Universidade Federal de Pelotas
Instituto de Física e Matemática
Pró-Reitoria de Ensino

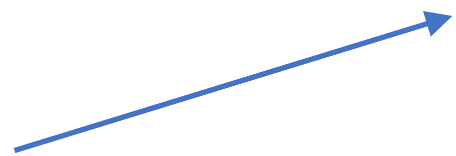
Módulo de Geometria Analítica

Aula 1

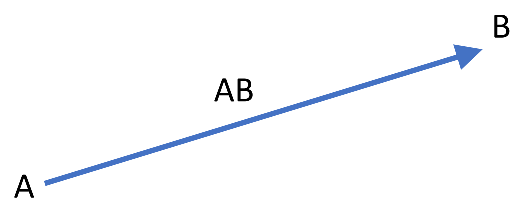
Projeto
GAMA
Grupo de Apoio em Matemática

Introdução

- **Reta orientada – eixo**: uma reta **r** é orientada quando se fixa um sentido de percurso, considerando positivo e indicado por uma seta.



- **Segmento orientado**: um segmento orientado é determinado por um par ordenado de pontos. O primeiro é chamado de origem e o segundo de extremidade.



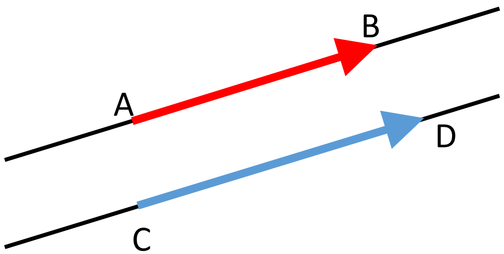
Introdução

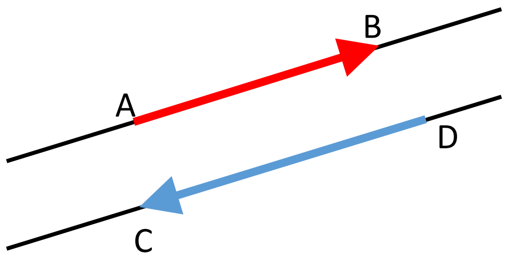
- **Segmento nulo**: é aquele cuja extremidade coincide com a origem.
- **Segmentos opostos**: Se **AB** é um segmento orientado, o segmento orientado **BA** é o oposto de **AB**.
- **Módulo ou norma**: é o número real não negativo que representa a medida/comprimento do segmento orientado.

<u>Observação</u>: o comprimento do segmento AB é indicado por $\overline{AB}$.

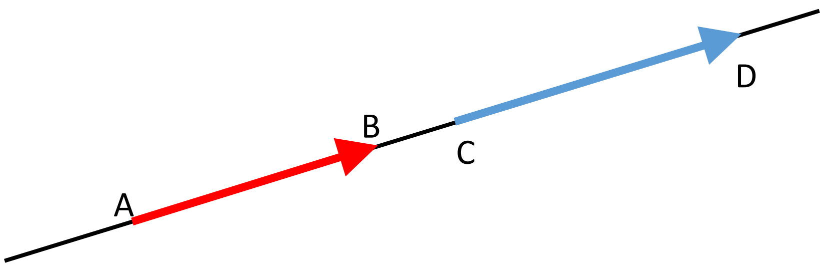
Introdução

- **Direção e sentido**: dois segmentos orientados não nulos AB e CD tem a mesma direção se as retas suportes desses segmentos são paralelas





ou coincidentes



<u>Observações</u>

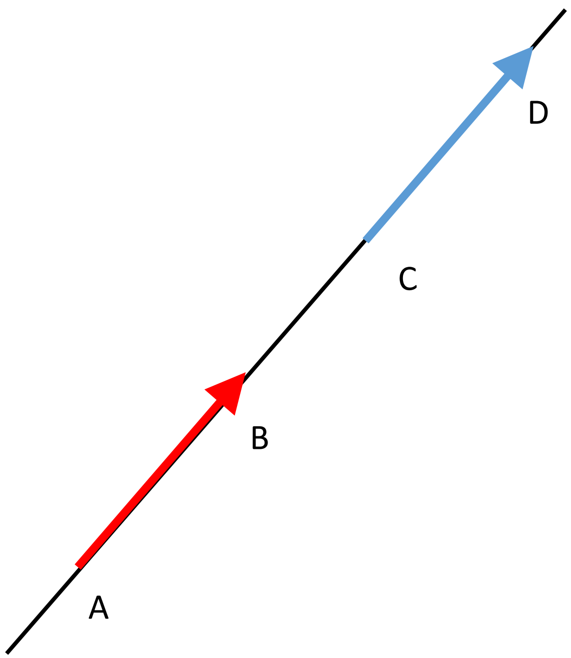
(i) Só se pode comparar os sentidos de dois segmentos orientados se eles têm a mesma direção.

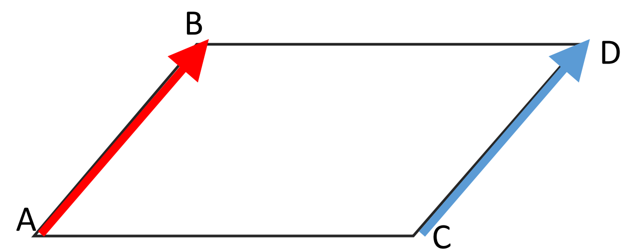
(ii)Dois segmentos orientados opostos têm sentidos contrários.

Introdução

Representação: $AB \sim CD$

- **Segmentos equipolentes**: dois segmentos orientados AB e CD que tenham a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo módulo são chamados de equipolentes.





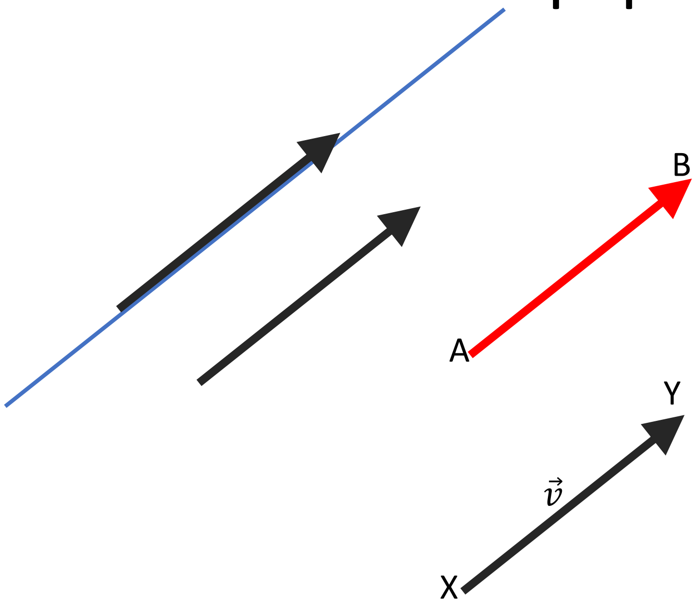
Representação: $AB \sim CD$

Observação: dois segmentos nulos são sempre equipolentes.

Vetor

- **Definição**: é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a **AB**.

Representação: $\overrightarrow{AB}$ ou $\vec{v}$ ou $B - A$



Observações

(i) Um mesmo vetor $\overrightarrow{AB}$ é determinado por uma infinidade de segmentos orientados, chamados representantes desse vetor.

(ii) O módulo de $\vec{v}$ é representado por $|\vec{v}|$ ou $||\vec{v}||$.

Vetor

- **Vetores iguais**: dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são iguais se, e somente se, $AB \sim CD$.

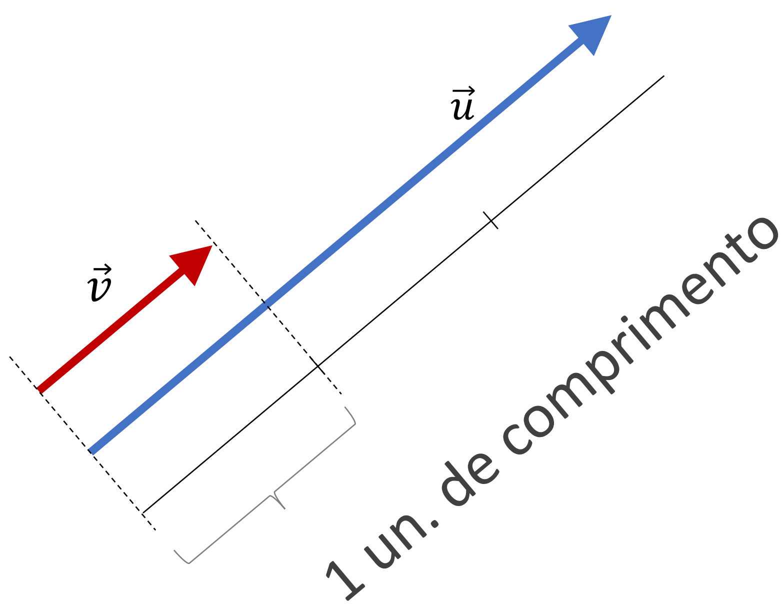
- **Vetor nulo**: os segmentos nulos, por serem equipolentes entre si, determinam um único vetor, chamado vetor nulo ou vetor zero, que é indicado por $\vec{0}$.

- **Vetores opostos**: dado um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, o vetor $\overrightarrow{BA}$ é o oposto de $\overrightarrow{AB}$ e é indicado por $-\overrightarrow{AB}$ ou por $-\vec{v}$.

Vetor

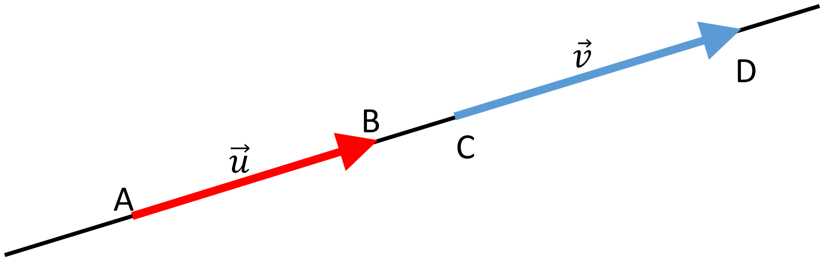
- **Vetores unitário**: um vetor $\vec{v}$ é unitário se $|\vec{v}| = 1$.

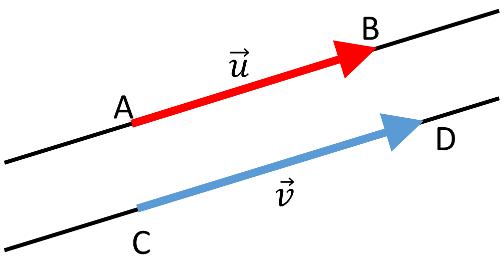
- **Versor**: o versor de um vetor não nulo $\vec{u}$ é o vetor unitário de mesma direção e sentido de $\vec{v}$.



Vetor

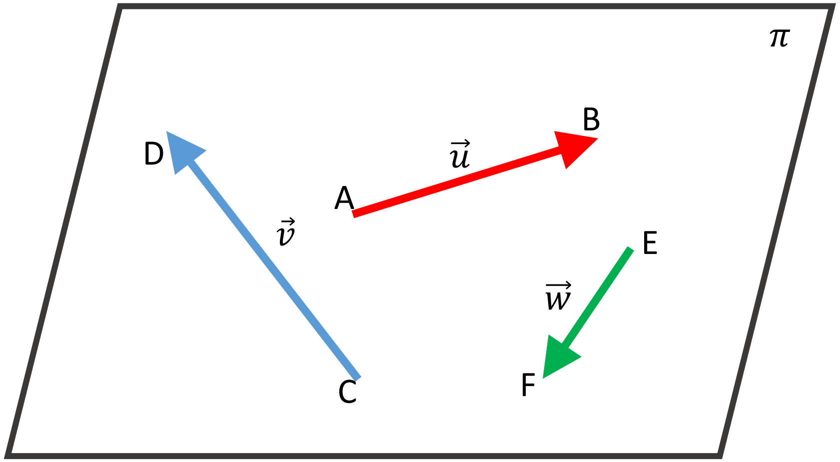
- **Vetores colineares**: dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se tiverem a mesma direção, i.e., possuem representantes AB e CD pertencentes a uma mesma reta ou retas paralelas.





Vetor

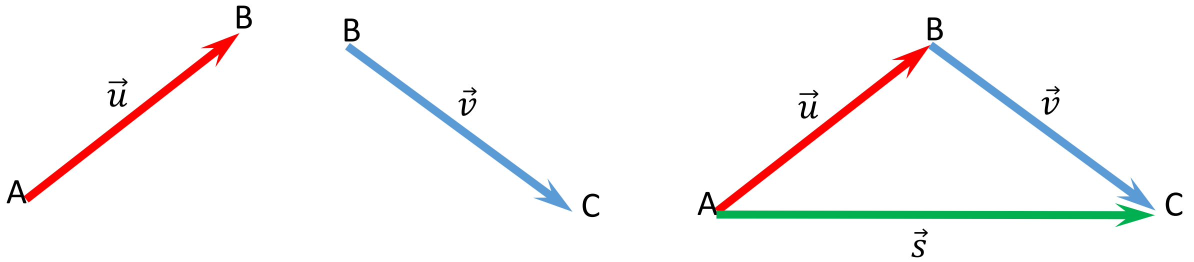
- **Vetores coplanares**: se os vetores não nulos $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ possuem representantes AB, CD e EF pertencentes a um mesmo plano π, diz-se que eles são coplanares.



<u>Observação</u>: dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são sempre coplanares.

Operações com vetores

- **Adição**: sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representados pelos segmentos orientados AB e BC.



$$\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$$

<u>Propriedades da adição</u>

i. Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

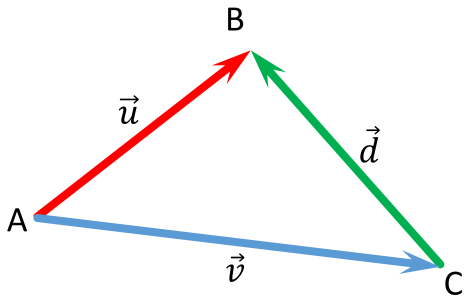
ii. Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

iii. Elemento Neutro: $\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$

iv. Elemento Oposto: $\vec{v} + (-\vec{v}) = -\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}$

Operações com vetores

- **Diferença**: chama-se diferença de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e é representada por $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v}$.



Operações com vetores

- **Multiplicação por um número real**: dado um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ e um número real $k \neq 0$, chama-se produto do número real k pelo vetor $\vec{v}$ o vetor $\vec{p} = k\vec{v}$, tal que:

a) Módulo: $|\vec{p}| = |k\vec{v}| = |k||\vec{v}|$

b) Direção: a mesma de $\vec{v}$

c) Sentido: $\begin{cases} \text{mesma de } \vec{v} \ se\ k > 0 \\ \text{contrário ao de } \vec{v} \ se\ k < 0 \end{cases}$

<u>Observações</u>

(i) Se $k = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, o produto é o vetor $\vec{0}$.

(ii) O versor de um vetor $\vec{u} \neq \vec{0}$ é o vetor unitário

$$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}.$$

Operações com vetores

Propriedades da multiplicação de um vetor por um número real

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores quaisquer e a e b números reais, temos:

i. Associativa: $a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$

ii. Distributiva em relação à adição de escalares:

$$(a+b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$$

iii. Distributiva em relação à adição de vetores:

$$a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$$

iv. Identidade: $1\vec{v} = \vec{v}$

Ângulo entre vetores

O ângulo entre dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o ângulo θ formado pelas semi-retas paralelas aos vetores, tal que

$0 \leq \theta \leq \pi$.

<u>Observações</u>

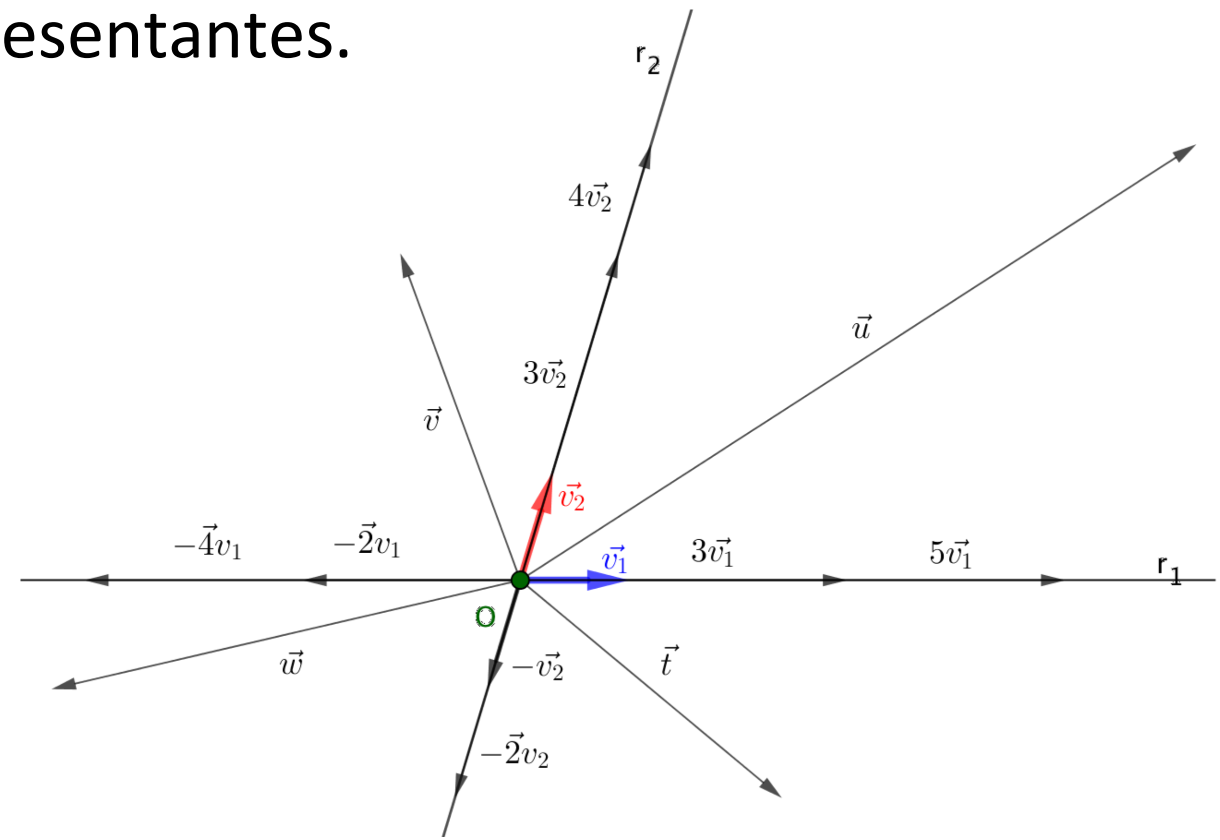
i. Se $\theta = \pi$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tem a mesma direção e sentidos opostos.

ii. Se $\theta = 0$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tem a mesma direção e mesmo sentido.

iii. Se $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais.

Vetores no plano

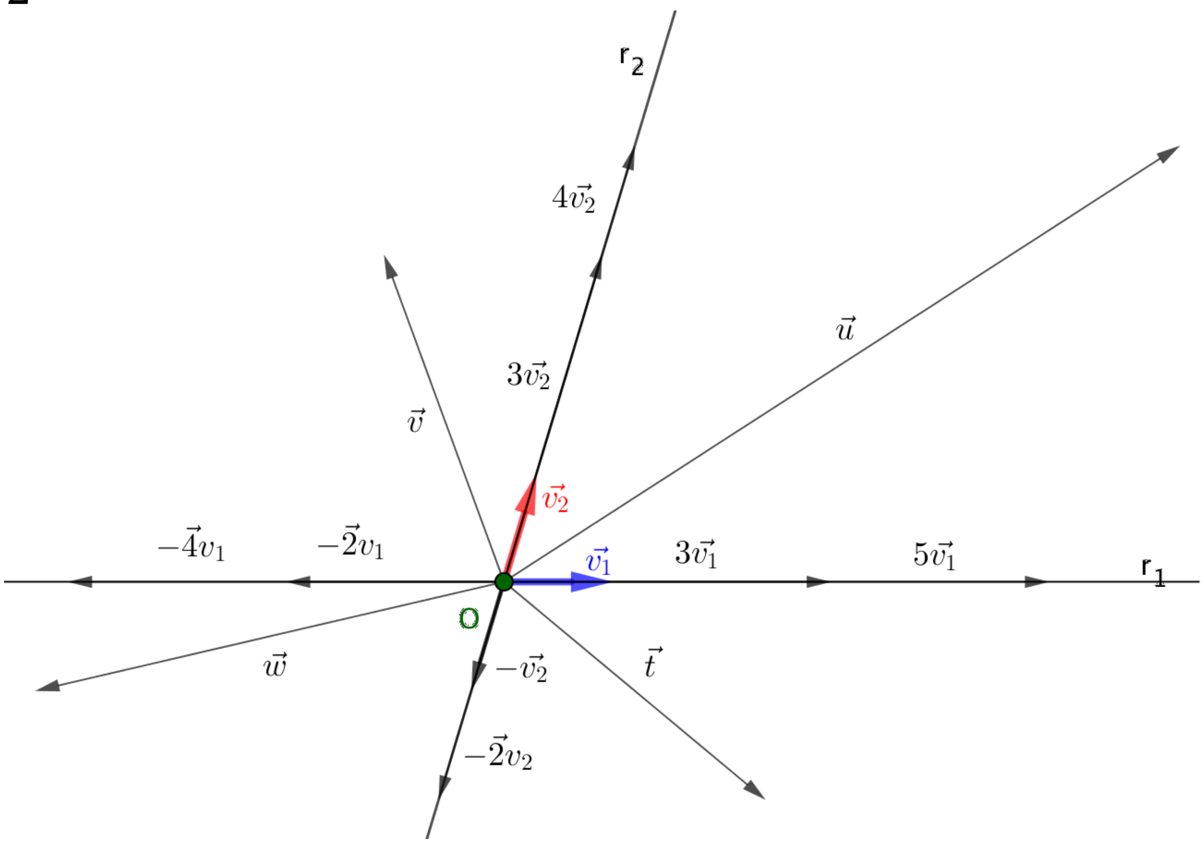
- Consideremos dois vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$, não colineares, representados com origem no mesmo ponto $\boldsymbol{O}$.
- Ainda, sejam r_1 e r_2 as retas contendo estes representantes.



Vetores no plano

Observação

Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{t}$ são expressos em função dos vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$.



$$\vec{u} = 5\overrightarrow{v_1} + 4\overrightarrow{v_2}$$

$$\vec{v} = -2\overrightarrow{v_1} + 3\overrightarrow{v_2}$$

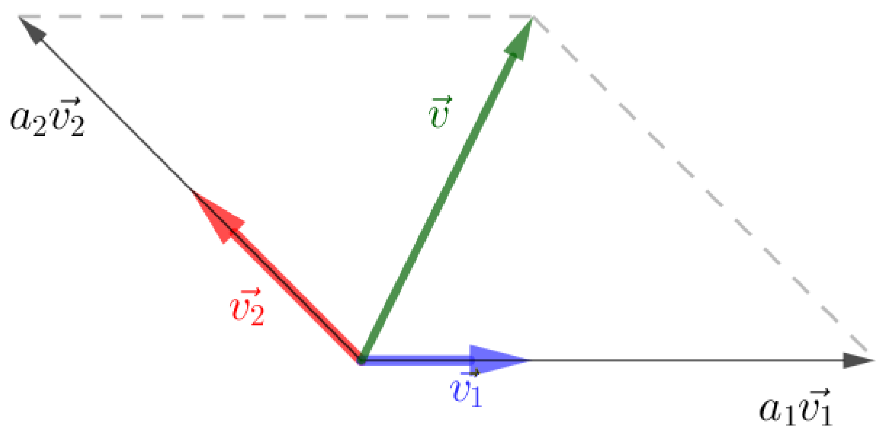
$$\vec{w} = -4\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}$$

$$\vec{t} = 3\overrightarrow{v_1} - 2\overrightarrow{v_2}$$

Vetores no plano

Dado dois vetores quaisquer $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$, <u>não colineares</u>, para cada vetor $\vec{v}$ representado no mesmo plano de $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$, existe uma só dupla de números reais a_1 e a_2 tal que

$$\vec{v} = a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} \qquad (1)$$



Vetores no plano

$$\vec{v} = a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} \qquad \textbf{(1)}$$

Observações

i. Quando $\vec{v}$ é expresso como em **(1)** dizemos que $\vec{v}$ é **combinação linear** de $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$.

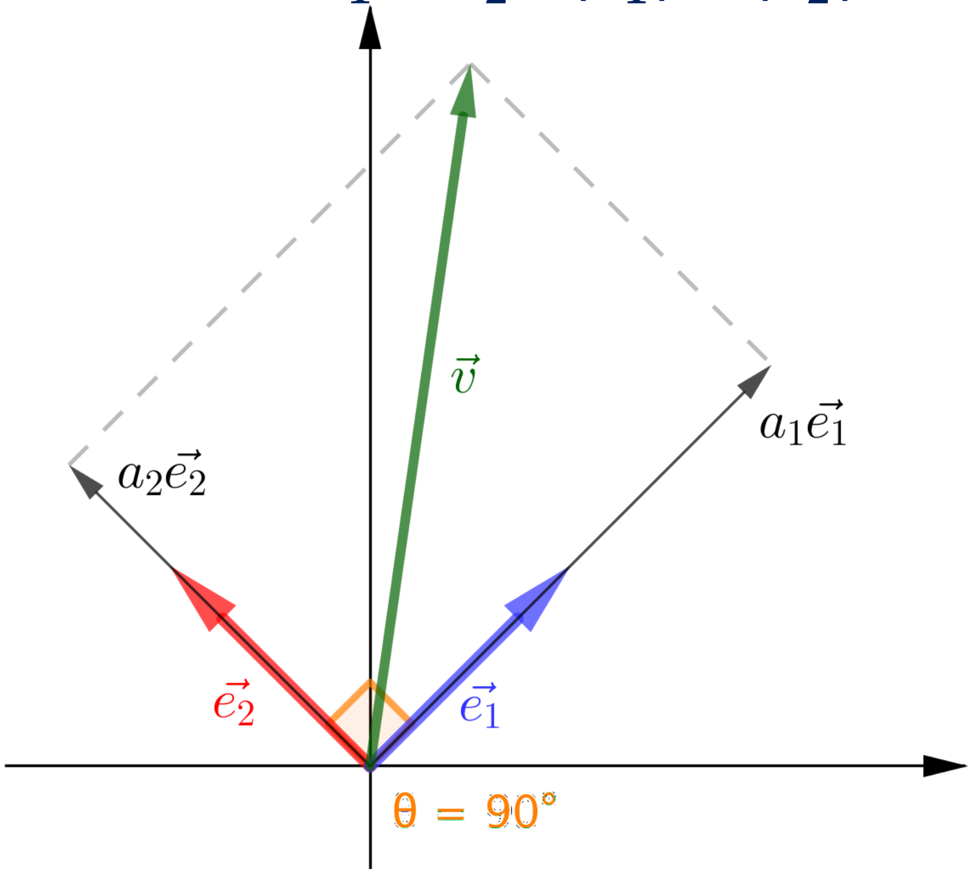
ii. Os números a_1 e a_2 são chamados de **componentes** ou **coordenadas** de $\vec{v}$.

iii. O conjunto $B = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ é chamado **base** no plano.

iv. Ainda, qualquer conjunto de dois vetores não colineares constitui uma **base** no plano.

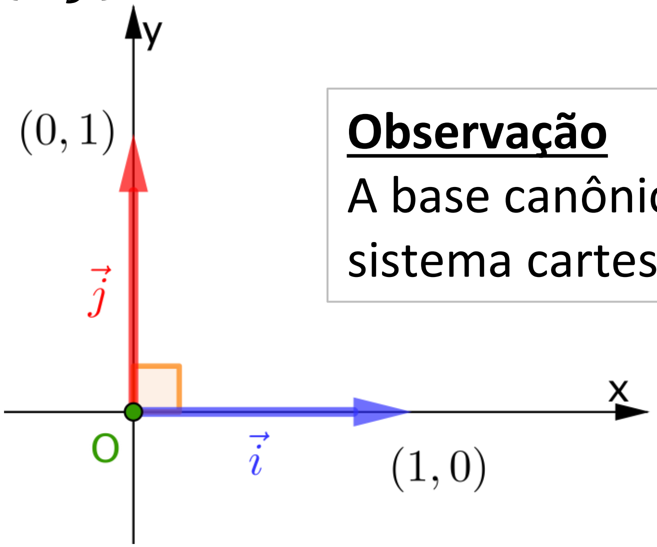
Vetores no plano

Uma base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ é dita **ortonormal** se os seus vetores forem ortogonais e unitários, i.e., $\overrightarrow{e_1} \perp \overrightarrow{e_2}$ e $|\overrightarrow{e_1}| = |\overrightarrow{e_2}| = 1$.



Vetores no plano

- Há infinitas bases ortonormais no plano, mas uma delas é particularmente importante.
- A base formada pelos vetores com origem em $\boldsymbol{O}$ e extremidades em $(1{,}0)$ e $(0{,}1)$ é chamada de **canônica**.
- Estes vetores são simbolizados por $\vec{i}$ e $\vec{j}$.
- Logo, $C = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ é chamado de **canônica**.



Observação
A base canônica determina o conhecido sistema cartesiano ortogonal xOy.

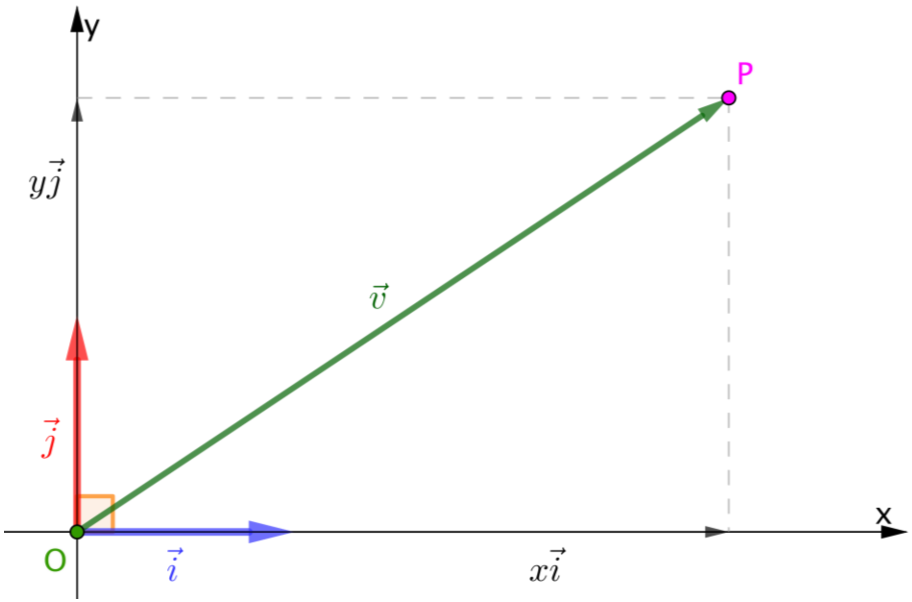
Vetores no plano

- Para cada vetor $\vec{v}$ do plano, partindo da origem $\boldsymbol{O}$, existe um único ponto $P(x, y)$ que é extremidade desde vetor de tal modo que

$$\vec{v} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \text{ ou } \vec{v} = \overrightarrow{OP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

- Os números x e y são as componentes de $\vec{v}$ na base canônica.

- Vetor no plano é um par ordenado (x, y) de números reais e se representa por $\vec{v} = (x, y)$, que é a **expressão analítica** de $\vec{v}$.

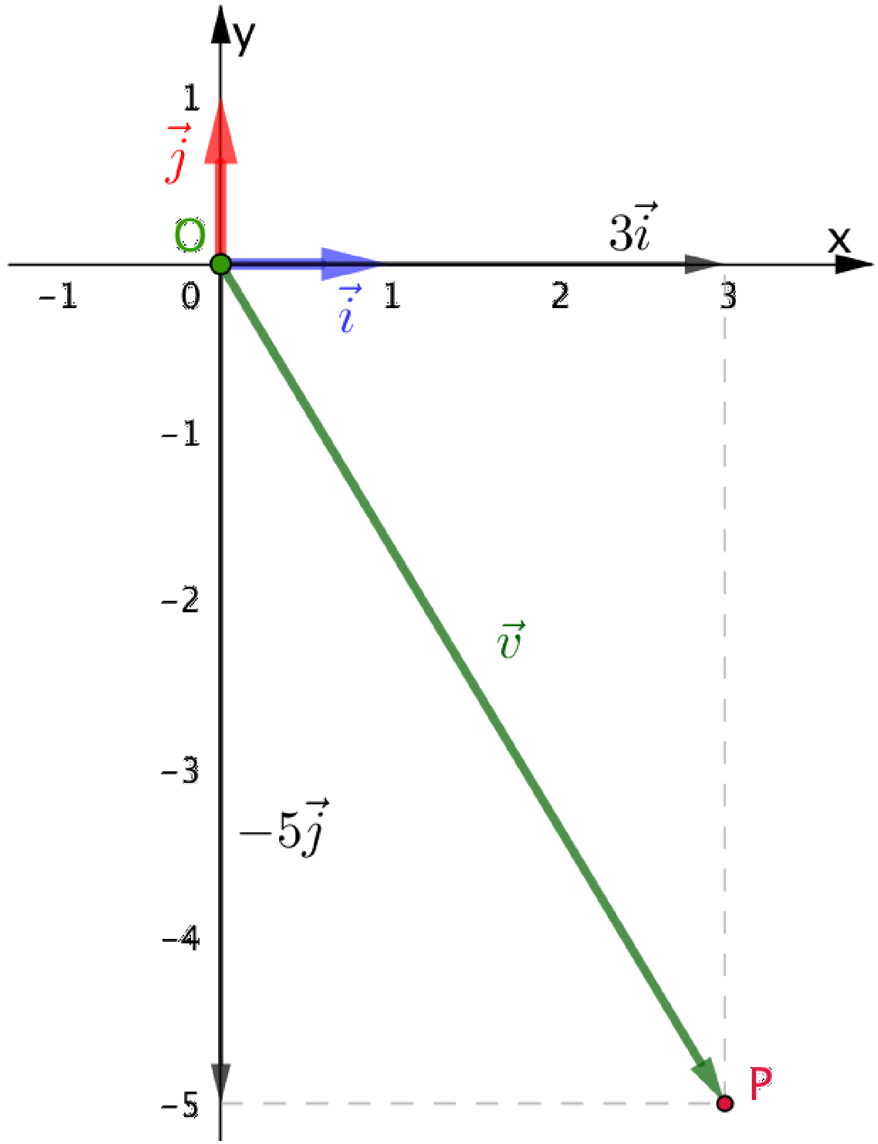


Exemplo

O vetor:

$\vec{v} = 3\vec{\imath} - 5\vec{\jmath}$ tem expressão analítica $\vec{v} = (3, -5)$.

abscissa ordenada



Exemplo

Expresse os vetores abaixo na sua forma analítica e represente os mesmos graficamente no plano cartesiano xOy.

a) $\vec{u} = -\vec{i} + \vec{j} = (-1,1)$

b) $\vec{v} = 3\vec{j} = (0,3)$

c) $\vec{w} = -4\vec{i} = (-4,0)$

d) $\vec{k} = \vec{0} = (0,0)$

Igualdade de vetores

- Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.
- Logo, podemos escrever que $\vec{u} = \vec{v}$.

Exemplo: Para quais valores de x e y, onde $\vec{u} = (x + 1, 4)$ e $\vec{v} = (5, 2y - 6)$, torna $\vec{u} = \vec{v}$?

Resolução

$(x + 1, 4) = (5, 2y - 6)$

$x + 1 = 5 \longrightarrow x = 4$

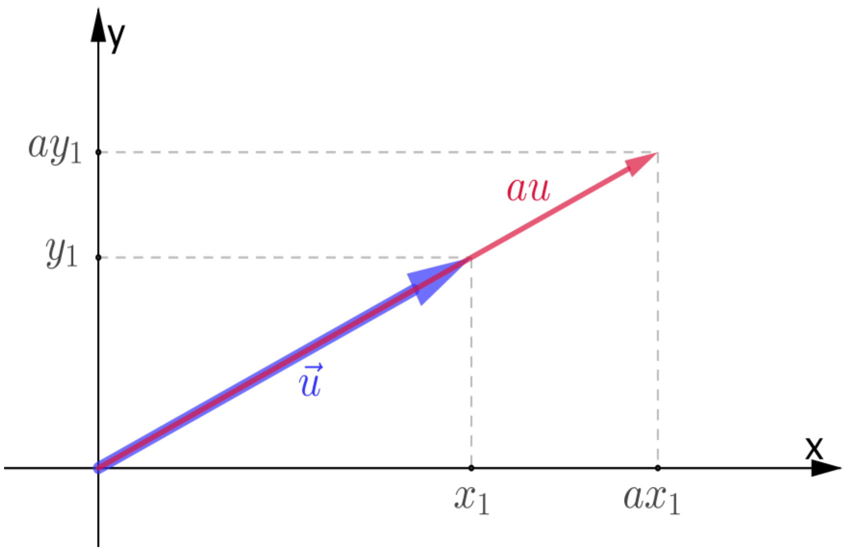
$2y - 6 = 4 \longrightarrow y = 5$

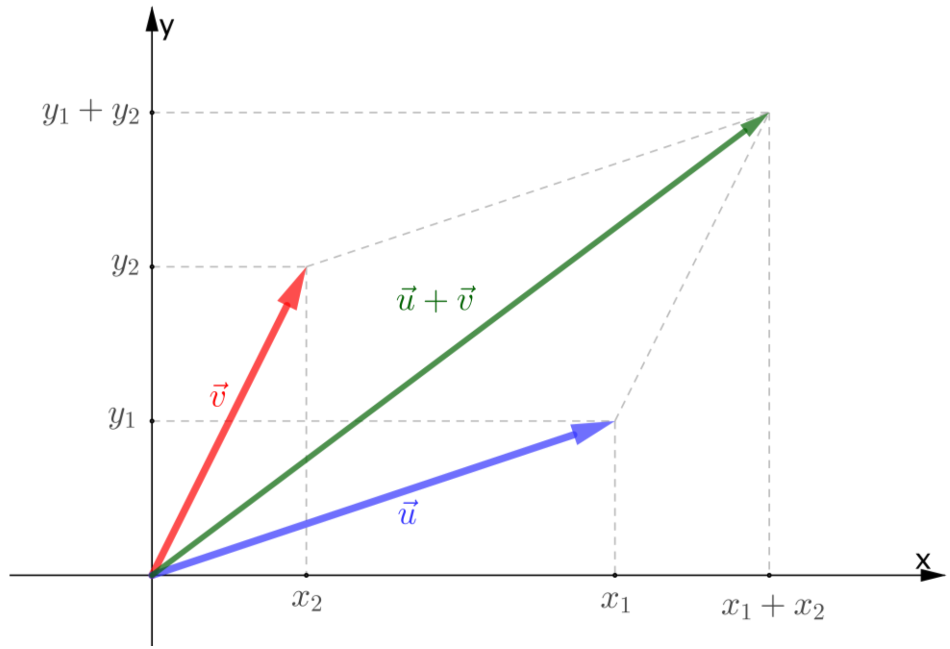
Operações com vetores

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ e $a \in \mathbb{R}$, definimos:

a) $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

b) $a\vec{u} = (ax_1, ay_1)$





Exemplo

Sejam os vetores $\vec{u} = (3,1)$ e $\vec{v} = (1,2)$ e $a = 2 \in \mathbb{R}$, determine:

a) $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$

b) $\vec{m} = a\vec{u}$

c) Represente graficamente (no plano xOy) os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, bem como as resultantes da soma (a) e multiplicação por escalar (b).

Resolução

a) $\vec{s} = (3,1) + (1,2) = (4,3)$

b) $\vec{m} = 2(3,1)=(6,2)$

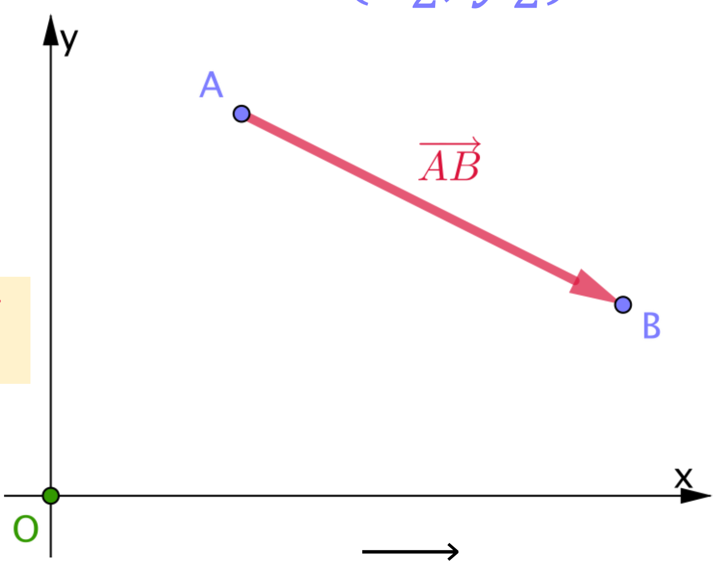
Vetor definido por dois pontos

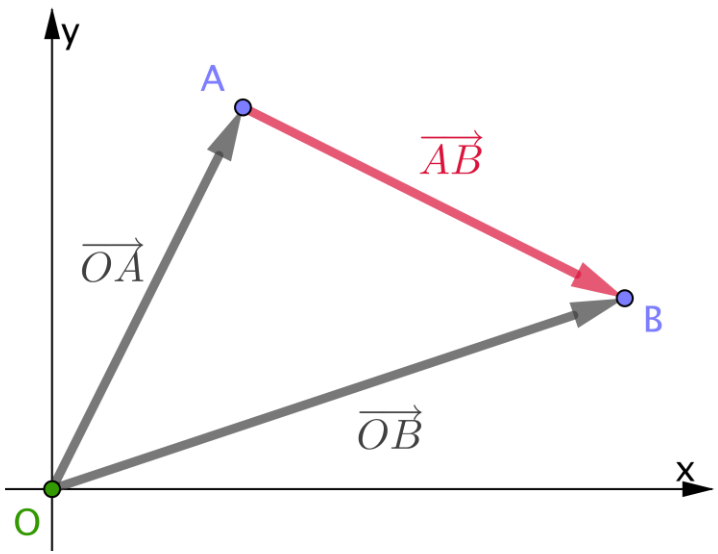
- Em determinadas situações, um vetor é representado por um segmento orientado que não parte da origem do sistema.

- Considere o vetor $\overrightarrow{AB}$ de origem em $A(x_1, y_1)$ e extremidade em $B(x_2, y_2)$.

$\overrightarrow{AB} = B - A$

$B = A + \overrightarrow{AB}$





<u>**Observação**</u>: o vetor $\overrightarrow{AB}$ transporta o ponto inicial A para o extremo B.

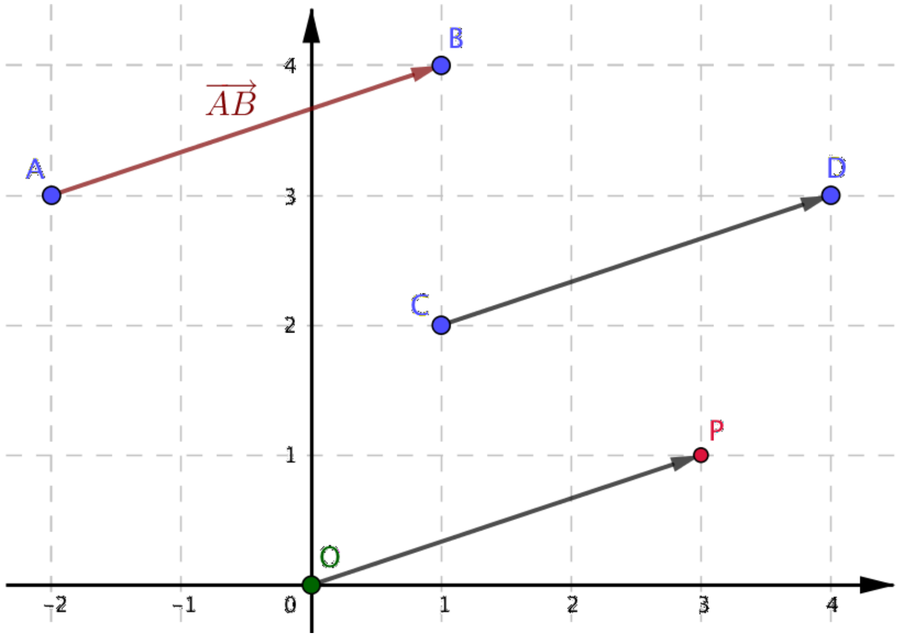
Exemplo

Dados os pontos $A(-2,3)$ e $B(1,4)$.

a) Represente o mesmo graficamente no plano xOy.

b) Determine o vetor $\overrightarrow{AB}$ por meio de $B - A$.

c) Determine um vetor representante de $\overrightarrow{AB}$, com origem em $C(1,2)$.



Resolução

$$\overrightarrow{AB} = (1,4) - (-2,3)$$

$$\overrightarrow{AB} = (3,1)$$

Vetor definido por dois pontos

Observações

i. Lembre que um vetor tem infinitos representantes, que são segmentos orientados equipolentes entre si.

ii. Dentre os infinitos representantes do vetor $\overrightarrow{AB}$, há um vetor que o caracteriza com a particularidade de ter origem em $\boldsymbol{O}(0,0)$ e extremidade em $P(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

iii. O vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ é também chamado de vetor posição ou representante natural de $\overrightarrow{AB}$.

Exemplo

Dados os pontos $A(-1,2)$, $B(3,-1)$ e $C(-2,4)$, determinar o ponto D de modo que $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Resolução Seja D(x, y), então

$$(x, y) - (-2,4) = \frac{1}{2}[(3,-1) - (-1,2)]$$

$$(x + 2, y - 4) = \frac{1}{2}(4,-3)$$

$x + 2 = 2 \longrightarrow x = 0$

$y - 4 = -\frac{3}{2} \longrightarrow y = \frac{5}{2}$

Logo, D$\left(0, \frac{5}{2}\right)$.

Paralelismo de dois vetores

Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são colineares (ou paralelos) se as coordenadas dos dois vetores são proporcionais, i.e., existe um número k tal que $\vec{u} = k\vec{v}$.

$$k = \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

Esta é a condição de paralelismo de dois vetores.

<u>Representação</u>: $\vec{u} \, // \, \vec{v}$

Paralelismo de dois vetores

Observações

i. O vetor $\vec{0} = (0,0)$ é paralelo a qualquer vetor.

ii. Se uma das componentes de um vetor for nula, a componente correspondente de um vetor paralelo também é nula.

Exemplo: Os vetores $\vec{u} = (-2,3)$ e $\vec{v} = (-4,6)$ são paralelos.

Resolução

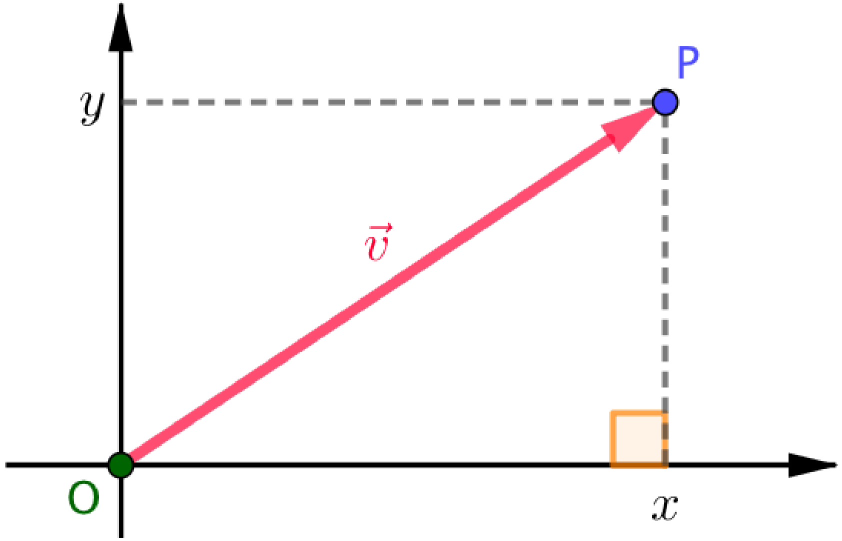
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{-2}{-4} = \frac{6}{3}$$

Módulo de um vetor

O módulo de um vetor $\vec{v} = (x, y)$, representado por $|\vec{v}|$, é o número real não negativo dada pela expressão

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

obtida pelo Teorema de Pitágoras conforme a figura abaixo:



Exemplo

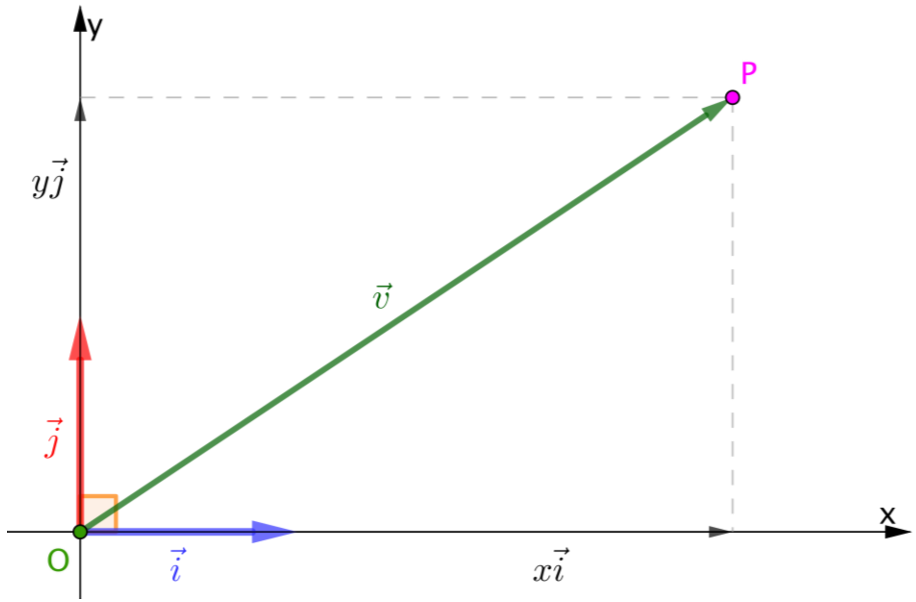
Se $\vec{v} = (-2,3)$, determine $|\vec{v}|$.

Resolução

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$$

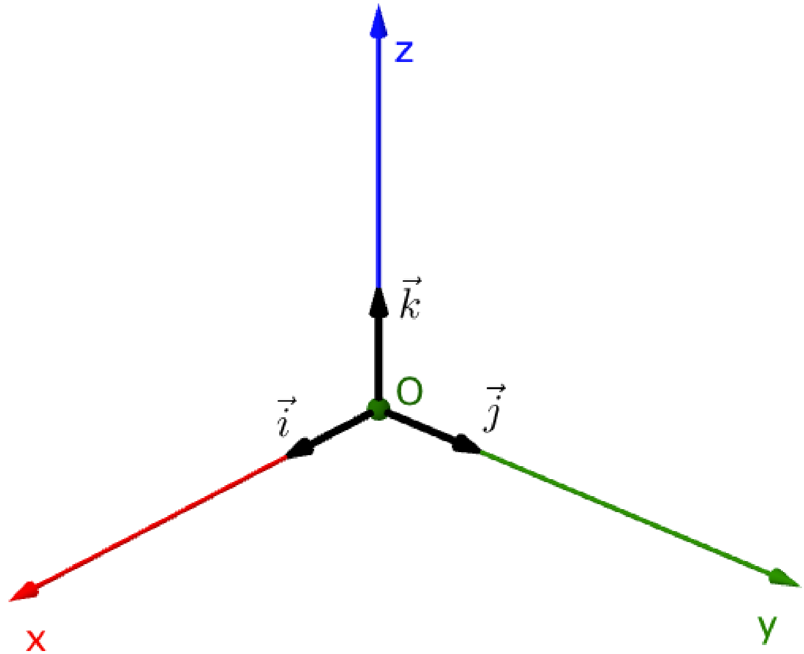
Vetores no espaço

- Estudamos em Vetores no plano que a base canônica $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ no plano determina o sistema cartesiano xOy e que um ponto $P(x, y)$ qualquer desse plano corresponde ao vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.



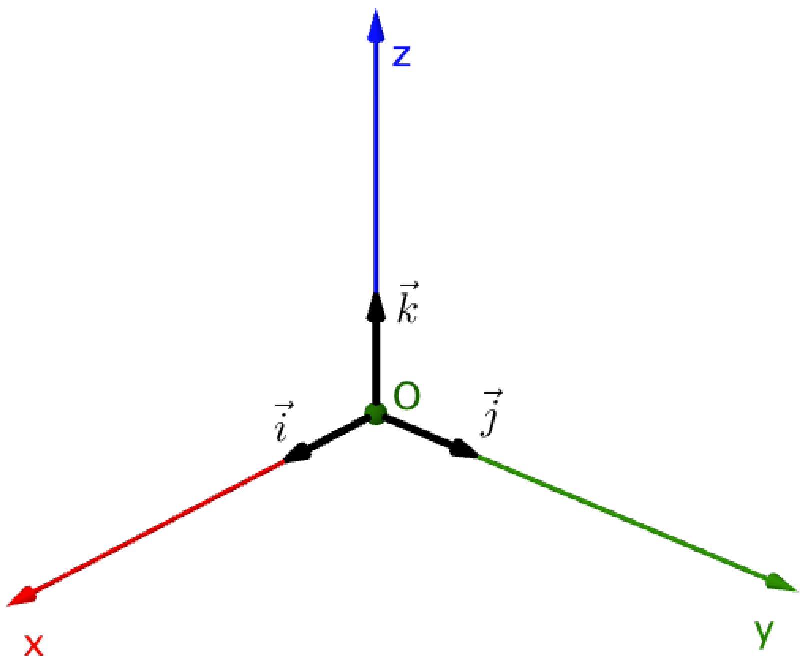
Vetores no espaço

- De forma análoga, no espaço iremos considerar a base canônica $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, que irá determinar o sistema cartesiano ortogonal $Oxyz$.
- Os três vetores são <u>unitários</u> e <u>ortogonais</u> dois a dois, e estão representados com origem no ponto $\boldsymbol{O}$.



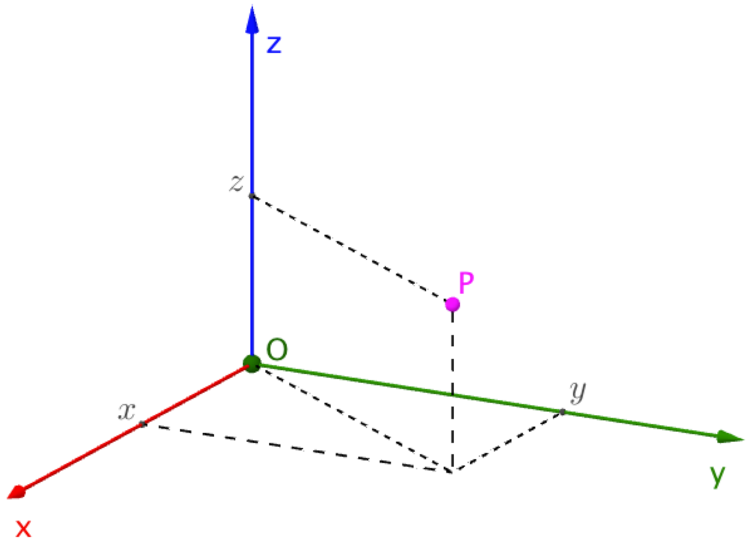
Vetores no espaço

- O ponto $\boldsymbol{O}$ e os três vetores determinam os eixos cartesianos:
  - eixo x (das abscissas) que corresponde ao vetor $\vec{\imath}$.
  - eixo y (das ordenadas) que corresponde ao vetor $\vec{\jmath}$.
  - eixo z (das cotas) que corresponde ao vetor $\vec{k}$.

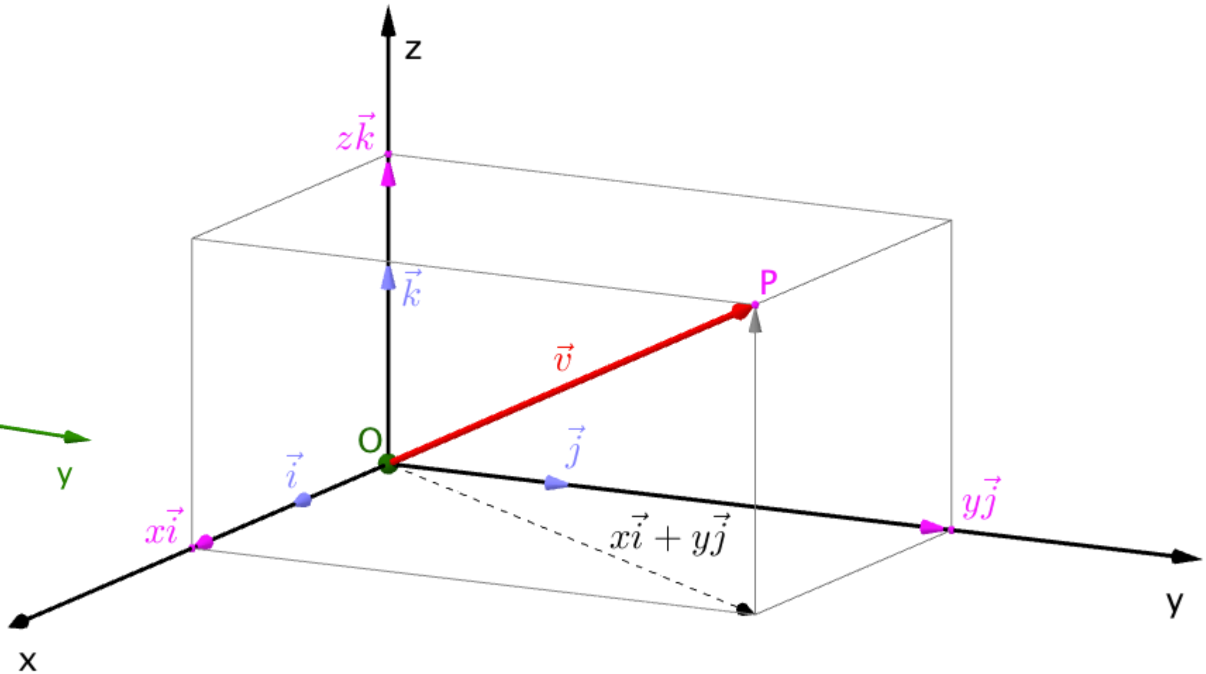


Vetores no espaço

- Assim como no plano, cada ponto $P(x, y, z)$, figura (a), corresponderá ao vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$, figura (b).



(a) Ponto $\boldsymbol{P}$ no espaço



(b) vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$

Vetores no espaço

Vetor no espaço é uma terna ordenada (x, y, z) de números reais e se representa por $\vec{v} = (x, y, z)$, que é a **expressão analítica** de $\vec{v}$.

Exemplo: O vetor $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$

pode ser escrito por $\vec{v} = (2, -3, 1)$.

abscissa

cota

ordenada

Em particular, a base canônica é dada por:

$$\vec{i} = (1,0,0)$$
$$\vec{j} = (0,1,0)$$
$$\vec{k} = (0,0,1)$$

Exemplo

Expresse os vetores abaixo na sua forma analítica.

a) $\vec{u} = -\vec{i} + \vec{j} = (-1,1,0)$

b) $\vec{v} = 2\vec{j} - \vec{k} = (0,2,-1)$

c) $\vec{w} = 4\vec{k} = (0,0,4)$

d) $\vec{a} = \vec{0} = (0,0,0)$

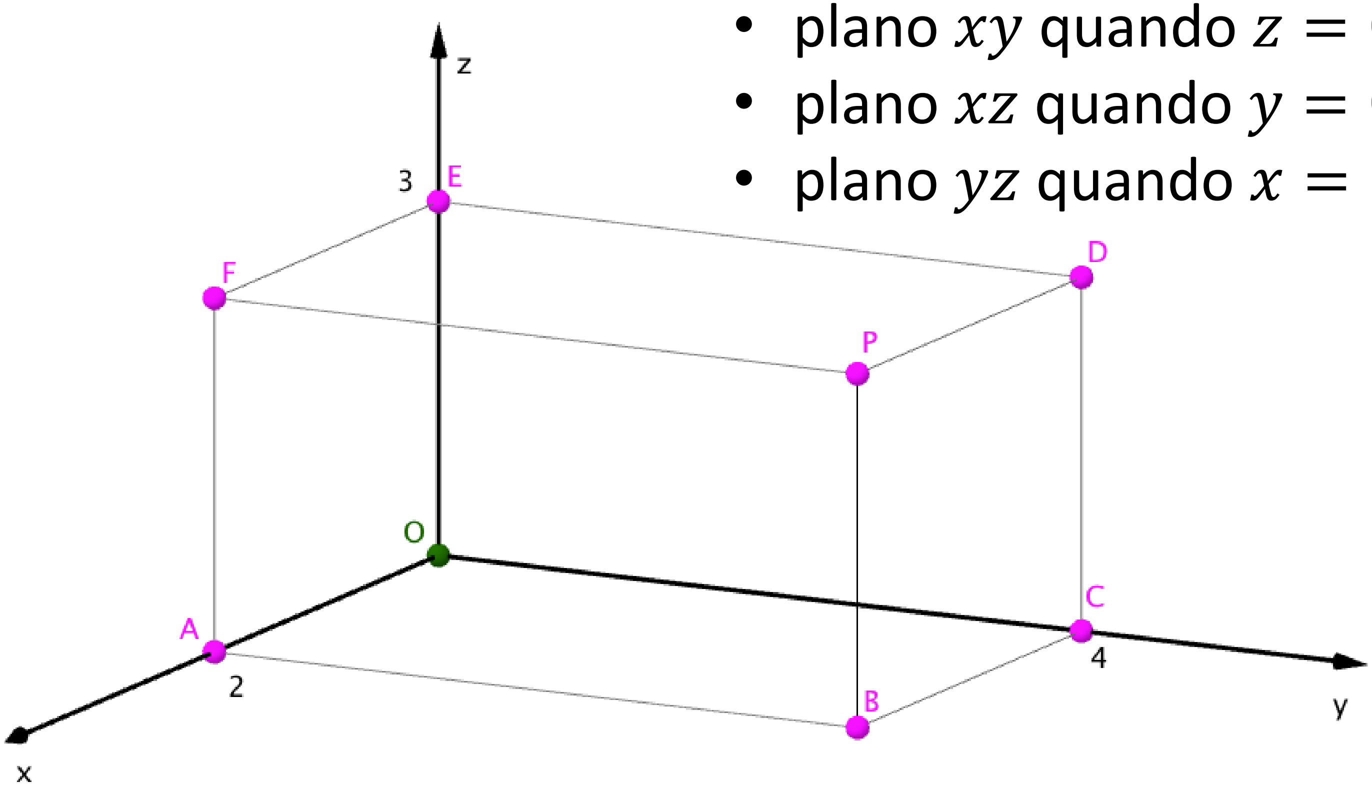
e) $\vec{b} = -3\vec{i} + 7\vec{k} = (-3,0,7)$

Vetores no espaço

Com base na figura e levando em conta que um ponto (x, y, z) está no

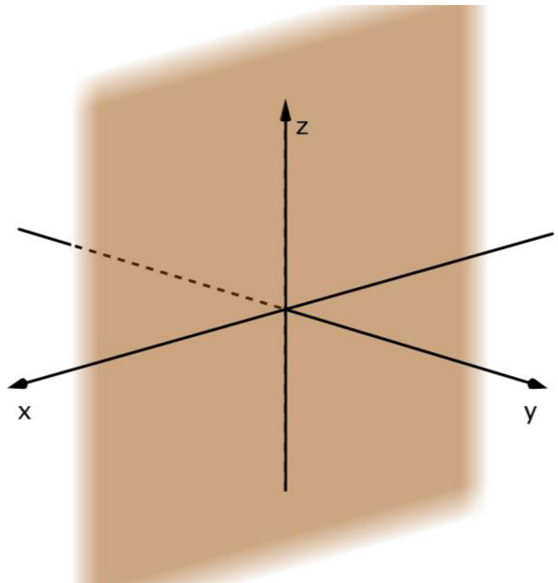
- eixo x quando $y = 0$ e $z = 0$, temos $A(2,0,0)$
- eixo y quando $x = 0$ e $z = 0$, temos $C(0,4,0)$
- eixo z quando $x = 0$ e $y = 0$, temos $E(0,0,3)$

- plano xy quando $z = 0$, temos $B(2,4,0)$
- plano xz quando $y = 0$, temos $F(2,0,3)$
- plano yz quando $x = 0$, temos $D(0,4,3)$

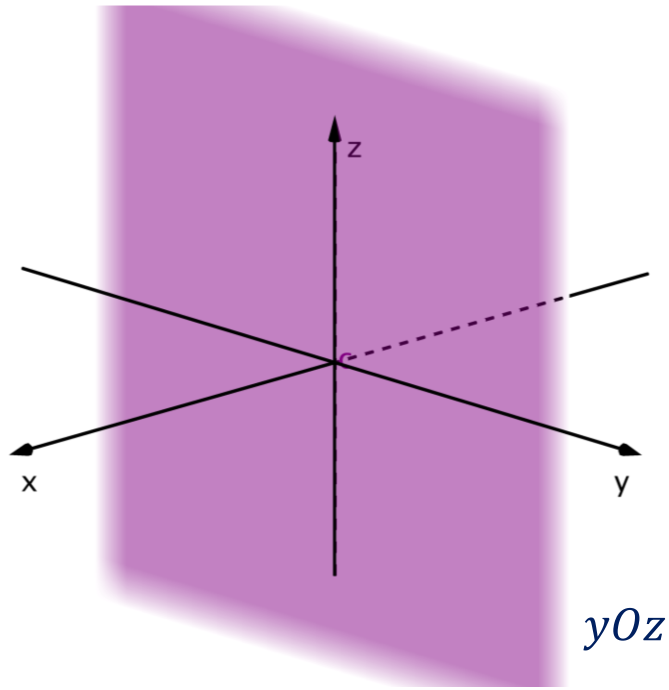


Vetores no espaço

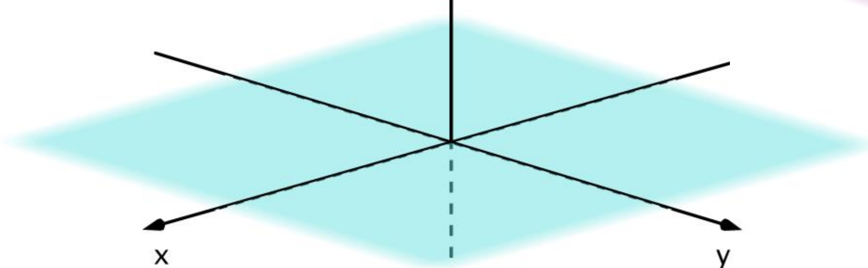
- Cada dupla de eixos determina um plano coordenado.
- Como temos 3 eixos, teremos 3 planos coordenados:
  a) xOy ou xy
  b) xOz ou xz
  c) yOz ou yz



xOz



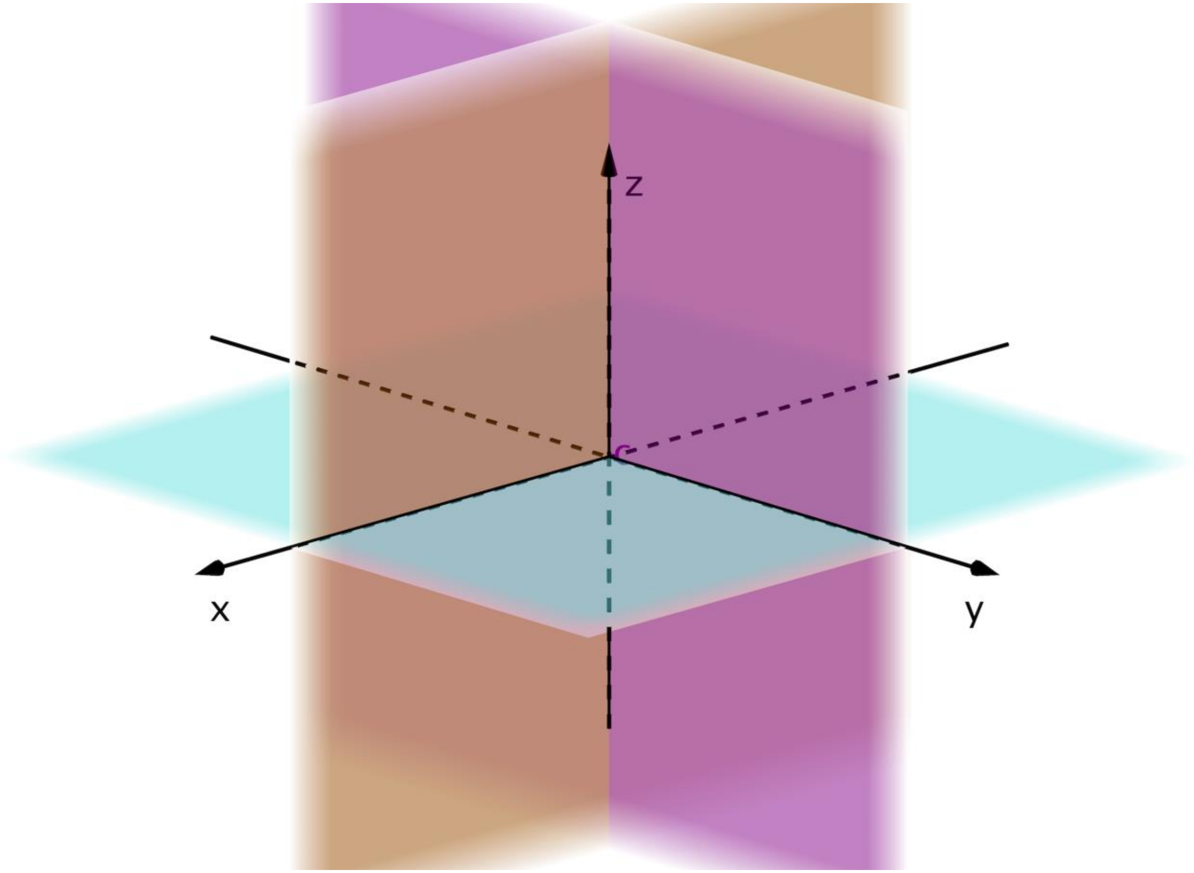
yOz



xOy

Vetores no espaço

- A intersecção destes 3 planos, segundo os 3 eixos, dividem o espaço em 8 regiões, cada uma delas chamada de <u>octante</u>.

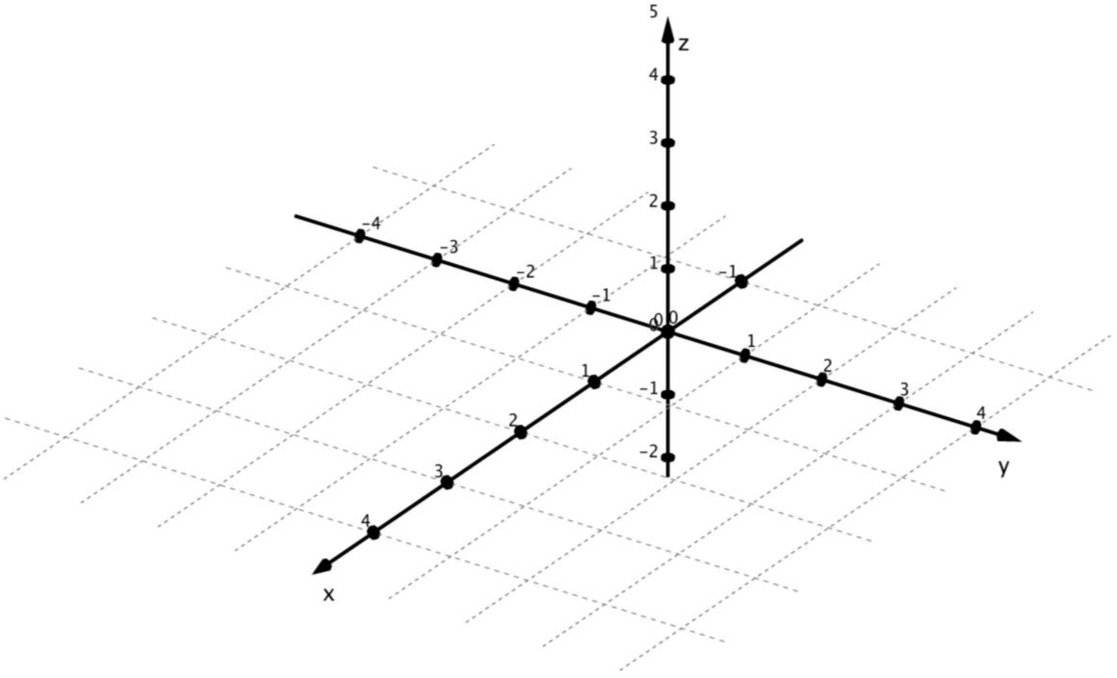


Exemplo

Marque o ponto $A(3,-2,4)$ no espaço. Determine o vetor $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$.

Resolução

$$\vec{u}=\overrightarrow{OA}=(3,-2,4)-(0,0,0)$$
$$\vec{u}=(3,-2,4)$$



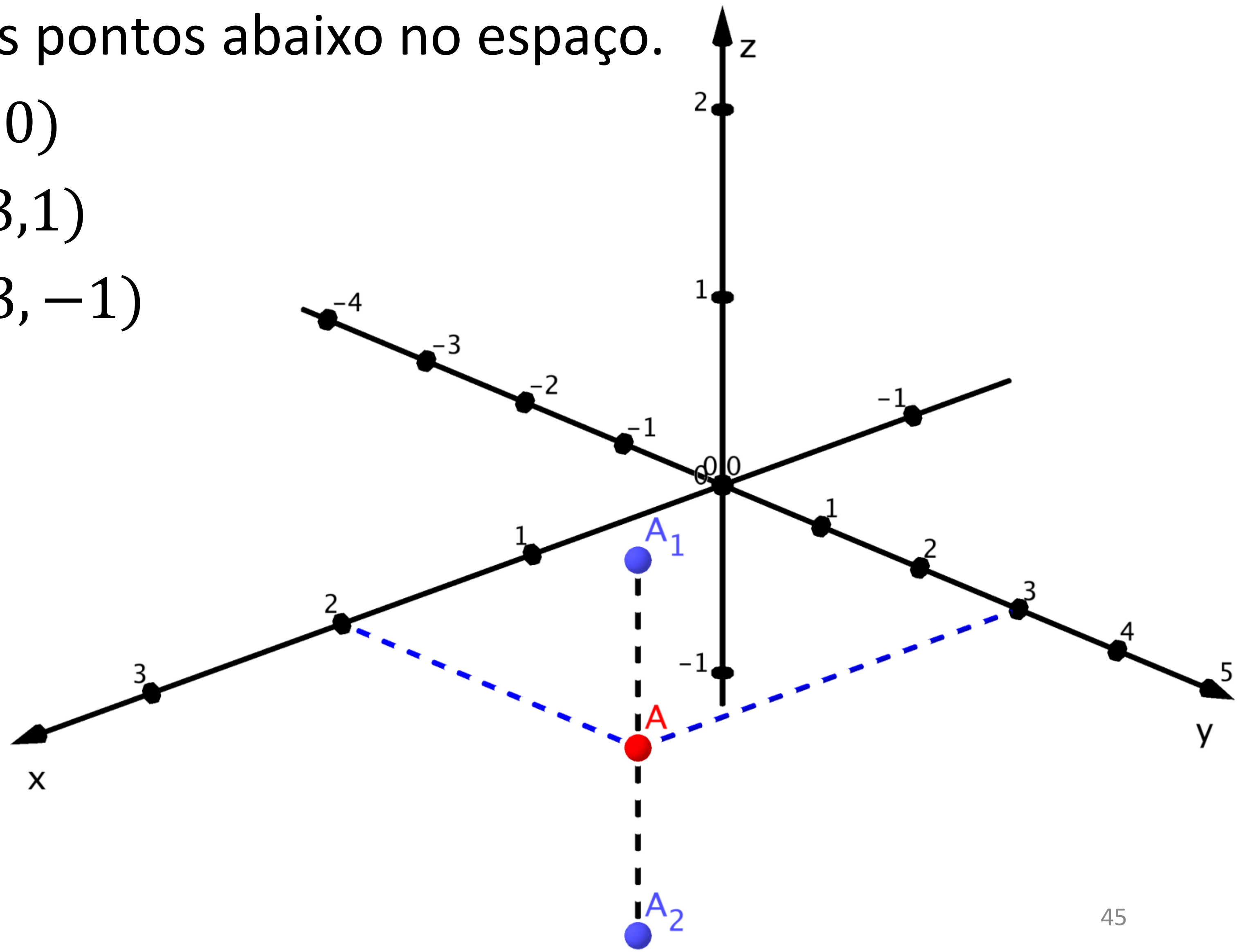
Exemplo

Marque os pontos abaixo no espaço.

a) $A(2,3,0)$

b) $A_1(2,3,1)$

c) $A_2(2,3,-1)$



Igualdade de vetores

- Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ e $z_1 = z_2$.
- Logo, podemos escrever que $\vec{u} = \vec{v}$.

Exemplo: Para quais valores de x,y e z, onde $\vec{u} = (x+1, 4{,}0)$ e $\vec{v} = (5, 2y-6, z-1)$, torna $\vec{u} = \vec{v}$?

Resolução

$$(x+1, 4{,}0) = (5, 2y-6, z-1)$$

$$x + 1 = 5 \longrightarrow x = 4$$

$$2y - 6 = 4 \longrightarrow y = 5$$

$$z - 1 = 0 \longrightarrow z = 1$$

Operações com vetores

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $a \in \mathbb{R}$, definimos:

a) $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

b) $a\vec{u} = (ax_1, ay_1, az_1)$

<u>Exemplo</u>: Sejam os vetores $\vec{u} = (1,3,1)$ e $\vec{v} = (1,2,4)$ e $a = 2 \in \mathbb{R}$, determine:

a) $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$

b) $\vec{m} = a\vec{u}$

<u>Resolução</u>

a) $\vec{s} = (1,3,1) + (1,2,4) = (2,5,5)$

b) $\vec{m} = 2(1,3,1) = (2,6,2)$

Vetor definido por dois pontos

Considere o vetor $\overrightarrow{AB}$ de origem em $A(x_1, y_1, z_1)$ e extremidade em $B(x_2, y_2, z_2)$. Logo,

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Observamos na decomposição de vetores no plano que

se $\overrightarrow{AB} = B - A$,então $B = A + \overrightarrow{AB}$

Paralelismo de dois vetores

Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são colineares (ou paralelos) se as coordenadas dos dois vetores são proporcionais, i.e., existe um número k tal que $\vec{u} = k\vec{v}$.

$$k = \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

Esta é a condição de paralelismo de dois vetores.

<u>Representação</u>: $\vec{u} \; // \; \vec{v}$

Paralelismo de dois vetores

Observações

i. O vetor $\vec{0} = (0,0,0)$ é paralelo a qualquer vetor.

ii. Se uma das componentes de um vetor for nula, a componente correspondente de um vetor paralelo também é nula.

Exemplo: Os vetores $\vec{u} = (-2,3,1)$ e $\vec{v} = (-4,6,2)$ são paralelos.

Resolução

$$\frac{-2}{-4} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Módulo de um vetor

O módulo de um vetor $\vec{v} = (x, y, z)$, representado por $|\vec{v}|$, é o número real não negativo dada pela expressão

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Exemplo

Se $\vec{v} = (-2,3,1)$, determine $|\vec{v}|$.

Resolução

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

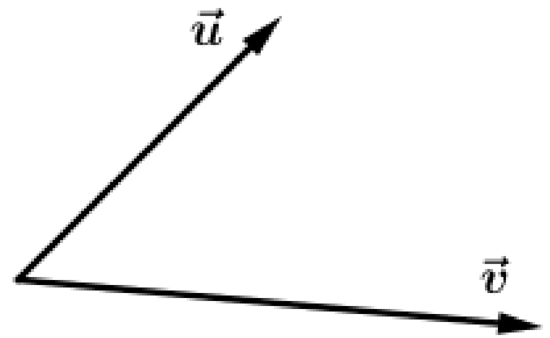
Exercícios Propostos

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

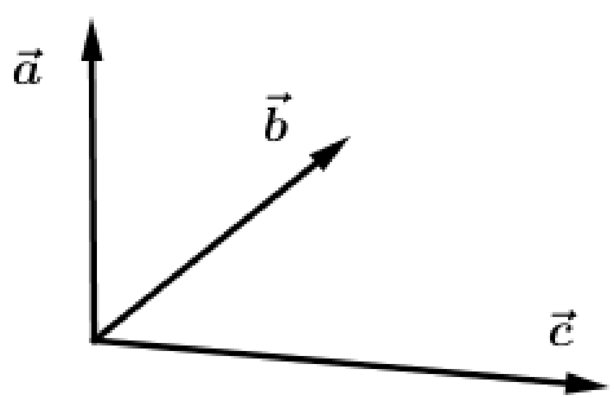
Exercícios - Vetores

1) Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ da figura, mostrar, num gráfico, um representante do vetor:



a) $\vec{u} - \vec{v}$
b) $\vec{v} - \vec{u}$
c) $-\vec{u} - 2\vec{v}$
d) $2\vec{u} - 3\vec{v}$

2) Dados os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, como na figura, apresentar um representante de cada um dos vetores:



a) $4\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c}$
b) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
c) $2\vec{b} - (\vec{a} + \vec{c})$

Exercícios - Vetores

3) Sabendo que o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de $120°$ e entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é de $30°$, conforme figura abaixo, determine o ângulo formado pelos vetores:

a) $\vec{v}$ e $-\vec{u}$

$R: 60°$

b) $\vec{w}$ e $-2\vec{u}$

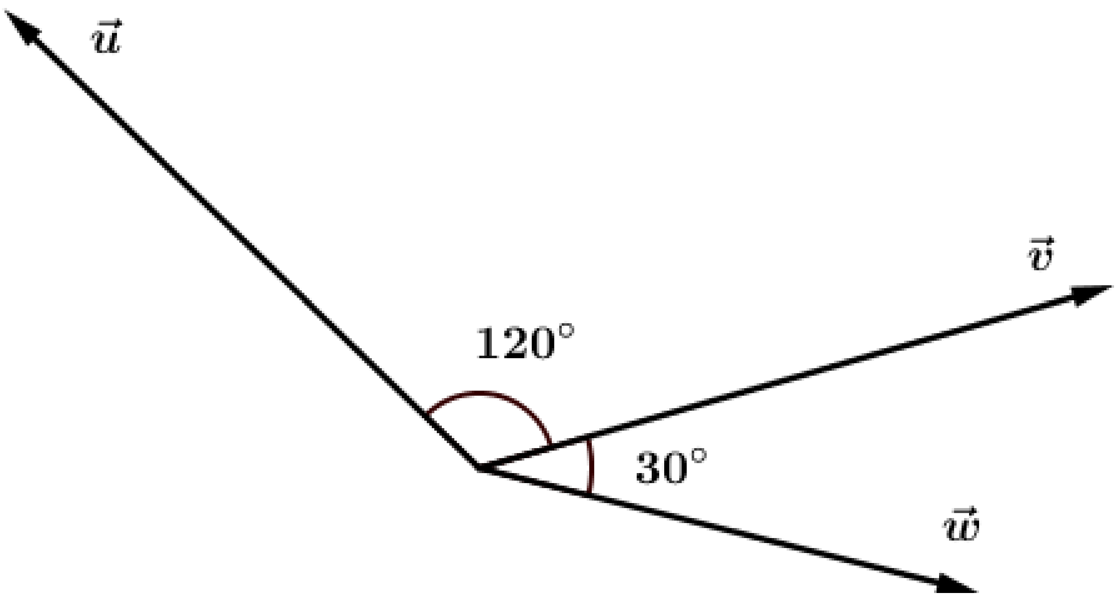
$R: 30°$

c) $2\vec{u}$ e $3\vec{w}$

$R: 150°$

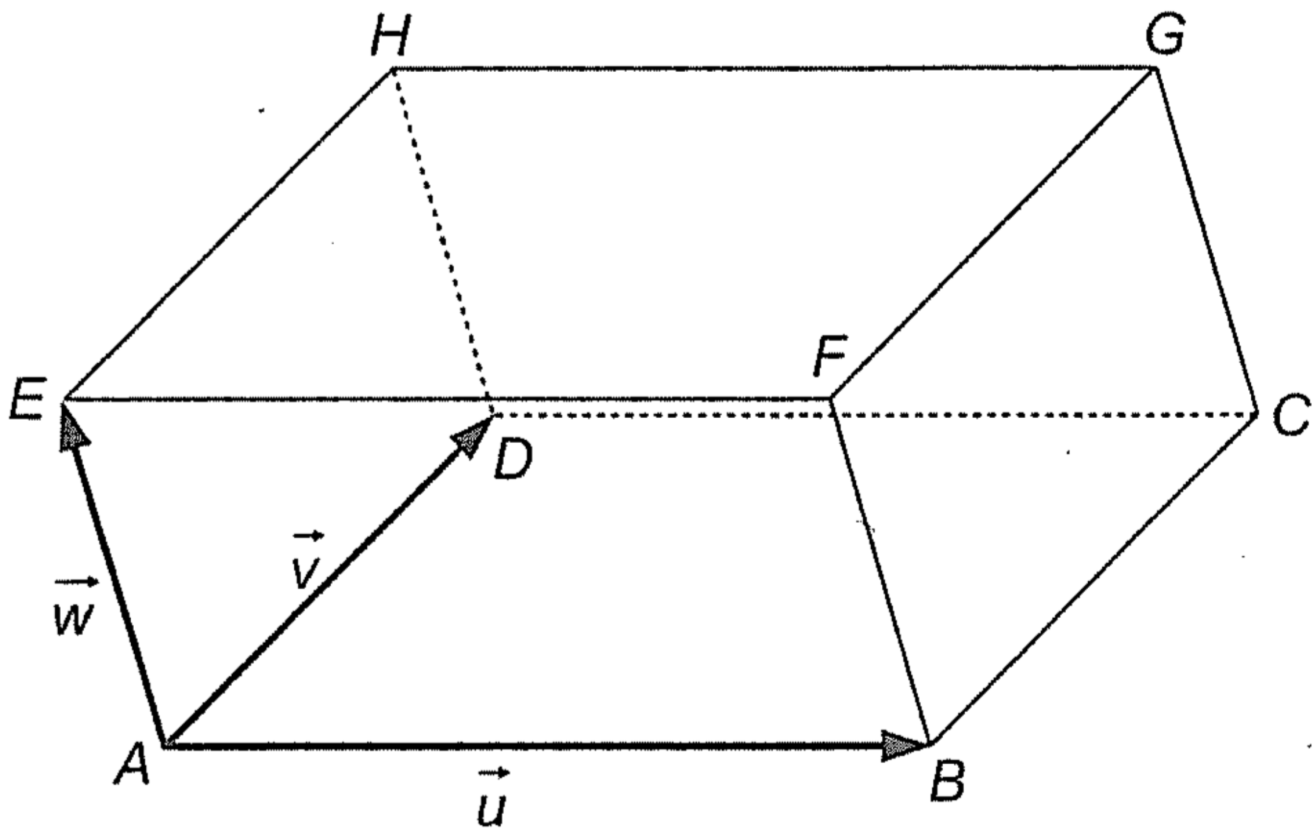
d) $-\vec{w}$ e $-2\vec{v}$

$R: 30°$



Exercícios - Vetores

4) Seja o paralelepípedo ABCDEFGH. Sendo $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$, determine $\overrightarrow{AG}$ e $\overrightarrow{EC}$ em função de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.



Exercícios - Vetores

5) Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{z}$ realize as seguintes operações:

a) $2\vec{z}$

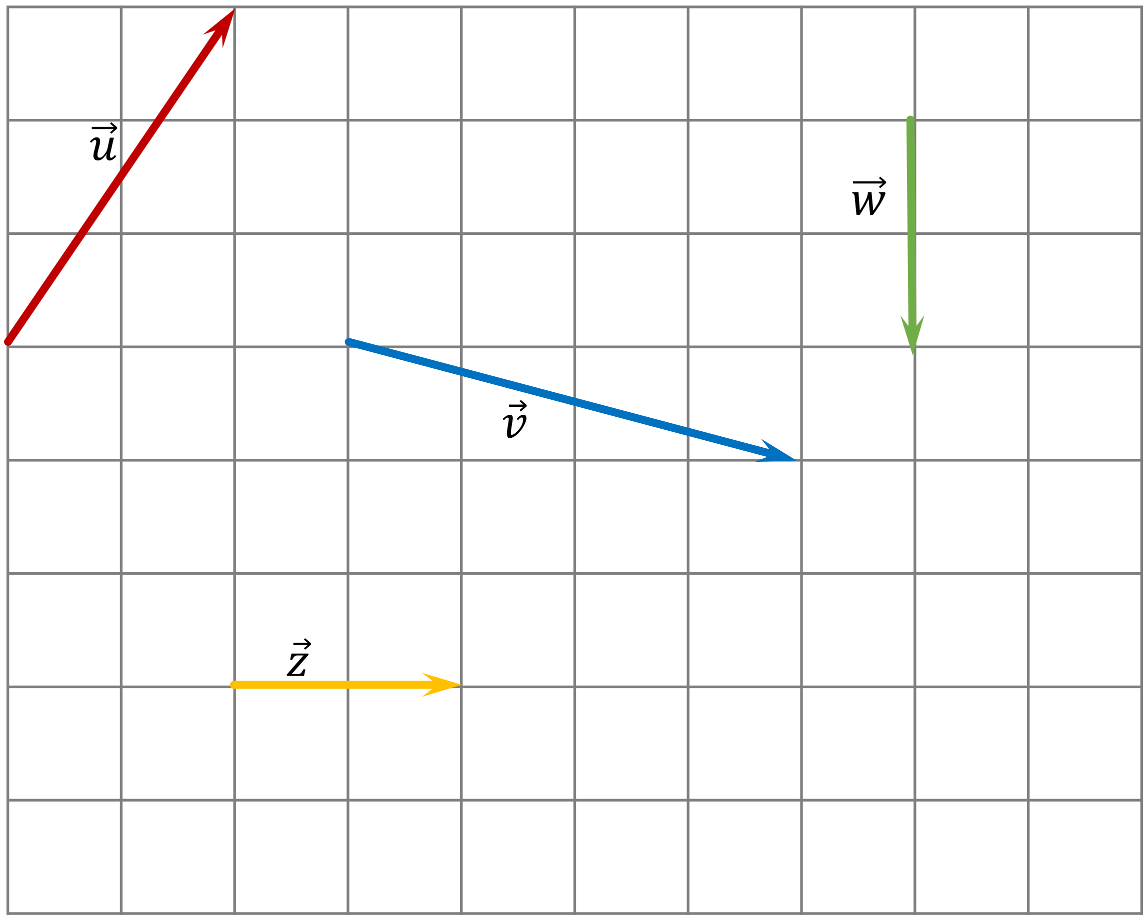
b) $\frac{1}{2}\vec{w}$

c) $-\vec{w}$

d) $-\vec{v}$

e) $\vec{u} + \vec{z}$

f) $\vec{u} + \vec{w}$



Exercícios - Vetores

5) Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{z}$ realize as seguintes operações:

g) $\vec{z} + \vec{w}$

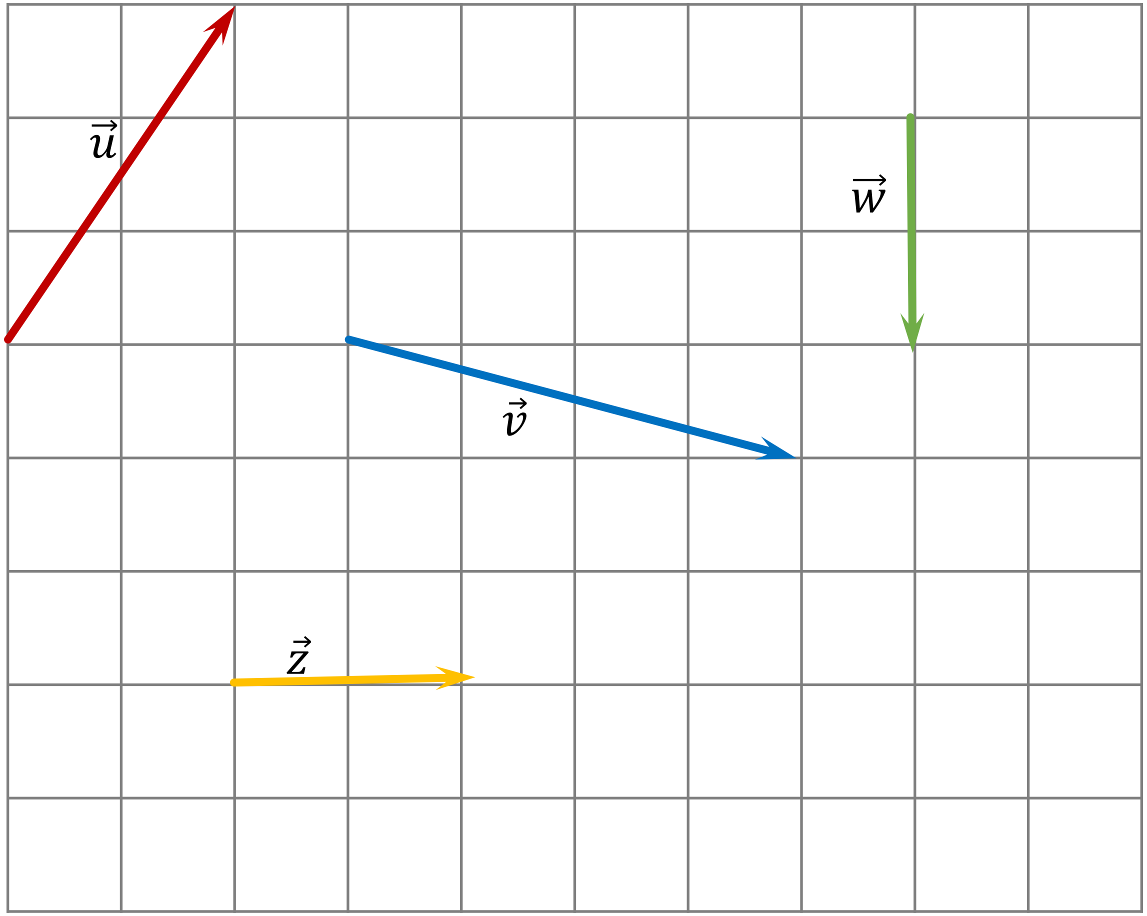
h) $\vec{z} - \vec{w}$

i) $\vec{u} + \vec{v}$

j) $\vec{u} - \vec{v}$

k) $\vec{v} - \vec{u}$

l) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{z}$



Exercícios - Vetores

6) Dados os pontos $A(2,-3,1)$ e $B(4,5,-2)$, determinar o ponto P tal que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$.

$$R: P\left(3, 1, -\frac{1}{2}\right)$$

7) Dados os pontos $A(-1,2,3)$ e $B(4,-2,0)$, determinar o ponto P tal que $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AB}$.

$$R: P(14, -10, -6)$$

8) Encontre os números a e b tais que $\vec{w} = a\vec{v} + b\vec{u}$, sendo $\vec{v} = (1,-2,1)$ e $\vec{u} = (2,0,-4)$ e $\vec{w} = (-4,-4,14)$.

$$R: a = 2 \ e \ b = -3$$

9) Determine a e b de modo que $3\vec{u} - 2\vec{v} = \vec{0}$, sendo $\vec{u} = (4,1,-3)$ e $\vec{v} = (6,a,b)$.

$$R: a = \frac{3}{2} \ e \ b = -\frac{9}{2}$$

Exercícios - Vetores

10) Verifique se são colineares os pontos

a) $A(-1,-5,0)$, $B(2,1,3)$ e $C(-2,-7,-1)$ $R: sim$

b) $A(2,1,-1)$, $B(3,-1,0)$ e $C(1,0,4)$ $R: não$

11) Calcular a e b de modo que sejam colineares os pontos $A(3,1,-2)$, $B(1,5,1)$ e $C(a,b,7)$.

$R: a = -3 \;\; e \;\; b = 13$

Exercícios - Vetores

12) Expresse os vetores abaixo na sua forma analítica.

a) $\vec{u} = -\vec{i} + \vec{j}$

b) $\vec{v} = 2\vec{j} - \vec{k}$

c) $\vec{w} = 4\vec{k}$

d) $\vec{a} = \vec{0}$

e) $\vec{b} = -3\vec{i} + 7\vec{k}$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem ser encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/

O GAMA possui monitorias de:

- Pré-cálculo e Matemática Elementar (e disciplinas equivalentes)
- ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
- Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas
Instituto de Física e Matemática
Pró-Reitoria de Ensino

Módulo de Geometria Analítica

Aula 2

Projeto
GAMA
Grupo de Apoio em Matemática

Produto escalar

Chama-se produto escalar, ou produto interno usual, de dois vetores $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, e se representa por $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ao número real

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

O produto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ também é indicado por $\langle u, v\rangle$.

Produto escalar

Exemplos

1) Dados os vetores $\vec{u} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 8\vec{k}$ e $\vec{v} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$, determine $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
2) Determine $\vec{i} \cdot \vec{j}$.

Resolução

1) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ = 3.4+(-5).(-2)+8.(-1) = 12+10 – 8 = 14

2) $\vec{i} \cdot \vec{j}$ = (1,0,0).(0,1,0)=1.0+0.1+0.0=0

Produto escalar

Propriedades

Para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e o número $\alpha \in \mathbb{R}$, vem:

i. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

ii. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

iii. $\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v})$

iv. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ e $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ se, e somente se $\vec{u} = \vec{0} = (0,0,0)$

v. $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$

Módulo de um vetor

O módulo de um vetor $\vec{v} = (x, y, z)$, representado por $|\vec{v}|$ é o número real não negativo

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

ou em coordenadas,

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Exemplo

Se $\vec{v} = (2,1,-2)$, determine $|\vec{v}|$ por $\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$.

Resolução

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

Versor de um vetor

O versor de um vetor $\vec{v}$, chamado de $\vec{u}$, é dado por

$$\vec{u} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$$

Exemplo

Se $\vec{v} = (2,1,-2)$, determine o seu versor.

Resolução

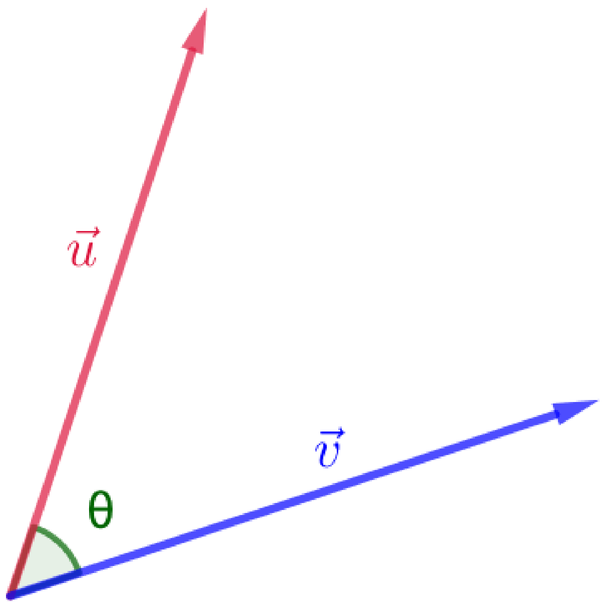
Do exemplo anterior, temos que $|\vec{v}|$=3.

$\vec{u} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = \frac{1}{3}.(2,1,-2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

Ângulo de dois vetores

- O ângulo θ de dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ varia de $0°$ a $180°$.
- O produto escalar de dois vetores está relacionado com o ângulo formado por eles.
- Se $\vec{u} \neq 0$, $\vec{v} \neq 0$ e se θ é o ângulo dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ então

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta$$



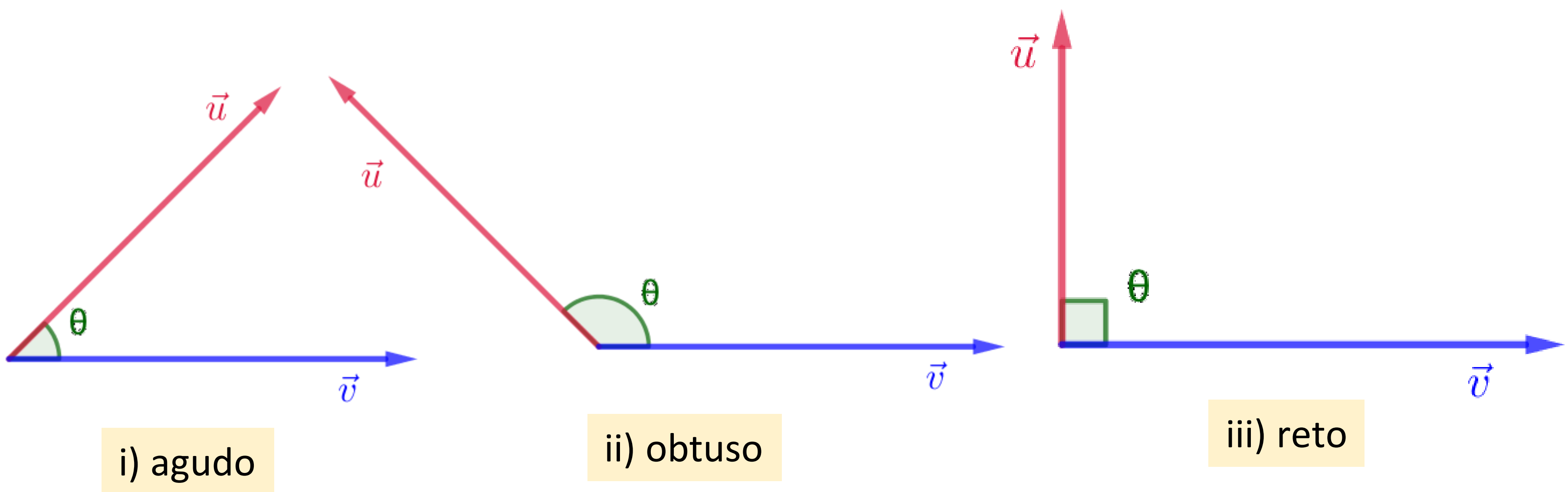
Ângulo de dois vetores

Observações

i) Se $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$, então $\cos\theta > 0$ e $0° \leq \theta < 90°$.

ii) Se $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$, então $\cos\theta < 0$ e $90° < \theta \leq 180°$.

iii) Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, então $\cos\theta = 0$ e $\theta = 90°$.

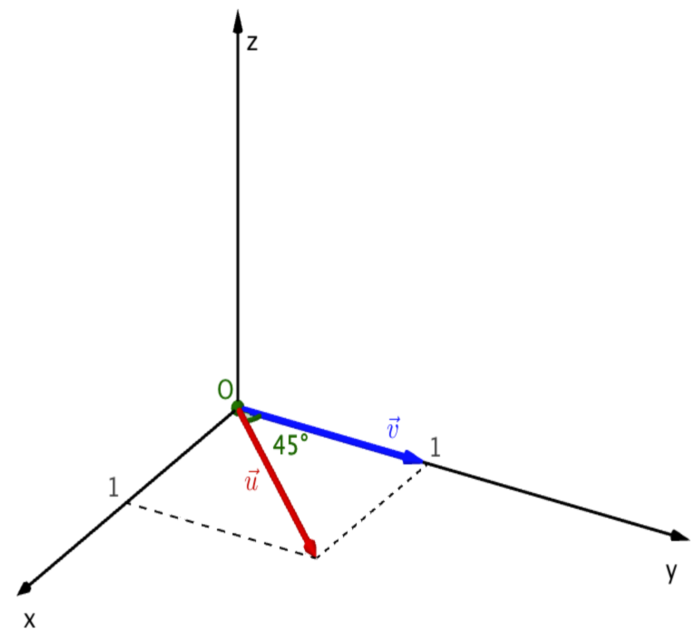


Exemplo

Sejam $\vec{u} = (1,1,0)$ e $\vec{v} = (0,1,0)$, observamos que pela figura abaixo que $\theta = 45°$.

a) Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$ usando as coordenadas de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

b) Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$ por $|\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta$.



<u>Resolução</u>

$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$

$|\vec{v}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1.0 + 1.1 + 0.0 = 1$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{2}.1.\frac{\sqrt{2}}{2} = .\frac{(\sqrt{2})^2}{2} = .\frac{2}{2} = 1$

Ângulo de dois vetores

Exemplo: Sendo $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ e $\theta = 120°$ o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, calcular:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$
b) $|\vec{u} + \vec{v}|$
c) $|\vec{u} - \vec{v}|$

Resolução

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ = 2.3.cos $120°$ = 2.3. $\frac{(-1)}{2}$ = -3

b) $|\vec{u} + \vec{v}|^2$= $|\vec{u}|^2$+2 $\vec{u} \cdot \vec{v}$ + $|\vec{v}|^2$ = 4+2.(-3)+9 = 7

$|\vec{u} + \vec{v}|$= $\sqrt{7}$

c) $|\vec{u} - \vec{v}|^2$= $|\vec{u}|^2$- 2 $\vec{u} \cdot \vec{v}$ + $|\vec{v}|^2$ = 4 - 2.(-3)+9 = 19

$|\vec{u} - \vec{v}|$= $\sqrt{19}$

Cálculo do ângulo de dois vetores

Da igualdade $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$, vem

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

	$30°$	$45°$	$60°$
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

A partir desta fórmula calculamos o ângulo θ entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos.

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right)$$ ou $$\theta = \text{arc cos}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right)$$

Exemplo: Calcular o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1,1,4)$ e $\vec{v} = (-1,2,2)$.

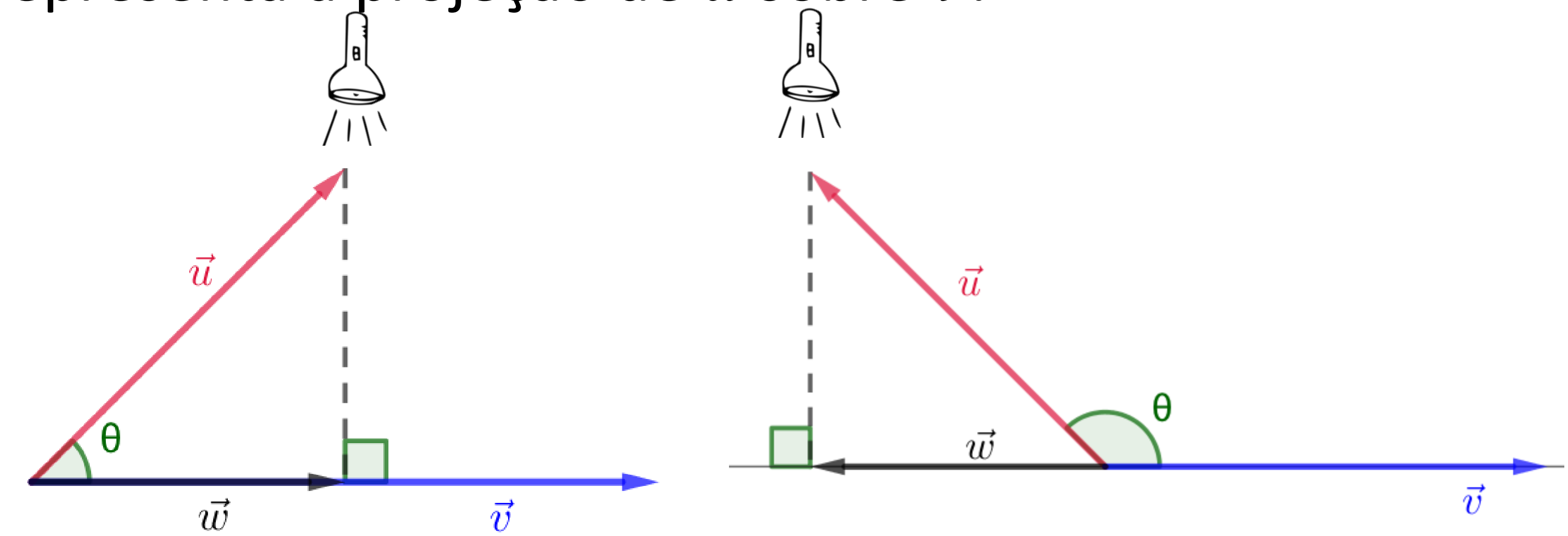
Resolução

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{(1,1,4)\cdot(-1,2,2)}{\sqrt{1^2+1^2+4^2}\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}} = \frac{9}{\sqrt{18}.3} = \frac{3}{3\sqrt{2}} == \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo, θ $=45°$

Projeção de um vetor

Sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, com $\vec{u} \neq 0$ e $\vec{v} \neq 0$ e θ o ângulo por eles formado. Desejamos calcular $\overrightarrow{w}$ que representa a projeção de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.



$$\overrightarrow{w} = proj._{\vec{v}}^{\vec{u}} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\right)\vec{v}$$

Exemplo

Determinar o vetor projeção de $\vec{u} = (2,3,4)$ sobre $\vec{v} = (1,-1,0)$.

Resolução

$\vec{u} \cdot \vec{v}$ $=$2.1 + 3.(-1) + 4.0 = -1

$\vec{v} \cdot \vec{v}$ $=$ 1.1 + (-1).(-1) + 0.0 = 2

$\vec{w} = proj._{\vec{v}}^{\vec{u}} = \left(\frac{-1}{2}\right)\vec{v}$ = $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$

Exercícios Propostos

Exercícios – Produto Escalar

1) Dados os vetores $\vec{u} = (1, a, -2a - 1)$, $\vec{v} = (a, a - 1, 1)$ e $\vec{w} = (a, -1, 1)$, determine o valor de a tal que $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$.

$R: a = 2$

2) Seja $A(1, 2, 3)$, $B(-6, -2, 3)$ e $C(1, 2, 1)$. Determine o versor do vetor $3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC}$.

$R: \left(\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right)$

3) Determine o valor de n para que $\vec{v} = \left(n, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$ seja unitário.

$R: \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$

4) Dados os pontos $A(3, m - 1, -4)$ e $B(8, 2m - 1, m)$. Determine o valor de m tal que $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{35}$.

$R: m = -3 \; ou \; m = -1$

Exercícios – Produto Escalar

5) Seja o triângulo de vértices $A(-1,-2,4)$, $B(-4,-2,0)$ e $C(3,-2,1)$. Determine o ângulo interno ao vértice B.

$R: 45°$

6) Determine o vetor $\vec{v}$ ortogonal a $\vec{u} = (2,-3,-12)$ e colinear a $\vec{w} = (-6,4,-2)$.

$R:\ \vec{v} = t(-6,4,-2),\ \ t \in \mathbb{R}$

7) Determine o vetor $\vec{v}$, sabendo que $|\vec{v}| = 5$, $\vec{v}$ é ortogonal ao eixo Oz, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 6$ e $\vec{w} = 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

$R: (4,3,0)\ ou\ (-4,3,0)$

Exercícios – Produto Escalar

8) Sejam α e β os ângulos diretores de $\vec{v}$ tais que $|\vec{v}| = 2$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ e $\cos\beta = -\frac{1}{4}$, determine $\vec{v}$.

$R{:}\ \vec{v} = \left(1, -\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{11}}{2}\right)$

9) Determine a projeção de $\vec{u} = (1, 2, -3)$ na direção de $\vec{v} = (2, 1, -2)$.

$R{:}\ \frac{10}{9}(2, 1, -2)$

10) Qual o comprimento do vetor projeção de $\vec{u} = (3, 5, 2)$ sobre o eixo dos x.

$R{:}\ 3$

Exercícios – Produto Escalar

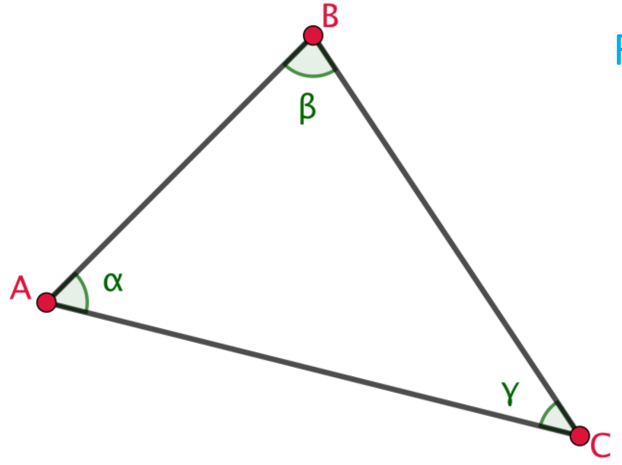
11) Dados os vetores $\vec{u} = (4, \alpha, -1)$ e $\vec{v} = (\alpha, 2,3)$ e os pontos $A(4, -1,2)$ e $B(3,2, -1)$, determinar o valor de α tal que $\vec{u} \cdot \left(\vec{v} + \overrightarrow{BA}\right) = 5$.

Rta: $\alpha \ = 7/3$

12) Sabendo que o vetor $\vec{v} = (2,1, -1)$ forma um ângulo de $60°$ com o vetor $\overrightarrow{AB}$, definido pelos pontos $A(3,1, -2)$ e $B(4,0, m)$, calcular m.

Rta: $m = -4$

13) Determinar os ângulos internos ao triângulo ABC, sendo $A(3, -3,3)$, $B(2, -1,2)$ e $C(1,0,2)$.



Rta: $\alpha = 10°\ 53'$
$\beta = 150°$
$\gamma = 19°\ 07'$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem ser encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/

O GAMA possui monitorias de:

- Pré-cálculo e Matemática Elementar (e disciplinas equivalentes)
  - ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
    - Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino

Módulo de Geometria Analítica

Aula 3

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Produto vetorial

<u>Considerações</u>

1. O cálculo do produto vetorial resulta em um vetor.
2. Lembre que o produto escalar resulta em um número.
3. Para a realização do cálculo, será necessário o uso de determinantes.

Produto vetorial

Definição

Dados dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, tomados nesta ordem, chama-se produto vetorial dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, representado por $\vec{u} \times \vec{v}$ ao vetor

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Observação

O símbolo $|\ \ |$ não é um determinante, pois a primeira linha contém vetores ao invés de escalares.

Entretanto, vamos usar essa notação com o intuito de facilitar a memorização proporcionada no cálculo do produto vetorial.

Produto vetorial

Exemplos:

1) Calcular $\vec{u} \times \vec{v}$ para $\vec{u} = 5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} + \vec{k}$.

2) Calcular $\vec{v} \times \vec{u}$

Resolução

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (4, -2, -4)$$

$$\vec{v} \times \vec{u} = (-4,2,4)$$

Produto vetorial

Observações

i. $\vec{v} \times \vec{u} = -(\vec{u} \times \vec{v})$, isto é, os vetores $\vec{v} \times \vec{u}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$ são opostos. Logo, o produto vetorial não é comutativo.

ii. $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ se, e somente se, $\vec{u} // \vec{v}$

a. $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$ (determinantes com linhas iguais)

b. $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0}$ (determinantes com uma linha de zeros)

Exemplos

a) $\vec{u} \times (3\vec{u})$

b) $(3\vec{u}) \times (-7\vec{u})$

c) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{v} \times \vec{u})$

d) $(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{v} - \vec{u})$

e) $(2\vec{u} + 3\vec{v}) \times (6\vec{u} + 9\vec{v})$

f) $(5\vec{u}) \times \vec{0}$

Características do vetor $\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}}$

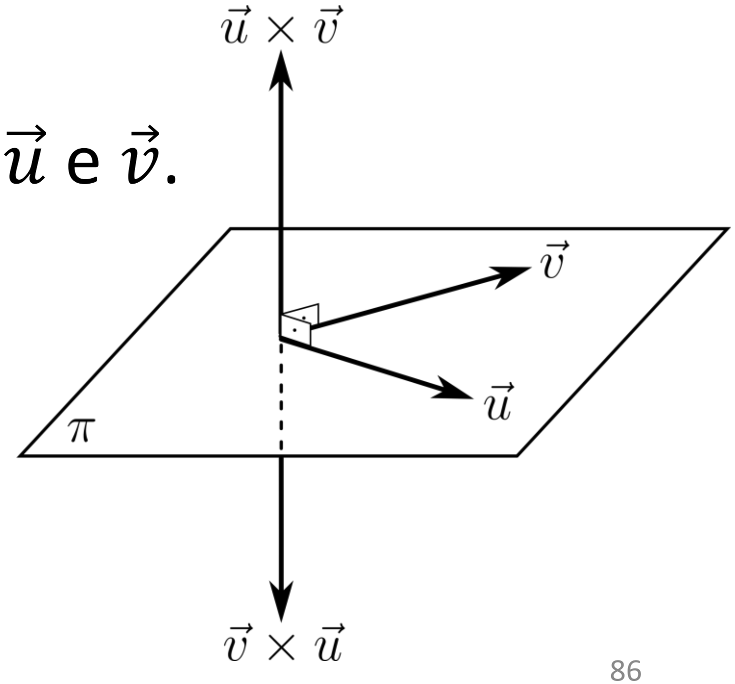
Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$.

Direção de $\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}}$

O vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Exemplo

Mostre que $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.



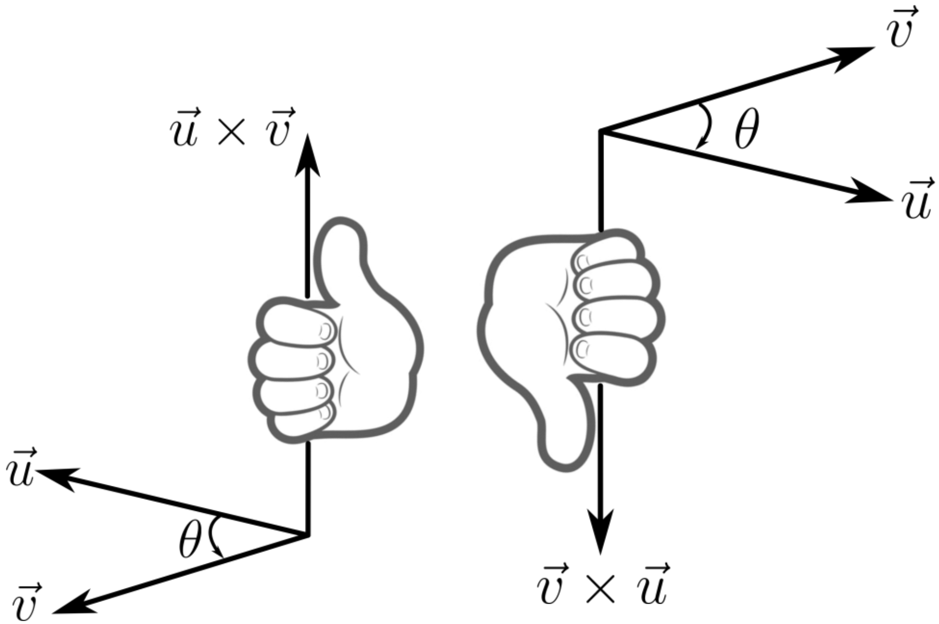
Características do vetor $\vec{u} \times \vec{v}$

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$.

Sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$

O sentido do vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ poderá ser determinado pela "regra da mão direita".

Exemplo: Mostre que $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ e $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$.



Características do vetor $\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}}$

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$.

Módulo de $\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}}$

Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ e se θ é o ângulo dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\mathrm{sen}\ \theta$$

Produto vetorial

Propriedades

i. $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$, qualquer que seja $\vec{u}$

ii. $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

iii. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

iv. $(\mathrm{m}\vec{u}) \times \vec{v} = m(\vec{u} \times \vec{v})$

v. $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ se, e somente se, um dos vetores é nulo ou se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares.

vi. $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal simultaneamente aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

vii. Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$ tem as direções das arestas de um triedro $Oxyz$ direto.

Produto vetorial

Propriedades

i. $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$

ii. Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ e se θ é o ângulo dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$

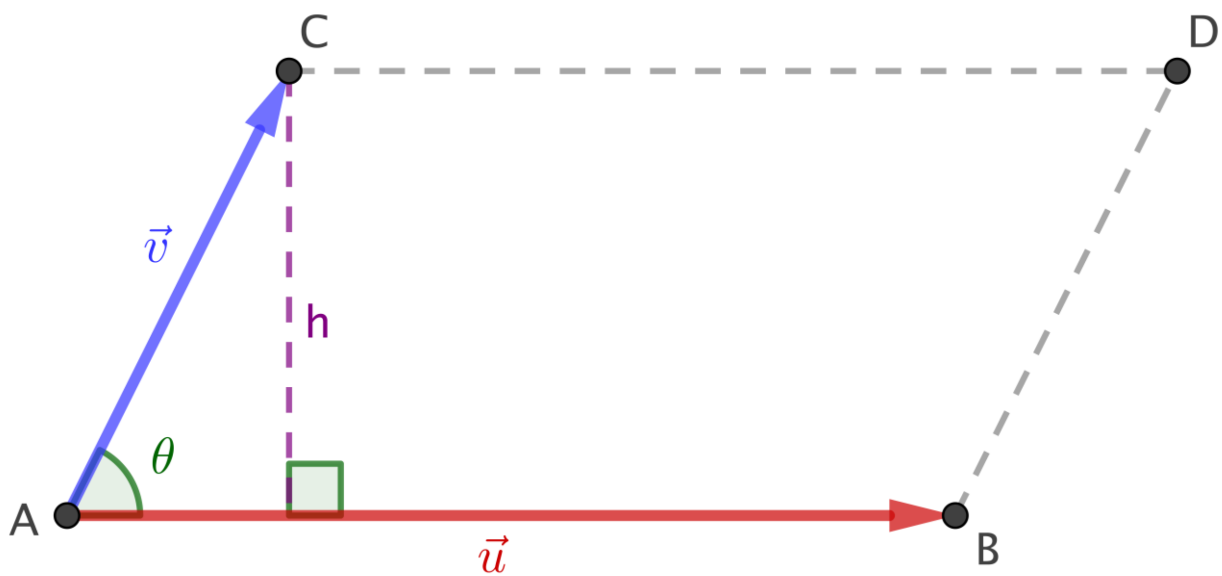
$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\text{sen}\,\theta$.

iii. $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$, ou seja, o produto vetorial não é associativo.

Interpretação geométrica

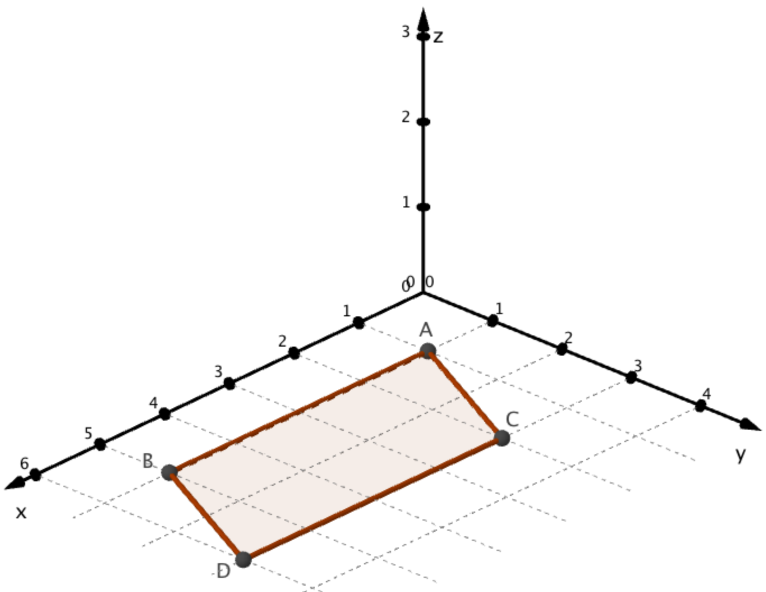
Geometricamente, o módulo do produto vetorial dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ ($\vec{u} \times \vec{v}$) mede a área do paralelogramo $ABCD$ determinado pelos vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

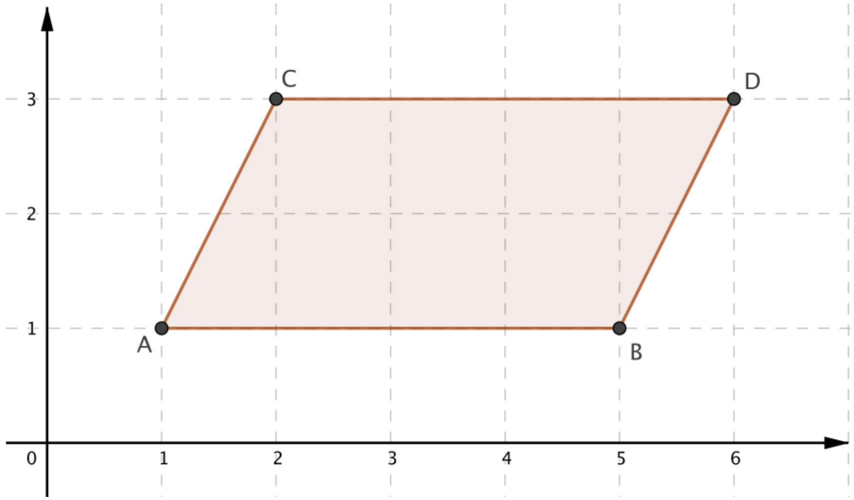
$$A = |\vec{u} \times \vec{v}|$$



Interpretação geométrica

<u>Exemplo</u>: Seja o paralelogramo $ABCD$ e sendo $A(1{,}1{,}0)$, $B(5{,}1{,}0)$, $C(2{,}3{,}0)$ e $D(6{,}3{,}0)$, determine a sua área.





Produto misto

Considerações

1. Lembre que o cálculo do produto vetorial resulta em um vetor.
2. Lembre que o cálculo do produto escalar resulta em um número.
3. O cálculo do produto misto resulta em um número.

Produto misto

Definição

Dados os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$, tomados nesta ordem, chama-se produto misto dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, ao número real $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$.

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Observação: Também podemos indicar o produto misto por $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Produto misto

Exemplo:

Calcular o produto misto dos vetores $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$+5$\vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{w} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

Resolução:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 27$$

Produto misto

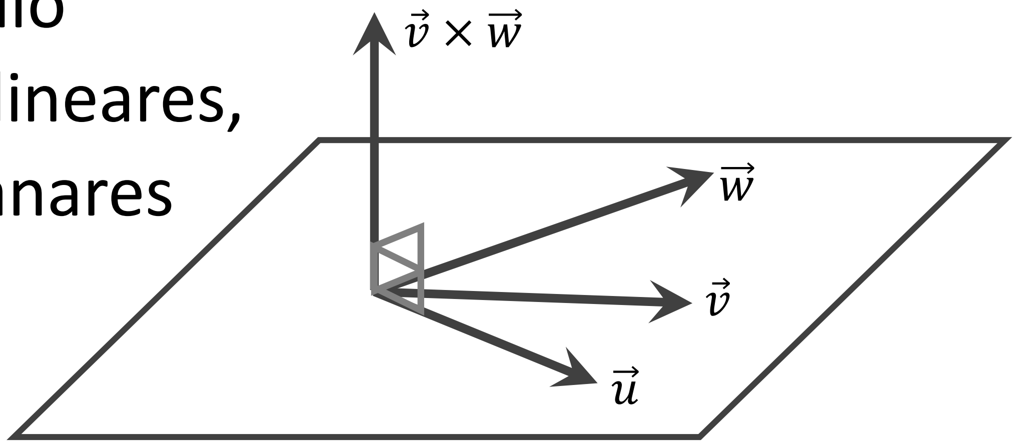
Propriedades

i. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$, se

   a. um dos vetores é nulo

   b. se dois deles são colineares,

   c. Ou se os 3 são coplanares



a) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$

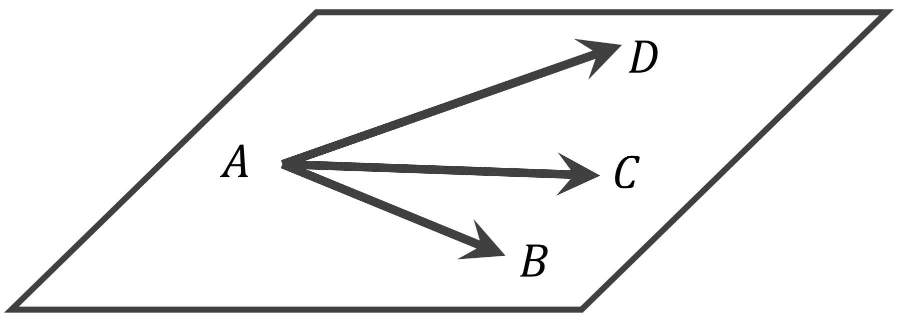
b) se $\vec{u} \neq 0$, $\vec{v} \neq 0$, mas $\vec{u} // \vec{v}$, então $\vec{u} = k\vec{v} = (kx_2, ky_2, kz_2)$

Logo, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (k\vec{v}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} kx_2 & ky_2 & kz_2 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$

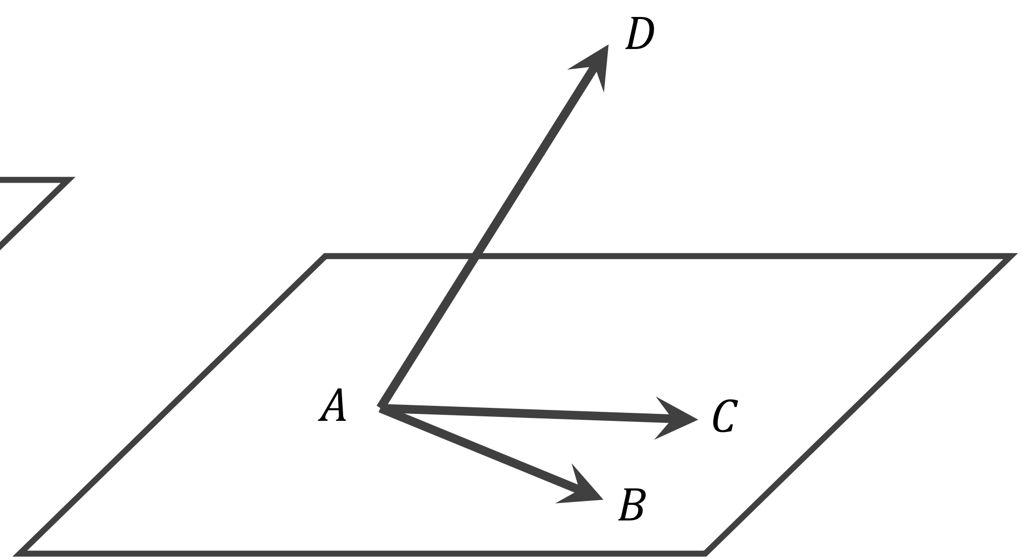
Produto misto

Observação

Podemos dizer que 4 pontos A, B, C e D pertencem a um mesmo plano se os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ forem coplanares.



Três vetores coplanares
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$



Três vetores não coplanares

Produto misto

Propriedades

i. O produto misto independe da ordem circular dos vetores, isto é:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$$

Por exemplo: $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = 27$

ii. O produto misto $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ muda de sinal ao trocarmos a posição de dois vetores.

Produto misto

Propriedades

Por exemplo

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 27$

$(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = -27$

$(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}) = -27$

$(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) = -27$

Resumo

a) uma permutação: troca de sinal

b) duas permutações: não altera o valor

iii. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + \vec{r}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{u}, \vec{v}, \vec{r})$

iv. $(\vec{u}, \vec{v}, m\vec{w}) = (\vec{u}, m\vec{v}, \vec{w}) = (m\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = m(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

Produto misto

Exemplo: Verificar se são coplanares os vetores $\vec{u} = (3,-1,4)$, $\vec{v} = (1,0,-1)$ e $\vec{w} = (2,-1,0)$.

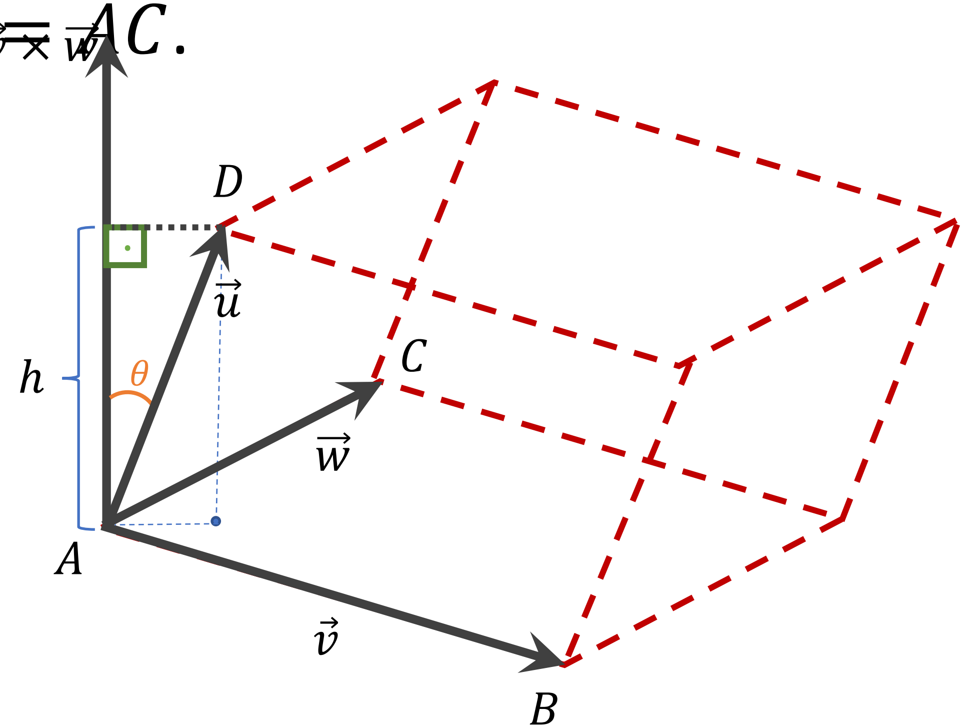
Resolução:

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

Interpretação geométrica

Geometricamente, o módulo do produto misto $|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$ é igual, em módulo, ao volume do paralelepípedo de arestas determinadas pelos vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$.

$$V = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$$



Interpretação geométrica

Exemplo: Dados os vetores $\vec{u} = (4,5,0)$, $\vec{v} = (3,-2,1)$ e $\vec{w} = (1,1,-1)$, determine o volume do paralelepípedo de arestas determinadas pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Resolução:

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 24$$

$$V = |(\vec{u},\vec{v},\vec{w})| = |24| = 24\, u.v.$$

Exercícios Propostos

Exercícios – Produto Vetorial

1) Determine um vetor unitário simultaneamente ortogonal a $\vec{u} = (2, -6, 3)$ e $\vec{v} = (4, 3, 1)$.

$$R: \pm\left(\frac{3}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{6}{7}\right)$$

2) Determine o valor de m para que $\vec{w} = (1, 2, m)$ seja ortogonal a $\vec{u} = (2, -1, 0)$ e a $\vec{v} = (1, -3, -1)$.

$$R: m = -5$$

3) Seja $\vec{u} = \left(a, 5b, -\frac{c}{2}\right)$ e $\vec{v} = (-3a, x, y)$. Determine o valor de x e y para que $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

$$R: x = -15b \ e \ y = \frac{3}{2}c$$

Exercícios – Produto Vetorial

4) Sabendo que $|\vec{u} \times \vec{v}| = 3\sqrt{3}$, $|\vec{u}| = 3$ e o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $60°$. Calcule $|\vec{v}|$.

$R: |\vec{v}| = 2$

5) Calcule a área do paralelogramo definido por $\vec{u} = (3, 1, 2)$ e $\vec{v} = (4, -1, 0)$.

$R: \sqrt{117}\, u.a.$

6) Calcule a área do triângulo de vértices

a) $A(-1, 0, 2)$, $B(-4, 1, 1)$ e $C(0, 1, 3)$

$R: A = \sqrt{6}\, u.a.$

b) $A(2, 3, -1)$, $B(3, 1, 2)$ e $C(-1, 0, 2)$

$R: A = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ u.a.

Exercícios – Produto Vetorial

7) Calcule a área do paralelogramo que tem um vértice em $A(3,2,1)$ e uma diagonal de extremidades $B(1,1,-1)$ e $C(0,1,2)$.

$R: A = \sqrt{74}\, u.a.$

8) Seja $A(0,1,-1)$, $B(-2,0,1)$ e $C(1,-2,0)$ vértices de um triângulo. Calcule a medida da altura relativa ao lado BC.

$R: \dfrac{3\sqrt{35}}{7}\, u.m.$

9) Sejam os vetores $\vec{u} = (1,-1,-4)$ e $\vec{v} = (3,2,-2)$, determine um vetor que seja:

a) ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$;
b) ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, mas que seja unitário;
c) ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, mas que tenha módulo igual a 4;
d) ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, mas que tenha cota igual a 7.

Respostas

a) $(10,-10,5)$
b) $\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$
c) $\left(\frac{8}{3},-\frac{8}{3},\frac{4}{3}\right)$
d) $(14,-14,7)$

Exercícios – Produto Misto

1) Verificar se são coplanares os seguintes vetores:

$$\vec{u} = (3, -1, 4),\ \vec{v} = (2, -1, 0) \text{ e } \vec{w} = (1, 0, -1).$$

Rta.: não, pois$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 5 \neq 0$

2) Qual deve ser o valor de m para que os vetores vetores: $\vec{a} = (m, 2, -1)$, $\vec{b} = (1, -1, 3)$ e $\vec{c} = (0, -2, 4)$ sejam coplanares.

Rta.: $m = 3$

3) Verificar se os pontos $A(1,2,4)$, $B(-1,0,-2)$, $C(0,2,2)$ e $D(-2,1,-3)$ estão no mesmo plano.

Rta.: sim, pois$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = 0$

Exercícios – Produto Misto

4) Qual deve ser o valor de m para que o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u} = (3, m, -2)$, $\vec{v} = (1, -1{,}0)$ e $\vec{w} = (2, -1{,}2)$ seja 16 u.v.

Rta.: $m = -12$ ou $m = 4$

5) Dados os vetores $\vec{u} = (3, -1{,}1)$, $\vec{v} = (1{,}2{,}2)$ e $\vec{w} = (2{,}0, -3)$, determine:

a) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ — Rta.: -29

b) $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$ — Rta.: -29

6) Sabendo que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -5$, calcule:

a) $(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$ — Rta.: 5

b) $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ — Rta.: 5

c) $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$ — Rta.: -5

d) $\vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u})$ — Rta.: -5

Exercícios – Produto Misto

7) Verifique se os vetores $\vec{u} = (1, -1,2)$, $\vec{v} = (2,2,1)$ e $\vec{w} = (-2,0, -4)$ são coplanares.

Rta.: não, pois $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -6 \neq 0$

8) Um paralelepípedo é formado pelos vetores $\vec{u} = (3, -1,4)$, $\vec{v} = (2,0,1)$ e $\vec{w} = (-2,1,5)$, calcule:

a) O seu volume. Rta.: 17 u.v.

b) A altura relativa à base definida pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Rta.: $\frac{17}{\sqrt{30}}$ u.c.

9) Verifique se $\vec{u} = (3, -1, 2)$, $\vec{v} = (1, 2, 1)$ e $\vec{w} = (-2, 3, 4)$ são coplanares.

$R: não$

10) Verifique se os pontos $A(1, 1, 1)$, $B(-2, -1, -3)$, $\mathrm{C}(0, 2, -2)$ e $\mathrm{D}(-1, 0, -2)$ são coplanares.

$R: sim$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem ser encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/

O GAMA possui monitorias de:

- Pré-cálculo e Matemática Elementar (e disciplinas equivalentes)
- ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
- Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino

Módulo de Geometria Analítica

Aula 4

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

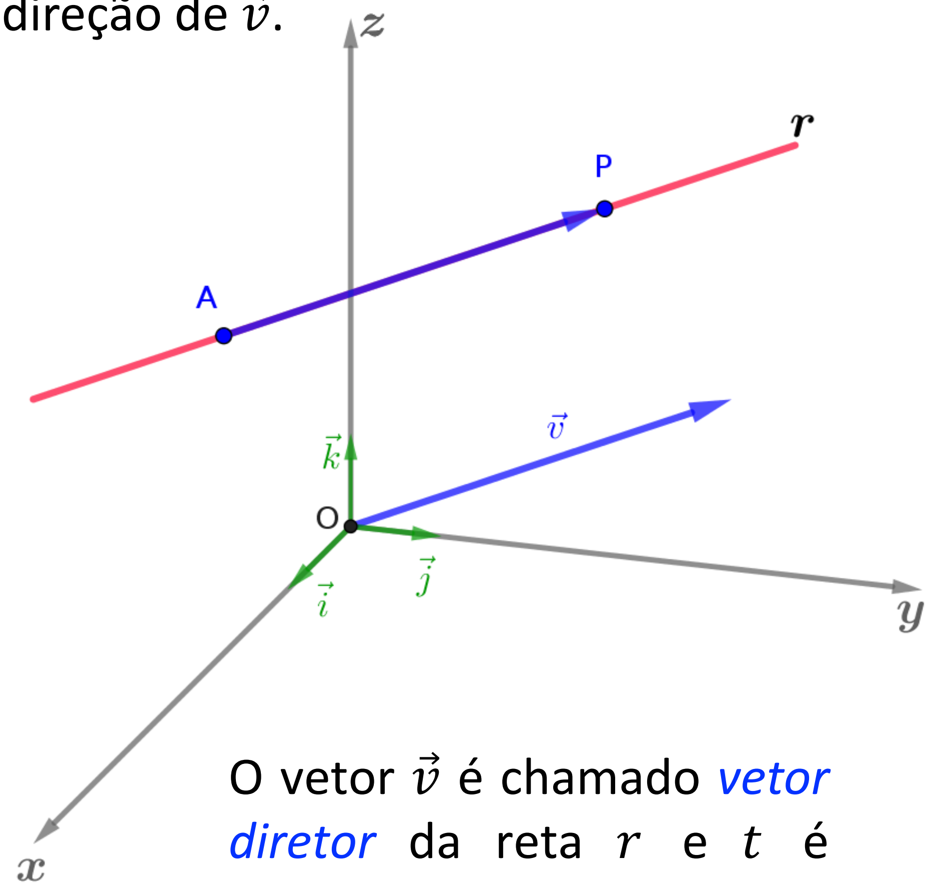
Equação vetorial da reta

Consideremos um ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ e um vetor não nulo $\vec{v} = (a, b, c)$. Só existe uma reta que passa por A e tem a direção de $\vec{v}$.

Um ponto $P(x, y, z)$ pertence a r, se e somente se, o vetor $\overrightarrow{AP}$ é paralelo a $\vec{v}$, isto é, $\overrightarrow{AP} = t \cdot \vec{v}$ para algum $t \in \mathbb{R}$. Logo, a ***equação vetorial da reta r*** é dada por

$$r\colon\ (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \mathrm{t}(a, b, c)$$

ou $\quad r\colon\ P = A + t\vec{v}$



O vetor $\vec{v}$ é chamado *vetor diretor* da reta r e t é denominado *parâmetro*.

Exemplo

Exemplo: Determine a equação vetorial da reta r que passa pelo ponto $A(3,0,-5)$ e tem a mesma direção de $\vec{v} = (2,2,-1)$.

Resolução

Fixando $\mathrm{P}(x,y,z)$, um ponto da reta. Sabemos que

$$\mathrm{r}\colon\ P = A + t\vec{v}$$

ou seja,

$$\mathrm{r}\colon\ (x,y,z) = (3,0,-5) + \mathrm{t}(2,2,-1), t \in \mathbb{R}$$

Equações paramétricas da reta

Seja $P(x, y, z)$ um ponto genérico e $A(x_1, y_1, z_1)$ um ponto dado da reta r e um vetor não-nulo $\vec{v} = (a, b, c)$ de mesma direção de r, então da equação vetorial da reta temos

$$P = A + t\vec{v} = (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c) \quad t \in \mathbb{R}$$

$$= (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + (at, bt, ct)$$

$$= (x, y, z) = (x_1 + at, y_1 + bt, z_1 + ct)$$

Logo, as ***equações paramétricas da reta r*** são dadas por

$$r: \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt, \\ z = z_1 + ct \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Exemplo

Determine as equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto $A(3, -1, 2)$ e é paralela a $\vec{v} = (-3, -2, 1)$.

<u>Resolução</u>

De

$$r: \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt\,, \\ z = z_1 + ct \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

segue que

$$r: \begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = -1 - 2t\,, \\ z = 2 + t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Equações Simétricas da reta

Seja $A(x_1, y_1\,, z_1\,)$ um ponto e um vetor não-nulo $\vec{v} = (a, b, c)$.
Das equações paramétricas da reta,

$$r: \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt\,, \\ z = z_1 + ct \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

temos que

$$t = \frac{x - x_1}{a} \qquad t = \frac{y - y_1}{b} \qquad t = \frac{z - z_1}{c}$$

Logo, as ***equações simétricas da reta r*** é dado por

$$r: \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

Exemplo

Determine as equações simétricas da reta r que passa pelo ponto $A(3,0,-5)$ e tem a mesma direção de $\vec{v} = (2,2,-1)$.

Resolução

De

$$r: \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

segue que

$$r: \frac{x - 3}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z + 5}{-1}$$

Reta definida por dois pontos

A reta definida pelos pontos $A(x_1, y_1\ , z_1\ )$ e $B(x_2, y_2\ , z_2\ )$ é a reta que passa pelo ponto A (ou *B*) e tem a direção do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

Exemplo: Determine as equações paramétricas e simétricas da reta r que passa pelos pontos $A(1, -2, -3)$ e $\mathrm{B}(3, 1, -4)$.

<u>Resolução</u>

Equações reduzidas da reta

Seja $A(x_1, y_1, z_1)$ um ponto e um vetor não nulo $\vec{v} = (a, b, c)$. Das equações simétricas da reta,

$$r: \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

Isolando y e z em função de x, obtemos as ***equações reduzidas da reta r***, que é dada por

$$r: \begin{cases} y = mx + n \\ z = px + q \end{cases}$$

onde,

$$m = \frac{b}{a}, \qquad n = -\frac{b}{a}x_1 + y_1,$$

$$p = \frac{c}{a} \qquad e \qquad q = -\frac{c}{a}x_1 + z_1$$

Exemplo

Determine as equações reduzidas da reta r que passa pelos pontos $A(2,1,-3)$ e $B(4,0,-2)$.

Resolução

Seja $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (2,-1,1)$. As equações simétricas da reta r é dada por

$$r: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{1}$$

Isolando y e z em função de x, as equações reduzidas da reta r são

$$r: \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 2 \\ z = \frac{1}{2}x - 4 \end{cases}$$

Lembrete

$$r: \begin{cases} y = mx + n \\ z = px + q \end{cases}$$

$$m = \frac{b}{a}, n = -\frac{b}{a}x_1 + y_1,$$

$$p = \frac{c}{a} \text{ e } q = -\frac{c}{a}x_1 + z_1$$

Retas paralelas aos planos

Vimos que nas equações paramétricas

$$r: \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt\,, \\ z = z_1 + ct \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

E nas equações simétricas

$$r: \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

São representações de uma reta r determinada por um ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ e por um vetor diretor $\vec{v} = (a, b, c)$ *não nulo*.

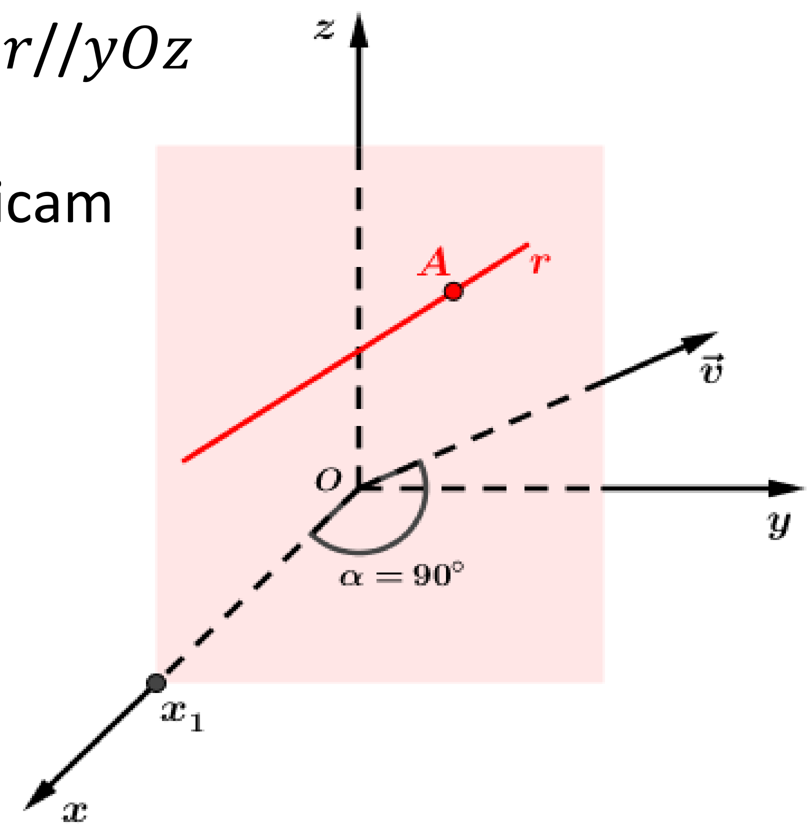
Retas paralelas aos planos

Quando uma das componentes do vetor $\vec{v}$ é nula, temos que o vetor $\vec{v}$ é ortogonal a um dos eixos coordenados e a reta r é paralela ao plano dos outros eixos, ou seja,

a) Se $a = 0$, $\vec{v} = (0, b, c) \perp Ox \therefore r//yOz$

Temos que as equações da reta r ficam

$$r: \begin{cases} x = x_1 \\ \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c} \end{cases}$$



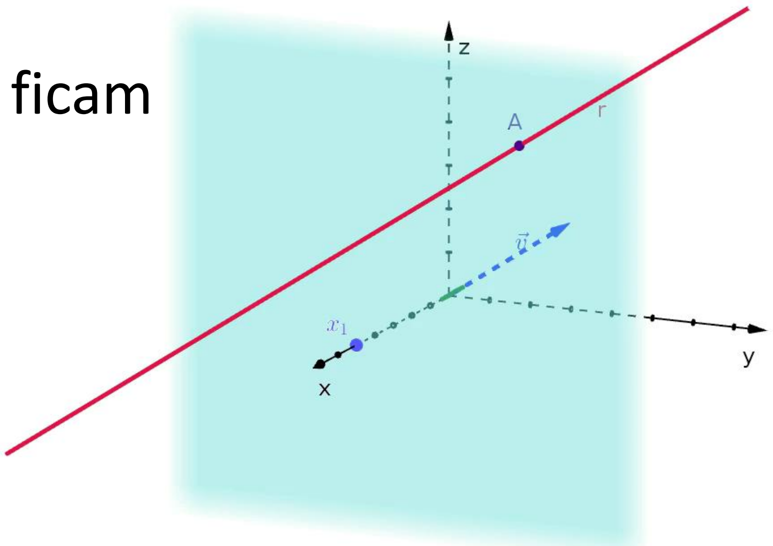
Retas paralelas aos planos

Quando uma das componentes do vetor $\vec{v}$ é nula, temos que o vetor $\vec{v}$ é ortogonal a um dos eixos coordenados e a reta r é paralela ao plano dos outros eixos, ou seja,

a) Se $a = 0$, $\vec{v} = (0, b, c) \perp Ox \therefore r // yOz$

Temos que as equações da reta r ficam

$$r: \begin{cases} x = x_1 \\ \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c} \end{cases}$$

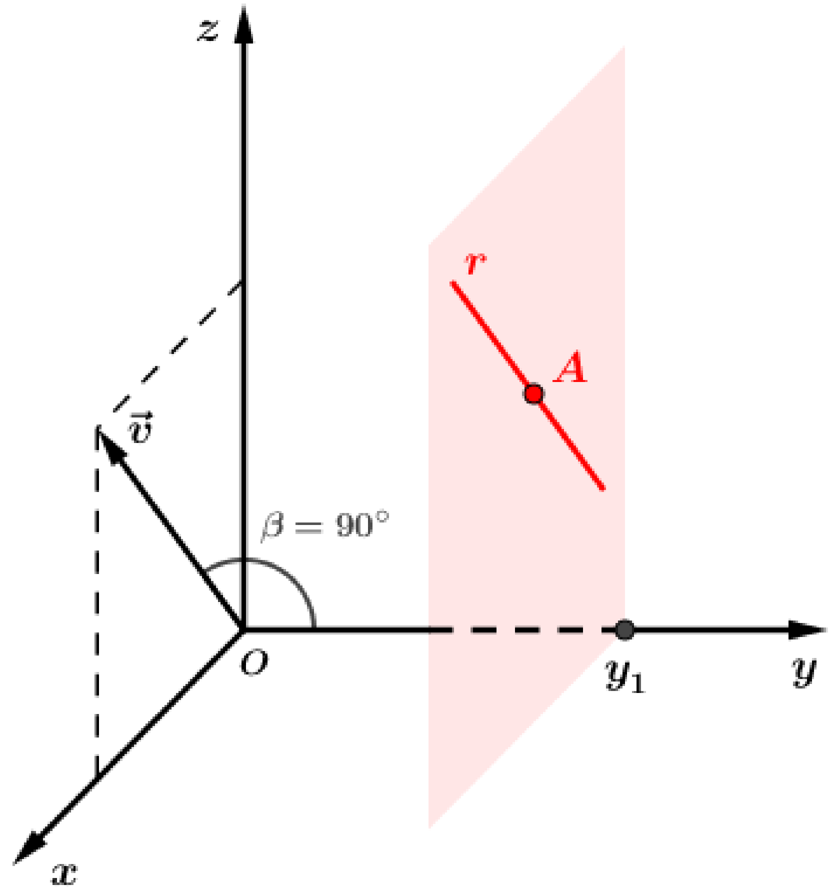


Retas paralelas aos planos

b) Se $\color{magenta}{\mathrm{b} = 0}$, $\vec{v} = (a, 0, c) \perp Oy \therefore$
$r // xOz$

Temos que as equações da reta r ficam

$$r\colon \begin{cases} y = y_1 \\ \dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{z - z_1}{c} \end{cases}$$

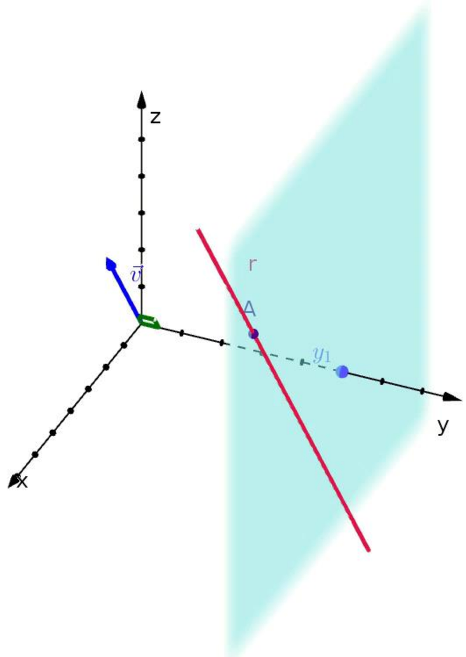


Retas paralelas aos planos

b) Se $\mathrm{b} = 0$, $\vec{v} = (a, 0, c) \perp Oy \therefore r // xOz$

Temos que as equações da reta r ficam

$$r: \begin{cases} y = y_1 \\ \dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{z - z_1}{c} \end{cases}$$

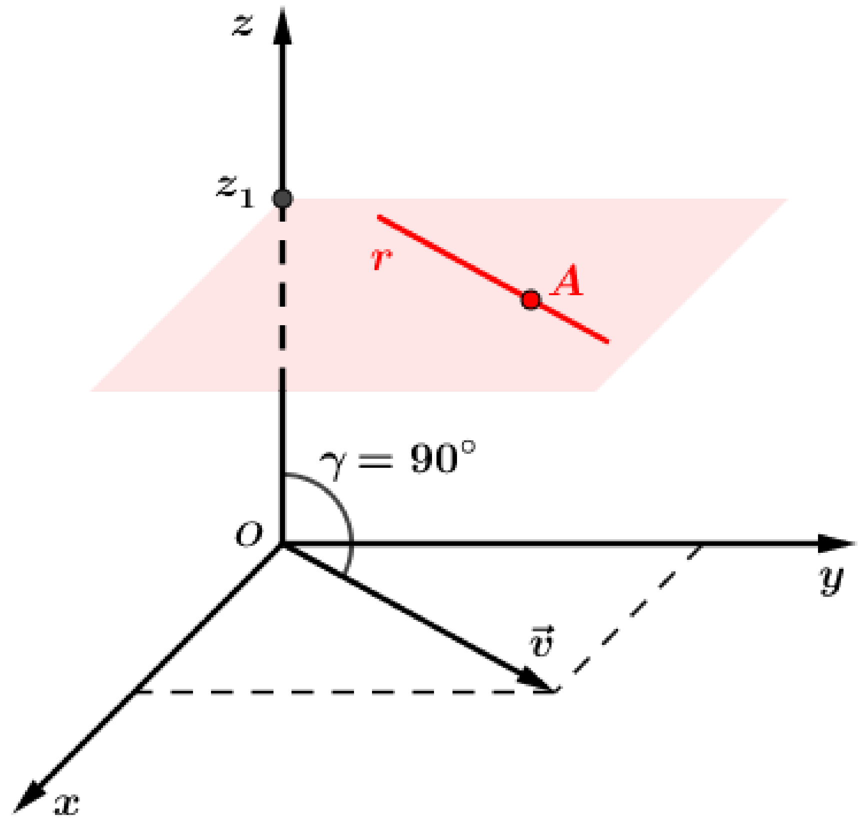


Retas paralelas aos planos

c) Se $c = 0$, $\vec{v} = (a, b, 0) \perp Oz \therefore r // xOy$

Temos que as equações da reta r ficam

$$r: \begin{cases} z = z_1 \\ \dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} \end{cases}$$

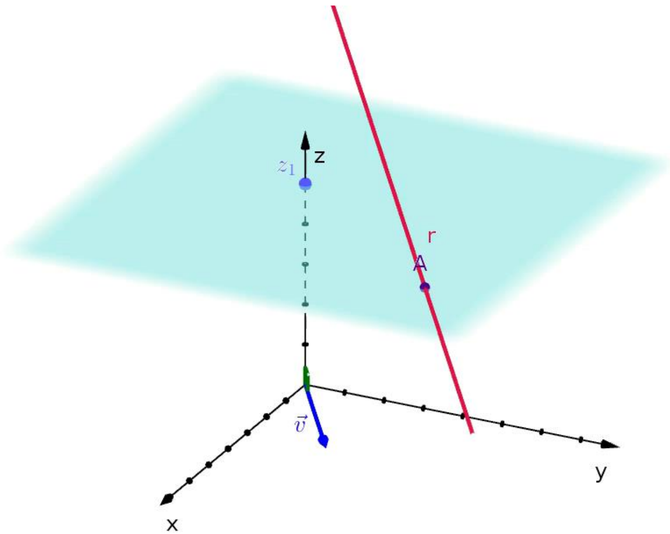


Retas paralelas aos planos

c) Se $c = 0, \vec{v} = (a, b, 0) \perp Oz \therefore r // xOy$

Temos que as equações da reta r ficam

$$r: \begin{cases} z = z_1 \\ \dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} \end{cases}$$



Retas paralelas aos eixos

Quando duas das componentes do vetor $\vec{v}$ é nula, temos que o vetor $\vec{v}$ tem a mesma direção de um dos vetores da base canônica, $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ ou $\vec{k} = (0,0,1)$. Logo a reta r é paralela ao eixo Ox, Oy ou Oz, ou seja,

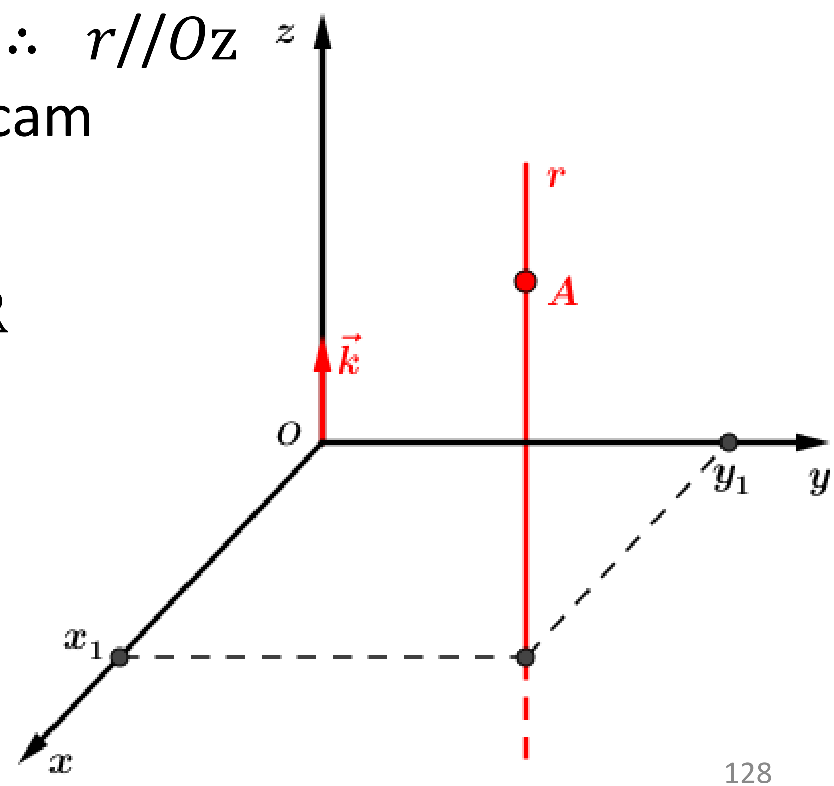
a) Se $a = b = 0$, $\vec{v} = (0,0,c)//\vec{k} \quad \therefore \quad r//Oz$

Temos que as equações da reta r ficam

$$r: \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \\ z = z_1 + ct \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

ou

$$r: \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \end{cases}$$



Retas paralelas aos eixos

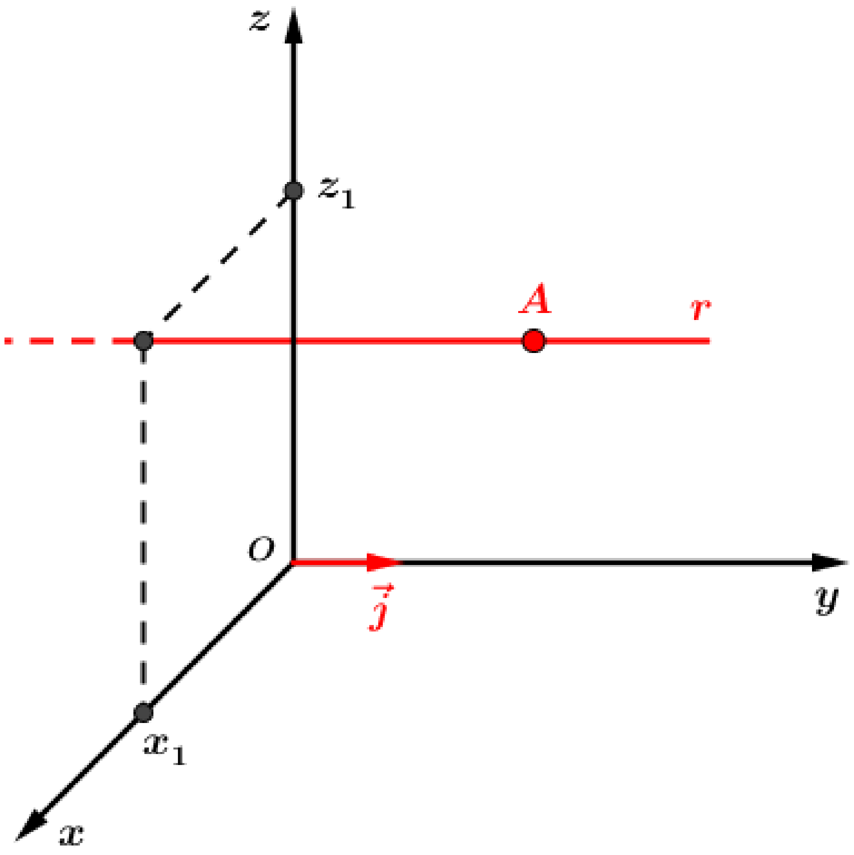
b) Se $a = c = 0$, $\vec{v} = (0, b, 0)//\vec{j} \;\therefore\; r//Oy$

Temos que as equações da reta r ficam

$$r: \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

ou

$$r: \begin{cases} x = x_1 \\ z = z_1 \end{cases}$$



Retas paralelas aos eixos

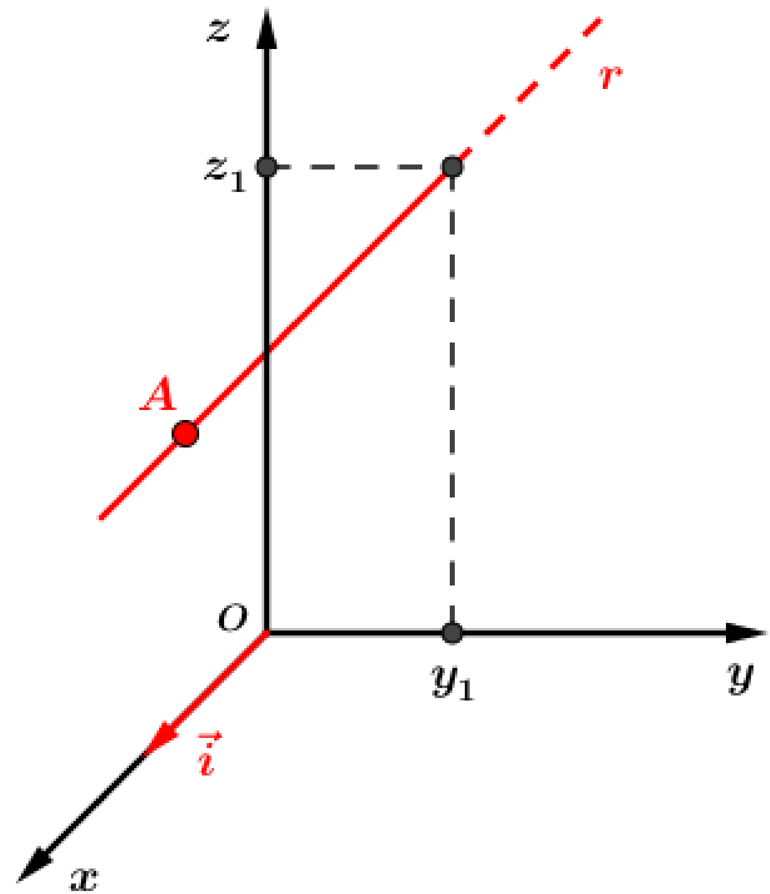
c) Se $b = c = 0$, $\vec{v} = (a, 0, 0) // \vec{i} \quad \therefore \quad r // Ox$

Temos que as equações da reta r ficar

$$r: \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 \\ z = z_1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

ou

$$r: \begin{cases} y = y_1 \\ z = z_1 \end{cases}$$



Exemplo

Determine as equações da reta r que passa pelo ponto $A(-2, 3, -2)$ e tem a direção de $\vec{v} = (3, 0, 2)$.

Resolução

Visto que a segunda coordenada do vetor $\vec{v}$ é zero, $b = 0$, temos que a reta r é paralela ao plano xOz e suas equações são

$$r: \begin{cases} y = 3 \\ \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{z+2}{2} \end{cases}$$

Exemplo

Determine as equações da reta r que passa pelo ponto $A(-2, 3, -2)$ e tem a direção de $\vec{v} = (2, 0, 0)$.

Resolução

Visto que a segunda e a terceira coordenada do vetor $\vec{v}$ é zero, $b = c = 0$, temos que a reta r é paralela ao plano Ox e suas equações são

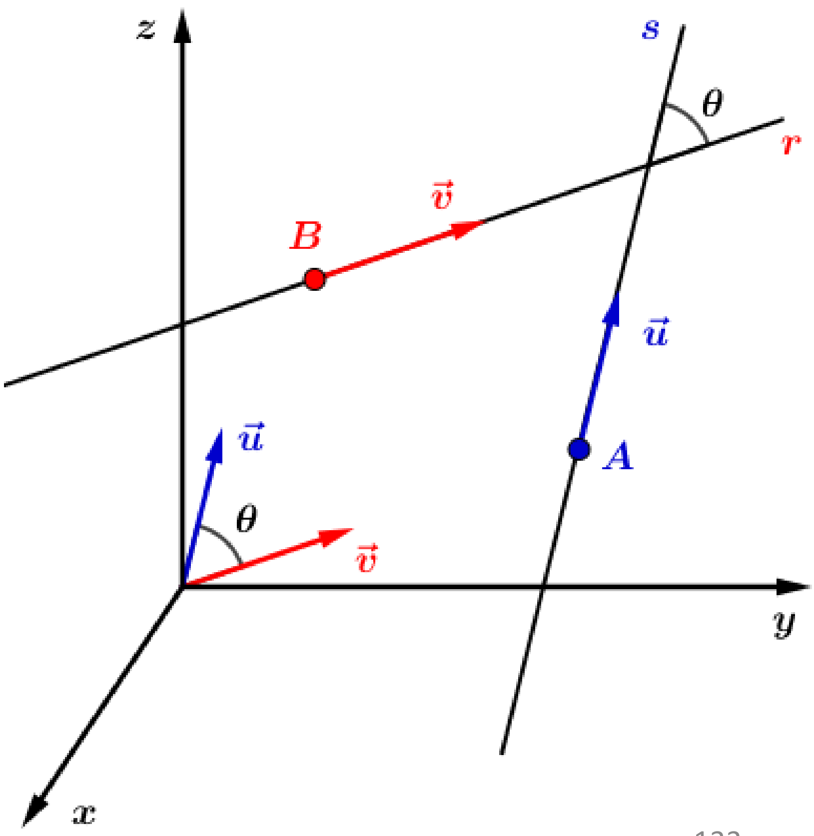
$$r: \begin{cases} y = 3 \\ z = -2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad r: \begin{cases} \frac{x+2}{2} \\ y = 3 \\ z = -2 \end{cases}$$

Ângulo de duas retas

Sejam as retas r, que passa pelo ponto $B(x_1, y_1, z_1)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = (a_1, b_1, c_1)$ e s, que passa pelo ponto $\mathrm{A}(x_2, y_2, z_2)$ e tem a direção de $\vec{u} = (a_2, b_2, c_2)$.

O ***ângulo de duas retas*** r e s é o **menor** ângulo de um vetor diretor de r e de um vetor diretor de s. Sendo θ este ângulo, temos

$$\cos\theta = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{u}|}{|\vec{v}||\vec{u}|}, \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$



Exemplo

Calcule o ângulo entre as seguintes retas

$$r: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = -1 - 2t \end{cases}, \quad \text{e} \quad s: \frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$$

$t \in \mathbb{R}$

<u>Resolução</u>

Seja $\vec{v} = (1, 1, -2)$ vetor diretor da reta r e $\vec{u} = (-2, 1, 1)$ vetor diretor de s.

Temos que

$$\cos\theta = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{u}|}{|\vec{v}||\vec{u}|} = \frac{|(1,1,-2) \cdot (-2,1,1)|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + (1)^2}} =$$

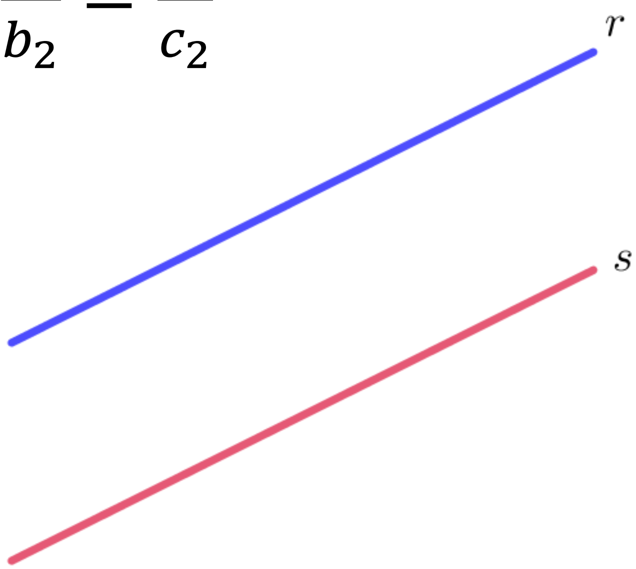
$$= \frac{|-2 + 1 - 2|}{\sqrt{1+1+4} \cdot \sqrt{4+1+1}} = \frac{|-3|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Portanto, $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60°$

Condição de paralelismo de duas retas

Sejam r e s duas retas que tem a mesma direção de $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$, respectivamente. A condição de paralelismo das retas r e s duas é

$$\vec{u} = m\vec{v} \quad \text{ou} \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$



Exemplo

Seja r a reta que passa por $A(-3,4,2)$ e $\mathrm{B}(5,-2,4)$ e a reta s que passa por $\mathrm{C}(-1,2,-3)$ e $\mathrm{D}(-5,5,-4)$. Verifique que r e s são paralelas.

<u>Resolução</u>

A direção de r é dada por $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (8,-6,2)$.

A direção de s é dada por $\vec{v} = \overrightarrow{CD} = (-4,3,-1)$.

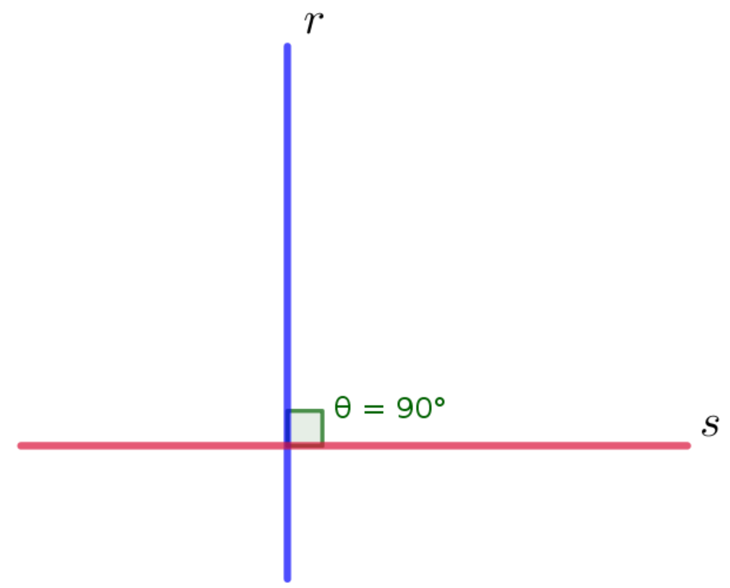
Assim, pela condição de paralelismo, temos

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{8}{-4} = \frac{-6}{3} = \frac{2}{-1}$$

Condição de ortogonalidade de duas retas

Sejam r e s duas retas que tem a mesma direção de $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$, respectivamente. A condição de ortogonalidade das retas r e s é a mesma dos seus vetores diretores, ou seja,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$



Exemplo

Verifique se as retas r e s dadas são ortogonais.

$$r: \begin{cases} y = 3 \\ \dfrac{x-3}{8} = \dfrac{z+1}{-6} \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \frac{x}{3} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-3}{4}$$

Resolução:

A direção de r é dada por $\vec{u} = (8, 0, -6)$. A direção de s é dada por $\vec{v} = (3, 5, 4)$.

Assim, pela condição de ortogonalidade, temos

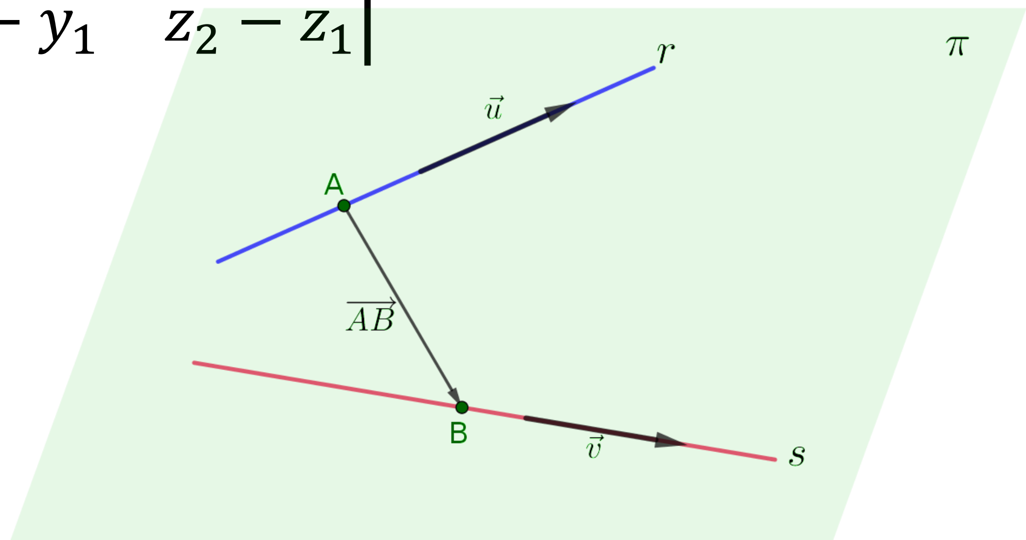
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Longrightarrow (8, 0, -6) \cdot (3, 5, 4) = 8 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + (-6) \cdot 4 =$$
$$= 24 + 0 - 24 = 0$$

Logo, as retas r e s dadas são ortogonais

Condição de coplanaridade de duas retas

Sejam r e s duas retas que passam pelos pontos $A(x_1, y_1, z_1)$ e $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$, respectivamente, e tem a mesma direção de $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$, respectivamente. As retas r e s ***são coplanares*** se o produto misto dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\overrightarrow{AB}$ for nulo, ou seja,

$$\left(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$



Exemplo

Verifique se as retas r e s dadas são coplanares.

$$r: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4} \quad \text{e} \quad s: \frac{x+5}{-1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-6}{3}$$

Resolução

De r temos o ponto $A(2,0,5)$ e $\vec{u} = (2,3,4)$. De s temos o ponto B$(-5,-3,6)$ e $\vec{v} = (-1,1,3)$. De A e B obtemos o vetor $\overrightarrow{AB} = (-7,-3,1)$. Assim, pela condição de coplanaridade, temos

$$(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) = \left|\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ -7 & -3 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ -7 & -3 \end{array}$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot (-7) + 4 \cdot (-1) \cdot (-3) - (-7 \cdot 1 \cdot 4) - (-3 \cdot 3 \cdot 2) - (1 \cdot (-1) \cdot 3)$$

$$= 2 - 63 + 12 + 28 + 18 + 3 \quad = 0$$

Logo, r e s são coplanares

Posições relativas de duas retas

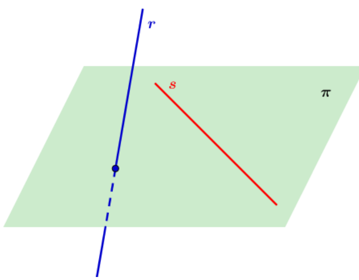
$A \in r$ e $B \in s$

v_1: vetor diretor de r

v_2: vetor diretor de s

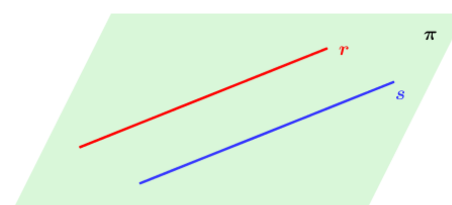
Duas retas

- **Reversas**
  $r \cap s = \emptyset$

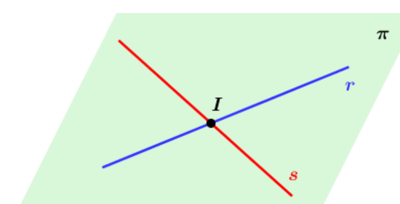


r e s não estão no mesmo plano

- **Coplanares**
  Situadas no mesmo plano
  $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{AB}) = 0$
  - **Paralelas**
    $r \cap s = \emptyset$
    $\overrightarrow{v_1} = k\overrightarrow{v_2}$



  - **Concorrentes**
    $r \cap s = \{I\}$



<u>Observação</u>: caso em que r e s são coincidentes é um caso particular de paralelismo.

Exemplo

Qual a posição relativas das retas r e s dadas:

$$r: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - t \\ z = 7 - 2t \end{cases}$$

<u>Resolução</u>

As retas r e s são coplanares e não são paralelas, pois

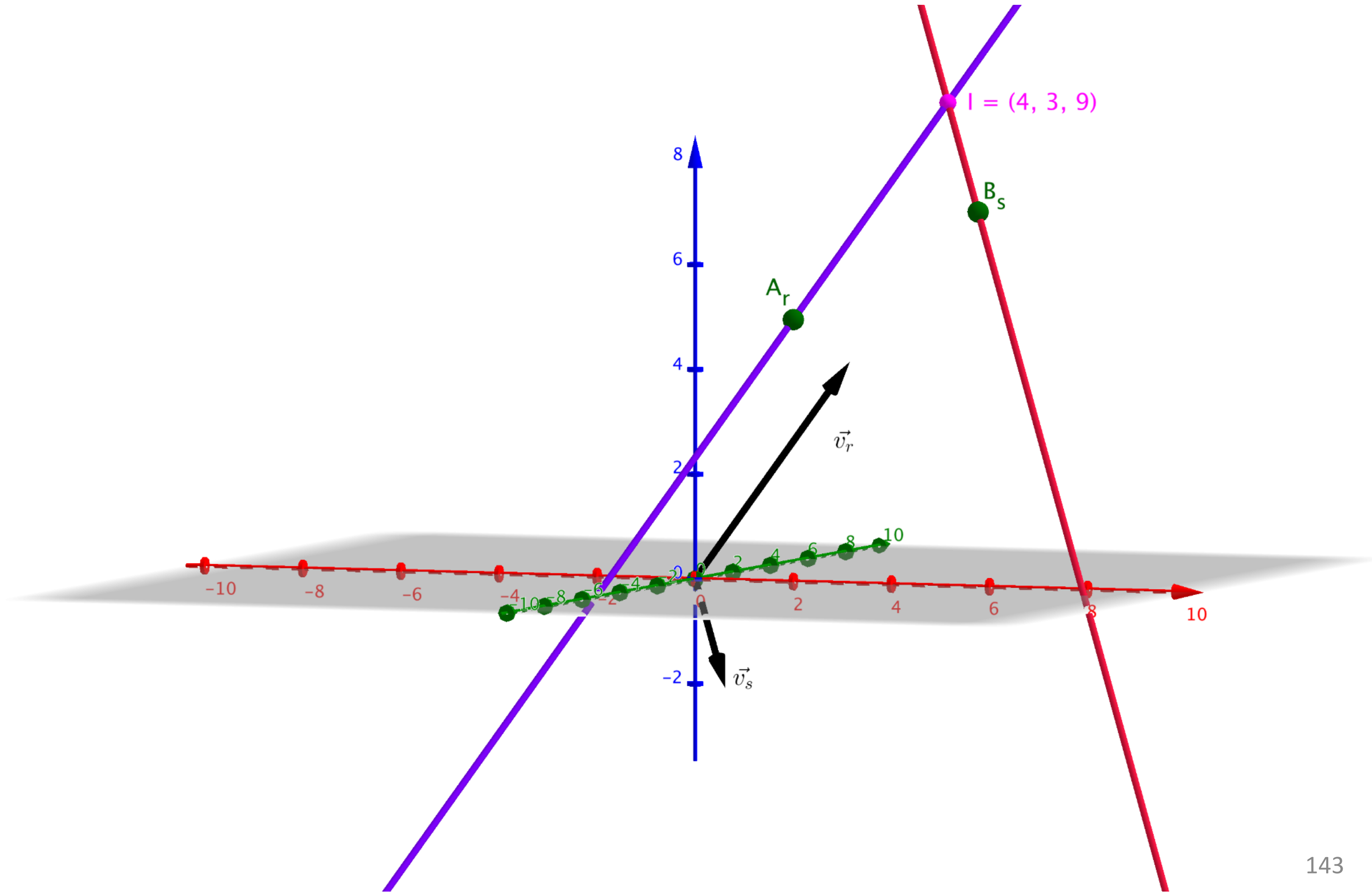
$$\frac{2}{1} \neq \frac{3}{-1} \neq \frac{4}{-2}$$

e sendo $A(2,0,5) \in r$ e $\mathrm{B}(5,2,7) \in s$, temos que o produto misto

$$\left(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Logo, as retas r e s são concorrentes e $I(4,3,9)$.

Exemplo



Exercício

Qual a posição relativas das retas r e s dadas:

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = z \qquad \text{e} \qquad s: \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = 2t \\ z = -2t + 1 \end{cases}$$

Resolução

Os vetores diretores das retas r e s são, $\vec{u} = (2, -1, 1)$ e $\vec{v} = (-4, 2, -2)$. Temos que $\vec{v} = -2\vec{u}$. Assim $\vec{v} // \vec{u}$, então r//s.

Neste caso, temos que r e s são coincidentes, ou seja, $r = s$.

Exercício

Qual a posição relativas das retas r e s dadas:

$$r: \begin{cases} y = 3 \\ z = 2x \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s: x = y = z$$

Resolução

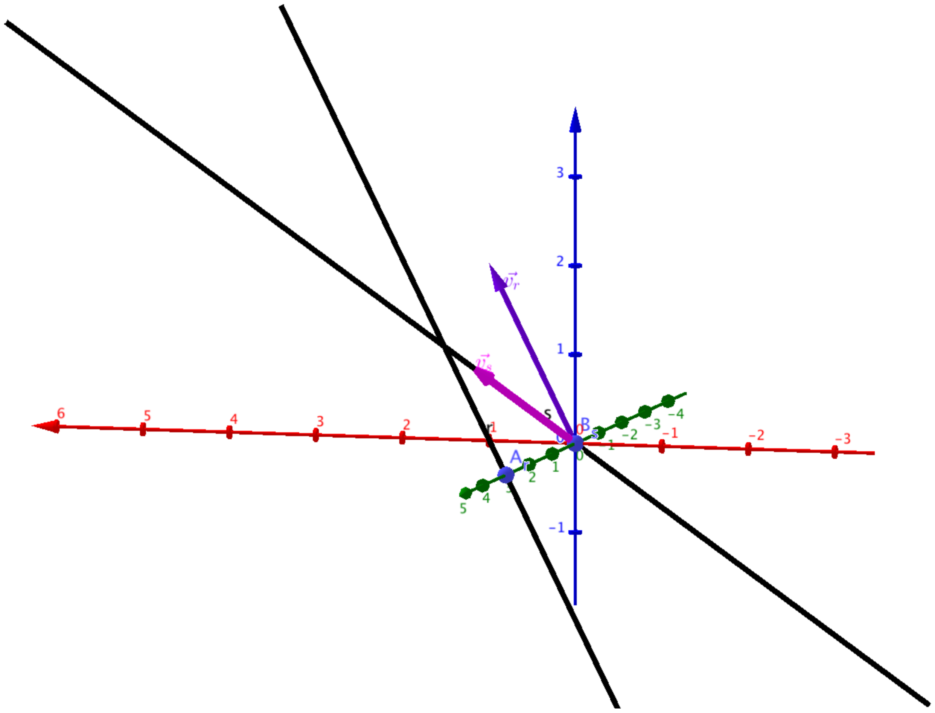
As retas r e s não são paralelas, pois $\dfrac{1}{1} \neq \dfrac{0}{1} \neq \dfrac{2}{1}$

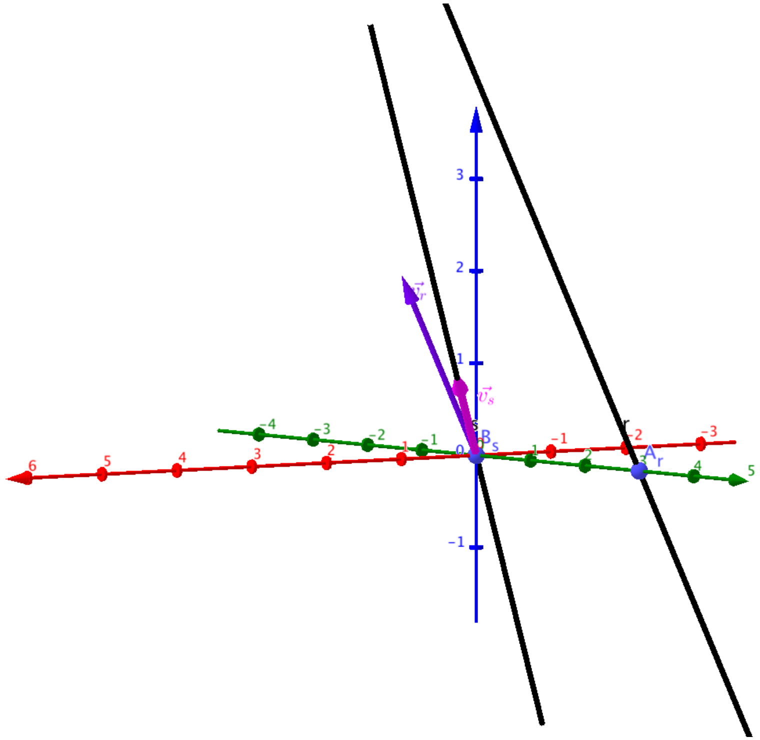
Sendo $A(0,3,0) \in r$ e $\mathrm{B}(0,0,0) \in s$, temos que o produto misto

$$\left(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Logo, as retas r e s são reversas.

Exercício





Interseção de duas retas

Dadas

$$r: \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad s: \begin{cases} y = mx + n \\ z = px + q \end{cases}$$

duas retas coplanares e não paralelas então, r e s são concorrentes, ou seja, existe $I(x, y, z) = \mathrm{r} \cap s$ e $I(x, y, z)$ satisfaz o sistema formado por ambas as retas.

Exemplo

Encontre o ponto de interseção das retas dadas:

$$r: \begin{cases} x = -t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2t \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} y = -3x + 2 \\ z = 3x - 1 \end{cases}$$

<u>Resolução</u>: O ponto $I(x, y, z)$ é a solução do sistema com as equações de r e s.

Passando r para a forma reduzida temos $r: \begin{cases} y = -2x + 1 \\ z = 2x \end{cases}$

Assim, temos o sistema $\begin{cases} y = -2x + 1 \\ z = 2x \\ y = -3x + 2 \\ z = 3x - 1 \end{cases}$

<u>Igualando as equações em y</u>

$$-2x + 1 = -3x + 2$$
$$-2x + 3x = 2 - 1$$
$$x = 1$$

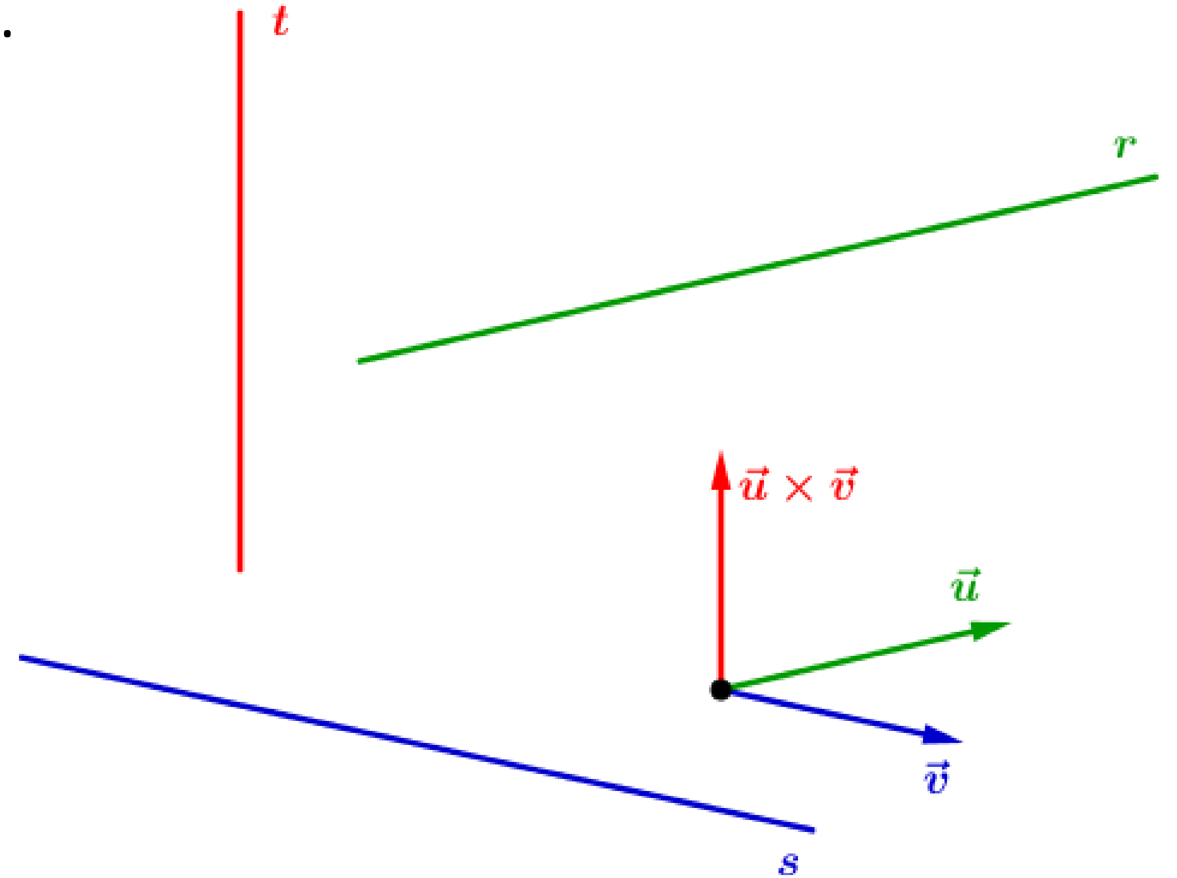
<u>Substituindo x em y e z</u>

$y = -2x + 1$
$= -2 \cdot 1 + 1 = -1$
$z = 2x = 2 \cdot 1 = 2$

Portanto, $I(1, -1, 2)$

Reta ortogonal a duas retas

Dadas r e s retas não paralelas, com direções de $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$, respectivamente. Qualquer reta t que seja ortogonal simultaneamente a r e s, terá um vetor diretor paralelo ou igual a $\vec{u} \times \vec{v}$.



Exemplo

Determine as equações da reta t que passa pelo ponto $A(-2,1,3)$ e é simultaneamente ortogonal às retas:

$$r: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -3t \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \frac{x-1}{-3} = \frac{z}{-1}; y = 2$$

<u>Resolução</u>

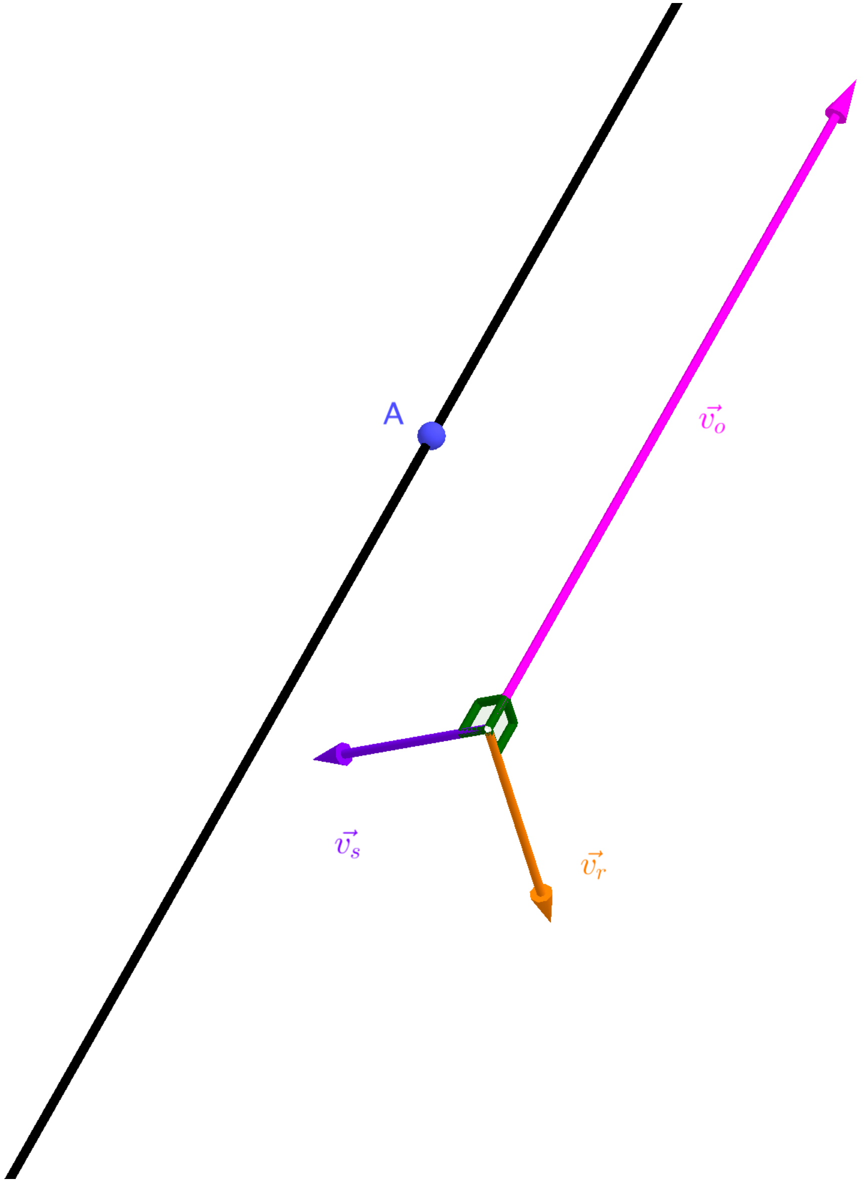
Dado $\vec{u} = (-1,2,-3)$ e $\vec{v} = (-3,0,-1)$, vetores diretores de r e s, respectivamente.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-2,8,6)$$

Logo, as equações de t são

$$t: \frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{8} = \frac{z-3}{6}$$

Exemplo



Ponto que divide um segmento de reta numa razão dada

Dados $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$. Dizemos que um ponto $P(x, y, z)$ divide o segmento de reta P_1P_2 na razão r, se

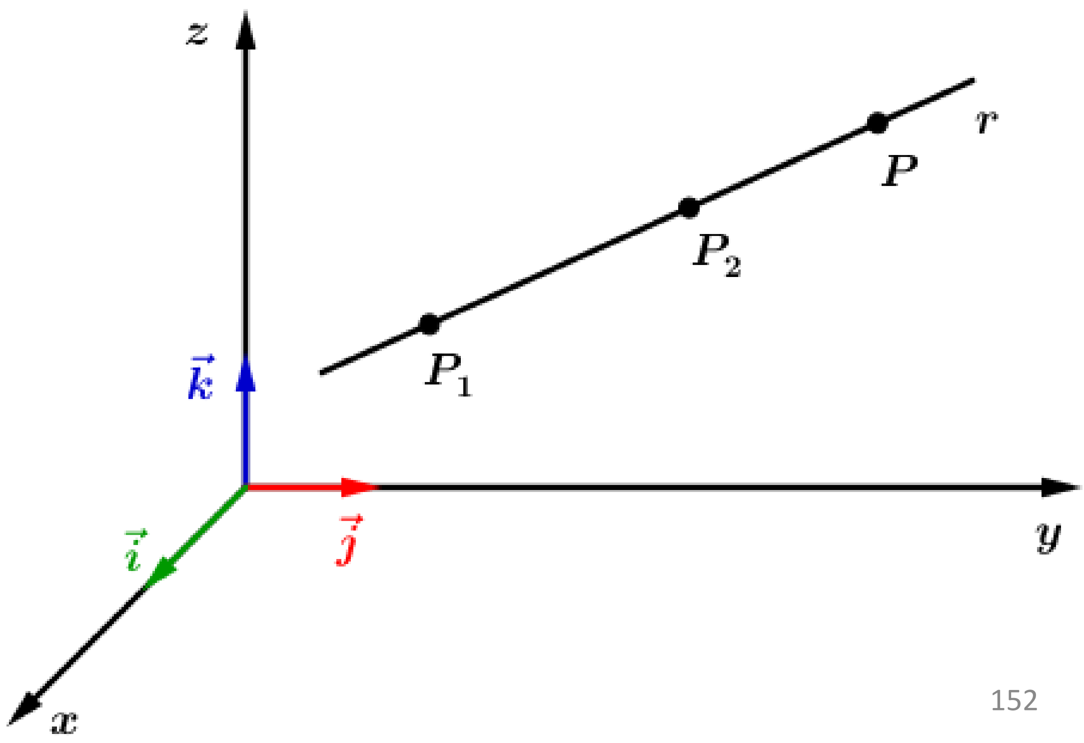
$$\overrightarrow{P_1P} = r\overrightarrow{P_2P_1}$$

ou seja, as coordenadas do ponto

$$x = \frac{x_1 - rx_2}{1 - r}$$

$$y = \frac{y_1 - ry_2}{1 - r}$$

$$z = \frac{z_1 - rz_2}{1 - r}$$



Exemplo

Sejam os pontos $A(2,4,1)$ e $\mathrm{B}(3,0,5)$. Determine o ponto $\mathrm{P}(x,y,z)$ que divide o segmento AB na razão $r=-\frac{1}{3}$.

Resolução

Temos que as coordenada de P são dadas por

$$x=\frac{x_1-rx_2}{1-r}\qquad y=\frac{y_1-ry_2}{1-r}\qquad z=\frac{z_1-rz_2}{1-r}$$

Assim,

$$y=\frac{y_1-ry_2}{1-r}=\frac{4+\frac{1}{3}\cdot 0}{1+\frac{1}{3}}=\frac{4}{\frac{4}{3}}=3$$

$$x=\frac{x_1-rx_2}{1-r}=\frac{2+\frac{1}{3}\cdot 3}{1+\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{2+1}{\frac{4}{3}}=\frac{9}{4}$$

$$z=\frac{z_1-rz_2}{1-r}=\frac{1+\frac{1}{3}\cdot 5}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1+\frac{5}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{\frac{8}{3}}{\frac{4}{3}}=2$$

$$P\left(\frac{9}{4},3,2\right)$$

Ponto que divide um segmento de reta ao meio

Se o ponto $P(x, y, z)$ dividir o segmento de reta $\overline{P_1P_2}$ ao meio, temos que

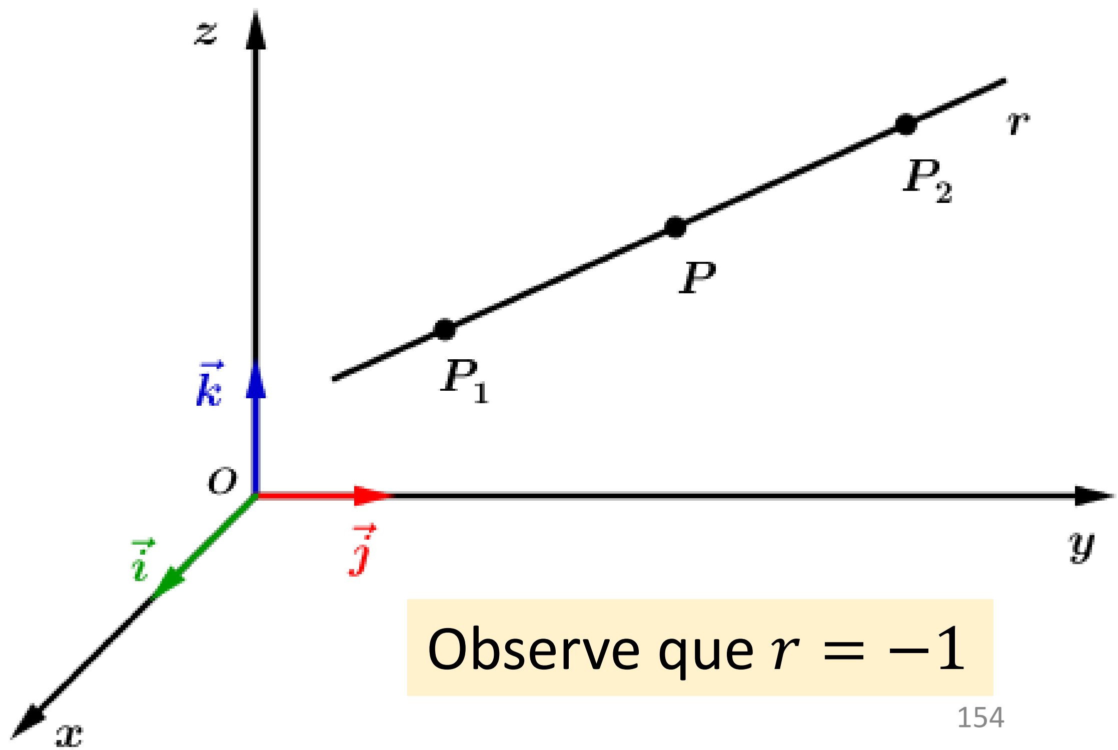
$$\overrightarrow{P_1P} = -\overrightarrow{P_2P}$$

ou seja, as coordenadas do ponto P são

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$



Observe que $r = -1$

Exercícios Propostos

Exercícios - Retas

1) Verificar se os pontos $A(5,-5,6)$ e $\mathrm{B}(4,-1,12)$ pertencem a reta

$$s: \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-2}$$

$R: apenas\ o\ ponto\ A$

2) Determine os pontos da reta $r: \frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$ que têm;

a) Abscissa 5 b) Ordenada 4 c) Cota 1

$R: \left(5, -\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}\right)$ $R: (-4, 4, 1)$ $R: (-4, 4, 1)$

3) Estabelecer as equações reduzidas, com variável independente x, da reta determinada pelos pontos $A(1,-2,3)$ e $\mathrm{B}(3,-1,-1)$.

$$R: s: \begin{cases} y = \frac{x}{2} - \frac{5}{2} \\ z = -2x + 5 \end{cases}$$

Exercícios - Retas

4) Qual deve ser o valor de m para que os pontos $A(3, m, 1)$, $\mathrm{B}(1, 1, -1)$ e $\mathrm{C}(-2, 10, -4)$ pertençam à mesma reta?

$$R: m = -5$$

5) Cite um ponto e um vetor diretor de cada um das retas

a) $r: \begin{cases} \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{z-3}{4} \\ y = 1 \end{cases}$

c) $p: \begin{cases} x = 2t \\ y = -1 \\ z = 2 - t \end{cases}$

b) $s: \begin{cases} x = 2y \\ z = 3 \end{cases}$

d) $q: x = y = z$

Exercícios - Retas

6) Determinar as equações das seguintes retas:

a) Reta que passa por $A(1, -2, 4)$ e é paralela ao eixo dos x.

$$R: s: \begin{cases} y = -2 \\ z = 4 \end{cases}$$

b) Reta que passa por $\mathrm{B}(3, 2, 1)$ e é perpendicular ao plano xOz.

$$R: s: \begin{cases} x = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

7) Calcule o valor de n para que seja de 30 graus o ângulo que a reta r

$$r: \begin{cases} y = nx + 5 \\ z = 2x - 3 \end{cases}$$

$$R: n = \pm\sqrt{15}$$

Forma com o eixo dos y.

Exercícios - Retas

8) Determine o ângulo entre as seguintes retas

a)

$$r: \begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = 2t \\ z = 3 - 4t \end{cases} \qquad s: \frac{x}{4} = \frac{y+6}{2} = \frac{z-1}{2} \qquad R: 60°$$

b)

$$r: \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2}t \\ y = t \\ z = 5 - 3t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad R: 30°$$

Exercícios - Retas

9) Calcule o valor de m para que as retas abaixo sejam paralelas

$$r: \begin{cases} x = -3t \\ y = 3 + t \\ z = 4 \end{cases} \qquad s: \frac{x+5}{6} = \frac{y-1}{m}; z = 6$$

$R: m = -2$

10) A reta r que passa por $A(1, -2, 1)$ e é paralela à reta

$$t: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3t \\ z = -t \end{cases}$$

$R: m = 10\ e\ n = 5$

Se $\mathrm{P}(-3, m, n) \in r$, determine m e n.

Exercícios - Retas

11) A reta que passa pelos pontos $A(-2, 5, 1)$ e $\mathrm{B}(1, 3, 0)$ é paralela à reta determinada por $\mathrm{C}(3, -1, -1)$ e $\mathrm{D}(0, y, z)$. Determine o ponto D.

$R: D(0, 1, 0)$

12) A reta

$$r: \begin{cases} y = mx + 3 \\ z = x - 1 \end{cases}$$

é ortogonal à reta determinada pelos pontos $A(1, 0, m)$ e $\mathrm{B}(-2, 2m, m)$. Calcule o valor de m

$R:\ m = \pm\sqrt{3/2}$

13) Calcule o valor de m para que as retas dadas sejam coplanares:

$$r: \begin{cases} y = 2x + 3 \\ z = 3x - 1 \end{cases} \qquad s: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{m}$$

$R: m = 4$

Exercícios - Retas

14) Calcule o ponto de interseção das retas

$$r: \begin{cases} y = 3x - 1 \\ z = 2x + 1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} y = 4x - 2 \\ z = 3x \end{cases} \qquad R: I(1, 2, 3)$$

15) Dadas as retas

$$h: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 + 5t \\ z = tm \end{cases} \qquad r: \begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = \dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

a) Calcule o valor de m para que as retas sejam concorrentes;

$$R: m = 2$$

b) Determine, para o valor de m, o ponto de interseção entre as retas.

$$R: I(-1, -1, -2)$$

Exercícios - Retas

16) Estabeleça as equações da reta que passa pela origem e é simultaneamente ortogonal às retas

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{-2} \qquad s: \begin{cases} y = 3x - 1 \\ z = -x + 4 \end{cases} \qquad R: t: \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$$

17) Dados os pontos $P_1(7, -1, 3)$ e $P_2(3, 0, -12)$, determine

a) O ponto P, que divide o segmento $\overline{P_1P_2}$ na razão $\frac{2}{3}$;

$$R: P(15, -3, 33)$$

b) O ponto Q, que divide o segmento $\overline{P_1P_2}$ ao meio.

$$R: Q\left(5, -\frac{1}{2}, -\frac{9}{2}\right)$$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem ser encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/

O GAMA possui monitorias de:

- Pré-cálculo e Matemática Elementar (e disciplinas equivalentes)
- ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
- Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino

Módulo de Geometria Analítica

Aula 5

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

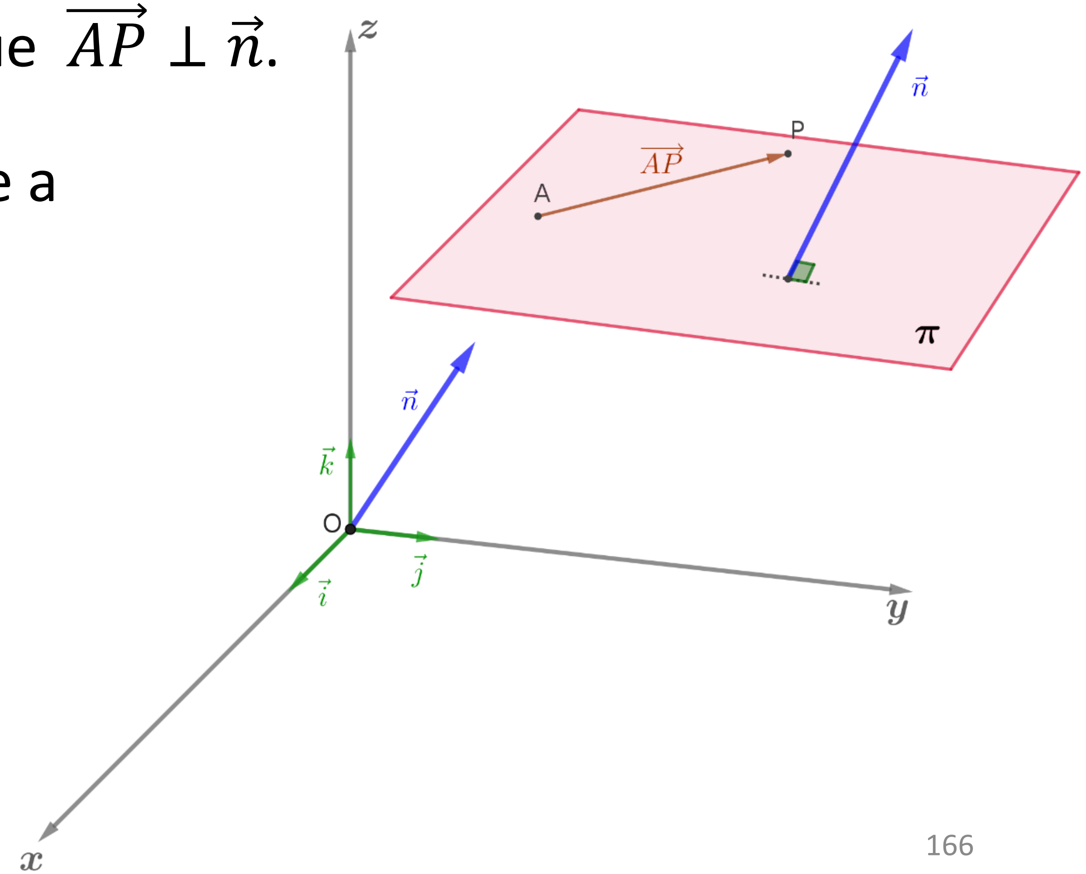
Equação geral do plano

Considere um plano π e $\vec{n} = (a, b, c), \vec{n} \neq \vec{0}$ um vetor normal (ortogonal) ao plano π e $A(x_1, y_1, z_1) \in \pi$.

Um plano π, pode ser definido como o conjunto de todos os pontos $\mathrm{P}(x, y, z)$ do espaço tais que $\overrightarrow{AP} \perp \vec{n}$.

Assim, o ponto P pertence a π se, e somente se

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$



Equação geral do plano

Como $\vec{n} = (a, b, c)$ e $\overrightarrow{AP} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, temos que

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

$$(a, b, c) \cdot (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0$$

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

$$ax + by + cz - ax_1 - by_1 - cz_1 = 0$$

Fazendo

$$d = -ax_1 - by_1 - cz_1$$

Temos que a **equação geral do plano** é

$$\pi: ax + by + cz + d = 0$$

Exemplo

Determine a equação geral do plano π que passa por $A(2,-1,3)$, sendo $\vec{n} = (3,2,-4)$ um vetor normal a π.

<u>Resolução</u>

Como $\vec{n}$ é normal ao plano, temos que a equação geral do plano π é do tipo

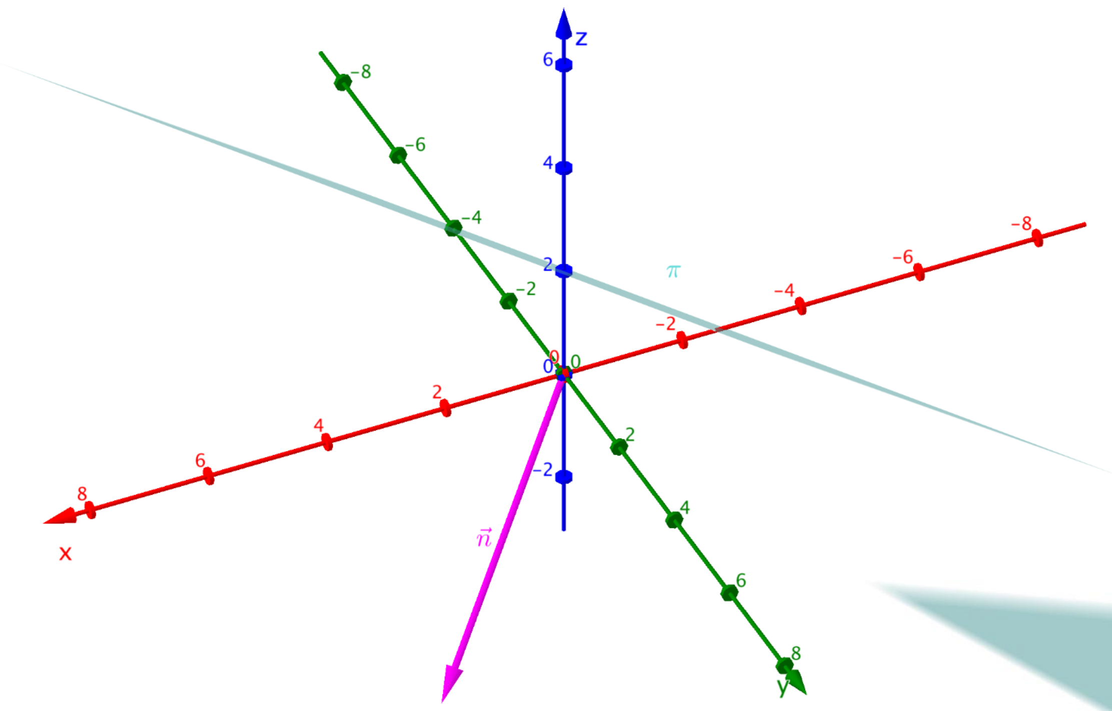
$$\pi: 3x + 2y - 4z + d = 0$$

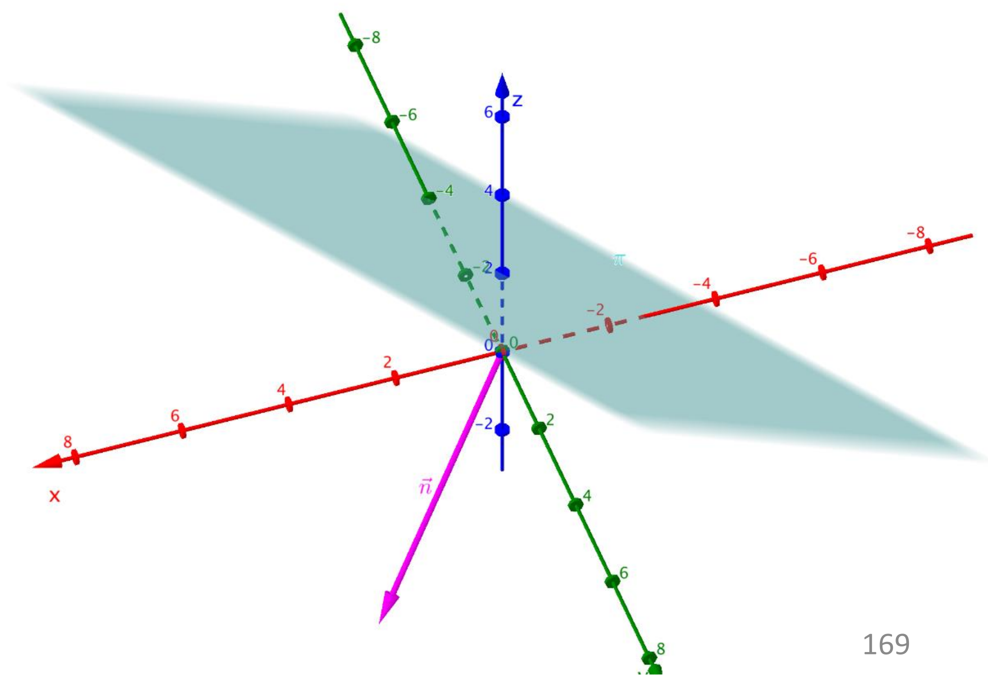
Como A pertence ao plano, temos que

$$3(2) + 2(-1) - 4(3) + d = 0$$
$$6 - 2 - 12 + d = 0$$
$$d = 8$$

Logo, a equação geral do plano é $\pi: 3x + 2y - 4z + 8 = 0$

Exemplo





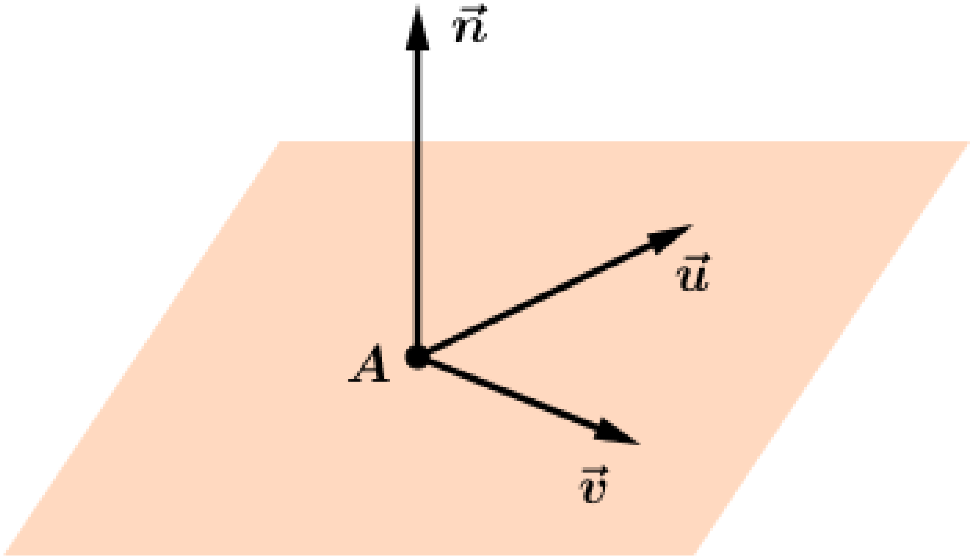
Determinando um plano

Um plano π é determinado por um de seus pontos e por um vetor normal a ele. Vamos ver outras formas de determinar um plano.

a) Plano que passa por um ponto A e é paralelo a dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não colineares.

Assim,

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

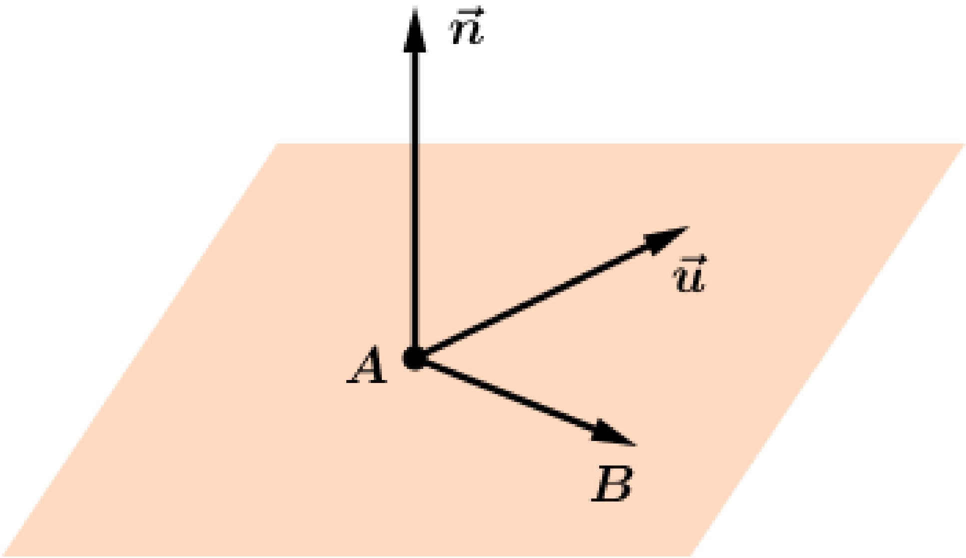


Determinando um plano

b) Plano que passa por dois pontos A e B e é paralelo a um vetor $\vec{u}$ não colinear a $\overrightarrow{AB}$.

Assim,

$$\vec{n} = \vec{u} \times \overrightarrow{AB}$$

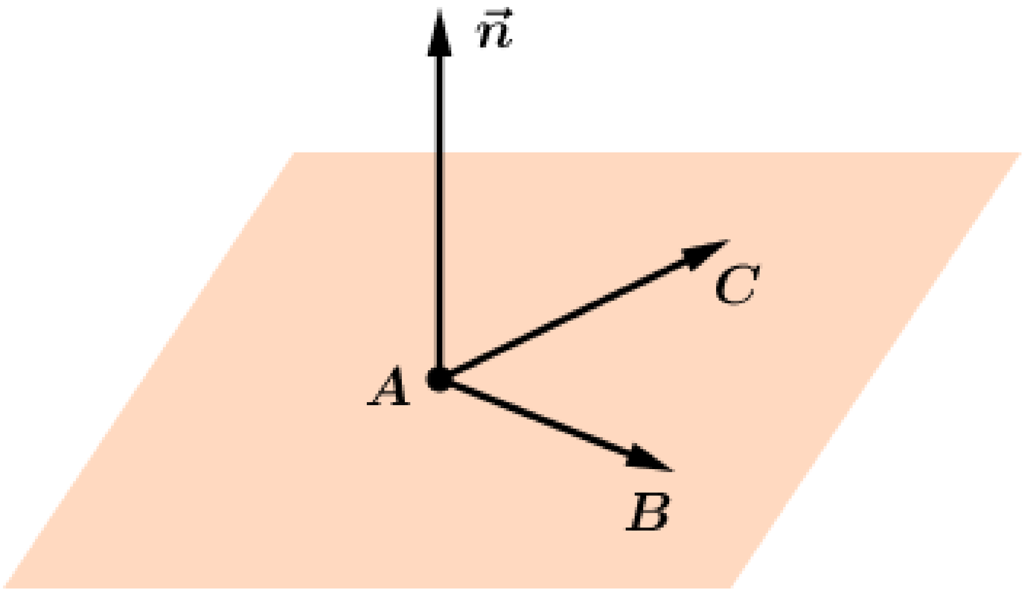


Determinando um plano

c) Plano que passa por três pontos A, B e C não em linha.

Assim,

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$



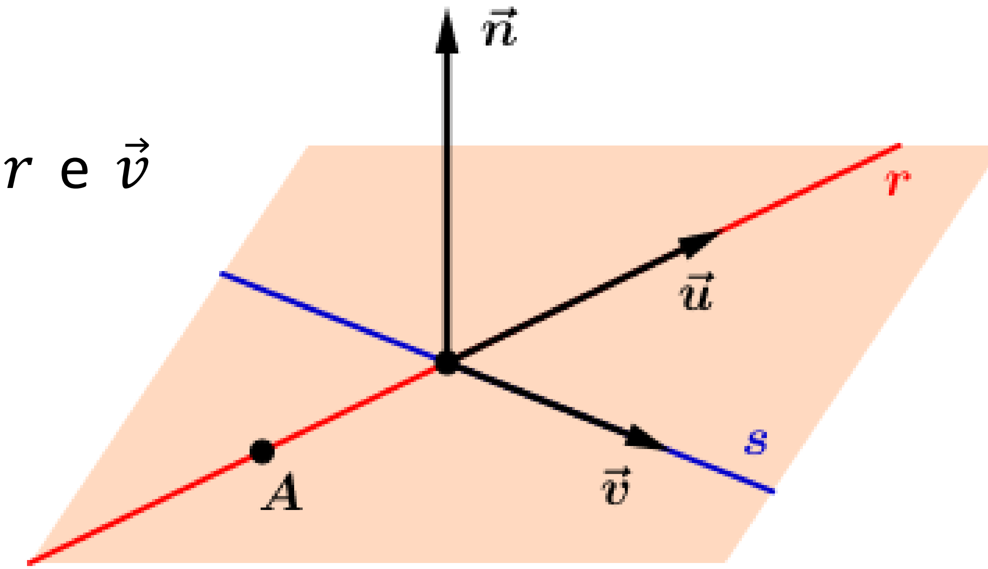
Determinando um plano

d) Plano que contém duas retas r e s concorrentes.

Assim,

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

Sendo $\vec{u}$ vetor diretor de r e $\vec{v}$ vetor diretor de s.



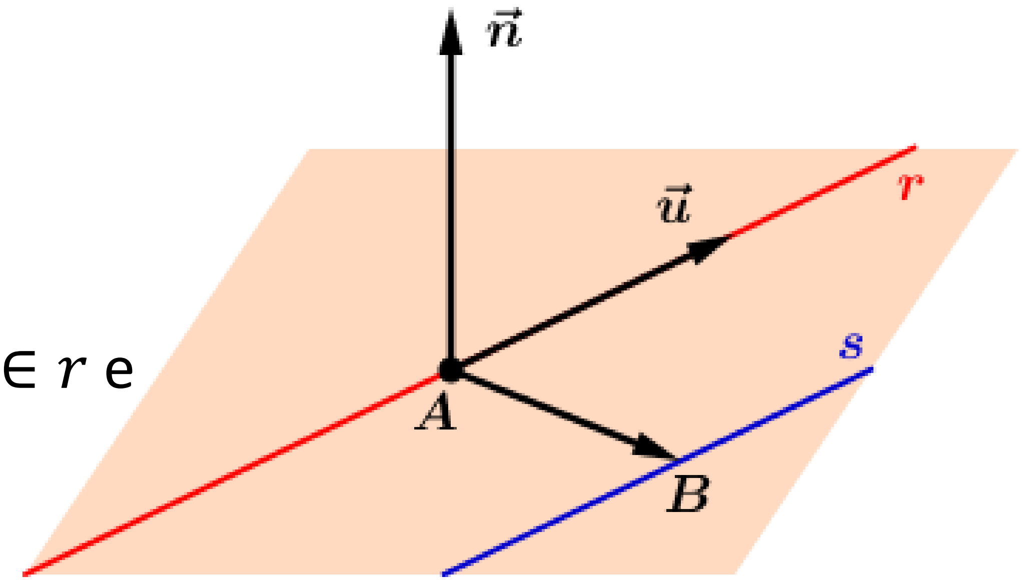
Determinando um plano

e) Plano que contém duas retas r e s paralelas.

Assim,

$$\vec{n} = \vec{u} \times \overrightarrow{AB}$$

Sendo $\vec{u}$ vetor diretor de r, $A \in r$ e $B \in s$.



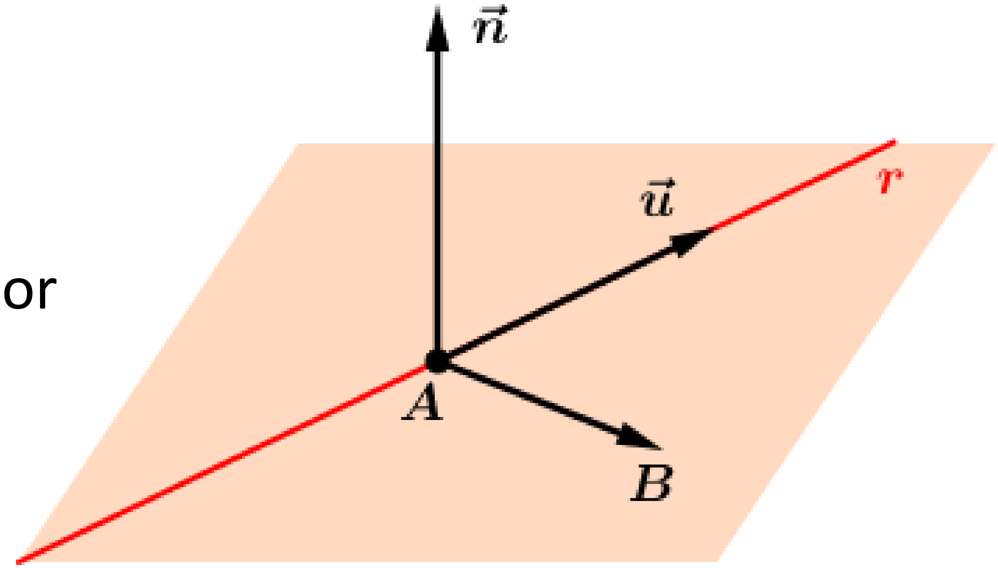
Determinando um plano

f) Plano que contém uma reta r e um ponto $B \notin r$.

Assim,

$$\vec{n} = \vec{u} \times \overrightarrow{AB}$$

Sendo $A \in r$ e $\vec{u}$ vetor diretor de r.



Exemplo

Determine a equação geral do plano π que passa por $A(1,-3,4)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (3,1,-2)$ e $\vec{v} = (1,-1,1)$.

Resolução

Temos que $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-5,-4)$

Assim, a equação geral do plano será dada por

$$-1(x-1) - 5(y+3) - 4(z-4) = 0$$

$$-x - 5y - 4z + 2 = 0$$

Logo, $\pi: x + 5y + 4z - 2 = 0$

Planos paralelos

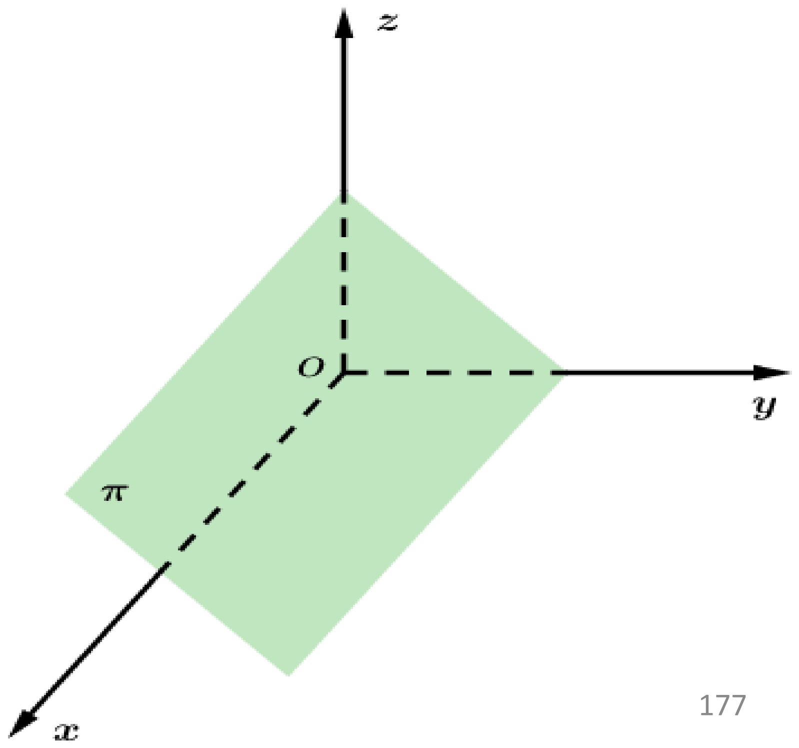
I) Plano que passa pela origem, tem a forma

$$\pi: ax + by + cz = 0$$

II) Planos paralelos aos eixos coordenados

a) Se $a = 0$, $\vec{n} = (0, b, c) \perp Ox \therefore \pi // Ox$, então a equação geral do plano é

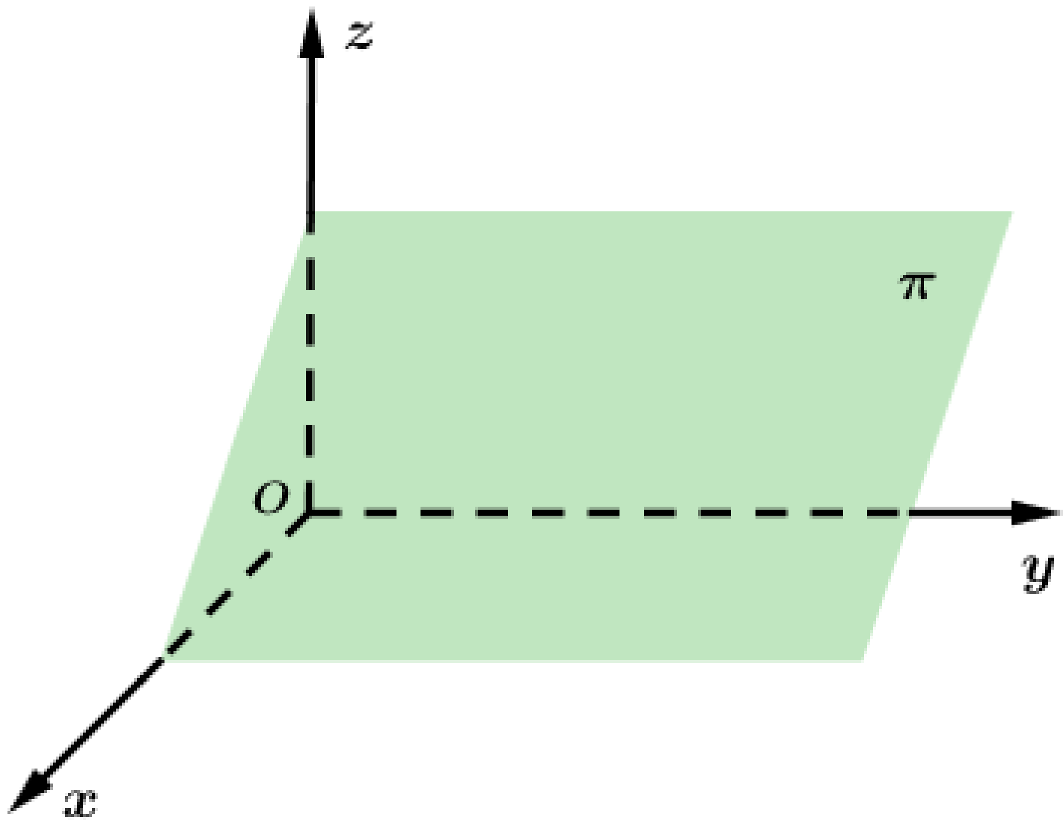
$$\pi: by + cz + d = 0$$



Planos paralelos aos eixos coordenados

b) Se b $= 0$, $\vec{n} = (a, 0, c) \perp Oy \;\; \therefore \;\; \pi \,//\, Oy$, então

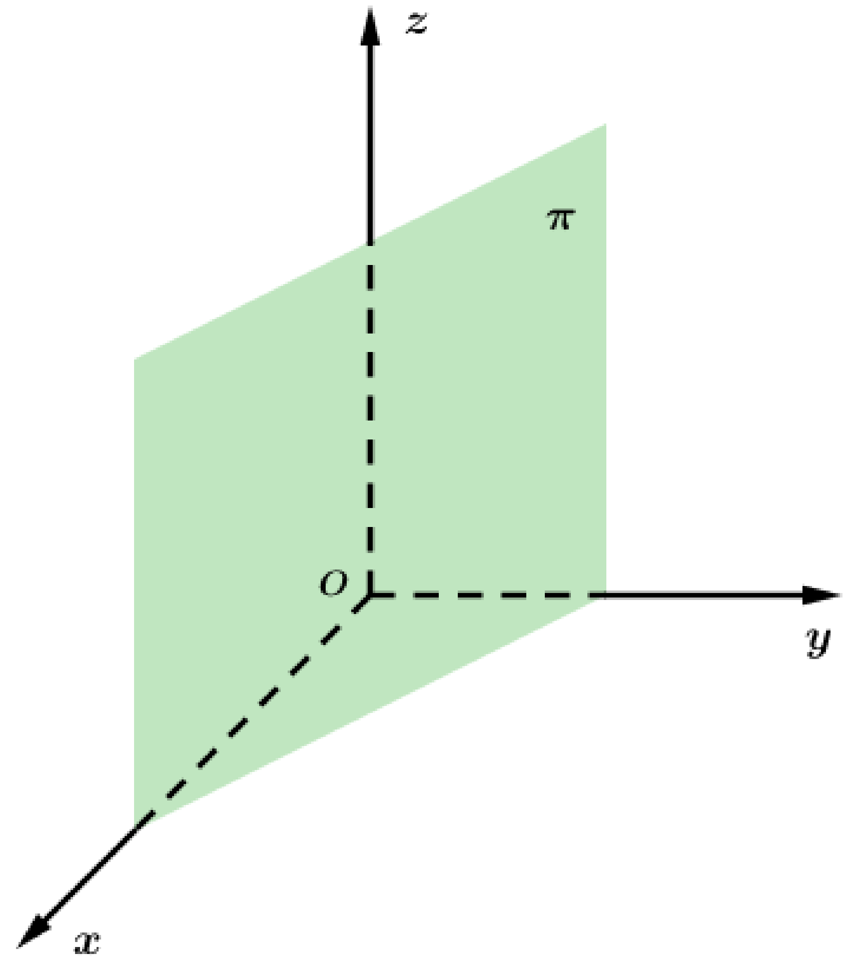
$$\pi: ax + cz + d = 0$$



Planos paralelos aos eixos coordenados

c) Se $c = 0, \vec{n} = (a, b, 0) \perp Oz \ \therefore\ \pi \, // \, Oz$, então

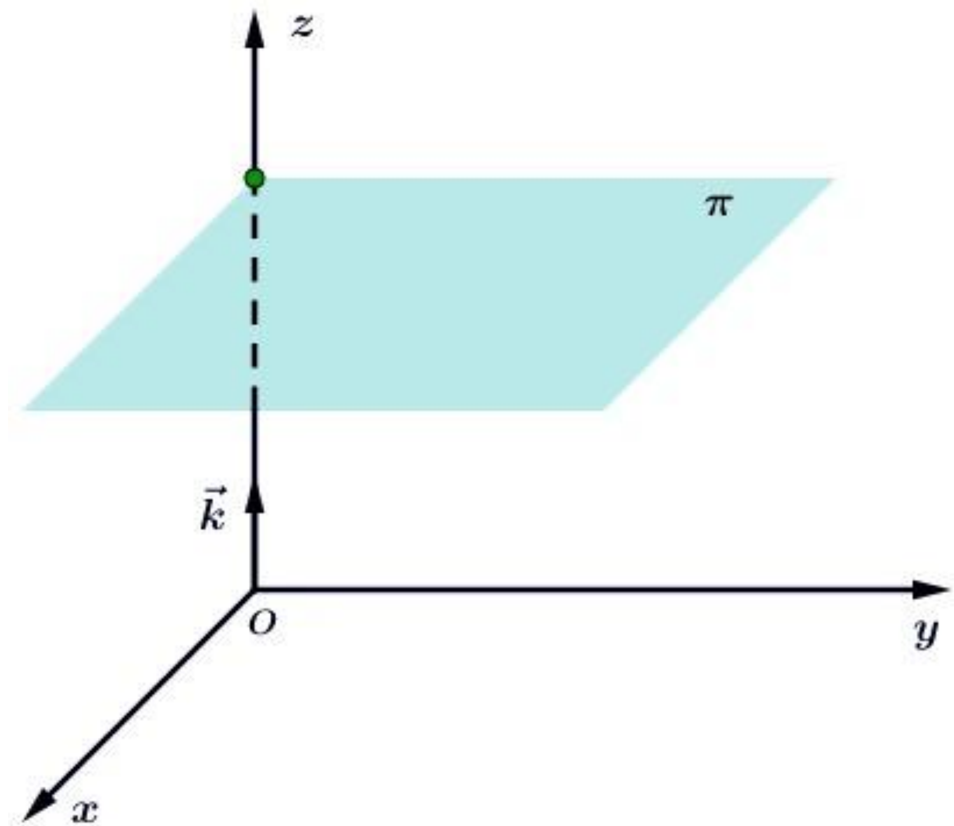
$$\pi: ax + by + d = 0$$



Planos paralelos aos planos coordenados

a) Se $a = b = 0, \vec{n} = (0, 0, c) = c(0, 0, 1) = c\vec{k} \;\therefore\; \pi \,//\, xOy$, então

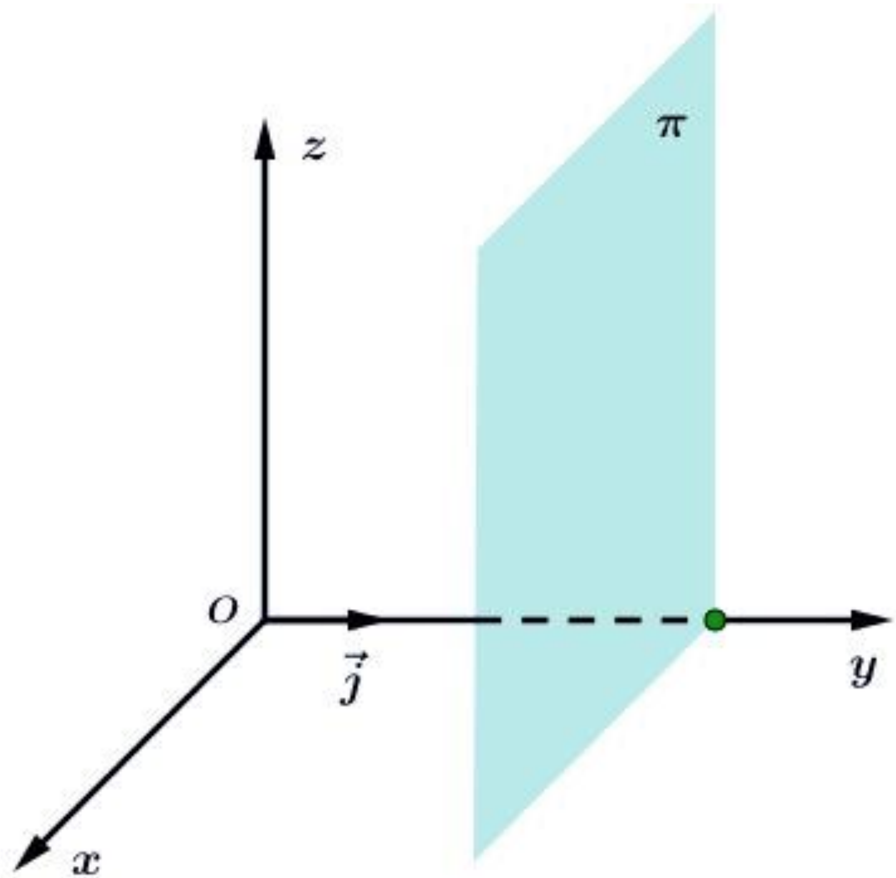
$$\pi: z = k$$



Planos paralelos aos planos coordenados

b) Se a $= c = 0$, $\vec{n} = (0, b, 0) = b(0,1,0) = b\vec{j}$ $\therefore$ π // xOz, então

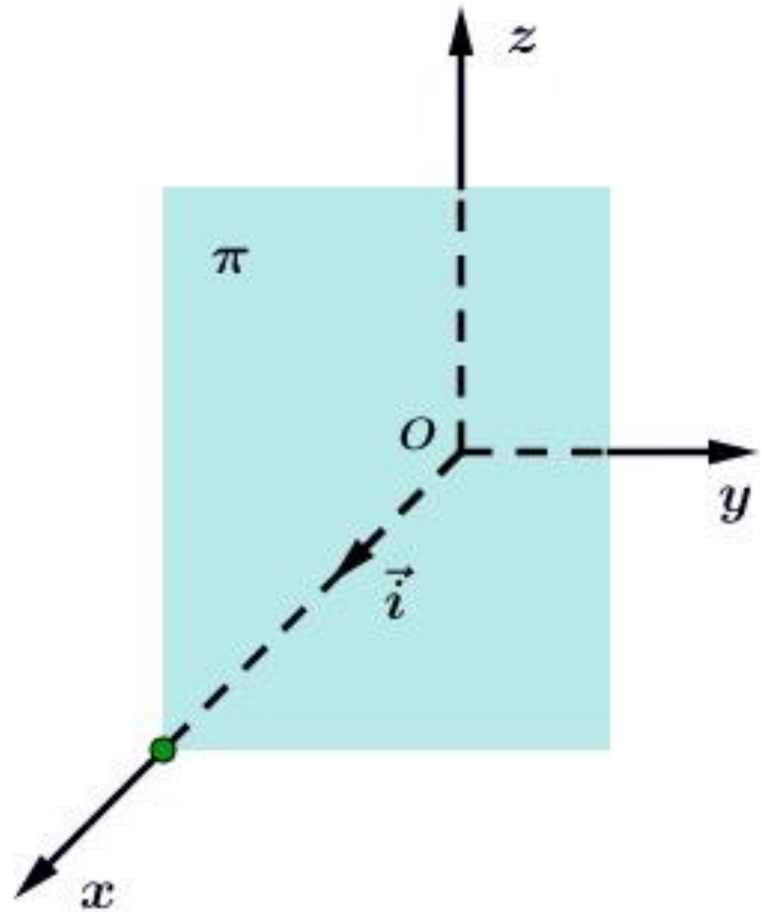
$\pi \colon y = k$



Planos paralelos aos planos coordenados

c) Se $b = c = 0, \vec{n} = (a, 0, 0) = a(1, 0, 0) = a\vec{i} \;\therefore\;$ π // yOz, então

$\pi: x = k$



Exemplo

Determine a equação geral do plano π que passa por $A(2,2,-1)$ e pela reta

$$r: \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

<u>Resolução</u>

Temos que a reta r passa por $\mathrm{B}(4,3,0)$ e tem vetor diretor $\vec{v} = (0,0,1)$. Sendo $\mathrm{P}(x,y,z)$ um ponto genérico, temos que

$$\vec{n} = \vec{v} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1,2,0)$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

$$-1(x-2) + 2(y-2) + 0(z+1) = 0$$

Assim, a equação geral do plano será dada por

$$\pi: x - 2y + 2 = 0$$

Ângulo entre dois planos

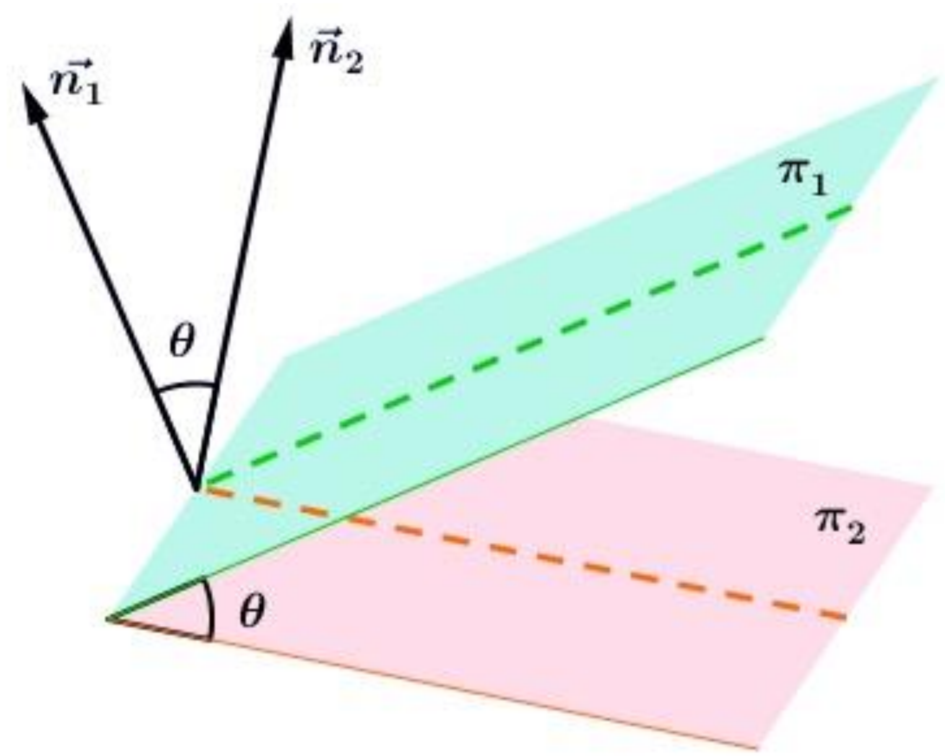
Sejam os planos $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

$\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

Com vetores

$\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$

$\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$



Ângulo entre dois planos

O ***ângulo de dois planos*** π_1 e π_2 é o menor ângulo formado por seus vetores normais. Sendo assim,

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}, \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Exemplo

Determine o ângulo entre os seguintes planos:

$$\pi_1: x + y - 2z - 6 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2: -2x + y + z + 4 = 0$$

Resolução

Como, $\vec{n}_1 = (1, 1, -2)$ e $\vec{n}_2 = (-2, 1, 1)$, são normais a estes planos, temos que

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{|(1,1,-2)\cdot(-2,1,1)|}{|(1,1,-2)||(-2,1,1)|} =$$

$$= \frac{|1 \times (-2) + 1 \times 1 + (-2) \times 1|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (-2)^2} \times \sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + (1)^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

Logo, $\theta = 60°$

Condição de paralelismos de dois planos

Dados os planos

$\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ $\quad \vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1) \perp \pi_1$

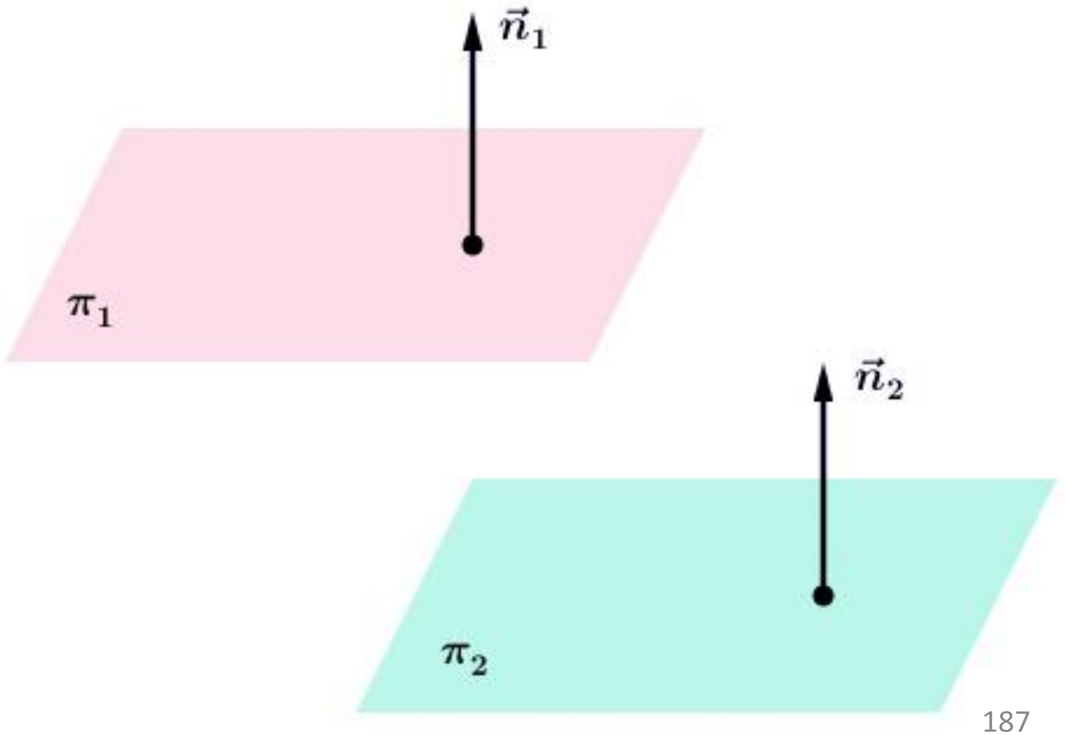
$\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ $\quad \vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2) \perp \pi_2$

Logo,

$$\pi_1 \mathbin{//} \pi_2 \implies \vec{n}_1 \mathbin{//} \vec{n}_2$$

$$\therefore \vec{n}_1 = \mathrm{k}\, \vec{n}_2$$

$$\therefore \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$



Condição de perpendicularismo de dois planos

Dados os planos

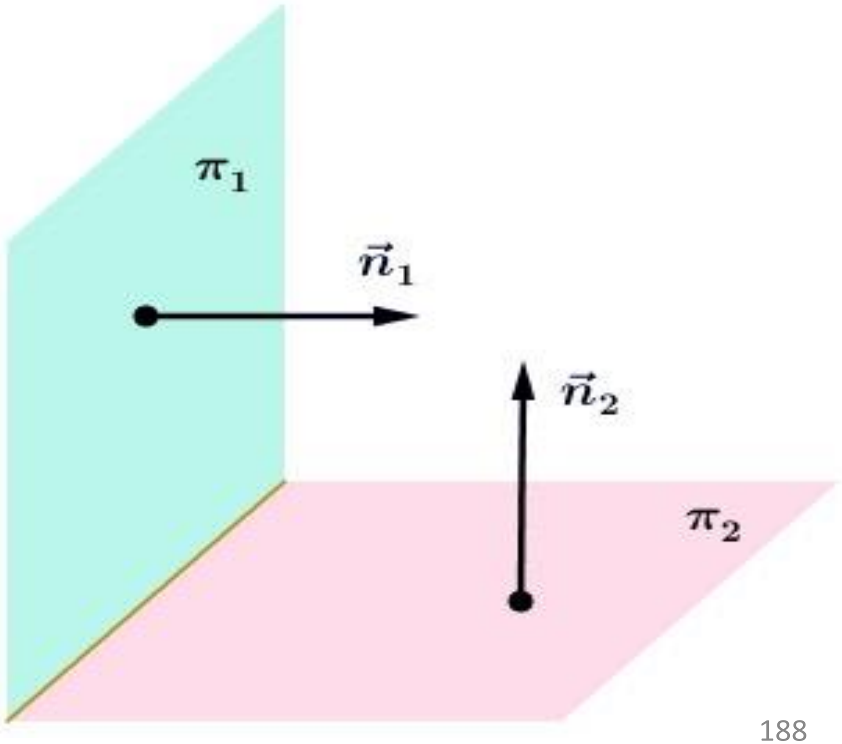
$\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ $\quad \vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1) \perp \pi_1$

$\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ $\quad \vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2) \perp \pi_2$

Logo,

$$\pi_1 \perp \pi_2 \implies \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$$

$$\therefore \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$



Exemplo

Calcule o valor de m e n para que os planos abaixo sejam paralelos:

$\pi_1: (2m-1)x - 2y + nz - 3 = 0$ $\qquad$ $\pi_2: 4x + 4y - z = 0$

Resolução

Temos que, $\vec{n}_1 = (2m-1, -2, n)$ e $\vec{n}_2 = (4, 4, -1)$. Logo,

$$\frac{2m-1}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{n}{-1}$$

Assim,

$$\frac{2m-1}{4} = \frac{-2}{4}$$

$$8m - 4 = -8$$

$$m = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{-2}{4} = \frac{n}{-1}$$

$$4n = 2$$

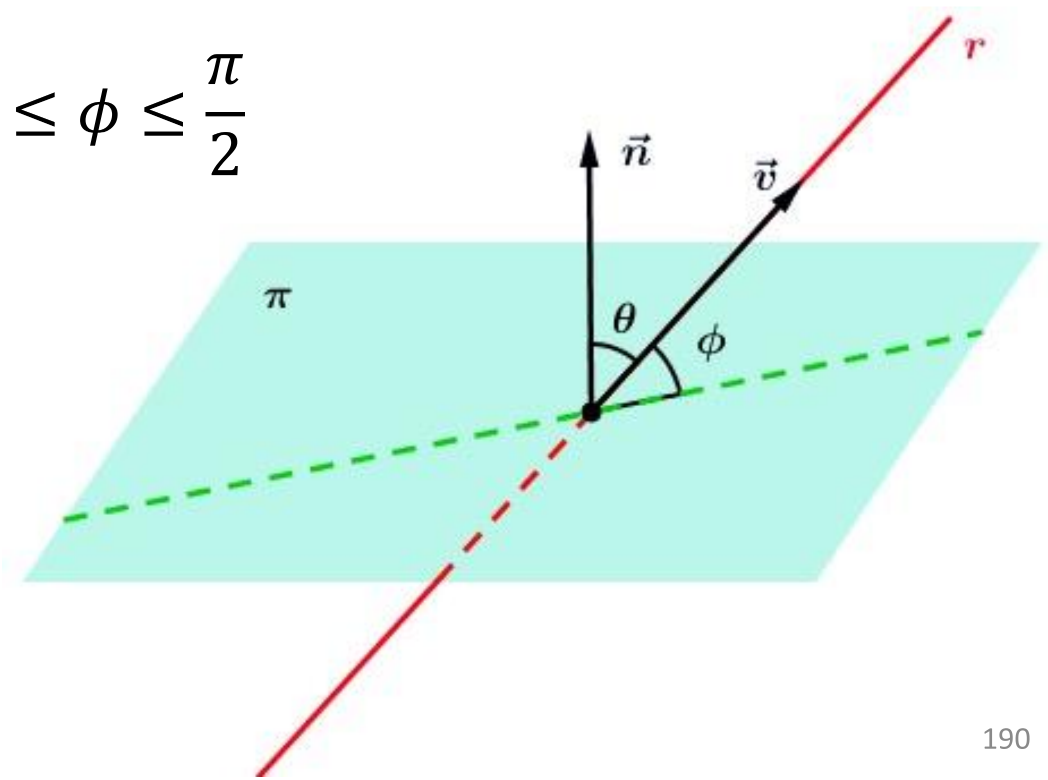
$$n = \frac{1}{2}$$

Ângulo de uma reta com um plano

Dada um reta r, $\vec{v}$ um vetor diretor desta reta e um plano π e $\vec{n}$ vetor normal a este plano.

Assim, o ângulo entre a reta com o plano é dado por

$$sen\,\phi = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{|\vec{v}||\vec{n}|}, \qquad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$$



Exemplo

Determine o ângulo entre a reta e o plano dados a seguir:

$$r: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -t \\ z = 3 + t \end{cases} \qquad \pi: x + y - 5 = 0$$

Resolução

Temos que, $\vec{n} = (1,1,0)$ vetor normal ao plano π e $\vec{v} = (-2,-1,1)$ vetor diretor de r. Assim,

$$sen\,\phi = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{|\vec{v}||\vec{n}|} = \frac{|(-2,-1,1)\cdot(1,1,0)|}{\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(1)^2}\times\sqrt{(1)^2+(1)^2+(0)^2}}$$

$$= \frac{|-3|}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

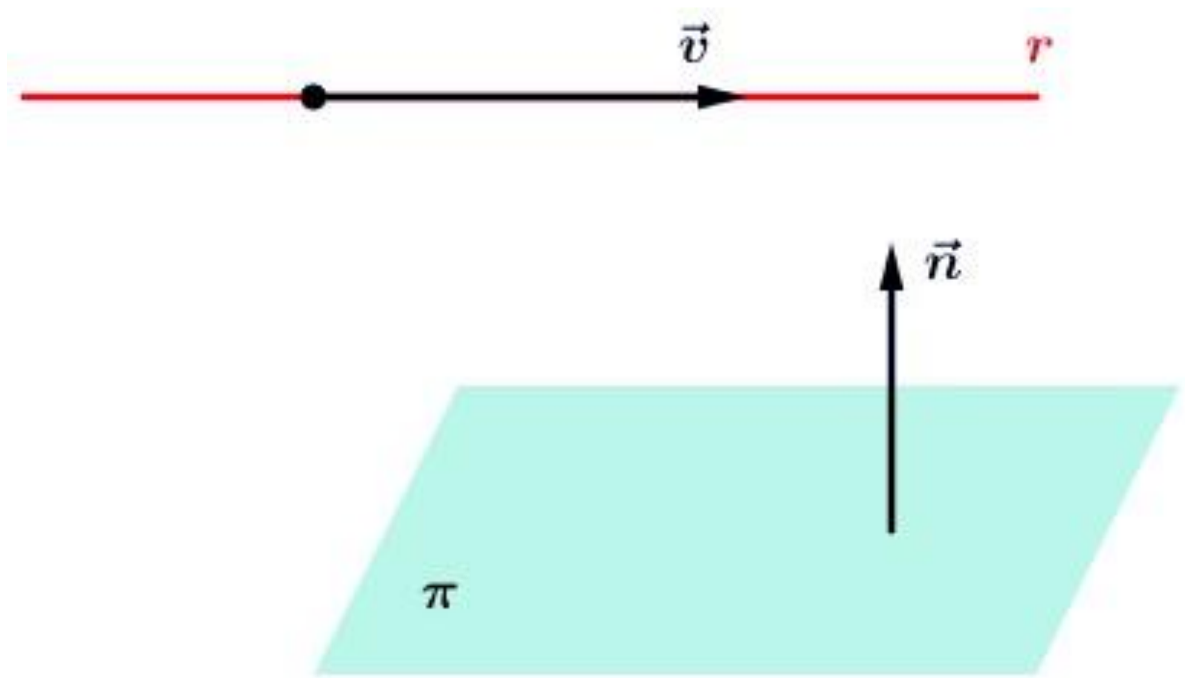
Logo, $\phi = 60°$

Condição de paralelismo entre reta e plano

Dada um reta r, $\vec{v}$ um vetor diretor desta reta, um plano π e $\vec{n}$ vetor normal a este plano,

então,

$$r \,//\, \pi \implies \vec{v} \perp \vec{n} \implies \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

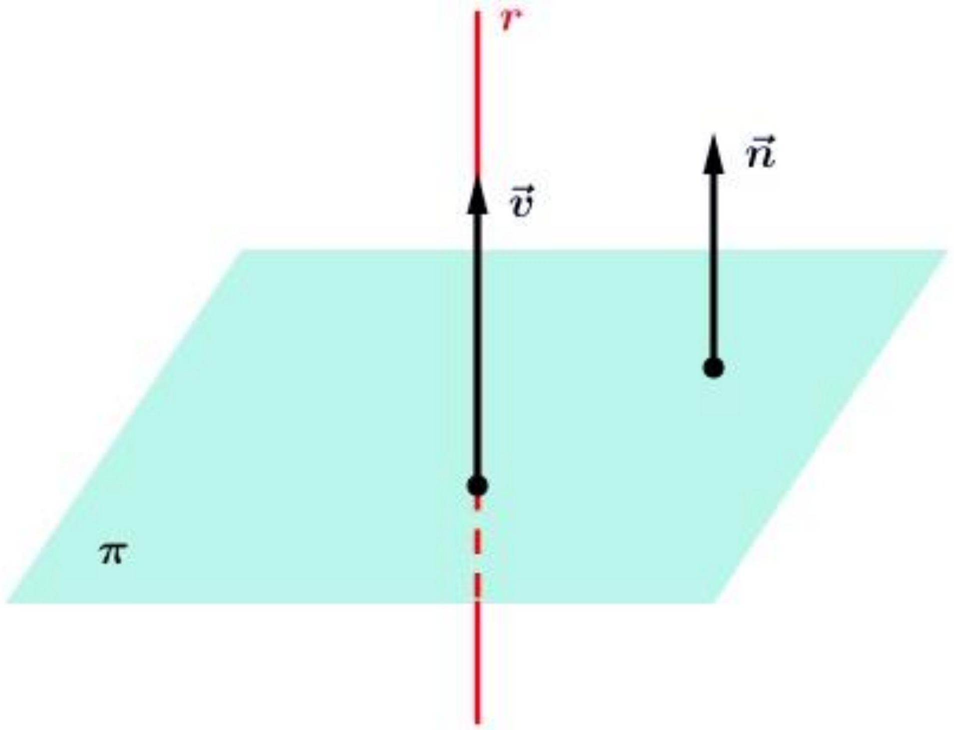


Condição de perpendicularismo entre reta e plano

Dada um reta r, $\vec{v}$ um vetor diretor desta reta, um plano π e $\vec{n}$ vetor normal a este plano,

então,

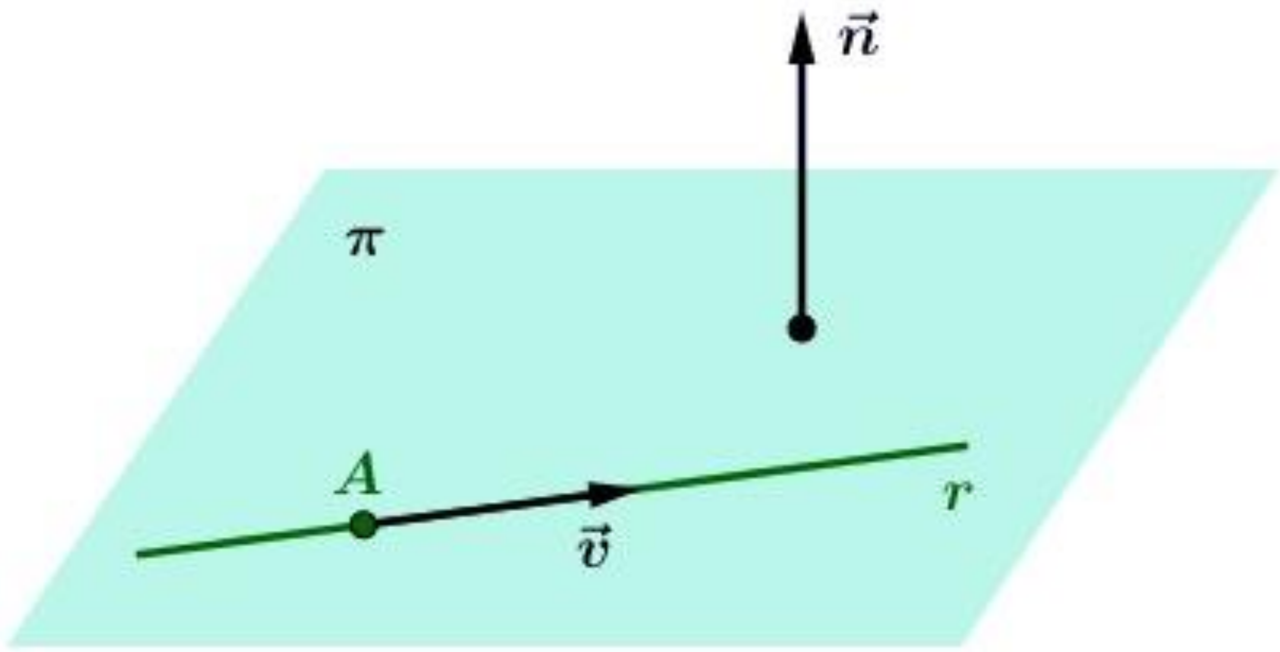
$$r \perp \pi \implies \vec{v} \,//\, \vec{n}$$



Condições para que uma reta esteja contida num plano

Uma reta r, está contida num plano π, se:

i. O vetor diretor de r é ortogonal a $\vec{n}$, e
ii. Um ponto $A \in r$ também pertence ao plano π.



Exemplo

Verifique se a reta e o plano abaixo são perpendiculares.

$$r: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-1} \qquad\qquad \pi: 9x - 6y - 3z + 5 = 0$$

Resolução

Temos que $\vec{n} = (9, -6, -3)$ é o vetor normal ao plano π e $\vec{v} = (3, -2, -1)$ é o vetor diretor de r.

Sabemos que para uma reta r e um plano π serem perpendiculares o vetor diretor da reta tem que ser paralelo ao vetor normal do plano.

Mas isso ocorre, pois $\vec{n} = 3\vec{v}$. Portanto, $r \perp \pi$.

Exemplo

Determine os valores de m e n para que a reta abaixo esteja contida no plano dado.

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{-2} \qquad \pi: mx + ny + 2z - 1 = 0$$

Resolução

Temos que $\vec{n} = (m, n, 2)$ é o vetor normal ao plano π e $\vec{v} = (1, 1, -2)$ é o vetor diretor de r e $A(2, 1, -3) \in r$.

Sabemos que para uma reta r estar contida em π temos que $\vec{v} \perp \vec{n}$ e o ponto $\mathrm{A} \in \pi$. Assim, temos

$$\begin{cases} (1, 1, -2) \cdot (m, n, 2) = 0 \\ m(2) + n(1) + 2(-3) - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m + n - 4 = 0 \\ 2m + n - 7 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos que $m = 3$ e $n = 1$.

Interseção de dois planos

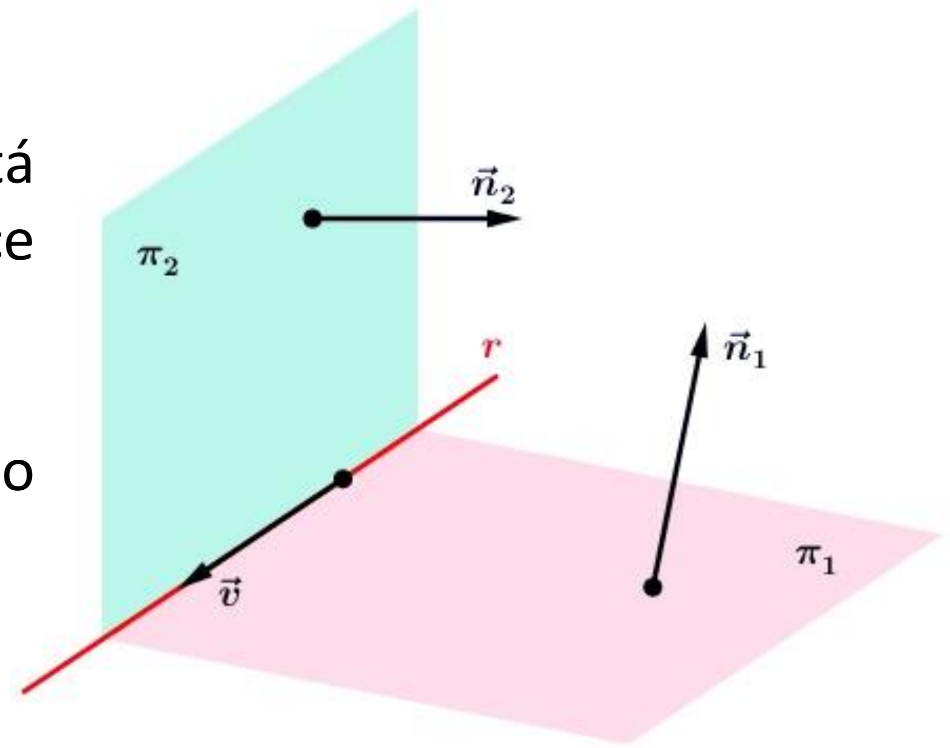
Considere dois planos não paralelos $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

$\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

A interseção desses dois planos é uma reta.

Lembrando que uma reta está determinada quando se conhece dois pontos.

Logo a reta é dada pela solução do sistema formado pelos planos.



$$r: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Exemplo

Determine a reta interseção dos seguintes planos

$$\pi_1: 5x - 2y + z + 7 = 0 \quad \pi_2: 3x - 3y + z + 4 = 0$$

Resolução

Temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} 5x - 2y + z + 7 = 0 \\ 3x - 3y + z + 4 = 0 \end{cases}$$

Por se tratar de um sistema indeterminado, resolvendo em termos de x, temos a equação reduzida da reta.

$$r: \begin{cases} y = -2x - 3 \\ z = -9x - 13 \end{cases}$$

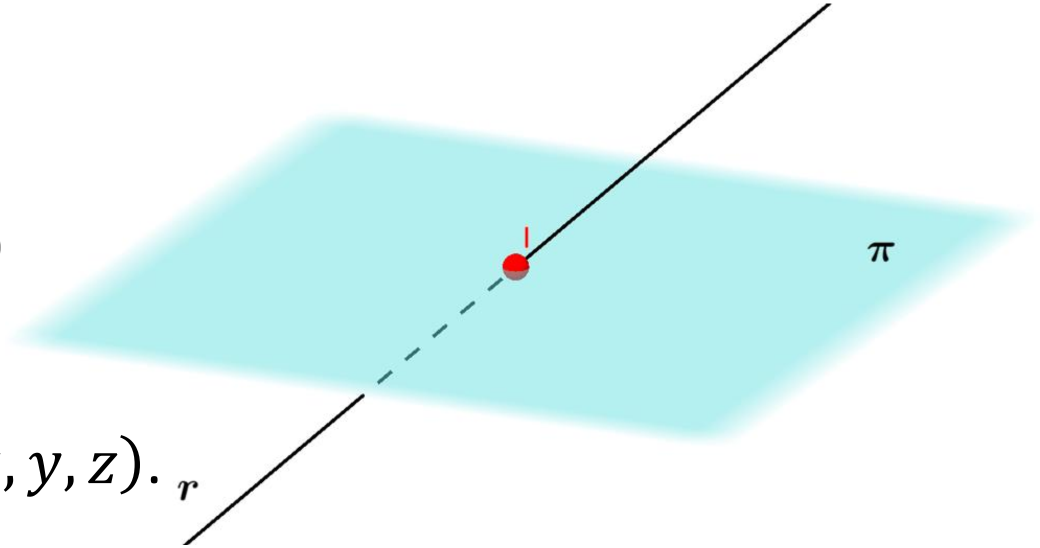
Interseção de reta com plano

Considere a seguinte reta e o seguinte plano

$$r: \begin{cases} y = mx + n \\ z = px + q \end{cases} \qquad \pi: ax + by + cz + d = 0$$

Temos que a interseção da reta com o plano é encontrado através do seguinte sistema

$$\begin{cases} y = mx + n \\ z = px + q \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$



onde sua solução é o ponto $I(x, y, z)$.

Exemplo

Determine o ponto de interseção entre a reta e o plano dados:

$$r: \begin{cases} y = 2x + 3 \\ z = 3x - 4 \end{cases} \qquad \pi: 3x + 5y - 2z - 9 = 0$$

Resolução

Temos que $I(x, y, z)$ é ponto de interseção se I verificar o seguinte sistema

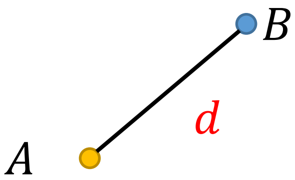
$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ z = 3x - 4 \\ 3x + 5y - 2z - 9 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos que o ponto de interseção é

$$I(-2, -1, -10)$$

Distância entre dois pontos

A distância entre dois pontos $A(x_1, y_1, z_1)$ e $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$ é dado por



$$d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Exemplo: Calcule a distância entre os pontos $A(7,3,4)$ e $\mathrm{B}(1,0,6)$.

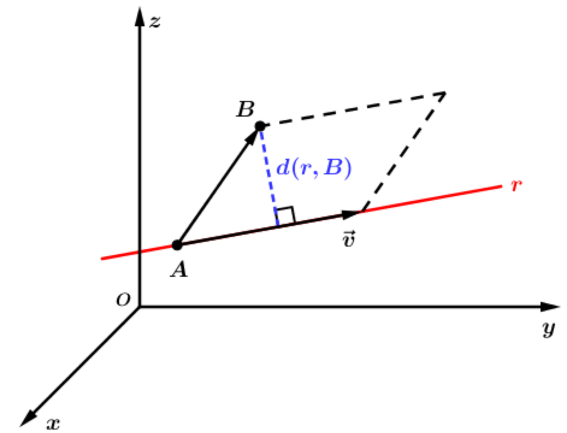
<u>Resolução</u>

$$d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1-7)^2 + (0-3)^2 + (6-4)^2}$$

$$= \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2 + (2)^2} = \sqrt{36 + 9 + 4} = \sqrt{49} = 7\ u.c.$$

Distância de um ponto a uma reta

Dada uma reta r definida por um ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ e pelo vetor diretor $\vec{v} = (a, b, c)$. Seja $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$ um ponto qualquer do espaço.



A distância entre a reta r e o ponto B é dada por

$$d(B, r) = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{AB}|}{|\vec{v}|}$$

Exemplo: Calcule a distância do ponto $A(2, 0, 7)$ a reta $r: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{1}$

<u>Resolução</u>

$\vec{v}$=(2,2,1) e B(0,2,-3) ∈ r ; $\overrightarrow{BA}$=(2,-2,10)

$$\overrightarrow{BA} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 10 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-22,18,8)$$

$$d(A, r) = \frac{|\overrightarrow{BA} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{(-22)^2 + (18)^2 + (8)^2}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{872}}{3}\ u.c.$$

Distância entre duas retas

1. A ***distância entre retas concorrentes*** é nula, por definição;
2. A ***distância entre retas paralelas*** é a distância entre um ponto e uma reta.

$$d(r,s) = d(A,s), \quad A \in r \qquad \text{ou} \qquad d(r,s) = d(r,B), \quad B \in s$$

Exemplo: Calcule a distância entre as retas a seguir

$$r: \begin{cases} y = -2x + 3 \\ z = 2x \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = -3 - 4t \end{cases}$$

<u>**Resolução**</u> $\vec{v}$=(-2,4,-4) e B(-1,1,-3) ∈ s ; A(0,3,0) ∈ r; $\overrightarrow{BA}$=(1,2,3)

$$\overrightarrow{BA} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & -4 \end{vmatrix} = (-20, -2,8)$$

$$d(r,s) = d(A,s) = \frac{|\overrightarrow{BA} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{468}}{\sqrt{36}} = \frac{6\sqrt{13}}{6} = \sqrt{13}$$

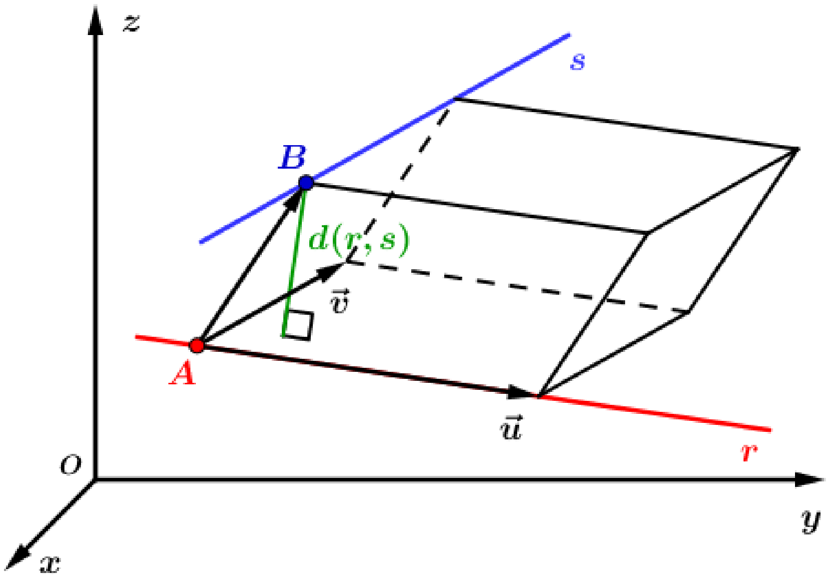
Distância entre duas retas

Sejam r e s retas reversas, $A(x_1, y_1, z_1) \in r$ e $B(x_2, y_2, z_2) \in s$, sendo $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ vetores de r e s, respectivamente.

Assim, os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\overrightarrow{AB}$ determinam um paralelepípedo, o qual sua base é $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e sua altura é a distância entre as retas r e s, visto que s é paralela ao plano da base do paralelepípedo.

Logo, a distância entre as duas retas é dada por

$$d(r, s) = \frac{\left|\left(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}\right)\right|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$



Distância entre duas retas

Exemplo: Calcule a distância entre as seguintes retas a seguir

$$r: \begin{cases} y = 1 \\ x + 2 = \dfrac{z-4}{-2} \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 3 \\ y = 2t - 1 \\ z = -t + 3 \end{cases}$$

<u>**Resolução**</u> $\vec{v}$=(0, 2,-1) e B(3,-1,3) $\in s$

$\vec{u}$=(1,0,-2) e A(-2,1,4) $\in r$; $\overrightarrow{AB}$=(5,-2,-1)

$$\left(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 16 \qquad \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (4,1,2)$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{4^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{21}$$

$$d(r,s) = \frac{\left|\left(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB}\right)\right|}{|\vec{u}\times\vec{v}|} = \frac{|16|}{\sqrt{21}} = \frac{16\sqrt{21}}{21} \text{ u. c.}$$

Distância de um ponto a um plano

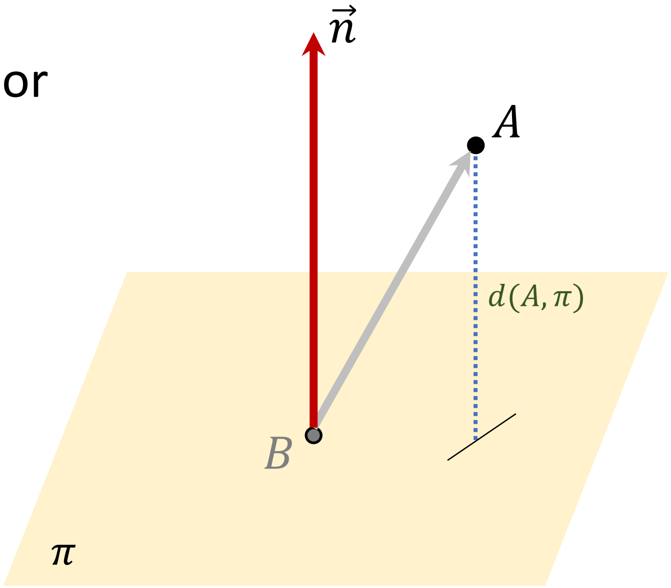
Seja um ponto $\mathrm{A}(x_0, y_0, z_0)$ e um plano $\pi: ax + by + cz + d$, sendo $B \in \pi$

Assim, a distância do ponto A ao plano π é dado por

$$d(A,\pi) = \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

ou

$$d(A,\pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



Exemplo: Calcule a distância do ponto $A(-4, 2, 5)$ ao plano $\pi: 2x + y + 2z + 8 = 0$

<u>Resolução</u> $\vec{n}$=(2,1,2) e B ∈ π;

Fazendo y=0 e z=0, obtemos o ponto B(-4,0,0) ∈ π.

$\overrightarrow{BA}$=(0,2,5)

$$d(A,\pi) = \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|0 + 2 + 10|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{12}{\sqrt{9}} = \frac{12}{3} = 4\ u.c.$$

Distância entre dois planos

A distância entre dois planos é definida apenas quando os planos forem paralelos.

Dados dois planos paralelos π e γ, a distância entre eles é a mesma distância de um ponto qualquer de um dos planos ao outro:

$$d(\pi,\gamma) = d(A,\gamma), \qquad A \in \pi \quad \text{ou} \quad d(\pi,\gamma) = d(\pi,B), \qquad B \in \gamma$$

Exemplo: Calcule a distância entre os seguintes planos:

$$\pi: 2x - 2y + z - 5 = 0 \qquad \gamma: 4x - 4y + 2z + 14 = 0$$

Resolução $\vec{n}$=(4,-4,2) e B ∈ γ ;

Fazendo x=0 e y=0, obtemos o ponto B(0,0,-7) ∈ γ;

O ponto A ∈ π . Fazendo x=0 e y=0, obtemos o ponto A(0,0,5) ∈ π.

$\overrightarrow{BA}$=(0,0,12); $|\vec{n}|$= $\sqrt{4^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{36} = 6$

$\overrightarrow{BA} \cdot \vec{n}$ = (0,0,12) ·(4,-4,2) = 0+0+24 = 24

$$d(\pi,\gamma) = d(A,\gamma) = \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|24|}{6} = 4\, u.c.$$

Distância de uma reta a um plano

A distância entre uma reta e um plano é definida apenas quando a reta e o plano forem paralelos.

Seja uma reta r paralela a um plano π. A distância da reta ao plano se resume a distância de um ponto qualquer da reta ao plano:

$$d(r,\pi) = d(A,\pi), \qquad A \in r$$

$$d(A,\pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Exercícios Propostos

Exercícios - Planos

1. Determine a equação geral do plano que contém o ponto $A(1,2,3)$ e é perpendicular a seguinte reta

$$r: \begin{cases} x = 2y - 3 \\ z = -y + 1 \end{cases}$$

$$\pi: 2x + y - z - 1 = 0$$

2. Determine a equação geral do plano que contém os pontos $A(1,-2,2)$ e $\mathrm{B}(-3,1,-2)$ e é perpendicular ao plano $\pi: 2x + y - z + 8 = 0$.

$$\pi: x - 12y - 10z - 5 = 0$$

3. Qual equação geral do plano que contém o ponto $A(4,1,0)$ e é perpendicular aos planos $\pi: 2x - y - 4z - 6 = 0$ e $\gamma: x + y + 2z - 3 = 0$.

$$\pi: 2x - 8y + 3z = 0$$

Exercícios - Planos

4. Determine a equação geral do plano que contém os seguintes pares de retas

$$r: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 2 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{z-1}{5} \\ y = -1 \end{cases}$$

$\pi: 5x - 4y - 3z - 9 = 0$

5. Determine o valor de m para que seja de $30°$ o ângulo entre os seguintes planos

$$\pi: x + my + 2z - 7 = 0 \qquad \gamma: 4x + 5y + 3z - 2 = 0$$

$m = 1\ ou$
$m = 7$

6. Determine os valores de a e b para que os planos abaixo sejam paralelos

$$\pi: ax + by + 4z - 1 = 0 \qquad \gamma: 3x - 5y - 2z + 5 = 0$$

$a = -6$
$b = 10$

7. Determine o valor de m para que os seguintes planos sejam perpendiculares

$$\pi: 2mx + 2y - z = 0 \qquad \gamma: 3x - my + 2z - 1 = 0$$

$R:\ m = \dfrac{1}{2}$

Exercícios - Planos

8. Determine o ângulo formado pela reta e o plano dados a seguir:

$$r: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z+1}{5} \qquad \pi: 2x - y + 7z - 1 = 0 \qquad R: 60°$$

9. Determine as equações da reta interseção dos seguintes planos:

$$\pi: 3x - y + z - 3 = 0$$

$$\gamma: x + 3y + 2z + 4 = 0$$

$$r: \begin{cases} y = x - 2 \\ z = -2x + 1 \end{cases}$$

10. Determine o ponto de interseção da reta e do plano dado a seguir:

$$r: \begin{cases} x = y \\ y = 1 - 2t \\ z = -t \end{cases} \qquad \pi: 2x + y - z - 4 = 0$$

$$R: \ I(3, -5, -3)$$

Exercícios - Distâncias

1) Calcule a distância do ponto $P(1, 2, 3)$ a reta $r: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$

$R: d(P, r) = 2$

2) Dado o triângulo ABC de vértices $A(-3, 1, 4)$, $B(-4, -1, 0)$ e $C(-4, 3, 5)$. Calcule a medida da altura relativa ao lado BC.

$R: h = \dfrac{\sqrt{3157}}{41}$

Exercícios - Distâncias

3) Calcule a distância entre as seguintes retas:

a) $r: \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$ $s: \begin{cases} y = 3 \\ z = 2x \end{cases}$ $R: d(r,s) = \dfrac{3}{\sqrt{6}}$

b) $r: x = y = z - 2$ $s: \begin{cases} y = x + 1 \\ z = x - 3 \end{cases}$ $R: d(r,s) = \dfrac{\sqrt{186}}{3}$

4) Determine a distância do ponto $A(2, -1, 2)$ aos seguintes planos

a) $\pi: 2x - 2y - z + 3 = 0$ $R: d(P,\pi) = \dfrac{7}{3}$

b) $\gamma: 2x + y = 3$ $R: d(P,\gamma) = 0$

Exercícios - Distâncias

5) Dado o tetraedro de vértices $A(1,2,1)$, $B(2,-1,1)$, $C(0,-1,-1)$ e $D(3,1,0)$. Calcule a medida da altura baixada do vértice D ao plano da face ABC.

$$R: h = \frac{8}{\sqrt{19}}$$

6) Calcule a distância entre os seguintes planos paralelos

a) $\pi: 2x + 2y + 2z = 5$ $\gamma: x + y + z - 3 = 0$ $R: d(\pi, \gamma) = \frac{\sqrt{3}}{6}$

b) $\pi: x - 2z = -1$ $\gamma: 3x - 6z - 8 = 0$ $R: d(\pi, \gamma) = \frac{11}{3\sqrt{5}}$

Exercícios - Distâncias

7) Escrever as equações dos planos paralelos ao plano $\pi: 3x - 2y - 6z - 5 = 0$ que distam 5 unidades da origem.

$$R:\ \gamma: 3x - 2y - 6z \pm 35 = 0$$

8) Calcule a distância da origem a cada um dos seguintes planos

a) $\pi: 3x - 4y + 20 = 0$ $\qquad R: d(O, \pi) = 4$

b) $\gamma: \begin{cases} x = 2 - h + 2t \\ y = 1 + 3h - t \\ z = -t \end{cases}$ $\qquad R: d(O, \gamma) = \dfrac{7}{\sqrt{35}}$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem ser encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/

O GAMA possui monitorias de:

- Pré-cálculo e Matemática Elementar (e disciplinas equivalentes)
- ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
- Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-Reitoria de Ensino

Módulo de Geometria Analítica

Aula 6

Projeto

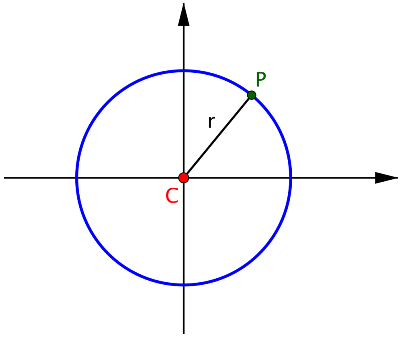
GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

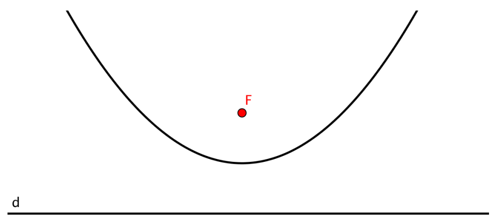
Lugar geométrico

É um conjunto de pontos que satisfaz uma ou mais propriedades geométricas.

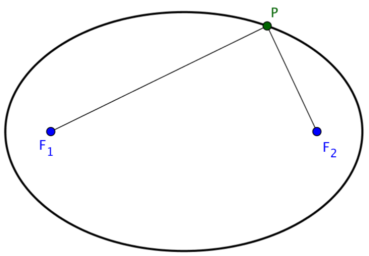
A geometria analítica trata do estudo de lugares geométricos (pontos, retas, circunferências, parábolas,...) através de representações algébricas (pares ordenados, equações, sistemas, etc).



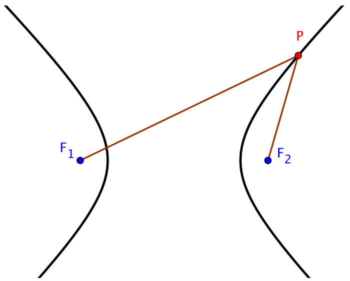
circunferência



parábola



elipse

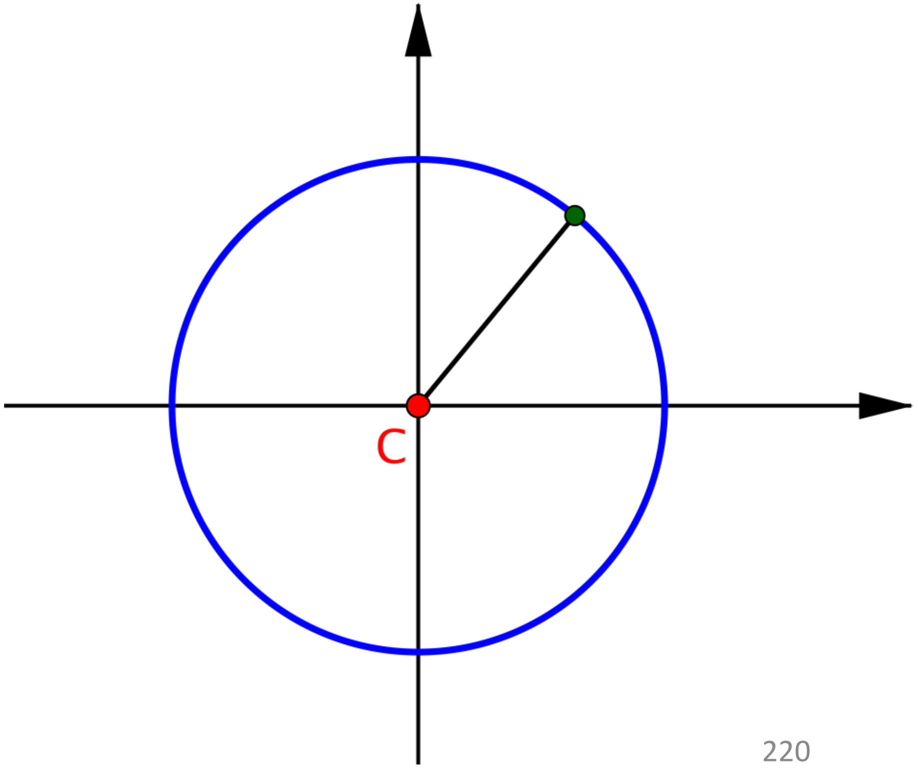


hipérbole

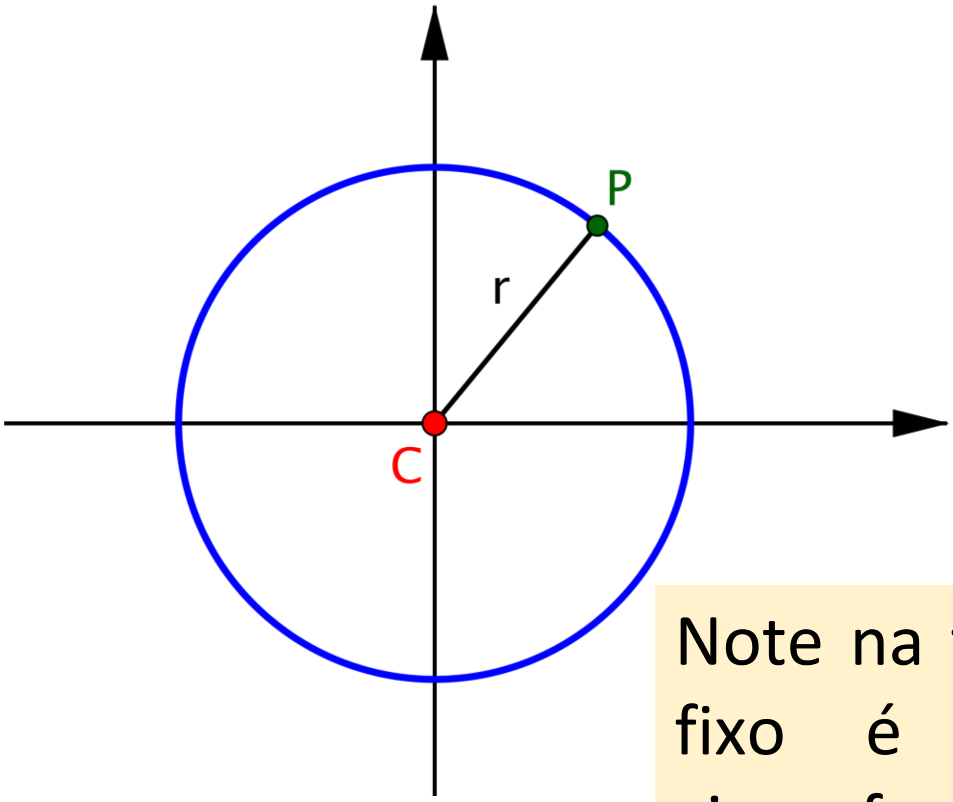
Circunferência

Considere um ponto *C* em um plano.

Definição: Circunferência é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja distância a um ponto fixo *C* é constante.



Circunferência



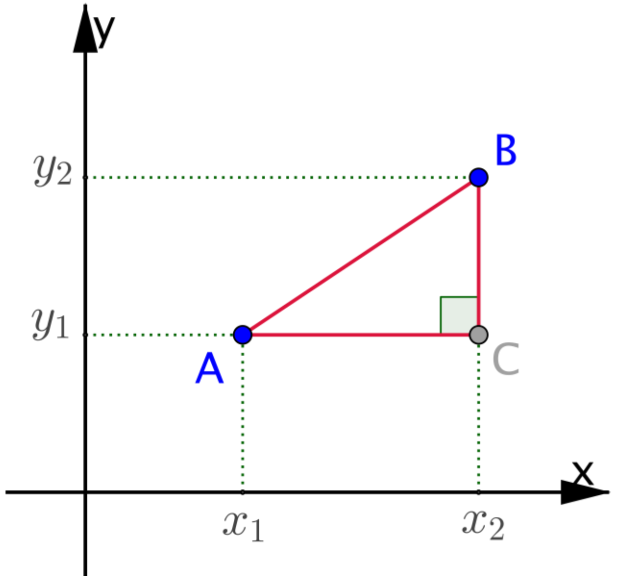
Elementos

- Centro: é o ponto fixo *C*
- Raio: é o segmento CP

Note na figura ao lado que o ponto fixo é denominado centro da circunferência e a distância de seus pontos ao centro é denominada raio da circunferência.

Lembrete: distância entre dois pontos

Dados dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, podemos calcular a distância d_{AB} entre eles da seguinte forma:



Aplicando Pitágoras no triângulo ABC, temos:

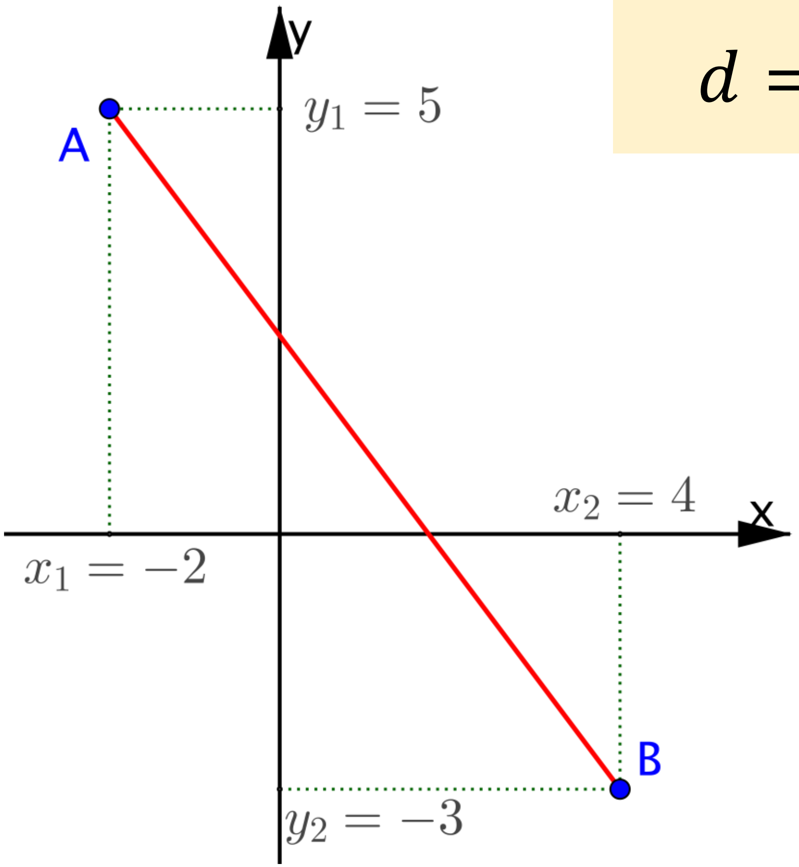
$$d_{AB}^2 = d_{AC}^2 + d_{BC}^2$$

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Lembrete: distância entre dois pontos

Exemplo: Calcule a distância entre os pontos $A(-2,5)$ e $B(4,-3)$.



$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(4+2)^2 + (-3-5)^2}$$

$$= \sqrt{36 + 64}$$

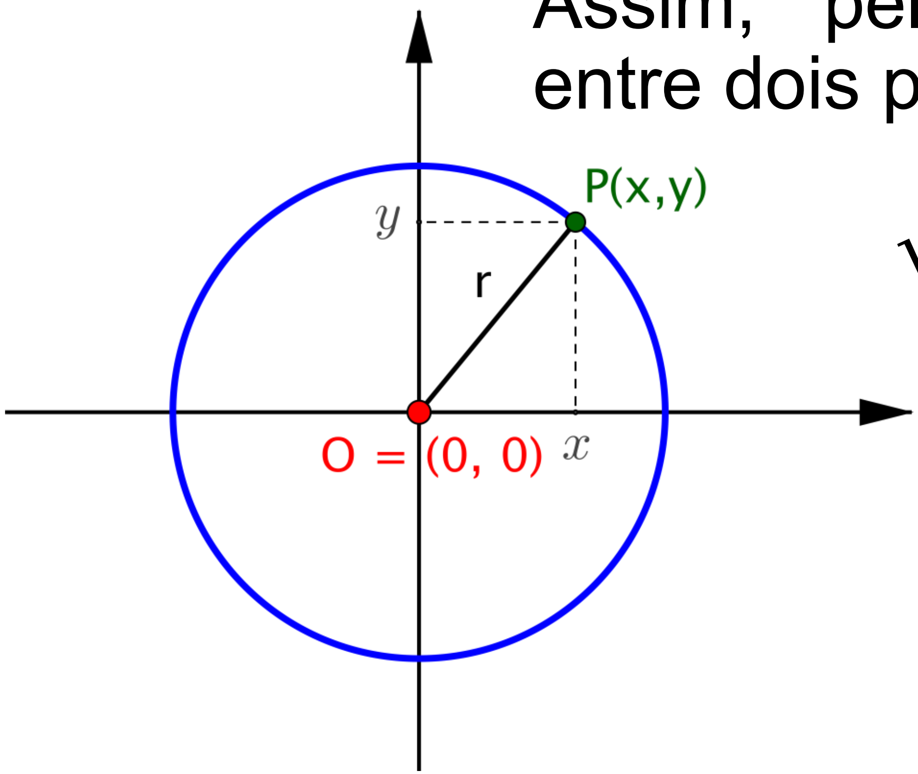
$$= \sqrt{100}$$

$$= 10$$

Equação da circunferência com centro na origem

Consideremos uma circunferência de raio r e centro em $O(0,0)$.

Para que $P(x,y)$ seja ponto da circunferência, $d_{PO} = r$.



Assim, pela fórmula da distância entre dois pontos, vem:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = r$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

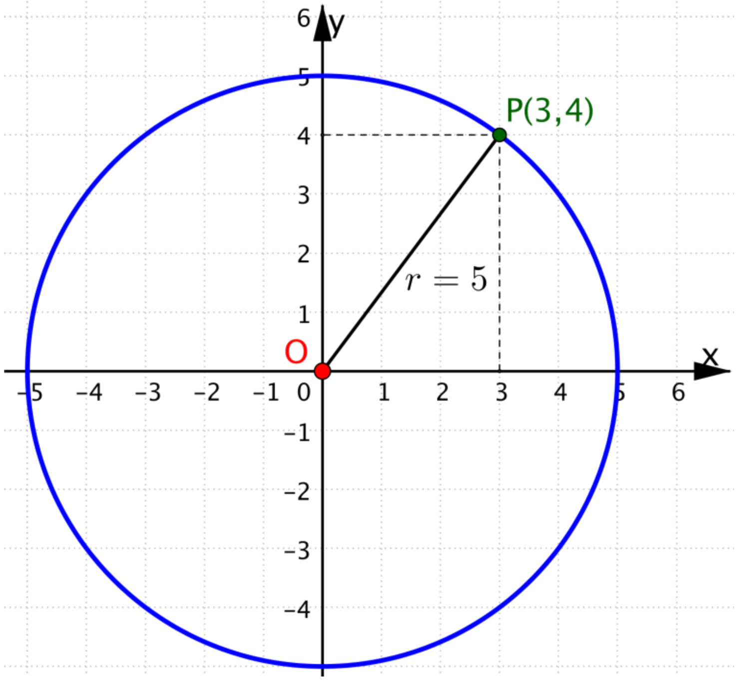
Equação da circunferência de centro na origem

Exemplo: A circunferência de centro $O(0,0)$ e raio $r = 5$ tem equação

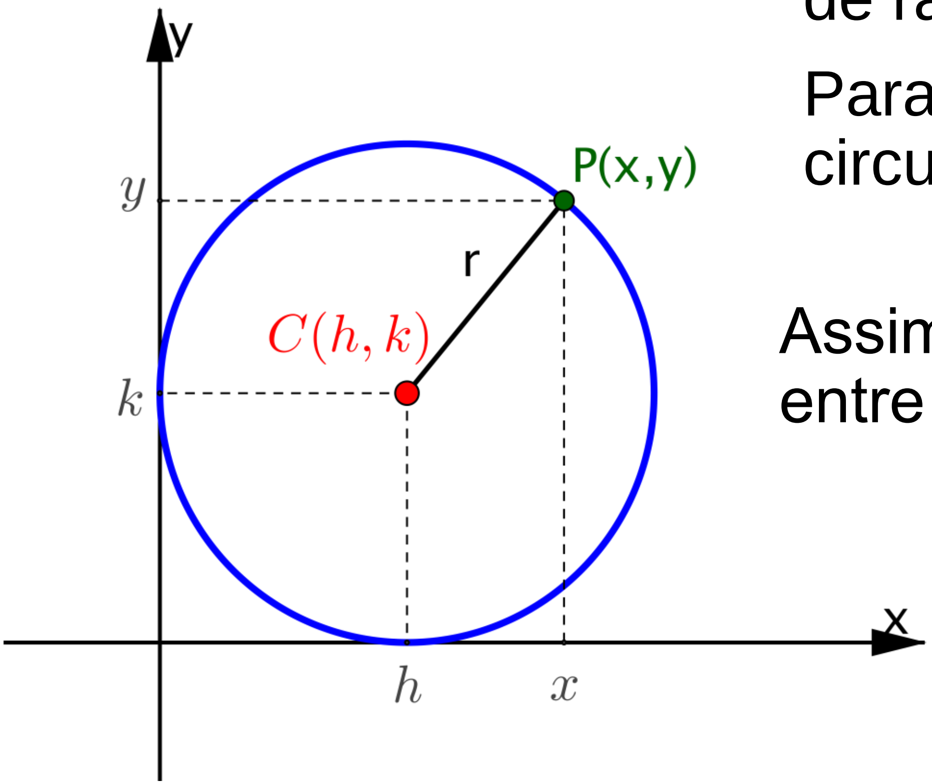
$$x^2 + y^2 = 25$$

Isso significa que essa circunferência é o lugar geométrico dos pontos que tem a soma dos quadrados das coordenadas igual a 25.

O ponto (3,4) pertence a circunferência, pois $3^2 + 4^2 = 5^2$. Já o ponto (1,4) não pertence a circunferência, visto que $1^2 + 4^2 \neq 5^2$.



Equação da circunferência de centro fora da origem



Consideremos uma circunferência de raio r e centro em $C(h,k)$.

Para que $P(x,y)$ seja ponto da circunferência, $d_{PC} = r$.

Assim, pela fórmula da distância entre dois pontos, vem:

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} = r$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$

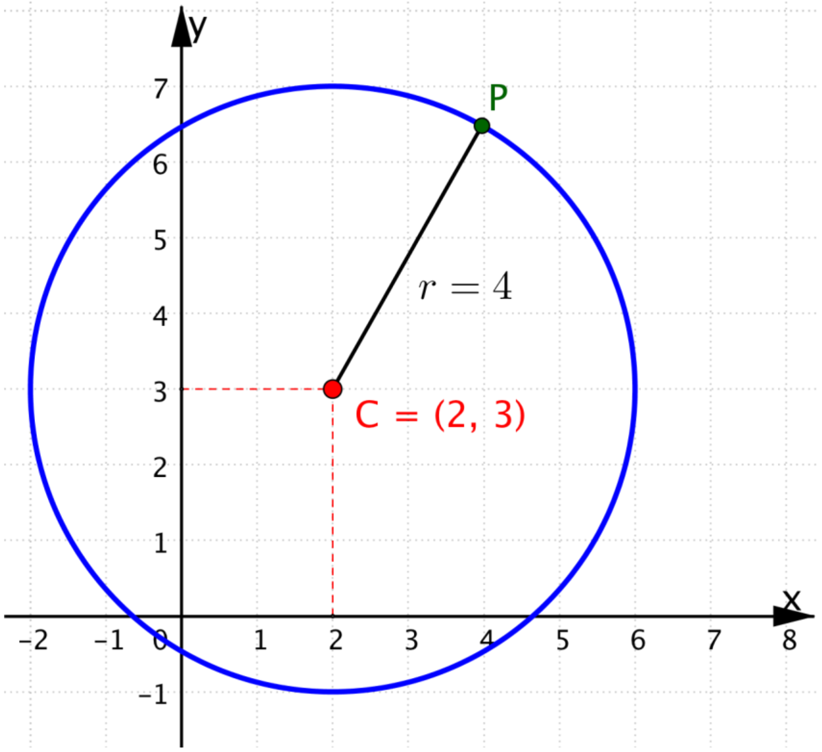
Equação da circunferência de centro fora da origem

<u>Exemplo</u>: A circunferência de centro $C(2,3)$ e raio $r = 4$ tem equação

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = 4^2$$
$$(x-2)^2+(y-3)^2 = 16$$

O ponto (2,-1) pertence a circunferência, pois

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = 4^2$$
$$(2-2)^2 + (-1-3)^2 = 16$$
$$0^2 + (-4)^2 = 16$$
$$16 = 16$$



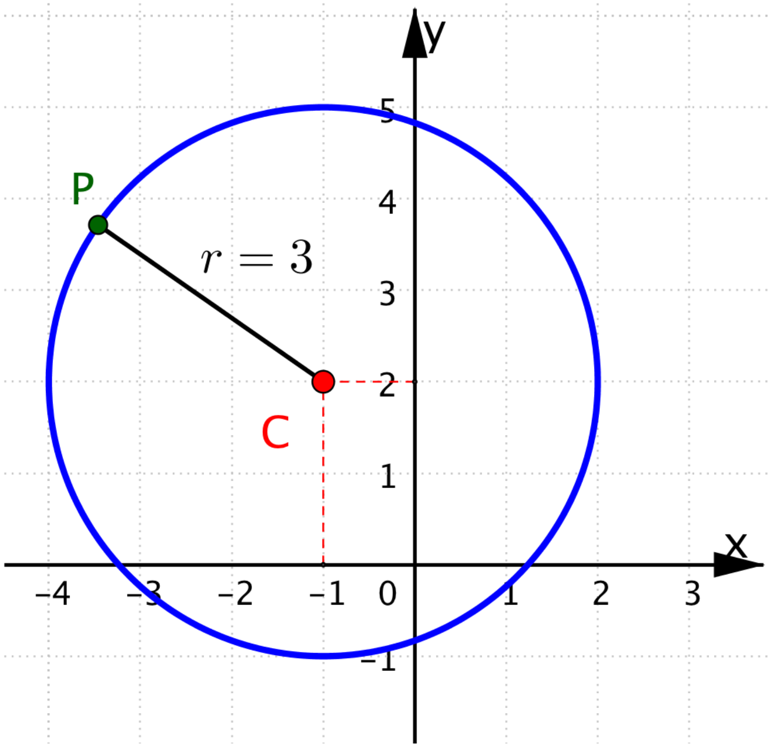
Equação da circunferência de centro fora da origem

<u>Exemplo</u>: A circunferência de centro $C(-1,2)$ e raio $r = 3$ tem equação

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = 3^2$$

$$(x-(-1))^2+(y-2)^2 = 9$$

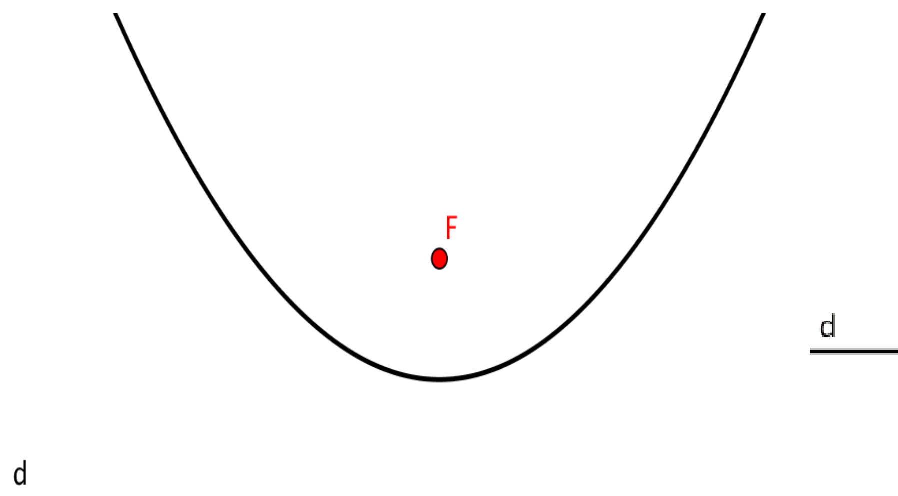
$$(x+1)^2+(y-2)^2 = 9$$

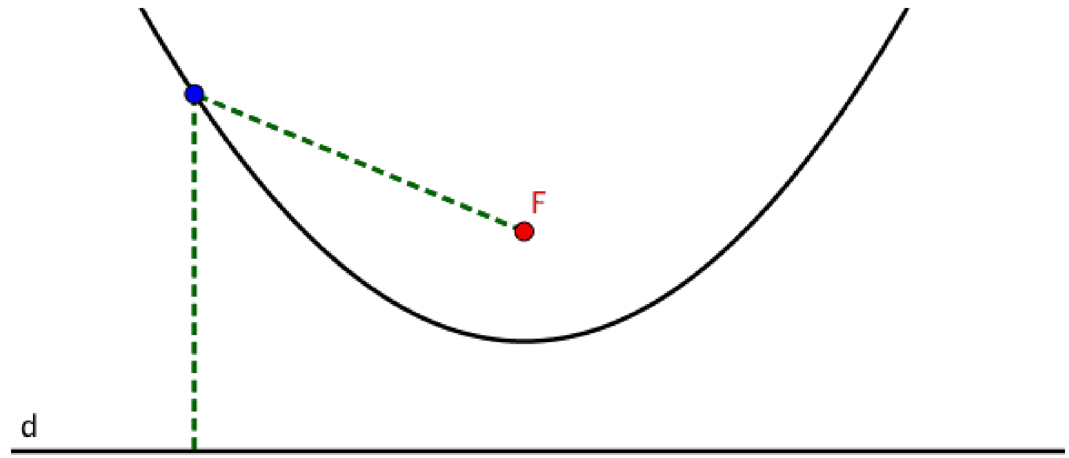


Parábola

Considere em um plano uma reta $\boldsymbol{d}$ e um ponto $\boldsymbol{F}$ não pertencente a $\boldsymbol{d}$.

Definição: Parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes de $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{d}$.

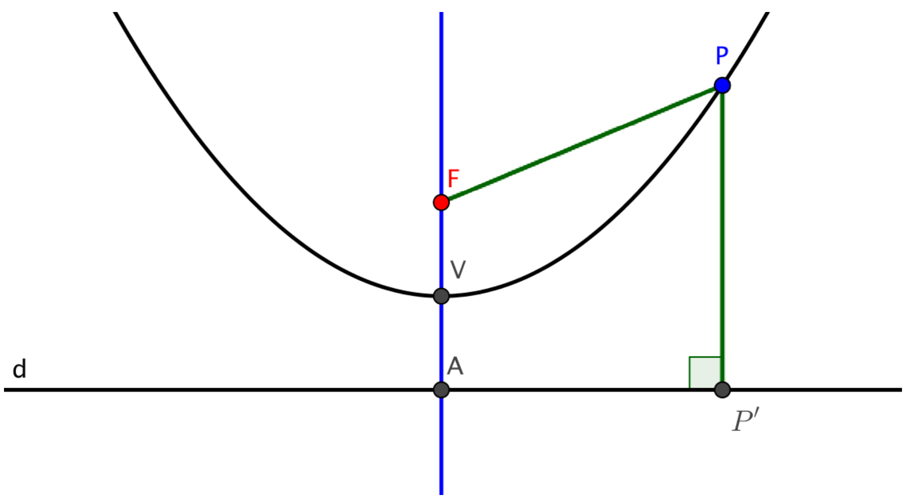




Parábola

Elementos

- Foco: é o ponto F.
- Diretriz: é a reta d.
- Eixo: é a reta que passa pelo foco e é perpendicular à diretriz.
- Vértice: é o ponto V de intersecção da parábola com o seu eixo.



$$d(P,F) = d(P,P')$$

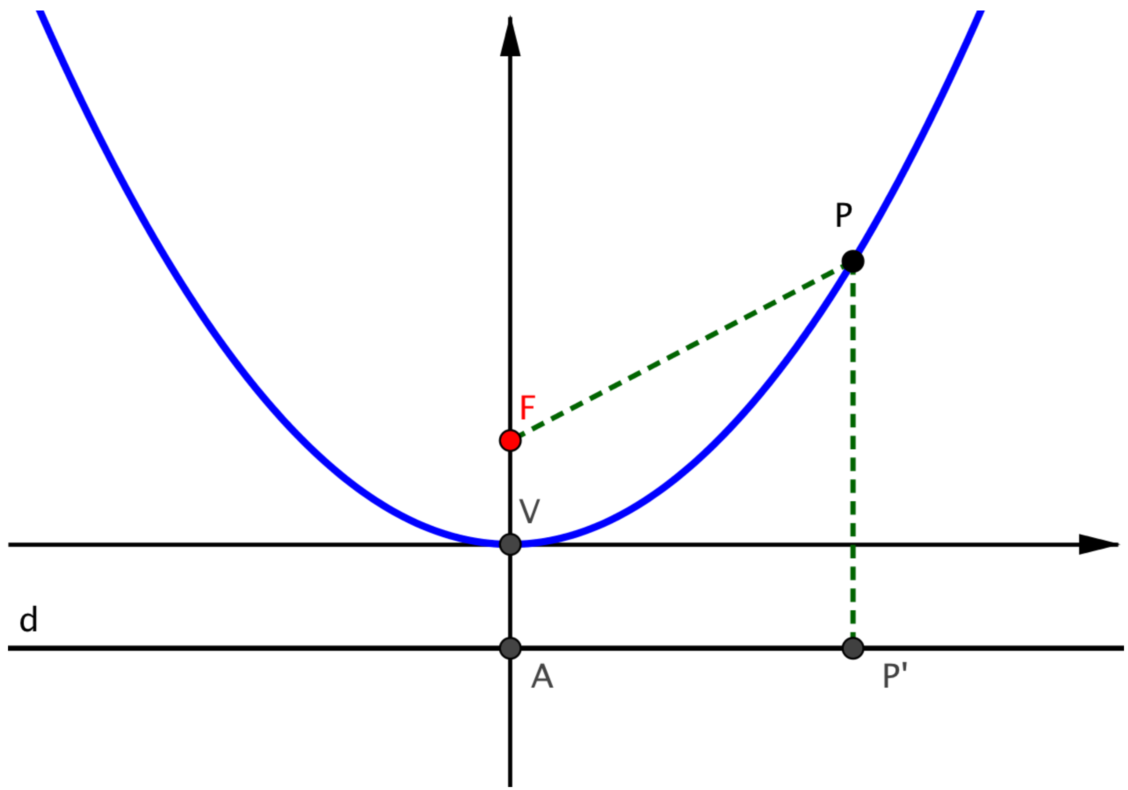
$$d(V,F) = d(V,A)$$

Equação da parábola de vértice na origem do sistema

<u>1º Caso: o eixo da parábola é o eixo dos y</u>

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da parábola de foco $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$.

Equação reduzida da parábola: $x^2 = 2py$

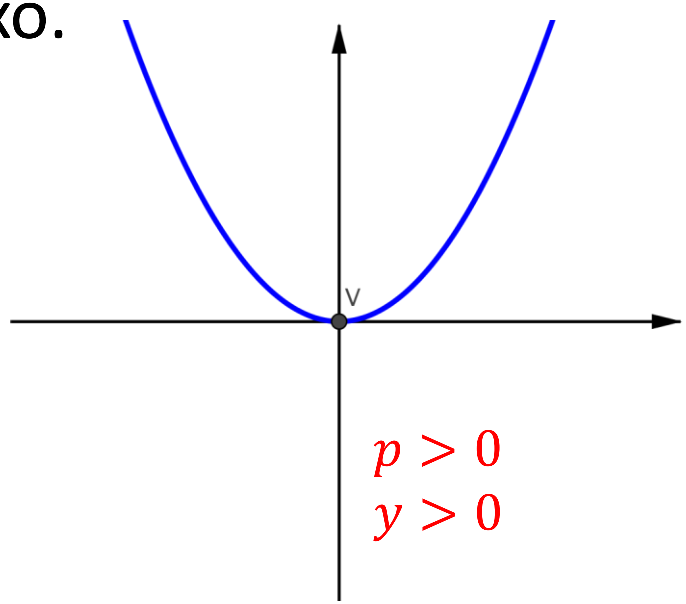


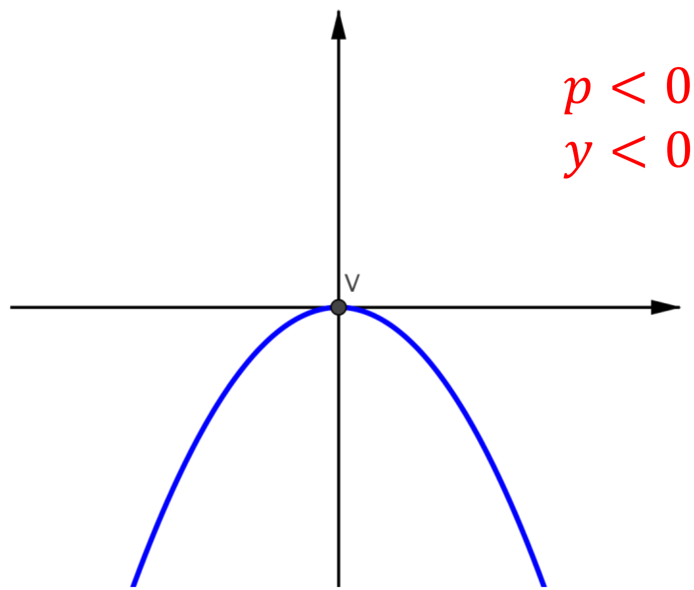
Equação da parábola de vértice na origem do sistema

<u>1º Caso: o eixo da parábola é o eixo dos y</u>

Como $2py$ é sempre positivo ou nulo (pois $x^2 \geq 0$), os sinais de p e de y são sempre iguais. Logo,

- Se $p > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima.
- Se $p < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo.



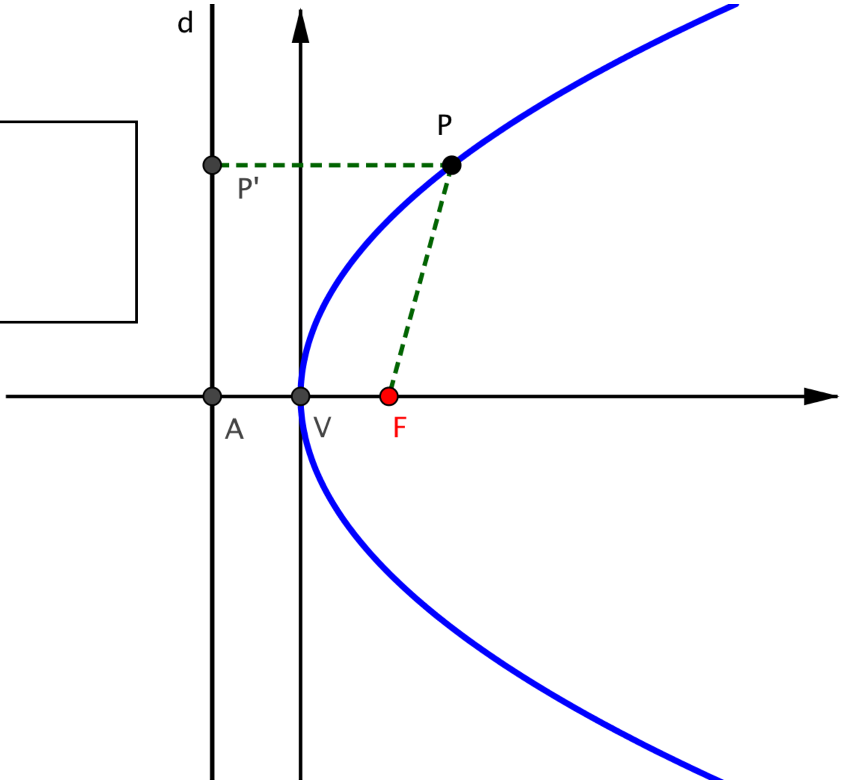


Equação da parábola de vértice na origem do sistema

<u>2º Caso: o eixo da parábola é o eixo dos x</u>

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da parábola de foco $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

Equação reduzida da parábola: $y^2 = 2px$

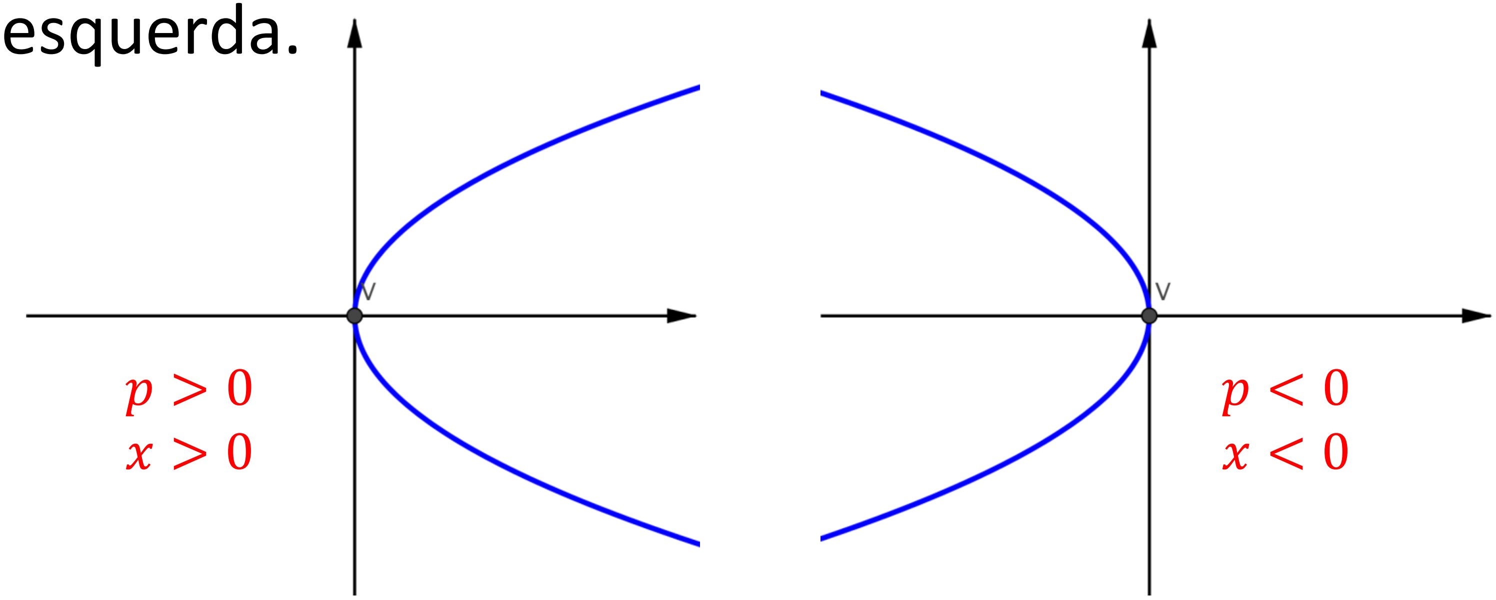


Equação da parábola de vértice na origem do sistema

<u>2º Caso: o eixo da parábola é o eixo dos x</u>

Conforme o sinal de p teremos:

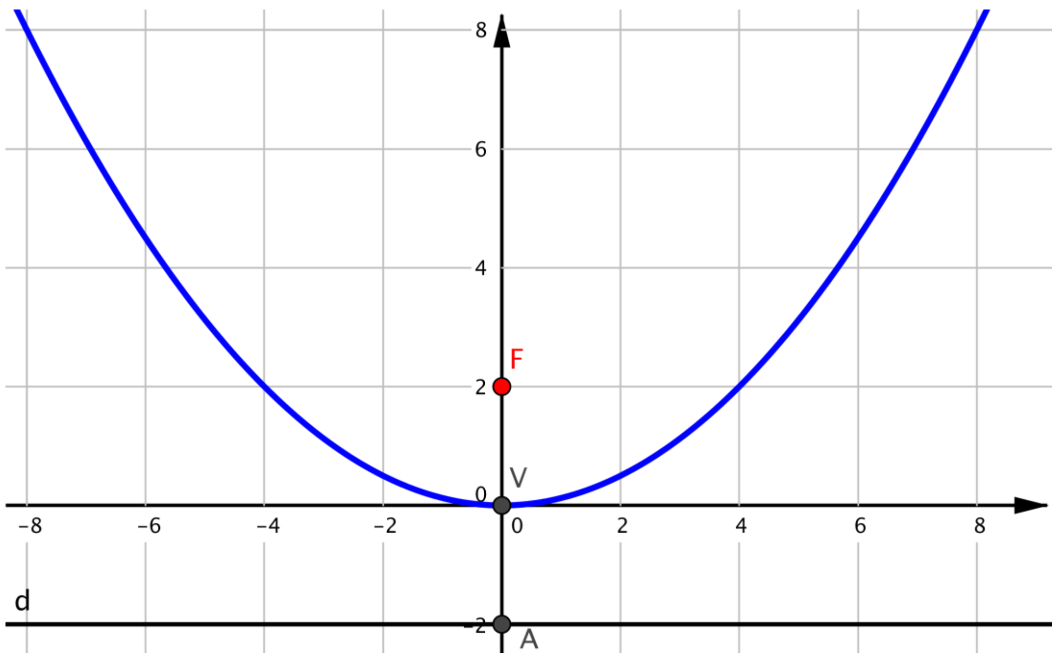
- Se $p > 0$, a parábola tem concavidade voltada para a direita.
- Se $p < 0$, a parábola tem concavidade voltada para a esquerda.



Exemplos

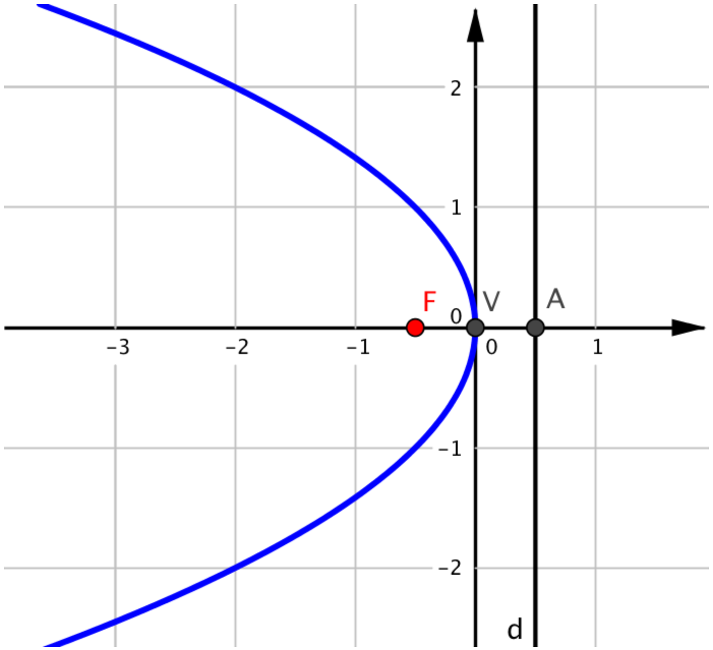
1. Determinar o foco, a equação da diretriz das parábolas e esboçar o gráfico das seguintes equações:

(a) $x^2 = 8y$



Exemplos

(b) $y^2 = -2x$



2. Determine a equação da parábola sabendo que tem vértice em $V(0,0)$, passa pelo ponto $P(-2,5)$ e concavidade voltada para cima.

$R.: x^2 = \frac{4}{5}y$

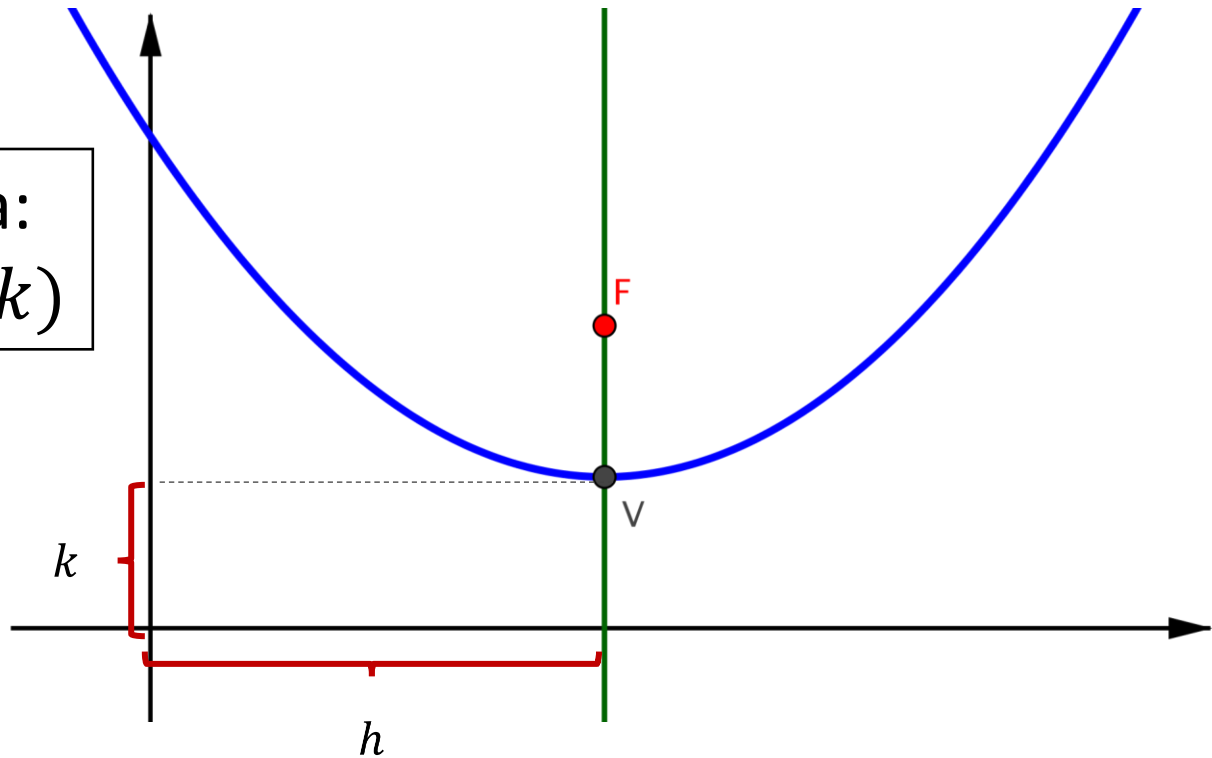
Equação da parábola de vértice fora da origem do sistema

<u>1º Caso: o eixo da parábola é paralelo ao eixo dos y</u>

Seja uma parábola de vértice $V(h,k)$ e eixo paralelo ao eixo dos y, sendo h e k coordenadas de V em relação ao sistema xOy.

Equação da parábola:

$$(x-h)^2 = 2p(y-k)$$



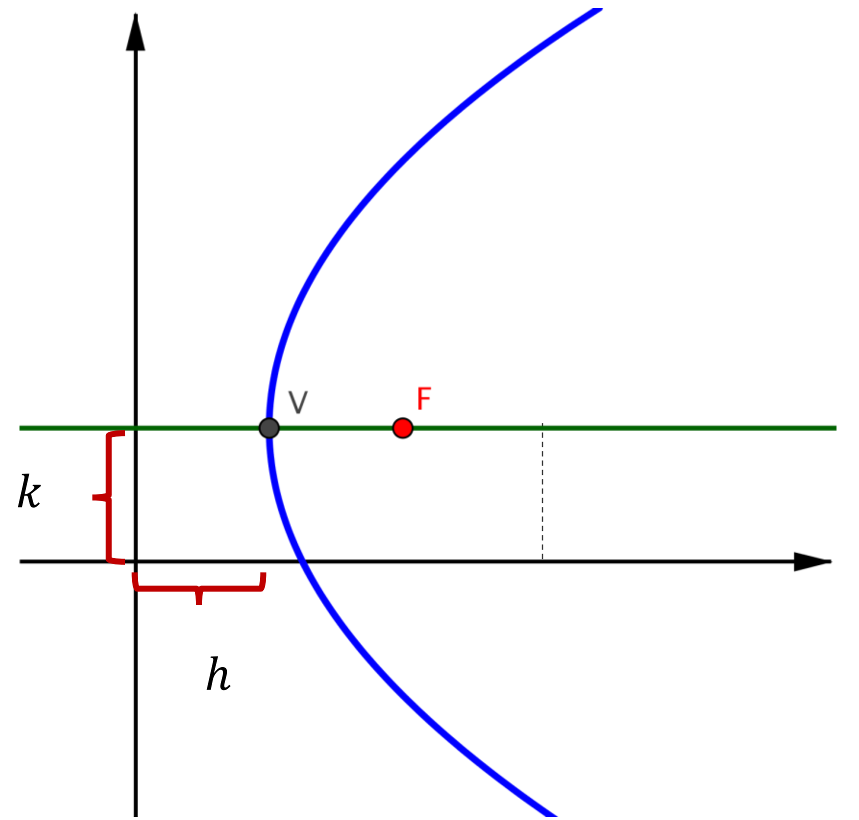
Equação da parábola de vértice fora da origem do sistema

2º Caso: o eixo da parábola é paralelo ao eixo dos x

Seja uma parábola de vértice $V(h, k)$ e eixo paralelo ao eixo dos x, sendo h e k coordenadas de V em relação ao sistema xOy.

Equação da parábola:

$$(y - k)^2 = 2p(x - h)$$



Exemplos

1) Determinar a equação da parábola de vértice $V(3, -1)$, sabendo que $y - 1 = 0$ é a equação de sua diretriz.

R.: $(x-3)^2 = -4(y+1)$

2) Determinar a equação da parábola de foco $F(1,2)$, sabendo que $x = 5$ é a equação de sua diretriz.

R.: $(y-2)^2 = -4(x-3)$

Equação da parábola na forma explícita

Uma equação na forma $(x-h)^2 = 2p(y-k)$ pode ser apresentada por

$$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$$

chamada forma explícita da equação da parábola cujo eixo é paralelo ao eixo y.

Exemplos

1) Apresente a equação explícita da parábola com vértice $V(2,-1)$ e $p = \frac{1}{8}$.

R.: $y = 4x^2 - 16x + 15$

2) A partir da equação explícita encontrada no exercício anterior, transforme-a na equação na forma $(x-h)^2 = 2p(y-k)$.

R.: $(x-2)^2 = 1/4(y+1)$

Equação da parábola na forma explícita

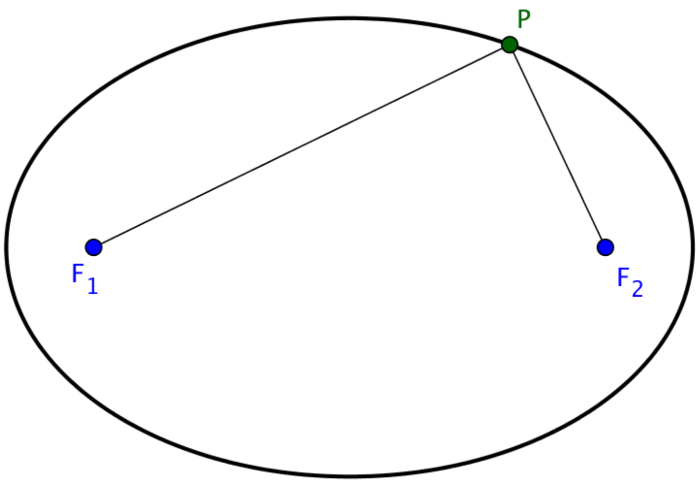
De forma análoga, uma equação na forma $(y-k)^2 = 2p(x-h)$ pode ser apresentada por

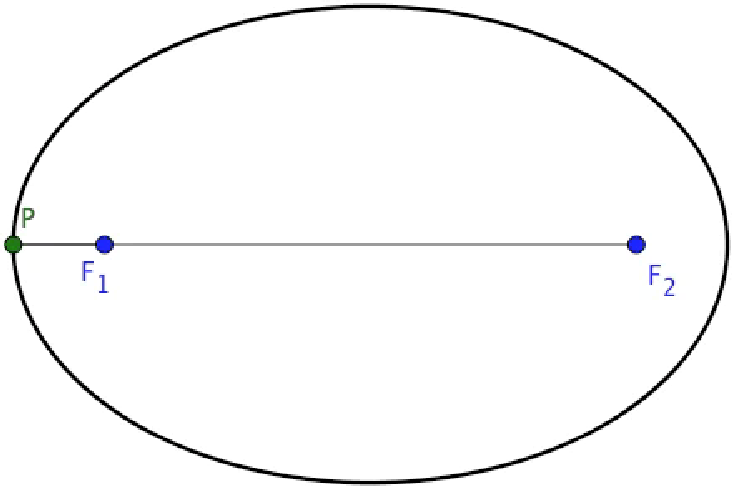
$$\boldsymbol{x = ay^2 + by + c}$$

<u>Exemplo</u>: Determine o vértice, um esboço do gráfico, o foco e a equação da diretriz da parábola $y^2 + 6y - 8x + 1 = 0$.

Elipse

Definição: Elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano cujas distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante.



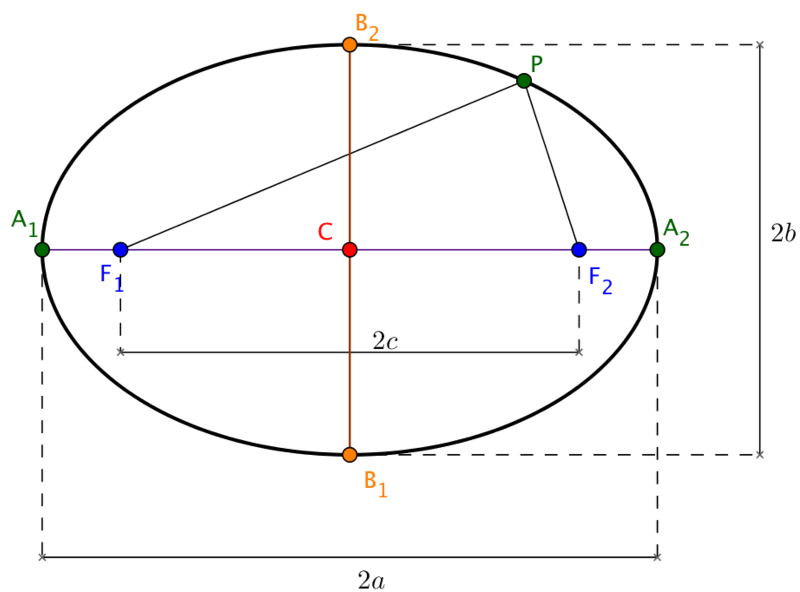


Elipse

Considere

- F_1 e F_2 pontos distintos, tal que $d(F_1, F_2) = 2c$
- Seja a um número real tal que $2a > 2c$.
- Ao conjunto de todos os pontos P do plano tais que $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ é chamado de elipse.

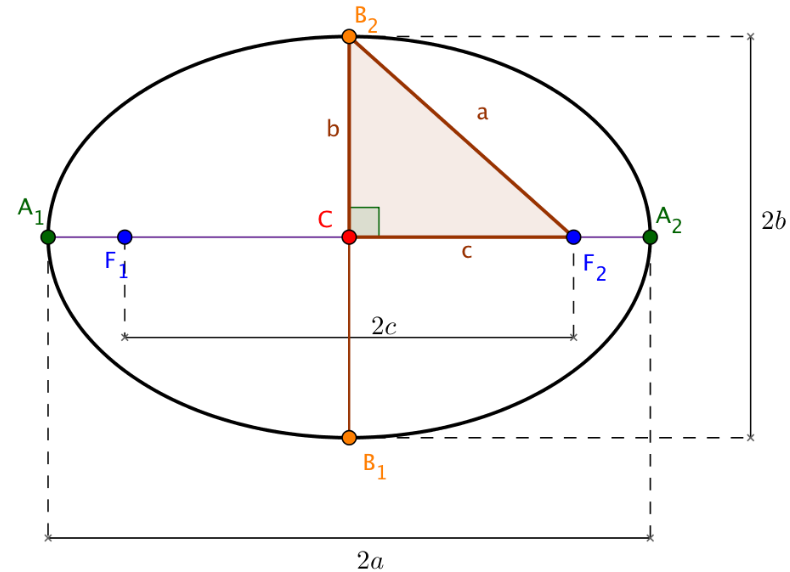
$$\left|\overrightarrow{PF_1}\right| + \left|\overrightarrow{PF_2}\right| = 2a$$



Elipse

Elementos

1. Focos: são os pontos F_1 e F_2
2. Distância focal: $2c$
3. Centro: é o ponto médio do segmento F_1F_2
4. Eixo maior: é o segmento A_1A_2
5. Eixo menor: é o segmento B_1B_2
6. Vértices: são os pontos A_1, A_2, B_1, B_2
7. Excentricidade: $e = \dfrac{c}{a}$

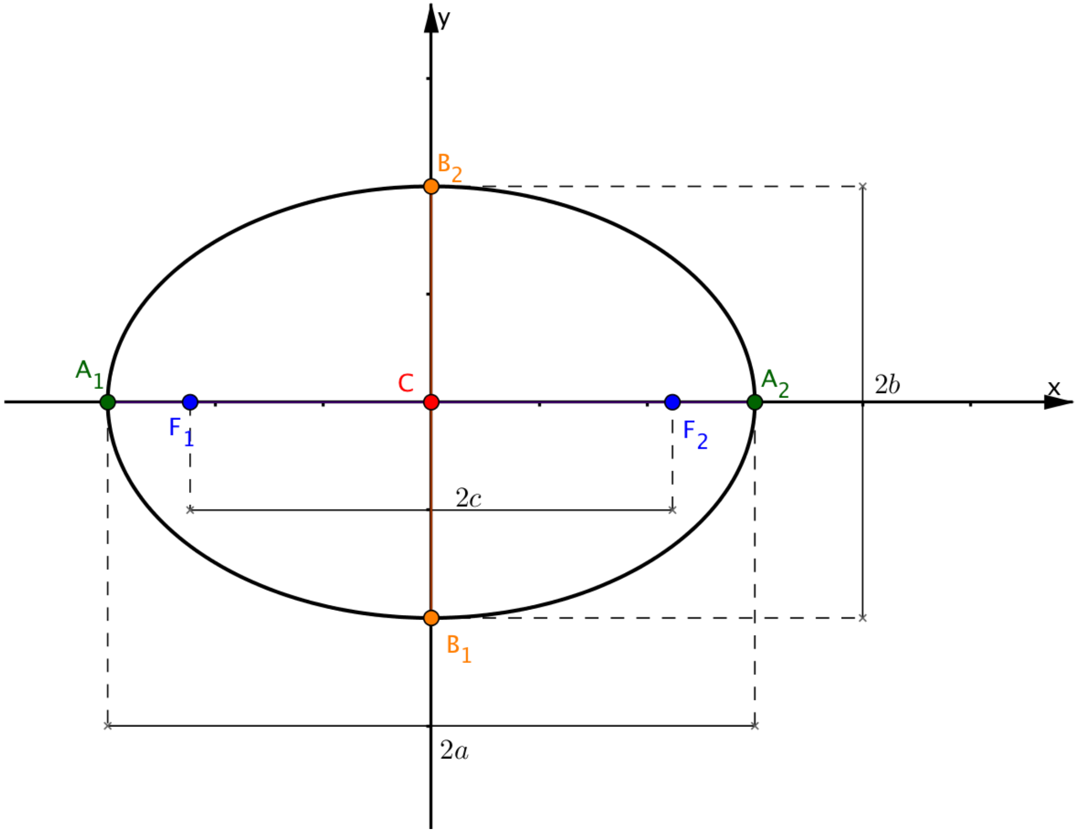


$$a^2 = b^2 + c^2$$

Equação da elipse de centro na origem

1º) Eixo maior está sobre o eixo dos x.

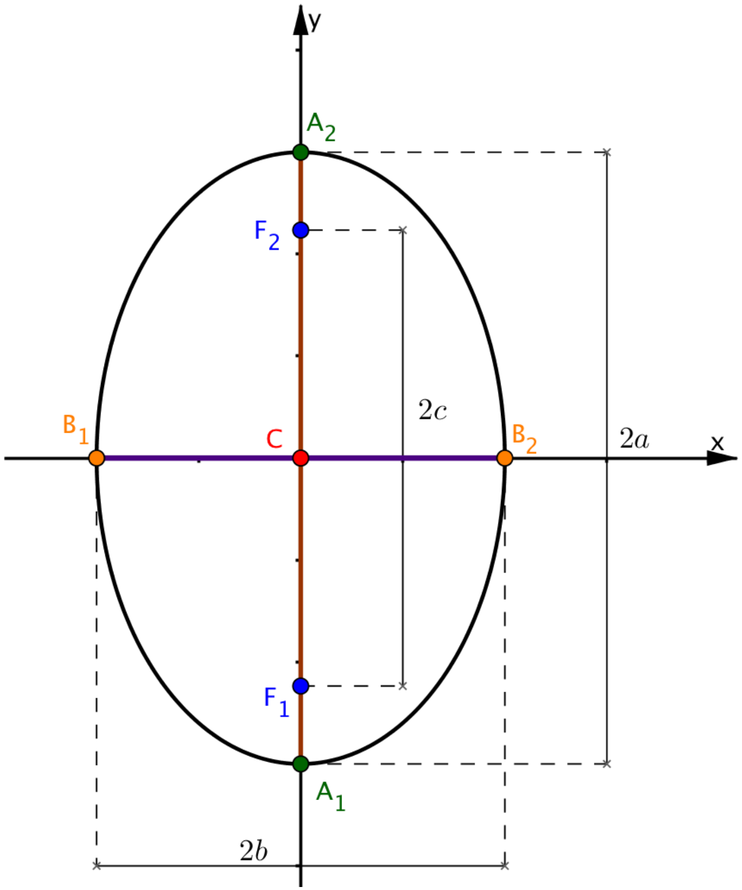
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Equação da elipse de centro na origem

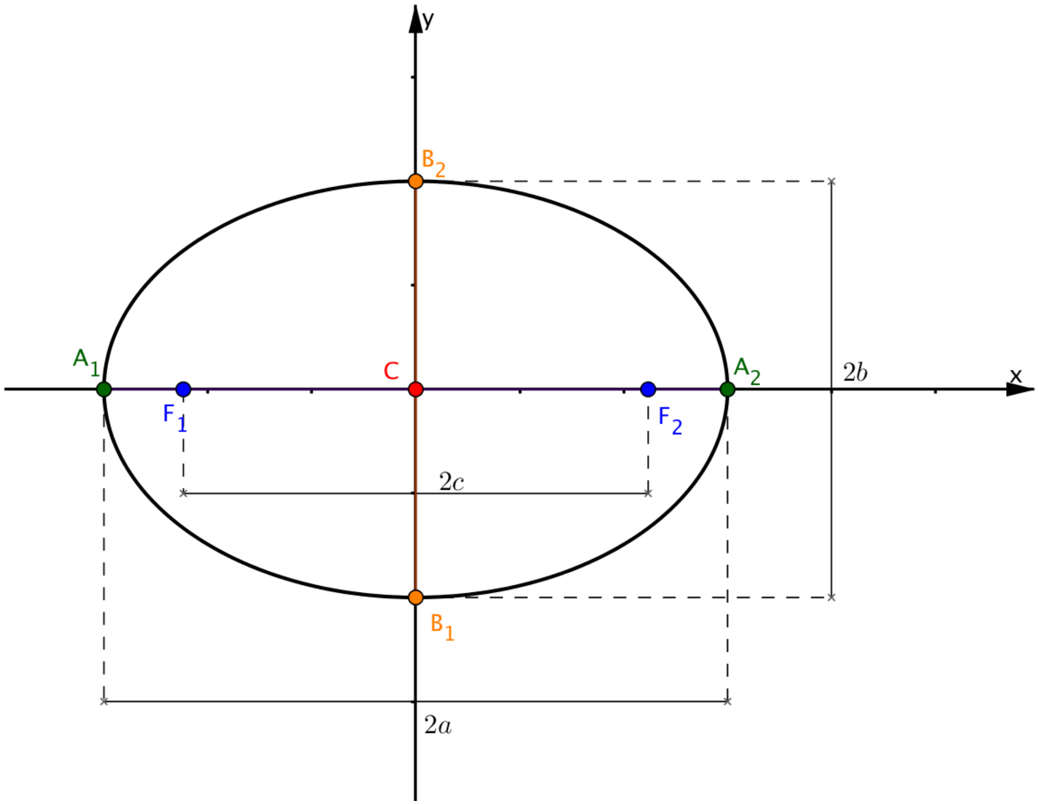
2º) Eixo maior está sobre o eixo dos y.

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$



Exemplos

1) Esboce o gráfico da elipse de equação reduzida $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1.$



Equação da elipse de centro na origem

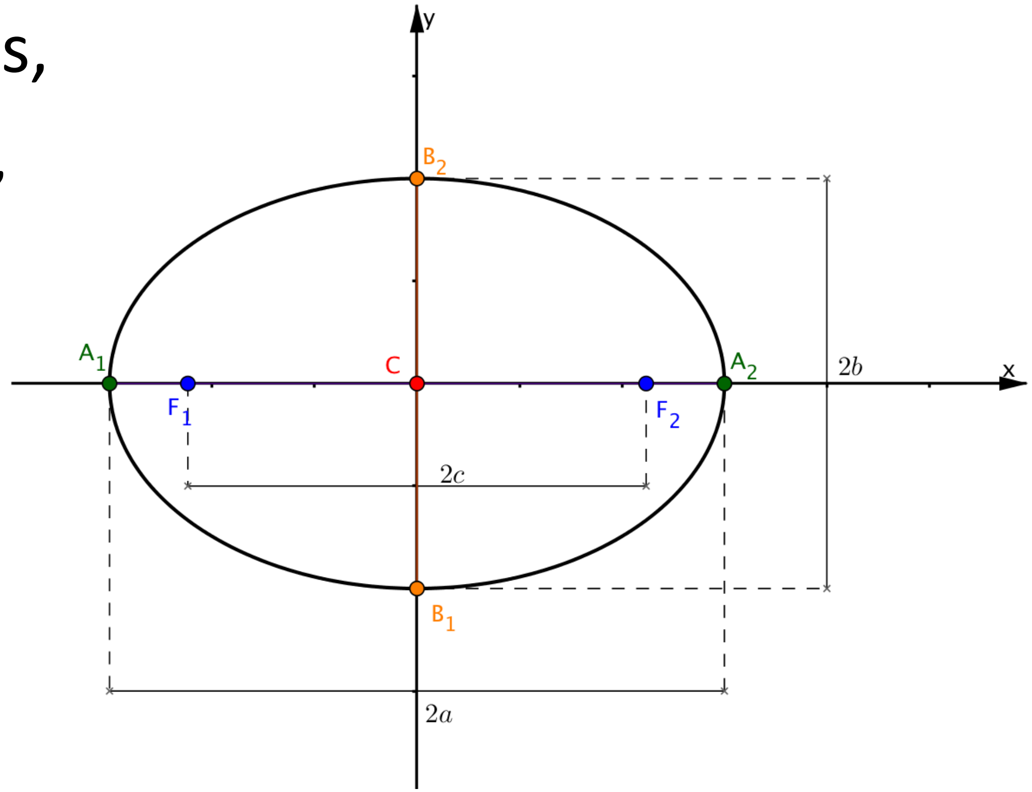
2) Determine

(a) medida dos semi-eixos,

(b) um esboço do gráfico,

(c) os focos e

(d) excentricidade



$$9x^2 + 25y^2 = 225$$

Equação da elipse de centro fora da origem

1º) Eixo maior é paralelo ao eixo dos x.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

2º) Eixo maior é paralelo ao eixo dos y.

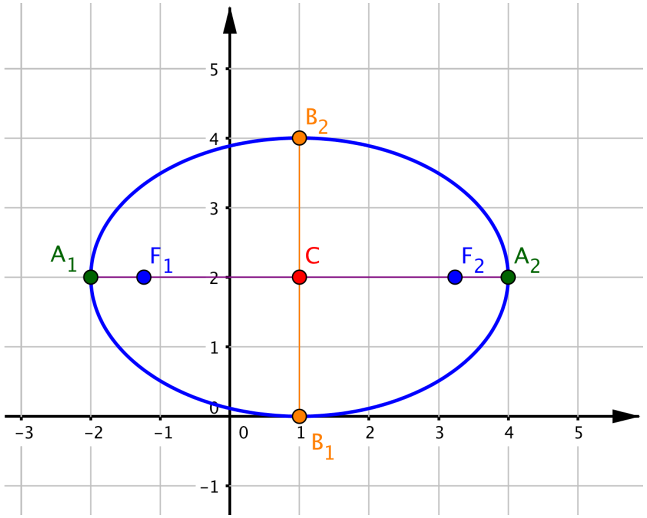
$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Exemplos

1. Uma elipse, cujo eixo maior é paralelo ao eixo dos y, tem centro $C(4,2)$, excentricidade $e = \frac{1}{2}$, e eixo menor de medida 6. Qual é a equação desta elipse?

Rta.: $\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{12} = 1$

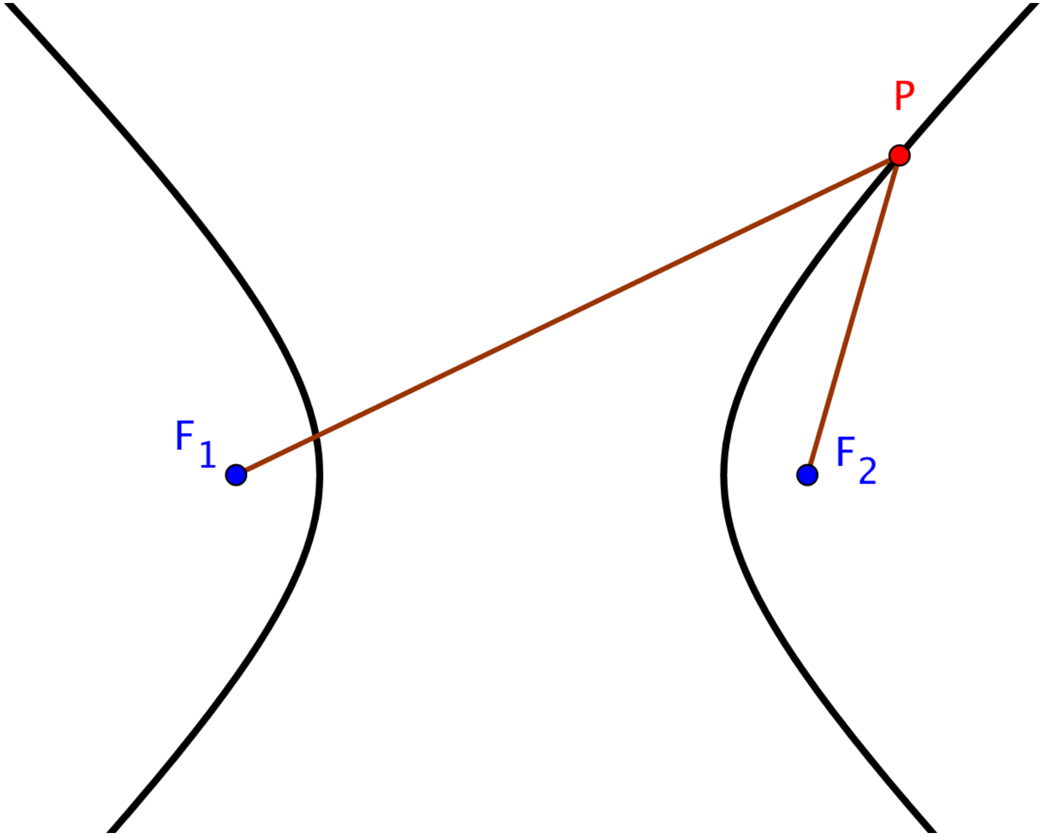
2. Determine o centro, os vértices, os focos e a excentricidade da elipse de equação $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0.$



Hipérbole

Definição: Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja diferença das distâncias, em valor absoluto, a dois pontos fixos desse plano é constante.

$$\left| |\overrightarrow{PF_1}| - |\overrightarrow{PF_2}| \right| = 2a$$

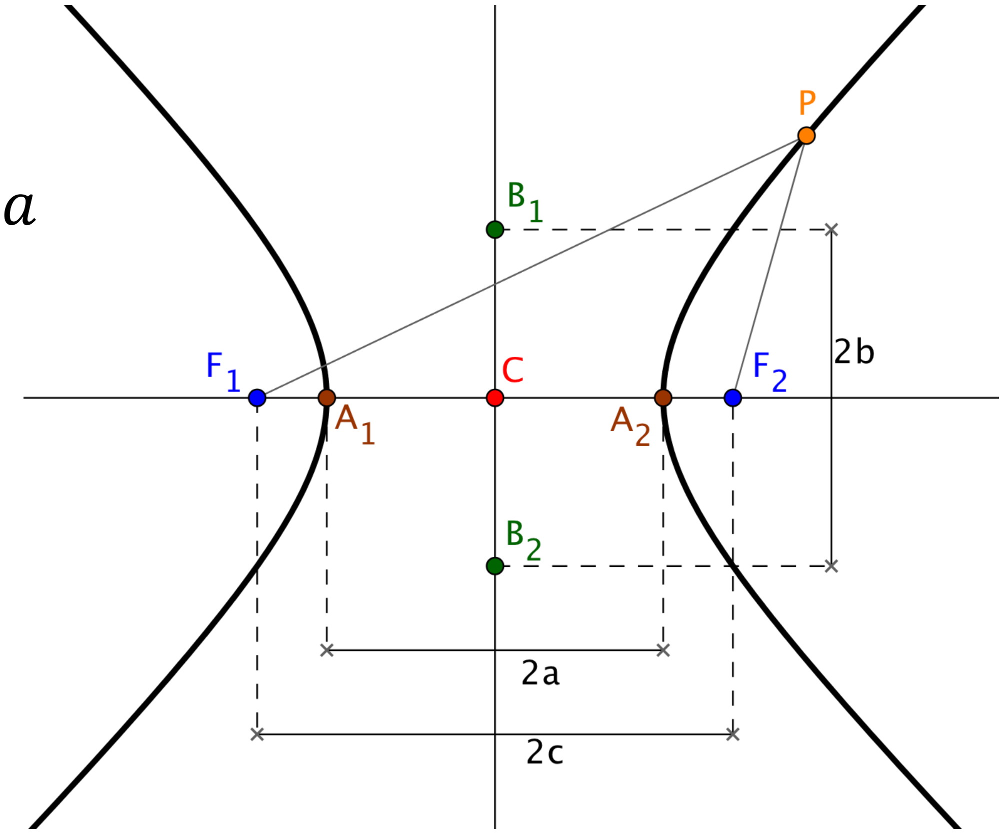


Hipérbole

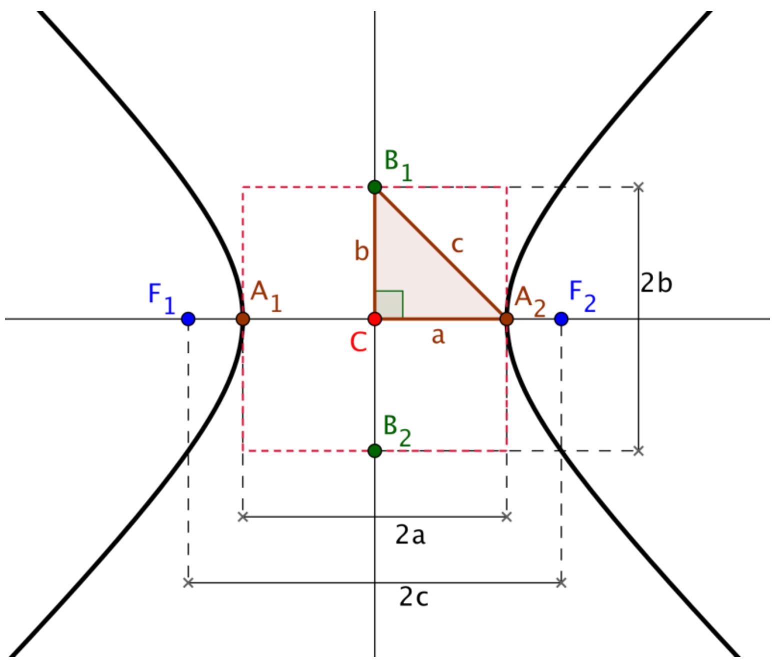
Considere

- F_1 e F_2 pontos distintos, tal que $d(F_1, F_2) = 2c$
- Seja a um número real tal que $2a < 2c$.

$$\left| |\overrightarrow{PF_1}| - |\overrightarrow{PF_2}| \right| = 2a$$



Hipérbole



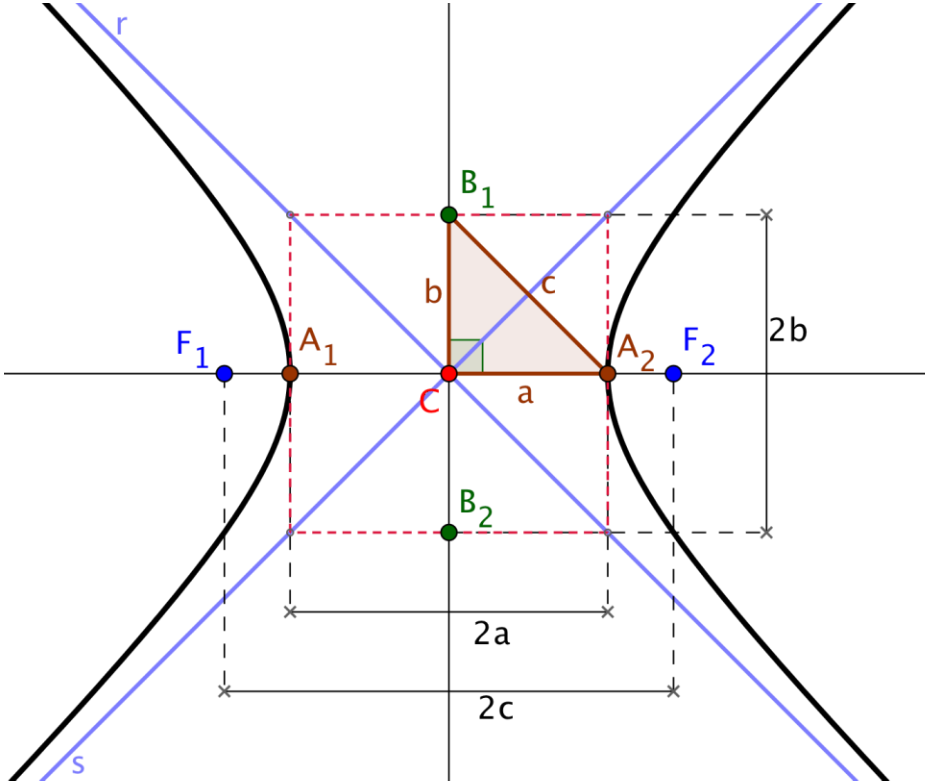
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Elementos

1. Focos: são os pontos F_1 e F_2
2. Distância focal: é a distância $2c$ entre os focos
3. Centro: é o ponto médio C do segmento F_1F_2
4. Eixo real ou transverso: é o segmento A_1A_2
5. Eixo imaginário ou conjugado: é o segmento B_1B_2
6. Vértices: são os pontos A_1 e A_2
7. Excentricidade: $e = \dfrac{c}{a}$

Hipérbole

As retas r e s, que contêm as diagonais do referido retângulo são chamadas de assíntotas da hipérbole.



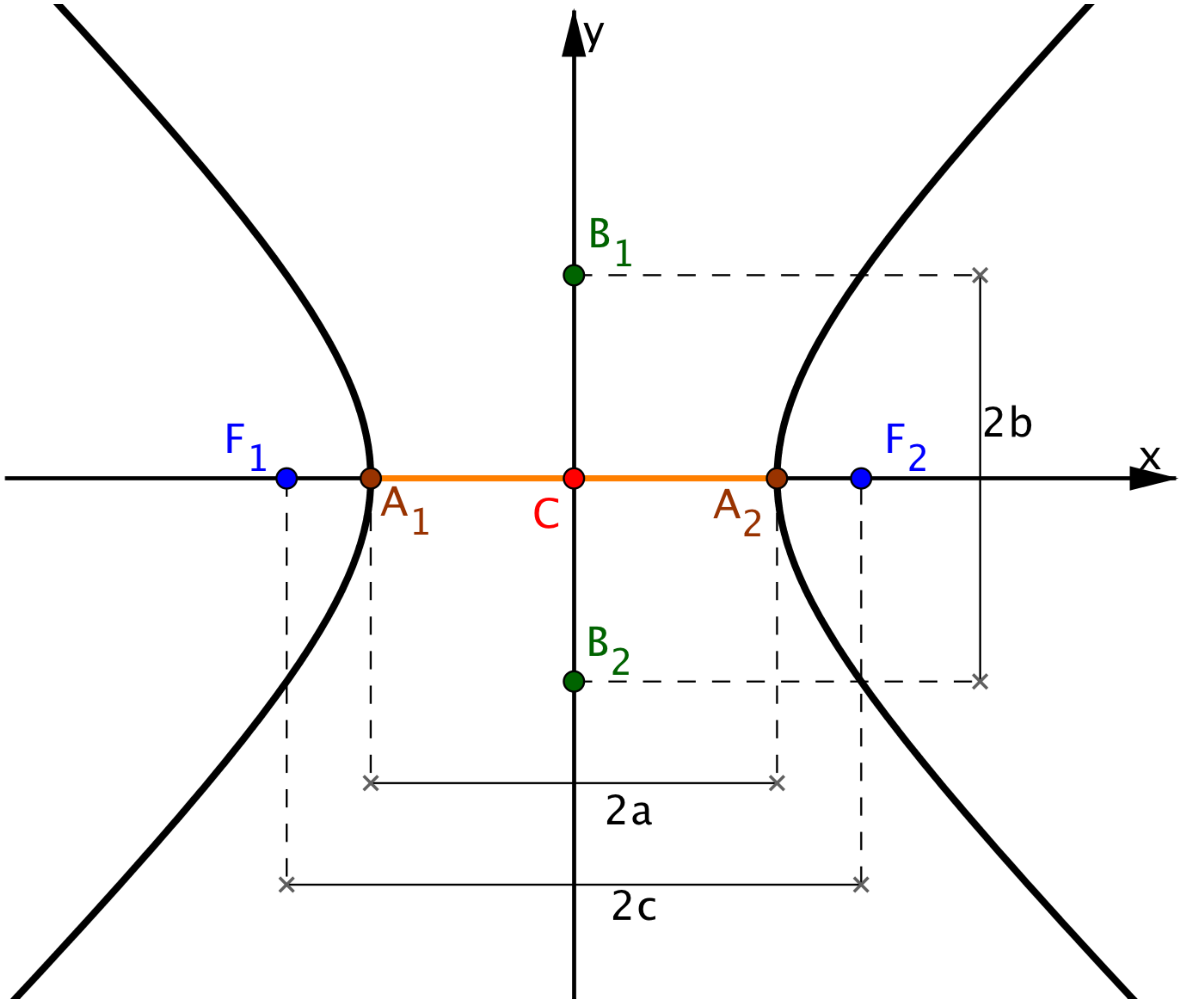
Equação da hipérbole de centro na origem do sistema

1º) O eixo real está sobre o eixo dos x.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$F_1(-c, 0)$ $F_2(+c, 0)$

$$c^2 = a^2 + b^2$$



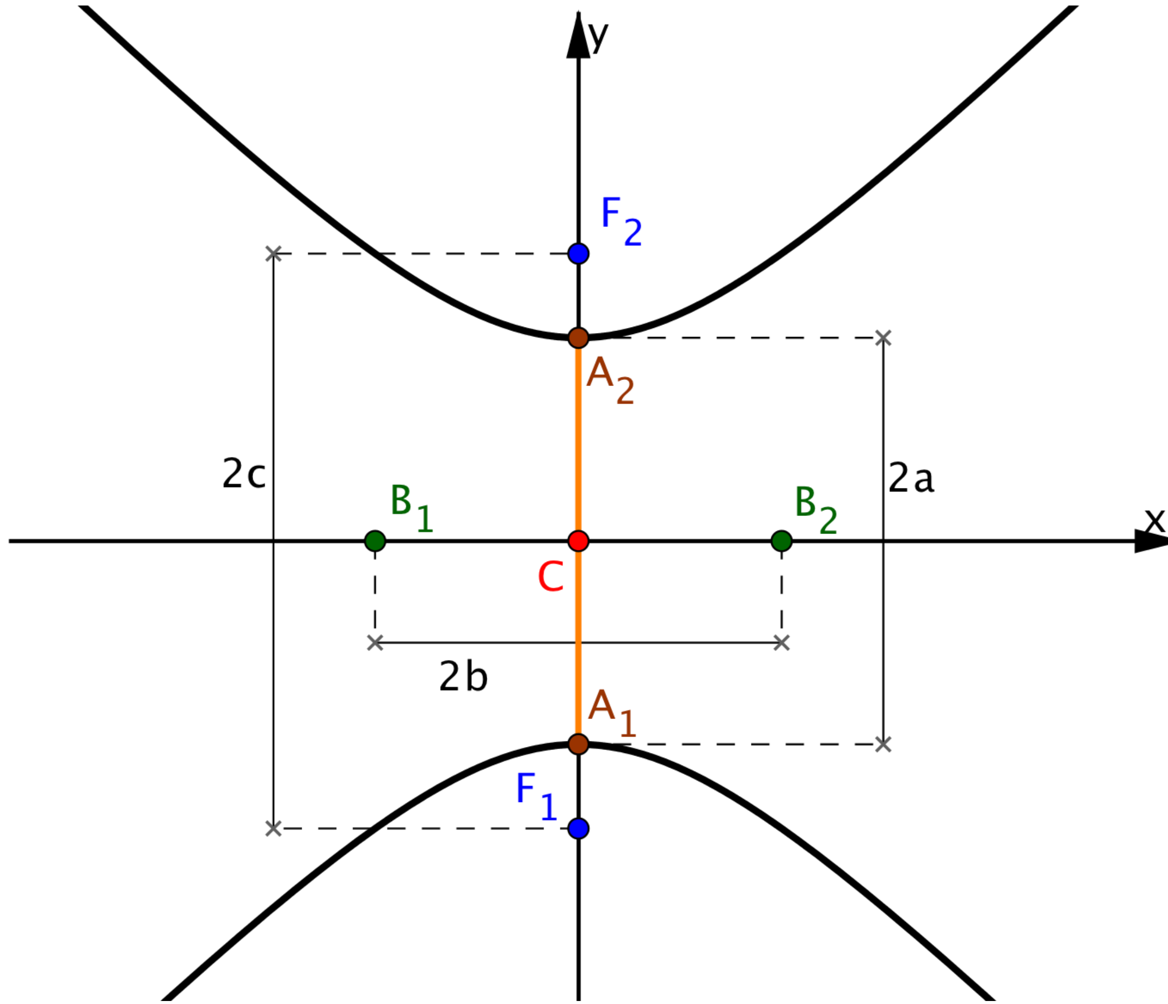
Equação da hipérbole de centro na origem do sistema

2º) O eixo real está sobre o eixo dos y.

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$F_1(0, -c)$ $F_2(0, +c)$

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Exemplos

1) Para as seguintes equações, determine (a) os vértices A_1 e A_2, (b) B_1 e B_2, (c) um esboço do gráfico, (d) os focos e (e) as assíntotas:

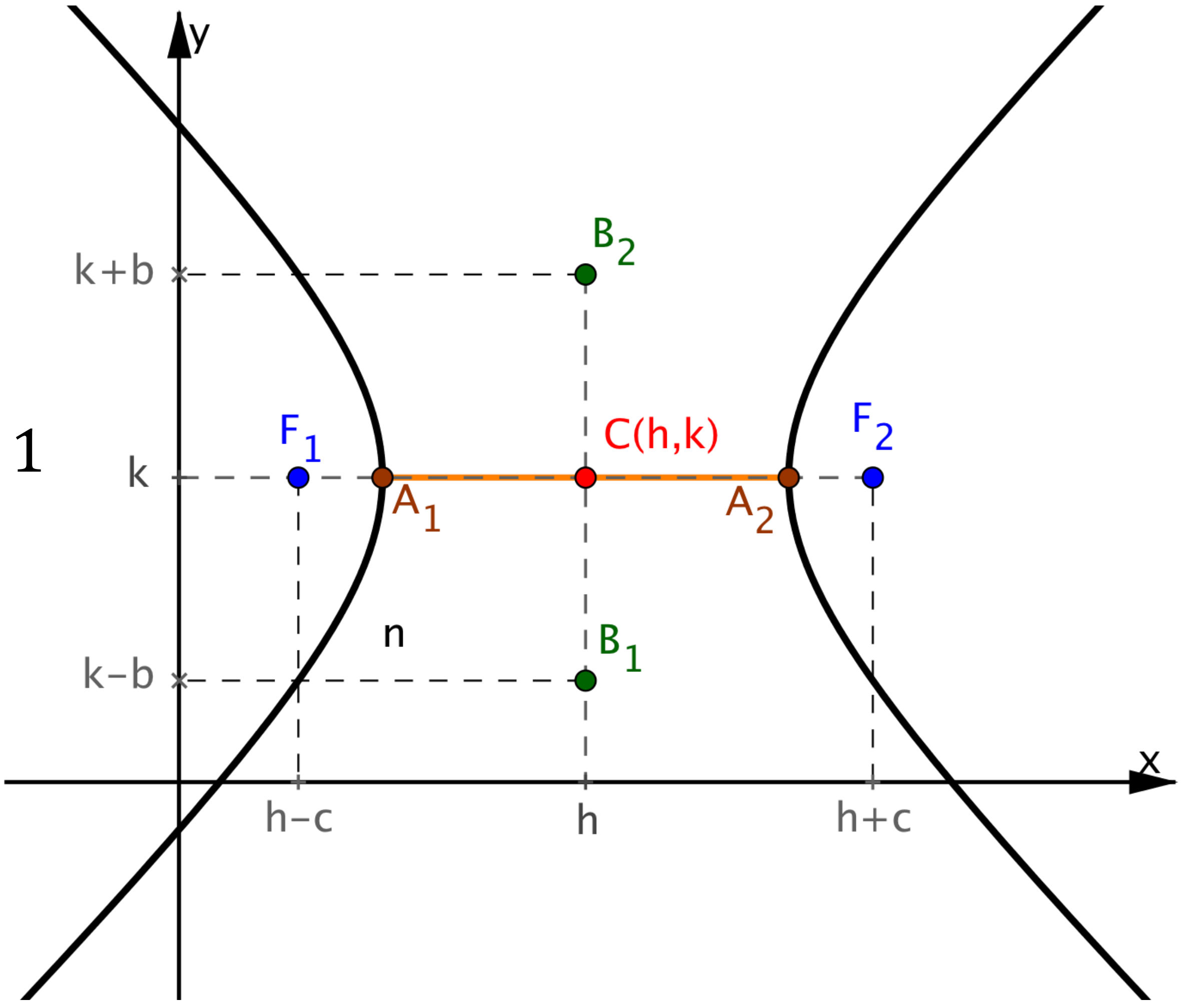
$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

2) Determine (a) a medida dos semi-eixos, (b) um esboço do gráfico, (c) os vértices, (d) os focos, (e) a excentricidade e (f) as equações das assíntotas para a hipérbole de equação $9x^2 - 7y^2 - 63 = 0$.

Equação da hipérbole de centro fora da origem do sistema

1º) O eixo real é paralelo ao eixo dos x.

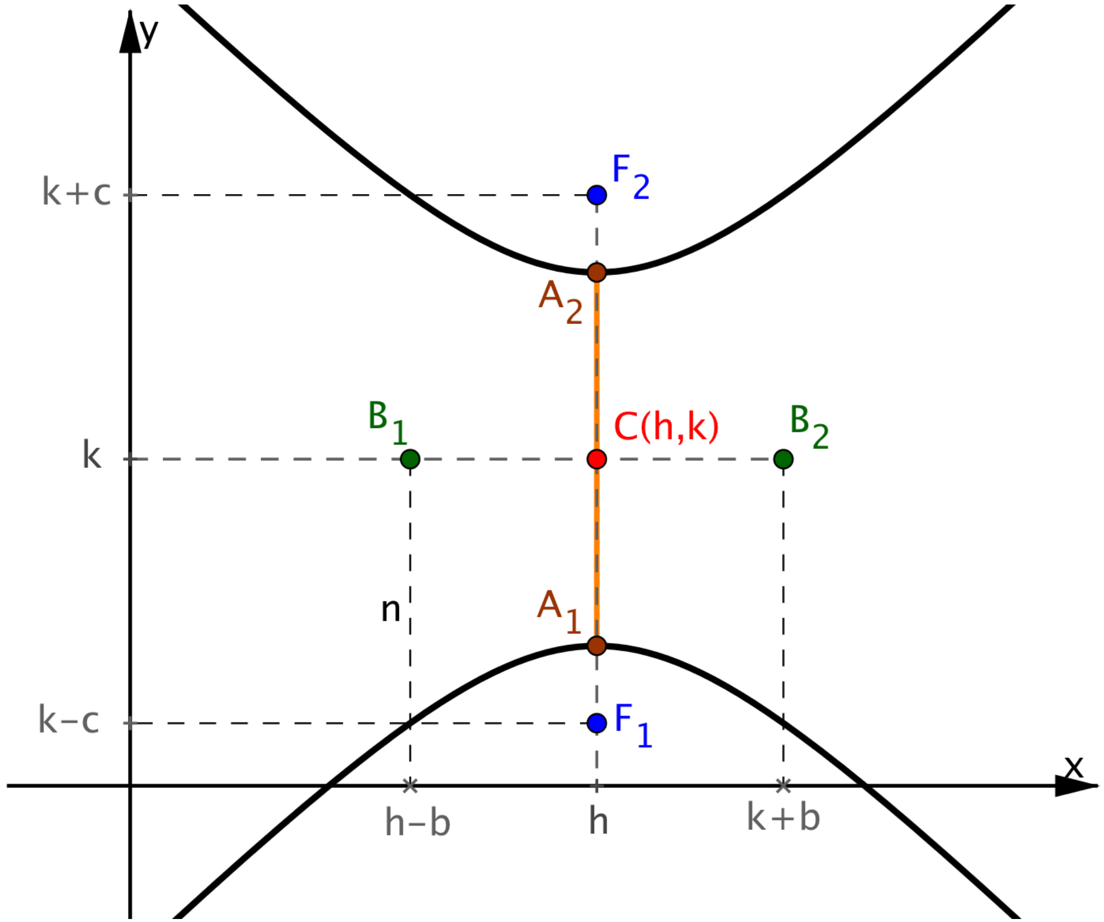
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



Equação da hipérbole de centro fora da origem do sistema

2º) O eixo real é paralelo ao eixo dos y.

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



Exemplos

1.Determine a equação da hipérbole de vértices $A_1(1,-2)$ e $A_2(5,-2)$, sabendo que $F(6,-2)$ é um dos seus focos.

2. Determine o centro, um esboço do gráfico, os vértices, os focos da hipérbole de equação

$$9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0.$$

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Dê as equações das circunferências de centro C e raio r dados.

a) $C(1,2)$ e $r = 10$ Rta: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 100$

b) $C(-2,3)$ e $r = 1$ Rta: $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 1$

c) $C(-1,3)$ e $r = 7$ Rta: $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 49$

d) $C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$ e $r = 2$ Rta: $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{2}{3}\right)^2 = 4$

e) $C(-3,-2)$ e $r = \sqrt{7}$ Rta: $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 7$

Exercícios

2) Dê o centro e o raio das circunferências de equações

a) $\mathrm{x}^2 + y^2 = 4$ Rta: $C(0,0)$ e $r = 2$

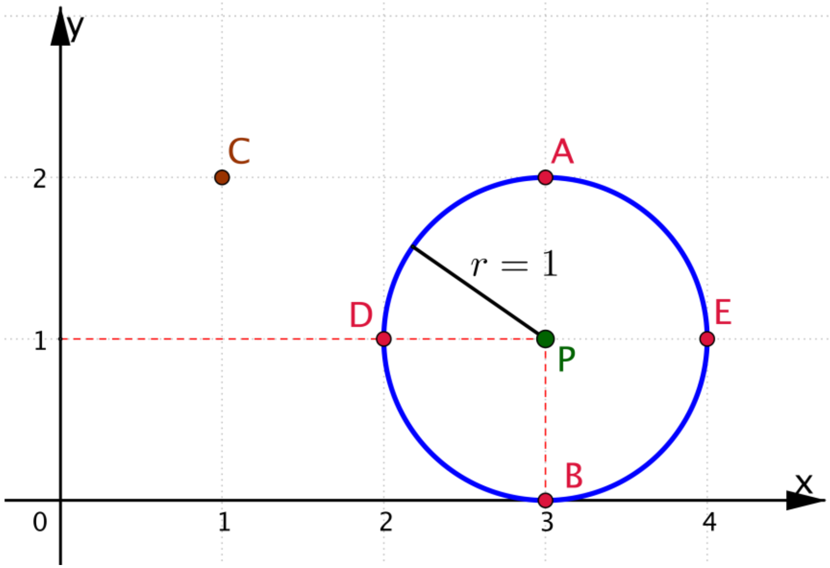
b) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$ Rta: $C(3,2)$ e $r = 4$

c) $x^2 + (y+4)^2 = 1$ Rta: $C(0,-4)$ e $r = 1$

d) $(x+2)^2 + y^2 = 9$ Rta: $C(-2,0)$ e $r = 3$

Exercícios

3) Dos pontos $A(3,2)$, $B(3,0)$, $C(1,2)$, $D(2,1)$ e $E(4,1)$, quais estão na circunferência de centro $P(3,1)$ e raio $r = 1$?



Rta: A, B, D e E

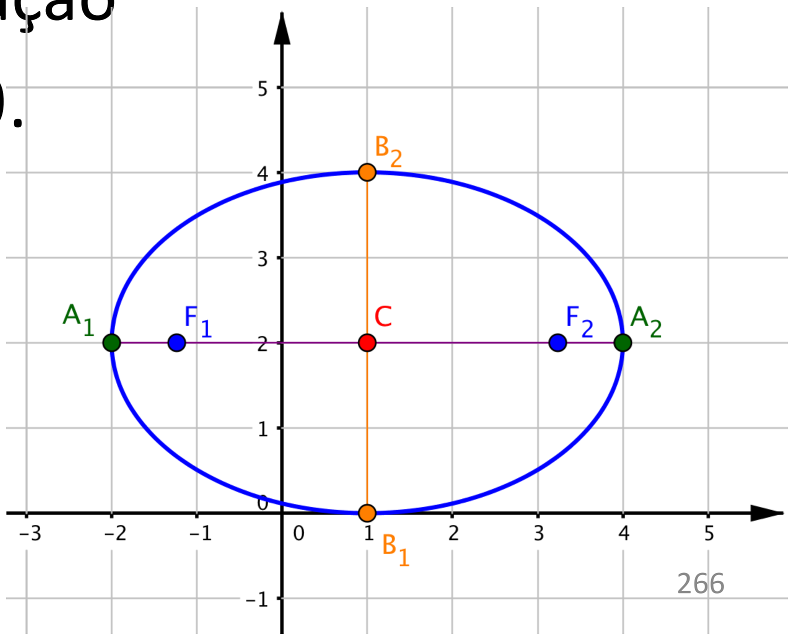
Exercícios

4) Uma elipse, cujo eixo maior é paralelo ao eixo dos y, tem centro $C(4,2)$, excentricidade $e = \frac{1}{2}$, e eixo menor de medida 6. Qual é a equação desta elipse?

Rta.: $\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{12} = 1$ ou $4x^2 - 32x + 3y^2 + 12y + 40 = 0$

5) Determine o centro, os vértices, os focos e a excentricidade da elipse de equação

$$4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0.$$



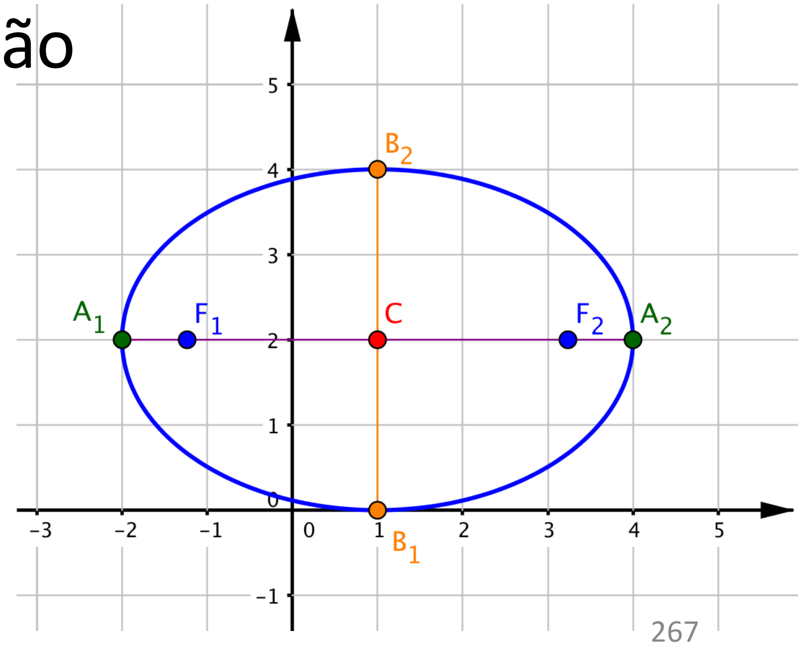
Exercícios

6) Uma elipse, cujo eixo maior é paralelo ao eixo dos y, tem centro $C(4,2)$, excentricidade $e = \frac{1}{2}$, e eixo menor de medida 6. Qual é a equação desta elipse?

Rta.: $\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{12} = 1$ ou $4x^2 - 32x + 3y^2 + 12y + 40 = 0$

7) Determine o centro, os vértices, os focos e a excentricidade da elipse de equação

$4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0.$



Exercícios

8) Determine a equação da hipérbole de vértices $A_1(1,-2)$ e $A_2(5,-2)$, sabendo que $F(6,-2)$ é um dos seus focos.

9) Determine o centro, um esboço do gráfico, os vértices, os focos da hipérbole de equação

$$9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0.$$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem ser encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/

O GAMA possui monitorias de:

- Pré-cálculo e Matemática Elementar (e disciplinas equivalentes)
- ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
- Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.