) = \cos x - \dfrac{\csc^2 x}{2}$

b) $f'(x) = 4x^2 \sin x - 8x \cos x$

c) $f'(x) = \dfrac{5(\sin x - \cos x) + 1}{(5 + \operatorname{sen} x)^2}$

d) $h'(y) = (y+1)e^y$

e) $m'(x) = \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3}$

Exercício 5:

a) $y = x + 1$

b) $y = 2\sqrt{3}\,x + 2 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

Exercício 6:

a) $f'(x) = 3x^2 + 5$

b) $f'(x) = \dfrac{4}{5\sqrt[5]{x}} + 6x^2 - \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{x^2}$

c) $f'(x) = 4x^3$

d) $f'(x) = \dfrac{3x^4 - 8x^3 + 4}{(x-2)^2}$

Exercício 7:

$y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{4}$

Exercício 8:

a) $f'(x) = 3x^2 + \cos x - 2\sin x$

b) $g'(t) = 3t^2 \cos t - t^3 \sin t$

c) $f'(\theta) = \dfrac{\sec\theta \tan\theta}{(1 + \sec\theta)^2}$

d) $f'(x) = 2\log x + \dfrac{2}{\ln 10}$

Exercício 9:

a) $y = x - 1$

b) $y = 3$

27. Aula 3

27.1 Derivadas de ordem superior

Definição: Seja f uma função derivável. Se f' também for uma função derivável, então sua derivada $(f')'$é chamada *derivada segunda* de f.

Notação:

$$f'' = (f')' \qquad \text{ou ainda} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right]$$

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = 2x^3 - 9x,$$

calcule $f''(x)$.

Solução: Como

$$f'(x) = (2x^3 - 9x)' = 6x^2 - 9$$

teremos

$$f''(x) = (f')'(x) = (6x^2 - 9)' = 12x.$$

Definição: Seja f uma função derivável. Se f'' também for uma função derivável, então sua derivada $(f'')'$é chamada *derivada terceira* de f.

Notação:

$$f''' = (f'')' \qquad \text{ou} \qquad f^{(3)} = (f'')' \qquad \text{ou ainda} \qquad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]$$

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = x^3 - cos\, x + e^x,$$

calcule $f^{(3)}(x)$.

Solução: Como

$$f'(x) = (x^3 - cos\, x + e^x)' = 3x^2 + \text{sen}\, x + e^x$$

teremos

$$f''(x) = (3x^2 + sen\, x + e^x)' = 6x + cos\, x + e^x$$

e, portanto,

$$f^{(3)}(x) = (6x + cos\, x + e^x)' = 6 - sen\, x + e^x.$$

Definição: Seja f uma função derivável. Se $f^{(n-1)}$ também for uma função derivável, então sua derivada $\left(f^{(n-1)}\right)'$ é chamada *derivada enésima* de f.

Notação:

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' \qquad \text{ou ainda} \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right]$$

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = 2^x,$$

calcule $f^{(5)}(x)$.

Solução: Como

$$f'(x) = (2^x)' = \quad 2^x \ln 2$$

teremos

$$f^{(2)}(x) = (2^x \ln 2)' = \quad \ln 2\,(2^x)' = \quad 2^x (\ln 2)^2$$

e portanto

$$\vdots$$

$$f^{(5)}(x) = \quad 2^x (\ln 2)^5$$

27.2 Regra da Cadeia

Teorema (Regra da Cadeia): Se a função g for derivável em x e a função f for derivável em $g(x)$, então a função composta $h = f \, o \, g$ será derivável em x e a derivada da função composta será dada por

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Ou seja, a derivada da função composta é igual a derivada da função de fora calculada na função de dentro vezes a derivada da função de dentro.

Observação: Costuma-se denotar a função de dentro por uma variável auxiliar, geralmente u, para utilização da Regra da Cadeia.

Assim, se $y = f(g(x))$, denota-se

$$u = g(x) \qquad \text{e} \qquad y = f(u)$$

Desta forma, escreve-se

Derivada da funç

$$y' = f'(u) \cdot u'$$

Derivada da funçã

Derivada da função de fora c

Exemplo: Calcule a derivada da função

$$h(x) = sin(2x + 1).$$

Solução: Neste caso a função de dentro é

$$u = g(x) = 2x + 1$$

e a função de fora é

$$f(u) = sin\, u.$$

Portanto,

$$f'(u) = \cos u \qquad \text{e} \qquad u' = g'(x) = 2$$

e temos:

$$h'(x) = (fog)'(x) = f'(u) \cdot u' = \cos(u) \cdot 2 = 2cos(2x + 1).$$

Exemplo: Calcule a derivada da função

$$h(x) = \sqrt{x^2 + 2x}.$$

Solução: Neste caso, tem-se:

$$u = g(x) = x^2 + 2x \qquad\qquad f(u) = \sqrt{u}$$

(função de dentro) (função de fora)

Como,

$$f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad \text{e} \qquad u' = g'(x) = 2x + 2$$

temos:

$$h'(x) = (fog)'(x) = f'(u) \cdot u' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x}} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}}.$$

Observação: Regra da cadeia na notação de Leibniz:

Se $y = f(u)$ e $u = g(x)$ forem deriváveis, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

ou seja:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

Derivada da função composta.

Derivada da função de fora calculada na função de dentro

Derivada da função de dentro.

$$y = e^{\sin x}.$$

Solução: Neste caso, podemos escrever a função dada como:

$$y = e^{u} \quad \text{(função de fora)}$$

$$u = \sin x. \quad \text{(função de dentro)}$$

Portanto:

$$\frac{dy}{du} = (e^{u})' = e^{u}$$ Derivada da função de fora calculada na função de dentro.

e

$$\frac{du}{dx} = (\sin x)' = \cos x$$ Derivada da função de dentro.

e utilizando a Regra da Cadeia temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = e^{u}(\cos x) = e^{\sin x}\cos x.$$

Exemplo: Calcule a derivada da função

$$w = \ln(t^4 + 2).$$

Solução: Neste caso, podemos escrever a função dada como:

$$w = \ln u \quad \text{(função de fora)}$$

$$u = t^4 + 2 \quad \text{(função de dentro)}$$

Portanto:

$$\frac{dw}{du} = (\ln u)' = \frac{1}{u}$$ Derivada da função de fora calculada na função de dentro.

e

$$\frac{du}{dt} = (t^4 + 2)' = 4t^3$$ Derivada da função de dentro.

e utilizando a Regra da Cadeia temos:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{du}\frac{du}{dt} = \frac{1}{u}4t^3 = \frac{4t^3}{t^4 + 2}.$$

27.3 Derivadas de funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas

Funções trigonométricas

$$[\sin u]' = \cos u \cdot u'$$

$$[\cos u]' = -\sin u \cdot u'$$

$$[\tan u]' = \sec^2 u \cdot u'$$

$$[\cot u]' = -\csc^2 u \cdot u'$$

$$[\sec u]' = \sec u \tan u \cdot u'$$

$$[\csc u]' = -\csc u \cot u \cdot u'$$

Funções trigonométricas inversas

$$[\arcsin u]' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$[\arccos u]' = -\frac{u'}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$[\arctan u]' = \frac{u'}{x^2+1}$$

$$[\mathrm{arccot}\, u]' = -\frac{u'}{x^2+1}$$

$$[\mathrm{arcsec}\, u]' = \frac{u'}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$[\mathrm{arccsc}\, u]' = -\frac{u'}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Funções exponenciais
$(a > 0, a \neq 1)$

$$[a^u]' = u'a^u \ln a$$

$$[e^u]' = u'e^u$$

Funções logarítmicas
$(a > 0, a \neq 1)$

$$[\log_a u]' = \frac{u'}{u \ln a}$$

$$[\ln u]' = \frac{u'}{u}$$

27.4 Exercícios Propostos

1) Calcule a segunda derivada das funções dadas:

a) $f(x) = x \cdot cos(x)$

b) $f(x) = \sqrt{3}(e^x + 3)$

c) $f(x) = \sin\,(x\_ \cdot cos(x)$

2) Calcule a terceira derivada da função:

$$f(x) = 6x^5 + 4x + 5$$

3) Calcule a derivada das funções usando a regra de cadeia:

(a) $f(x) = \sin(2x)$

(b) $f(x) = \tan(x^2 + 1)$

(c) $f(x) = \sqrt{x^3 + \csc(x)}$

(d) $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^3$

(e) $f(x) = 2e^{x^2-4x}$

(f) $f(x) = \cos^2(x^2 + 1)$

4) Encontre a equação da reta tangente a curva

$$y = (x-1)^5$$

no ponto $(2,\ 1)$.

5) Calcule a segunda derivada das funções dadas:

(a) $f(x) = 2x^{-5} + \ln x$

(b) $f(x) = \frac{x^2+2}{x-1}$

6) Calcule a derivada das funções usando a regra de cadeia:

(a) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 + 2x^2 - 3x + 1}$

(b) $f(x) = \ln(\sin(x))$

(c) $f(x) = (1 + x^5 \cot x)^{-8}$

27.5 Respostas

Exercício 1:

a) $f"(x) = -2\sin\ x - x\cos\ x$

b) $f"(x) = \sqrt{3(}e^{x} + 6x)$

c) $f"(x) = \ - 4\, sin\, x\, cos\, x$

Exercício 2:

$f^{(3)}(x) = 360x^2$

Exercício 3:

$a)\ f'(x) = 2\cos 2x$

$b)\ f'(x) = 2x\, sec^2(x^2+1)$

$c)\ f'(x) = \dfrac{3x^2 - \csc x \cot x}{2\sqrt{x^3 + csc\, x}}$

$d)\ f'(x) = -\dfrac{9(x+1)^2}{(x-2)^4}$

$e)\ f'(x) = 4(x-2)e^{x^2-4x}$

$f)\ f'(x)\ = -4x\sin(x^2+1)\cos(x^2+1)$

Exercício 4:

$y = 5x - 9$

Exercício 5:

a) $f''(x) = 60x^{-7} - \dfrac{1}{x^2}$

b) $f''(x)\ = \dfrac{6}{(x-1)^3}$

Exercício 6:

a) $f'(x) = \dfrac{4x^3+4x-3}{3\sqrt[3]{(x^4+2x^2-3x+1)^2}}$

b) $f'(x) = \cot x$

c) $f'(x) = -\dfrac{8\left(5x^4\cot x - x^5\csc^2 x\right)}{(x^5\cot x+1)^9}$

28. Aula 4

28.1 Derivação implícita

Note que todas as funções dadas até agora, a variável dependente pôde ser escrita explicitamente em função da variável independente

Por exemplo:

$$y = 2x^2 - 3 \qquad y = \sqrt{x+1} \qquad y = \cos x + e^x \tan x$$

Nestes casos, se diz que a variável y foi dada explicitamente em função da variável x.

Existem casos em que é bastante trabalhoso ou até inviável expressar a variável dependente de forma explícita, em função da variável independente.

Por exemplo, como poderíamos expressar y em função de x equações abaixo ?

$$x^3 + y^3 = 6xy \qquad xy + x\sin y = 1 \qquad e^{xy} = x + y$$

Nestes casos, se diz que a variável y foi dada implicitamente em função da variável x.

Note que, até agora, calculamos a derivada somente de funções dadas explicitamente!

Pergunta: É possível calcular a derivada de uma função na forma implícita?

A resposta para a pergunta acima é SIM!

Para calcular a derivada de uma função na forma implícita, vamos seguir os seguintes passos:

1) Derive os dois lados da equação considerando $y = y(x)$, ou seja, considerando y como funções de x (utilize a regra da cadeia se necessário).

2) Tente isolar $\frac{dy}{dx}$ na equação resultante da derivação.

Exemplo: Se x^2

Solução:

$$\frac{d}{dx}[x^2+y^2]=\frac{d}{dx}[9] \xRightarrow{(1)} 2x\frac{dx}{dx}+2y\frac{dy}{dx}=0 \xRightarrow{(2)} 2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\xRightarrow{(3)} \frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{2y} \xRightarrow{(4)} \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

(4) Simplificação

Exemplo: Encontre a equação da reta tangente à curva

$$7y^2=4+xy^3,$$

no ponto $(3,\ 2)$.

Solução: Primeiramente vamos calcular a derivada de y em relação a x:

$$\frac{d}{dx}[7y^2]=\frac{d}{dx}[4+xy^3] \Longrightarrow 14y\frac{dy}{dx}=0+\frac{dx}{dx}y^3+x\frac{d[y^3]}{dx} \Longrightarrow$$

$$14y\frac{dy}{dx}=y^3+3xy^2\frac{dy}{dx} \Longrightarrow (14y-3xy^2)\frac{dy}{dx}=y^3 \Longrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{14-3xy}$$

Calculando a derivada no ponto $(3,\ 2)$ temos:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=3\\y=2}}=\frac{2^2}{14-3(3)(2)}=\frac{4}{14-18}=-1$$

Portanto:

$$y-y_A=m(x-x_A) \Longrightarrow y-2=(-1)(x-3) \Longrightarrow y=-x+5.$$

28.2 Regra de L'Hôspital

Teorema (Regra de L'Hôspital):

Se

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0} \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$$

Então

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

O mesmo vale se $x\to\ a$ for substituído por

$$x\ \to\ a^{+} \text{ ou } x\ \to\ a^{-} \text{ ou } x\ \to\ -\infty \text{ou } x\ \to+\infty.$$

Observação: A regra de L'Hôspital vale para indeterminações do tipo

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{+\infty}{+\infty} \qquad \frac{+\infty}{-\infty} \qquad \frac{-\infty}{+\infty} \qquad \frac{-\infty}{-\infty}$$

Portanto, antes de aplicar a regra de L'Hôspital, faça uma *"verificação"* para ter certeza que a regra pode ser aplicada!

Exemplo: Calcule o limite:

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}$$

Solução:

Verificação:

Como $$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9 \longrightarrow 0}{x-3 \longrightarrow 0}$$

Temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ podemos aplicar a regra de L'Hôspital.

Portanto:

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x^2-9)'}{(x-3)'}=\lim_{x\to3}\frac{2x}{1}=2(3)=6.$$

Exemplo: Calcule o limite:

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x^3+2x^2+x-5}{e^x}$$

Solução:

Verificação: Como

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\overbrace{x^3+2x^2+x-5}^{+\infty}}{\underbrace{e^x}_{+\infty}}$$

Temos uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ podemos aplicar a regra de L'Hôspital.

Portanto, aplicando a Regra de L'Hôspital três vezes (faça a verificação a cada vez!) temos

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x^3+2x^2+x-5}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{3x^2+4x+1}{e^x}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{6x+4}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{6}{e^x}=0.$$

28.3 Exercícios Propostos

1) Obtenha $\frac{dy}{dx}$, a partir das equações dadas por derivação implícita:

(a) $x^2y+2y^3=3x+2y$

(b) $6x+\sqrt{xy}-3y=4$

2) Verifique se o ponto $P(-2,\ 8)$ pertence à curva

$$xy=\ -16$$

encontre a equação da reta tangente à curva neste ponto.

3) Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$

(b) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}$

(c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^3}$

(d) $\lim_{x\to0}\frac{x-senx}{x^3}$

(e) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2^{-x}}{x^2+5x+6}$

(f) $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2\cos x}\right)$

(g) $\lim_{x\to0}\frac{\sin(4x)}{\sin(3x)}$

(h) $\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos(2x)}$

4) Obtenha $\frac{dy}{dx}$, a partir das equações dadas por derivação implícita:

(a) $\cos(x+y) = x$

(b) $e^{x+y^2} = 2x + y$

5) Verifique se o ponto $P(2,\ -3)$ pertence à curva

$$2x^3 - x^2y + y^3 - 1 = 0$$

dada e encontre a equação da reta tangente neste ponto.

6) Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$

(b) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$

(c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^3}{e^x}$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} 2xe^{-x^2}$

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} 2x^{\frac{1}{x}}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3}$

28.4 Respostas

Exercício 1:

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{3-2xy}{x^2+6y^2-2}$

b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{12\sqrt{xy}+y}{x-6\sqrt{xy}}$

Exercício 2:

$y = 4x + 16$

Exercício 3:

a) 1

b) 2

c) $+\infty$

d) $\frac{1}{6}$

e) $+\infty$

f) $-\frac{1}{2}$

g) $\frac{4}{3}$

h) $\frac{1}{2}$

Exercício 4:

a) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1+sin(x+y)}{sin(x+y)}$

b)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^{x+y^2}-2}{2ye^{x+y^2}-1}$$

Exercício 5:

$y = -\frac{36}{23x} + \frac{3}{23}$

Exercício 6:

a) $2\sqrt{3}$

b) $\cos a$

c) 0

d) 0

e) 2

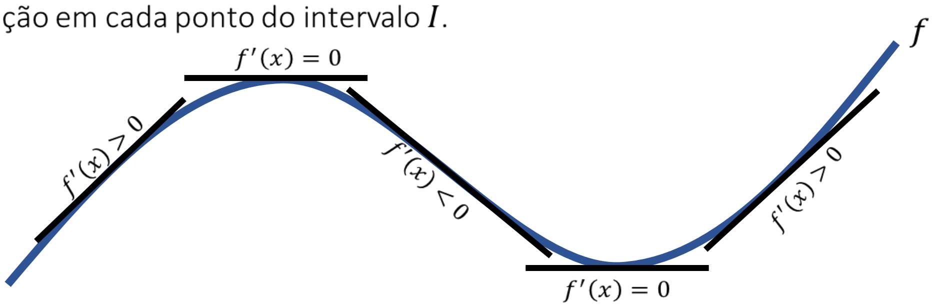
f) $-\frac{1}{3}$

29. Aula 5

29.1 Teste da Primeira Derivada

Seja f uma função contínua e derivável num intervalo I.

Sabemos que a primeira derivada é a inclinação da reta tangente a essa função em cada ponto do intervalo I.



Com a primeira derivada podemos obter informações sobre:

Intervalos onde a função é crescente ou decrescente

Máximos e Mínimos Locais

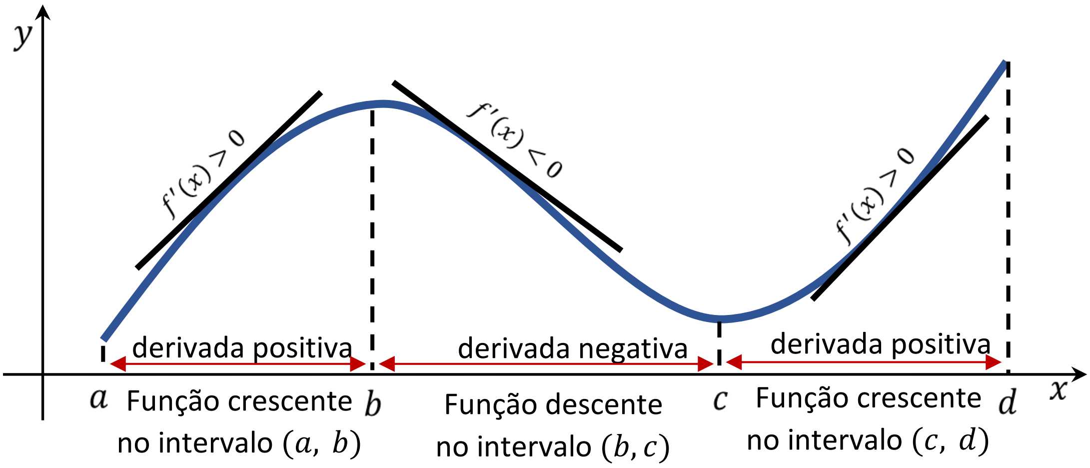
Veremos nesta aula como obter cada uma dessas informações!

Teorema: Sendo f uma função derivável, f' sua primeira derivada.

Onde f' é positiva, a função f é crescente.

Onde f' é negativa, a função f é decrescente.

Graficamente, a interpretação do Teorema acima é a seguinte:



Exemplo: Dada a função

$$f(x) = x^2 - 2x,$$

determine os intervalos onde a função é crescente e decrescente.

Solução: Como $f(x) = x^2 - 2x$, temos:

$$f'(x) = 2x - 2.$$

Vamos descobrir os intervalos de crescimento e decrescimento de f analisando o sinal de f'.

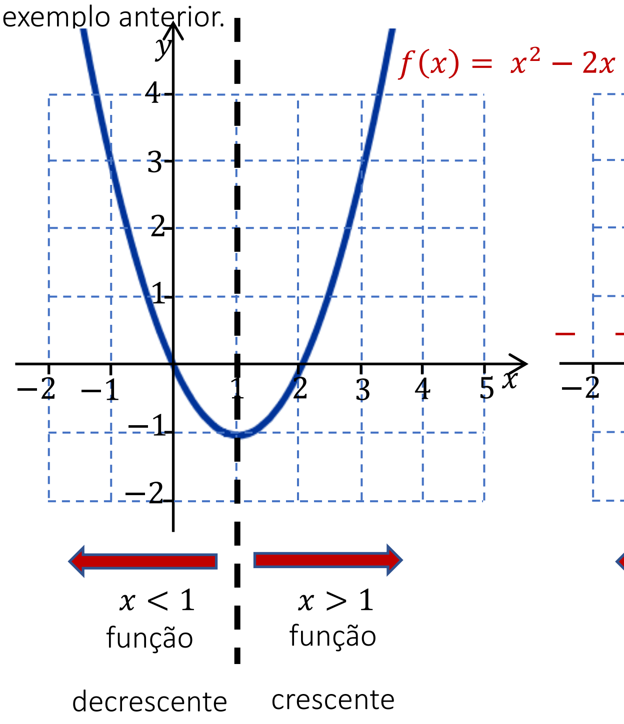
Quando a função $2x - 2 > 0$? Para todo $x > 1$.

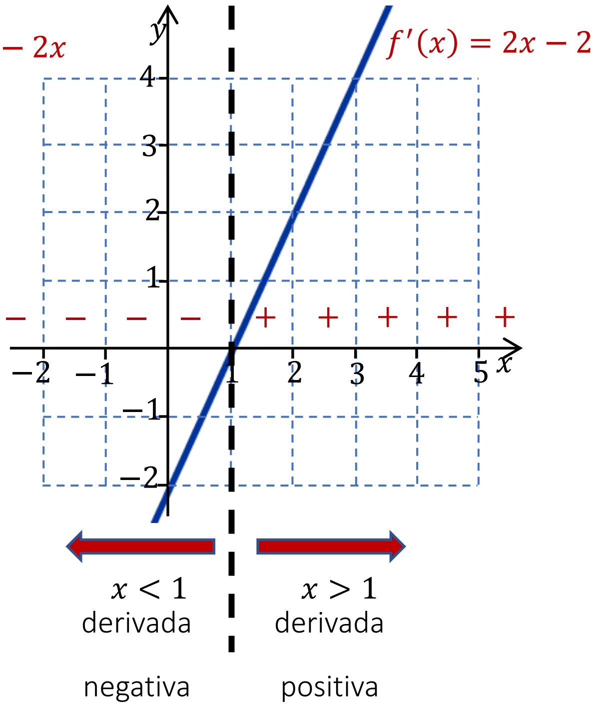
Consequentemente, f é crescente no intervalo $(1, +\infty)$.

Quando a função $2x - 2 < 0$? Para todo $x < 1$.

Consequentemente, f é decrescente no intervalo $(-\infty, 1)$.

Observe a relação "derivada positiva resulta em função crescente" e "derivada negativa resulta em função decrescente" no gráfico da função f do exemplo anterior.





29.2 Pontos críticos

Definição: Um número c pertencente ao domínio de uma função é chamado de ponto crítico da função f se uma das condições é satisfeita:

$$f'(c) = 0 \qquad \text{ou} \qquad f'(c) \text{ não existe.}$$

Portanto, para verificar se um número c é um ponto crítico de uma função f, precisamos seguir os seguintes passos:

1^o Passo: *Derive a função f, ou seja, calcule $f'(x)$.*

2^o *Passo: Iguale a derivada a zero, ou seja, verifique se existem valores de c*

para os quais
$$f'(c) = 0.$$

3^o *Passo: Verifique se existem valores de c para os quais $f'(c)$ não existe.*

Se estes valores de c encontrados estiverem no domínio de f, eles serão os pontos críticos de f.

Exemplo: Verifique se a função

$$f(x) = x^2 + 2x - 4$$

possui pontos críticos.

Solução:

1^o ***Passo:*** *Como $f(x) = x^2 + 2x - 4$ então*

$$f'(x) = 2x + 2.$$

2^o ***Passo:*** *Igualando a derivada a zero, temos:*

$$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ 2x + 2 = 0 \ \rightarrow \ x = -1.$$

A derivada se anula em $x = -1$.

3^o ***Passo:*** *Como f é uma função polinomial, então não existem pontos onde a derivada não existe!*

Como $c = -1$ pertence ao domínio de f e $f'(-1) = 0$, então ele é um ponto crítico de f.

Note que a função f não possui outros pontos críticos.

Exemplo: Verifique se a função

$$f(x) = \sqrt{x}$$

possui pontos críticos.

Solução:

1^o *Passo:* *Como $f(x) = \sqrt{x}$ então*

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2^o *Passo*: *Igualando a derivada a zero, temos:*

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \rightarrow \nexists$$

Não existem pontos onde a derivada se anula

3^o *Passo:* *Dada a expressão que define f', percebe-se que $c = 0$ é o único ponto onde a derivada não existe.*

Como $c = 0$ pertence ao domínio de f e $f'(0)$ não existe, então ele é um ponto crítico de f.

Note que a função f não possui outros pontos críticos.

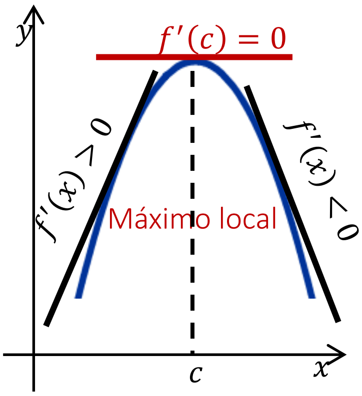
29.3 Máximos e mínimos locais

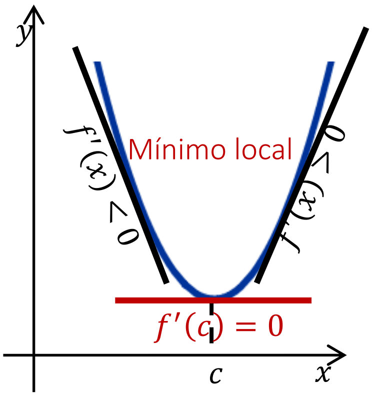
Teorema: Seja f uma função derivável em um intervalo I e $c \in I$ um ponto crítico de f.

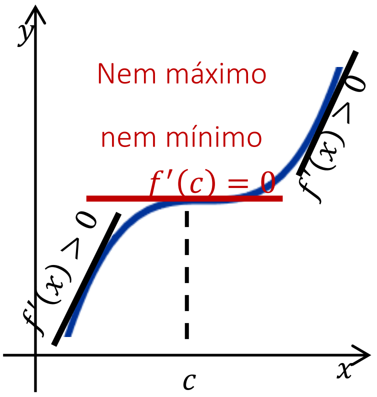
Se o sinal de $f'(x)$ muda de positivo para negativo em c, então temos um máximo local em c.

Se o sinal de $f'(x)$ muda de negativo para positivo em c, então temos um mínimo local em c.

Se não há mudança no sinal de $f'(x)$ em c, então não temos um ponto de máximo nem de mínimo local.







Observação: O Teorema se aplica no caso em que não existe a derivada da função f em $x = c$.

Exemplo: $f(x) = |x|$ não é derivável em $x = 0$, embora este seja um ponto de mínimo.

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = x^2 + 2x - 4$$

determine o ponto crítico e se ele é de máximo ou de mínimo.

Solução: Calculando f':

$$f'(x) = 2x + 2.$$

Igualando a derivada a zero:

$$2x + 2 = 0$$
$$2x = -2$$
$$x = -1 \quad \text{(ponto crítico)}$$

Sinal da derivada:

$$f' \quad \underset{-1}{\xrightarrow{\;- \;\; - \;\; - \;\;\; + \;\; + \;\; +\;}}$$

Como $f'(x)$ muda de negativo para positivo, logo $x = -1$ é um mínimo local.

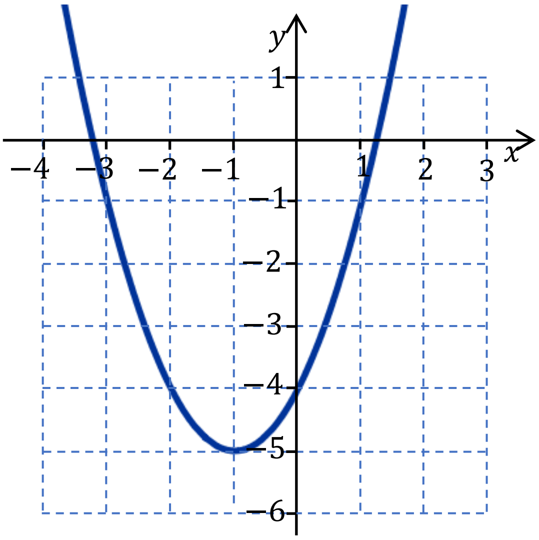


Gráfico de f

29.4 Exercícios Propostos

1) Em cada caso, determine os pontos críticos da função dada.

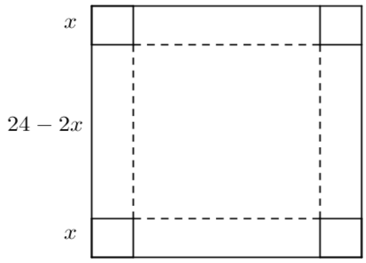
a) $f(x) = 2x^5 + 5x^4 - 10x^3 - 15$

b) $f(x) = 6x^{\frac{2}{3}}$

2) Considere a função $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$. Encontre onde a função é crescente, decrescente e seus pontos de máximos e mínimos.

3) Seja a função $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$ definida em $\mathbb{R}$. Encontre os intervalos onde a função seja crescente e decrescente e seus valores de máximos e mínimos

4) Um fabricante de caixas de papelão pretende fazer caixas sem tampas a partir de folhas quadradas de cartão com área igual a $576cm^2$, cortando quadrados iguais nos quatro cantos e dobrando os lados para cima. Determinar o lado do quadrado que dever ser cortado para se obter uma caixa com o maior volume possível.



5) Considere a função $g(x) = x + 2sen(x)$ em $0 \leq x \leq 2\pi$. Encontre os valores de máximos e mínimos e onde a função é crescente e decrescente.

6) Utilize o teste da primeira derivada para determinar onde a função dada por

$$h(x) = x^{\frac{2}{3}}(6-x)^{\frac{1}{3}}$$

é crescente, decrescente e seus valores de máximos e mínimos.

29.5 Respostas

Exercício 1:

a) $x = -3$, $x = 0$ e $x = 1$

b) $x = 0$

Exercício 2:

Pontos críticos: $x = -1,\ x = 0$ e $x = 2$ Crescente em $(-1,\ 0)$ e $(2,\ +\infty)$

Decrescente em $(-\infty,\ -1)$ e $(0,\ 2)$ Máximo: $x = 0$ Mínimos: $x = -1$ e $x = 2$

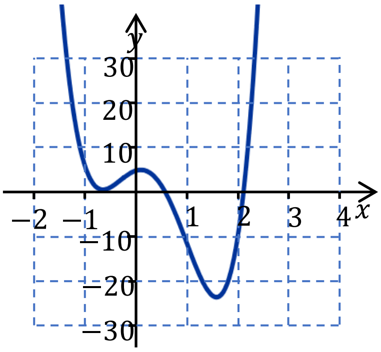


Gráfico de f

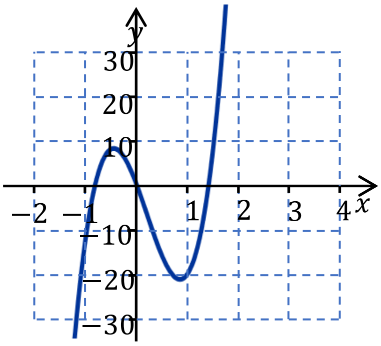
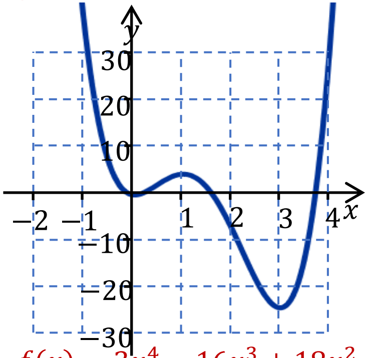


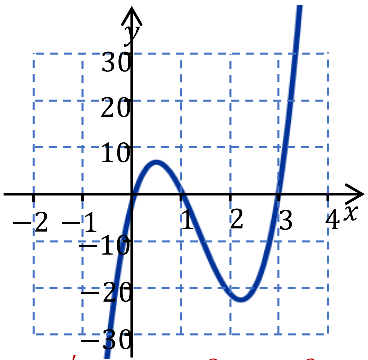
Gráfico de f'

Exercício 3:

Pontos críticos: $x = 0;\ x = 1$ e $x = 3$ Crescente em $(0{,}1)$ e $(3,\ +\infty)$ Decrescente em $(-\infty, 0)$ e $(1\ ,\ 3)$ Máximo local: $x = 1$ Mínimos locais: $x = 0$ e $x = 3$



$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$



$f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 36x$

Exercício 4:

$Resp.: x = 4\ cm\ \ com\ 1024\ cm^3$

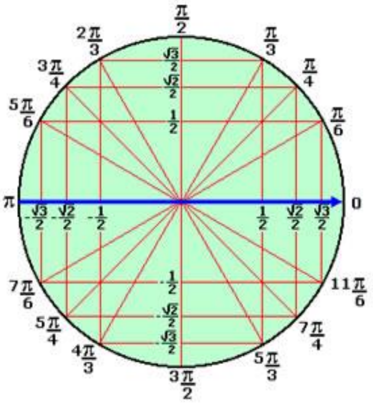
Exercício 5:

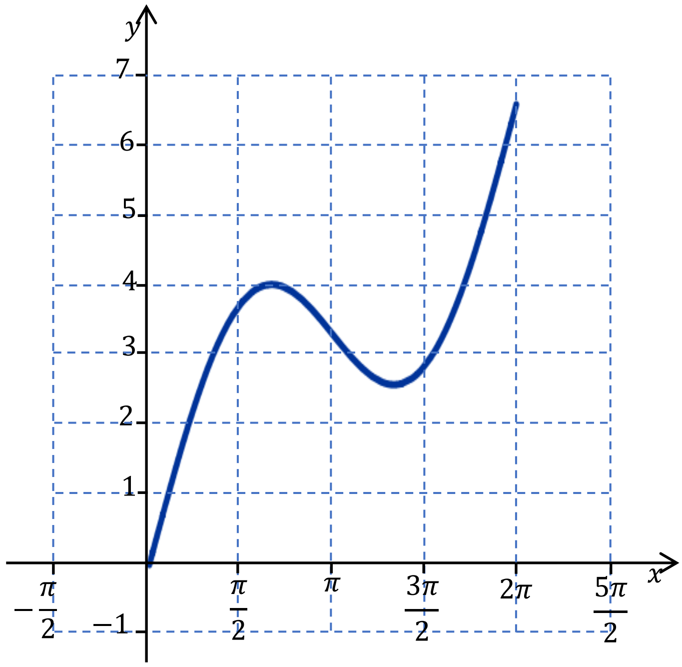
Pontos críticos: $x = \frac{2\pi}{3}$; $x = \frac{4\pi}{3}$

Crescente em $\left[0\ ,\ \frac{2\pi}{3}\right[$ e $\left]\frac{4\pi}{3}\ ,\ 2\pi\right]$

Decrescente em $(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$

Mínimo: $x = \frac{4\pi}{3}$ Máximo: $x = \frac{2\pi}{3}$





Exercício 6:

Pontos críticos: $x = 0,\ x = 4$ e $x = 6$ Crescente em $(0,\ 4)$ Decrescente em $(-\infty,\ 0) \cup (4,\ +\infty)$

Máximos: $x = 4$ Mínimos: $x = 0$

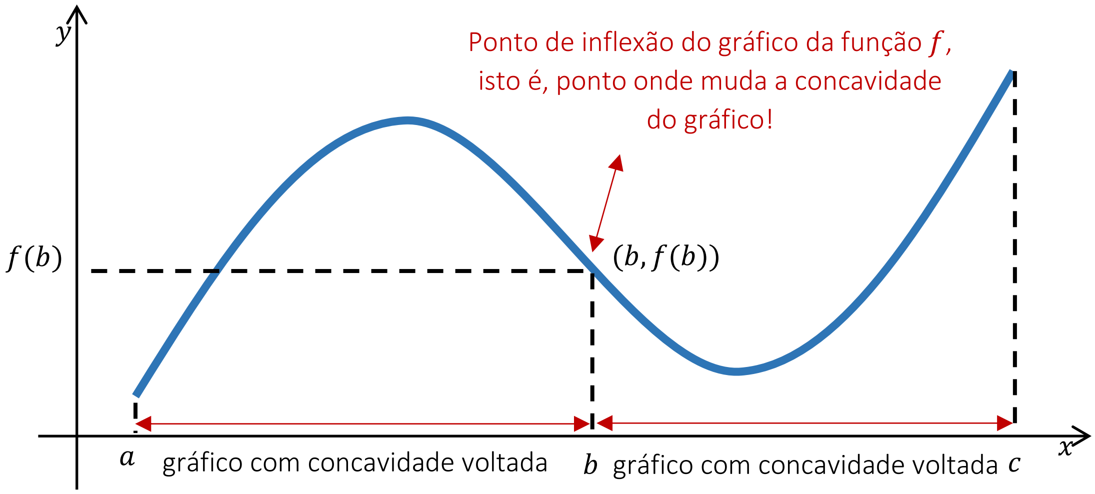
30. Aula 6

30.1 Teste da Segunda Derivada

Seja f uma função contínua e duas vezes derivável num intervalo I.

Com a segunda derivada de f podemos obter informações sobre:

Máximos e mínimos locais	Concavidade do gráfico	Pontos de inflexão



Ponto de inflexão do gráfico da função f, isto é, ponto onde muda a concavidade do gráfico!

gráfico com concavidade voltada para baixo no intervalo (a, b)

gráfico com concavidade voltada para cima no intervalo (b, c)

Veremos agora como obter cada uma dessas informações:

30.2 Concavidade

Teorema: Sendo f uma função duas vezes derivável, f'e f'' sua primeira e segunda derivadas, respectivamente. Então:

Onde f'' for positiva, a concavidade da função é voltada para cima.

Onde f'' for negativa, a concavidade é voltada para baixo.

Portanto, para estudar a concavidade do gráfico de uma função f, podemos seguir os seguintes passos:

1^o Passo: *Derive a função f, ou seja, calcule $f'(x)$.*

2^o Passo: *Derive a função f', ou seja, calcule $f''(x)$.*

3^o *Passo: Faça o estudo de sinal de* $f''(\boldsymbol{x})$.

Nos intervalos onde$f''(x) > 0$ a concavidade é voltada para cima e onde $f''(x) < 0$ a concavidade é voltada para baixo.

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = x^3,$$

determine onde a concavidade é para cima e onde é para baixo.

Solução:

1^o ***Passo:*** *Como* $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^3$ *então:*

$$f'(x) = 3x^2.$$

2^o ***Passo:*** *Calculando* f''*, temos:*

$$f''(x) = 6x.$$

3^o ***Passo:*** *Estudando o sinal de* f'' *temos:*

Quando $f''(x)$ é positiva?

Para todo $x > 0$.

Então, f é côncava para cima em $(0, +\infty)$.

Quando $f''(x)$ é negativa?

Para todo $x < 0$.

Então, f é côncava para baixo em $(-\infty, 0)$.

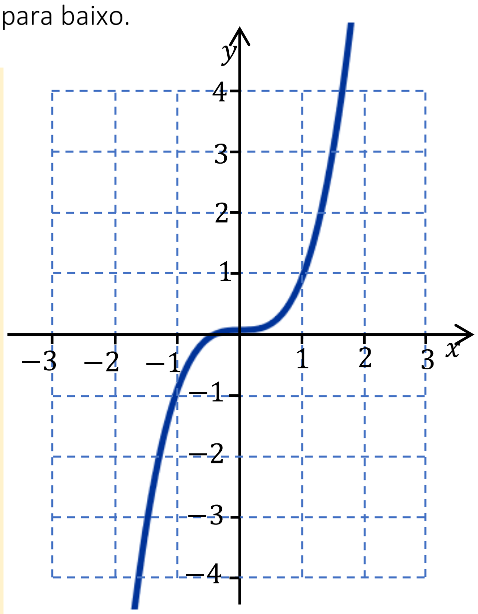


Gráfico de f

30.3 Teste da Segunda Derivada

Teorema: Seja f uma função tal que f'' seja contínua na proximidade de $x = c$.

Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f tem um ponto de máximo local em c.

Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f tem um ponto de mínimo local em c.

Portanto, para verivicar se a função f possui máximos ou mínimos locais, fazemos:

1^o Passo: *Encontre* $f'(x)$.

2^o Passo: *Verifique se existe algum ponto crítico de* f *tal que* $f'(c) = 0$.

3^o *Passo:* *Encontre* $f''(x)$.

4^o *Passo:* *Analise o sinal de* $f''(c)$.

Se $f''(c) < 0$ então $x = c$ é um máximo local.

Se $f''(c) > 0$ então $x = c$ é um mínimo local.

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = x^2 + 2x - 4.$$

determine seu ponto crítico e se ele é de máximo ou de mínimo.

Solução

$\mathbf{1^o}$ ***Passo:*** *Como* $f(x) = x^2 + 2x - 4$ *então*

$$f'(x) = 2x + 2.$$

$\mathbf{2^o}$ ***Passo:*** *Como* $f'(x) = 2x + 2$ *então*

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x + 2 = 0 \rightarrow \quad x = -1.$$

ponto crítico!

$\mathbf{3^o}$ ***Passo:*** *Como* $f'(x) = 2x + 2$ *então*

$$f''(x) = 2.$$

$\mathbf{4^o}$ ***Passo:*** *Como*

$$f''(-1) = 2 > 0$$

Portanto, $x = -1$ é um mínimo local.

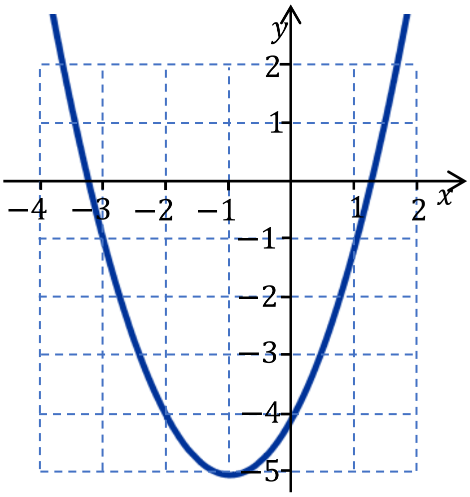


Gráfico de f

30.4 Ponto de Inflexão

Definição: Um ponto P da curva $y = f(x)$ é chamado de ponto de inflexão se f é contínua no ponto e a curva mudar de côncava para cima para côncava para baixo ou vice-versa em P.

Portanto, para determinar se o gráfico de uma função f possui pontos de inflexão, fazemos:

$\mathbf{1^o}$ **Passo:** *Encontre* $f''(x)$.

$\mathbf{2^o}$ **Passo:** *Verifique se* f'' *troca de sinal em algum número* $x = d$.

$\mathbf{3^o}$ ***Passo:*** *Verifique se* f *é contínua em* $x = d$.

$\mathbf{4^o}$ ***Passo:*** *Determine as coordenadas* $(d,\ f(d))$ *do ponto de inflexão.*

Se f'' troca do sinal positivo para negativo, então o gráfico de f está trocando de côncavo para cima para côncavo para baixo.

Sef'' troca do sinal negativo para positivo, então o gráfico de f está trocando de côncavo para baixo para côncavo para cima.

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3.$$

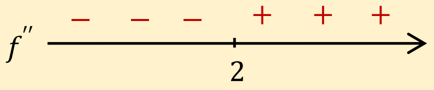
determine se f possui pontos de inflexão.

Solução:

1^o *Passo:*

$$f''(x) = 6x - 12.$$

2^o *Passo: Sinal de f'':*



3^o Passo: Como f é uma função polinomial, segue que f é contínua em $d = 2$.

Dos três passos acima, temos que a função f possui um ponto de inflexão $d = 2$.

4^o Passo: As coordenadas do ponto de inflexão são dadas por:

$$P = (2\,,\, f(2)) = (2, \,-1).$$

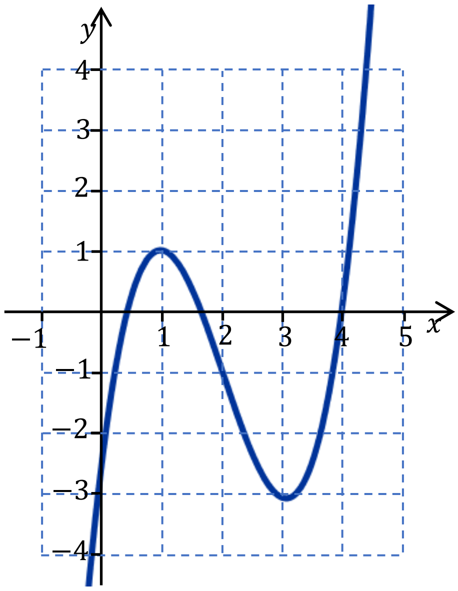


Gráfico de f

30.5 Exercícios Propostos

1) Para as funções abaixo, determine:

- i) os intervalos nos quais f é ***crescente***;
- ii) os intervalos nos quais f é ***decrescente***;
- iii) os intervalos nos quais f é ***côncava para cima***;
- iv) os intervalos nos quais f é ***côncava para baixo***;
- v) as coordenadas dos ***pontos de inflexão*** *(se existirem)*;
- vi) as coordenadas dos pontos de máximo ou mínimo *(se existirem)*;
- vii) o ***esboço do gráfico*** da função f utilizando as informações obtidas nos itens anteriores.

(a) $f(x) = x^4 - 4x^3$

(b) $f(x) = (x-1)^3$

(c) $f(x) = \dfrac{(x+2)}{(x+1)}$

(d) $f(x) = x^2 - 4x$

(e) $f(x) = x^4 - 4x^2$

(f) $f(x) = \dfrac{(x^2+1)}{(x^2-1)}$

30.6 Respostas

(a) $f(x) = x^4 - 4x^3$

i. $(3, +\infty)$

ii. $(-\infty, 3)$

iii. $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

iv. $(0,2)$

v. $(0, 0)$ e $(2, -16)$

vi. $(3, -27)$ (mínimo local)

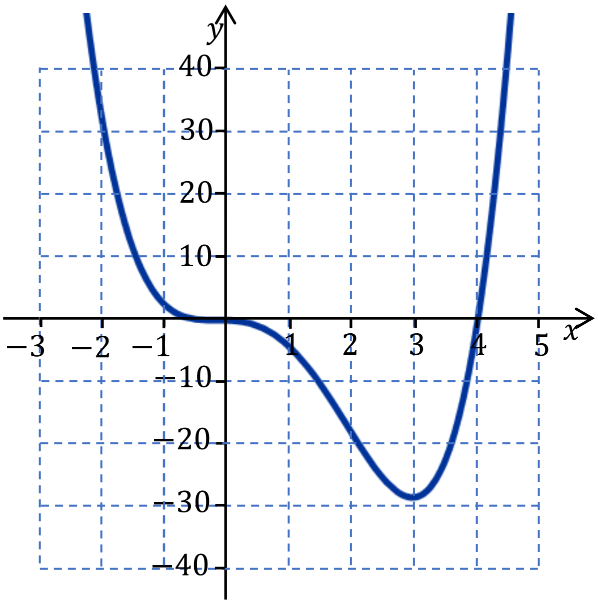


Gráfico de f

(b) $f(x) = (x-1)^3$

i. $\mathbb{R}$

ii. $\nexists$

iii. $(1, +\infty)$

iv. $(-\infty, 1)$

v. $(1, 0)$

vi. $\nexists$

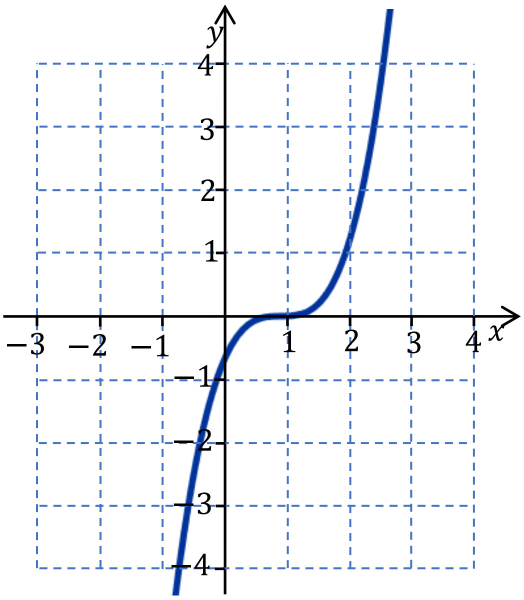


Gráfico de f

(c) $f(x) = \dfrac{(x+2)}{(x+1)}$

i. $\nexists$

ii. $\mathbb{R} - \{-1\}$

iii. $(-1, +\infty)$

iv. $(-\infty, \ -1)$

v. $\nexists$

vi. $\nexists$

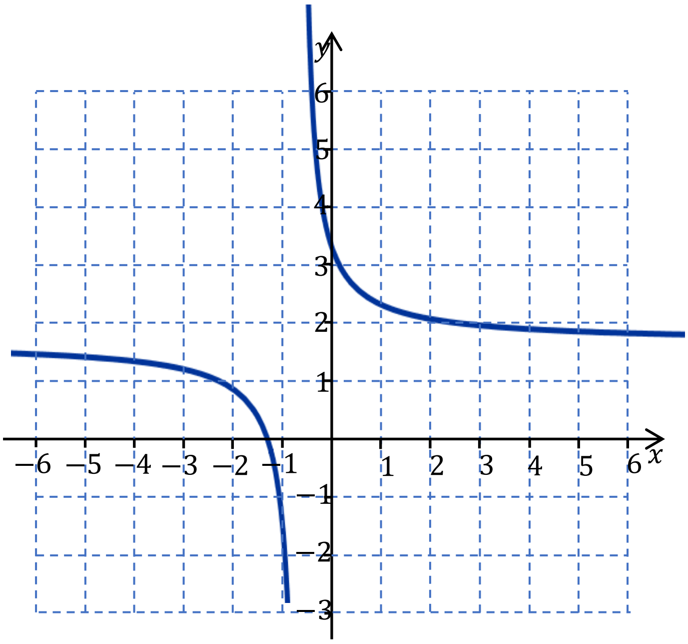


Gráfico de f

(d) $f(x) = x^2 - 4x$

i. $(2, \ +\infty)$

ii. $(-\infty, 2)$

iii. $\mathbb{R}$

iv. $\nexists$

v. $\nexists$

vi. $(2, -4)$ (mínimo local).

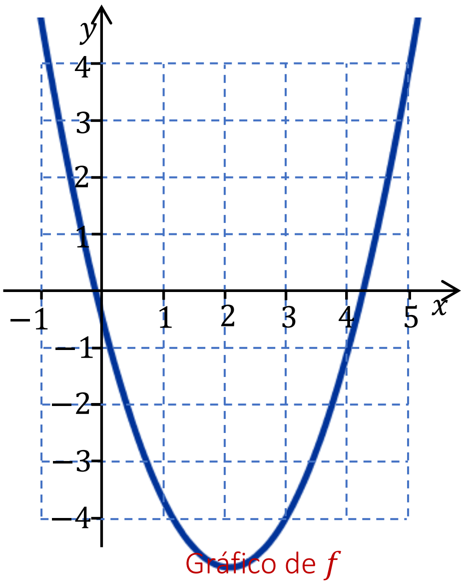


Gráfico de f

(e) $f(x) = x^4 - 4x^2$

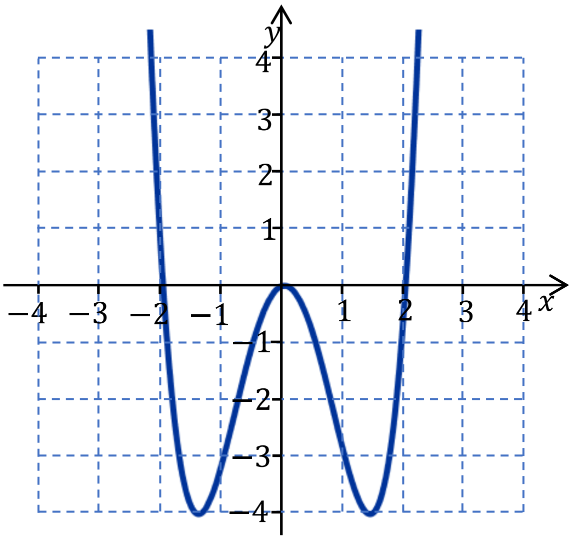


Gráfico de f

i. $(-\sqrt{2},\ 0) \cup (\sqrt{2},\ +\infty)$

ii. $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0,\ \sqrt{2})$

iii. $\left(-\infty,\ -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{2}{3}},\ +\infty\right)$

iv. $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

v. $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{20}{9}\right)$ e $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{20}{9}\right)$

vi. $(-\sqrt{2},\ -4)$ e $(\sqrt{2},\ -4)$ (mínimos locais) e $(0,\ 0)$ (máximo local).

(f) $f(x) = \frac{(x^2+1)}{(x^2-1)}$

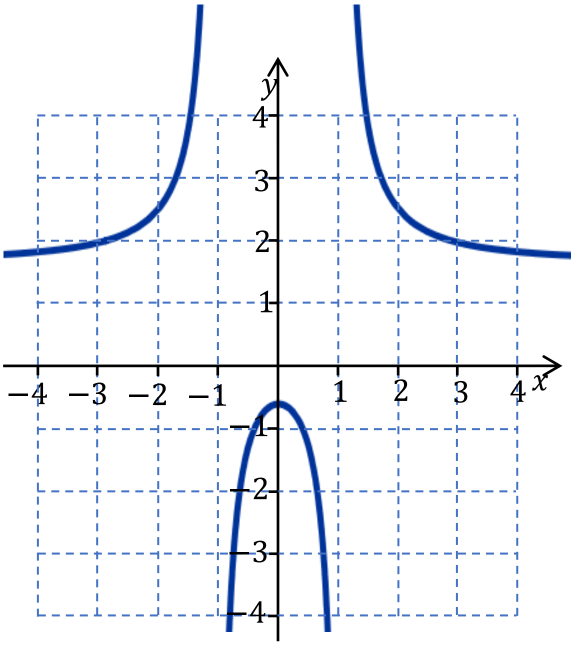


Gráfico de f

i. $(-\infty,\ -1) \cup (-1,\ 0)$

ii. $(0,\ 1\ ) \cup (1, +\infty)$

iii. $(-\infty,\ -1) \cup (1,\ +\infty)$

iv. $(-1,1)$

v. $\nexists$

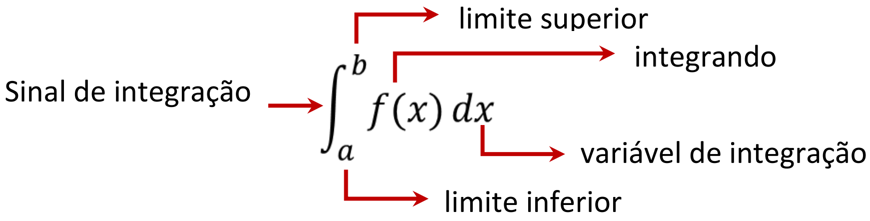
vi. $(0, -1)$ (máximo local)

Capítulo 6: Integrais

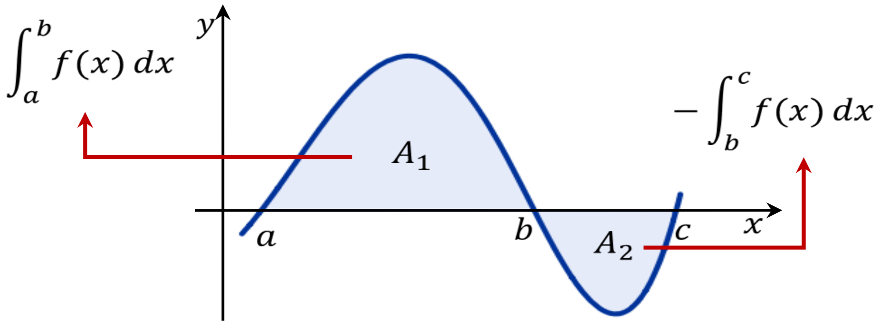
31. Aula 1

31.1 Integral definida

Simbologia e nomenclatura



Interpretação geométrica



31.2 Propriedades da integral definida

1) Se a existe no domínio da f, então:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

2) Se f for integrável em $[a, b]$, então:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

3) Se c for uma constante, então:

$$\int_a^b c\,dx = c\,(b-a)$$

4) Se f for integrável em $[a, b]$ e c for uma constante, então:

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

5) Se f e g forem integráveis em $[a, b]$, então a integral da soma/diferença é igual a soma/diferença das integrais:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

6) Se f for integrável em um intervalo fechado contendo os três pontos a, b e c, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

31.3 Antiderivada

Definição: Seja f uma função definida num intervalo $[a, b]$. Uma antiderivada de f em $[a, b]$ é uma função F definida em $[a, b]$, tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Exemplo: Determine uma antiderivada para a função $f(x) = 12x^2 + 2x$.

Solução: Uma antiderivada para a função f dada é:

$$F(x) = 4x^3 + x^2$$

Pois

$$F'(x) = (4x^3 + x^2)' = 12x^2 + 2x.$$

Note que outras antiderivadas para a função f são dadas por:

$$F_1(x) = 4x^3 + x^2 + 5 \qquad F_2(x) = 4x^3 + x^2 - 100 \qquad F_3(x) = 4x^3 + x^2 + \pi - e$$

Mais precisamente, f possui infinitas antiderivadas, todas da forma:

$$F(x) = 4x^3 + x^2 + C$$

onde C é uma constante.

Antiderivada de algumas funções elementares

Função	Antiderivada	Justificativa
$f(x) = k$ $função\ constante$	$F(x) = kx + C$	$(kx + C)' = k$
$f(x) = x^n$ $(n \neq -1)$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' = x^n$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = ln\,\lvert x\rvert + C$	$(ln\,\lvert x\rvert + C)' = \frac{1}{x}$
$f(x) = cos\,x$	$F(x) = sin\,x + C$	$(sin\,x + C)' = cos\,x$
$f(x) = sin\,x$	$F(x) = -cos\,x + C$	$(-cos\,x + C)' = sin\,x$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$	$(e^x + C)' = e^x$

31.4 Teorema Fundamental do Cálculo – Parte1

Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 1: Se f for contínua em $[a,b]$, então f tem uma antiderivada em $[a,b]$. Então a função F definida por

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

é uma antiderivada de f em$[a,b]$; isto é, $F'(x)=f(x)$ para cada $x\in[a,b]$.

Além disso, F é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b).

Na notação de Leibniz, o Teorema acima afirma que

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right]=f(x)$$

"A derivada é a operação inversa da integral, e vice-versa".

Exemplo: Calcule a derivada das seguintes funções:

$a)\ F(x)=\int_0^x cos\,t\,dt$ $\qquad b)\ G(y)=\int_0^y (s^2+2s-1)ds$

Solução: Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 01, temos:

$$a)\ F'(x)=\left[\int_0^x cos\,t\,dt\right]'=cos\,x$$

$$b)\ G'(y)=\left[\int_0^y (s^2+2s-1)ds\right]'=y^2+2y-1$$

Exemplo: Calcule a seguinte derivada:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^x tan\,w\,dw\right]$$

Solução: Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 01, temos:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^x tan\,w\,dw\right]=tan\,x$$

Exemplo: Calcule a seguinte derivada:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^{x^3}\sqrt{t}dt\right]$$

Solução: Note que, neste caso, o limite superior não é x, mas x^3.

Portanto, utiliza-se a regra da cadeia no cálculo da derivada, da seguinte forma:

$$y=\int_1^{x^3}\sqrt{t}dt \qquad e \qquad u=x^3$$

Portanto, utilizando a regra da cadeia, temos:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{d}{du}\left[\int_1^u\sqrt{t}dt\right]\cdot\frac{du}{dx}=\sqrt{u}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$=\sqrt{x^3}\cdot(3x^2)=3x^2\sqrt{x^3}=3x^3\sqrt{x}.$$

31.5 Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 2

Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 2: Se $\boldsymbol{f}$ é contínua em $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ e se $\boldsymbol{F}$ é uma antiderivada de $\boldsymbol{f}$ em $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, então:

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

Ou seja,

Antiderivada de f calculada no limite superior

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

Antiderivada de f calculada no limite inferior

Notação: É comum escrever o Teorema acima de uma forma mais resumida:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)|_a^b$$

onde

$$F(x)|_a^b=F(b)-F(a)$$

Exemplo: Calcule as seguintes integrais definidas:

$a)\ \int_{-2}^{5}xdx$ $\qquad b)\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos y\,dy$

$c)\ \int_{-1}^{\sqrt{7}}(2s+3)ds$ $\qquad d)\ \int_{0}^{1}(t^3-\sqrt{t})dt$

Solução: Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 2, temos:

$$a)\ \int_{-2}^{5}xdx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-2}^{5}=\frac{(5)^2}{2}-\frac{(-2)^2}{2}=\frac{25}{2}-\frac{4}{2}=\frac{21}{2}.$$

$$b)\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos y\,dy=\sin y|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\sin\pi-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=0-1=-1.$$

$$c)\ \int_{-1}^{\sqrt{7}}(2s+3)ds=2\int_{-1}^{\sqrt{7}}sds+3\int_{-1}^{\sqrt{7}}ds=2\left.\frac{s^2}{2}\right|_{-1}^{\sqrt{7}}+3s|_{-1}^{\sqrt{7}}$$

$$=2\left(\frac{\left(\sqrt{7}\right)^2}{2}-\frac{(-1)^2}{2}\right)+3\left(\sqrt{7}+1\right)=7-1+3\sqrt{7}=3\left(3+\sqrt{7}\right)$$

$$d)\ \int_0^1 (t^3-\sqrt{t})dt = \int_0^1 t^3dt - \int_0^1 \sqrt{t}dt = \left.\frac{t^4}{4}\right|_0^1 - \left.\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1$$

$$= \left(\frac{(1)^4}{4}-\frac{(0)^4}{4}\right)-\left(\frac{(1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{(0)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{4}-\frac{2}{3}=-\frac{5}{12}.$$

31.6 Exercícios Propostos

1) Aplicando o TFC-1, encontre as seguintes derivadas:

$a)\ \dfrac{d}{dx}\left[\displaystyle\int_1^x t^3dt\right]$

$b)\ \dfrac{d}{dx}\left[\displaystyle\int_0^x \sqrt{4+t^6}\,dt\right]$

$c)\ \dfrac{d}{dx}\left[\displaystyle\int_1^{x^3} \sqrt[3]{t^2+1}dt\right]$

$d)\ \dfrac{d}{dx}\left[\displaystyle\int_2^{\tan x} \frac{1}{1+t^2}dt\right]$

$e)\ y=\displaystyle\int_0^{\tan x}\sqrt{t+\sqrt{t}}\ dt$

$f)\ y=\displaystyle\int_2^{1/x} \arctan t\ dt$

$g)\ y=\displaystyle\int_{1-3x}^{1}\frac{u^3}{1+u^2}du$

$h)\ y=\displaystyle\int_{-x}^{x}\frac{1}{3+t^2}dt$

2) Calcule as seguintes integrais definidas aplicando o TFC – 2:

$a)\ \displaystyle\int_2^3 x^2dx$

$b)\ \displaystyle\int_{-1}^2 |x|dx$

$c)\ \displaystyle\int_1^2 (6x-2)dx$

$d)\ \displaystyle\int_1^9 \sqrt{x}dx$

$e)\ \displaystyle\int_1^3 (3x^2-4)dx$

$f)\ \displaystyle\int_1^3 e^xdx$

$g)\ \displaystyle\int_3^6 \frac{1}{x}dx$

$h)\ \displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \cos\theta\, d\theta$

$i)\ \displaystyle\int_1^4 (5-2t-3t^2)dt$

$j)\ \displaystyle\int_1^2 \frac{3}{t^4}dt$

$k)\ \displaystyle\int_1^2 (1+2y)^2dy$

$l)\ \displaystyle\int_{-2}^3 |2x-1|dx$

$m)\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} 3\sec^2 x\, dx$

31.7 Respostas

Exercício 1:

$a)\ x^3$

$b)\ \sqrt{4+x^6}$

$c)\ 3x^2\sqrt[3]{x^6+1}$

$d)\ 1$

$e)\ y' = \sqrt{tan\,x + \sqrt{tan\,x}}\,sec^2\,x$

$f)\ y' = -\dfrac{arctan\left({}^{1}\!/_{x}\right)}{x^2}$

$g)\ y' = \dfrac{3(1-3x)^3}{1+(1-3x)^2}$

$h)\ y' = \dfrac{2}{3+x^2}$

Exercício 2:

$a)\ \dfrac{19}{3}$

$b)\ \dfrac{5}{2}$

$c)\ 7$

$d)\ \dfrac{52}{3}$

$e)\ 18$

$f)\ e^3 - e$

$g)\ R: ln\,2$

$h)\ 0$

$i)\ -63$

$j)\ \dfrac{7}{8}$

$k)\ \dfrac{49}{3}$

$l)\ \dfrac{25}{2}$

$m)\ 3$

32. Aula 2

32.1 Método da substituição

Seja F uma antiderivada de f (ou seja, $F' = f$) e suponha que a função composta $F\big(g(x)\big)$ seja derivável. Então, pela regra da cadeia, tem-se:

$$\Big(F\big(g(x)\big)\Big)' = F'\big(g(x)\big)g'(x) = f\big(g(x)\big)g'(x)$$

Na forma integral

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

Fazendo a seguinte mudança de variável

$$u = g(x) \qquad então \qquad \frac{du}{dx} = g'(x)$$

Podemos reescrever da seguinte forma

$$\int f(\underbrace{g(x)}_{u})\,\underbrace{g'(x)dx}_{du} = \int f(u)du = F(u) + C = F(\underbrace{g(x)}_{u}) + C$$

método da substituição para integral indefinida

Exemplo: Calcule as seguintes integrais usando o método da substituição:

$a) \int e^{2x}\,dx \qquad b) \int \frac{cos\theta}{sen^2\theta}d\theta \qquad c) \int \frac{t}{\sqrt{1+2t^2}}dt$

Solução:

Substituição $u = 2x \;\to\; du = 2dx \;\leftrightarrow\; dx = \frac{du}{2}$ $\qquad u = 2x$

$$a) \int e^{2x}\,dx = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{e^u}{2} + C = \frac{e^{2x}}{2} + C$$

Substituição $u = sin\,\theta \;\to\; du = cos\,\theta\,d\theta$ $\qquad u = sin\,\theta$

$$b) \int \frac{cos\theta}{sen^2\theta}d\theta = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2}du = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{sin\,\theta} + C = -\,csc\,\theta + C$$

Substituição $u = 1 + 2t^2 \to du = 4tdt \;\leftrightarrow\; tdt = \frac{du}{4}$ $\qquad u = 1 + 2t^2$

$$c) \int \frac{t}{\sqrt{1+2t^2}}dt = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\frac{du}{4} = \frac{1}{4}\int u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\sqrt{u} + C = \frac{\sqrt{1+2t^2}}{2} + C$$

Exemplo: Calcule a integral

$$\int sin^5 x\, cos^2 x\, dx$$

Solução:

$cos^2 x + sin^2 x = 1 \quad \rightarrow \quad sin^2 x = 1 - cos^2 x$

$$\int sin^5 x\, cos^2 x\, dx = \int sin\, x\, (sin^2 x)^2\, cos^2 x\, dx = \int sin\, x (1 - cos^2 x)^2\, cos^2 x\, dx$$

$$= \int sin\, x\, cos^2 x\, (1 - 2\, cos^2 x + cos^4 x) dx$$

Substituição $u = cos\, x \rightarrow du = -\, sin\, x\, dx \quad \leftrightarrow \quad -du = sin\, x\, dx$

$$= \int sin\, x\, (cos^2 x - 2\, cos^4 x + cos^6 x)\ dx = -\int (u^2 - 2u^4 + u^6) du$$

$$= -\int u^2\, du + 2\int u^4\ du - \int u^6\ du = -\frac{1}{3}u^3 + C_1 + \frac{2}{5}u^5 + C_2 - \frac{1}{7}u^7 + C_3$$

Onde $C_1 + C_2 + C_3 = C$

$$= -\frac{1}{3}cos^3 x + \frac{2}{5}cos^5 x - \frac{1}{7}cos^7 x + C$$

32.2 Método da substituição – Integral definida

Lembre que um método muito útil para resolver algumas integrais é o método da substituição.

Para utilizar o método da substituição em integrais definidas é necessário realizar algumas adequações nos limites de integração.

Adequação no limite superior

$x = b \leftrightarrow u = g(b)$

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

$u = g(x)$

Substituição

Adequação no limite inferior

$x = a \leftrightarrow u = g(a)$

Ou seja, se F é uma primitiva da função f, então:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = F(u)|_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$

Estamos supondo que g' é contínua em $[a, b]$ e que f é contínua na imagem de $u = g(x)$

Exemplo: Calcule a seguinte integral definida

$$\int_1^2 (x + 2)^5 dx$$

fazendo uma substituição conveniente e ajustando os limites de integração.

Solução: Neste caso, teremos:

$Adequação\ no\ limite\ superior$
$x = 2 \leftrightarrow u = g(2) = 2 + 2 = 4$

$$\int_1^2 (x+2)^5 dx = \int_3^4 u^5 du = \left[\frac{u^6}{6}\right]_3^4 = \frac{1}{6}[(4)^6 - (3)^6] = \frac{3367}{6}.$$

$Substituição$
$u = g(x) = x + 2$
$du = dx$

$Adequação\ no\ limite\ inferior$
$x = 1 \leftrightarrow u = g(1) = 1 + 2 = 3$

Observação: Uma forma de resolver uma integral definida utilizando o método da substituição, sem modificar limites de integração, é a seguinte:

1) Resolva a integral indefinida utilizando o método da substituição.

2) Volte na variável original e substitua os limites da integral inicial.

Exemplo: Calcule a seguinte integral definida

$$\int_0^2 x(x^2+1)^3 dx$$

Solução 1: Fazendo uma substituição conveniente e ajustando os limites de integração, teremos:

$$\int_0^2 x(x^2+1)^3 dx = \int_1^5 u^3 \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int_1^5 u^3\, du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^5 = \frac{1}{8}[(5)^4 - (1)^4] = 78.$$

$Substituição$
$u = x^2 + 1$

$du = 2xdx \leftrightarrow xdx = \frac{du}{2}$

$Novos\ limites:$
$x = 0 \rightarrow u = 1$
$x = 2 \rightarrow u = 5$

Solução 2: Primeiro resolvemos a integral indefinida:

$$\int x(x^2+1)^3 dx = \int u^3 \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^3\, du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right] = \frac{1}{8}u^4 = \frac{1}{8}(x^2+1)^4$$

Substituindo os limites de integração:

$$\int_0^2 x(x^2+1)^3 dx = \left[\frac{1}{8}(x^2+1)^4\right]_0^2 = \frac{1}{8}[625 - 1] = \frac{624}{8} = 78$$

32.3 Exercícios Propostos

1) Calcule as seguintes integrais:

$a)\ \int_0^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

$b)\ \int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$

$c)\ \int_0^1 sin(3\pi t) dt$

$d)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + tan\, t)^3 . sec^2\, t\, dt$

$e)\ \int_0^3 x. |x^2 - 4| dx$

$f)\ \int_0^1 y. (y^2 + 1)^5\, dy$

2) Calcule as seguintes integrais utilizando o método da substituição:

$a)\ \int \frac{\ln v}{v}dv$ $\quad b)\ \int e^{5s}ds$ $\quad c)\ \int \frac{dx}{x\,(\ln x)^2}$

$d)\ \int 2x\sqrt{1+x^2}dx$ $\quad e)\ \int \frac{2rdr}{(1-r)^7}$ $\quad f)\ \int 2\sin y\sqrt[3]{1+\cos y}\,dy$

3) Encontre as integrais indefinidas:

$a)\ \int \frac{\cos 3u}{\sqrt{1-2\sin 3u}}du$ $\quad b)\ \int \sqrt{t}\cos\sqrt{t^3}dt$ $\quad c)\ \int (2\cot^2\theta - 3\tan^2\theta)d\theta$

$d)\ \int \frac{x^3-1}{x-1}dx$ $\quad e)\ \int \frac{(1+\cot^2 z)\cot z}{\csc z}dz$ $\quad f)\ \int \frac{3\tan\theta - 4\cos^2\theta}{\cos\theta}d\theta$

4) Calcule a integral

$$a)\ \int x^2\sqrt{x-1}dx$$

por dois métodos:

$a)\ u = x-1$ $\quad b)\ u = \sqrt{x-1}$

5) Calcule as integrais por meio da substituição indefinida:

$a)\ \int x(x^2+1)\sqrt{4-2x^2-x^4}dx$ $\quad b)\ \int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt{x}}dx$

6) Calcule as integrais por meio da substituição indefinida

$a)\ \int \cos^3 x\ \ dx$ $\quad b)\ \int \sin^5 x\cos^2 x\,dx$ $\quad c)\ \int \sin^6\theta\cos^5\theta\,d\theta$

$d)\ \int tg^6 x\sec^4 x\,dx$ $\quad e)\ \int tg^5\theta\sec^7\theta\,d\theta$

32.4 Respostas:

Exercício 1:

$a)\ 2.(e^2-1)$ $\quad b)\ \frac{1}{14}$ $\quad c)\ \frac{2}{3\pi}$

$d)\ \frac{15}{4}$ $\quad e)\ \frac{41}{4}$ $\quad f)\ \frac{21}{4}$

Exercício 2:

$a)\ \frac{(\ln v)^2}{2}+C$ $\quad b)\ \frac{e^{5s}}{5}+C$

$c)\ -\frac{1}{\ln x}+C$ $\quad d)\ \frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2}+C$

$e)\ -\frac{2}{5}(1-r)^{-5}+\frac{1}{3}(1-r)^{-6}+C$

$f)\ -\frac{3}{2}(1+\cos y)^{4/3}+C$

Exercício 3:

$a)\ -\frac{1}{3}\sqrt{1-2\sin 3u}+C$

$b)\ \frac{2}{3}\sin\sqrt{t^3}+C$

$c)\ -2\cot\theta - 3\tan\theta + \theta + C$

$d)\ \dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x+C$

$e)\ -\csc z+C$

$f)\ 3\sec\theta-4\sin\theta+C$

Exercício 4:

$$\frac{2}{7}(x-1)^{7/2}+\frac{4}{5}(x-1)^{5/2}+\frac{2}{3}(x-1)^{3/2}+C$$

Exercício 5:

$a)\ -\dfrac{1}{6}(4-2x^2-x^4)^{3/2}+C$

$b)\ \dfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{x}\right)^4+C$

Exercício 6:

$a)\ \sin x-\dfrac{1}{3}\sin^3x+C$

$b)\ -\dfrac{1}{3}\cos^3x+\dfrac{2}{5}\cos^5x-\dfrac{1}{7}\cos^7x+C$

$c)\ \dfrac{1}{7}\sin^7\theta-\dfrac{2}{9}\sin^9\theta+\dfrac{1}{11}\sin^{11}\theta+C$

$d)\ \dfrac{1}{7}tg^7x+\dfrac{1}{9}tg^9x+C$

$e)\ \dfrac{1}{11}\sec^{11}\theta-\dfrac{2}{9}\sec^9\theta+\dfrac{1}{7}\sec^7\theta+C$

33. Aula 3

33.1 Integração por partes

Estudaremos a seguir uma importante ferramenta no cálculo de algumas integrais, chamada de método da integração por partes.

Lembre que, a regra da derivada do produto nos diz que se f e g são duas funções deriváveis em relação à variável x, e digamos que

$$u = f(x) \qquad e \qquad v = g(x)$$

então

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \qquad \text{Derivada do produto}$$

Lembrando que a integral e a derivada são operações inversas uma da outra, e que a integral da soma é igual a soma das integrais, obtemos:

$$u \cdot v = \int v \cdot du + \int u \cdot dv$$

Portanto, chegamos na fórmula de integração por partes:

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

Observações Importantes:

1) Note que, durante este processo, se obtém uma nova integral.

$$\underbrace{\int u\,dv}_{Integral\ dada} = uv - \underbrace{\int v\,du}_{Integral\ obtida}$$

O método de integração por partes se torna eficiente quando a integral obtida é mais simples do que a integral dada.

2) Em termos das funções f e g, o método de integração por partes fica escrito da seguinte forma:

$$\boxed{\int \underbrace{f(x)}_{u} \cdot \underbrace{g'(x)dx}_{dv} = \underbrace{f(x)}_{u} \cdot \underbrace{g(x)}_{v} - \int \underbrace{g(x)}_{v} \cdot \underbrace{f'(x)dx}_{du}}$$

3) O método de integração por partes para integrais definidas é dado por:

$$\boxed{\int_a^b f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x)|_a^b - \int_a^b g(x) \cdot f'(x)dx}$$

Exemplo: Calcule as integrais:

$a) \int x \cdot \cos x\,dx$ $\qquad$ $b) \int_1^e t^2 \ln t\,dt$

Solução:

$$a)\ \int x\cdot \cos x\,dx = x\cdot \sin x - \int \sin x\,dx = x\cdot \sin x + \cos x + C.$$

$$u = x \ \rightarrow\ du = dx \qquad dv = \cos x\,dx \ \rightarrow\ v = \int \cos x\,dx \ \rightarrow\ v = \sin x$$

$$b)\ \int_1^e t^2 \ln t\,dt = \ln t\,\frac{t^3}{3}\bigg|_1^e - \int_1^e \frac{t^3}{3}\cdot\frac{1}{t}dt = \frac{t^3\cdot \ln t}{3}\bigg|_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e t^2 dt$$

$$u = \ln t \ \rightarrow\ du = \frac{1}{t}dt \qquad dv = t^2 dt \ \rightarrow\ v = \int t^2\,dt \ \rightarrow\ v = \frac{t^3}{3}$$

$$= \frac{e^3\cdot \ln e}{3} - \frac{1^3\cdot \ln 1}{3} - \frac{t^3}{9}\bigg|_1^e = \frac{e^3}{3} - \left(\frac{e^3}{9} - \frac{1^3}{9}\right) = \frac{2e^3+1}{9}.$$

33.2 Regra do LIATE

Na regra de integração por partes, precisamos escolher $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{dv}$ de maneira conveniente.

Uma boa sugestão para a escolha de u é conhecida como regra do

LIATE

que funciona da seguinte forma:

Logarítmica	($u = \ln x$, $u = \log_2 x$, etc...)
Inversa Trigonométrica	($u = \arcsin x$, $u = \arccos x$, $\arctan x$, etc...)
Algébrica	($u = x^n$, $u = \sqrt{x}$, funções polinomiais, funções racionais, etc...)
Trigonométrica	($u = \sin x$, $u = \cos x$, $u = \tan x$, etc...)
Exponencial	($u = e^x$, $u = 2^x$, etc...)

Prioridade na escolha de u

Observação: A regra do LIATE fornece apenas uma SUGESTÃO.

Não é garantia de que esta escolha de u será a mais eficiente!!

Exemplo: Calcule a seguinte integral:

$$\int x\cdot e^{3x}\,dx$$

Solução: Note que

Função exponencial

$$\int x \cdot e^{3x}\, dx$$

Função algébrica

De acordo com a regra do LIATE, temos:

$$u = x \;\rightarrow\; du = dx \qquad dv = e^{3x} dx \;\rightarrow\; v = \int e^{3x}\, dx \;\rightarrow\; v = \frac{e^{3x}}{3}$$

Portanto

$$\int x \cdot e^{3x}\, dx \;= x\frac{e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3} dx = x\frac{e^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\; dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\frac{e^{3x}}{3} + C$$

$$= \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{e^{3x}}{9} + C.$$

Exemplo: Calcule a seguinte integral:

$$\int (t^2 + 1) \cdot \cos t\, dt$$

Solução: Note que

Função trigonométrica

$$\int (t^2 + 1) \cdot \cos t\, dt$$

Função algébrica

De acordo com a regra do LIATE, temos:

$$u = t^2 + 1 \;\rightarrow\; du = 2tdt \qquad dv = \cos t\, dt \;\rightarrow\; v = \sin t$$

Portanto

$$\int (t^2 + 1) \cdot \cos t\;\, dt = (t^2 + 1) \cdot \sin t - 2\int t \sin t\, dt \qquad (1)$$

Note que, podemos novamente utilizar o método da integração por partes para resolver a integral

Função trigonométrica

$$\int \mathrm{t}\; \sin t\, dt$$

Função algébrica

De acordo com a regra do LIATE, temos:

$$u = t \;\rightarrow\; du = dt \qquad dv = \sin t\, dt \;\rightarrow\; v = -\cos t$$

Portanto

$$\int t \sin t\, dt = t \cdot (-\cos t) - \int (-\cos t) dt = -t \cdot \cos t + \int \cos t\, dt$$

$$= -t \cdot \cos t + \sin t \qquad (2)$$

De (1) e (2) obtemos

$$\int (t^2 + 1) \cdot \cos t\;\, dt = (t^2 + 1) \cdot \sin t - 2(-t \cdot \cos t + \sin t) + C$$

$$= (t^2 + 1) \cdot \sin t + 2t \cdot \cos t - 2 \sin t + C$$

Observação: Do exemplo anterior, obtivemos:

$$\int (t^2+1)\cdot \cos t\, dt = (t^2+1)\cdot \sin t + 2t\cdot \cos t - 2\sin t + C.$$

Depois de resolver uma integral indefinida, pode ser importante "tirar a prova real" para saber se seus cálculos estão corretos!

Lembre que a derivada da resposta deve ser igual ao integrando!!

No exemplo acima, como

$$[(t^2+1)\cdot \sin t + 2t\cdot \cos t - 2\sin t + C\,]'$$

$$= [(t^2+1)\cdot \sin t]' + 2[t\cdot \cos t]' - 2[\sin t]' + C'$$

$$= 2t\cdot \sin t + (t^2+1)\cdot \cos t + 2(\cos t - t\cdot \sin t) - 2\cos t$$

$$= 2t\cdot \sin t + (t^2+1)\cdot \cos t + 2\cos t - 2t\cdot \sin t - 2\cos t$$

$$= (t^2+1)\cdot \cos t$$

temos então a certeza de que a resposta encontrada está correta!

33.3 Exercícios Propostos

1) Calcule as seguintes integrais:

$a)\ \int ln(2x+1)\,dx$ $\qquad b)\ \int x^2 \cos 3x\ \ dx$ $\qquad c)\ \int e^{2\theta} \sin 3\theta\ \ d\theta$

2) Calcule as seguintes integrais:

$a)\ \int_0^2 x^2 e^x\ dx$ $\qquad b)\ \int_0^1 \frac{y}{e^{2y}} dy$ $\qquad c)\ \int_0^{\pi/4} e^{3x} \sin 4x\ \ dx$

$d)\ \int_1^2 \frac{ln\, t}{t^2} dt$ $\qquad e)\ \int_0^{\pi/3} \sin 3y \cos y\ \ dy$ $\qquad f)\ \int_0^2 xe^{2x} dx$

3) Calcule as seguintes integrais:

$a)\ \int_0^{\pi/8} \sin^5 2x \cos 2x\, dx$ $\qquad b)\ \int_0^1 x^2(1+2x^3)^5 dx$ $\qquad c)\ \int_0^2 xe^{-x^2}\, dx$

$d)\ \int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$ $\qquad e)\ \int_0^{\pi/3} tg^5 x\, sec^4 x\, dx$ $\qquad f)\ \int_{\pi/2}^{3\pi/4} \sin^5 x \cos^3 x\, dx$

$g)\ \int_0^{\pi/8} \sin 3x \cos 5x\ \ dx$ $\qquad h)\ \int_0^2 \frac{x^3\, dx}{\sqrt{16-x^2}}$ $\qquad i)\ \int_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{9+x^2}}$

33.4 Respostas

Exercício 1

$a)\ \frac{1}{2}(2x+1)\,ln(2x+1)-x+C$

$b)\ \frac{1}{3}x^2\,sin\,3x+\frac{2}{9}x\,cos\,3x-\frac{2}{27}sin\,3x+C$

$c)\ \frac{1}{13}e^{2\theta}(2\,sin\,3\theta-3\,cos\,3\theta)+C$

Exercício 2

$a)\ 2(e^2-1)$

$b)\ \frac{1}{4}-\frac{3}{4}e^{-2}$

$c)\ \frac{4}{25}\left(e^{3\pi/4}+1\right)$

$d)\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}ln\,2$

$e)\ \frac{9}{16}$

$f)\ \frac{1}{4}(3e^4+1)$

Exercício 3

$a)\ \frac{1}{96}$

$b)\ \frac{182}{9}$

$c)\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2e^4}$

$d)\ e-\sqrt{e}$

$e)\ \frac{117}{8}$

$f)\ -\frac{11}{384}$

$g)\ \frac{1}{8}\left(\sqrt{2}-1\right)$

$h)\ \frac{128}{3}-24\sqrt{3}$

$i)\ \frac{2}{27}\left(3-\sqrt{3}\right)$

34. Aula 4

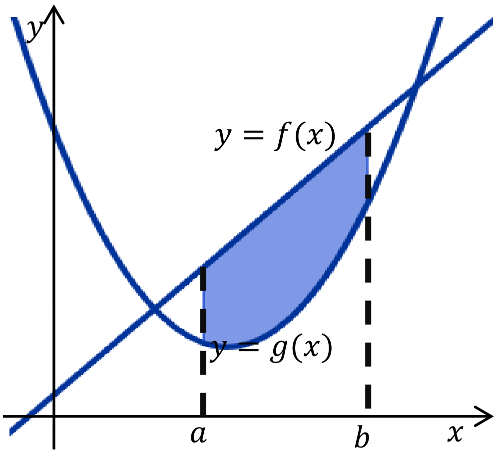
34.1 Área entre curvas

Definição: A área $\boldsymbol{A}$ da região limitada pelas curvas $\boldsymbol{y = f(x)}$ e $\boldsymbol{y = g(x)}$ e pelas retas $\boldsymbol{x = a}$ e $\boldsymbol{x = b}$, onde $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ são contínuas e $\boldsymbol{f(x) \geq g(x)}$, para todo $\boldsymbol{x \in [a, b]}$ é:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Observação: Antes de calcular a área, pode ser importante esboçar os gráficos das funções f e g para identificar qual função delimita a área superiormente (função de cima) e qual delimita a área inferiormente (função de baixo):

$$A = \int_a^b [\underbrace{f(x)}_{\substack{\text{Função}\\ \text{de cima}}} - \underbrace{g(x)}_{\substack{\text{Função}\\ \text{de baixo}}}]\, dx$$

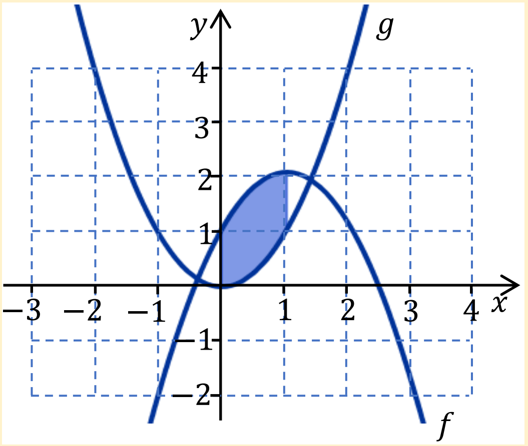


Exemplo: Calcule a área compreendida pelas curvas $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ e $g(x) = x^2$ e pelas retas $x = 0$ e $x = 1$.

Solução: Neste caso, temos:

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \\ &= \int_0^1 [-x^2 + 2x + 1 - x^2]dx \\ &= \int_0^1 [-2x^2 + 2x + 1]dx \\ &= \left[-2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 \\ &= -\frac{2}{3} + 1 + 1 = -\frac{2}{3} + 2 \\ &= \frac{4}{3}\ u.a. \end{aligned}$$

Gráficos

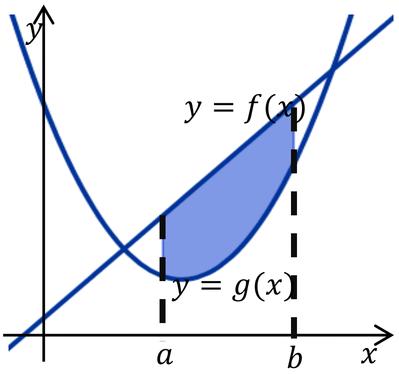


$f(x) = -x^2 + 2x + 1$ Função de cima
$g(x) = x^2$ Função de baixo
Limites de integração: $a = 0 \quad b = 1$

Observação: Quando for necessário calcular a área entre os gráficos das funções f e g, pode ser necessário encontrar os extremos a e b resolvendo o sistema formado pelas equações que definem f e g:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

Sistema para encontrar os limites de integração!



Exemplo: Calcule a área entre as curvas $y = x^2$ e $y = x + 2$.

Solução: Neste caso, precisaremos encontrar primeiramente os limites de integração através da resolução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases} \rightarrow \quad x^2 = x + 2 \quad \rightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} x = -1 \\ ou \\ x = 2 \end{matrix}$$

Portanto, $a = -1$ e $b = 2$.

$$A = \int_{-1}^{2} [(x + 2) - x^2]dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)dx$$

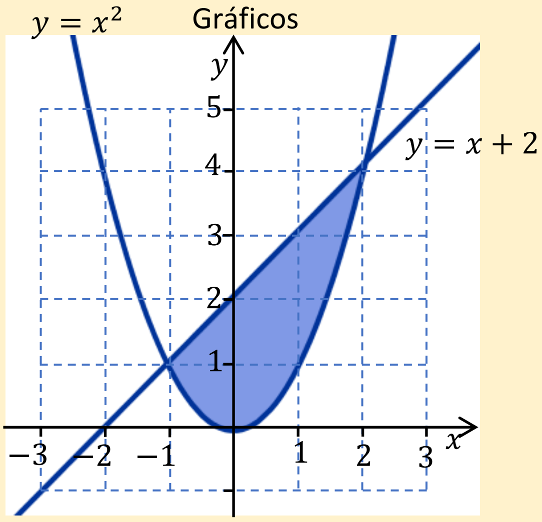
$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left[-\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4\right] - \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right]$$

$$= \left[\frac{-16 + 12 + 24}{6}\right] - \left[\frac{2 + 3 - 12}{6}\right]$$

$$= \frac{20}{6} + \frac{7}{6} = \frac{27}{6} \ u.a.$$

Gráficos



$y = x + 2$ Função de cima

$y = x^2$ Função de baixo

Limites de integração: $a = -1 \quad b = 2$

34.2 Exercícios Propostos

1) Calcule a área entre as curvas dadas:

$a)\ y = \frac{x^2}{4} \ \ e \ \ y = 2\sqrt{x}$

$b)\ y = e^x - 1 \ \ e \ \ y = -x \ \ e \ \ x = 1$

$c)\ y^2 = x \ \ e \ \ y = x - 2$

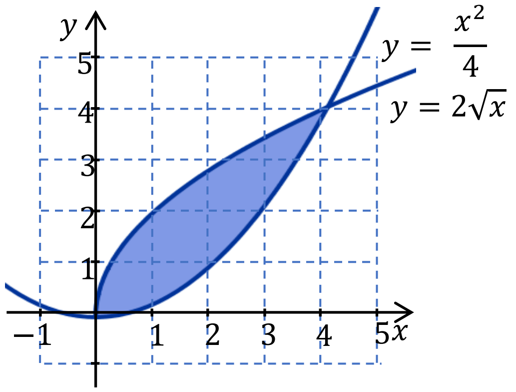
$d)\ y^2 = -x + 2 \ \ e \ \ 4y^2 = x + 3$

$e)\ y = 3x - x^2 \ , eixo\ x, x = -1 \ \ e \ \ x = 2$

34.3 Respostas:

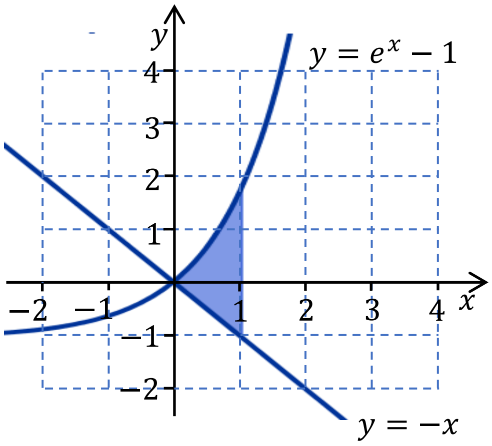
Exercício 1

$a)$



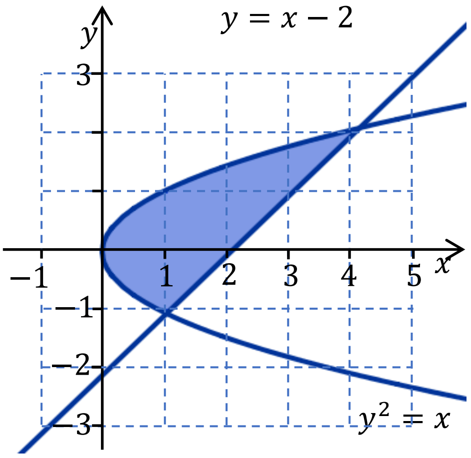
$$A = \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}\right) dx = \frac{16}{3}\ u.a.$$

$b)$



$$A = \int_0^1 [e^x - 1 - (-x)]\, dx = e - \frac{3}{2} u.a.$$

$c)$



Podemos calcular a área de duas maneiras:

1) Integrando na variável x

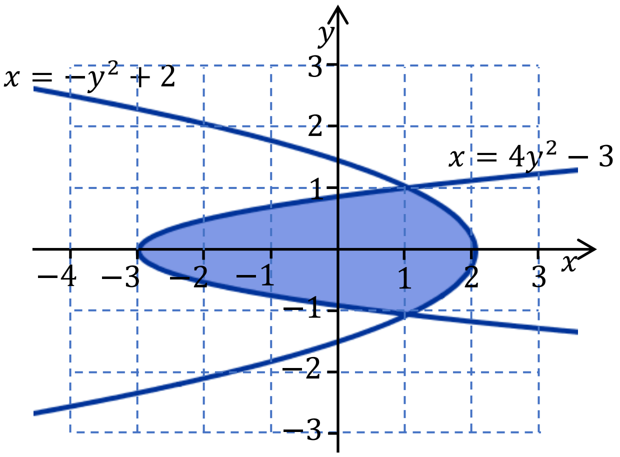
$$A = \int_0^1 [\sqrt{x} - (-\sqrt{x})]dx + \int_1^4 [\sqrt{x} - (x-2)]dx$$

$$= \frac{9}{2}\ u.a.$$

2) Integrando na variável y

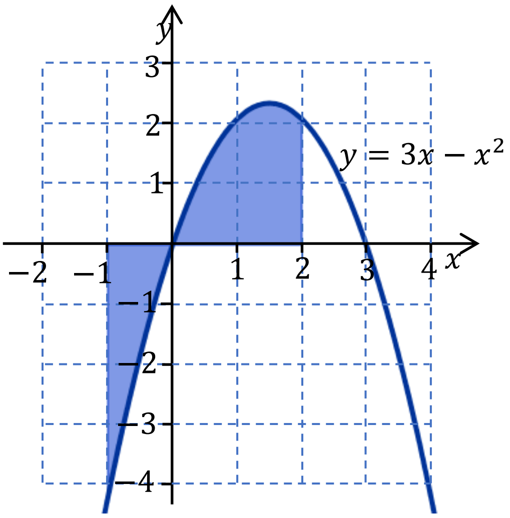
$$A = \int_{-1}^2 [(y+2) - y^2]dy = \frac{9}{2}\ u.a.$$

$d)$



$$A = \int_{-1}^1 [(-y^2 + 2) - (4y^2 - 3)]dy = \frac{20}{3}\ u.a.$$

$e)$



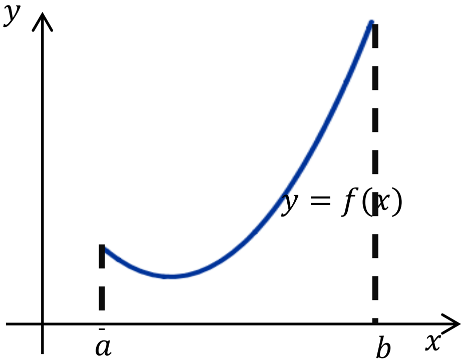
$$A = -\int_{-1}^0 (3x - x^2)dx + \int_0^2 (3x - x^2)dx$$

$$= \frac{11}{6} + \frac{10}{3} = \frac{31}{6}\ u.a.$$

34.4 Comprimento de arco

Definição: Se $\boldsymbol{f'}$ for contínua em $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, então o comprimento da curva $\boldsymbol{y = f(x)}$, $\boldsymbol{a \leq x \leq b}$, é:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx$$



Observação: Em resumo, para calcular o comprimento de arco de uma curva, você deverá seguir os passos abaixo:

1º passo: derivar a função

2º passo: calcular $1 + (f')^2$

3º passo: calcular a integral

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx$$

Exemplo: Encontre o comprimento da seguinte curva:

$$y = \tfrac{1}{3}\sqrt{(x^2+2)^3} \qquad 0 \leq x \leq 4.$$

Solução:

1º passo:

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+2)^3} \quad \rightarrow \quad y' = x\sqrt{x^2+2}$$

2º passo:

$$1 + (y')^2 = 1 + \left(x\sqrt{x^2+2}\right)^2 = 1 + x^2(x^2+2) = x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2+1)^2.$$

3º passo:

$$L = \int_0^4 \sqrt{(x^2+1)^2}\,dx = \int_0^4 (x^2+1)dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^4$$

$$= \frac{(4)^3}{3} + (4) = \frac{64+12}{3} = \frac{76}{3}.$$

34.5 Exercícios Propostos

1) Encontre os comprimentos das seguintes curvas:

$a)\ y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}, \qquad \frac{1}{2} \leq x \leq 1$ $\qquad b)\ y = ln(sin\,x), \qquad \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

$c)\ y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \qquad [0,2]$ $\qquad d)\ y = x^{2/3}, \qquad [1,8]$

34.6 Respostas

Exercício 1

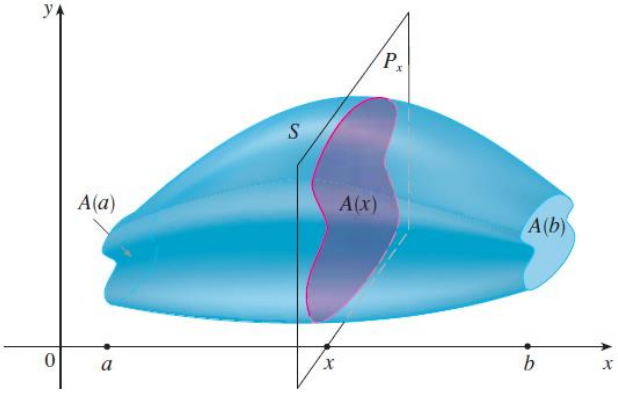
$a)\ \frac{31}{48}$ $\qquad b)\ ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$ $\qquad c)\ \frac{1}{2}\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right)$ $\qquad d)\ \frac{80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}}{27}$

35. Aula 5

35.1 Volumes

Definição: Seja $\boldsymbol{S}$ um sólido que está entre $\boldsymbol{x = a}$ e $\boldsymbol{x = b}$. Se a área da secção transversal de $\boldsymbol{S}$ no plano $\boldsymbol{P_x}$, passando por $\boldsymbol{x}$ e perpendicular ao eixo $\boldsymbol{x}$, é $\boldsymbol{A(x)}$, onde $\boldsymbol{A}$ é uma função contínua, então o volume de $\boldsymbol{S}$ é

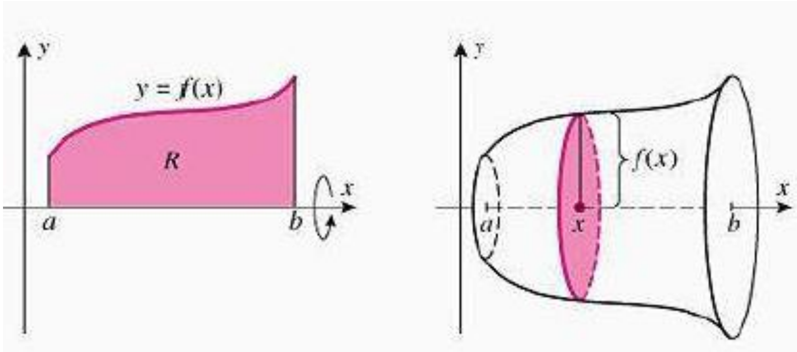
$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x = \int_a^b A(x)dx$$



35.2 Método dos discos

Definição: Método dos discos é dado por

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\, dx$$



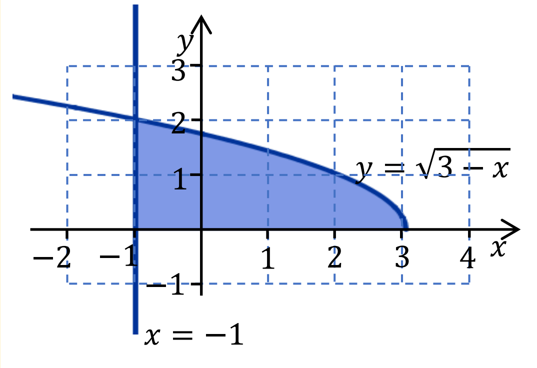
Exemplo: Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada por $y = \sqrt{3-x}\ e\ x = -1$, ao redor do eixo x.

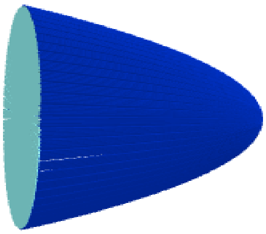
Solução:

$$V = \int_{-1}^{3} \pi\left[\sqrt{3-x}\right]^2 dx = \pi \int_{-1}^{3} (3-x)dx = \pi\left[3x - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{3}$$

$$= \pi\left[\left(3(3) - \frac{(3)^2}{2}\right) - \left(3(-1) - \frac{(-1)^2}{2}\right)\right] = \pi\left[\left(9 - \frac{9}{2}\right) - \left(-3 - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \pi\left[\frac{9}{2} - \left(-\frac{7}{2}\right)\right] = \pi\left[\frac{9}{2} + \frac{7}{2}\right] = \frac{16}{2}\pi = 8\pi\ u.v.$$



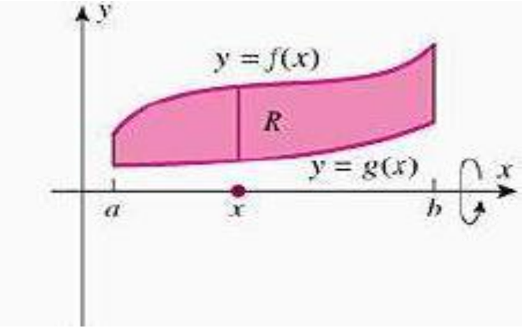


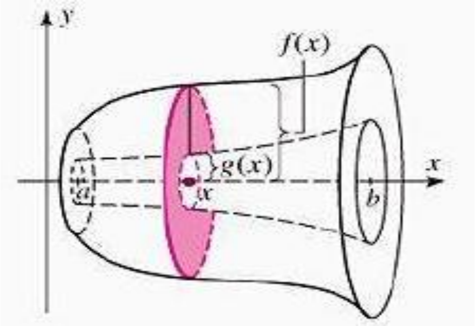
Sólido
gerado

35.3 Método do anel circular ou das arruelas

Definição: Método do anel ou arruelas é dado por

$$V = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\, dx$$



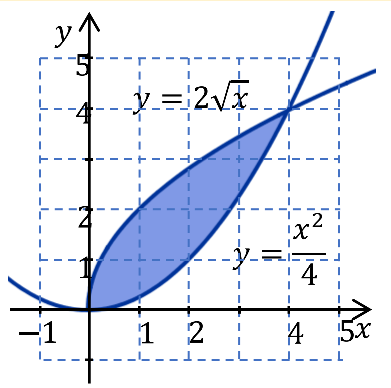


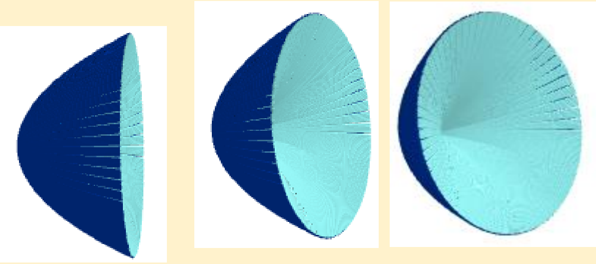
Exemplo: Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas $y = 2\sqrt{x}$ e $4y = x^2$ em torno do eixo x.

Solução:

$$V = \int_0^4 \pi\left[\left(2\sqrt{x}\right)^2 - \left(\frac{x^2}{4}\right)^2\right] dx = \pi\int_0^4 \left[4x - \frac{x^4}{16}\right] dx = \pi\left[4\frac{x^2}{2} - \frac{1}{16}\frac{x^5}{5}\right]_0^4$$

$$= \pi\left[4\frac{4^2}{2} - \frac{1}{16}\frac{4^5}{5}\right] = \pi\left[32 - \frac{64}{5}\right] = \pi\left[\frac{160 - 64}{5}\right] = \frac{96}{5}\pi\, u.v.$$





Sólido gerado

35.4 Método das cascas cilíndricas

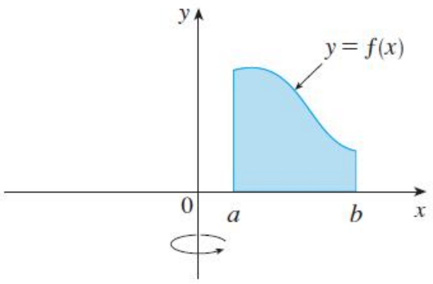
Definição: Método das cascas cilíndricas

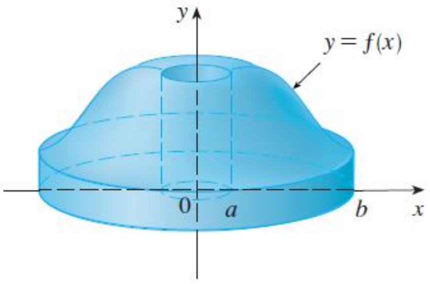
Quando o eixo de revolução é o eixo $\boldsymbol{y}$ se integra em $\boldsymbol{x}$

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

Quando o eixo de revolução é o eixo x se integra em y

$$V = \int_a^b 2\pi y f(y) dy$$



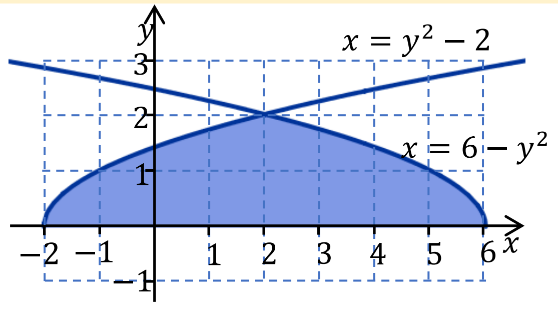


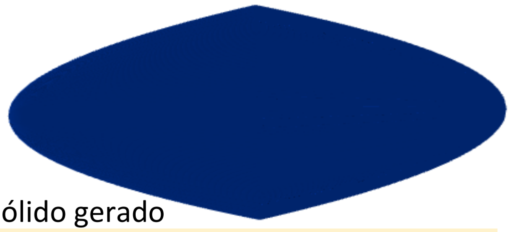
Exemplo: Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada por $x = y^2 - 2,\ \ x = 6 - y^2$ em torno do eixo x.

Solução

$$V = \int_0^2 2\pi y[(6 - y^2) - (y^2 - 2)]dy = 2\pi \int_0^2 y[8 - 2y^2]dy = 2\pi \int_0^2 (8y - 2y^3)dy$$

$$= 2\pi \left[\frac{8y^2}{2} - \frac{2y^4}{4}\right]_0^2 = 2\pi \left[4(2)^2 - \frac{2(2)^4}{4}\right] = 2\pi[16 - 8] = 16\pi\, u.v.$$





Sólido gerado

35.5 Exercícios Propostos

1) Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas em torno dos eixos dados.

$a)\ y = e^x,\ \ y = 0,\ \ x = 0,\ \ x = ln3,\ \ ao\ redor\ do\ eixo\ x.$

$b)\ y = \sqrt{x+2},\ \ y = 2\sqrt{x-1},\ \ y = 0,\ \ em\ torno\ do\ eixo\ x.$

$c)\ y = 2x - 1,\ \ y = -2x + 3,\ \ x = 2,\ \ em\ torno\ do\ eixo\ y.$

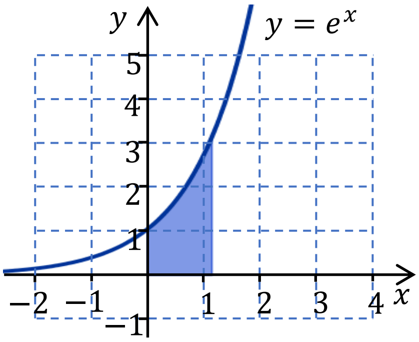
$d)\ y = 3x - x^3,\ \ eixo\ x,\ \ x = 1,\ \ em\ torno\ do\ eixo\ y.$

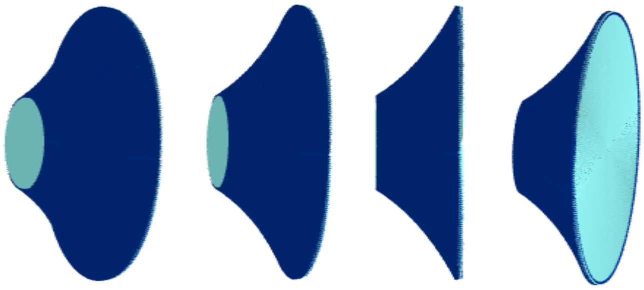
35.6 Respostas

Exercício 1

$a)$ Método dos discos

$$V = \int_0^{\ln 3} \pi[e^x]^2 dx = \pi \int_0^{\ln 3} e^{2x} dx = 4\pi\, u.v$$





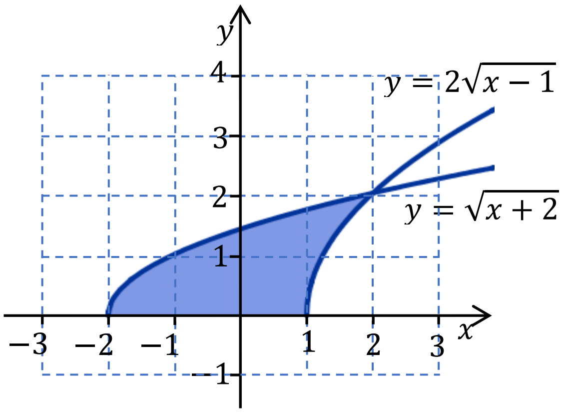
Sólido gerado

b) Método dos discos

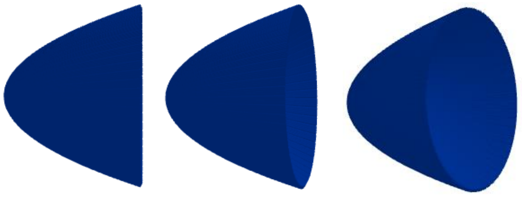
$$V = \int_{-2}^{1} \pi\left[\sqrt{x+2}\right]^2 dx + \int_{1}^{2} \pi\left[\left(\sqrt{x+2}\right)^2 - \left(2\sqrt{x-1}\right)^2\right] dx = \frac{9\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 6\pi\ u.v.$$

Método das cascas cilíndricas

$$V = \int_{0}^{2} 2\pi y\left[\left(\frac{y^2}{4}+1\right) - (y^2-2)\right] dy = 6\pi\ u.v$$



Sólido gerado

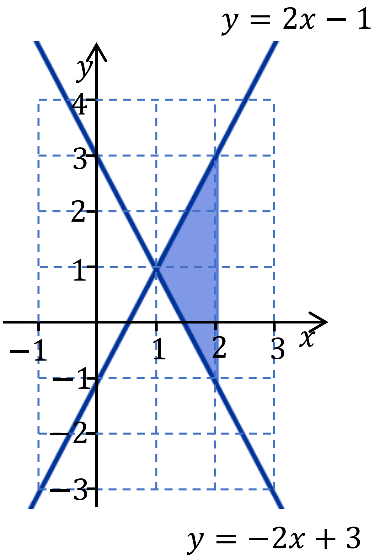


c) Método das arruelas

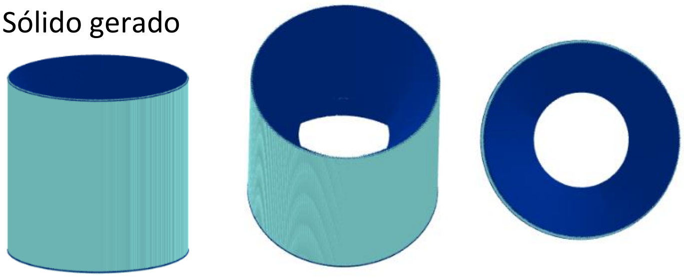
$$V = \int_{-1}^{1} \pi\left[(2)^2 - \left(\frac{3-y}{2}\right)^2\right] dy + \int_{1}^{3} \pi\left[(2)^2 - \left(\frac{y+1}{2}\right)^2\right] dy = \frac{10\pi}{3} + \frac{10\pi}{3} = \frac{20\pi}{3} u.v.$$

Método das cascas cilíndricas

$$V = \int_{1}^{2} 2\pi x[(2x-1) - (-2x+3)]dx = \frac{20\pi}{3} u.v.$$

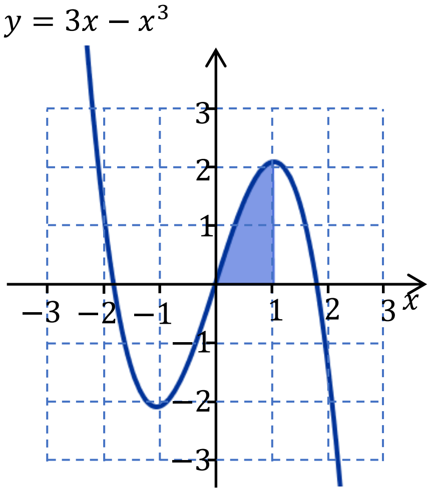


Sólido gerado

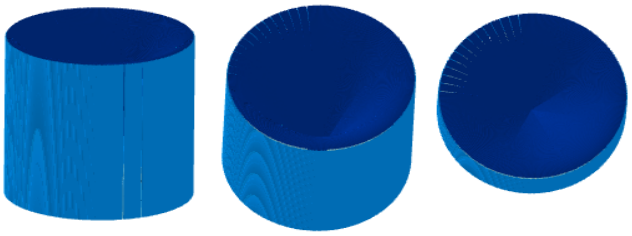


$d)$ Método das cascas cilíndricas

$$V = \int_0^1 2\pi x(3x - x^3)dx = \frac{8\pi}{5} u.v.$$



Sólido gerado



36. Aula 6

36.1 Integrais por substituição trigonométrica

As substituições trigonométricas podem servir para transformar integrais que envolvam

$\sqrt{a^2+x^2}$ $\sqrt{a^2-x^2}$ $\sqrt{x^2-a^2}$

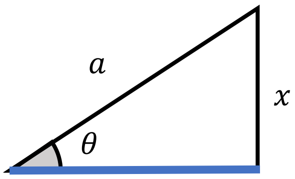
em integrais que podem ser calculadas diretamente.

As substituições mais comuns são:

$x = a\,tg\theta$ $x = a\,sen\theta$ $x = a\,sec\theta$

Podemos visualizar geometricamente como podem ser feitas essas substituições básicas, a partir de triângulos retângulos. Vejamos os casos a seguir.

Caso 1. $\sqrt{a^2-x^2}$



P ara as variáveis apresentadas, sabemos que

$$sen\,\theta = \frac{x}{a}$$

logo,

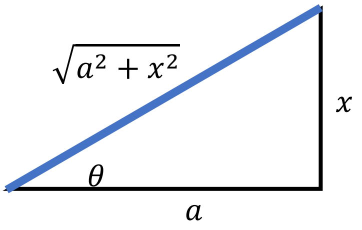
$$x = a\,sen\,\theta$$

Para $x = a\,sen\,\theta$, temos:

$$\begin{aligned} a^2-x^2 &= a^2-a^2\,sen^2\,\theta \\ &= a^2(1-sen^2\theta) \\ &= a^2\,cos^2\theta \end{aligned}$$

Então, $\sqrt{a^2-x^2} = a\,|\cos\theta|$.

Caso 2. $\sqrt{a^2+x^2}$



Para as variáveis apresentadas, sabemos que

$$tg\,\theta = \frac{x}{a}$$

logo,

$$x = a\,tg\theta$$

Para $x = a\,tg\theta$, temos:

$$\begin{aligned} a^2+x^2 &= a^2+a^2tg^2\theta \\ &= a^2(1+tg^2\theta) \\ &= a^2sec^2\theta \end{aligned}$$

Então, $\sqrt{a^2+x^2} = a\,|\sec\theta|$.

36.2 Substituição trigonométrica

Exemplo 1: Calcule

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$$

Solução: para eliminar o radical, fazemos a substituição

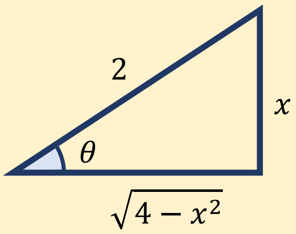
$$x = 2\,sen\,\theta \quad \rightarrow \quad dx = 2\cos\theta\ \ d\theta$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{2\cos\theta\, d\theta}{(2\,sen\,\theta)^2\sqrt{4-4\,sen^2\theta}} = \int \frac{2\cos\theta\, d\theta}{(2\,sen\,\theta)^2(2\cos\theta)}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{d\theta}{sen^2\theta} = \frac{1}{4}\int cossec^2\theta\, d\theta = -\frac{1}{4}cotg\,\theta + C$$

Devemos expressar $cotg\,\theta$ em termos de x. Para isso substituímos $x = 2\,sen\,\theta$ como $sen\,\theta = {}^{x}/_{2}$

Representando esses valores geometricamente



$$x = 2\,sen\,\theta$$

obtemos:

$$cotg\,\theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

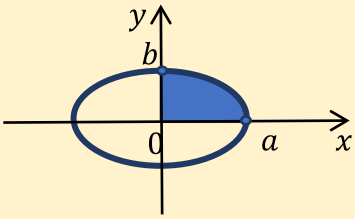
e, fazendo as devidas substituições

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{1}{4}cotg\,\theta + C = -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + C$$

Exemplo 2: Encontre a área da elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Solução: a elipse é simétrica em torno dos eixos, logo sua área é 4 vezes a área do primeiro quadrante.



Resolvendo a equação da elipse em termos de x:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Assim, a área é dada por:

$$A = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$= \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

Fazendo a substituição

$$x = a\;sen\;\theta$$

$$dx = a\;cos\theta\;d\theta$$

Convertendo os limites de integração em x para os limites de integração em θ:

$$x = 0\;\rightarrow\;\theta = arcsen(0) = 0$$

$$x = a\;\rightarrow\;\theta = arcsen(1) = \frac{\pi}{2}$$

Obtemos:

$$A = \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{4b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos\theta \cdot a\cos\theta\,d\theta$$

$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2\theta d\theta$$

$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 + cos2\theta)d\theta$$

$$= 2ab\left[\theta + \frac{1}{2}sen2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2ab\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \pi ab$$

Exemplo 3: Calcule

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x}dx,$$

supondo que $x \geq 5$.

Solução: fazendo a substituição

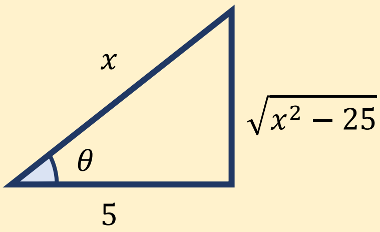
$$x = 5\sec\theta\,, \qquad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \qquad\qquad dx = 5\sec\theta\;tg\theta d\theta$$

Assim,

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{25\;sec^2\theta - 25}}{5\;sec\theta}(5\sec\theta\;tg\theta)d\theta = \int \frac{5\;|tg\theta|}{5\;sec\theta}(5\sec\theta\;tg\theta)\;d\theta$$

$$= 5\int tg^2\theta\;d\theta = 5\int (sec^2\theta - 1)\;d\theta = 5\;tg\theta - 5\theta + C$$

Para expressar a solução em termos de x, vamos representar geometricamente



$$x = 5\sec\theta$$
$$\theta = arc\sec\left(\frac{x}{5}\right)$$

O que nos dá

$$tg\,\theta = \frac{\sqrt{x^2-25}}{5}$$

Disso, obtemos:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx = \sqrt{x^2-25} - 5arc\sec\left(\frac{x}{5}\right) + C$$

36.3 Integrais envolvendo $ax^2 + bx + c$

Integrais envolvendo polinômios também podem ser calculadas a partir deste método, primeiro completando os quadrados e, depois, fazendo uma substituição apropriada. Veja o exemplo:

Exemplo 4: Calcule

$$\int \frac{x}{x^2-4x+8}dx$$

Solução: completando os quadrados, temos

$$x^2-4x+8 = (x^2-4x+8)+4-4$$
$$= (x-2)^2+4$$

A substituição $u = x-2,\ \ du = dx$, fornece

$$\int \frac{x}{x^2-4x+8} = \int \frac{x}{(x-2)^2+4}dx = \int \frac{u+2}{u^2+4}du$$
$$= \int \frac{u}{u^2+4}du + 2\int \frac{du}{u^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+4}du + 2\int \frac{du}{u^2+4}$$
$$= \frac{1}{2}\ln(u^2+4) + 2\left(\frac{1}{2}\right)arctg\frac{u}{2} + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln[(x-2)^2+4] + arctg\left(\frac{x-2}{2}\right) + C$$

36.4 Tabela Resumo

Em resumo, as três substituições básicas estão apresentadas na tabela abaixo, bem como os valores de θ que satisfazem a reversibilidade das funções.

EXPRESSÃO NO INTEGRANDO	*SUBSTITUIÇÃO*	*RESTRIÇÃO SOBRE O* $\boldsymbol{\theta}$	*SIMPLIFICAÇÃO*
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\ sen\theta$	$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$a^2 - x^2 = a^2cos^2\theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a\ tg\theta$	$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$a^2 + x^2 = a^2sec^2\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\ sec\theta$	$\begin{cases} 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}\ (se\ x \geq a) \\ \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi\ (se\ x \leq -a) \end{cases}$	$x^2 - a^2 = a^2tg^2\theta$

36.5 Exercícios Propostos

1) Calcule as seguintes integrais fazendo as devidas substituições

$a)\ \int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$ $\qquad b)\ \int \sqrt{1-4x^2}\,dx$ $\qquad c)\ \int_{-2}^{2} \frac{dx}{4+x^2}$

$d)\ \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}dx$ $\qquad e)\ \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-2x^2}}$

36.6 Respostas

Exercício 1

$a)\ ln\left|\sqrt{9+x^2}+x\right| + C$

$b)\ \frac{1}{4}\left[arcsen\ (2x) + 2x\sqrt{1-4x^2}\right] + C$

$c)\ \frac{\pi}{4}$

$d)\ \frac{\pi}{6}$

$e)\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left[arcsen\ \sqrt{\frac{2}{7}}(x+1)\right] + C$

37. Aula 7

37.1 Método de integração por soma de frações parciais

Uma função racional, $y = f(x)$, é uma função que pode ser expressa como um quociente de dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},\ \textit{tal que } Q(x) \neq 0$$

Agora, veremos como integrar qualquer função racional.

Exemplo: Dada a função $\boldsymbol{f(x) = \frac{2}{x+3} + \frac{4}{x+2}}$, vamos calcular a sua integral.

Note que,

$$f(x) = \frac{2}{x+3} + \frac{4}{x+2} = \frac{2.\ (x+2) + 4.(x+3)}{(x+3).(x+2)} = \frac{2x+4+4x+12}{x^2+2x+3x+6} = \frac{6x+16}{x^2+5x+6}$$

Assim, dizemos que $\frac{2}{x+3} + \frac{4}{x+2}$

é a representação na forma de SOMA DE FRAÇÕES PARCIAIS da função

$$\frac{6x+16}{x^2+6x+6}.$$

Portanto,

$$\int \frac{6x+16}{x^2+5x+6}dx = \int \frac{2}{x+3} + \frac{4}{x+2}dx$$

Solução:

$$\int \frac{6x+16}{x^2+6x+6}dx = \int \frac{2}{x+3} + \frac{4}{x+2}dx = \int \frac{2}{x+3}dx + \int \frac{4}{x+2}dx =$$

$$2.\int \frac{dx}{x+3} + 4.\int \frac{dx}{x+2} = 2.\,ln|x+3| + 4.\,ln|x+2| + C$$

Quanto ao grau de $P(x)$:

- Se o grau de $P(x)$ for menor que o grau de $Q(x)$, a transformação segue como no exemplo acima.
- Se o grau de $P(x)$ for maior ou igual ao grau de $Q(x)$, então precisamos fazer a divisão de polinômios.

$$\begin{array}{l|l} P(x) & \underline{\quad Q(x) \quad} \\ . & \\ . & \quad S(x) \\ . & \\ . & \\ R(x) & \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

onde, $R(x)$ e $S(x)$ também são polinômios.

Exemplo: Calcule

$$\int \frac{3x^2 + 2x + 1}{x + 1} dx$$

Solução:

1º passo: Realizando a divisão de polinômios:

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 + 2x + 1 & \underline{\quad x + 1 \quad} \\ \underline{-3x^2 - 3x \quad} & \quad 3x - 1 \\ -x + 1 & \\ \underline{+x + 1} & \\ 2 & \end{array}$$

$$\int \frac{3x^2 + 2x + 1}{x + 1} dx = \int 3x - 1 + \frac{2}{x + 1} dx = \int 3x\, dx - \int dx + \int \frac{2}{x + 1} dx =$$

$$= 3 \int x\, dx - \int dx + 2 \int \frac{dx}{x + 1} = 3.\frac{x^2}{2} - x + 2.ln|x + 1| + C$$

No exemplo anterior, conseguimos integrar a expressão de forma direta.

Porém, há casos em que a função $\frac{R(x)}{Q(x)}$ precisa ser reescrita como uma soma de frações parciais, fatorando o polinômio $Q(x)$ o máximo possível.

CASO 1: $\boldsymbol{Q(x)}$ é um produto de fatores lineares diferentes.

$$Q(x) = (ax_1 + b_1).(ax_2 + b_2). \;\; \ldots.(ax_k + b_k).$$

Então podemos reescrever a função $\frac{R(x)}{Q(x)}$ como:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(ax_1 + b_1)} + \frac{A_2}{(ax_2 + b_2)} + \;\ldots + \frac{A_k}{(ax_k + b_k)}$$

onde $A_1,\ A_2,\ \ldots, A_k$ são constates a serem calculadas.

Exemplo: Calcule:

$$\int \frac{5x - 10}{x^2 - 3x - 4} dx$$

Solução:

Note que, como o grau do numerador é menor que o grau do denominador, não se faz necessária a divisão de polinômios.

Logo, vamos fatorar o denominador e transformar a função em uma soma de frações parciais.

$$x^2 - 3x - 4 = (x - 4).(x + 1)$$

Então,

$$\frac{5x - 10}{x^2 - 3x - 4} = \frac{A}{x - 4} + \frac{B}{x + 1} =$$

$$= \frac{A.(x + 1) + B.(x - 4)}{(x - 4).(x + 1)} = \frac{Ax + A + Bx - 4B}{(x - 4).(x + 1)} = \frac{x(A + B) + (A - 4B)}{(x - 4).(x + 1)}$$

Por sistema, calculamos as constantes A e B:

$$\begin{cases} A + B = 5 \\ A - 4B = -10 \end{cases} \implies A = 5 - B$$

$$5 - B - 4B = -10$$

$$-B - 4B = -10 - 5$$

$$-5B = -15$$

$$B = \frac{-15}{-5}$$

$$B = 3$$

$$A = 2$$

Logo,

$$\int \frac{5x-10}{x^2-3x-4}dx = \int \frac{2}{x-4} + \frac{3}{x+1}dx = \int \frac{2}{x-4}dx + \int \frac{3}{x+1}dx =$$

$$2.\int \frac{dx}{x-4} + 3.\int \frac{dx}{x+1} = 2.ln|x-4| + 3.ln|x+1| + C$$

CASO 2: $\boldsymbol{Q(x)}$ possui alguns fatores lineares repetidos.

$$Q(x) = (ax_1 + b_1).(ax_2 + b_2)^k.$$

Então podemos reescrever a função $\frac{R(x)}{Q(x)}$ como:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(ax_1+b_1)} + \frac{B_1}{(ax_2+b_2)} + \frac{B_2}{(ax_2+b_2)^2} + \frac{B_3}{(ax_2+b_2)^3} + \cdots + \frac{B_k}{(ax_k+b_k)^k}$$

que pode ser integrado completando o quadrado (se necessário), onde $A,\ B_1,\ B_2, B_3, \dots, B_k$ são constates a serem calculadas.

Exemplo: Calcule:

$$\int \frac{2x+4}{x^3-2x^2}dx$$

Solução:

Note que, como o grau do numerador é menor que o grau do denominador, não se faz necessária a divisão de polinômios.

Logo, vamos fatorar o denominador e transformar a função em uma soma de frações parciais.

$$x^3 - 2x^2 = x^2.(x-2)$$

Então,

$$\frac{2x+4}{x^3-2x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2} =$$

$$= \frac{Ax.(x-2) + B.(x-2) + Cx^2}{x^2.(x-2)} = \frac{Ax^2 - 2Ax + Bx - 2B + Cx^2}{x^2.(x-2)}$$

$$= \frac{(A+C).x^2 + (-2A+B).x - 2B}{x^2.(x-2)}$$

Por sistema, calculamos as constantes A, B e C:

$$A + C = 0$$

$$-2A + B = 2$$

$$-2B = 4$$

$$B = \frac{4}{-2}$$

$$B = -2$$

$$-2A - 2 = 2$$

$$-2A = 2 + 2$$

$$-2A = 4$$

$$A = \frac{4}{-2}$$

$$A = -2$$

$$A = -C$$

$$A = -(-2)$$

$$A = 2$$

Logo,

$$\int \frac{2x+4}{x^3 - 2x^2} dx = \int \frac{-2}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x-2} dx =$$

$$\int \frac{-22}{x} dx - \int \frac{2}{x^2} dx + \int \frac{2}{x-2} dx = -22. \int \frac{dx}{x} - 2. \int \frac{dx}{x^2} + 2. \int \frac{dx}{x-2} =$$

$$-2. ln|x| - 2. \left(\frac{-1}{x}\right) + 2. ln|x-2| + C = 2. (ln|x-2| - ln|x|) + \frac{2}{x} + C =$$

$$2. ln\left|\frac{x-2}{x}\right| + \frac{2}{x} + C$$

CASO 3: $\boldsymbol{Q(x)}$ é um produto de fatores quadráticos irredutíveis ($\Delta < 0$)diferentes.

$$Q(x) = (a_1x^2 + b_1x + c_1).(a_2x^2 + b_2x + c_2). \dots . (a_kx^2 + b_kx + c_k).$$

Então podemos reescrever a função $\frac{R(x)}{Q(x)}$ como:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1x + B_1}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)} + \frac{A_2x + B_2}{(a_2x^2 + b_2x + c_2)} + \dots + \frac{A_kx + B_k}{(a_kx^2 + b_kx + c_k)}$$

onde $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ e $B_1, B_2, B_3, \dots, B_k$ são constates a serem

Em alguns momentos o termo,

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}.tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Exemplo: Calcule:

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx$$

Solução

Note que, como o grau do numerador é menor que o grau do denominador, não se faz necessária a divisão de polinômios.

Logo, vamos fatorar o denominador e transformar a função em uma soma de frações parciais.

$$x^3 + 4x = x.(x^2 + 4)$$

Então,

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4} =$$

$$\frac{A.(x^2 + 4) + (Bx + C).x}{x.(x^2 + 4)} = \frac{Ax^2 + 4A + Bx^2 + Cx}{x.(x^2 + 4)} = \frac{x^2.(A + B) + x.(C) + (4A)}{x.(x^2 + 4)}$$

Por sistema, calculamos as constantes A, B e C:

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ C = -1 \\ 4A = 4 \end{cases}$$

$$A = \frac{4}{4}$$

$$A = 1$$

$$1 + B = 2$$

$$B = 2 - 1$$

$$B = 1$$

$$C = -1$$

Logo,

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2+4}\right) dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{x-1}{x^2+4} dx$$

- A primeira integral sai direto:

$$\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + C_1$$

- A segunda integral sai por substituição:

$$\int \frac{x-1}{x^2+4} dx = \int \frac{x}{x^2+4} dx - \int \frac{1}{x^2+4} dx =$$

$$\int \frac{x}{x^2+4} dx \Longrightarrow \underbrace{u = x^2 + 4 \Longrightarrow du = 2xdx \Longrightarrow \frac{du}{2} = x.dx \Longrightarrow}_{\text{Substituição}}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2}.ln|u| \Longrightarrow \frac{1}{2}.ln|x^2 + 4| + C_2$$

$$\int \frac{1}{x^2+4} dx = \frac{1}{2}.tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C_3$$

Logo,

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx = ln|x| + \frac{1}{2} ln|x^2 + 4| - \frac{1}{2} tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

Exemplo: Calcule:

$$\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} dx$$

Primeiramente, como o grau do numerador é igual ao grau do denominador, precisamos realizar a divisão de polinômios.

Então:

$$\begin{array}{l|l} 4x^2 - 3x + 2 & 4x^2 - 4x + 3 \\ \cline{2-2} \underline{-4x^2 + 4x - 3} & \quad 1 \\ \quad x - 1 & \end{array}$$

Então,

$$\frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} = 1 + \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 3}$$

Assim temos,

$$\int \frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3}dx = \int \left(1+\frac{x-1}{4x^2-4x+3}\right)dx =$$

$$\int 1\,dx + \int \frac{x-1}{4x^2-4x+3}dx$$

- A primeira integral é direta:

$$\int 1\,dx = x + C_1$$

- Na segunda integral precisamos utilizar complemento de quadrado pois o denominador é um polinômio quadrático irredutível.

Note que $4x^2-4x+3 = 4x^2-4x+1+2 = (2x+1)^2+2$, portanto:

$$\int \frac{x-1}{4x^2-4x+3}dx = \int \frac{x-1}{(2x-1)^2+2}dx$$

tomando $u = 2x-1 \Longrightarrow du = 2dx \Longrightarrow \frac{du}{2} = dx$ e também: $x = \frac{u+1}{2}$ temos,

$$\frac{1}{2}.\int \frac{\left(\frac{u+1}{2}\right)-1}{u^2+2}du = \frac{1}{2}.\int \frac{\left(\frac{u+1-2}{2}\right)}{u^2+2}du = \frac{1}{2}.\int \frac{\left(\frac{u-1}{2}\right)}{u^2+2}du =$$

$$\frac{1}{2}.\int \frac{\frac{1}{2}(u-1)}{u^2+2}du = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\int \frac{u-1}{u^2+2}du = \frac{1}{4}.\int \frac{u-1}{u^2+2}du =$$

$$\frac{1}{4}.\left[\int \frac{u-1}{u^2+2}du\right] = \frac{1}{4}.\left[\int \frac{u}{u^2+2}du - \int \frac{1}{u^2+2}du\right] =$$

Aplicamos substituição!

$$\frac{1}{4}.\frac{1}{2}.ln|u^2+2|-\frac{1}{4}.\frac{1}{\sqrt{2}}.tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)+C_2=$$

$$\frac{1}{8}.ln|u^2+2|-\frac{1}{4\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)+C_2=$$

$$\frac{1}{8}.ln|u^2+2|-\frac{\sqrt{2}}{8}tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)+C_2=$$

$$\frac{1}{8}.\left[ln|u^2+2|-\sqrt{2}\,tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)\right]+C_2=$$

$$\frac{1}{8}.\left[ln|4x^2-4x+3|-\sqrt{2}\,tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{2}}\right)\right]+C_2$$

Logo,

$$\int\frac{4x^2-3x+2x^2}{4x^2-4x+3}dx=x+\frac{1}{8}.\left[ln|4x^2-4x+3|-\sqrt{2}\,tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{2}}\right)\right]+C$$

CASO 4: $\boldsymbol{Q(x)}$ possui de fatores quadráticos irredutíveis $(\Delta<\mathbf{0})$ repetidos.

$$Q(x)=(a_1x^2+b_1x+c_1)^k$$

Então podemos reescrever a função $\frac{R(x)}{Q(x)}$ como:

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{A_1x+B_1}{(a_1x^2+b_1x+c_1)}+\frac{A_2x+B_2}{(a_2x^2+b_2x+c_2)^2}+\cdots+\frac{A_kx+B_k}{(a_kx^2+b_kx+c_k)^k}$$

onde $A_1,\ A_2,A_3,\dots,A_k$ e $B_1,\ B_2,B_3,\dots,B_k$ são constates a serem calculadas.

Exemplo: Calcule

$$\int \frac{x^5 + x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4}{(x^2 + 2)^3}\,dx$$

Solução:

Note que, se resolvermos a multiplicação dos polinômios do denominador, obteremos um polinômio de grau maior que o polinômio do numerador. Por isso, não precisamos efetuar a divisão de polinômios.

Então:

$$\frac{x^5 + x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4}{(x^2 + 2)^3} = \frac{Ax + B}{(x^2 + 2)} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2)^2} + \frac{Ex + F}{(x^2 + 2)^3} =$$

$$\frac{(Ax + B).(x^2 + 2)^2 + (Cx + D).(x^2 + 2) + (Ex + F)}{(x^2 + 2)^3} =$$

$$\frac{(Ax + B).(x^4 + 4x^2 + 4) + (Cx^3 + 2Cx + Dx^2 + 2D) + (Ex + F)}{(x^2 + 2)^3} =$$

$$\frac{Ax^5 + 4Ax^3 + 4Ax + Bx^4 + 4Bx^2 + 4B + Cx^3 + 2C + Dx^2 + 2D + Ex + F}{(x^2 + 2)^3} =$$

$$\frac{(A).x^5 + (B).x^4 + (4A + C).x^3 + (4B + D).x^2 + (4A + E).x + (4B + 2C + 2D + F)}{(x^2 + 2)^3}$$

Por sistema, calculamos as constantes A, B, C, D e F:

$$\left\{\begin{array}{l} A = 1 \\ B = 1 \\ 4A + C = 4 \\ 4B + D = 4 \\ 4A + E = 4 \\ 4B + 2C + 2D + F = 4 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\begin{array}{c|c|c} 4.1 + C = 4 & 4.1 + D = 4 & 4.1 + E = 4 \\ C = 4 - 4 & D = 4 - 4 & E = 4 - 4 \\ C = 0 & D = 0 & E = 0 \end{array}$$

$$4.1 + 2.0 + 2.D + F = 4$$

$$F = 0$$

Logo,

$$\int \frac{x^5 + x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4}{(x^2+2)^3} dx =$$

$$\int \frac{x+1}{x^2+2} dx = \int \frac{x}{x^2+2} dx$$

$$+ \int \frac{1}{x^2+2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} ln|x^2+2| + \frac{1}{\sqrt{2}} tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C = \frac{1}{2} ln|x^2+2| + \frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2} ln|x^2+2| + \frac{\sqrt{2}}{2} tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) += \frac{1}{2}\left(ln|x^2+2| + \sqrt{2}\, tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C\right)$$

37.2 Exercícios Propostos

(a) $\int \frac{x^2}{x+4} dx$

(b) $\int \frac{x-9}{(x+5)(x-2)} dx$

(c) $\int \frac{x^2+1}{(x-3)(x-2)^2} dx$

(d) $\int \frac{dx}{x(x^2+4)^2}$

(e) $\int_0^1 \frac{x-4}{x^2+5x+6} dx$

(f) $\int \frac{x^3+x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+2)} dx$

(g) $\int_1^2 \frac{4x^2-7x-12}{x(x+2)(x-3)} dx$

(h) $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x} dx$

(i) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} \quad com\ a \neq 0$

(j) $\int \frac{dx}{x(x^2+4)^2}$

(k) $\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1} dx$

(l) $\int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2} dx$

37.3 Respostas

$a)\ \frac{1}{2}.(x^2-8x+32\,ln|x+4|)+C$

$b)\ 2\,ln|x+5|-ln|x-2|+C$

$c)\ 10\,ln|x-3|-9\,ln|x-2|+\frac{5}{x-2}+C$

d) $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{4}\ln|x^2+4|+\frac{1}{(x^2+4)}+C\right)$

$e)\ 7\,ln\left|\frac{4}{3}\right|-6\,ln\left|\frac{3}{2}\right|$

f) $\frac{1}{2}\left(\ln|x^2+1|+\sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+C\right)$

$g)\ 2\,ln\left|\frac{4}{3}\right|$

$h)\ \frac{1}{2}ln|x|+\frac{1}{10}ln|2x-1|-\frac{1}{10}ln|x+4|+C$

$i)\ \frac{1}{2a}ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$

$j)\ \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}ln|x|-\frac{1}{4}ln|x^2+4|+\frac{1}{(x^2+4)}+C\right)$

$k)\ \frac{x^2}{2}+x-\frac{2}{x-1}+ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$

l) $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|-\tan^{-1}(x)-\frac{1}{2(x^2+1)}+C$

38. Aula 8

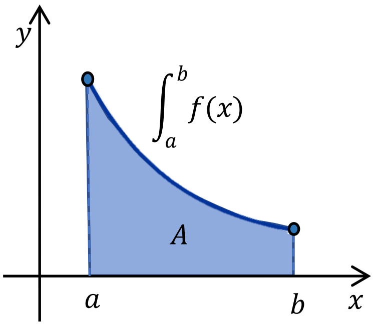
38.1 Integrais Impróprias

Supõe-se na definição da integral definida

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

que $[a, b]$ é um intervalo finito, e que o limite que define a integral existe, isto é, que a função é integrável.

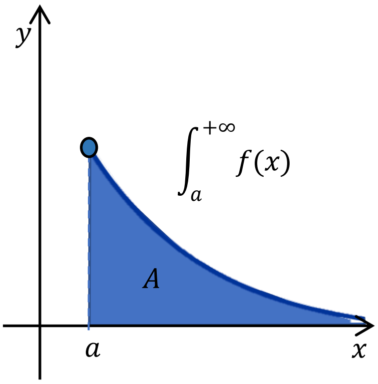
Ou seja, é possível calcular a área A abaixo do gráfico da função definida por $f(x)$, no intervalo $[a, b]$.



Observações:

- Funções contínuas são integráveis;
- Funções não limitadas no intervalo de integração não são integráveis.
  Exemplo: uma função com assíntota vertical dentro do intervalo de integração não seria integrável.

Mas, de que forma calculamos esta área quando os intervalos de integração são infinitos ou quando temos integrandos com assíntotas verticais dentro do intervalo de integração?



38.2 Integrais sobre intervalos infinitos

Definição 1: A integral imprópria de f no intervalo $[a, +\infty)$ é definida por

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$

No caso em que o limite existe, dizemos que a integral imprópria converge, e o limite é definido como sendo o valor da integral.

Caso ele não exista, dizemos que a integral imprópria diverge, e não é atribuído nenhum valor.

Exemplo 1:

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$$

Solução: Substituímos o limite superior infinito por um limite finito b, e então tomamos o limite integral resultante, assim:

$$\lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to+\infty} [\ln x]_1^b = \lim_{b\to+\infty} \ln b = +\infty$$

Nesse caso a integral diverge, e portanto, não tem valor algum.

Exemplo 2: Para quais valores de p a integral converge?

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$$

Solução: Sabemos do exemplo anterior que a integral diverge se $p = 1$; supomos que $p \neq 1$. Temos:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b x^{-p} dx = \lim_{b\to+\infty} \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right].$$

- Se $p > 1$, então $b^{1-p} \to 0$ quando $b \to +\infty$;
- Se $p < 1$, então $b^{1-p} \to +\infty$ quando $b \to +\infty$;
- A integral converge se $p > 1$ e diverge, caso contrário.

Quando converge, o valor da integral é:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \left[0 - \frac{1}{1-p}\right] = \frac{1}{p-1} \qquad (\mathrm{p} > 1)$$

Disso, decorre o seguinte teorema:

Teorema 1:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} & se \;\; p > 1 \\ diverge & se \;\; p \leq 1 \end{cases}$$

Definição 2: A integral imprópria de f no intervalo $(-\infty, b]$ é definida por

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Dizemos que a integral converge se o limite existir e diverge, caso contrário.

A integral imprópria de f no intervalo $(-\infty, +\infty)$ é definida por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

onde c é um número real qualquer.

Dizemos que a integral imprópria converge se ambas as parcelas convergirem e diverge se alguma delas divergir.

Exemplo 3: Calcule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$$

Solução: escolhemos um $c = 0$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to+\infty} [arc\,tg\,x]_0^b = \lim_{b\to+\infty} (arc\,tg\,b) = \frac{\pi}{2}$$

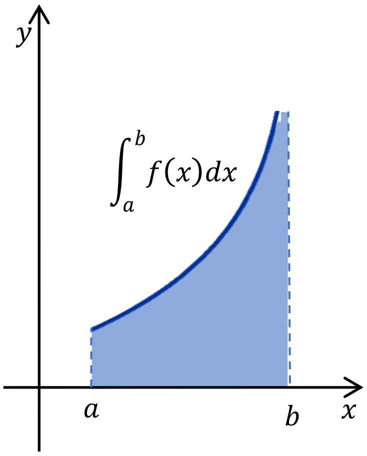
$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{a\to-\infty} [arc\,tg\,x]_a^0 = \lim_{a\to-\infty} (-arc\,tg\,a) = \frac{\pi}{2}$$

Assim, a integral **converge** e seu valor é:

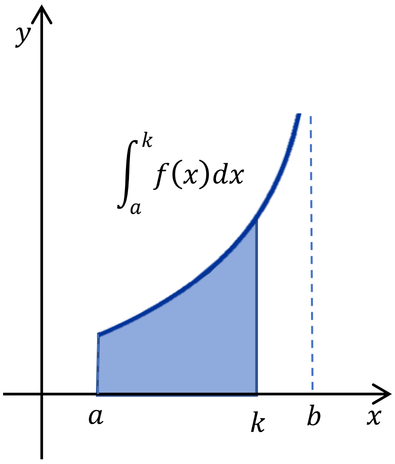
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \pi$$

38.3 Descontinuidades Infinitas

Consideraremos agora integrais cujos integrandos têm descontinuidades infinitas. No caso em que o intervalo de integração é um intervalo finito $[a, b]$ e a descontinuidade ocorre no extremo direito.



Ao invés de encontrar a área toda de uma só vez, calculamos parte dela acima do intervalo $[a, k]$, onde $a \leq k < b$, fazendo $k \to b$, para completar a área toda da região.



Definição 3: Se f for contínua no intervalo $[a, b]$, exceto por uma descontinuidade infinita em b, então a integral imprópria de f no intervalo $[a, b]$ é definida por

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{k \to b^-} \int_a^k f(x)dx$$

Caso o limite **exista**, dizemos que a integral imprópria converge, e o limite é definido como sendo o valor da integral.

Caso o limite **não exista**, dizemos que a integral imprópria diverge, e não é atribuído nenhum valor.

Exemplo 4: Calcule

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx$$

Solução:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx = \lim_{k \to 1^-} \int_0^k \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx =$$

$$\lim_{k \to 1^-} \left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^k = \lim_{k \to 1^-} \left[-2\sqrt{1-k} + 2\right]_0^k = 2.$$

Definição 4: Se f for contínua no intervalo $[a, b]$, exceto por uma descontinuidade infinita em a, então a integral imprópria de f no intervalo $[a, b]$ é definida por

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{k \to a^+} \int_k^b f(x)dx$$

Dizemos que a integral converge, se o limite existir, e diverge caso contrário.

Se f for contínua no intervalo $[a, b]$, exceto por uma descontinuidade infinita em um ponto c em $(a,\ b)$, então a integral imprópria de f no intervalo $[a, b]$ é definida por

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Dizemos que a integral imprópria converge se ambas parcelas convergirem e diverge se alguma delas divergir.

Exemplo 5: Calcule

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx$$

Solução: Integral imprópria por duas razões, o intervalo de integração é infinito e há uma descontinuidade infinita em $x = 0$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx = \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx \qquad \boxed{\begin{array}{c} x = u^2 \\ dx = 2u\,du \end{array}}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx = \int \frac{2u\,du}{u(u^2+1)} = 2\int \frac{du}{u^2+1} = 2\,arc\,tg\,u + C = 2\,arc\,tg\,\sqrt{x} + C$$

Assim:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx = 2\lim_{k\to 0^+}\left[arc\,tg\,\sqrt{x}\right]_k^1 + 2\lim_{k\to +\infty}\left[arc\,tg\,\sqrt{x}\right]_1^k =$$

$$2\left[\frac{\pi}{4} - 0\right] + 2\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right] = \pi.$$

38.4 Exercícios Propostos

1) *Calcule as seguintes integrais impróprias*

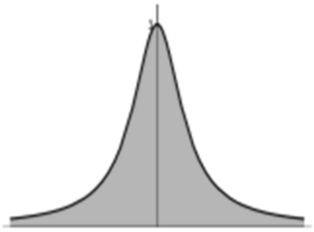
$(a)\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$(b)\ \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$

$(c)\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}\,dx$

$(d)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$

2) *Calcule a área da região limitada por* $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ *e o eixo dos* x.



3) *Calcule*

$$(a)\ \int_1^2 \frac{1}{1-x}\,dx$$

$$(b)\ \int_1^4 \frac{1}{(x-2)^{2/3}}\,dx$$

38.5 Respostas

Exercício 1:

$a)\ \frac{\pi}{2}$

$b)\ 1$

$c)\ +\infty$

$d)\ 0$

Exercício 2:

$\pi\ u.a.$

Exercício 3:

$a)\ -\infty$

$b)\ 3+3\sqrt[3]{2}$

39. Monitorias

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem ser encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/

O GAMA possui monitorias de:

- ☐ Pré-cálculo e Matemática Elementar (e disciplinas equivalentes)
- ☐ ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
- ☐ Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

40. Referências

ANTON, Horward; DAVIS, Stephen L.; BIVENS, Irl C. Cálculo. Vol. 1, São Paulo, Bookman, 2014.

ANTON, Horward; DAVIS, Stephen L.; BIVENS, Irl C. Cálculo. Vol. 2, São Paulo, Bookman, 2014.

DANTE, Luiz Roberto, Matemática: Contexto e Aplicações. São Paulo, Editora Ática, 2009.

DEMANA, Franklin; FOLEY, Gregory D.; KENNEDY, Daniel. Pré-cálculo. 2. ed. São Paulo: Pearson, 2013.

Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 2, São Paulo, Editora Atual, 1985.

GOMES, Francisco Magalhães. Pré-cálculo. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2018.

IEZZI, Gelson, Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 3, São Paulo, Editora Atual, 1985.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MARUKAMI, Carlos. Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 1, São Paulo, Editora Atual, 1985.

IEZZI, Gelson; MARUKAMI, Carlos. Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 1, São Paulo, Editora Atual, 1985.

LEITHOLD, Louis. O Cálculo com Geometria Analítica. Vol. 1, São Paulo, Harbra, 1990.

LEITHOLD, Louis. O Cálculo com Geometria Analítica. Vol. 2, São Paulo, Harbra, 1990.

MEDEIROS, Valéria Zuma; CALDEIRA, André Machado; SILVA, Luiza Maria Oliveira; MACHADO, Maria Augusta Soares. Pré-cálculo. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

MOLTER, A. et al. Tópicos de Matemática Básica. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2016.

MOLTER, A.; NACHTIGALL, C.; ZAHN, M. Trigonometria e números complexos: com aplicações. São Paulo: Blucher, 2020.

NACHTIGALL, C., MOLTER, A., ZAHN, M. Conjuntos e funções: com aplicações. São Paulo: Blucher, 2022.

SAADI, Alessandro da Silva e SILVA, Felipe Morais da. Apostila de Pré-cálculo - Parte 1. Rio Grande: Gráfica da FURG, 2017.

SAFIER, Fred, Pré-Cálculo. Coleção Schaum, Porto Alegre, Bookman, 2011.

STEWART, J. **Cálculo**. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, v. 1, 2016.

STEWART, J. **Cálculo**. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, v. 2, 2016.

ZAHN, Maurício. Teoria elementar das funções. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.