



Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino



Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

Matemática Básica II

2020/2

Aula 01

Projeto

**GAMA**

Grupo de Apoio em  
Matemática

# Inequações

---

Uma sentença matemática que envolve incógnitas e desigualdades é chamada de **inequação**. Neste curso, estudaremos inequações do primeiro e do segundo grau com uma variável.

# Inequações do primeiro grau

**Definição:** Uma inequação do primeiro grau ou inequação linear em  $x$  pode ser escrita em uma das seguintes formas:

$$ax + b < 0$$

$$ax + b \leq 0$$

$$ax + b > 0$$

$$ax + b \geq 0$$

**Observação:**  $y = ax + b$  é a função do primeiro grau associada à inequação.

Resolver uma inequação em  $x$  significa encontrar todos os valores de  $x$  para os quais a inequação é verdadeira.

O conjunto formado por todos esses valores é denominado **conjunto solução**.

Portanto, resolvemos uma inequação determinando o seu conjunto solução.

# Inequações do primeiro grau

Exemplo: Resolva:  $3(x - 1) + 2 \leq 5x + 6$

Solução:

$$3(x - 1) + 2 \leq 5x + 6$$

$$3x - 3 + 2 \leq 5x + 6$$

$$3x - 1 \leq 5x + 6$$

$$3x - 5x \leq 6 + 1$$

$$-2x \leq 7$$

$$2x \geq -7$$

$$x \geq -\frac{7}{2}$$

Portanto, o conjunto solução é:

$$S = \left[ -\frac{7}{2}, +\infty \right[$$

# Inequações do primeiro grau

Exemplo: Resolva:  $\frac{x}{3} + \frac{1}{2} > \frac{x}{4} + \frac{1}{3}$

Solução:

$$\frac{x}{3} + \frac{1}{2} > \frac{x}{4} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{4x}{12} + \frac{6}{12} > \frac{3x}{12} + \frac{4}{12}$$

$$4x + 6 > 3x + 4$$

$$4x - 3x > -6 + 4$$

$$x > -2$$

Portanto, o conjunto solução é:  $S = ]-2, +\infty[$

# Inequações duplas

---

As vezes duas inequações são combinadas em uma inequação dupla, que podem ser resolvidas simultaneamente ou separando-se as duas inequações envolvidas. Os exemplos a seguir ilustram esses casos.

# Inequações duplas

Exemplo: Resolva:  $-3 < \frac{2x + 5}{3} \leq 5$

Solução:

$$-3 < \frac{2x + 5}{3} \leq 5$$

$$-9 < 2x + 5 \leq 15$$

$$-9 - 5 < 2x \leq 15 - 5$$

$$-14 < 2x \leq 10$$

$$-7 < x \leq 5$$

Portanto, o conjunto solução é:  $S = ]-7,5]$

# Inequações duplas

---

**Exemplo:** Resolva:  $2 \leq 4x + 1 < 2x + 5$

Neste caso, a solução simultânea das duas inequações não é aconselhável, pois o membro direito da inequação envolve termos também na variável  $x$  e assim as operações não podem ser aplicadas simultaneamente a todos os membros.

Calcularemos então separadamente a solução de cada inequação, tomando como solução geral da inequação dupla a interseção dos conjuntos, pois desejamos valores de  $x$  que satisfaçam as duas inequações.



# Inequações duplas

Exemplo: Resolva:  $2 \leq 4x + 1 < 2x + 5$

Solução:

$$2 \leq 4x + 1$$

$$2 - 1 \leq 4x$$

$$1 \leq 4x$$

$$\frac{1}{4} \leq x$$

$$x \geq \frac{1}{4}$$

$$S_1 = \left[ \frac{1}{4}, +\infty \right[$$

$$4x + 1 < 2x + 5$$

$$4x - 2x < -1 + 5$$

$$2x < 4$$

$$x < \frac{4}{2}$$

$$x < 2$$

$$S_2 = ]-\infty, 2[$$

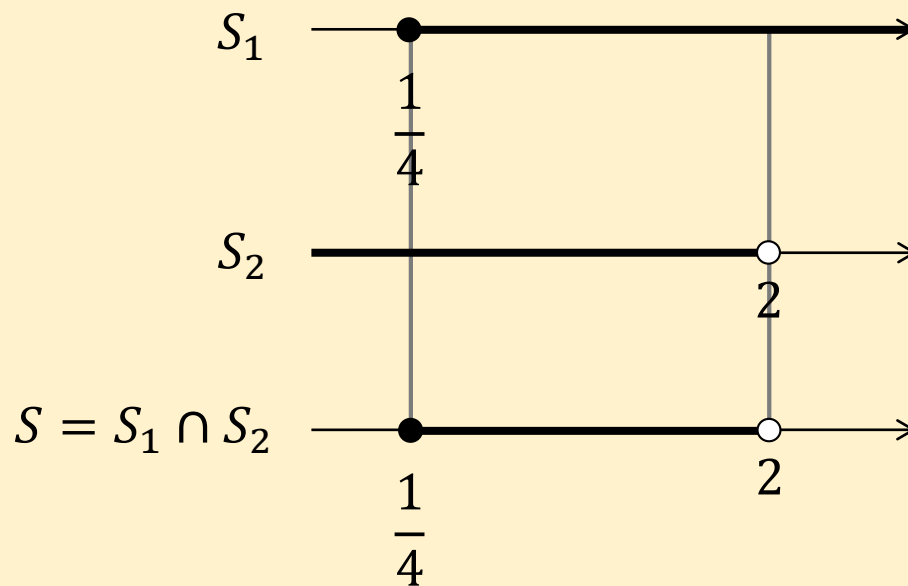
# Inequações duplas

Exemplo: Resolva:  $2 \leq 4x + 1 < 2x + 5$

Solução:

$$S_1 = \left[ \frac{1}{4}, +\infty \right[$$

$$S_2 = ]-\infty, 2[$$



Portanto, o conjunto solução é:

$$S = \left[ \frac{1}{4}, 2 \right[$$

# Inequações modulares

Inequações que envolvem o **valor absoluto** ou **módulo** de um número são também inequações duplas, pois por definição:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{se } x < 0 \\ x, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Assim, ao trabalharmos com uma inequação  $|ax + b| \leq c$ , queremos determinar todos os valores possíveis de  $x$  para os quais

$$-c \leq ax + b \leq c$$

**Observação:** O mesmo raciocínio continua válido se trocarmos “ $\leq$ ” por “ $<$ ”.

# Inequações modulares

Inequações que envolvem o **valor absoluto** ou **módulo** de um número são também inequações duplas, pois por definição:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{se } x < 0 \\ x, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Se buscamos a solução de uma inequação  $|ax + b| \geq c$ , então queremos determinar todos os valores possíveis de  $x$  para os quais

$$ax + b \geq c \quad \text{ou} \quad -(ax + b) \geq c$$

**Observação:** O mesmo raciocínio continua válido se trocarmos “ $\geq$ ” por “ $>$ ”.

# Inequações modulares

Exemplo: Resolva:  $|x - 1| \leq 4$

Solução:

$$|x - 1| \leq 4 \Rightarrow -4 \leq x - 1 \leq 4$$

$$\Rightarrow -4 + 1 \leq x \leq 4 + 1$$

$$\Rightarrow -3 \leq x \leq 5$$

Portanto, o conjunto solução é:  $S = [-3,5]$

# Inequações modulares

---

**Exemplo:** Resolva:  $|2x + 3| > 1$

Neste caso não poderemos resolver simultaneamente as inequações, pois resolver  $|2x + 3| > 1$  significa determinar todos os valores possíveis de  $x$  para os quais

$$2x + 3 > 1 \quad \text{ou} \quad -(2x + 3) > 1$$

Resolvemos então separadamente cada inequação e o conjunto solução será formado pela união dos dois resultados.

# Inequações modulares

Exemplo: Resolva:  $|2x + 3| > 1$

Solução:

$$2x + 3 > 1$$

$$2x > 1 - 3$$

$$2x > -2$$

$$x > \frac{-2}{2}$$

$$x > -1$$

$$S_1 = ]-1, +\infty[$$

$$-(2x + 3) > 1$$

$$2x + 3 < -1$$

$$2x < -1 - 3$$

$$2x < -4$$

$$x < \frac{-4}{2}$$

$$x < -2$$

$$S_2 = ]-\infty, -2[$$

# Inequações modulares

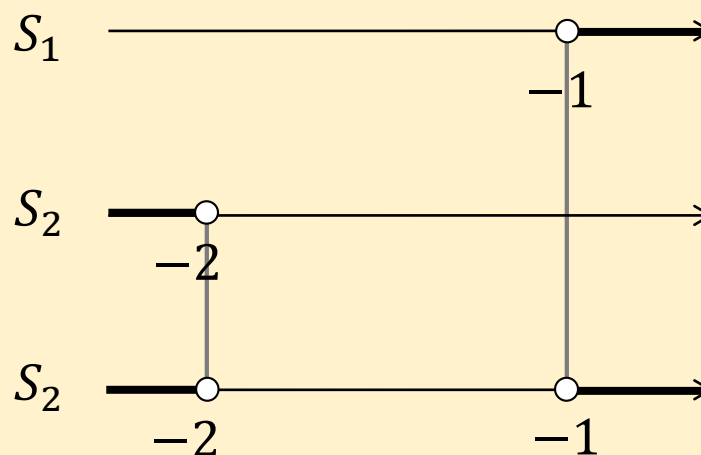
Exemplo: Resolva:  $|2x + 3| > 1$

Solução:

$$S_1 = ]-1, +\infty[$$

$$S_2 = ]-\infty, -2[$$

$$S = S_1 \cup S_2$$



Portanto, o conjunto solução é:

$$S = ]-\infty, -2[ \cup ]-1, +\infty[$$



# Inequações produto e inequações quociente

---

Nos próximos exemplos abordaremos inequações que envolvem produtos ou quocientes, cujos fatores são expressões do primeiro grau da forma  $ax + b$  (cuja representação gráfica é uma reta).

Utilizaremos funções do primeiro grau para resolver estes tipos de inequações.

# Inequações produto e inequações quociente

O procedimento que vamos utilizar para resolver inequações produto ou inequações quociente, consiste nos seguintes passos:

**1º Passo:** Considerar cada fator da inequação como uma função do primeiro grau  $y = ax + b$ ;

**2º Passo:** Determinar a raiz da função, ou seja, o valor de  $x$  onde a função se anula, que é o valor onde a reta intercepta o eixo  $x$ ;

**3º Passo:** Verificar se o gráfico da função é uma reta crescente ( $a > 0$ ) ou decrescente ( $a < 0$ );

**4º Passo:** Fazer o estudo do sinal da função, determinando assim os intervalos onde a função é positiva e onde é negativa;

**5º Passo:** Montar um quadro, colocando os valores das raízes de cada função e o seu respectivo sinal em cada intervalo, para estudar o sinal do produto ou do quociente das duas funções e chegar à solução da inequação.

# Inequações produto e inequações quociente

Exemplo: Resolva:  $(4 - x)(2x - 3) > 0$

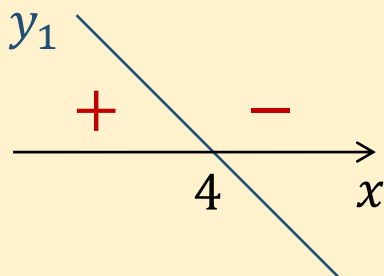
Solução:

$$y_1 = 4 - x$$

$$0 = 4 - x$$

$$x = 4 \text{ (raiz)}$$

$y_1$  é decrescente  
pois  $a = -1 < 0$

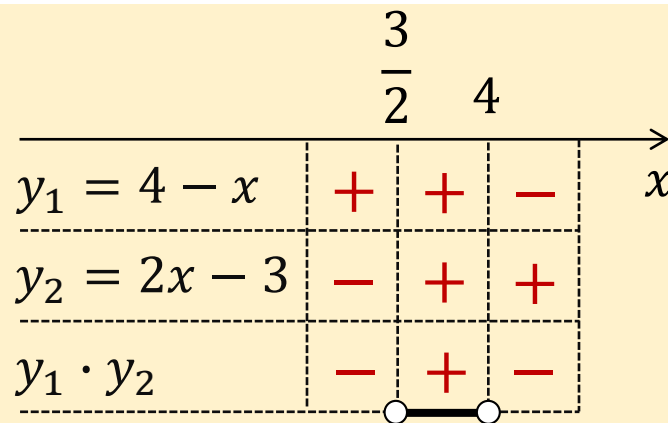
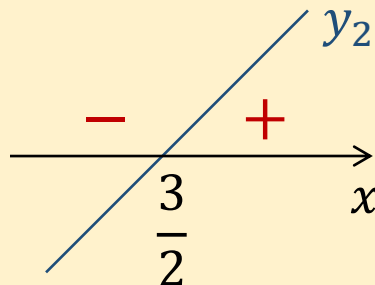


$$y_2 = 2x - 3$$

$$0 = 2x - 3$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ (raiz)}$$

$y_2$  é crescente  
pois  $a = 2 > 0$



Portanto, o conjunto  
solução é:

$$S = \left] \frac{3}{2}, 4 \right[$$

# Inequações produto e inequações quociente

Exemplo: Resolva:  $\frac{5x - 3}{4 - 5x} \leq 0$

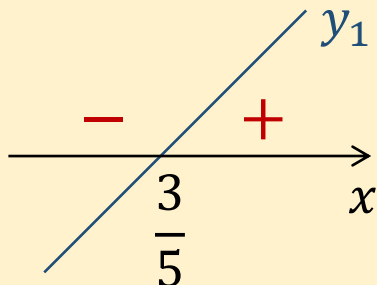
Solução:

$$y_1 = 5x - 3$$

$$0 = 5x - 3$$

$$x = \frac{3}{5} \quad (\text{raiz})$$

$y_1$  é crescente pois  
 $a = 5 > 0$

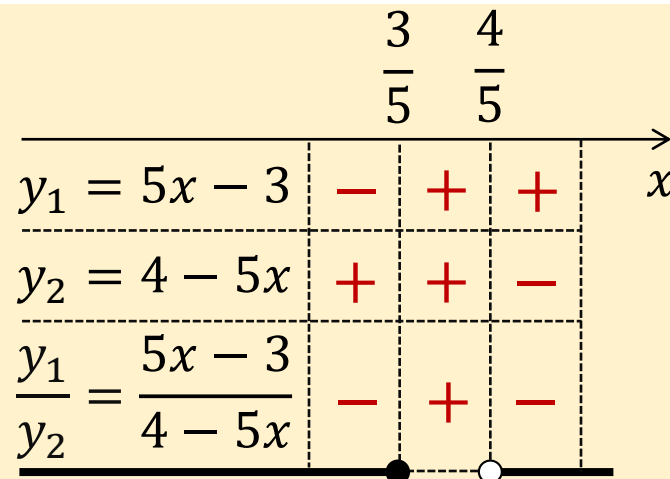
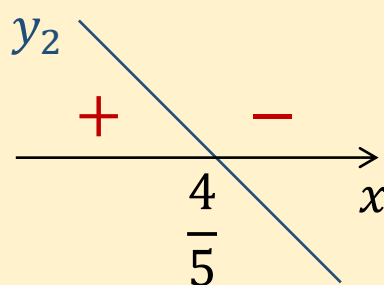


$$y_2 = 4 - 5x$$

$$0 = 4 - 5x$$

$$x = \frac{4}{5} \quad (\text{raiz})$$

$y_2$  é decrescente pois  
 $a = -5 < 0$



Note que  $\frac{4}{5} \notin S$  pois zera o

denominador da fração  $\frac{5x - 3}{4 - 5x}$ .

# Inequações produto e inequações quociente

Exemplo: Resolva:  $\frac{5x - 3}{4 - 5x} \leq 0$

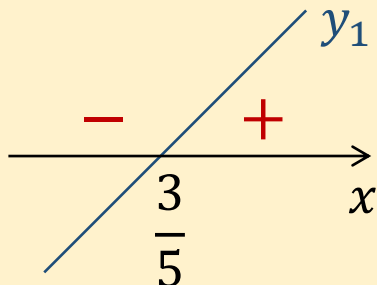
Solução:

$$y_1 = 5x - 3$$

$$0 = 5x - 3$$

$$x = \frac{3}{5} \quad (\text{raiz})$$

$y_1$  é crescente pois  
 $a = 5 > 0$

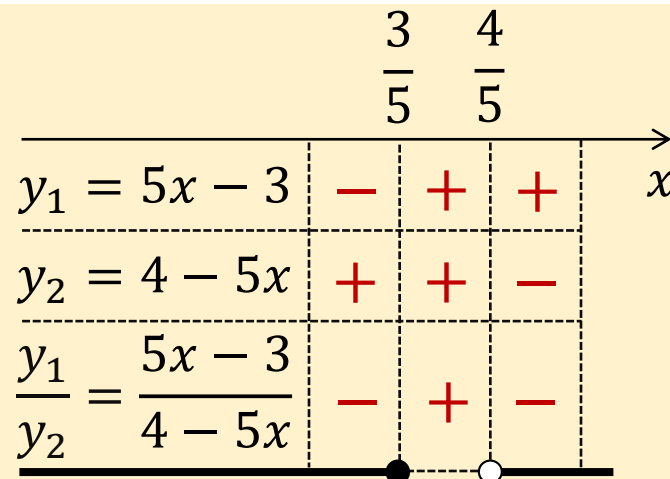
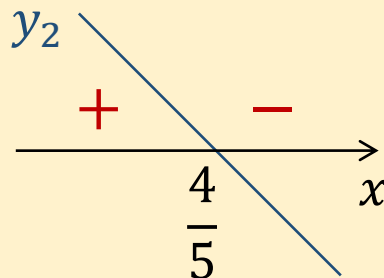


$$y_2 = 4 - 5x$$

$$0 = 4 - 5x$$

$$x = \frac{4}{5} \quad (\text{raiz})$$

$y_2$  é decrescente pois  
 $a = -5 < 0$



Portanto, o conjunto solução é:

$$S = \left] -\infty, \frac{3}{5} \right] \cup \left[ \frac{4}{5}, +\infty \right[$$

# Inequações produto e inequações quociente

**Exemplo:** Resolva:  $\frac{x + 3}{1 - x} \leq 3$

Se multiplicarmos ambos os membros por  $1 - x$  (que pode ser positivo ou negativo, dependendo do valor de  $x$ ), não saberemos se o sinal da desigualdade deverá ser mantido ou invertido. Por isso, utilizaremos um outro procedimento.

**Solução:**

$$\begin{aligned} \frac{x + 3}{1 - x} \leq 3 &\Leftrightarrow \frac{x + 3}{1 - x} - 3 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x + 3 - 3(1 - x)}{1 - x} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x + 3 - 3 + 3x}{1 - x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4x}{1 - x} \leq 0 \end{aligned}$$

# Inequações produto e inequações quociente

Exemplo: Resolva: 
$$\frac{x + 3}{1 - x} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{4x}{1 - x} \leq 0$$

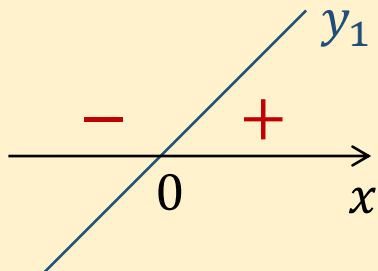
Solução:

$$y_1 = 4x$$

$$0 = 4x$$

$$x = 0 \text{ (raiz)}$$

$y_1$  é crescente pois  
 $a = 4 > 0$

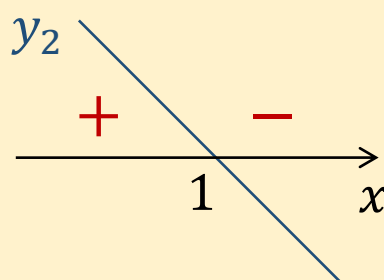


$$y_2 = 1 - x$$

$$0 = 1 - x$$

$$x = 1 \text{ (raiz)}$$

$y_2$  é decrescente pois  
 $a = -1 < 0$



	0	1	
$y_1 = 4x$	-	+	+
$y_2 = 1 - x$	+	+	-
$\frac{y_1}{y_2} = \frac{4x}{1 - x}$	-	+	-

Portanto, o conjunto solução é:

$$S = ]-\infty, 0] \cup ]1, +\infty[$$

# Exercícios Propostos





# Exercícios



1) Resolva as inequações abaixo e apresente o conjunto solução em notação de intervalo:

(a)  $2x + 5 < 3x - 7$

(h)  $|6 - 5x| \leq 3$

(b)  $3 \leq \frac{2x - 3}{5} < 7$

(i)  $|3x - 7| \geq 5$

(c)  $x^2 - x - 6 < 0$

(j)  $|-11 - 7x| > 6$

(d)  $x^2 - 2x - 5 > 3$

(k)  $-5 \leq 3x + 4 < 7$

(e)  $x(2x + 3) \geq 5$

(l)  $|6x - 7| > 10$

(f)  $|x + 3| < 0,01$

(m)  $0 < 3x + 1 \leq 4x - 6$

(g)  $|2x + 5| < 4$

(n)  $|5 - 2x| \geq 7$

# Exercícios

---



1) Resolva as inequações abaixo e apresente o conjunto solução em notação de intervalo:

(o)  $-6 < 3x + 3 \leq 3$

(v)  $x + 3 < 6x + 10$

(p)  $|x - 4| \leq 16$

(w)  $|2x - 3| > 4$

(q)  $1 < x - 2 < 6 - x$

(x)  $2 < 5x + 3 \leq 8x - 12$

(r)  $x - 7 \geq -5$  ou  $x - 7 \leq -6$

(y)  $|2x - 3| \leq 5$

(s)  $x < 6x - 10$  ou  $x \geq 2x + 5$

(t)  $2x - 1 > 1$  ou  $x + 3 < 4$

(u)  $1 \leq -2x + 1 < 3$

# Respostas



## Exercício 1:

(a)  $S = ]12, +\infty[$

(b)  $S = [9, 19[$

(c)  $S = ]-2, 3[$

(d)  $S = ]-\infty, -2[ \cup ]4, +\infty[$

(e)  $S = \left] -\infty, -\frac{5}{2} \right] \cup [1, +\infty[$

(f)  $S = ]-3, 01, -2, 99[$

(g)  $S = \left] -\frac{9}{2}, -\frac{1}{2} \right[$

(h)  $S = \left[ \frac{3}{5}, \frac{9}{5} \right]$

(i)  $S = \left] -\infty, \frac{2}{3} \right] \cup [4, +\infty[$

(j)  $S = \left] -\infty, -\frac{17}{7} \right[ \cup \left] -\frac{5}{7}, +\infty \right[$

(k)  $S = [-3, 1[$

(l)  $S = \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right[ \cup \left] \frac{17}{6}, +\infty \right[$

(m)  $S = [7, +\infty[$

(n)  $S = ]-\infty, -1] \cup [6, +\infty[$

# Respostas



## Exercício 1:

$$(o) S = ]-3,0]$$

$$(p) S = [-12,20]$$

$$(q) S = ]3,4[$$

$$(r) S = ]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$$

$$(s) S = ]-\infty, -5] \cup ]2, +\infty[$$

$$(t) S = ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$$

$$(u) S = ]-1,0]$$

$$(v) S = \left] -\frac{7}{5}, +\infty \right[$$

$$(w) S = \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right[ \cup \left] \frac{7}{2}, +\infty \right[$$

$$(x) S = [5, +\infty[$$

$$(y) S = [-1,4]$$



# Monitorias!!

---

**Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!**

Os horários e locais de monitorias podem ser encontrados na página do Projeto:

<http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/>

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

[https://www.youtube.com/channel/UCB3NUeew6Ji\\_k39-GDA3iQ/playlists](https://www.youtube.com/channel/UCB3NUeew6Ji_k39-GDA3iQ/playlists)

O GAMA possui monitorias de:

- ❑ Pré-cálculo e Matemática Elementar (e disciplinas equivalentes)
  - ❑ ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
    - ❑ Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e disciplinas equivalentes)

**Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.**



Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino



Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

Matemática Básica II

2020/2

Aula 02

Projeto

**GAMA**

Grupo de Apoio em  
Matemática

# Função do segundo grau

**Definição:** Dados  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tais que  $a \neq 0$ , a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = ax^2 + bx + c$  é chamada de **função do segundo grau** ou **função quadrática**.

Exemplos:

1)  $f(x) = x^2$

$a = 1, b = 0, c = 0$

2)  $f(x) = -x^2 + 1$

$a = -1, b = 0, c = 1$

3)  $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$

$a = 2, b = 3, c = -1$

# Função do segundo grau

**Teorema:** O gráfico de uma função do segundo grau é uma **parábola**.

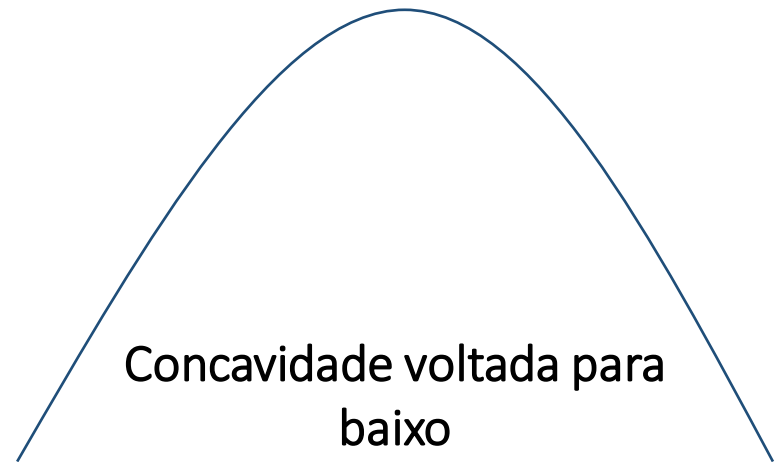
A parábola pode ter concavidade voltada para cima ou concavidade voltada para baixo, de acordo com o sinal do coeficiente  $a$ .

**Concavidade:**

$$a > 0$$



$$a < 0$$





# Função do segundo grau

Os zeros da função  $f(x) = ax^2 + bx + c$  podem ser obtidos resolvendo a equação do segundo grau  $ax^2 + bx + c = 0$  utilizando a **fórmula de Bhaskara**.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

**Observação:** A quantidade de zeros reais obtidos para uma função quadrática depende do sinal de  $\Delta$ .

$$\Delta > 0$$

Dois zeros

$$\Delta = 0$$

Um único zero

$$\Delta < 0$$

Nenhum zero

# Função do segundo grau

---

O sinal da função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  depende dos sinais de  $a$  (determina a concavidade) e de  $\Delta$  (determina a quantidade de zeros).

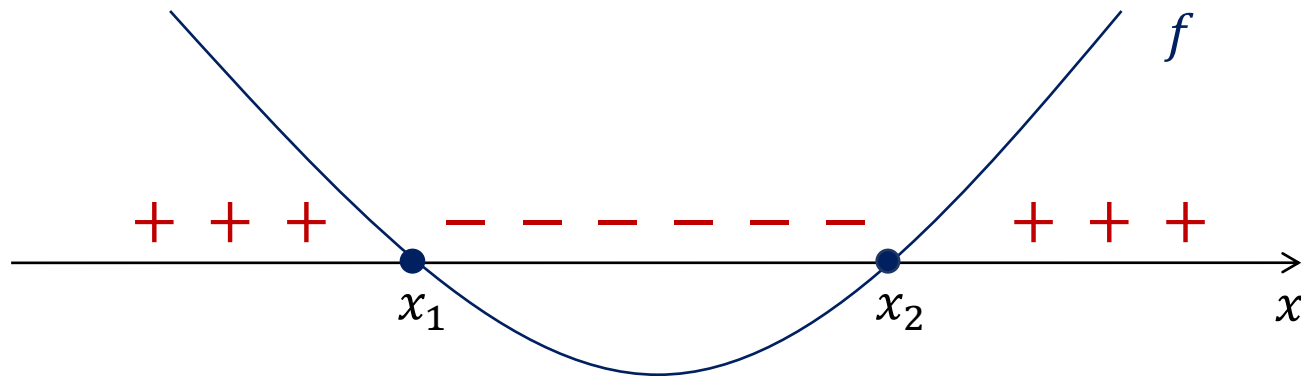
Como existem duas possibilidades para o coeficiente  $a$  ( $a > 0$  ou  $a < 0$ ) e três possibilidades para  $\Delta$  ( $\Delta > 0$  ou  $\Delta = 0$  ou  $\Delta < 0$ ), obtém-se seis combinações possíveis para o formato do gráfico da função quadrática.

Vamos fazer o estudo do sinal da função quadrática para cada um desses formatos.

# Função do segundo grau

1ª Combinação:  $a > 0$  e  $\Delta > 0$

Concavidade voltada para cima e dois zeros

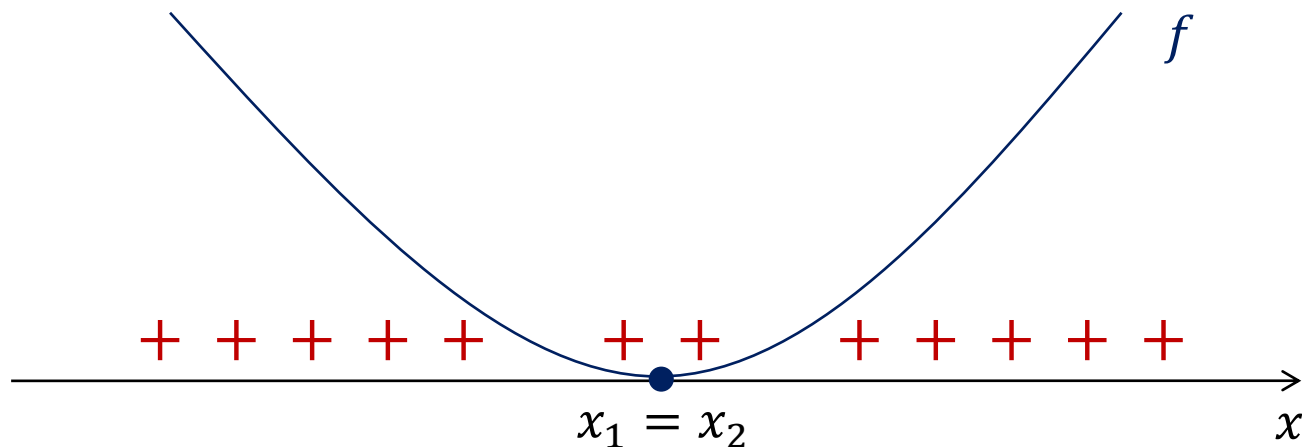


- $f(x) > 0$  em  $]-\infty, x_1[ \cup ]x_2, +\infty[ = \mathbb{R} - [x_1, x_2]$
- $f(x) = 0$  em  $x = x_1$  e  $x = x_2$
- $f(x) < 0$  em  $]x_1, x_2[$

# Função do segundo grau

2ª Combinação:  $a > 0$  e  $\Delta = 0$

Concavidade voltada para cima e um único zero

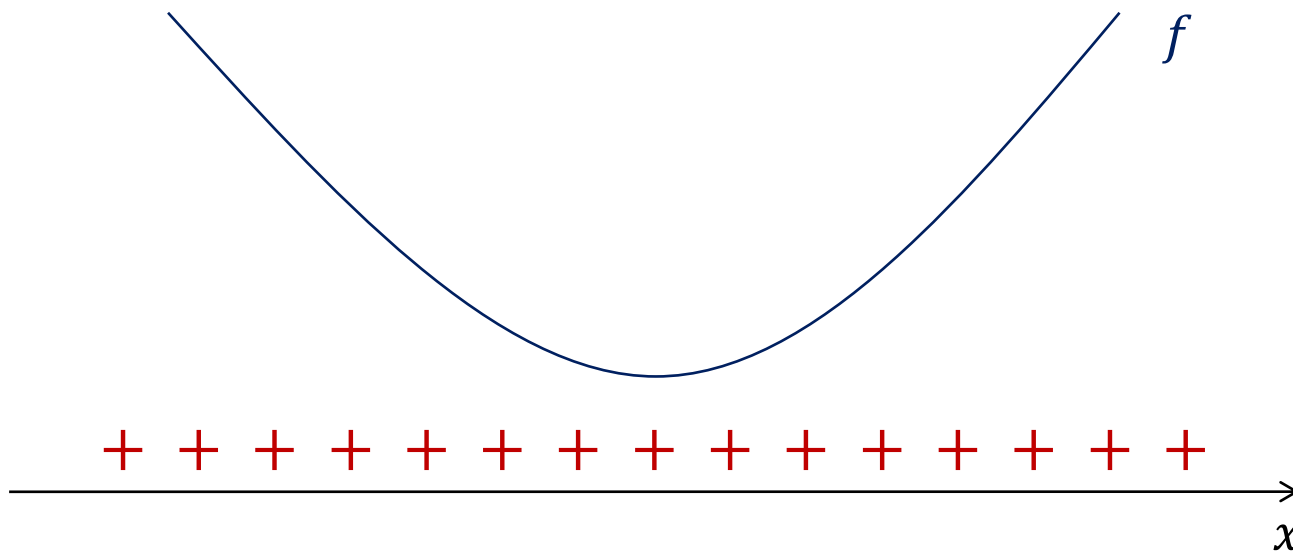


- $f(x) > 0$  em  $]-\infty, x_1[ \cup ]x_1, +\infty[ = \mathbb{R} - \{x_1\}$
- $f(x) = 0$  em  $x = x_1 = x_2$
- $\nexists x \in \mathbb{R} : f(x) < 0$

# Função do segundo grau

3ª Combinação:  $a > 0$  e  $\Delta < 0$

Concavidade voltada para cima e nenhum zero

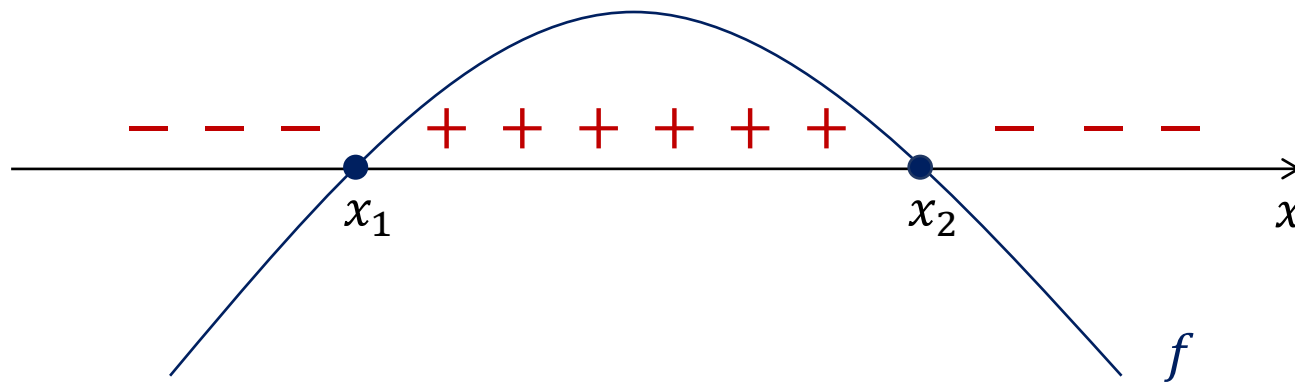


- $f(x) > 0$  em  $\mathbb{R}$
- $\nexists x \in \mathbb{R} : f(x) = 0$
- $\nexists x \in \mathbb{R} : f(x) < 0$

# Função do segundo grau

4ª Combinação:  $a < 0$  e  $\Delta > 0$

Concavidade voltada para baixo e dois zeros

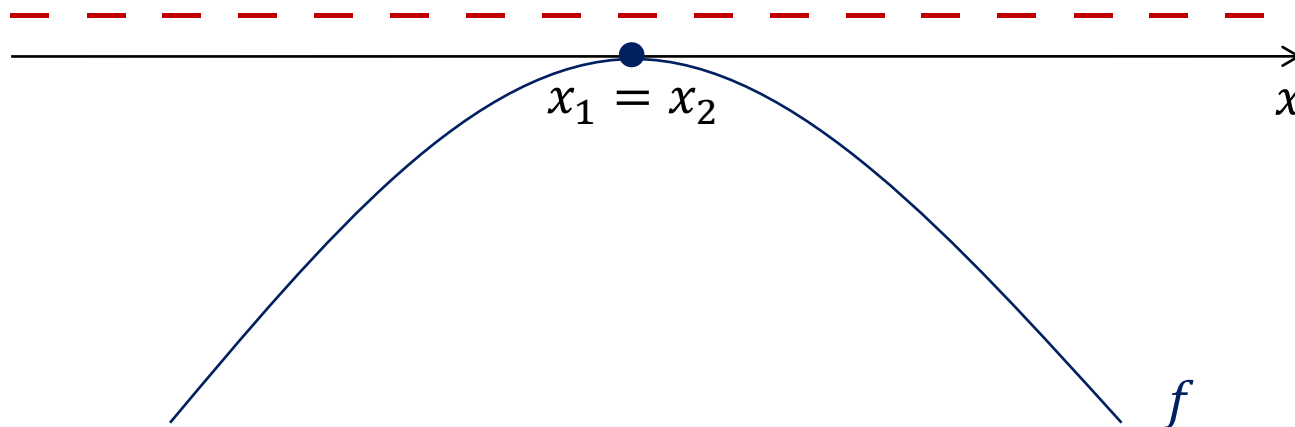


- $f(x) > 0$  em  $]x_1, x_2[$
- $f(x) = 0$  em  $x = x_1$  e  $x = x_2$
- $f(x) < 0$  em  $] -\infty, x_1[ \cup ]x_2, +\infty[ = \mathbb{R} - [x_1, x_2]$

# Função do segundo grau

5ª Combinação:  $a < 0$  e  $\Delta = 0$

Concavidade voltada para baixo e um único zero

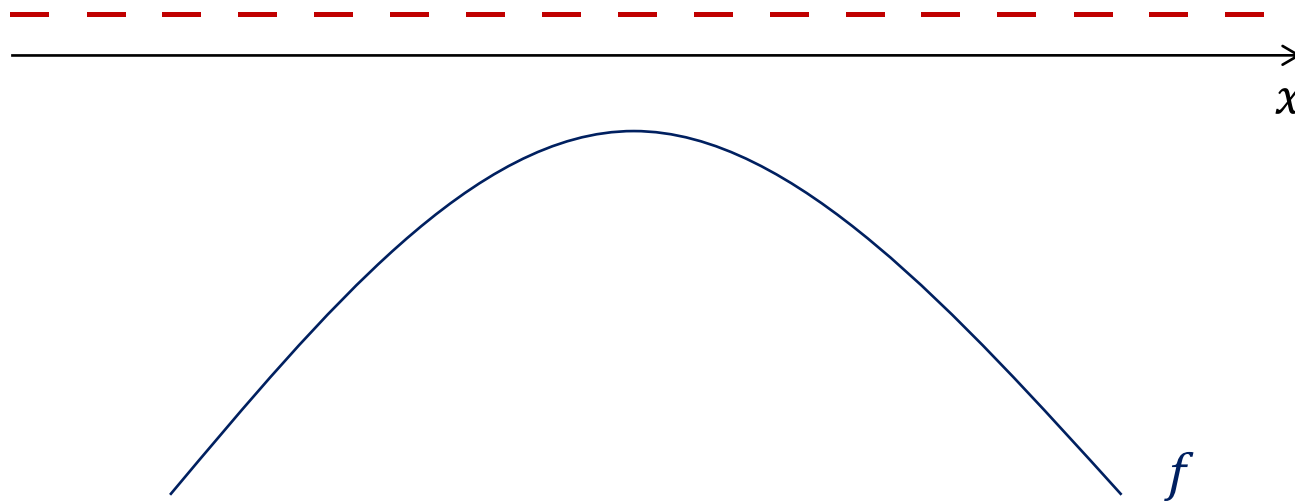


- $\nexists x \in \mathbb{R} : f(x) > 0$
- $f(x) = 0$  em  $x = x_1 = x_2$
- $f(x) < 0$  em  $] -\infty, x_1[ \cup ] x_1, +\infty[ = \mathbb{R} - \{x_1\}$

# Função do segundo grau

6ª Combinação:  $a < 0$  e  $\Delta < 0$

Concavidade voltada para baixo e nenhum zero



- $\nexists x \in \mathbb{R} : f(x) > 0$
- $\nexists x \in \mathbb{R} : f(x) = 0$
- $f(x) < 0$  em  $\mathbb{R}$



# Inequações do segundo grau

**Definição:** Uma inequação do segundo grau pode ser escrita em uma das seguintes formas:

$$ax^2 + bx + c < 0$$

$$ax^2 + bx + c > 0$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

**Observação:**  $y = ax^2 + bx + c$  é a função do segundo grau associada à inequação.

Resolver uma inequação em  $x$  significa encontrar todos os valores de  $x$  para os quais a inequação é verdadeira.

O conjunto formado por todos esses valores é denominado **conjunto solução**.

Portanto, resolvemos uma inequação determinando o seu conjunto solução.

# Inequações do segundo grau

O procedimento que vamos utilizar para resolver inequações do segundo grau, consiste nos seguintes passos:

**1º Passo:** Reescrever a inequação dada (se for necessário) até que ela fique em alguma das seguintes formas:  $ax^2 + bx + c < 0$  ou  $ax^2 + bx + c \leq 0$  ou  $ax^2 + bx + c > 0$  ou  $ax^2 + bx + c \geq 0$ .

**2º Passo:** Considerar a função  $f(x) = ax^2 + bx + c$  associada à inequação.

**3º Passo:** Determinar a quantidade de zeros através do sinal de  $\Delta$ .

**4º Passo:** Calcular os zeros da função (se existirem).

**5º Passo:** Determinar a concavidade da parábola através do sinal do coeficiente  $a$ .

**6º Passo:** Realizar o estudo do sinal da função e chegar à solução da inequação.

# Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva:  $x^2 - 1 > x + 5$

Solução:

**1º Passo:**  $x^2 - 1 > x + 5 \Leftrightarrow x^2 - 1 - x - 5 > 0$   
 $\Leftrightarrow x^2 - x - 6 > 0$

**2º Passo:**  $f(x) = x^2 - x - 6$  ( $a = 1, b = -1, c = -6$ )

**3º Passo:**  $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 1 + 24 = 25 > 0$

Portanto,  $f$  possui dois zeros.

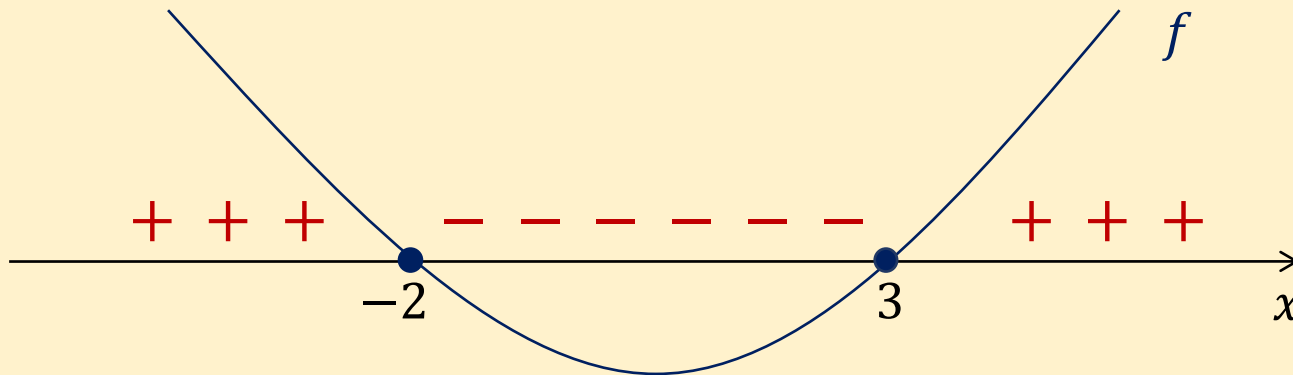
**4º Passo:**  $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2(1)} = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{1 - 5}{2} = -2$   
 $\Rightarrow x_2 = \frac{1 + 5}{2} = 3$

# Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva:  $x^2 - 1 > x + 5$

Solução:

**5º Passo:** Como  $a = 1 > 0$  temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.



**6º Passo:** Lembre que

$$x^2 - 1 > x + 5 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$$

$$\text{Portanto, } S = ]-\infty, -2[ \cup ]3, +\infty[$$

# Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva:  $2x^2 + x \leq 6$

Solução:

$$2x^2 + x \leq 6 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 6 \leq 0$$

$$f(x) = 2x^2 + x - 6 \quad (a = 2, b = 1, c = -6)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(2)(-6) = 1 + 48 = 49 > 0$$

Portanto,  $f$  possui dois zeros.

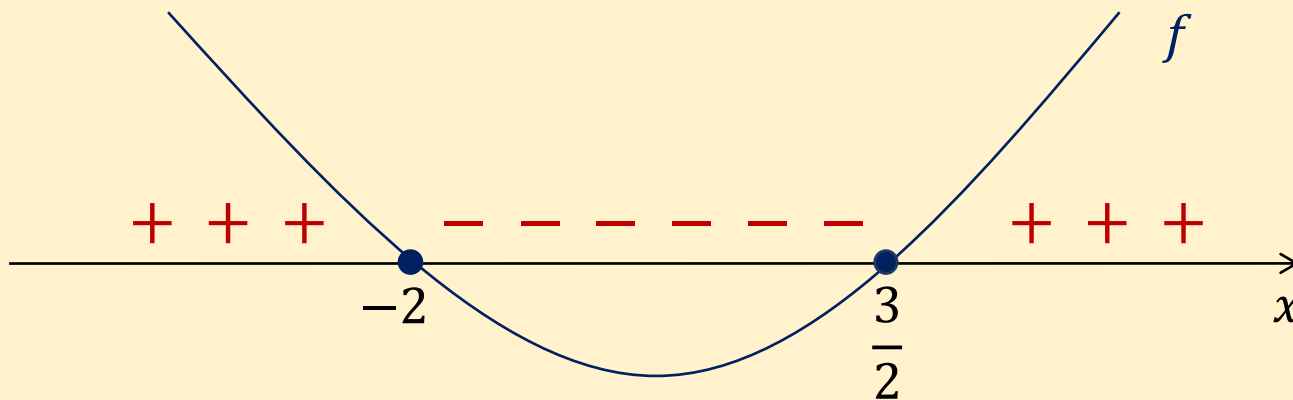
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2(2)} = \frac{-1 \pm 7}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{-1 - 7}{4} = -2$$
$$\Rightarrow x_2 = \frac{-1 + 7}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

# Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva:  $2x^2 + x \leq 6$

Solução:

Como  $a = 2 > 0$  temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.



Lembre que

$$2x^2 + x \leq 6 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 0$$

$$\text{Portanto, } S = \left[-2, \frac{3}{2}\right]$$

# Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva:  $x^2 + 3x + 3 \leq 0$

Solução:

$$f(x) = x^2 + 3x + 3 \quad (a = 1, b = 3, c = 3)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(1)(3) = 9 - 12 = -3 < 0$$

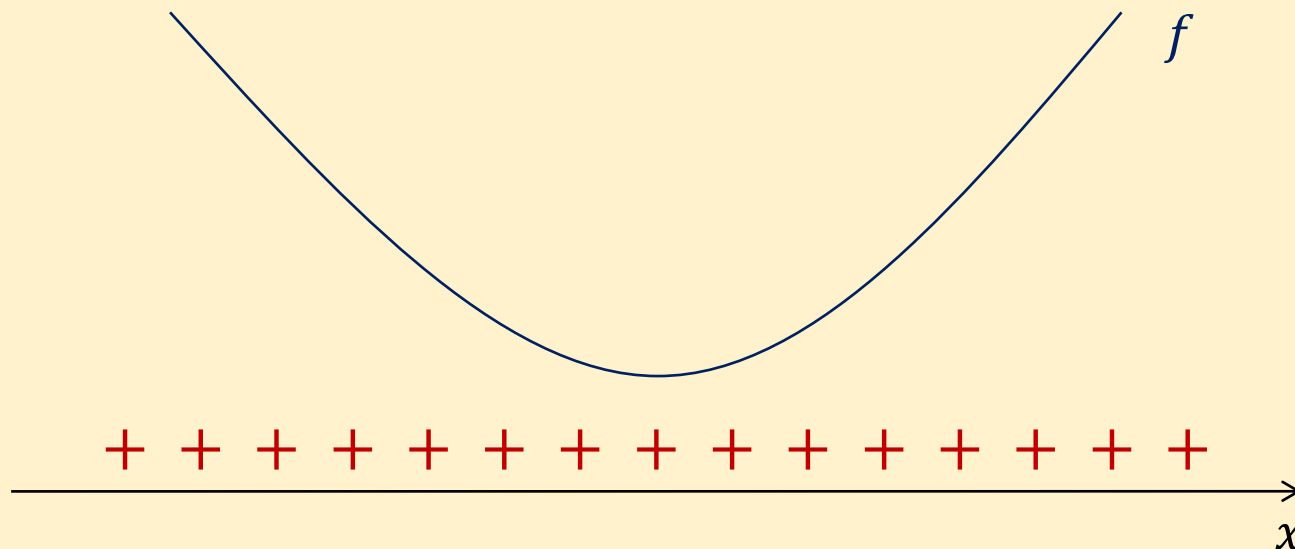
Portanto,  $f$  não possui zeros reais.

Como  $a = 1 > 0$  temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.

# Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva:  $x^2 + 3x + 3 \leq 0$

Solução:



Lembre que  $x^2 + 3x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 0$  e como

$\nexists x \in \mathbb{R} : f(x) \leq 0$  temos que:  $S = \emptyset$

**Observação:** O conjunto solução da seguinte inequação  $x^2 + 3x + 3 > 0$

é:  $S = \mathbb{R}$



# Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva:  $x^2 - 6x + 9 \leq 0$

Solução:

$$f(x) = x^2 - 6x + 9 \quad (a = 1, b = -6, c = 9)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(9) = 36 - 36 = 0$$

Portanto,  $f$  possui um único zero.

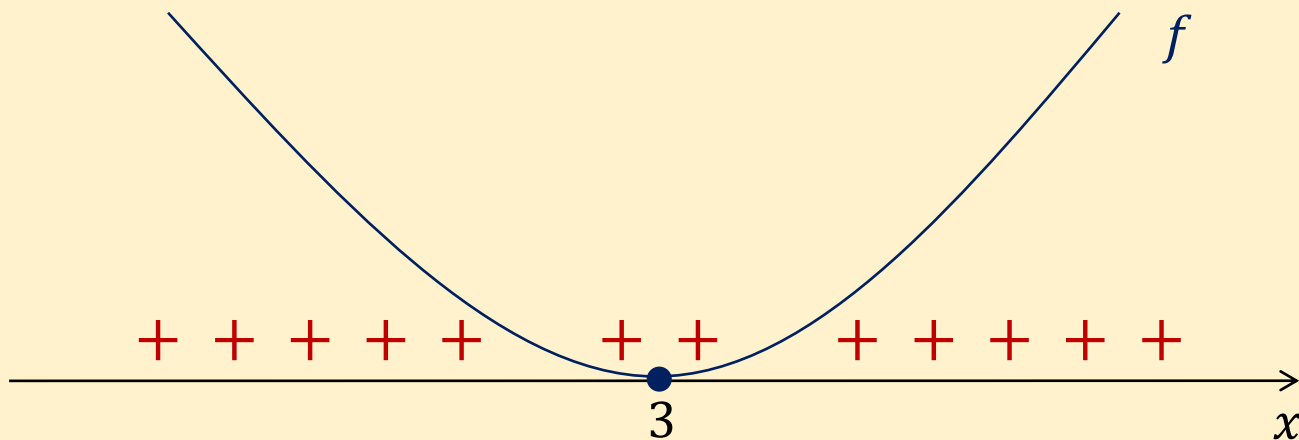
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2(1)} = \frac{6}{2} = 3$$

Como  $a = 1 > 0$  temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.

# Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva:  $x^2 - 6x + 9 \leq 0$

Solução:



Lembre que  $x^2 - 6x + 9 \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 0$  e como

$x = 3$  é o único valor que satisfaz  $f(x) \leq 0$  temos que:  $S = \{3\}$

# Inequações do segundo grau

**Exemplo:** Resolva:  $x^2 + 8x - 10 < 2(x^2 + 1)$

**Solução:**

$$\begin{aligned}x^2 + 8x - 10 < 2(x^2 + 1) &\Leftrightarrow x^2 + 8x - 10 < 2x^2 + 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x^2 + 8x - 10 - 2 < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -x^2 + 8x - 12 < 0\end{aligned}$$

$$f(x) = -x^2 + 8x - 12 \quad (a = -1, b = 8, c = -12)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4(-1)(-12) = 64 - 48 = 16 > 0$$

Portanto,  $f$  possui dois zeros.

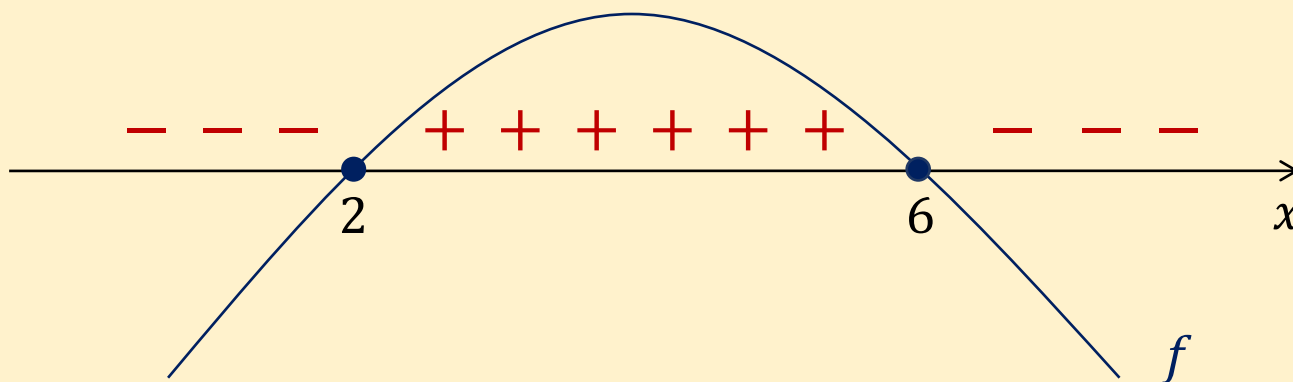
$$\begin{aligned}x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} &= \frac{-8 \pm \sqrt{16}}{2(-1)} = \frac{-8 \pm 4}{-2} \Rightarrow x_1 = \frac{-8 + 4}{-2} = 2 \\ &\Rightarrow x_2 = \frac{-8 - 4}{-2} = 6\end{aligned}$$

# Inequações do segundo grau

**Exemplo:** Resolva:  $x^2 + 8x - 10 < 2(x^2 + 1)$

**Solução:**

Como  $a = -1 < 0$  temos que a parábola possui concavidade voltada para baixo.



Lembre que

$$x^2 + 8x - 10 < 2(x^2 + 1) \Leftrightarrow -x^2 + 8x - 12 < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0$$

$$\text{Portanto, } S = ]-\infty, 2[ \cup ]6, +\infty[$$

# Exercícios Propostos



# Exercícios

---



1) Resolva as inequações abaixo e apresente o conjunto solução em notação de intervalo:

(a)  $x^2 > 9$

(b)  $x^2 \leq 5$

(c)  $(x - 4)(x + 2) > 0$

(d)  $(x - 3)(x + 4) < 0$

(e)  $x^2 - 9x + 20 \leq 0$

(f)  $2 - 3x + x^2 \geq 0$

# Exercícios

2) Resolva as inequações abaixo e apresente o conjunto solução na reta numérica:

(a)  $(2x + 1)(-x + 2) \geq 0$

(b)  $(x + 2)(-x - 2) \leq 0$

(c)  $x^2 - 6x + 9 > 0$

(d)  $x^2 - 4x \geq 0$

(e)  $(x + 2)(-x - 2) < 0$

# Respostas

---



Exercício 1:

(a)  $S = ]-\infty, -3[ \cup ]3, +\infty[$

(b)  $S = [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$

(c)  $S = ]-\infty, -2[ \cup ]4, +\infty[$

(d)  $S = ]-4, 3[$

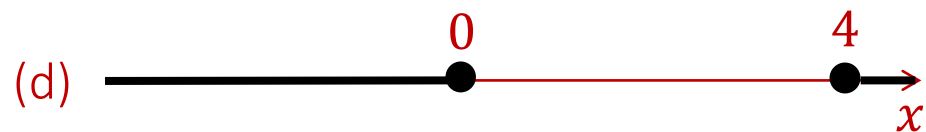
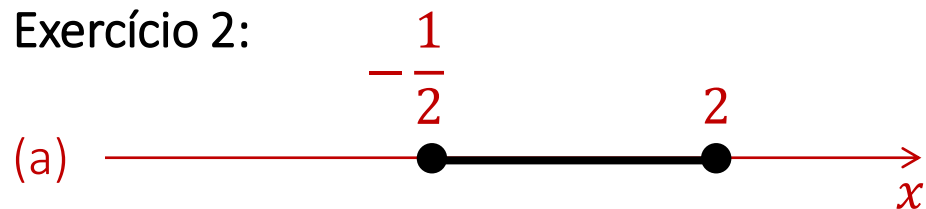
(e)  $S = [4, 5]$

(f)  $S = ]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$



# Respostas

Exercício 2:





# Monitorias!!

---

**Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!**

Os horários e locais de monitorias podem ser encontrados na página do Projeto:

<http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/>

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

[https://www.youtube.com/channel/UCB3NUeew6Ji\\_k39-GDA3iQ/playlists](https://www.youtube.com/channel/UCB3NUeew6Ji_k39-GDA3iQ/playlists)

O GAMA possui monitorias de:

- Pré-cálculo e Matemática Elementar (e disciplinas equivalentes)
  - ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
    - Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e disciplinas equivalentes)

**Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.**



Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino



Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

Matemática Básica II

2020/2

Aula 03

Projeto

**GAMA**

Grupo de Apoio em  
Matemática

# Inequações do segundo grau

---

As vezes duas inequações são combinadas em uma inequação dupla, que pode ser resolvida separando-se as duas inequações envolvidas. O exemplo a seguir ilustra esse caso.

# Inequações do segundo grau

**Exemplo:** Resolva:  $4 < x^2 \leq 9$

Calcularemos então separadamente a solução de cada inequação, tomando como solução geral da inequação dupla a interseção dos conjuntos, pois desejamos valores de  $x$  que satisfaçam as duas inequações.

**Solução:**

$$a) \quad 4 < x^2 \Leftrightarrow 4 - x^2 < 0 \quad f(x) = 4 - x^2 \quad (a = -1, b = 0, c = 4)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4(-1)(4) = 0 + 16 = 16 > 0$$

Portanto,  $f$  possui dois zeros.

$$4 - x^2 = 0 \Rightarrow 2^2 - x^2 = 0 \Rightarrow (2 + x)(2 - x) = 0$$

$$\Rightarrow 2 + x = 0 \quad \text{ou} \quad 2 - x = 0 \Rightarrow x = -2 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

$$\Rightarrow x_1 = -2 \quad \text{e} \quad x_2 = 2$$

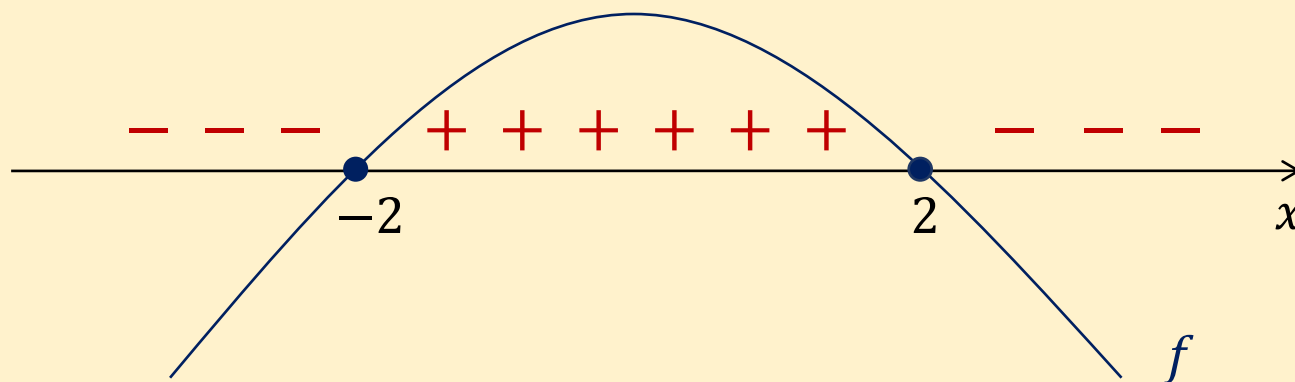
Como  $a = -1 < 0$  temos que a parábola possui concavidade voltada para baixo.

# Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva:  $4 < x^2 \leq 9$

Solução:

a)



Lembre que

$$4 < x^2 \Leftrightarrow 4 - x^2 < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0$$

$$\text{Portanto, } S_1 = ]-\infty, -2[ \cup ]2, +\infty[$$

# Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva:  $4 < x^2 \leq 9$

Solução:

$$b) \quad x^2 \leq 9 \Leftrightarrow x^2 - 9 \leq 0 \quad g(x) = x^2 - 9 \quad (a = 1, b = 0, c = -9)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4(1)(-9) = 0 + 36 = 36 > 0$$

Portanto,  $g$  possui dois zeros.

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 3^2 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow x + 3 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \quad \text{ou} \quad x = 3$$

$$\Rightarrow x_1 = -3 \quad \text{e} \quad x_2 = 3$$

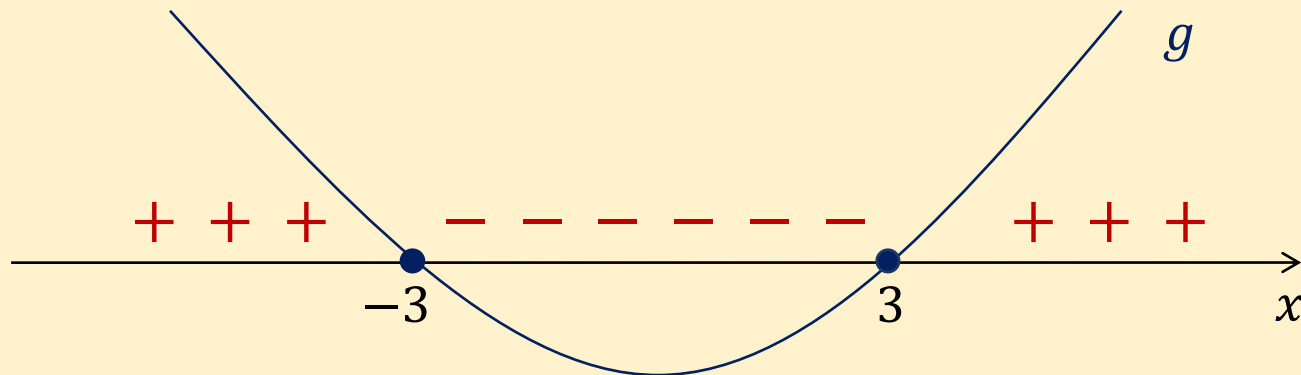
Como  $a = 1 > 0$  temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.

# Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva:  $4 < x^2 \leq 9$

Solução:

b)



Lembre que

$$x^2 \leq 9 \Leftrightarrow x^2 - 9 \leq 0 \Leftrightarrow g(x) \leq 0$$

Portanto,  $S_2 = [-3, 3]$



# Inequações do segundo grau

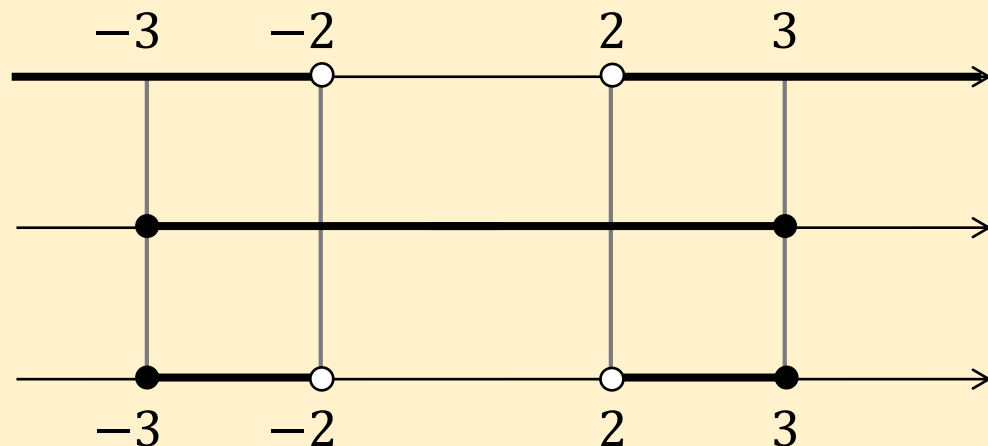
Exemplo: Resolva:  $4 < x^2 \leq 9$

Solução:

$$S_1 = ]-\infty, -2[ \cup ]2, +\infty[$$

$$S_2 = [-3, 3]$$

$$S = S_1 \cap S_2$$



Portanto, o conjunto solução é:  $S = [-3, -2[ \cup ]2, 3]$

# Inequações do segundo grau

Nos próximos três exemplos abordaremos inequações que envolvem produtos ou quocientes, cujos fatores são expressões do segundo grau da forma  $ax^2 + bx + c$  (cuja representação gráfica é uma parábola).

Utilizaremos funções do segundo grau para resolver estes tipos de inequações.

**Exemplo:** Resolva:  $(2x^2 - 4x)(-x^2 + 3x + 4) < 0$

**Solução:**

$$a) \quad f(x) = 2x^2 - 4x \quad (a = 2, b = -4, c = 0)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(2)(0) = 16 - 0 = 16 > 0$$

Portanto,  $f$  possui dois zeros.

$$2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 2x(x - 2) = 0 \Rightarrow 2x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

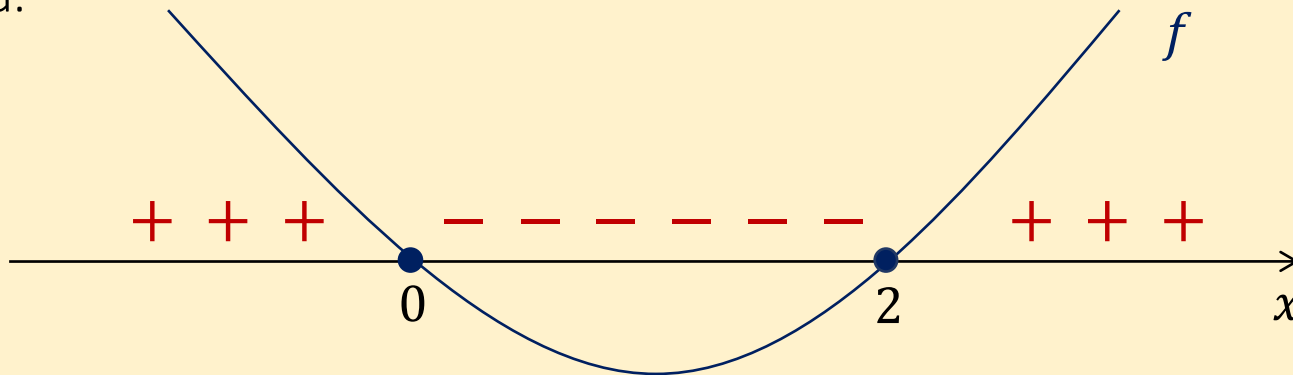
$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad \text{e} \quad x_2 = 2$$

# Inequações do segundo grau

Exemplo:  $(2x^2 - 4x)(-x^2 + 3x + 4) < 0$

Solução:

a) Como  $a = 2 > 0$  temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.



- $f(x) > 0$  em  $]-\infty, 0[ \cup ]2, +\infty[$
- $f(x) = 0$  em  $x = 0$  e  $x = 2$
- $f(x) < 0$  em  $]0, 2[$

# Inequações do segundo grau

**Exemplo:**  $(2x^2 - 4x)(-x^2 + 3x + 4) < 0$

**Solução:** Vamos agora realizar o mesmo procedimento para a função:

$$g(x) = -x^2 + 3x + 4.$$

b)  $g(x) = -x^2 + 3x + 4$       ( $a = -1, b = 3, c = 4$ )

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(-1)(4) = 9 + 16 = 25 > 0$$

Portanto,  $g$  possui dois zeros.

$$-x^2 + 3x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2(-1)} = \frac{-3 \pm 5}{-2} \Rightarrow x_1 = \frac{-3 + 5}{-2} = -1$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{-3 - 5}{-2} = 4$$

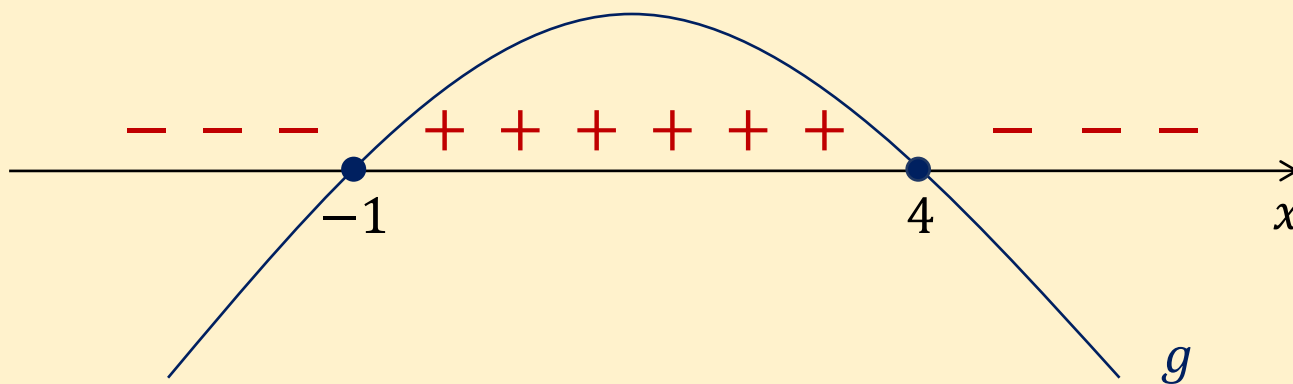
Como  $a = -1 < 0$  temos que a parábola possui concavidade voltada para baixo.

# Inequações do segundo grau

Exemplo:  $(2x^2 - 4x)(-x^2 + 3x + 4) < 0$

Solução:

b)



- $g(x) > 0$  em  $]-1,4[$
- $g(x) = 0$  em  $x = -1$  e  $x = 4$
- $g(x) < 0$  em  $]-\infty, -1[ \cup ]4, +\infty[$

# Inequações do segundo grau

Exemplo:  $(2x^2 - 4x)(-x^2 + 3x + 4) < 0$

Solução:

Logo, dos itens a) e b) segue que:

	-1	0	2	4	
$f(x) = 2x^2 - 4x$	+	+	-	+	+
$g(x) = -x^2 + 3x + 4$	-	+	+	+	-
$f(x) \cdot g(x)$	-	+	-	+	-

$x$

Portanto,  $S = ]-\infty, -1[ \cup ]0, 2[ \cup ]4, +\infty[$

# Inequações do segundo grau

**Exemplo:** Resolva: 
$$\frac{3x^2 - 7x + 5}{-x^2 + 6x - 8} \leq 0$$

**Solução:**

a)  $y_1 = 3x^2 - 7x + 5$       ( $a = 3, b = -7, c = 5$ )

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(3)(5) = 49 - 60 = -11 < 0$$

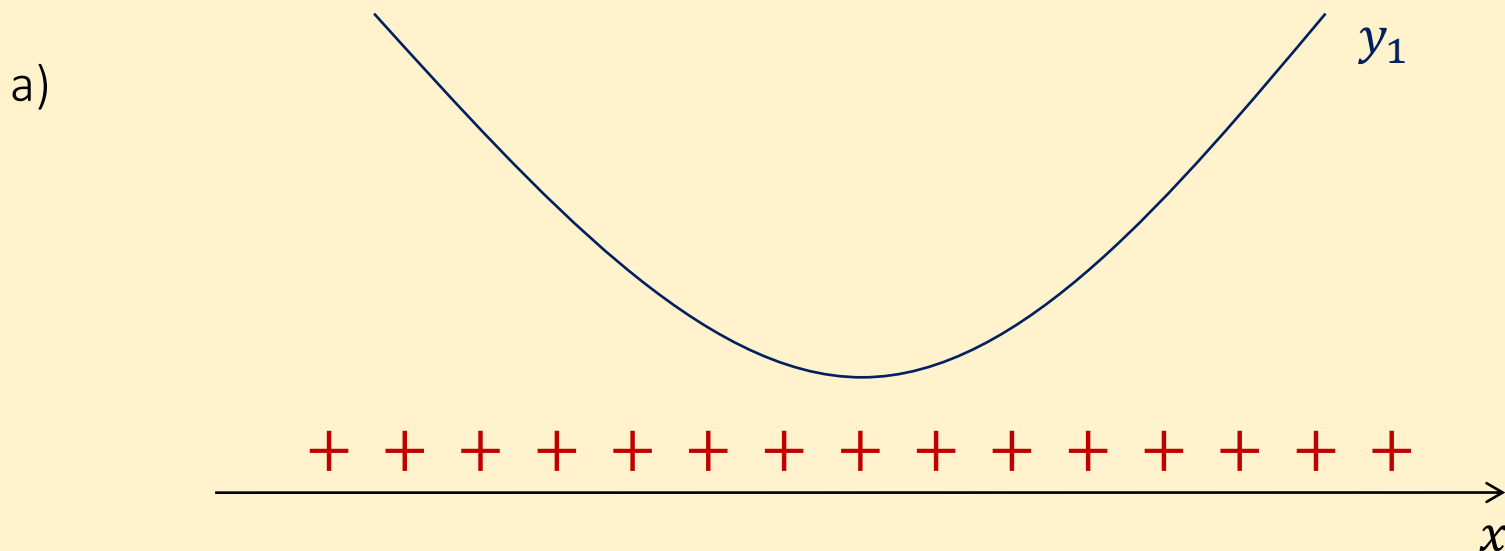
Portanto,  $y_1$  não possui zeros reais.

Como  $a = 3 > 0$  temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.

# Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: 
$$\frac{3x^2 - 7x + 5}{-x^2 + 6x - 8} \leq 0$$

Solução:



- $y_1 > 0$  em  $\mathbb{R}$
- $\nexists x \in \mathbb{R} : y_1 = 0$
- $\nexists x \in \mathbb{R} : y_1 < 0$



# Inequações do segundo grau

**Exemplo:** Resolva: 
$$\frac{3x^2 - 7x + 5}{-x^2 + 6x - 8} \leq 0$$

**Solução:** Vamos agora realizar o mesmo procedimento para a função  $y_2 = -x^2 + 6x - 8$ .

b)  $y_2 = -x^2 + 6x - 8$  ( $a = -1$ ,  $b = 6$ ,  $c = -8$ )

$$\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(-1)(-8) = 36 - 32 = 4 > 0$$

Portanto,  $y_2$  possui dois zeros.

$$-x^2 + 6x - 8 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{2(-1)} = \frac{-6 \pm 2}{-2} \Rightarrow x_1 = \frac{-6 + 2}{-2} = 2$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{-6 - 2}{-2} = 4$$

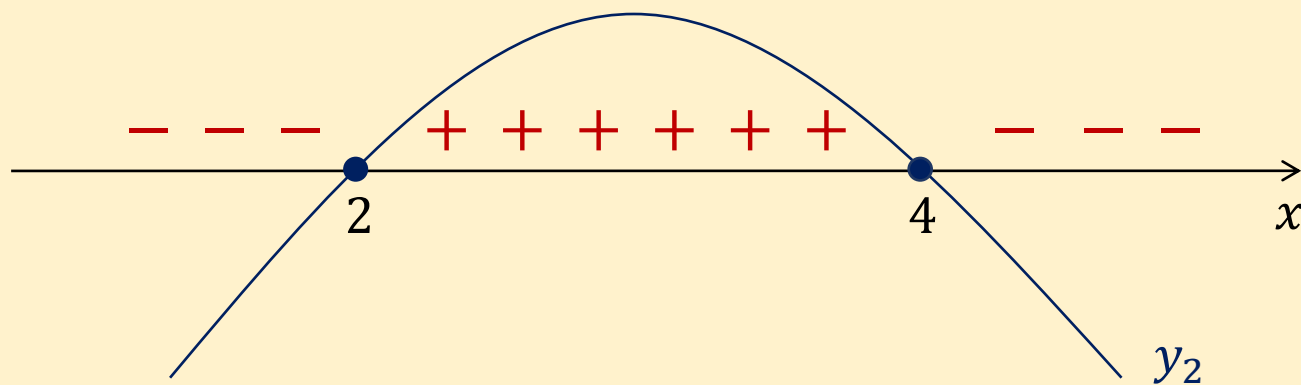
Como  $a = -1 < 0$  temos que a parábola possui concavidade voltada para baixo.

# Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva: 
$$\frac{3x^2 - 7x + 5}{-x^2 + 6x - 8} \leq 0$$

Solução:

b)



- $y_2 > 0$  em  $]2,4[$
- $y_2 = 0$  em  $x = 2$  e  $x = 4$
- $y_2 < 0$  em  $] -\infty, 2[ \cup ]4, +\infty[$

# Inequações do segundo grau

**Exemplo:** Resolva: 
$$\frac{3x^2 - 7x + 5}{-x^2 + 6x - 8} \leq 0$$

**Solução:** Logo, dos itens a) e b) segue que:

	2	4	
$y_1 = 3x^2 - 7x + 5$	+	+	+
$y_2 = -x^2 + 6x - 8$	-	+	-
$\frac{y_1}{y_2} = \frac{3x^2 - 7x + 5}{-x^2 + 6x - 8}$	-	+	-

$x$

Note que  $2 \notin S$  e  $4 \notin S$  pois ambos os valores zeram o denominador da fração  $\frac{3x^2 - 7x + 5}{-x^2 + 6x - 8}$ .

Portanto,  $S = ]-\infty, 2[ \cup ]4, +\infty[$

# Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva:  $x^4 < 625$

Solução:

$$\begin{aligned}x^4 < 625 &\Leftrightarrow x^4 - 625 < 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 25^2 < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x^2 + 25)(x^2 - 25) < 0\end{aligned}$$

$$a) \quad f(x) = x^2 + 25 \quad (a = 1, b = 0, c = 25)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4(1)(25) = 0 - 100 = -100 < 0$$

Portanto,  $f$  não possui zeros reais.

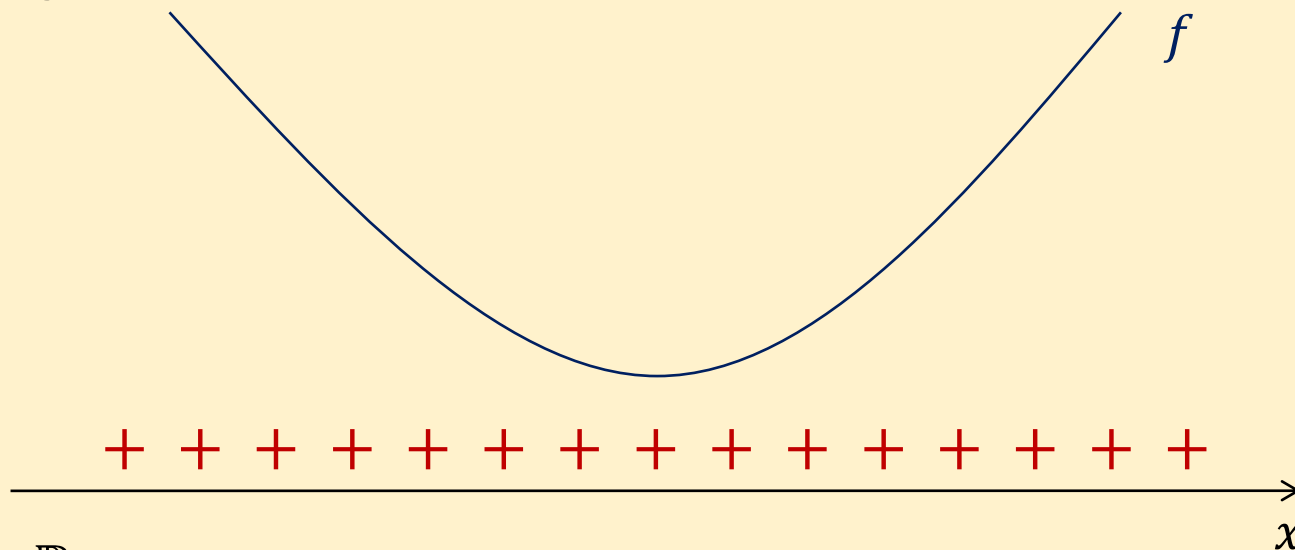
Como  $a = 1 > 0$  temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.

# Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva:  $x^4 < 625$

Solução:  $x^4 < 625 \Leftrightarrow (x^2 + 25)(x^2 - 25) < 0$

a)  $f(x) = x^2 + 25$



- $f(x) > 0$  em  $\mathbb{R}$
- $\nexists x \in \mathbb{R} : f(x) = 0$
- $\nexists x \in \mathbb{R} : f(x) < 0$

# Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva:  $x^4 < 625$

Solução:  $x^4 < 625 \Leftrightarrow (x^2 + 25)(x^2 - 25) < 0$

Vamos agora realizar o mesmo procedimento para a função

$$g(x) = x^2 - 25.$$

b)  $g(x) = x^2 - 25$       ( $a = 1, b = 0, c = -25$ )

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4(1)(-25) = 0 + 100 = 100 > 0$$

Portanto,  $g$  possui dois zeros.

$$\begin{aligned} x^2 - 25 = 0 &\Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{25} \Rightarrow |x| = 5 \Rightarrow x = \pm 5 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_1 = -5 \text{ e } x_2 = 5 \end{aligned}$$

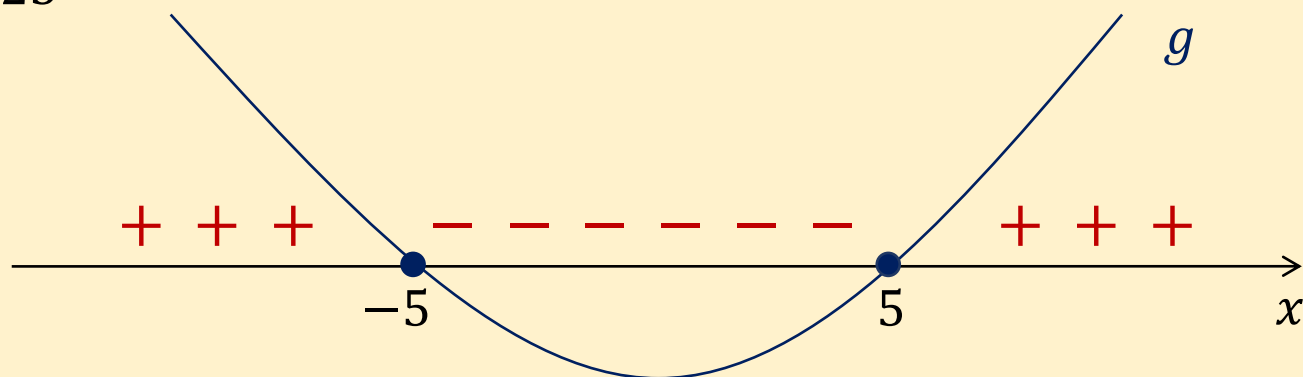
Como  $a = 1 > 0$  temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.

# Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva:  $x^4 < 625$

Solução:  $x^4 < 625 \Leftrightarrow (x^2 + 25)(x^2 - 25) < 0$

b)  $g(x) = x^2 - 25$



- $g(x) > 0$  em  $]-\infty, -5[ \cup ]5, +\infty[$
- $g(x) = 0$  em  $x = -5$  e  $x = 5$
- $g(x) < 0$  em  $]-5, 5[$

# Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva:  $x^4 < 625$

Solução:  $x^4 < 625 \Leftrightarrow (x^2 + 25)(x^2 - 25) < 0$

Logo, dos itens a) e b) segue que:

	-5	5	
$f(x) = x^2 + 25$	+	+	+
$g(x) = x^2 - 25$	+	-	+
$f(x) \cdot g(x)$	+	-	+

Portanto,  $S = ]-5,5[$



# Inequações do segundo grau

**Observação:** Podem ocorrer inequações que envolvem produtos ou quocientes cujos alguns fatores são expressões do segundo grau, alguns são expressões do primeiro grau e ainda outros fatores que são de outros tipos.

**Exemplos:**

$$1) \frac{x^2 + 13}{x - 1} \leq 1$$

$$2) \frac{x(-3x^2 + 5)(-2x + 3)}{(x + 7)e^x} \geq 0$$

O método para resolver este tipo de inequação é o mesmo que utilizamos aqui em exemplos anteriores, ou seja, associar a cada um desses fatores uma função, analisar o sinal destas funções, montar a tabela e determinar o conjunto solução.

Deixamos como exercício a resolução dos dois exemplos anteriores, cujas respostas finais são:

$$1) \frac{x^2 + 13}{x - 1} \leq 1$$

$$S = ]-\infty, 1[$$

$$2) \frac{x(-3x^2 + 5)(-2x + 3)}{(x + 7)e^x} \geq 0$$

$$S = \left] -7, -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \right] \cup \left[ 0, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \right] \cup \left[ \frac{3}{2}, +\infty \right[$$

# Inequações do segundo grau

Vamos ilustrar através do exemplo a seguir que algumas vezes podemos resolver a mesma inequação de várias formas.

**Exemplo:** Resolva:  $(x + 9)(2x - 2) \leq 0$

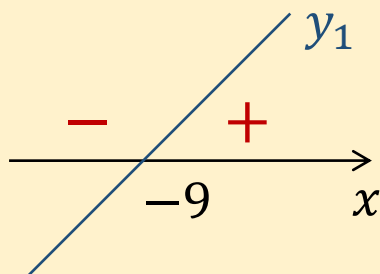
**Solução 1:**

$$y_1 = x + 9$$

$$0 = x + 9$$

$$x = -9 \text{ (raiz)}$$

$y_1$  é crescente pois  
 $a = 1 > 0$

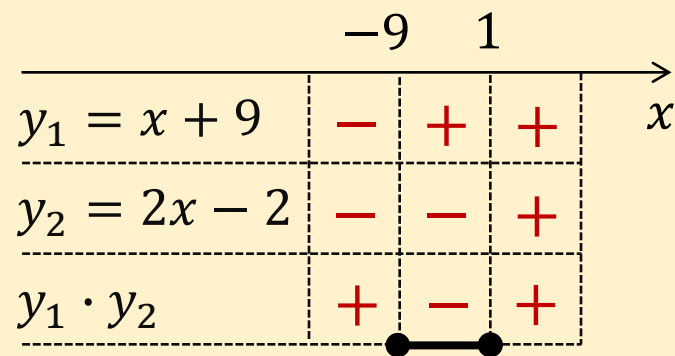
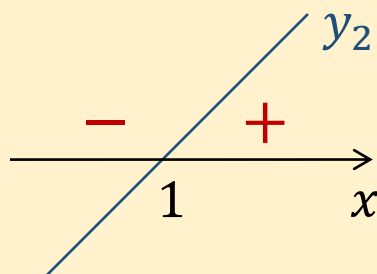


$$y_2 = 2x - 2$$

$$0 = 2x - 2$$

$$x = 1 \text{ (raiz)}$$

$y_2$  é crescente pois  
 $a = 2 > 0$



Portanto, o conjunto solução é:

$$S = [-9, 1]$$

# Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva:  $(x + 9)(2x - 2) \leq 0$

Solução 2:

$$(x + 9)(2x - 2) \leq 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 16x - 18 \leq 0$$

$$f(x) = 2x^2 + 16x - 18 \quad (a = 2, b = 16, c = -18)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (16)^2 - 4(2)(-18) = 256 + 144 = 400 > 0$$

Portanto,  $f$  possui dois zeros.

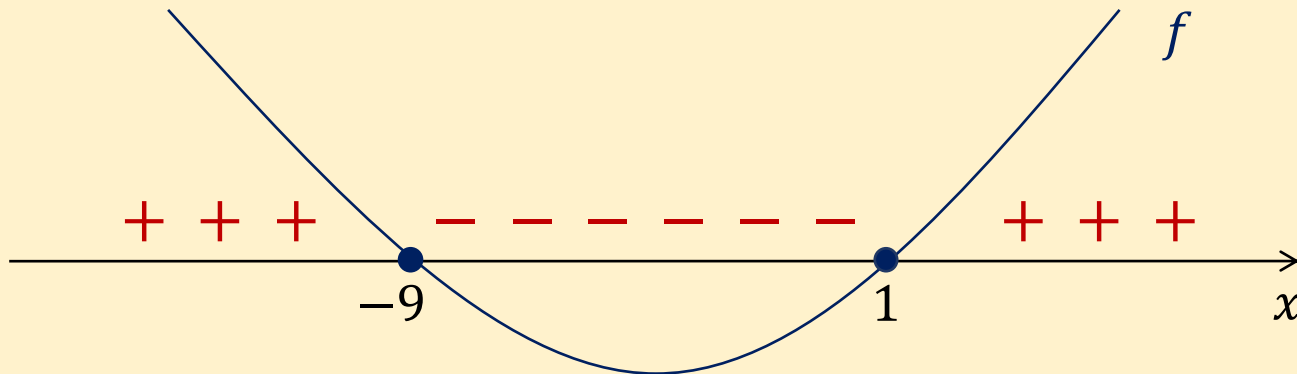
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 \pm \sqrt{400}}{2(2)} = \frac{-16 \pm 20}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{-16 - 20}{4} = -9$$
$$\Rightarrow x_2 = \frac{-16 + 20}{4} = 1$$

Como  $a = 2 > 0$  temos que a parábola possui concavidade voltada para cima.

# Inequações do segundo grau

Exemplo: Resolva:  $(x + 9)(2x - 2) \leq 0$

Solução 2:



Lembre que

$$(x + 9)(2x - 2) \leq 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 16x - 18 \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 0$$

Portanto,  $S = [-9, 1]$

# Exercícios Propostos



# Exercícios



1) Resolva as inequações abaixo e apresente o conjunto solução em notação de intervalo:

(a)  $\frac{2}{x} < \frac{3}{x-4}$

(b)  $\frac{1}{x+1} \geq \frac{3}{x-2}$

(c)  $x^3 - x^2 - x - 2 > 0$

(d)  $x^3 - 3x + 2 \leq 0$

2) Ache todos os valores de  $x$  para os quais a expressão dada resulte em um número real:

(a)  $\sqrt{x^2 + x - 6}$

(b)  $\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$

# Exercícios



3) Resolva as inequações abaixo e apresente o conjunto solução na reta numérica:

(a)  $(x^2 + x - 2)(-x + 2) \leq 0$

(d)  $\frac{x - 2}{x + 3} > 0$

(b)  $x(1 - x)(x + 4) < 0$

(e)  $\frac{3x - 1}{x + 1} \leq 2$

(c)  $\frac{2x + 1}{x - 2} < 1$

(f)  $-1 < 2x - 3 \leq x$

4) Determine o domínio das seguintes funções:

(a)  $y = \sqrt{x(x - 5)}$

(c)  $\sqrt{\frac{x - 2}{x + 4}}$

(b)  $y = \sqrt{x^2 - 2x - 15}$

(d)  $y = \sqrt{\frac{x - 1}{-x + 3}} - \sqrt{\frac{-x^2 + 1}{x^2 - 4x}}$

# Exercícios

---



5) Determine o conjunto solução das seguintes desigualdades:

$$(a) \quad m + \frac{3 - m^2}{m - 2} \geq -3$$

$$(b) \quad \frac{(x - 1)(x + 3)}{x - 5} > 0$$

6) Dadas as funções  $f(x) = \frac{2x - 1}{x - 2}$  e  $g(x) = 1$  determine os valores reais de  $x$  para que se tenha:  $f(x) > g(x)$



# Respostas

---



## Exercício 1:

$$(a) S = ]-8,0[ \cup ]4, +\infty[$$

$$(b) S = \left] -\infty, -\frac{5}{2} \right] \cup ]-1,2[$$

$$(c) S = ]2, +\infty[$$

$$(d) S = ]-\infty, -2] \cup \{1\}$$

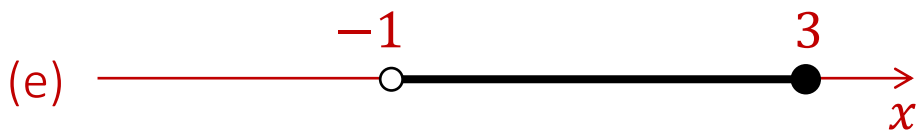
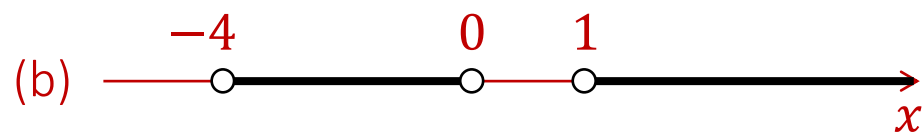
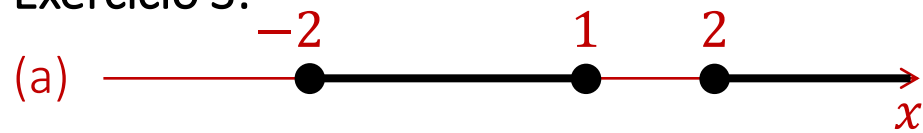
## Exercício 2:

$$(a) S = ]-\infty, -3] \cup [2, +\infty[$$

$$(b) S = ]-\infty, -2] \cup ]1, +\infty[$$

# Respostas

Exercício 3:



# Respostas

---



Exercício 4:

(a)  $S = ]-\infty, 0] \cup [5, +\infty[$

(c)  $S = ]-\infty, -4[ \cup [2, +\infty[$

(b)  $S = ]-\infty, -3] \cup [5, +\infty[$

(d)  $S = [1, 3[$

Exercício 5:

(a)  $S = ]-\infty, 2[ \cup [3, +\infty[$

(b)  $S = ]-3, 1[ \cup ]5, +\infty[$

Exercício 6:  $S = ]-\infty, -1[ \cup ]2, +\infty[$



# Monitorias!!

---

**Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!**

Os horários e locais de monitorias podem ser encontrados na página do Projeto:

<http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/>

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

[https://www.youtube.com/channel/UCB3NUeew6Ji\\_k39-GDA3iQ/playlists](https://www.youtube.com/channel/UCB3NUeew6Ji_k39-GDA3iQ/playlists)

O GAMA possui monitorias de:

- ❑ Pré-cálculo e Matemática Elementar (e disciplinas equivalentes)
  - ❑ ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
    - ❑ Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e disciplinas equivalentes)

**Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.**



# Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino



## Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares

2020/2

### Aula 01

Projeto

# GAMA

Grupo de Apoio em  
Matemática

# Matrizes

**Definição:** Chamamos de **matriz** uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas.

**Definição:** Uma **matriz** é um agrupamento regular de números. Os números neste agrupamento são chamados de entradas da matriz.

**Exemplos:**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} e & \pi & -\sqrt{4} \\ 0 & \frac{2}{4} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad [4] \quad [2 \quad 1 \quad 0 \quad -3]$$

➡ Os elementos de uma matriz podem ser números (reais ou complexos), funções ou ainda matrizes.

# Matrizes



Representamos uma matriz de  $m$  linhas e  $n$  colunas por:

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Notação

- 1)  $[a_{ij}]_{m \times n}$
- 2)  $[a_{ij}]$

A entrada que ocorre na  $i$ -ésima linha e na  $j$ -ésima coluna de uma matriz  $A$  é denotada por  $a_{ij}$

# Matrizes



Definição 3 : Duas matrizes são definidas como iguais se têm o mesmo tamanho e suas entradas são iguais, ou seja, se  $A_{m \times n} = B_{r \times s}$  são iguais,  $A = B$ , se elas tem o mesmo número de linhas ( $m = r$ ) e colunas ( $n = s$ ) e todos os seus elementos correspondentes são iguais ( $a_{ij} = b_{ij}$ ).

Considere uma matriz denotada por  $A_{m \times n}$  :

i) Matriz quadrada : o número de linhas é igual ao número de colunas ( $m = n$ )

Exemplos

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$[21]_{1 \times 1}$$



# Matrizes: Tipos de matrizes

ii) Matriz nula : aquela em que  $a_{ij} = 0$ , para todo  $i$  e  $j$ .

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

iii) Matriz coluna : aquela que possui uma única coluna ( $n = 1$ ).

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 7 \\ -8 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

# Matrizes: Tipos de matrizes

iv) Matriz linha : aquela que possui uma única linha ( $m = 1$ ).

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 8 \end{bmatrix}_{1 \times 3}$$

v) Matriz diagonal : é uma matriz quadrada ( $m = n$ ) onde

$a_{ij} = 0$ , para  $i \neq j$ .

Exemplo

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

# Matrizes: Tipos de matrizes

vi) Matriz identidade quadrada: aquela em que  $a_{ii} = 1$  e  $a_{ij} = 0$ , para  $i \neq j$ .

Exemplo

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

vii) Matriz triangular superior: é uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal são nulos, ou seja,  $m = n$ ,  $a_{ij} = 0$ , para  $i > j$ .

Exemplo

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

# Matrizes: Tipos de matrizes

viii) Matriz triangular inferior : é uma matriz quadrada onde todos os elementos acima da diagonal são nulos, ou seja,  $m = n$ ,  $a_{ij} = 0$ , para  $i < j$ .

Exemplo

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 8 & -2 & 0 \\ -1 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

ix) Matriz simétrica : é uma matriz onde  $m = n$  e  $a_{ij} = a_{ji}$ .

Exemplo

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & -1 \\ 6 & 5 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

# Matrizes: Operações com matrizes

Adição: Seja as matrizes  $A_{m \times n}$  e  $B_{m \times n}$ , de mesma ordem,  $A + B$  é uma matriz  $m \times n$  cujos elementos são as somas dos elementos correspondentes de  $A$  e  $B$ .

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 4 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

Multiplificação por escalar: Seja  $A_{m \times n}$  e  $k$  um escalar.

Definimos uma nova matriz  $m \times n$  por :

$$k \cdot A = \left[ k \cdot a_{ij} \right]_{m \times n}.$$

Exemplo :

$$-2 \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -20 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

# Matrizes: Operações com matrizes

Transposição : Dada uma matriz  $A[a_{ij}]_{m \times n}$ , podemos obter uma outra matriz  $A'[b_{ij}]_{n \times m}$ , cujas linhas são as colunas de  $A$ , ou seja,  $b_{ij} = a_{ji}$ .

$A'$  é denominada transposta de  $A$ .

Exemplo :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

# Matrizes: Operações com matrizes

Multiplicação de matrizes: Sejam  $A[a_{ij}]_{m \times n}$  e  $B[b_{rs}]_{n \times p}$ ,  
 definimos  $A \cdot B = [c_{uv}]_{m \times p}$ , onde

$$c_{uv} = \sum_{k=1}^n a_{uk} b_{kv} = a_{u1}b_{1v} + a_{u2}b_{2v} + \dots + a_{un}b_{nv}$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \quad \text{e}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

Observações:

- 1) o produto de duas matrizes  $A_{m \times n}$  e  $B_{l \times p}$  só pode ser efetuado se  $n = l$ ;
- 2) a matriz resultado  $C = AB$  será de ordem  $m \times p$ .

# Exercícios Propostos





# Exercícios:

2) Sejam  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$  e  $D = [2 \ -1]$ . Calcule:

a)  $A + B$       b)  $A \cdot C$       c)  $C \cdot D$       d)  $2A + B$       e)  $-A$

3) Seja  $A = \begin{bmatrix} 2 & x^2 \\ 2x-1 & 0 \end{bmatrix}$ . Se  $A^t = A$ , então qual o valor de  $x$ ?

4) Dadas  $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$  e  $C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ :

a) Mostre que  $AB = BA = 0$ ,  $AC = A$  e  $CA = C$ .

b) Use os resultados de a) para mostrar que  $ACB = CBA$  e  $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ .

# Respostas:

---

$$2) \text{ a) } \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{bmatrix} 15 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{bmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 7 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3) x = 1.$$

$$4) \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

# Monitorias!!

---

**Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!**

Os horários e locais de monitorias podem ser encontrados na página do Projeto:

<http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/>

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

[https://www.youtube.com/channel/UCB3NUeew6Ji\\_k39-GDA3iQ/playlists](https://www.youtube.com/channel/UCB3NUeew6Ji_k39-GDA3iQ/playlists)

O GAMA possui monitorias de:

- ❑ Pré-cálculo e Matemática Elementar (e disciplinas equivalentes)
  - ❑ ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
    - ❑ Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e disciplinas equivalentes)

**Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.**



# Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino



## Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares

2020/2

### Aula 02

Projeto

# GAMA

Grupo de Apoio em  
Matemática

# Determinantes

**Definição:** Dada uma permutação dos inteiros  $1, 2, \dots, n$ , existe uma inversão quando um inteiro precede outro menor que ele.

Exemplo: N<sup>o</sup> de inversões considerando as permutações de 1, 2 e 3.

Permutação			N <sup>o</sup> de inversões
1	2	3	0
1	3	2	1
2	1	3	1
2	3	1	2
3	1	2	2
3	2	1	3

Observação: O n<sup>o</sup> de permutações de  $n$  objetos é dada por  $n!$ , onde  $n! = n(n - 1)(n - 2) \dots 2 \cdot 1$  caso  $n > 0$ . Define-se  $0! = 1$ .

# Determinantes

- Ao número associado a uma matriz quadrada  $A = [a_{ij}]$  chamamos de determinante.
- Representamos por  $\det(A)$ ,  $|A|$  ou  $\det[a_{ij}]$ .

Exemplos:

$$\det[a] = a$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

# Determinantes

## Observações:

- Para o cálculo do  $\det(A_{3 \times 3})$ , aparecem todos os produtos  $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ , onde  $j_1, j_2$  e  $j_3$  são as permutações de 1, 2 e 3.
- O sinal do termo é negativo se o número de inversões é ímpar.

Permutação			Nº de inversões	Sinal	Produto $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$
1	2	3	0	+	$a_{11}a_{22}a_{33}$
1	3	2	1	-	$a_{11}a_{23}a_{32}$
2	1	3	1	-	$a_{12}a_{21}a_{33}$
2	3	1	2	+	$a_{12}a_{23}a_{31}$
3	1	2	2	+	$a_{13}a_{21}a_{32}$
3	2	1	3	-	$a_{13}a_{22}a_{31}$

# Determinantes

**Definição:**  $\det[a_{ij}] = \sum_{\rho} (-1)^J a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$ , onde  $J = (j_1, j_2, \dots, j_n)$  é o número de inversões da permutação  $(j_1 j_2 \dots j_n)$  e  $\rho$  indica que a soma é estendida a todas  $n!$  permutações de  $(1, 2, \dots, n)$ .

$$\begin{aligned} \text{Logo, o } \det[a_{ij}]_{3 \times 3} &= \sum_{\rho}^{3!} (-1)^J a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \\ &= (-1)^0 a_{11} a_{22} a_{33} + (-1)^1 a_{11} a_{23} a_{32} + \\ &\quad (-1)^1 a_{12} a_{21} a_{33} + (-1)^2 a_{12} a_{23} a_{31} + \\ &\quad (-1)^2 a_{13} a_{21} a_{32} + (-1)^3 a_{13} a_{22} a_{31} \end{aligned}$$



# Determinantes: Propriedades

---

- i. Se todos os elementos de uma linha/coluna de uma matriz  $A$  são nulas,  $\det(A) = 0$ .
- ii.  $\det(A) = \det(A')$ .
- iii. Se multiplicarmos um linha da matriz por uma constante, o determinante fica multiplicado por esta constante.
- iv. Uma vez trocada a posição de duas linhas, o determinante troca de sinal.
- v. O determinante de uma matriz que tem duas linhas ou colunas iguais é zero.
- vi.  $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$ .
- vii. O determinante não se altera se somarmos a uma linha outra linha multiplicada por uma constante:  $L_i \leftarrow L_i + kL_j$ .
- viii.  $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ .

# Desenvolvimento de Laplace

Sabe-se que

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Podemos reescrever a soma de outra forma:

$$\det A = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}|$$

$A_{ij}$  é a submatriz (da matriz inicial) em que a  $i$ -ésima linha e a  $j$ -ésima coluna foram retiradas.

Logo, o determinante pode ser expresso em função dos determinantes das submatrizes  $2 \times 2$ , ou seja,

# Exemplos

Resolva os sistemas lineares dados na forma matricial:

$$1) \begin{array}{cccc|c} \hat{e} & 1 & 0 & 0 & 3 & \hat{u} \\ \hat{e} & 0 & 1 & 0 & -2 & \hat{u} \\ \hat{e} & 0 & 0 & 1 & 2 & \hat{u} \end{array}$$

$$p_a = 3; p_c = 3; m = 3; n = 3$$

Como,  $p_a = p_c = n$ , o sistema admite solução única:  $x = 3$ ;  $y = -2$  e  $z = 2$

$$2) \begin{array}{cccc|c} \hat{e} & 1 & 0 & 7 & -10 & \hat{u} \\ \hat{e} & 0 & 1 & 5 & -6 & \hat{u} \\ \hat{e} & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{u} \end{array}$$

$$p_a = 2; p_c = 2; m = 2; n = 3$$

Como,  $p_a = p_c = p$ , mas  $p < n$  o sistema possui grau de liberdade  $n - p = 1$ . Logo,  $x = -10 - 7z$  e  $y = -6 - 5z$

# Desenvolvimento de Laplace

Define-se  $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$  o que caracteriza a expressão  $\det A = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}$ , ou seja,

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} |A_{11}| = 1 \cdot |A_{11}|$$

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2} |A_{11}| = -1 \cdot |A_{12}|$$

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3} |A_{11}| = 1 \cdot |A_{13}|$$

Para o cálculo de determinantes de ordem  $n$ , expressamos da seguinte forma:

$$\det A_{n \times n} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \Delta_{ij}$$

Ao número  $\Delta_{ij}$  chamamos de **cofator** ou **complemento algébrico** do elemento  $a_{ij}$ .

# Desenvolvimento de Laplace

---

**Exemplo:** realizando o desenvolvimento de Laplace pela linha 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

**Exercício:** Calcule o determinante da mesma matriz  $A$  utilizando a coluna 2.

# Matriz Adjunta e Inversa

Da definição de cofator  $\Delta_{ij}$  de  $a_{ij}$ , podemos formar uma nova matriz  $A$ , denominada **matriz dos cofatores** de  $A$ .

$$\bar{A} = [\Delta_{ij}]$$

**Exemplo:**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -19 & 19 & -19 \\ -5 & 10 & -11 \\ 4 & -8 & 5 \end{bmatrix}$$

**Definição:** dada uma matriz quadrada  $A$ , chamaremos de **matriz adjunta** de  $A$ , a matriz transposta dos cofatores de  $A$ , i.e.,  $adj A = \bar{A}'$ .

$$adj A = \bar{A}' = \begin{bmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

# Matriz Adjunta e Inversa

**Teorema:**  $A \cdot \bar{A}' = A \cdot (\text{adj } A) = (\det A) \cdot In.$

**Exercício:** Comprove o teorema supracitado sendo  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

**Definição:** Dada uma matriz quadrada  $A$  de ordem  $n$ , chamamos de inversa de  $A$  a uma matriz  $B$  tal que  $A \cdot B = B \cdot A = In$ , onde  $I_n$  é a matriz identidade de ordem  $n$ .

A inversa de  $A$  é representada por  $A^{-1}$ .

**Exemplo:** Seja  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ , encontre  $A^{-1}$ .

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

# Matriz Adjunta e Inversa

## Observações:

- i. Se  $A$  e  $B$  são matrizes quadradas, de mesma ordem, ambas inversíveis (existe  $A^{-1}$  e  $B^{-1}$ ), então  $A \cdot B$  é inversível e  $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ .
- ii. Se  $A$  é uma matriz quadrada e existe uma matriz  $B$  tal que  $B \cdot A = I$ , então  $A$  é inversível, i.e.,  $A^{-1}$  existe e  $B = A^{-1}$ .
- iii. Nem toda matriz tem inversa.

**Teorema:** Uma matriz quadrada  $A$  admite inversa se, e somente se,  $\det A \neq 0$ .

Neste caso,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \bar{A}'$$

**Exercício:** Determine a inversa de  $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$ .



# Matrizes elementares

**Observação:** Cada operação com linhas de uma matriz corresponde a uma multiplicação dessa matriz por uma matriz especial.

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

- a)  $L_1 \leftarrow 2L_1$
- b)  $L_1 \leftrightarrow L_2$
- c)  $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$

# Matrizes

**Definição:** Uma matriz elementar é uma matriz obtida a partir da identidade, através da aplicação de uma operação elementar com linhas.

**Teorema:** Se  $A$  é uma matriz, o resultado da aplicação de uma operação com as linhas de  $A$  é o mesmo que o resultado da multiplicação da matriz elementar  $E$  correspondente a operação com linhas pela matriz  $A$ .

**Teorema:** Sistemas associados a matrizes linha equivalente são equivalentes.

**Teorema:** Se  $A$  é uma matriz inversível, sua matriz linha reduzida a forma escada  $R$  é a identidade. Além disso,  $A$  é dada por um produto de matrizes elementares.

**Teorema:** Se uma matriz  $A$  pode ser reduzida a matriz identidade por uma sequência de operações elementares com linhas, então  $A$  é inversível e a matriz inversa de  $A$  é obtida aplicando-se a mesma sequência de operações com linhas.

$$(A : I) \rightarrow (I : A^{-1})$$

# Exercícios Propostos



# Exercícios

---

1) Dadas as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , calcule:

a)  $\det A + \det B$

b)  $\det (A + B)$

2) Dadas as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ , calcule:

a)  $\det (AB)$

b)  $\det (BA)$

3) Calcule  $\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}$

a) por Sarrus

b) em relação à segunda coluna, usando o desenvolvimento de Laplace.

# Exercícios



4) Dada a matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ , calcule:

a)  $\text{adj } A$

b)  $\det A$

c)  $A^{-1}$

5) Determine  $A^{-1}$  sendo  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ .

# Respostas

---

1) a) 1    b) 3

2) a)  $\det(AB) = 0$     b)  $\det(BA) = -231$

3) 21

4) a)  $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$     b) 36    c) -36    d) 0

5)  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 6 & -4 \\ 4 & -5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$



# Monitorias!!

---

**Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!**

Os horários e locais de monitorias podem ser encontrados na página do Projeto:

<http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/>

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

[https://www.youtube.com/channel/UCB3NUeew6Ji\\_k39-GDA3iQ/playlists](https://www.youtube.com/channel/UCB3NUeew6Ji_k39-GDA3iQ/playlists)

O GAMA possui monitorias de:

- ❑ Pré-cálculo e Matemática Elementar (e disciplinas equivalentes)
  - ❑ ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
    - ❑ Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e disciplinas equivalentes)

**Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.**



Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino



# Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares

2020/2

Aula 03

Projeto

# GAMA

Grupo de Apoio em  
Matemática



# Sistemas e Matrizes

---

Um sistema de equações lineares com  $m$  equações e  $n$  incógnitas é um conjunto de equações do tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

com  $a_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ , números reais (ou complexos).

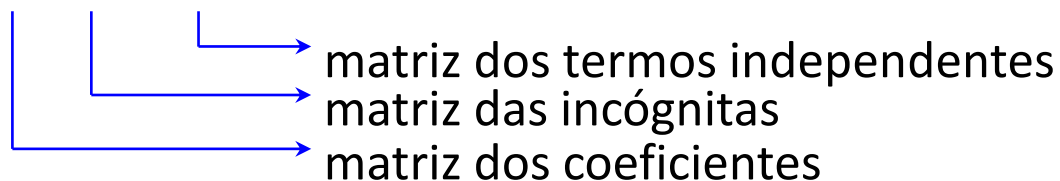
Uma solução para o sistema é uma  $n$ -upla de números  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  que satisfaça simultaneamente estas  $m$  equações.

# Sistemas e Matrizes

Ainda, podemos escrever o sistema na forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_B$$

ou  $A \cdot X = B$



# Sistemas e Matrizes

---

Outra matriz que podemos associar ao sistema é a matriz ampliada :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

# Sistemas e Matrizes

Dado o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$$

represente na forma matricial e apresente a matriz ampliada.

Forma matricial:  $A \cdot X = B$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Matriz ampliada

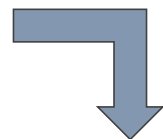
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

# Resolução do sistema

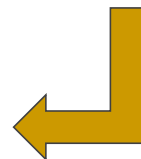
Em termos de matrizes ampliadas aplicadas a resolução de sistemas,

partimos de 
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

e chegamos a 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$



Como realizar este procedimento?



que é a matriz ampliada do sistema

$$\begin{cases} x_1 & & = 3 \\ & x_2 & = -2 \\ & & x_3 = 2 \end{cases}$$

# Sistemas e Matrizes: Operações elementares

---

São definidas três operações elementares sobre as linhas de uma matriz :

1) Permuta da  $i$ -ésima e  $j$ -ésima linhas :  $L_i \leftrightarrow L_j$

Exemplo :  $L_2 \leftrightarrow L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

## Sistemas e Matrizes: Operações elementares

---

2) Multiplicação da  $i$ -ésima linha por um escalar não nulo:  $L_i \leftarrow k \cdot L_i$

Exemplo:  $L_2 \leftarrow -3L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

3) Substituição da  $i$ -ésima linha pela  $i$ -ésima mais  $k$  vezes a  $j$ -ésima linha:  $L_i \leftarrow L_i + k \cdot L_j$

Exemplo:  $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

# Sistemas e Matrizes: Operações elementares

---

Se  $A$  e  $B$  são matrizes  $m \times n$ , dizemos que  $B$  é linha equivalente a  $A$ , se  $B$  for obtida de  $A$  através de um número finito de operações elementares sobre as linhas de  $A$ .

## Notação

$$A \rightarrow B \quad \text{ou} \quad A \sim B$$

## Exemplo

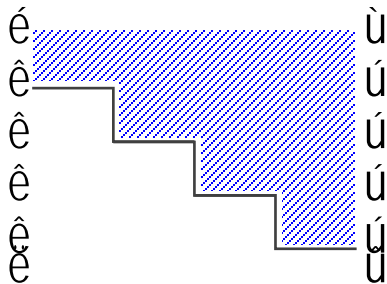
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \text{ é linha equivalente a } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



# Sistemas e Matrizes: Forma escada

**Definição:** Uma matriz  $m \times n$  é linha reduzida à forma escada se:

- O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1.
- Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero.
- Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas.
- Se as linhas  $1, \dots, r$  são linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha  $i$  ocorre na coluna  $k_i$ , então  $k_1 < k_2 < \dots < k_r$ .



**Obs.:** o número de zeros precedendo o primeiro elemento não nulo de uma linha aumenta a cada linha, até que sobrem somente linhas nulas (se houver).

# Sistemas e Matrizes: Forma escada

Definição : Dada uma matriz  $A_{m \times n}$ , seja  $B_{m \times n}$  a matriz linha reduzida à forma escada linha equivalente a  $A$ .

Chamamos de posto de  $A$ , denotado por  $p$ , o número de linhas não nulas de  $B$ .

Chamamos de nulidade de  $A$  o número  $n - p$ .

## Exemplo

Determine o posto e a nulidade de  $A$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bullet \text{ posto de } A: p = 3 \\ \bullet \text{ nulidade: } n - p = 3 - 3 = 0 \end{cases}$$

# Sistemas e Matrizes: Forma escada

Se a matriz  $A$  for interpretada como sendo a matriz ampliada de um sistema linear, temos :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 0x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix}$$

A matriz - linha reduzida à forma escada é linha equivalente à matriz  $A$ . Logo, o sistema que ela representa é dado por :

$$\begin{cases} x_1 & = -\frac{7}{8} \\ x_2 & = -\frac{1}{4} \\ x_3 & = \frac{11}{8} \end{cases}$$

# Solução de sistemas lineares

---

Se tivermos um sistema de uma equação e uma incógnita

$ax = b$ , existirão três possibilidades:

i)  $a \neq 0$                       A equação tem uma única solução  $x = \frac{b}{a}$

ii)  $a = 0$  e  $b = 0$               Temos  $0x = 0$ . Qualquer número real será solução da equação.

iii)  $a = 0$  e  $b \neq 0$               Temos  $0x = b$ . Não existe solução para esta equação.

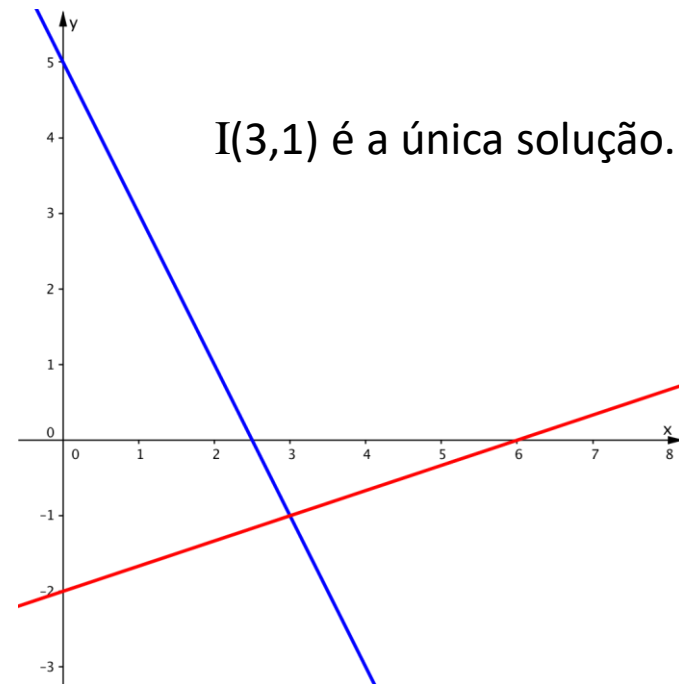
# Exemplo 1:

Resolva o sistema linear: 
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 0y = 3 \\ 0x + y = -1 \end{cases}$$



Matriz dos coeficientes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Posto  $p_c = 2$

Matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

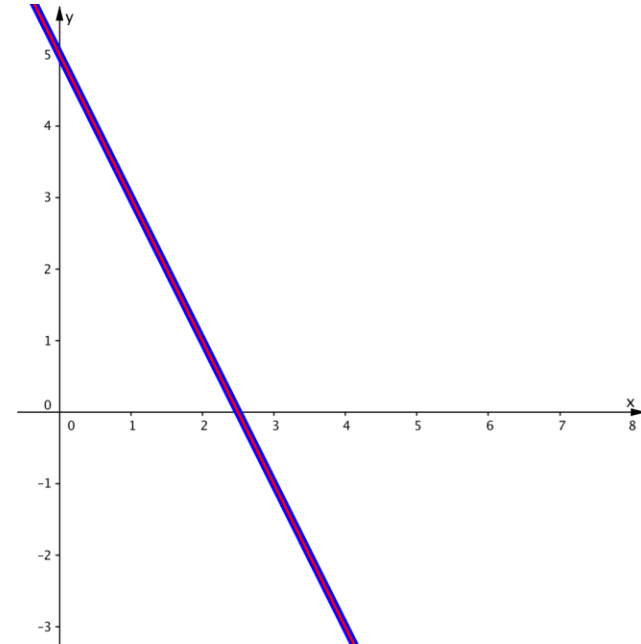
Posto  $p_a = 2$

Nulidade

$$n - p = 2 - 2 = 0$$

# Exemplo 2:

Resolva o sistema linear: 
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$$



As retas que formam o sistema são coincidentes.

Qualquer ponto de uma das retas é solução deste sistema.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = \frac{5}{2} \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

Matriz dos coeficientes

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Posto  $p_c = 1$

Matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Posto  $p_a = 1$

Nulidade

$$n - p = 2 - 1 = 1$$

Também chamada de grau de liberdade do sistema, ou seja, o sistema apresenta uma variável livre.

# Exemplo 3:

Resolva o sistema linear: 
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 6x + 3y = 10 \end{cases}$$

As retas não apresentam nenhum ponto em comum. O sistema **não** tem solução.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{2}y = \frac{5}{2} \\ 0x + 0y = 1 \end{cases}$$

Matriz dos coeficientes

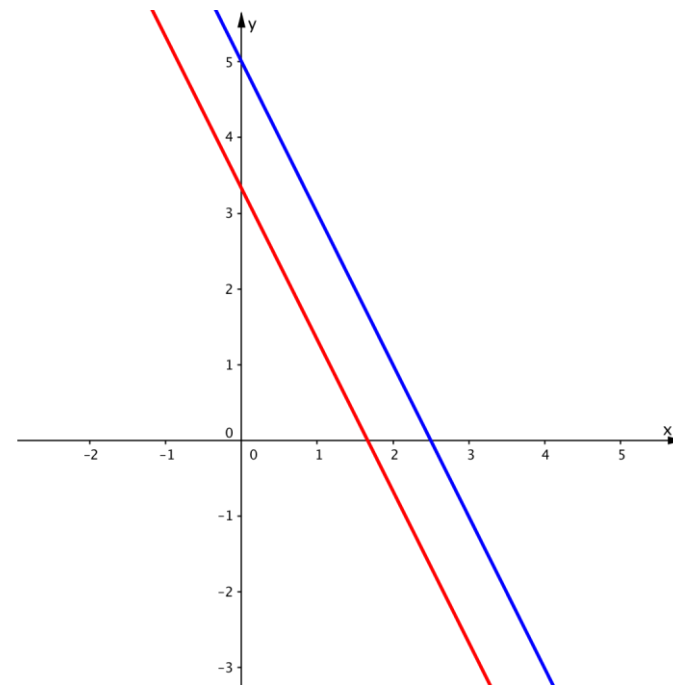
$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Posto  $p_c = 1$

Matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Posto  $p_a = 2$



**Não existe nenhum valor de  $x$  ou  $y$  capaz de satisfazer a segunda equação.**

# Caso Geral

---

Seja um sistema de  $m$  equações lineares e  $n$  incógnitas  $x_1, \dots, x_n$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

com coeficientes  $a_{ij}$  e termos independentes  $b_i$  números reais (ou complexos).



# Exemplos:

Resolva os sistemas lineares dados na forma matricial:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{u}$$

$$2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -10 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \end{pmatrix} \vec{u}$$

$$3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -10 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{u}$$

$$4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 & -2 & -10 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{u}$$

# Exemplos



Resolva os sistemas lineares dados na forma matricial:

$$3) \begin{array}{cccc|c} \hat{x} & 1 & 0 & 7 & -10 & \hat{u} \\ \hat{y} & 0 & 1 & 5 & -6 & \hat{u} \\ \hat{z} & 0 & 0 & 0 & 2 & \hat{u} \end{array}$$

$$p_a = 3; p_c = 2; m = 3; n = 3$$

Como,  $p_a \neq p_c$ , o sistema é impossível.

$$4) \begin{array}{cccc|c} \hat{x} & 1 & 0 & -10 & -2 & -10 & \hat{u} \\ \hat{y} & 0 & 1 & 7 & 1 & 4 & \hat{u} \\ \hat{z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{u} \end{array}$$

$$p_a = 2; p_c = 2; m = 3; n = 4$$

Como,  $p_a = p_c = p$ , mas  $p < n$  o sistema possui grau de liberdade  $n - p = 2$ . Logo,  $x = -10 + 10z + 2w$  e  $y = 4 - 7z - w$ .

# Exemplos

Resolva o sistema linear: 
$$\begin{cases} x + 2y + z + t = 0 \\ x + 3y - z + 2t = 0 \end{cases}$$

Resposta :

A matriz reduzida à forma escada é 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
 e

o sistema inicial é equivalente a 
$$\begin{cases} x + 0y + 5z - t = 0 \\ 0x + y - 2z + t = 0 \end{cases}$$

Como  $m = 2$ ,  $n = 4$ ,  $p_a = p_c = p = 2$ , temos que  $p < n$  e o sistema apresenta grau de liberdade  $n - p = 4 - 2 = 2$ :  $x = -5z + t$  e  $y = 2z - t$

Portanto, o sistema admite infinitas soluções e o conjunto de soluções será dado atribuindo - se valores arbitrários para as incógnitas  $z$  e  $t$ .

# Exercícios Propostos



# Exercícios



1) Resolva os sistemas, mostre o conjunto solução quando houver e sua forma Matricial:

$$\begin{aligned}x_1 + 7x_2 &= 4 \\ -2x_1 - 9x_2 &= 16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2x_1 + 6x_2 &= -6 \\ 5x_1 + 7x_2 &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 - 3x_2 &= 4 \\ -3x_1 + 9x_2 &= 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4x_2 &= 6 \\ x_1 - 6x_2 &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4x_1 - 9x_2 &= 1 \\ 8x_1 - 18x_2 &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4x_1 - 9x_2 &= 1 \\ 16x_1 - 36x_2 &= 4\end{aligned}$$

2) Determine os valores de  $\lambda$  para que a matriz dada seja a matriz completa associada a um sistema possível.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & \lambda \\ -2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & \lambda & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & -2 \\ -4 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 & -3 \\ -4 & 12 & \lambda \end{bmatrix}$$

# Exercícios

---



3) Determine quais opções são solução para o sistema dado:

$$\begin{aligned}2x_1 - 4x_2 - x_3 &= 1 \\x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\3x_1 - 5x_2 - 3x_3 &= 1\end{aligned}$$

- a)  $(3, 1, 1)$       b)  $(3, -1, 1)$       c)  $(13, 5, 2)$       d)  $(\frac{13}{2}, \frac{5}{2}, 2)$       e)  $(17, 7, 5)$

4) Escreva um sistema de Equações Lineares constituído de três equações em três incógnitas com:

- a) Nenhuma solução
- b) Exatamente uma solução
- c) Um infinidades de soluções

# Respostas



## Exercício 1:

(a)  $x_1 = -\frac{148}{5}$  e  $x_2 = \frac{24}{5}$

(b)  $x_1 = 3$  e  $x_2 = -2$

(c) Impossível.

(d)  $x_1 = 12$  e  $x_2 = 3/2$

(e) Sistema possível e indeterminado

(f) Sistema possível e indeterminado

## Exercício 2:

(a)  $\lambda = -\frac{5}{2}$

(b)  $\lambda \neq -\frac{1}{2}$

(c)  $\lambda = 12$

(d)  $\lambda = 6$

## Exercício 3:

(a), (d) e (e)



# Monitorias!!

---

**Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!**

Os horários e locais de monitorias podem ser encontrados na página do Projeto:

<http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/>

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

[https://www.youtube.com/channel/UCB3NUeew6Ji\\_k39-GDA3iQ/playlists](https://www.youtube.com/channel/UCB3NUeew6Ji_k39-GDA3iQ/playlists)

O GAMA possui monitorias de:

- ❑ Pré-cálculo e Matemática Elementar (e disciplinas equivalentes)
  - ❑ ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
    - ❑ Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e disciplinas equivalentes)

**Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.**