Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino

Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

Limites

2020/1

Aula 01

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Ideia Intuitiva de Limite

Como motivação para o estudo de limites, considere a função

$$y = x^2.$$

Pergunta: Ao aproximarmos x de 2, os valores de y se aproximam de algum número?

Para responder esta pergunta, vamos considerar alguns valores de x próximos de 2 e verificar se y se aproxima de algum número.

x	$y = x^2$
1,9	3,61
1,99	3,9601
1,999	3,996001
1,9999	3,99960001
1,99999	3,99996

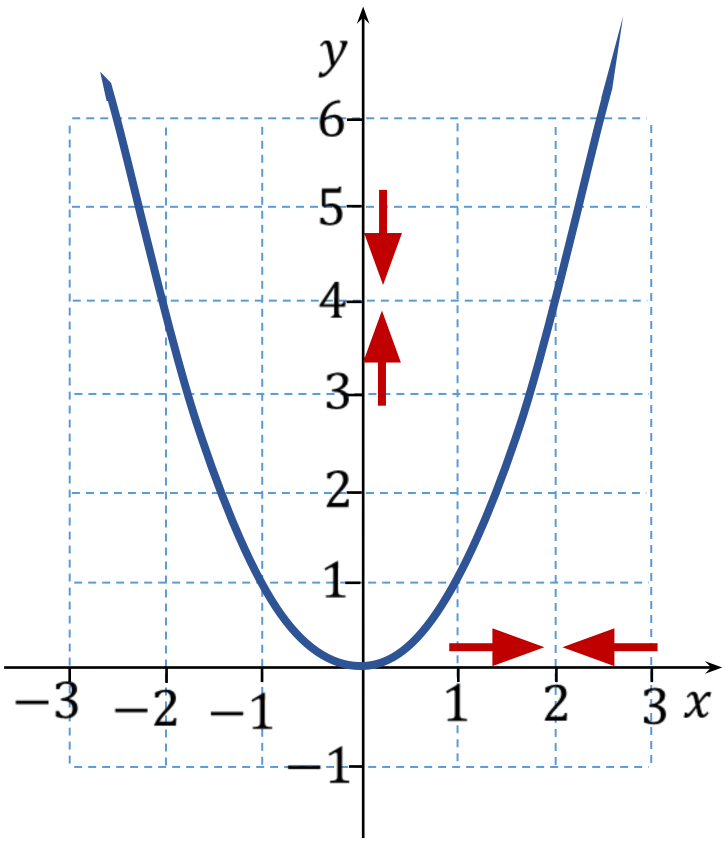
x	$y = x^2$
2,1	4,41
2,01	4,0401
2,001	4,004001
2,0001	4,00040001
2,00001	4,00004

Resposta: Ao aproximarmos x de 2, aparentemente aos valores de y se aproximam de 4.

Ideia Intuitiva de Limite

Observe, no gráfico da função quadrática $y = x^2$ que, ao aproximarmos x de 2 veremos que os valores de y se aproximam de 4.

Note que podemos tornar y tão próximo de 4 quanto queiramos, desde que x esteja suficientemente próximo de 2.



Dizemos que

O limite da função $y = x^2$ quando x tende a 2 é igual a 4.

Denota-se,

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4 \qquad \text{ou} \qquad x^2 \to 4 \text{ quando } x \to 2$$

Definição de Limite

Definição: Diz-se que o limite $f(x)$ é igual a L, quando x tende a a, e escreve-se:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

quando pudermos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de L quanto queiramos, desde que tomemos valores de x suficientemente próximos (mas diferentes) de a.

De forma equivalente, podemos escrever:

O limite de $f(x)$ quando x tende a a é igual a L.

Ou:

O limite bilateral de $f(x)$ quando x tende a a é igual a L.

Ou ainda:

$f(x) \to L$ quando $x \to a$.

Limites Laterais

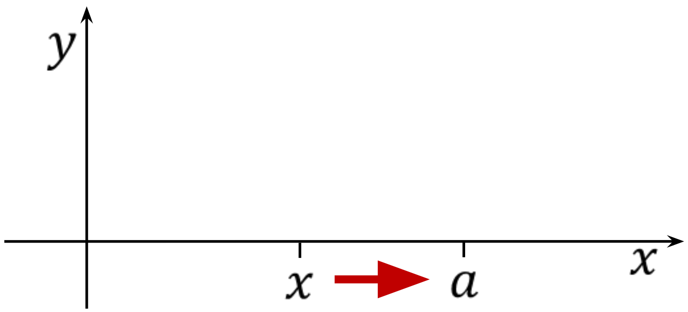
Quando escreve-se "$x \to a$" se quer dizer que x se aproxima de a.

Vamos estudar duas formas particulares de aproximar x de a:

Primeira forma: x se aproxima de a por valores menores que a.

Notação: $x \to a^-$

Se lê: x tende a a pela esquerda.



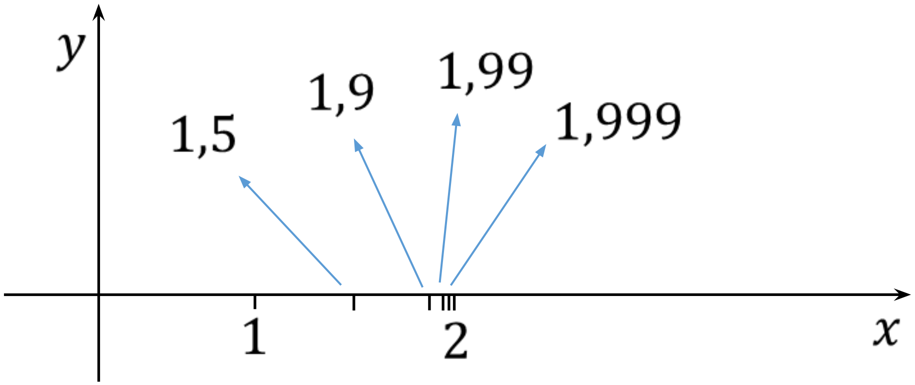
Dizer que x tende a a pela esquerda significa que pode-se tomar valores de x tão próximos de a quanto queiramos, mas menores que a.

Exemplo:

Se x tende a 2 pela esquerda.

$$x \to 2^-$$

"Cada vez se considera valores de x mais próximos de 2, mas que sejam menores que 2".

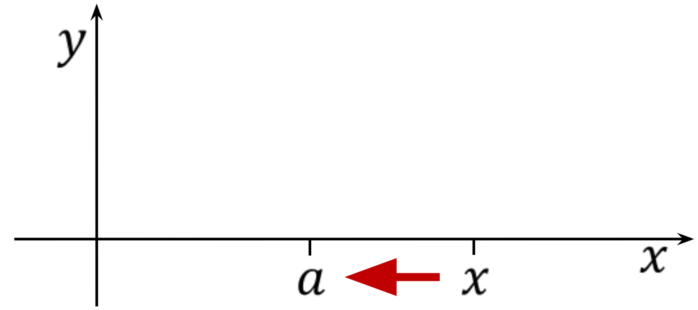


Limites Laterais

Segunda forma: x se aproxima de a por valores maiores que a.

Notação: $x \to a^+$

Se lê: x tende a a pela direita.



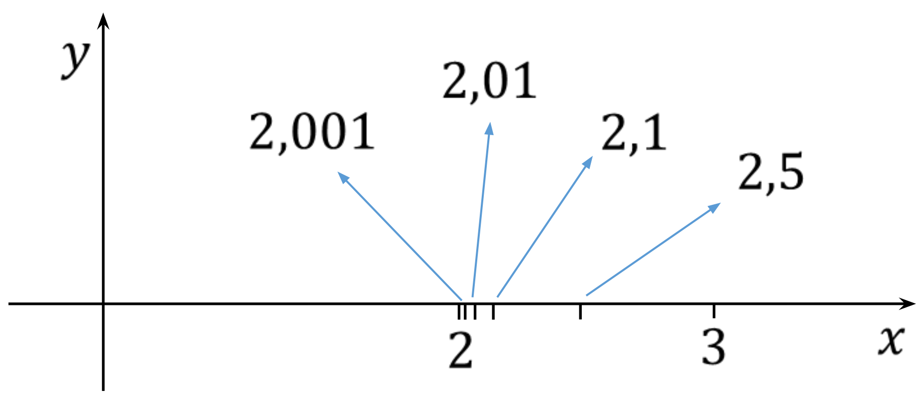
Dizer que x tende a a pela direita significa que pode-se tomar valores de x tão próximos de a quanto queiramos, mas maiores que a.

Exemplo:

Se x tende a 2 pela direita.

$$x \to 2^+$$

"Cada vez se considera valores de x mais próximos de 2, mas que sejam maiores que 2".



Limites Laterais

Definição: Diz-se que o limite de $\boldsymbol{f(x)}$ é igual a $\boldsymbol{L}$, quando $\boldsymbol{x}$ tende a $\boldsymbol{a}$ pela esquerda, e escreve-se

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

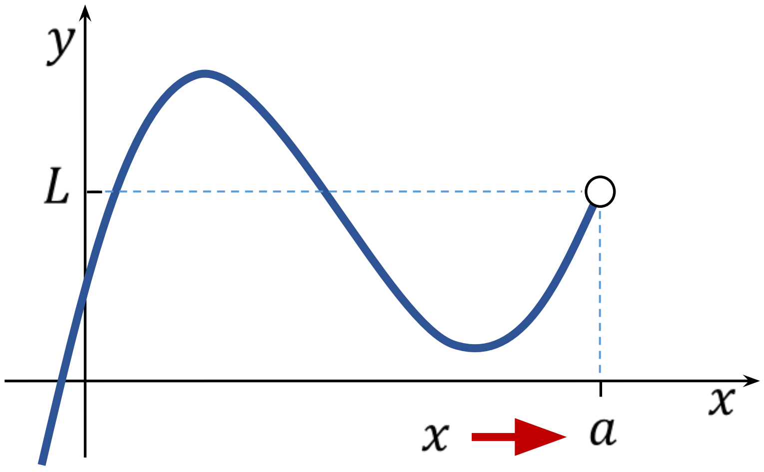
quando pudermos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de L quanto queiramos, desde que tomemos valores de x suficientemente próximos de a, mas menores que a.

Notação:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

$$f(x) \to L \text{ quando } x \to a^-$$

$f(x)$ se aproxima de L quando x se aproxima de a por valores menores que a.



Limites Laterais

Definição: Diz-se que o limite de $\boldsymbol{f(x)}$ é igual a $\boldsymbol{L}$, quando $\boldsymbol{x}$ tende a $\boldsymbol{a}$ pela direita, e escreve-se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

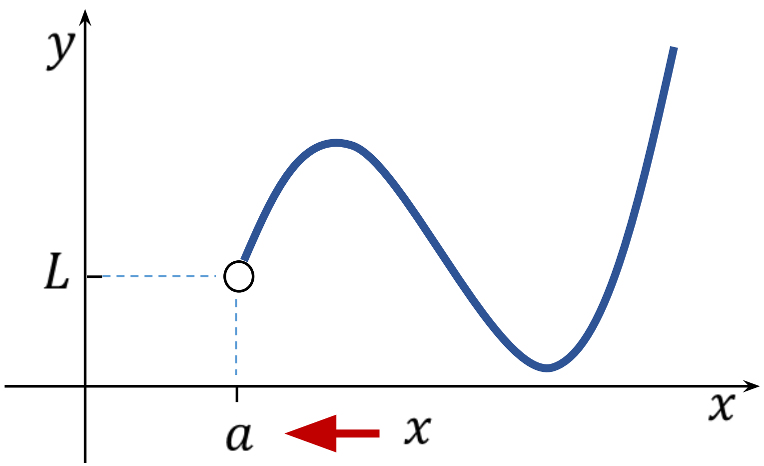
quando pudermos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de L quanto queiramos, desde que tomemos valores de x suficientemente próximos de a, mas maiores que a.

Notação:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

$$f(x) \to L \text{ quando } x \to a^+$$

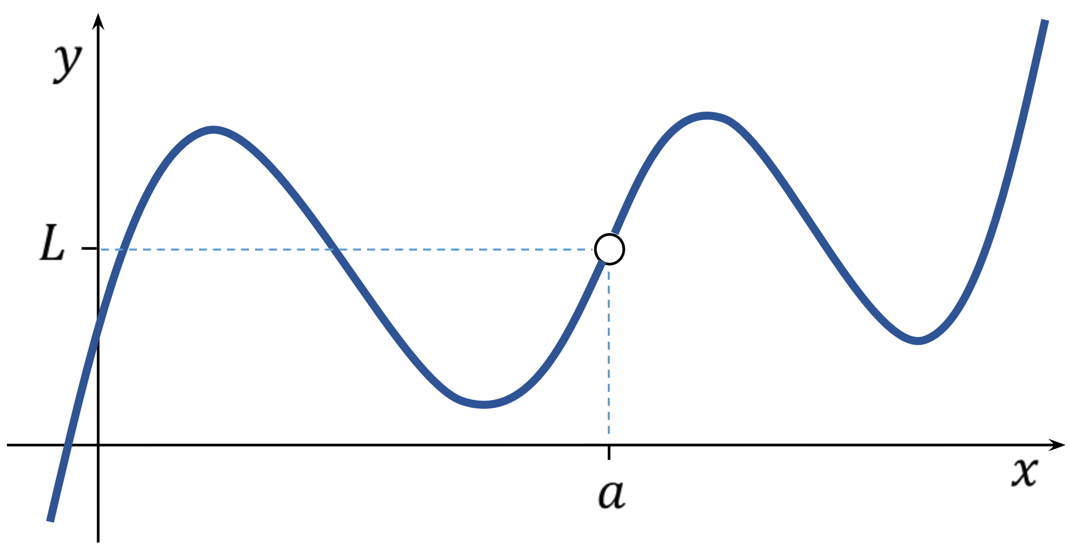
$f(x)$ se aproxima de L quando x se aproxima de a por valores maiores que a.



Limite Bilateral

Teorema: O limite (bilateral) de $\boldsymbol{f(x)}$ quando $\boldsymbol{x}$ tende a $\boldsymbol{a}$ é igual a $\boldsymbol{L}$ se e somente se os limites laterais existem e são iguais a $\boldsymbol{L}$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \begin{cases} \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L \\ \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L \end{cases}$$



Limite Bilateral

Exemplo: Use o gráfico dado da f para determinar cada expressão, se ela existir.

(a) $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ -1

(b) $\lim_{x \to -1^-} f(x)$ 2

(c) $\lim_{x \to -1} f(x)$ $\nexists$

(d) $f(-1)$ 2

(e) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ 3

(f) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ 4

(g) $\lim_{x \to 1} f(x)$ $\nexists$

(h) $f(1)$ -1

(i) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ 1

(j) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ 1

(k) $\lim_{x \to 0} f(x)$ 1

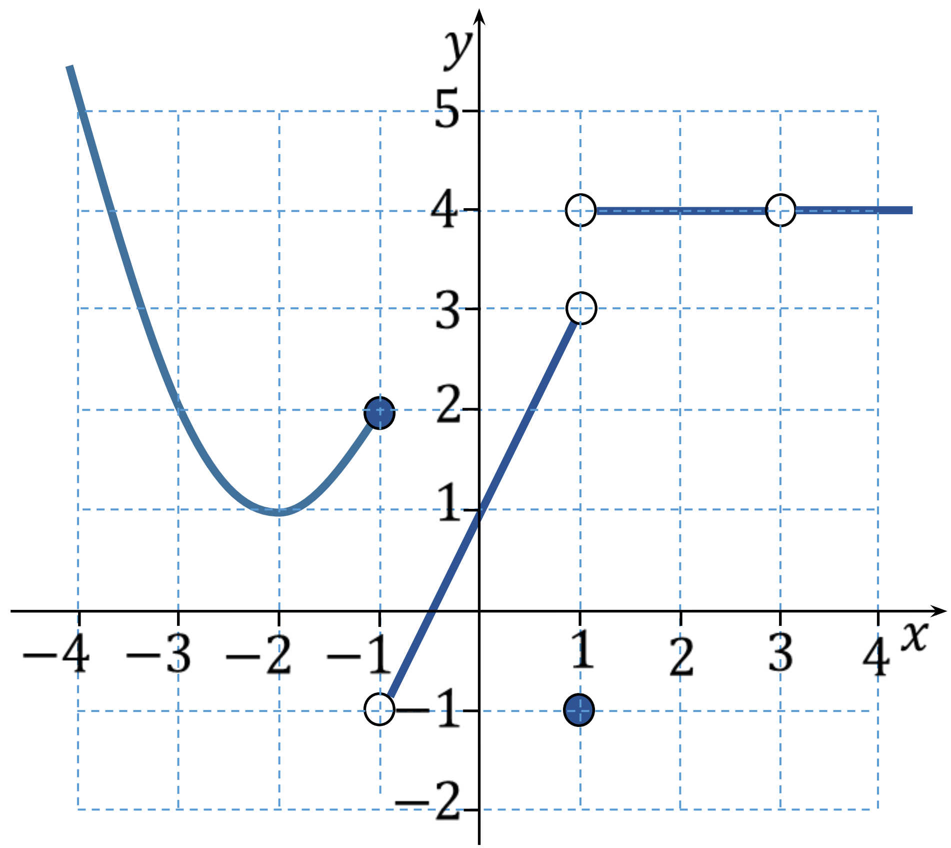
(l) $f(0)$ 1

(m) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ 4

(n) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ 4

(o) $\lim_{x \to 3} f(x)$ 4

(p) $f(3)$ $\nexists$



Limite Bilateral

Exemplo: Em cada caso, use o gráfico da função identidade para determinar o valor do limite dado.

(a) $\lim_{x \to -1^+} x$ $\quad -1$

(b) $\lim_{x \to -1^-} x$ $\quad -1$

(c) $\lim_{x \to -1} x$ $\quad -1$

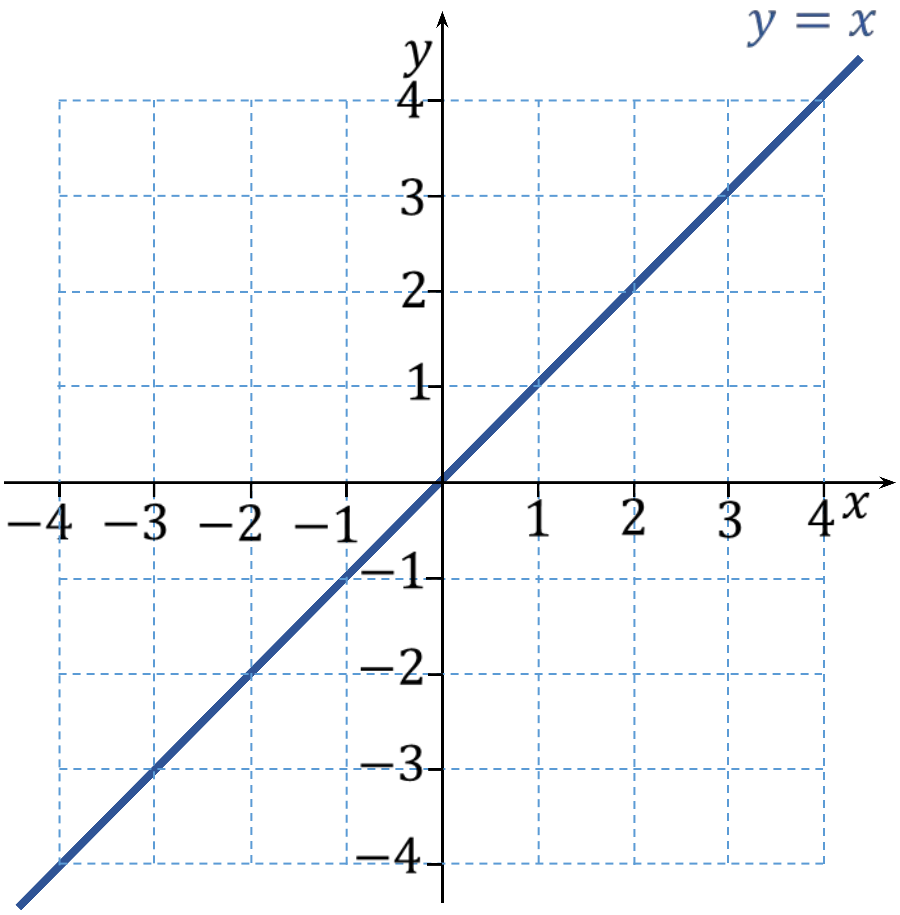
(d) $\lim_{x \to 0} x$ $\quad 0$

(e) $\lim_{x \to \pi} x$ $\quad \pi$

(f) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$ $\quad \frac{1}{2}$

(g) $\lim_{x \to -e} x$ $\quad -e$

(h) $\lim_{x \to \frac{\sqrt{3}}{2}} x$ $\quad \frac{\sqrt{3}}{2}$



Considerando o gráfico da função identidade, tem-se

Propriedades dos limites

Seja c uma constante, e suponha que existam os limites:

$$\lim_{x \to a} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x)$$

Vamos estudar as propriedades dos limites:

Propriedade da soma/diferença

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

"O limite da soma/diferença é a soma/diferença dos limites"

Exemplos:

$$\lim_{x \to 0} \left[x^2 + \sqrt{2x+3}\right] = \lim_{x \to 0} x^2 + \lim_{x \to 0} \sqrt{2x+3}$$

$$\lim_{x \to -1} [e^x + x] = \lim_{x \to -1} e^x + \lim_{x \to -1} x$$

$$\lim_{x \to 3} [x^2 - x^4] = \lim_{x \to 3} x^2 - \lim_{x \to 3} x^4$$

$$\lim_{x \to 0} \left[\sqrt[3]{x^2+1} - \cos 2x\right] = \lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x^2+1} - \lim_{x \to 0} \cos 2x$$

Propriedades dos limites

Propriedade da multiplicação por constante

$$\lim_{x \to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$

"O limite da função multiplicada por uma constante é igual a constante multiplicada pelo limite"

Exemplo:

$$\lim_{x \to 5}[2 \cdot \log_2 x] = 2 \cdot \lim_{x \to 5} \log_2 x$$

Propriedade do Produto

$$\lim_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

"O limite do produto é o produto dos limites"

Exemplos:

$$\lim_{x \to 0}[e^{2x} \cdot \cos x^2] = \lim_{x \to 0} e^{2x} \cdot \lim_{x \to 0} \cos x^2$$

Propriedades dos limites

Propriedade do Quociente $\left(\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0\right)$

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

"O limite do quociente é o quociente dos limites"

Exemplo:

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^3+\sqrt[4]{x}}{e^x}\right] = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^3+\sqrt[4]{x})}{\lim\limits_{x\to 1} e^x}$$

Propriedade da Potência

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n \quad (n \in \mathbb{R})$$

"O limite da potência é a potência do limite"

Exemplo:

$$\lim_{x\to -1}[2x+1]^{10} = \left[\lim_{x\to -1}(2x+1)\right]^{10}$$

Propriedades dos limites

Propriedade da Raiz

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

"O limite da raiz é a raiz do limite"

Exemplo:

$$\lim_{x\to 3} \sqrt[5]{x^2+2x-1} = \sqrt[5]{\lim_{x\to 3}(x^2+2x-1)}$$

Propriedade do Módulo

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = \left|\lim_{x\to a} f(x)\right|$$

"O limite do módulo é o módulo dos limites"

Exemplo:

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}} |\tan x| = \left|\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}} \tan x\right|$$

Todas as propriedades de limites vistas nesta aula continuam válidas se consideramos os limites laterais

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to a^-} g(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a^+} g(x)$$

em vez do limite bilateral.

Propriedades dos limites

Exemplo: Dado que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4 \qquad \lim_{x\to 2} g(x) = -2 \qquad \lim_{x\to 2} h(x) = 0$$

encontre, se existir, o limite. Caso não exista, explique por quê?

(a) $\lim_{x\to 2}[f(x) + 5g(x)]$

(b) $\lim_{x\to 2}[g(x)]^3$

(c) $\lim_{x\to 2}\sqrt{f(x)}$

(d) $\lim_{x\to 2}\frac{3f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x\to 2}\frac{h(x)}{g(x)}$

(f) $\lim_{x\to 2}\frac{g(x)h(x)}{f(x)}$

Solução: Como sabemos os cada um dos limites individualmente, precisamos simplesmente utilizar as propriedades para calcular os limites:

(a) $\lim_{x\to 2}[f(x) + 5g(x)] = 4 + 5(-2) = -6$

(b) $\lim_{x\to 2}[g(x)]^3 = (-2)^3 = -8$

(c) $\lim_{x\to 2}\sqrt{f(x)} = \sqrt{4} = 2$

(d) $\lim_{x\to 2}\frac{3f(x)}{g(x)} = \frac{3\cdot 4}{-2} = -6$

(e) $\lim_{x\to 2}\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{0}{-2} = 0$

(f) $\lim_{x\to 2}\frac{g(x)h(x)}{f(x)} = -\frac{2\cdot 0}{4} = 0$

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Use o gráfico dado da f para determinar cada expressão, se ela existir. Se não existir, explique por quê?

(a) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$

(b) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

(c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

(d) $f(0)$

(e) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

(f) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

(g) $\lim_{x\to 2} f(x)$

(h) $f(2)$

(i) $\lim_{x\to 5^-} f(x)$

(j) $\lim_{x\to 5^+} f(x)$

(k) $\lim_{x\to 5} f(x)$

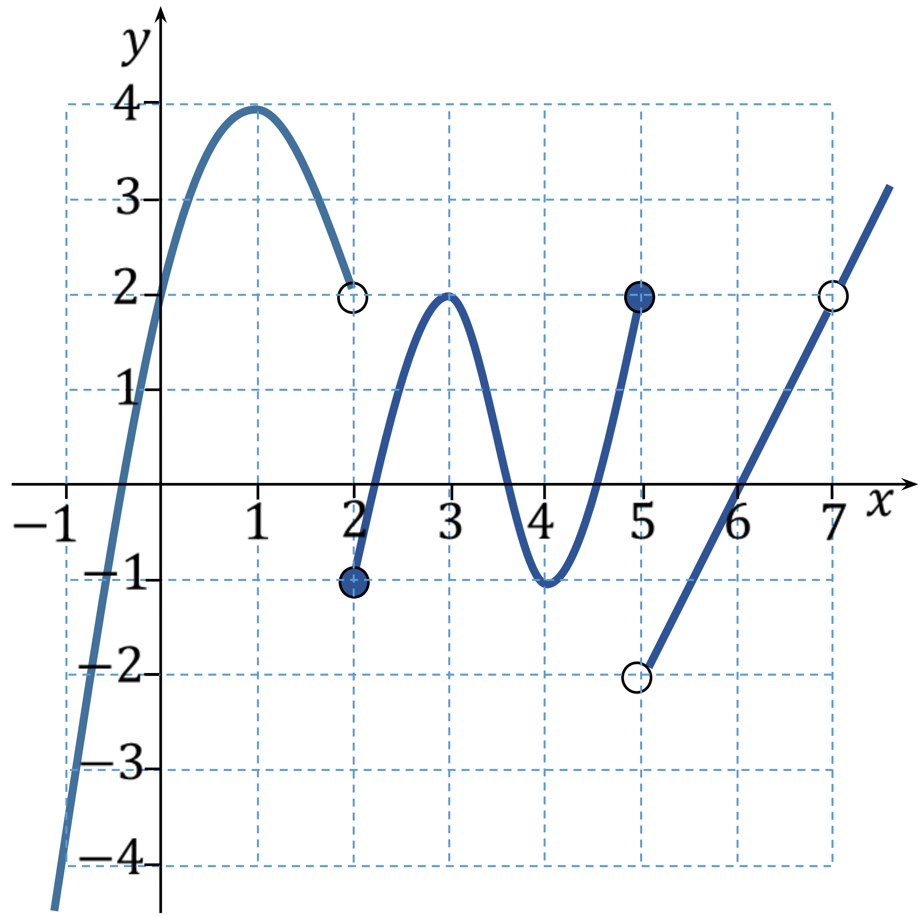
(l) $f(5)$

(m) $\lim_{x\to 7^-} f(x)$

(n) $\lim_{x\to 7^+} f(x)$

(o) $\lim_{x\to 7} f(x)$

(p) $f(7)$



Exercícios

2) Use o gráfico dado da f para determinar cada expressão, se ela existir. Se não existir, explique por quê?

(a) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$

(b) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

(c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

(d) $f(0)$

(e) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$

(f) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$

(g) $\lim_{x\to 1} f(x)$

(h) $f(1)$

(i) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

(j) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

(k) $\lim_{x\to 2} f(x)$

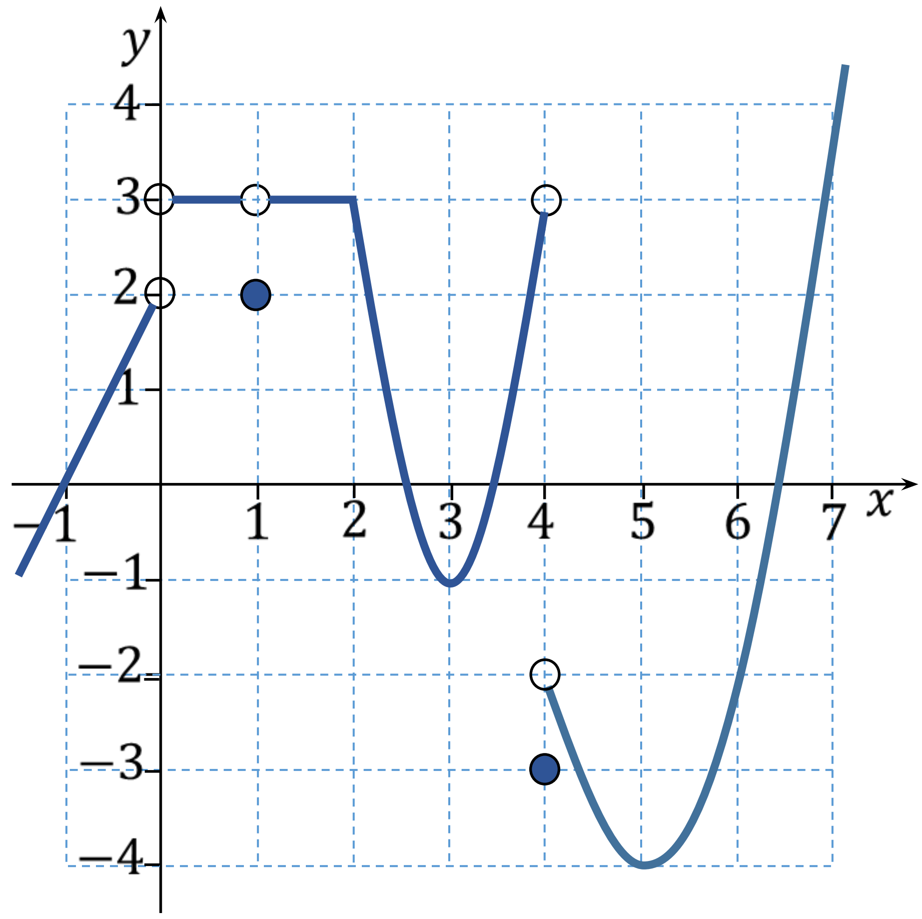
(l) $f(2)$

(m) $\lim_{x\to 4^-} f(x)$

(n) $\lim_{x\to 4^+} f(x)$

(o) $\lim_{x\to 4} f(x)$

(p) $f(4)$



Exercícios

3) Esboce o gráfico de uma função f qualquer que satisfaça todas as condições dadas:

(a) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$ $\quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = -2$ $\quad f(1) = 2$

(b) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2$ $\quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = 4$ $\quad f(3) = 3$

$\lim_{x\to -2} f(x) = 2$ $\quad f(-2) = 1$

(c) $\lim_{x\to -1^-} f(x) = 1$ $\quad \lim_{x\to -1^+} f(x) = 0$ $\quad \lim_{x\to 0} f(x) = -2$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2$ $\quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$ $\quad f(1) = 2$

(d) $\lim_{x\to -2^-} f(x) = 3$ $\quad \lim_{x\to -2^+} f(x) = 3$ $\quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$ $\quad f(1) = -1$ $\quad f(-2) = 0$

Respostas

Exercício 1:

a) 2

b) 2

c) 2

d) 2

e) 2

f) -1

g) $\nexists$

h) -1

i) 2

j) -2

k) $\nexists$

l) 2

m) 2

n) 2

o) 2

p) $\nexists$

Exercício 2:

a) 2

b) 3

c) $\nexists$

d) $\nexists$

e) 3

f) 3

g) 3

h) 2

i) 3

j) 3

k) 3

l) 3

m) 3

n) -2

o) $\nexists$

p) -3

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

https://www.youtube.com/channel/UCB3NUeew6Ji_k39-_GDA3iQ/playlists

O GAMA possui monitorias de:

- **Pré-cálculo e Matemática Elementar** (e disciplinas equivalentes)
    - **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
        - **Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino

Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

Limites

2020/1

Aula 02

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Limites infinitos

Como motivação para o estudo de **limites infinitos**, considere a função

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

Pergunta: Quando x tende a 2, o que acontece com $f(x)$?

Para responder esta pergunta, vamos considerar alguns valores de x próximos de 2.

x	$f(x)$
1,9	100
1,99	10.000
1,999	1.000.000
1,9999	100.000.000

x	$f(x)$
2,1	100
2,01	10.000
2,001	1.000.000
2,0001	100.000.000

Resposta: Ao aproximarmos x de 2, os valores de $f(x)$ se tornam cada vez maiores, ou seja, tendem a infinito.

Limites infinitos

Matematicamente, se representa o comportamento da função

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$$

Se lê: o limite de f quando x tende a 2 pela esquerda é igual a mais infinito.

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$$

Se lê: o limite de f quando x tende a 2 pela direita é igual a mais infinito.

De forma semelhante, se pode concluir que

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$$

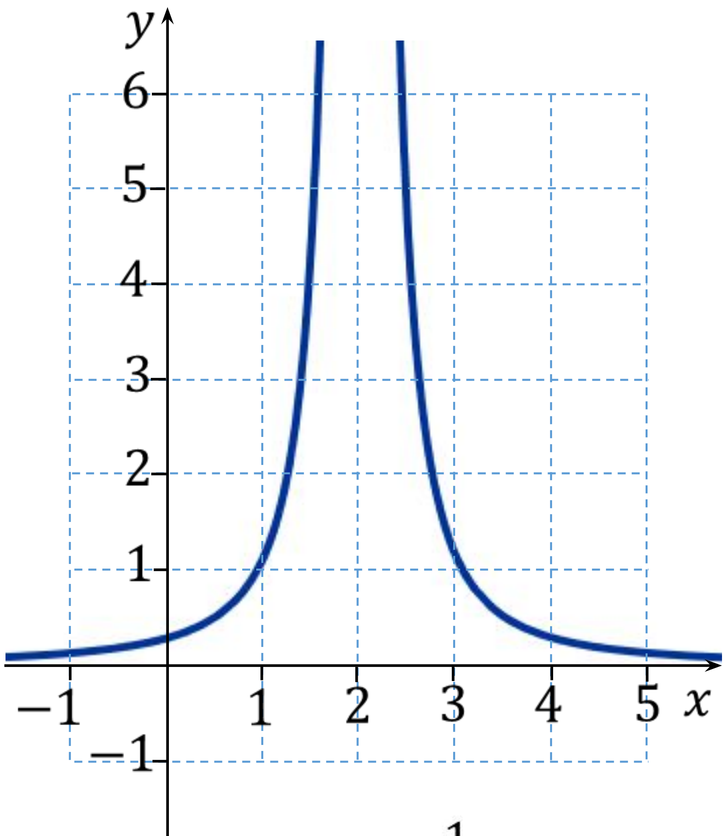
Se lê: o limite de f quando x tende a 2 pela esquerda é igual a menos infinito.

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$$

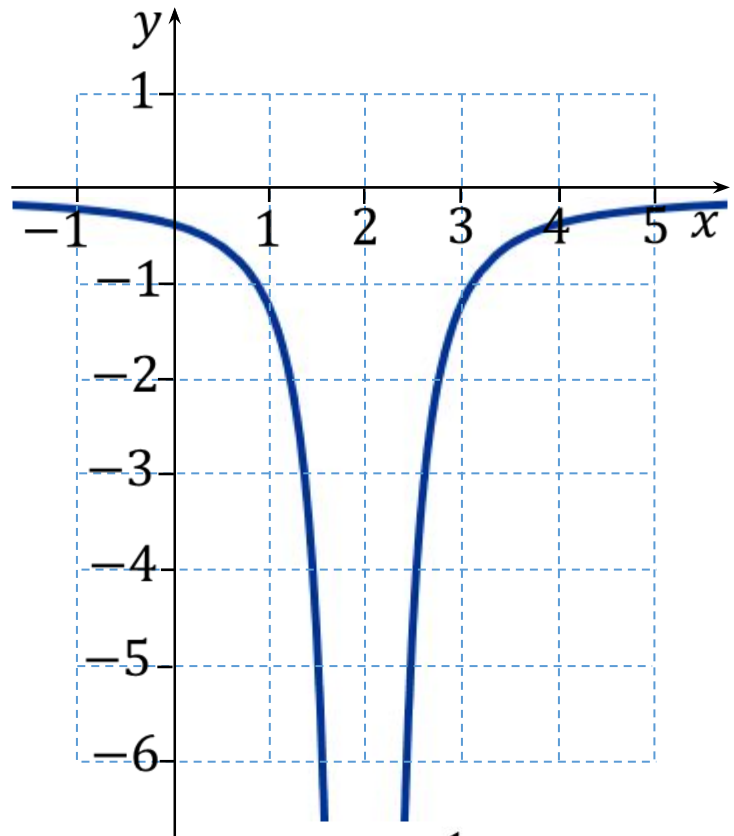
Se lê: o limite de f quando x tende a 2 pela direita é igual a menos infinito.

Limites infinitos

Os gráficos das funções do exemplo anterior são dados por:



$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$



$$f(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}$$

Note que, em ambos os casos, as funções tendem a infinito quando x se aproxima de 2.

Limites infinitos

No geral, tem-se:

Expressão	Significado	Se lê
$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$	$f(x)$ cresce (ou decresce) infinitamente quando x tende a a pela esquerda.	O limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda é igual a mais (ou menos) infinito.
$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$	$f(x)$ cresce (ou decresce) infinitamente quando x tende a a pela direita.	O limite de $f(x)$ quando x tende a a pela direita é igual a mais (ou menos) infinito.
$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$	$f(x)$ cresce (ou decresce) infinitamente quando x tende a a.	O limite de $f(x)$ quando x tende a a é igual a mais (ou menos) infinito.

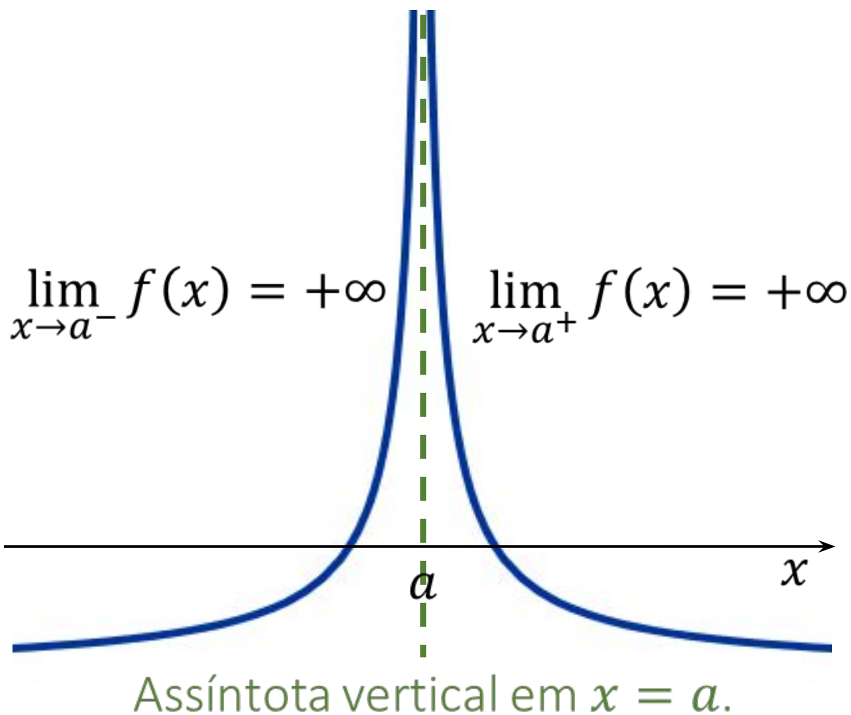
Assíntotas verticais

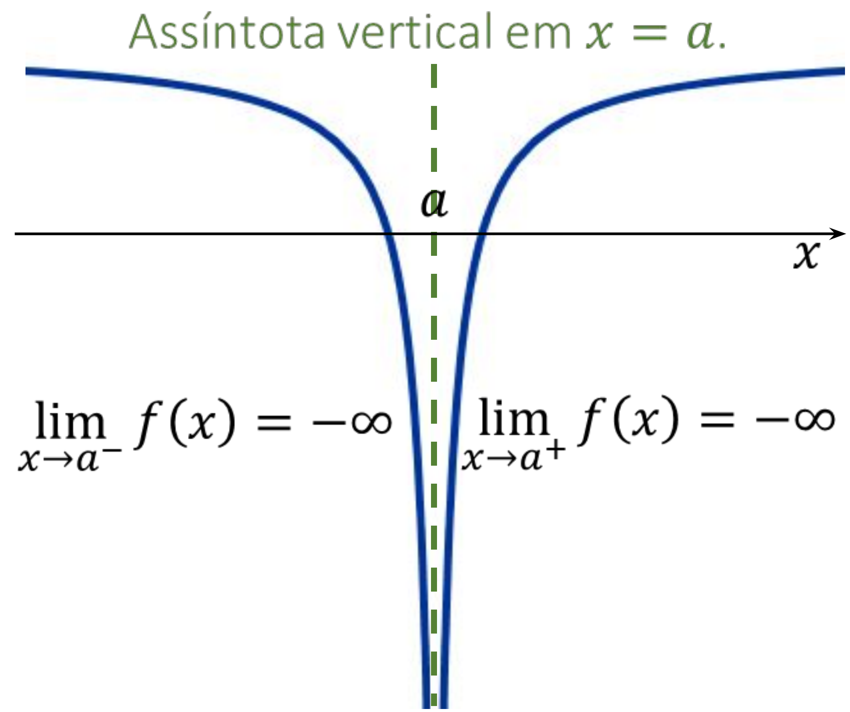
Se pelo menos um dos casos abaixo acontece

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

então a reta $x = a$ é chamada de assíntota vertical do gráfico de f.

Graficamente, as assíntotas verticais são geralmente representadas por retas verticais tracejadas, como nas figuras abaixo.





Assíntotas verticais

Exemplo: Com base no gráfico abaixo, determine:

(a) $\lim_{x \to -3^-} f(x)$ $+\infty$

(b) $\lim_{x \to -3^+} f(x)$ $-\infty$

(c) $\lim_{x \to -3} f(x)$ $\nexists$

(d) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ $+\infty$

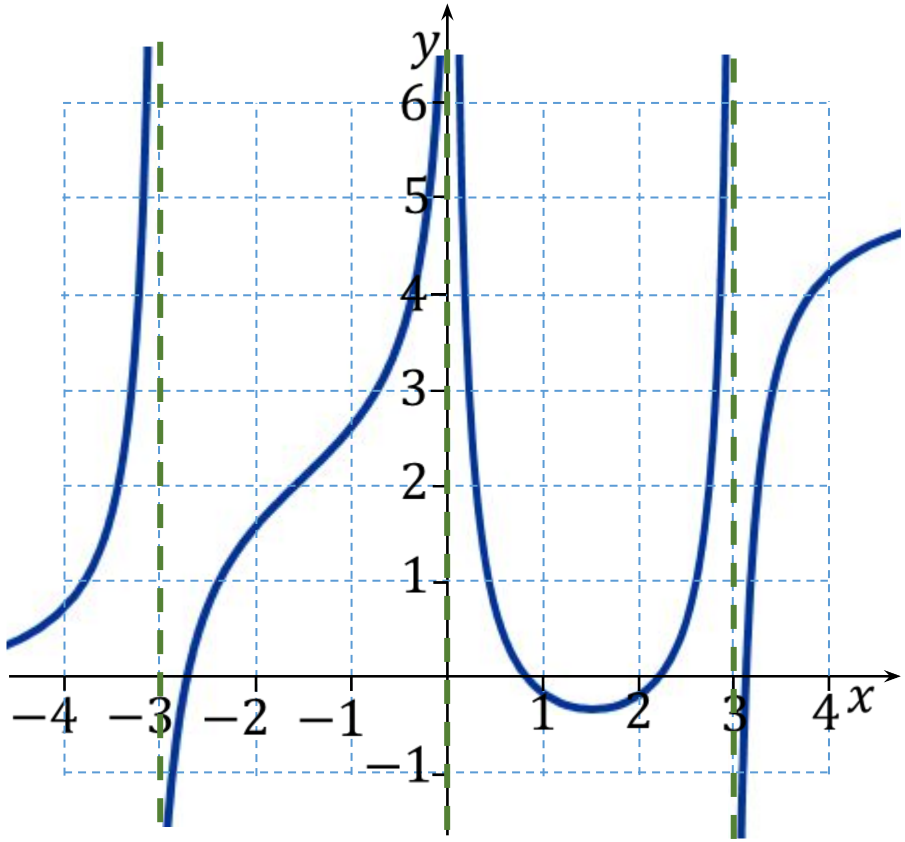
(e) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ $+\infty$

(f) $\lim_{x \to 0} f(x)$ $+\infty$

(g) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ $+\infty$

(h) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ $-\infty$

(i) $\lim_{x \to 3} f(x)$ $\nexists$

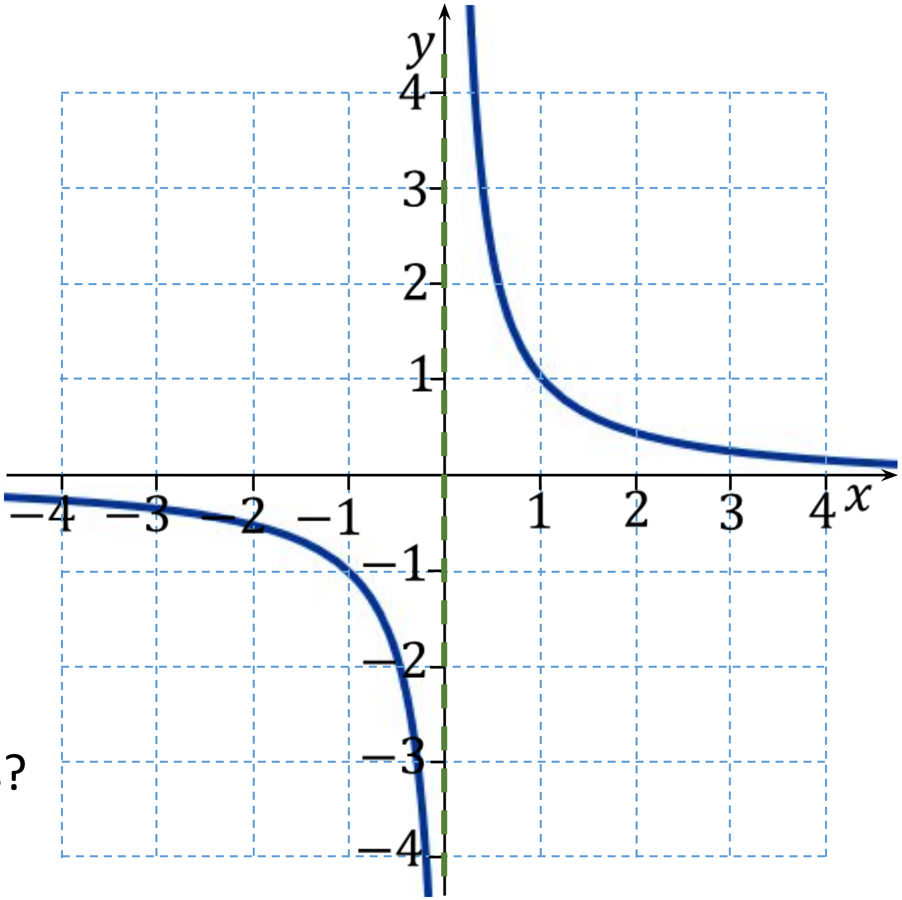


(j) As assíntotas verticais: $x = -3$, $x = 0$ e $x = 3$

Assíntotas verticais

Exemplo: Considere o gráfico da função

$$y = \frac{1}{x}$$



Determine:

(a) $\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad -\infty$

(b) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad +\infty$

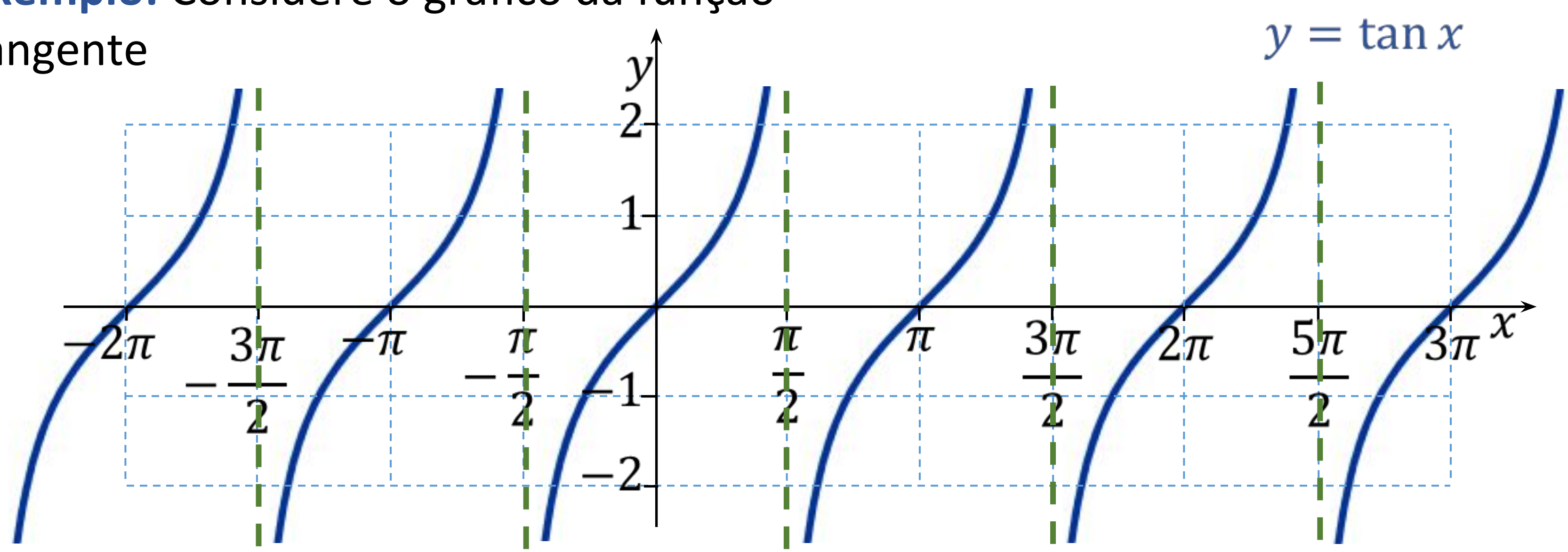
(c) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad \nexists$

(d) Esta função possui assíntotas verticais?

Sim, uma assíntota vertical em $x = 0$.

Assíntotas verticais

Exemplo: Considere o gráfico da função tangente



Determine:

(a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x$ $\quad +\infty$

(b) $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}^+} \tan x$ $\quad -\infty$

(c) $\lim\limits_{x \to \frac{5\pi}{2}} \tan x$ $\quad \nexists$

(d) O gráfico desta função possui assíntotas verticais?

Sim, o gráfico da função tangente possui infinitas assíntotas verticais da forma

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ onde } k \in \mathbb{Z}.$$

Limites infinitos e funções quocientes

Observação: Lembre que, quando dividimos um número positivo por números positivos próximos de zero, o resultado da divisão será um número muito grande.

Exemplo: Dividindo o número 5 por

(a) 1 (b) 0,1 (c) 0,01 (d) 0,001

temos

(a) $\frac{5}{1} = 5$ (b) $\frac{5}{0,1} = 50$ (c) $\frac{5}{0,01} = 500$ (d) $\frac{5}{0,001} = 5000$

Note que, quanto mais próximo de zero está o denominador, maior será o resultado da divisão!!

Um raciocínio análogo pode ser usado quando consideramos o limite de uma função quociente, quando o numerador tende a uma constante positiva e o denominador tende a zero por valores positivos!!

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \qquad f(x) \to C > 0, \quad g(x) \to 0^+$$

O resultado do limite será igual a mais infinito!

Limites infinitos e funções quocientes

Observação: Lembre que, quando dividimos um número positivo por números negativos próximos de zero, o resultado da divisão será um número muito grande, mas negativo.

Exemplo: Dividindo o número 5 por

(a) -1 (b) $-0{,}1$ (c) $-0{,}01$ (d) $-0{,}001$

temos

(a) $\dfrac{5}{-1} = -5$ (b) $\dfrac{5}{-0{,}1} = -50$ (c) $\dfrac{5}{-0{,}01} = -500$ (d) $\dfrac{5}{-0{,}001} = -5000$

Note que, quanto mais próximo de zero está o denominador, menor será o resultado da divisão!!

Um raciocínio análogo pode ser usado quando consideramos o limite de uma função quociente, quando o numerador tende a uma constante positiva e o denominador tende a zero por valores negativos!!

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) \rightarrow C > 0}{g(x) \rightarrow 0^-} = -\infty$$

O resultado do limite será menos infinito!

Limites infinitos e funções quocientes

Exemplo: Os limites

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x+1}{x} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{x+1}{x}$$

são infinitos, pois

1 O numerador tende a 1.

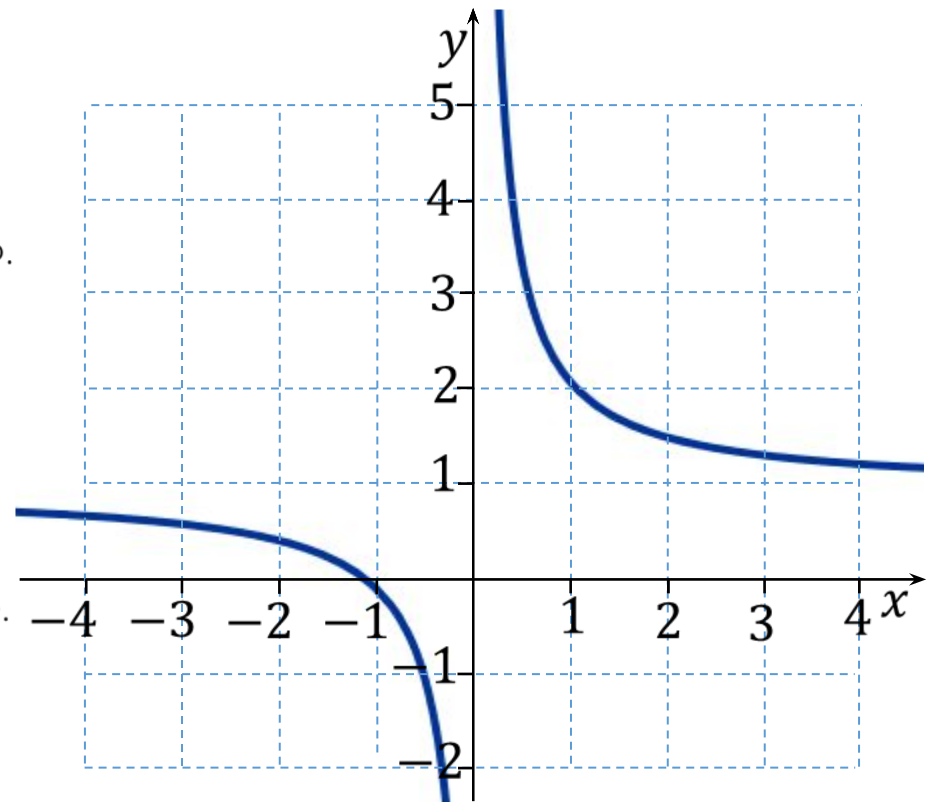
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x+1}{x} = +\infty$$ O limite tende a $+\infty$.

0^+ O denominador tende a zero por valores positivos.

1 O numerador tende a 1.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x+1}{x} = -\infty$$ O limite tende a $-\infty$.

0^- O denominador tende a zero por valores negativos.



$$y = \frac{x+1}{x}$$

Limites infinitos e funções quocientes

O quadro a seguir resume o que acontece com as funções quocientes quando o numerador tende a uma constante e o denominador tende a zero:

Descrição	Representação	Resultado
O numerador tende a uma constante positiva e o denominador tende a zero por valores positivos.	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\overset{C>0}{f(x)}}{\underset{0^+}{g(x)}}$	$+\infty$
O numerador tende a uma constante positiva e o denominador tende a zero por valores negativos.	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\overset{C>0}{f(x)}}{\underset{0^-}{g(x)}}$	$-\infty$
O numerador tende a uma constante negativa e o denominador tende a zero por valores positivos.	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\overset{C<0}{f(x)}}{\underset{0^+}{g(x)}}$	$-\infty$
O numerador tende a uma constante negativa e o denominador tende a zero por valores negativos.	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\overset{C<0}{f(x)}}{\underset{0^-}{g(x)}}$	$+\infty$

Observação: As mesmas regras valem se trocarmos

"$x \to a$" por "$x \to a^+$" ou "$x \to a^-$".

Limites infinitos e funções quocientes

Exemplo: Calcule os limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{2x+1}{x-1}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 2}{x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+2}{x-2}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to -1^-} \frac{-4}{1+x}$

Solução: Note que em todos os casos o numerador tende a uma constante e o denominador tende a zero. Portanto, todos os limites são infinitos.

Para determinar se a resposta é $+\infty$ ou $-\infty$, precisamos analisar o sinal do numerador e do denominador.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{\overbrace{2x+1}^{3>0}}{\underbrace{x-1}_{0^+}} = +\infty$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{\cos x - 2}^{-1<0}}{\underbrace{x}_{0^+}} = -\infty$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{\overbrace{x^2+2}^{6>0}}{\underbrace{x-2}_{0^-}} = -\infty$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to -1^-} \frac{\overbrace{-4}^{-4<0}}{\underbrace{1+x}_{0^-}} = +\infty$

Limites infinitos e funções quocientes

Descrição	Representação	Resultado
O numerador tende a mais infinito e o denominador tende a uma constante positiva.	$\lim_{x\to a} \frac{f(x) \to +\infty}{g(x) \to C > 0}$	$+\infty$
O numerador tende a menos infinito e o denominador tende a uma constante positiva.	$\lim_{x\to a} \frac{f(x) \to -\infty}{g(x) \to C > 0}$	$-\infty$
O numerador tende a mais infinito e o denominador tende a uma constante negativa.	$\lim_{x\to a} \frac{f(x) \to +\infty}{g(x) \to C < 0}$	$-\infty$
O numerador tende a menos infinito e o denominador tende a uma constante negativa.	$\lim_{x\to a} \frac{f(x) \to -\infty}{g(x) \to C < 0}$	$+\infty$

Observação: As mesmas regras valem se trocarmos

"$x \to a$" por "$x \to a^+$" ou "$x \to a^-$".

Limites infinitos e funções quocientes

Exemplo: Calcule os limites:

(a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\tan x}{2x}$ (b) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln x}{x^2-5x+1}$ (c) $\lim\limits_{x\to\pi^+} \frac{\cot x}{3-x}$ (d) $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{\frac{1}{x}}{\cos x-2}$

Solução: Note que em todos os casos o numerador tende a infinito e o denominador tende a uma constante. Portanto, todos os limites são infinitos.

Para determinar se a resposta é $+\infty$ ou $-\infty$, precisamos analisar o sinal do numerador e do denominador.

(a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\overset{+\infty}{\tan x}}{\underset{\pi \geq 0}{2x}} = +\infty$

(c) $\lim\limits_{x\to\pi^+} \frac{\overset{+\infty}{\cot x}}{\underset{3-\pi \leq 0}{3-x}} = -\infty$

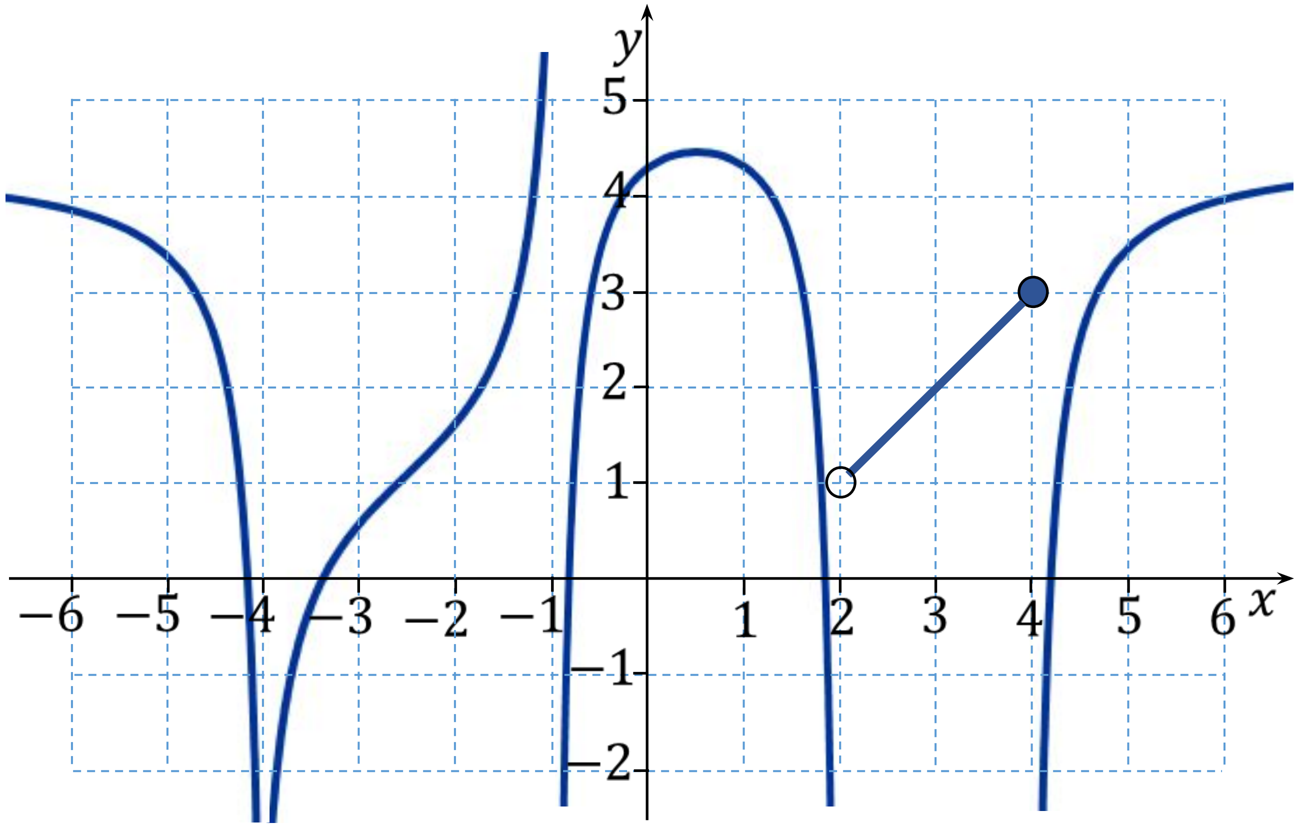
(b) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\overset{-\infty}{\ln x}}{\underset{1 \geq 0}{x^2-5x+1}} = -\infty$

(d) $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{\overset{-\infty}{\frac{1}{x}}}{\underset{-1 \leq 0}{\cos x-2}} = +\infty$

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Com base no gráfico abaixo, determine:



(a) $\lim_{x \to -4^-} f(x)$

(b) $\lim_{x \to -4^+} f(x)$

(c) $\lim_{x \to -4} f(x)$

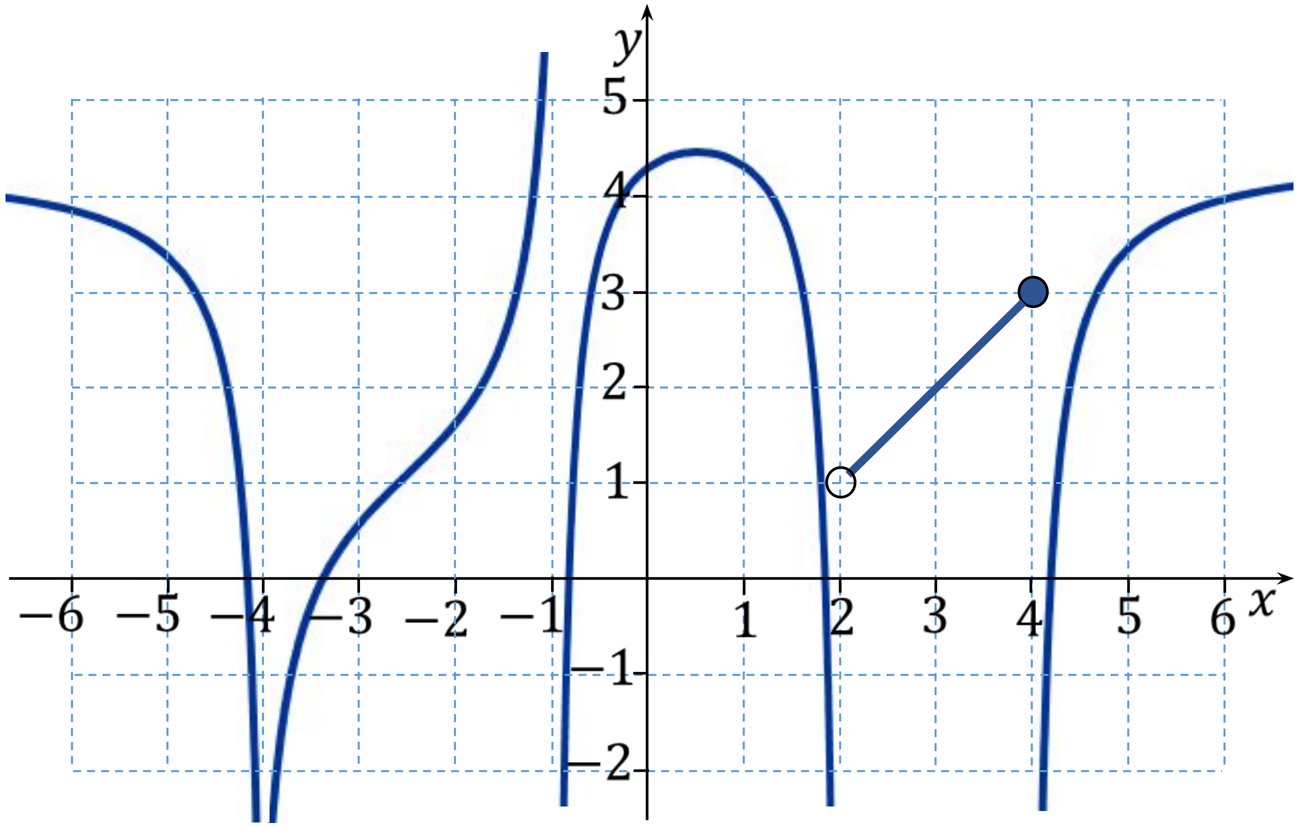
(d) $\lim_{x \to -1^-} f(x)$

(e) $\lim_{x \to -1^+} f(x)$

(f) $\lim_{x \to -1} f(x)$

Exercícios

1) Com base no gráfico abaixo, determine:



(g) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

(h) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

(i) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

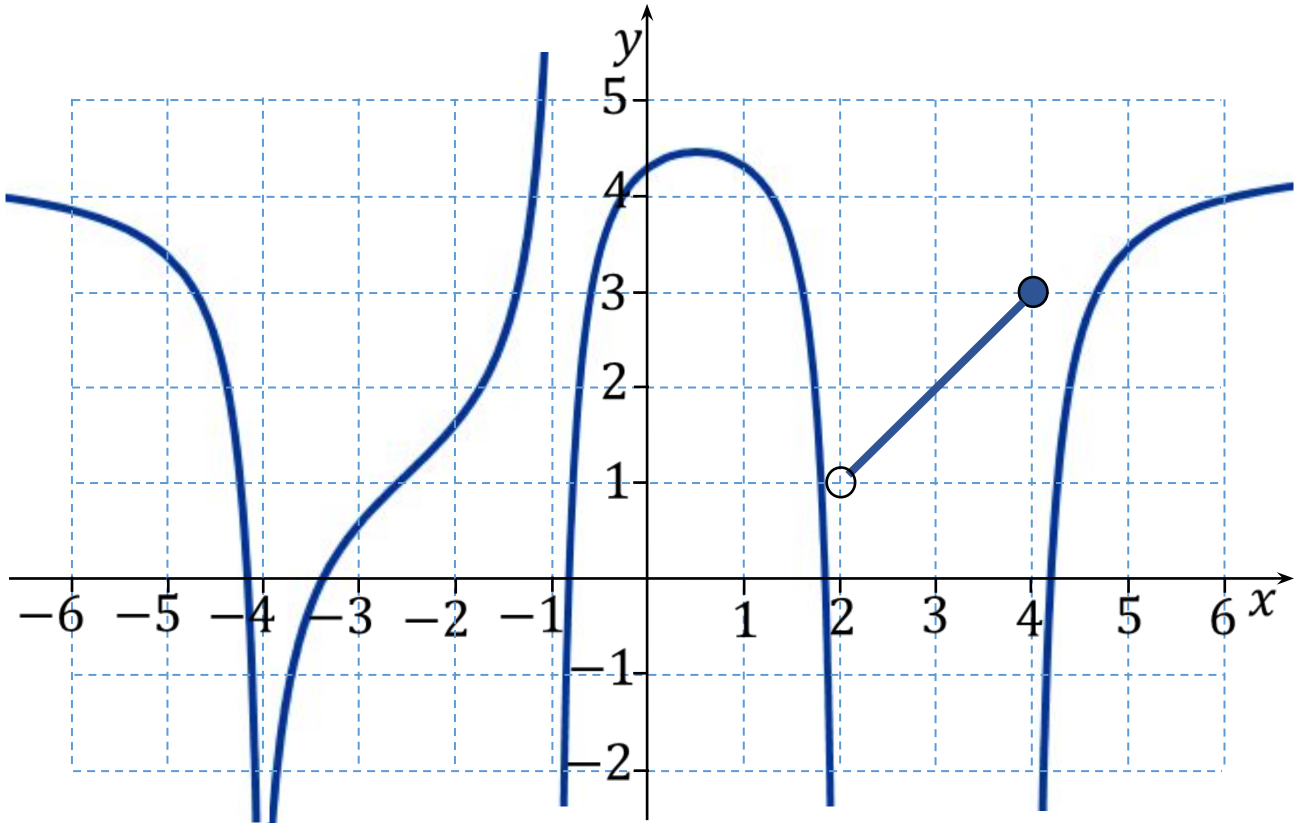
(j) $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$

(k) $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$

(l) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$

Exercícios

1) Com base no gráfico abaixo, determine:



(m) As assíntotas verticais:

Exercícios

2) Determine os limites abaixo:

(a) $\lim_{x \to 2^-} \frac{x+5}{x-2}$

(b) $\lim_{x \to 2^-} \frac{x-3}{x-2}$

(c) $\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+2}{x-1}$

(d) $\lim_{x \to -3^+} \frac{\sqrt{x+5}}{x+3}$

(e) $\lim_{x \to 2^+} \frac{3^x}{2-x}$

(f) $\lim_{x \to 3^-} \frac{5}{x^2-9}$

(g) $\lim_{x \to 3^-} \frac{x-5}{x^2-9}$

(h) $\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2-5x+2}{x^2-4x+4}$

(i) $\lim_{x \to 0^+} \frac{2-3x}{\sqrt{x}}$

(j) $\lim_{x \to 3^-} \frac{5-2^x}{2x-6}$

(k) $\lim_{x \to 0^+} \frac{x-4}{\sin x}$

(l) $\lim_{x \to \pi^-} \frac{10}{\tan x}$

Exercícios

2) Determine os limites abaixo:

(m) $\lim_{x\to1^+} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+2}}{\ln x}$

(n) $\lim_{x\to1^-} \dfrac{|x-4|}{\ln x}$

(o) $\lim_{x\to9} \dfrac{\sqrt{25-x}}{x-9}$

(p) $\lim_{x\to0} \dfrac{5+x}{x^2}$

(q) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\tan x}{2x-1}$

(r) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \dfrac{\tan x}{2x-1}$

(s) $\lim_{x\to\pi^+} \dfrac{\cot x}{x}$

(t) $\lim_{x\to0^+} \dfrac{\log_3 x}{\sqrt{x+\pi}}$

(u) $\lim_{x\to0^+} \dfrac{|\log_2 x|}{x^2+3x-2}$

(v) $\lim_{x\to0^+} \dfrac{2-\ln x}{5^{x+3}}$

(x) $\lim_{x\to\pi^-} \dfrac{2x+\csc x}{x^2-9}$

(z) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \dfrac{\sqrt{\sec x}}{2-2x}$

Respostas

Exercício 1:

a) $-\infty$ c) $-\infty$ e) $-\infty$ g) $-\infty$ i) $\nexists$ k) $-\infty$

b) $-\infty$ d) $+\infty$ f) $\nexists$ h) 1 j) 3 l) $\nexists$

m) $x = -4$, $x = -1$, $x = 2$, $x = 4$

Exercício 2:

a) $-\infty$ f) $-\infty$ k) $-\infty$ p) $+\infty$ u) $-\infty$

b) $+\infty$ g) $+\infty$ l) $-\infty$ q) $+\infty$ v) $+\infty$

c) $+\infty$ h) $-\infty$ m) $+\infty$ r) $-\infty$ x) $+\infty$

d) $+\infty$ i) $+\infty$ n) $-\infty$ s) $+\infty$ z) $-\infty$

e) $-\infty$ j) $+\infty$ o) $\nexists$ t) $-\infty$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

https://www.youtube.com/channel/UCB3NUeew6Ji_k39-_GDA3iQ/playlists

O GAMA possui monitorias de:

- **Pré-cálculo e Matemática Elementar** (e disciplinas equivalentes)
    - **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
        - **Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino

Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

Limites

2020/1

Aula 03

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Limites no infinito

Como motivação para o estudo de **limites no infinito**, considere a função

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Pergunta: Quando x tende a $-\infty$ ou $+\infty$, o que acontece com $f(x)$?

Para responder esta pergunta, vamos considerar alguns valores de x e os valores correspondentes de $f(x)$.

x	$f(x)$
−10	-0,1
−100	-0,01
−1.000	-0,001
−10.000	-0,0001
−100.000	-0,00001

x	$f(x)$
10	0,1
100	0,01
1.000	0,001
10.000	0,0001
100.000	0,00001

Resposta: Ao fazermos $x \longrightarrow -\infty$ ou $x \longrightarrow +\infty$, aparentemente os valores de $f(x)$ se tornam cada vez mais próximos de 0.

Limites no infinito

O gráfico da função

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

está representado ao lado.

Note que:

Se $x \longrightarrow -\infty$ então $f(x) \longrightarrow 0.$

Se $x \longrightarrow +\infty$ então $f(x) \longrightarrow 0.$

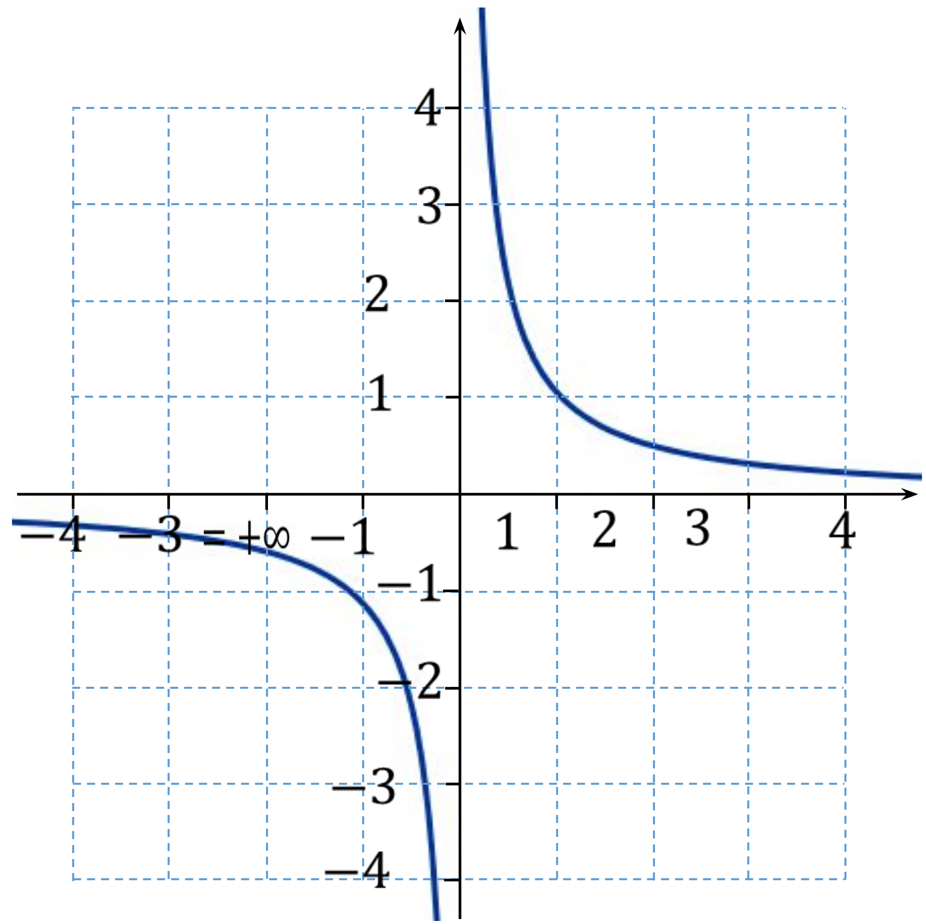
Em geral, se escreve:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Se lê: o limite de f quando x tende a menos infinito é igual a 0.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Se lê: o limite de f quando x tende a mais infinito é igual a 0.



Esta função é chamada de **função recíproca**.

Limites no infinito

No geral, limites do tipo

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)$$

Os valores de x diminuem sem cota, isto é, x tende a menos infinito.

e

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

Os valores de x aumentam sem cota, isto é, x tende a mais infinito.

são chamados de **limites no infinito**.

Propriedades dos limites no infinito

Supondo que existam os limites

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x)$$

as propriedades dadas na Aula 01 continuam válidas para limites no infinito.

Propriedade da soma/diferença

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to+\infty} f(x) \pm \lim_{x\to+\infty} g(x)$$

Propriedade da Potência

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to+\infty} f(x)\right]^n$$

Propriedade da multiplicação por constante

$$\lim_{x\to+\infty} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

Propriedade da Raiz

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to+\infty} f(x)}$$

Propriedade do Produto

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to+\infty} f(x) \cdot \lim_{x\to+\infty} g(x)$$

Propriedade do Módulo

$$\lim_{x\to+\infty}|f(x)| = \left|\lim_{x\to+\infty} f(x)\right|$$

Propriedade do Quociente $\left(\lim_{x\to a} g(x) \neq 0\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to+\infty} f(x)}{\lim_{x\to+\infty} g(x)}$$

Obs.: Estas propriedades continuam válidas ao trocar $+\infty$ por $-\infty$.

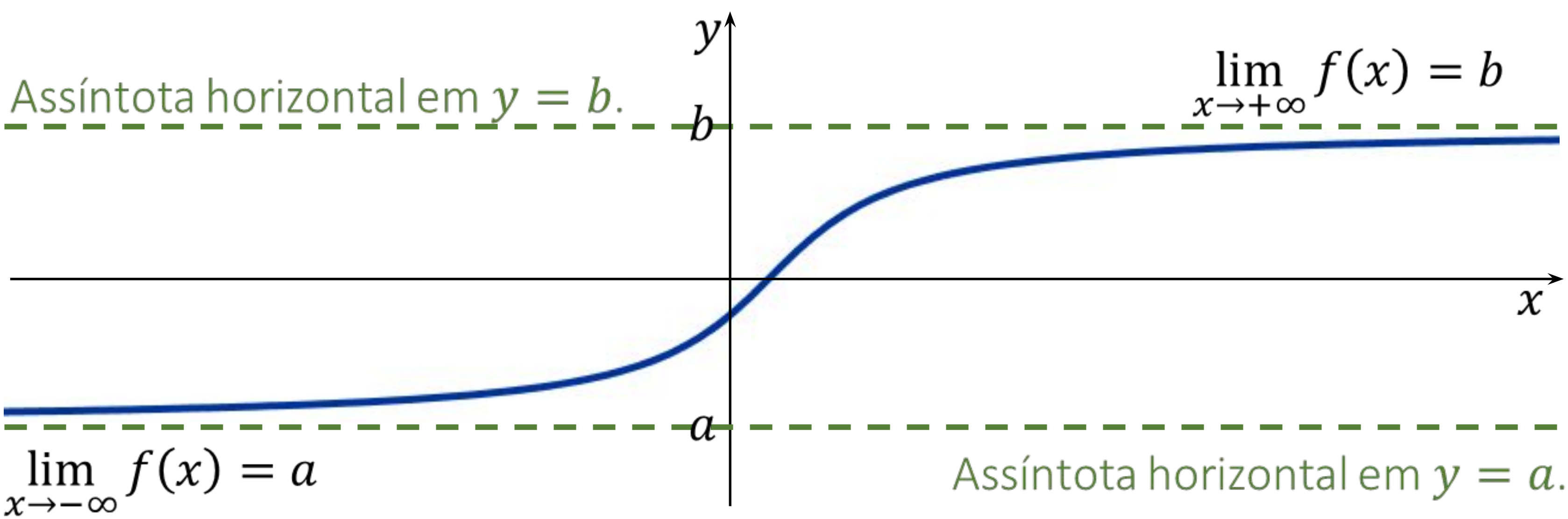
Assíntotas horizontais

Se os limites no infinito existem, e digamos,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = b$$

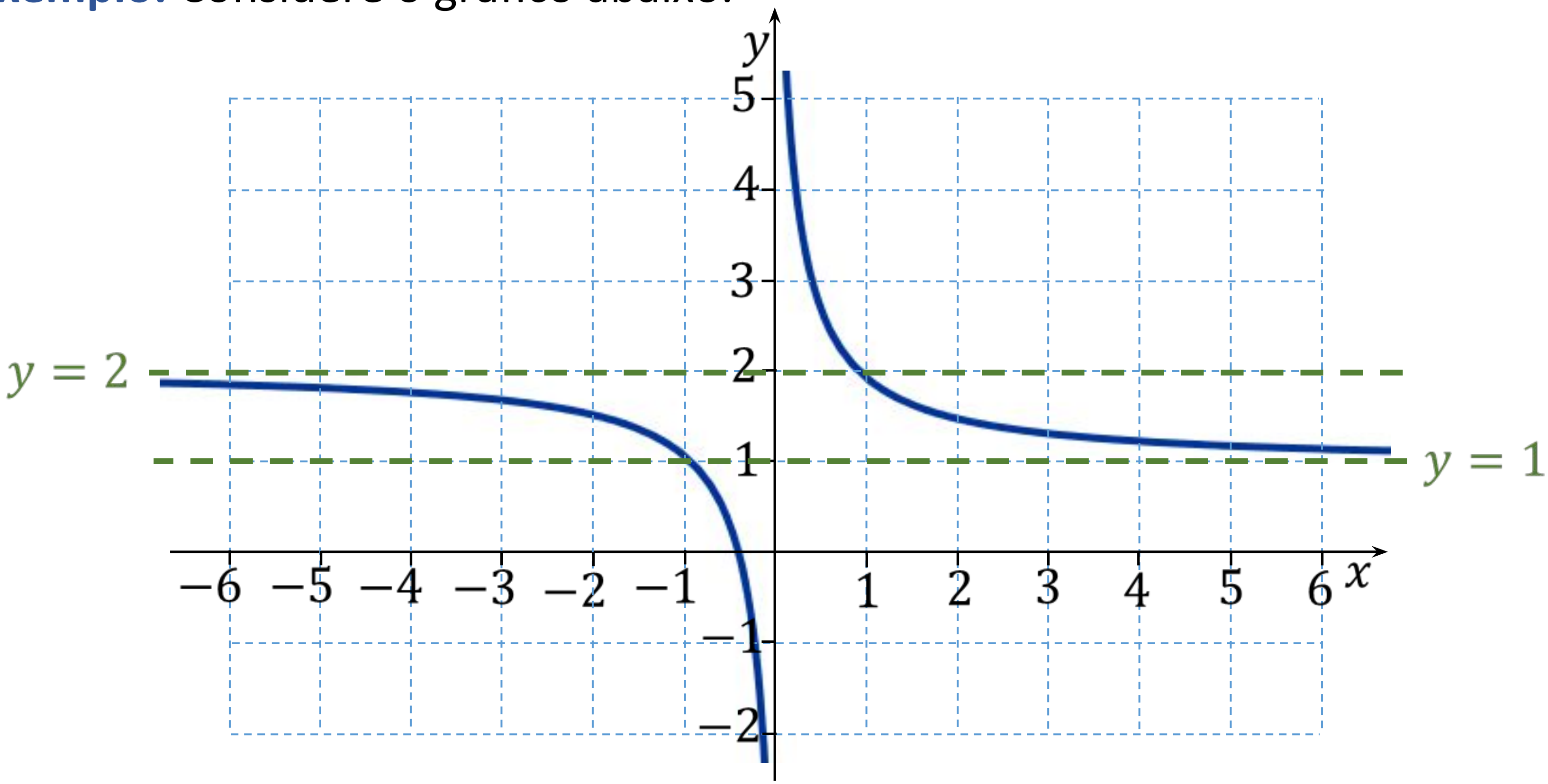
então as retas $y = a$ e $y = b$ são chamadas de assíntotas horizontais do gráfico de f.

Graficamente, as assíntotas horizontais são geralmente representadas por retas horizontais tracejadas, como nas figuras abaixo.



Assíntotas horizontais

Exemplo: Considere o gráfico abaixo.



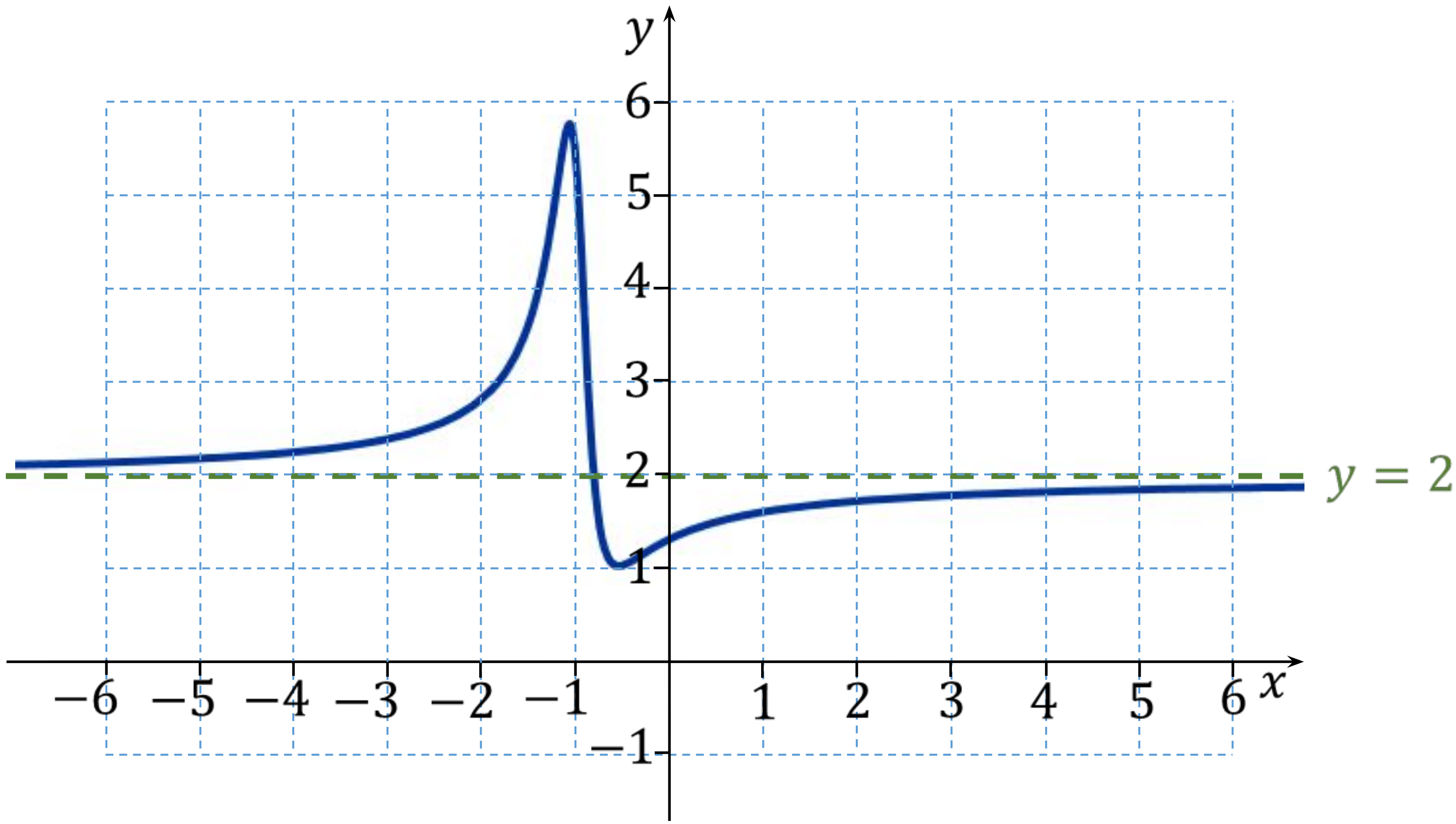
Como

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

então este gráfico possui duas assíntotas horizontais, dadas por $y = 1$ e $y = 2$.

Assíntotas horizontais

Exemplo: Considere o gráfico abaixo.



Como

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$

então este gráfico possui uma única assíntota horizontal, dada por $y = 2$.

Limites no infinito e funções quocientes

Teorema: Se r for um número racional positivo, então:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^r}=0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^r}=0$$

quando for possível calcular este limite para $x \longrightarrow -\infty$.

Exemplo: Calcule os limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt{x}}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^5}+2\right)$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)$

Solução:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt{x}}=5\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=5\cdot 0=0$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\cancelto{0}{\frac{1}{x^5}}+2\right)=2$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\cancelto{0}{\frac{1}{x}}+\cancelto{0}{\frac{1}{x^2}}\right)=1$

Limites no infinito e funções quocientes

Exemplo: Calcule o limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+3x^2-x+1}{x^3+2x}$$

Solução:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+3x^2-x+1}{x^3+2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{2x^3+3x^2-x+1}{x^3}}{\dfrac{x^3+2x}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cdot\dfrac{x^3}{x^3}+3\cdot\dfrac{x^2}{x^3}-\dfrac{x}{x^3}+\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{x^3}{x^3}+2\cdot\dfrac{x}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cdot 1+3\cdot\overset{0}{\cancel{\dfrac{1}{x}}}-\overset{0}{\cancel{\dfrac{1}{x^2}}}+\overset{0}{\cancel{\dfrac{1}{x^3}}}}{1+2\cdot\underset{0}{\cancel{\dfrac{1}{x^2}}}} = \frac{2}{1} = 2$$

Portanto,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+3x^2-x+1}{x^3+2x} = 2\,.$$

Limites no infinito e funções quocientes

Exemplo: Calcule o limite:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{5x^2 + 2x - 3}{2x^3 + 3}$$

Solução:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{5x^2 + 2x - 3}{2x^3 + 3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{5x^2 + 2x - 3}{x^3}}{\dfrac{2x^3 + 3}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{5 \cdot \dfrac{x^2}{x^3} + 2 \cdot \dfrac{x}{x^3} - 3 \cdot \dfrac{1}{x^3}}{2 \cdot \dfrac{x^3}{x^3} + 3 \cdot \dfrac{1}{x^3}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{5 \cdot \cancelto{0}{\dfrac{1}{x}} + 2 \cdot \cancelto{0}{\dfrac{1}{x^2}} - 3 \cdot \cancelto{0}{\dfrac{1}{x^3}}}{2 + 3 \cdot \cancelto{0}{\dfrac{1}{x^3}}} = \frac{0}{2} = 0$$

Portanto,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{5x^2 + 2x - 3}{2x^3 + 3} = 0.$$

Limites no infinito e funções quocientes

Exemplo: Calcule o limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x+1}$$

Solução:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}}{\frac{x+1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\overset{0}{\frac{2}{x^2}}}}{1+\underset{0}{\frac{1}{x}}}=\frac{\sqrt{1}}{1}=1$$

Portanto,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x+1}=1.$$

Limites no infinito e funções quocientes

Exemplo: Calcule o limite:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+5x-2}}$$

Solução:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+5x-2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{2x-1}{|x|}}{\dfrac{\sqrt{x^2+5x-2}}{|x|}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{2x-1}{-x}}{\dfrac{\sqrt{x^2+5x-2}}{\sqrt{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{2x}{-x}-\dfrac{1}{-x}}{\sqrt{\dfrac{x^2+5x-2}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2+\overbrace{\dfrac{1}{x}}^{0}}{\sqrt{1+5\cdot\underbrace{\dfrac{1}{x}}_{0}-2\cdot\underbrace{\dfrac{1}{x^2}}_{0}}}=\frac{-2}{\sqrt{1}}=-2$$

Portanto,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+5x-2}}=-2.$$

Limites infinitos no infinito

Como motivação para o estudo de **limites infinitos no infinito**, considere a função

$$f(x) = x^2$$

Pergunta: Quando x tende a $-\infty$ ou $+\infty$, o que acontece com $f(x)$?

Para responder esta pergunta, vamos considerar alguns valores de x e os valores correspondentes de $f(x)$.

x	$f(x)$
−10	100
−100	10.000
−1.000	1.000.000
−10.000	100.000.000

x	$f(x)$
10	100
100	10.000
1.000	1.000.000
10.000	100.000.000

Resposta: Ao fazermos $x \longrightarrow -\infty$ ou $x \longrightarrow +\infty$, aparentemente os valores de $f(x)$ se tornam cada vez maiores.

Escreve-se

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

Limites infinitos no infinito

Matematicamente, se representa o comportamento deste tipo de função como:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Se lê: o limite de f quando x tende a menos infinito é igual a menos infinito.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Se lê: o limite de f quando x tende a menos infinito é igual a mais infinito.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

Se lê: o limite de f quando x tende a mais infinito é igual a menos infinito.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Se lê: o limite de f quando x tende a mais infinito é igual a mais infinito.

Estes limites são chamados de **limites infinitos no infinito**.

Funções quocientes

Situação	Resultado
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)\nearrow C>0}{g(x)\searrow 0^+}$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)\nearrow C>0}{g(x)\searrow 0^-}$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)\nearrow C<0}{g(x)\searrow 0^+}$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)\nearrow C<0}{g(x)\searrow 0^-}$	$+\infty$

Situação	Resultado
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)\nearrow +\infty}{g(x)\searrow C>0}$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)\nearrow -\infty}{g(x)\searrow C>0}$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)\nearrow +\infty}{g(x)\searrow C<0}$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)\nearrow -\infty}{g(x)\searrow C<0}$	$+\infty$

Observação: As mesmas regras valem se trocarmos

$$"x \to +\infty" \quad \text{por} \quad "x \to -\infty".$$

Funções quocientes

Exemplo: Calcule os limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{2^x+1}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{-5}{e^{-2x}}$

Solução: Precisamos analisar o sinal do numerador e do denominador para determinar a resposta do limite.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\overbrace{x^2+1}^{+\infty}}{\underbrace{2^x+1}_{1>0}}=+\infty$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{-5}^{-5<0}}{\underbrace{e^{-2x}}_{0^+}}=-\infty$

Funções polinomiais e funções racionais

Para calcular limites no infinito de funções polinomiais ou funções racionais, basta considerar os **monômios de maior grau**, que são também chamados de **termos dominantes**, para calcular o limite.

Exemplo: Calcule os limites:

(a) $\lim_{x \to -\infty} x^5 - 100x^4 + 2x^2 - 10.000$ (b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{25x^3 - 12x^2 + 80x}{3x^3 + 1}$

Solução:

(a) $\lim_{x \to -\infty} x^5 - 100x^4 + 2x^2 - 10.000 = \lim_{x \to -\infty} x^5 = -\infty$

(b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{25x^3 - 12x^2 + 80x}{3x^3 + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{25x^3}{3x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{25}{3} = \frac{25}{3}$

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{5x+6}$

(b) $\lim_{x\to+\infty} \left(3 - \frac{5}{x^2+1}\right)$

(c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}+x^2}{2x^2-1}$

(d) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{5-x}$

(e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{5x^2-2}}{x+3}$

(f) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{5x^2-2}}{x+3}$

(g) $\lim_{x\to-\infty} x^4$

(h) $\lim_{x\to+\infty} (x^6+2x)$

(i) $\lim_{x\to-\infty} (x^7+2x^4-3x^3)$

(j) $\lim_{x\to-\infty} (x^3+7x^4-2x^5)$

(k) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-5x+6}{x+3}$

(l) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4x+2}{2x^2-7x+1}$

(m) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4+x^3-3}{10-3x}$

Exercícios

2) Em cada caso, verifique se a função dada possui assíntotas horizontais e\ou verticais.

No caso afirmativo, determine as equações destas assíntotas.

(a) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2+5x-2}{x^2-9}$

(c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x-5}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^3+x}{x^2-5x+6}$

(e) $f(x) = \dfrac{3x^3+x-1}{x^2+2x+2}$

Respostas

Exercício 1:

a) 0
b) 3
c) 1/2
d) $+\infty$
e) $\sqrt{5}$
f) $-\sqrt{5}$
g) $+\infty$
h) $+\infty$
i) $-\infty$
j) $+\infty$
k) $-\infty$
l) 1/2
m) $+\infty$

Exercício 2:

a) Assíntotas verticais: Não possui.
Assíntotas horizontais: $y = 2$

b) Assíntotas verticais: $x = \pm 3$
Assíntotas horizontais: $y = 1$

c) Assíntotas verticais: $x = 5$
Assíntotas horizontais: $y = \pm 1$

d) Assíntotas verticais: $x = 2$ e $x = 3$
Assíntotas horizontais: Não possui.

e) Assíntotas verticais: Não possui.
Assíntotas horizontais: Não possui.

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

https://www.youtube.com/channel/UCB3NUeew6Ji_k39-_GDA3iQ/playlists

O GAMA possui monitorias de:

- **Pré-cálculo e Matemática Elementar** (e disciplinas equivalentes)
    - **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
        - **Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino

Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

Limites

2020/1

Aula 04

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Funções contínuas

Definição: Uma função f é contínua em um número $x = a$ se forem satisfeitas as seguintes condições:

1) $f(a)$ existe; 2) Existe o limite $\lim_{x \to a} f(x)$; 3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Do contrário, se diz que a função f é descontínua em $x = a$.

Observação: As condições acima dizem que:

1) $f(a)$ existe.

Quer dizer que o número a pertence ao domínio da função f, ou seja, é possível calcular $f(a)$.

2) Existe o limite $\lim_{x \to a} f(x)$.

Quer dizer que os limites laterais existem e são iguais entre si. $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$

3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Quer dizer que valores encontrados em 1) e 2) são iguais entre si.

Funções contínuas

Exemplos: Determine se a função representada pelo gráfico a seguir é contínua em cada número dado. Justifique.

(a) $x = -2$

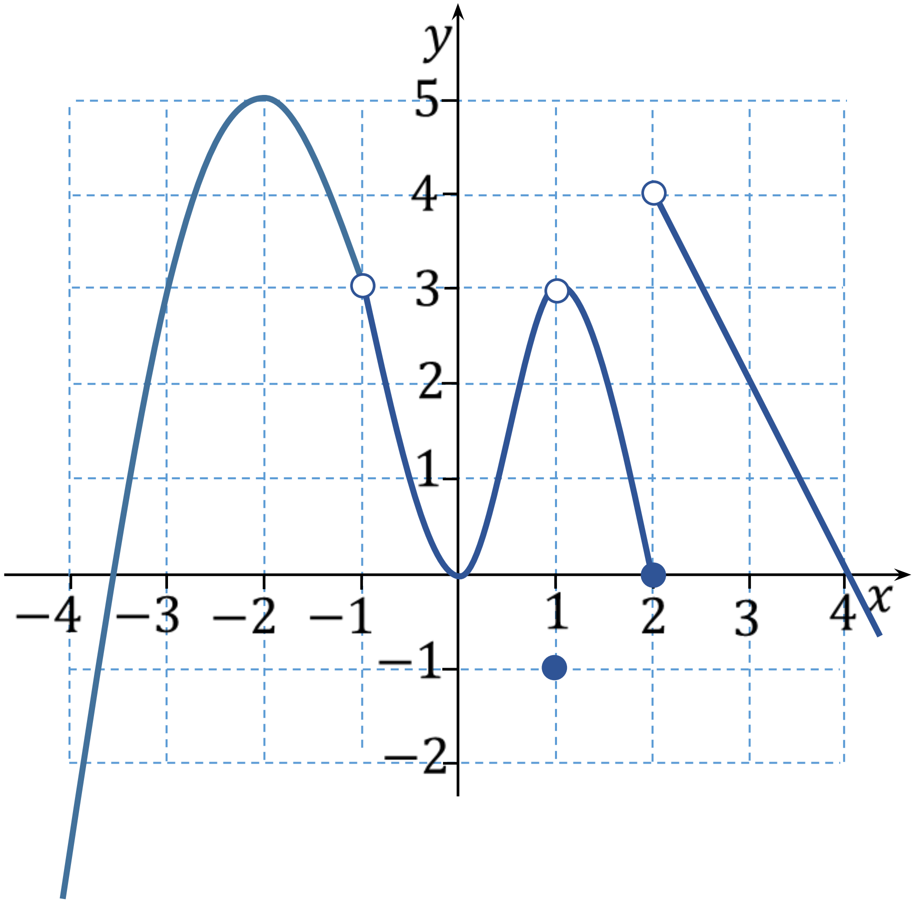
(b) $x = -1$

(c) $x = 0$

(d) $x = 1$

(e) $x = 2$

(f) $x = 3$



Solução:

(a) Como

$$f(-2) = 5 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -2} f(x) = 5$$

então f é contínua em $x = -2$.

(b) Como

$$f(-1) \nexists \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -1} f(x) = 3$$

então f é descontínua em $x = -1$.

Funções contínuas

Exemplos: Determine se a função representada pelo gráfico a seguir é contínua em cada número dado. Justifique.

(a) $x = -2$

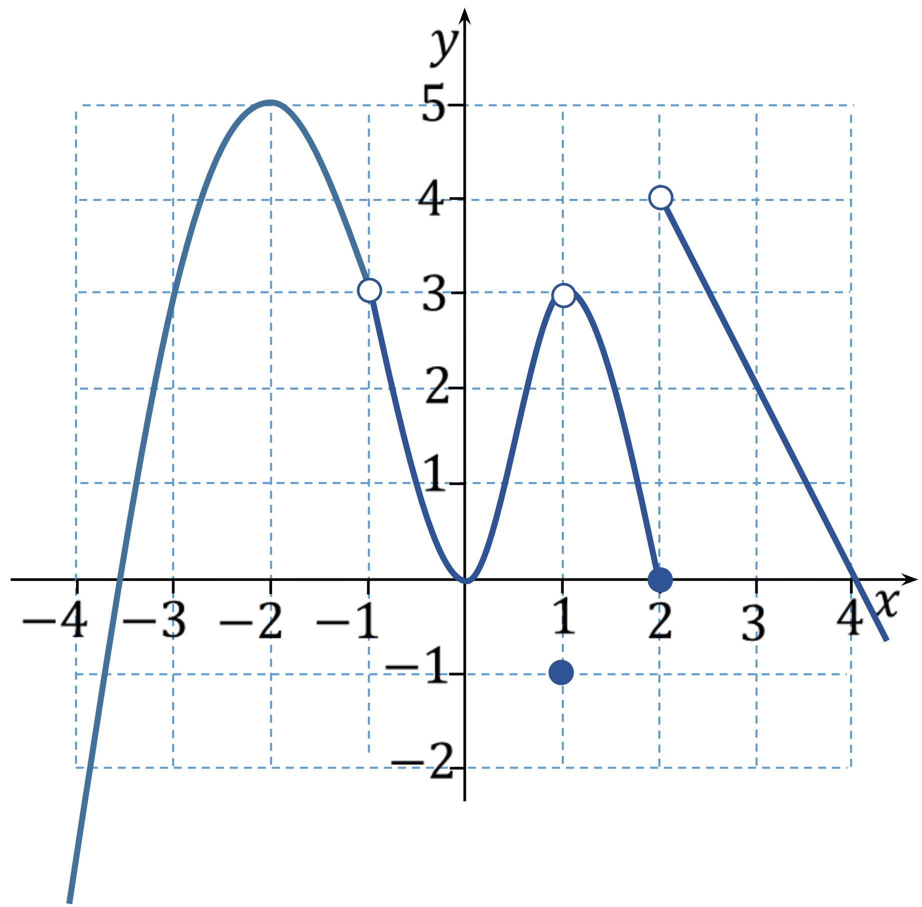
(b) $x = -1$

(c) $x = 0$

(d) $x = 1$

(e) $x = 2$

(f) $x = 3$



Solução:

(c) Como

$$f(0) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

então f é contínua em $x = 0$.

(d) Como

$$f(1) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

então f é descontínua em $x = 1$.

Funções contínuas

Exemplos: Determine se a função representada pelo gráfico a seguir é contínua em cada número dado. Justifique.

(a) $x = -2$

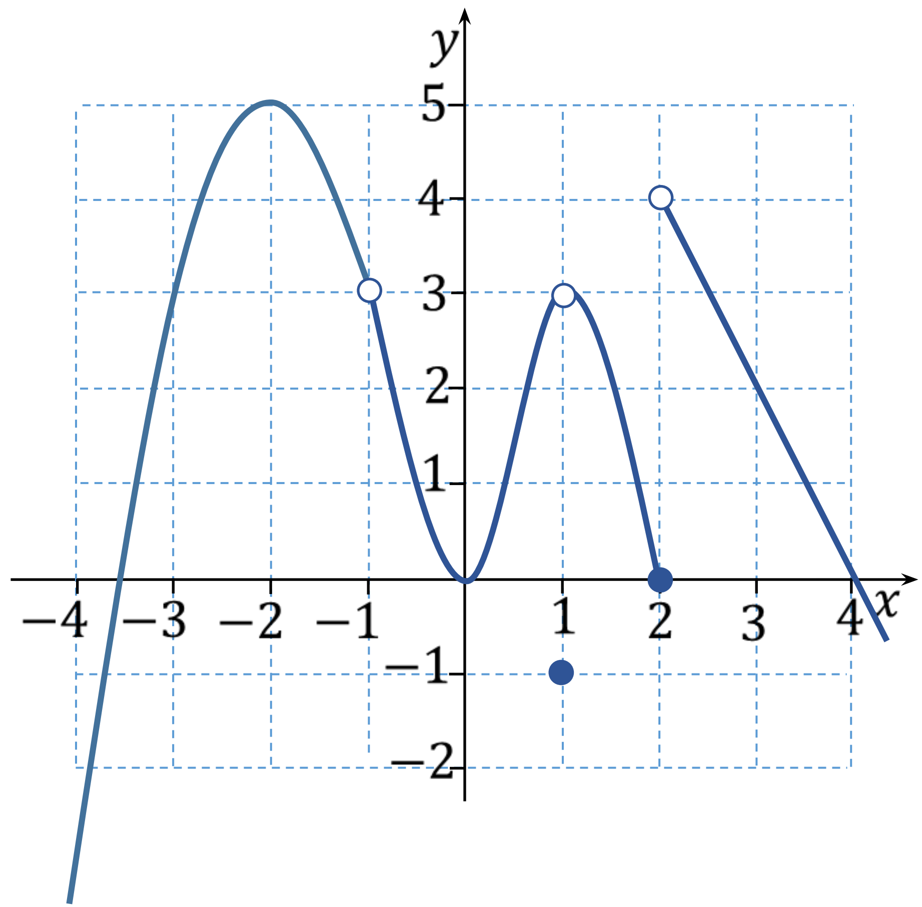
(b) $x = -1$

(c) $x = 0$

(d) $x = 1$

(e) $x = 2$

(f) $x = 3$



Solução:

(e) Como

$$f(2) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 2} f(x) \nexists$$

então f é descontínua em $x = 2$.

(f) Como

$$f(3) = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 3} f(x) = 2$$

então f é contínua em $x = 3$.

Funções contínuas

Exemplo: Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 - 3x + 4, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

(a) Verifique se f é contínua em $x = 1$.

(b) Esboce o gráfico desta função.

Solução: É necessário verificar cada uma das condições abaixo!

1) $f(1)$ existe. Sim! $f(1) = 1 + 1 = 2$.

2) Existe o limite $\lim_{x \to 1} f(x)$. Sim!

$$\begin{cases} \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x+1) = 2 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2 - 3x + 4) = 2 \end{cases}$$

3) $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$. Sim!

Conclui-se então que f é contínua em $x = 1$.

Funções contínuas

Exemplo: Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 - 3x + 4, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

(a) Verifique se f é contínua em $x = 1$.

(b) Esboce o gráfico desta função.

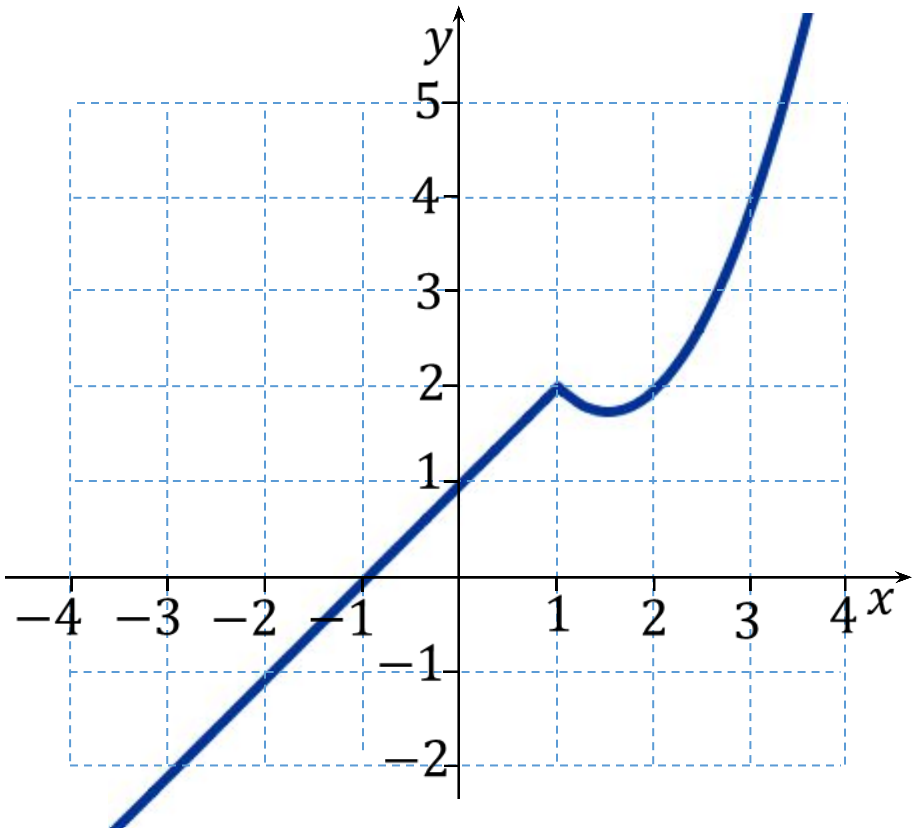
Solução: A função dada foi definida por duas sentenças, portanto:

$$y = x + 1 \quad \text{em } (-\infty, 1]$$

Função do primeiro grau!
O gráfico é uma reta!

$$y = x^2 - 3x + 4 \quad \text{em } (1, +\infty)$$

Função do segundo grau!
O gráfico é uma parábola!



Classificação de descontinuidades

Descontinuidade removível: Existe o limite $\lim_{x\to a} f(x)$

mas uma das seguintes situações acontece:

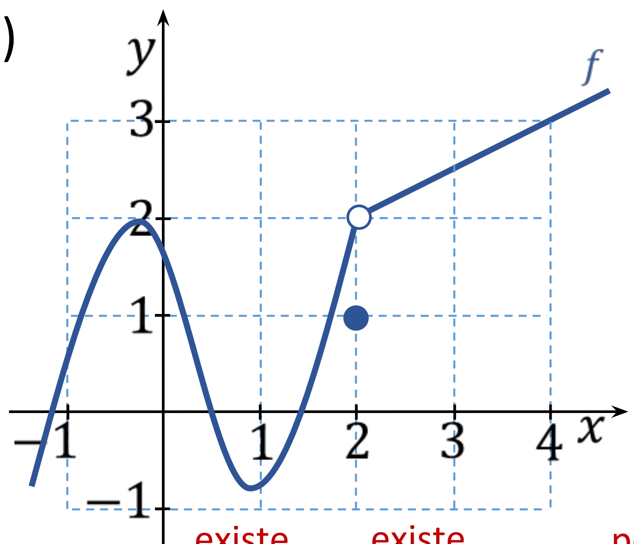
(i) $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$. ou (ii) f não está definida em $x = a$.

Neste caso, se diz que a função f possui uma descontinuidade removível em $x = a$.

"o gráfico de f tem um furo em $x = a$."

Exemplo: Em cada caso, classifique a descontinuidade da função em $x = 2$.

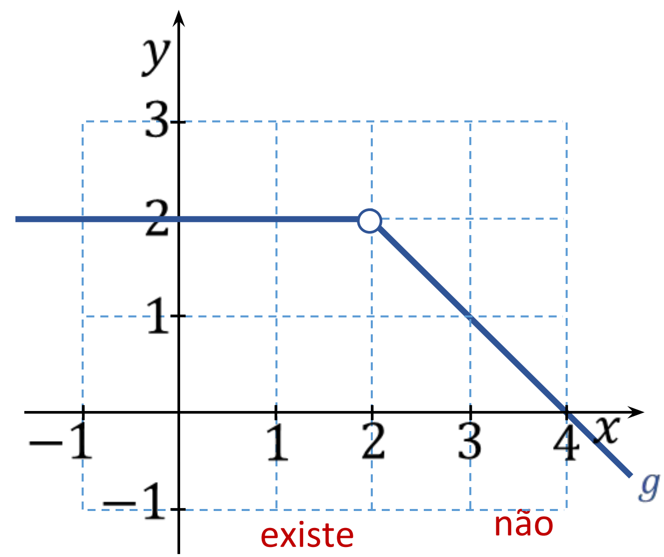
(a)



existe $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe $f(2)$ porém $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$.

Descontinuidade removível em $x = 2$.

(b)



existe $\lim_{x\to 2} g(x)$ não existe $g(2)$

Descontinuidade removível em $x = 2$.

Classificação de descontinuidades

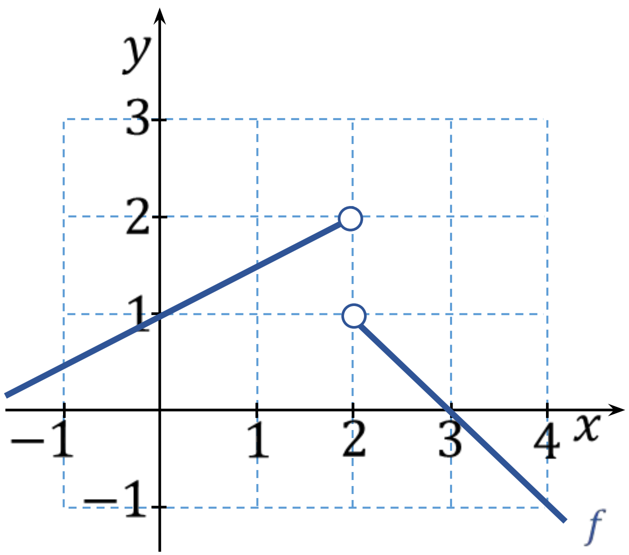
Descontinuidade em salto: Os limites laterais existem e são diferentes entre si, ou seja,

(i) $\lim_{x\to a^-} f(x)$ existe (ii) $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existe (iii) $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$.

Neste caso, se diz que a função f possui uma descontinuidade em salto em $x = a$. "o gráfico de f tem um salto em $x = a$."

Exemplo: Em cada caso, classifique a descontinuidade da função em $x = 2$.

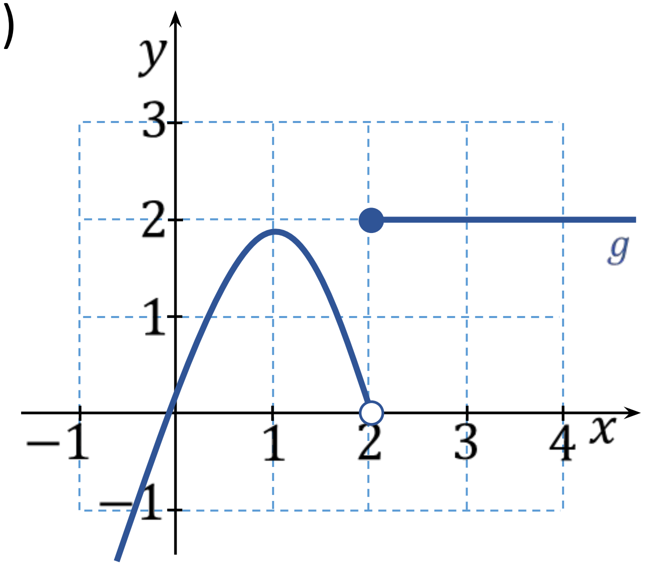
(a)



$2 = \lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x) = 1.$

Descontinuidade em salto em $x = 2$.

(b)



$0 = \lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x) = 2.$

Descontinuidade em salto em $x = 2$.

Classificação de descontinuidades

Descontinuidade infinita: Um dos limites laterais é infinito ($-\infty$ ou $+\infty$), ou seja, ocorre **pelo menos uma** das situações:

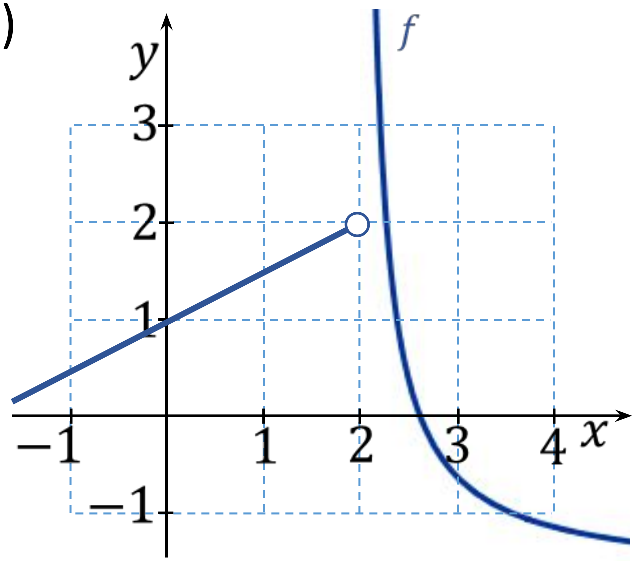
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$$

Neste caso, se diz que a função f possui uma descontinuidade infinita em $x = a$.

"o gráfico de f tem uma assíntota vertical em $x = a$."

Exemplo: Em cada caso, classifique a descontinuidade da função em $x = 2$.

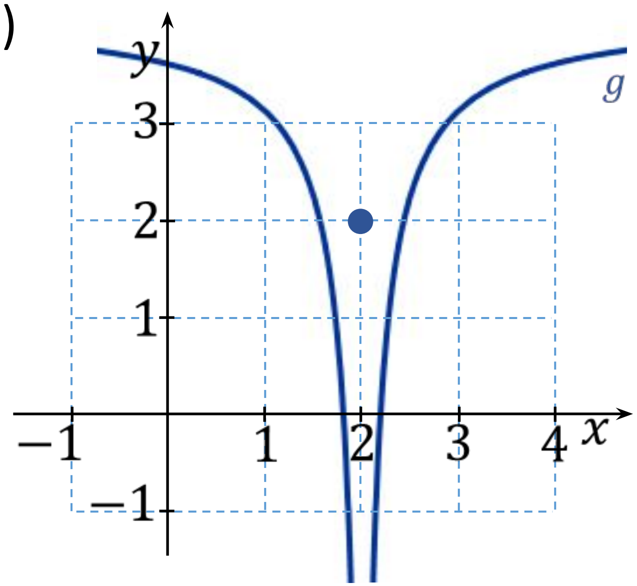
(a)



$\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty.$

Descontinuidade infinita em $x = 2$.

(b)



$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty.$

Descontinuidade infinita em $x = 2$.

Funções contínuas

Exemplo: Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 2x+5, \text{ se } x < -1 \\ 4x^2 - 1, \text{ se } -1 < x < 1 \\ 1, \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$$

(a) f é contínua em $x = 1$?

(b) f é contínua em $x = -1$?

(c) Esboce o gráfico de f.

Solução: (a) Como

1) $f(1)$ existe? Sim! $f(1) = 1.$

2) Existe o limite $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. Não!

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 4x^2 - 1 = 3 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 1 = 1 \end{cases}$$

Conclui-se portanto que f é descontínua em $x = 1$.

Funções contínuas

Exemplo: Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 2x+5, & \text{se } x < -1 \\ 4x^2 - 1, & \text{se } -1 < x < 1 \\ 1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

(a) f é contínua em $x = 1$?

(b) f é contínua em $x = -1$?

(c) Esboce o gráfico de f.

Solução: (b) Como

1) $f(-1)$ existe? Não!

Conclui-se que f é descontínua em $x = -1$.

Funções contínuas

Exemplo: Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 2x+5, \text{ se } x < -1 \\ 4x^2 - 1, \text{ se } -1 < x < 1 \\ 1, \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$$

(a) f é contínua em $x = 1$?

(b) f é contínua em $x = -1$?

(c) Esboce o gráfico de f.

Solução: A função dada foi definida por três sentenças, portanto:

$y = 2x + 5$ em $(-\infty, -1)$

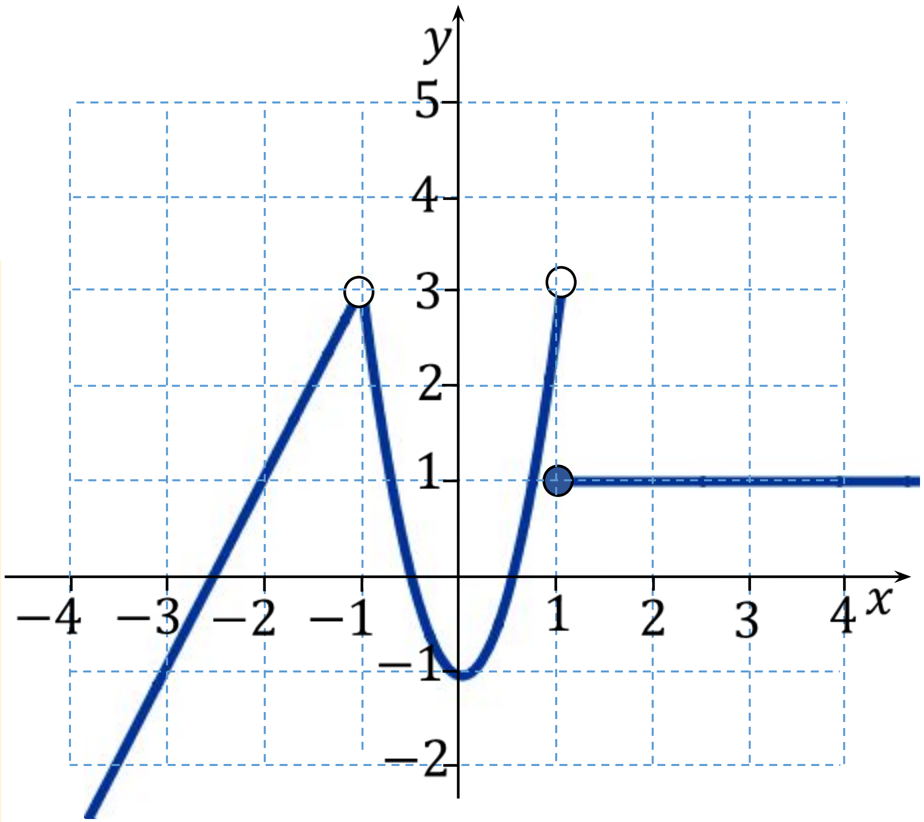
Função do primeiro grau!

$y = 4x^2 - 1$ em $(-1, 1)$

Função do segundo grau!

$y = 1$ em $[1, +\infty)$

Função constante!



Continuidade lateral

Definição: Uma função f é **contínua à direita** em um número a se forem satisfeitas as seguintes condições:

1) $f(a)$ existe; 2) Existe o limite $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$; 3) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

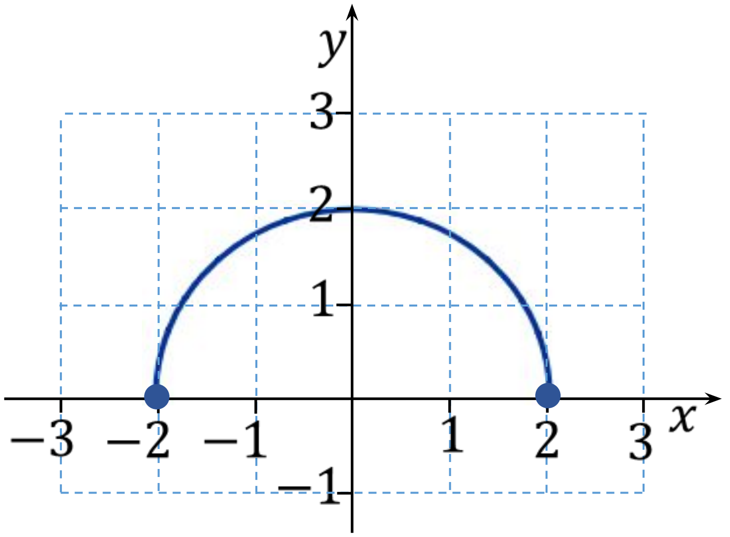
Definição: Uma função f é **contínua à esquerda** em um número a se forem satisfeitas as seguintes condições:

1) $f(a)$ existe; 2) Existe o limite $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$; 3) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Exemplo: A função

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

é contínua em $[-2, 2]$, sendo contínua à direita em $x = -2$ e contínua à esquerda em $x = 2$.



Propriedades das funções contínuas

Continuidade da Soma/diferença: Sejam f e g funções contínuas em $x = a$.

Então

$$f \pm g \text{ é contínua em } x = a.$$

Isto é, a soma/diferença de funções contínuas é uma função contínua.

Continuidade do produto: Sejam f e g funções contínuas em $x = a$.

Então

$$f \cdot g \text{ é contínua em } x = a.$$

Isto é, o produto de funções contínuas é uma função contínua.

Continuidade do quociente: Sejam f e g funções contínuas em $x = a$ tais que $g(a) \neq 0$.

Então

$$\frac{f}{g} \quad \text{é contínua em } x = a.$$

Isto é, o quociente de funções contínuas é uma função contínua.

Continuidade das funções elementares

Continuidade das funções polinomiais:

As funções polinomiais são contínuas em todos números reais.

Isto é, se f é uma função polinomial, então:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Exemplo: Calcule o limite:

$$\lim_{x \to 3} x^2 - 3x + 2$$

Solução: Como a função $f(x) = x^2 - 3x + 1$ é polinomial, o limite acima pode ser calculado facilmente como:

$$\lim_{x \to 3} (x^2 - 3x + 2) = (3)^2 - 3(3) + 2 \ = 2.$$

Continuidade das funções elementares

Continuidade das funções racionais:

As funções racionais são contínuas em todos números dos seu domínios.

Isto é, se f é uma função racional (quociente de duas funções polinomiais) e $a \in D(f)$, então:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Exemplo: Calcule o limite:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 1}{2x^4 - x + 3}$$

Solução: Como a função f é racional e $2 \in D(f)$, o limite acima pode ser calculado facilmente como:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 1}{2x^4 - x + 3} = \frac{(2)^3 - 1}{2(2)^4 - (2) + 3} = \frac{7}{33}.$$

Continuidade das funções elementares

Continuidade das funções raízes:

As funções raízes são contínuas em todos números dos seu domínios.

Isto é, se f é uma função raiz e $a \in D(f)$, então:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Exemplo: Calcule os limites:

(a) $\lim\limits_{x \to 16} \sqrt{x}$ (b) $\lim\limits_{x \to -32} \sqrt[5]{x}$

Solução: Os limites acima podem ser calculados facilmente como:

(a) $\lim\limits_{x \to 16} \sqrt{x} = \sqrt{16} = \sqrt{(4)^2} = 4.$

(b) $\lim\limits_{x \to -32} \sqrt[5]{x} = \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2.$

Continuidade das funções elementares

Continuidade das funções trigonométricas:

As funções trigonométricas são contínuas em todos números dos seu domínios.

Isto é, se f é uma função trigonométrica e $a \in D(f)$, então:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Exemplo: Calcule os limites:

(a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \sin x$ (b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \tan x$

Solução: Os limites acima podem ser calculados facilmente como:

(a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$ (b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \tan x = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

Continuidade das funções elementares

Continuidade das funções exponenciais e logarítmicas:

As funções exponenciais e logarítmicas são contínuas em todos números dos seu domínios.

Isto é, se f é uma função exponencial ou uma função logarítmica e $a \in D(f)$, então:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Exemplo: Calcule os limites:

(a) $\lim_{x \to 5} 2^x$

(b) $\lim_{x \to 9} \log_3 x$

Solução: Os limites acima podem ser calculados facilmente como:

(a) $\lim_{x \to 5} 2^x = 2^5 = 32.$

(b) $\lim_{x \to 9} \log_3 x = \log_3 9 = 2.$

Continuidade das funções elementares

Continuidade da função composta:

Se uma função f é contínua em $x = a$ e a função g é contínua em $f(a)$ então a função composta gof é contínua em $x = a$.

Isto é,

$$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = (f \circ g)(a).$$

Exemplo: Calcule os limites:

(a) $\lim\limits_{x \to -1} \cos(x^2 - 1)$ (b) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x^3 + 2x}$ (c) $\lim\limits_{x \to 0} 2^{3 - \tan x}$

Solução: Utilizando a continuidade da função composta temos:

(a) $\lim\limits_{x \to -1} \cos(x^2 - 1) = \cos\big((-1)^2 - 1\big) = \cos(0) = 1.$

(b) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x^3 + 2x} = \sqrt{(2)^3 + 2(2)} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$

(c) $\lim\limits_{x \to 0} 2^{3 - \tan x} = 2^{3 - \tan 0} = 2^{3-0} = 2^3 = 8.$

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Determine se a função representada pelo gráfico a seguir é contínua em cada número dado.

(a) $x = -6$

(b) $x = -5$

(c) $x = -4$

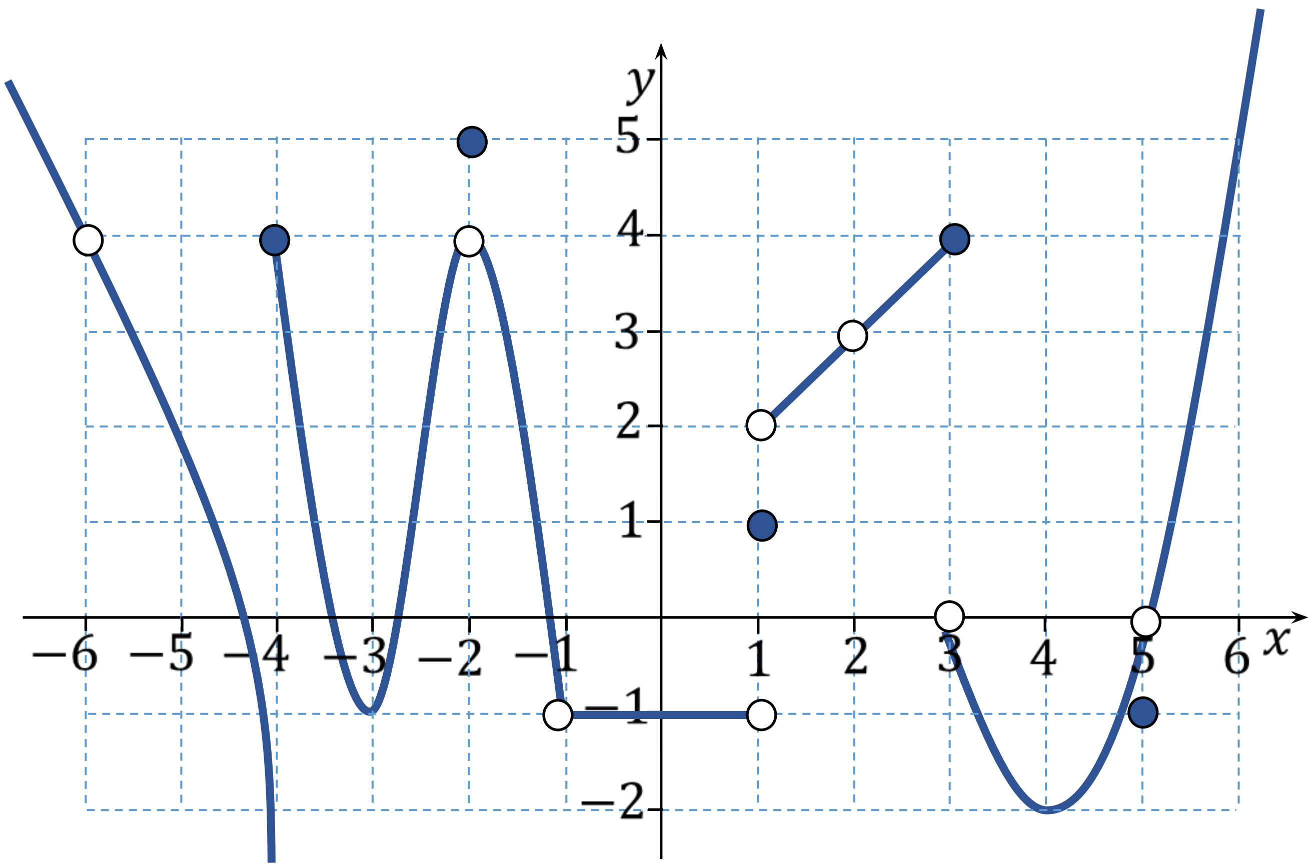
(d) $x = -3$

(e) $x = -2$

(f) $x = -1$

(g) $x = -\frac{1}{2}$

(h) $x = 0$



Exercícios

1) Determine se a função representada pelo gráfico a seguir é contínua em cada número dado.

(i) $x = 1$

(j) $x = \frac{5}{4}$

(k) $x = 2$

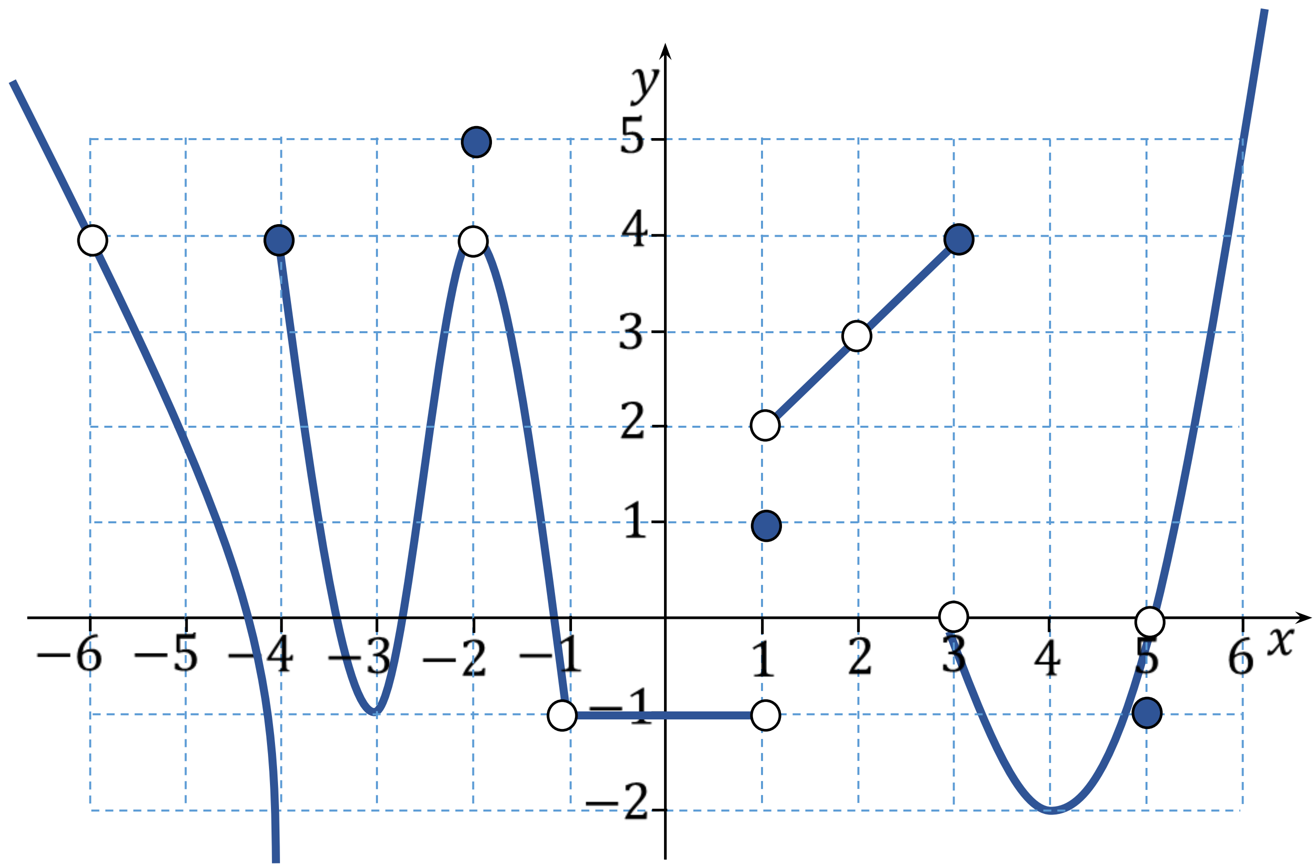
(l) $x = 3$

(m) $x = \pi$

(n) $x = 4$

(o) $x = 5$

(p) $x = 6$



Exercícios

2) Usando as propriedades dos limites, diga se as funções abaixo são contínuas nos pontos dados.

(a) $f(x) = \begin{cases} x+3, \text{ se } x \leq 5 \\ 3x-7, \text{ se } x > 5 \end{cases}$ em $x = 5$

(b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, \text{ se } x \neq 3 \\ 7, \text{ se } x = 3 \end{cases}$ em $x = 3$

(c) $f(x) = \begin{cases} 2 - x, \text{ se } x < 1 \\ 1, \text{ se } x = 1 \\ x^2 - \sqrt{x}, \text{ se } x > 1 \end{cases}$ em $x = 1$

(d) $f(x) = \begin{cases} \sin x, \text{ se } x < 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \\ 2^{3x} - 1, \text{ se } x > 0 \end{cases}$ em $x = 0$

Exercícios

2) Usando as propriedades dos limites, diga se as funções abaixo são contínuas nos pontos dados.

(e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & \text{se } x \neq 0 \\ 2, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ em $x = 0$

(f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+6}{x+3}, & \text{se } x \neq -3 \\ 2, & \text{se } x = -3 \end{cases}$ em $x = -3$

(g) $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{5x+7}, & \text{se } x < 4 \\ x-1, & \text{se } x > 4 \end{cases}$ em $x = 4$

(h) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-25}{x-5}, & \text{se } x < 5 \\ 10, & \text{se } x = 5 \\ \dfrac{10x-50}{x-5}, & \text{se } x > 5 \end{cases}$ em $x = 5$

Exercícios

3) Determine o valor de m para que a função abaixo seja contínua em $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} 12 - x^3, \text{ se } x < 2 \\ m, \quad \text{se } x = 2 \\ \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, \quad \text{se } x > 2 \end{cases}$$

4) Determine o valos de k para que $g(x)$ seja contínua em $x = -3$.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}, \text{ se } x \neq -3 \\ k, \text{ se } x = -3 \end{cases}$$

Respostas

Exercício 1:

a) Não
b) Sim
c) Não
d) Sim
e) Não
f) Não
g) Sim
h) Sim
i) Não
j) Sim
k) Não
l) Não
m) Sim
n) Sim
o) Não
p) Sim

Exercício 2:

a) Contínua em $x = 5$.
b) Descontínua em $x = 3$.
c) Descontínua em $x = 1$.
d) Contínua em $x = 0$.
e) Descontínua em $x = 0$.
f) Contínua em $x = -3$.
g) Descontínua em $x = 4$.
h) Contínua em $x = 5$.

Exercício 3:

m = 4

Exercício 4:

k = - 6

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

https://www.youtube.com/channel/UCB3NUeew6Ji_k39-_GDA3iQ/playlists

O GAMA possui monitorias de:

- **Pré-cálculo e Matemática Elementar** (e disciplinas equivalentes)
- **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
- **Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino

Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

Limites

2020/1

Aula 05

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Indeterminações

Nesta aula, iremos estudar algumas **formas indeterminadas** que aparecem muito frequentemente no Cálculo.

As **indeterminações** mais frequentes são representadas por:

$\frac{0}{0}$ Quociente de duas funções tais que, no limite, a função do numerador e a do denominador tendem a zero simultaneamente.

$\frac{\infty}{\infty}$ Quociente de duas funções tais que, no limite, a função do numerador e a do denominador tendem a infinito simultaneamente.

$\infty - \infty$ Diferença de duas funções tais que, no limite, ambas tendem a infinito simultaneamente.

$0 \cdot \infty$ Produto de duas funções tais que, no limite, uma tende a zero e outra tende a infinito.

1^∞ Potência de duas funções tais que, no limite, a base tende a um e o expoente tende a infinito.

0^0 Potência de duas funções tais que, no limite, a base e o expoente tende a zero simultaneamente.

∞^0 Potência de duas funções tais que, no limite, a base tende a infinito e o expoente tende a zero.

Indeterminações

Nesta aula, estudaremos quatro tipos de **indeterminações**.

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \infty - \infty \qquad 0 \cdot \infty$$

Exemplos:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$$ Indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x+1}\right)$$ Indeterminação do tipo $\infty - \infty$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 4}{2x^2 - 4x + 4}$$ Indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot (x^2 + 1)$$ Indeterminação do tipo $0 \cdot \infty$

Indeterminações

Exemplo: Calcule o limite

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$$

Solução: Primeiramente note que

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2} \qquad \begin{matrix} 0 & (2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0 \\ 0 & (2)^2 - (2) - 2 = 4 - 4 = 0 \end{matrix}$$

Indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$

Note que:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{(x+1)\cancel{(x-2)}} = \lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x+1} = \frac{4}{3}.$$

$$x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$$

$$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$$

Observação: O fator $x - 2$ que "causava" a indeterminação no exemplo acima pode ser simplificado por meio de uma fatoração e conseguimos constatar que, neste caso, o limite existe e é igual a $\frac{4}{3}$.

Indeterminações

Exemplo: Calcule o limite

$$\lim_{x \to 4} \frac{2x - 8}{\sqrt{x} - 2}$$

Solução: Primeiramente note que

$$\lim_{x \to 4} \frac{2x - 8}{\sqrt{x} - 2} \qquad \begin{array}{l} 2x-8 \to 0 \\ \sqrt{x}-2 \to 0 \end{array}$$

$2(4) - 8 = 8 - 8 = 0$

$\sqrt{4} - 2 = 2 - 2 = 0$

Indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$

Note que:

$$\lim_{x \to 4} \frac{2x - 8}{\sqrt{x} - 2} = \lim_{x \to 4} \frac{2x - 8}{\sqrt{x} - 2} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} = \lim_{x \to 4} \frac{2\cancel{(x - 4)}(\sqrt{x} + 2)}{\cancel{x - 4}}$$

$$= \lim_{x \to 4} 2\,(\sqrt{x} + 2) = 2\,(\sqrt{4} + 2) = 8\,.$$

$2x - 8 = 2(x - 4)$

$(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2) = (\sqrt{x})^2 - 2^2 = x - 4$

Indeterminações

Exemplo: Calcule o limite

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-2x^2+5}{3x^5+7x^4-4x}$$

Solução: Primeiramente note que

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^3-2x^2+5} \to -\infty}{\cancel{3x^5+7x^4-4x} \to -\infty}$$

Indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$

Como neste caso temos uma função racional (quociente de duas funções polinomiais) , basta considerar os monômios de maior grau :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-2x^2+5}{3x^5+7x^4-4x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{3x^5} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3x^2} = 0.$$

Indeterminações

Exemplo: Calcule o limite

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Solução: Primeiramente note que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\overset{\nearrow -\infty}{x}}{\underset{\searrow +\infty}{\sqrt{x^2+1}}}$$

Indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$

Note que:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2}}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x}{|x|}}{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x}{-x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{1+\underset{\searrow 0}{\frac{1}{x^2}}}} = \frac{-1}{\sqrt{1}} = -1.$$

Indeterminações

Exemplo: Calcule o limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x+1}\right)$$

Solução: Como

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{x}_{\to\infty}-\underbrace{\sqrt{x+1}}_{\to\infty}\right)$$

Indeterminação do tipo $\infty-\infty$

temos uma indeterminação do tipo $\infty-\infty$.

Para calcular este limite, fazemos:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x+1}\right)\cdot\left(\frac{x+\sqrt{x+1}}{x+\sqrt{x+1}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2}{x+\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-1}{x+\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2-x-1}{x^2}}{\frac{x+\sqrt{x+1}}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x}{x^2}+\sqrt{\frac{x}{x^4}+\frac{1}{x^4}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}+\sqrt{\underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{x^4}}_{\to 0}}}=+$$

Indeterminações

Exemplo: Calcule o limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot(x^2+1)\right)$$

Solução: Como

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\overset{0}{\frac{1}{\sqrt{x}}}\cdot\overset{+\infty}{(x^2+1)}\right)$$

Indeterminação do tipo

$0\cdot\infty$

temos uma indeterminação do tipo $\mathbf{0}\cdot\infty$.

Para calcular este limite, fazemos:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot(x^2+1)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\overset{+\infty}{x^{\frac{3}{2}}}+\overset{0}{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)=+\infty.$$

Indeterminações

Exemplo: Calcule o limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}(\sqrt{2x}-100)\right)$$

Solução:

Como

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0}\underbrace{(\sqrt{2x}-100)}_{+\infty}\right)$$

Indeterminação do tipo

$0\cdot\infty$

temos uma indeterminação do tipo $0\cdot\infty$.

Para calcular este limite, fazemos:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\cdot(\sqrt{2x}-100)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2x}}{x^2}-\frac{100}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{x^{\frac{3}{2}}}}_{0}-\underbrace{\frac{100}{x^2}}_{0}\right)=0.$$

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Calcule os limites indicados:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$

b) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{x^2-8x+16}$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-6x+9}{x-3}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x-2} - \sqrt{x^2+10}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{3}{x^2+x} (\sqrt{x}-5) \right)$

f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$

g) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{2x-6}{x^2-6x+9}$

h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-9x+20}{x^3-5}$

i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

j) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{1+4x^2}}{4+x}$

k) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

l) $\lim\limits_{x\to 11} \dfrac{11-x}{x^2-121}$

m) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x+6) \dfrac{1}{\sqrt{4x^2+3}}$

n) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^2+2x+1}$

Exercícios

2) Calcule os limites indicados:

a) $\lim\limits_{x \to -7} \dfrac{49 + 14x + x^2}{7 + x}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x - 1}{2x^2 - 8x + 7}$

c) $\lim\limits_{s \to 9} \dfrac{9 - s}{3 - \sqrt{s}}$

d) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x - 4}{x^2 - 7x + 12}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + x}{x^2 - 7x}$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{49 - x^2}{7 + x}$

g) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(x - 4)(4 - x^2)}{x^2 - 4x + 4}$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{3x^2 + x} - 2x$

i) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{x - 3} + \dfrac{4}{(x + 9)(3 - x)}$

j) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x} - 5}{x^2 - 25}$

k) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + h} - 1}{h}$

l) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{6 - x} - 2}{\sqrt{3 - x} - 1}$

m) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^3}{2x^3 + 1}$

Respostas

Exercício 1:

a) 6

b) $\nexists$

c) $-\propto$

d) $-\infty$

e) 0

f) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

g) $+\infty$

h) 0

i) -1

j) 2

k) -1

l) $-\frac{1}{22}$

m) $\frac{1}{2}$

n) 1

Exercício 2:

a) 0

b) 0

c) 6

d) 1

e) 3

f) $+\propto$

g) 0

h) $-\infty$

i) $-\infty$

j) $\nexists$

k) ½

l) ½

m) -½

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

https://www.youtube.com/channel/UCB3NUeew6Ji_k39-_GDA3iQ/playlists

O GAMA possui monitorias de:

- **Pré-cálculo e Matemática Elementar** (e disciplinas equivalentes)
- **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
- **Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino

Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

Limites

2020/1

Aula 06

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Teorema do Confronto

Em alguns limites, é bastante trabalhoso obter o valor do limite diretamente. Neste caso, se torna útil uma tentativa de cálculo utilizando o **Teorema do Confronto**.

Este teorema afirma que se uma função f está limitada por outras duas funções, g e h, *em uma vizinhança do "a"* e se g e h tiverem o mesmo limite quando $x \to a$, então f também terá esse limite $x \to a$.

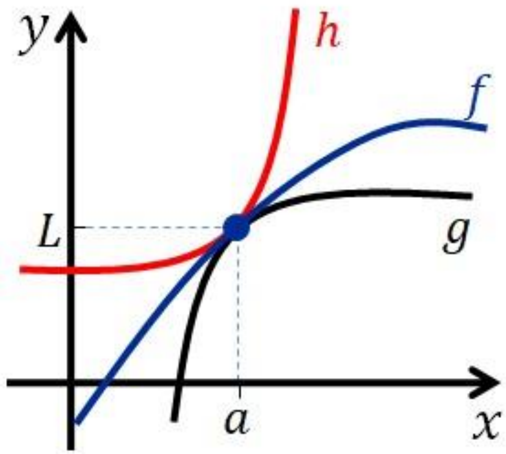
Teorema do Confronto Suponha que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para qualquer x em um intervalo abertos contendo a, exceto possivelmente em a.

Suponha também que

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$



Observação: O Teorema do Confronto continua válido se substituirmos $x \to a$ por $x \to a^+$ ou $x \to a^-$.

Teorema do Confronto

Exemplo: Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e suponha que

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

onde $g(x) = -x^2 + 4x - 3$ e $h(x) = x^2 - 4x + 5$.

Determine

$$\lim_{x \to 2} f(x).$$

Solução: Como

$$-x^2 + 4x - 3 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 5$$

e

$$\lim_{x \to 2}(-x^2 + 4x - 3) = -(2)^2 + 4(2) - 3 = 1$$

$$\lim_{x \to 2}(x^2 - 4x + 5) = 2^2 - 4(2) + 5 = 1$$

segue do Teorema do Confronto que:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 1.$$

Teorema do Confronto

Exemplo: Determine

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Solução: Como

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

temos

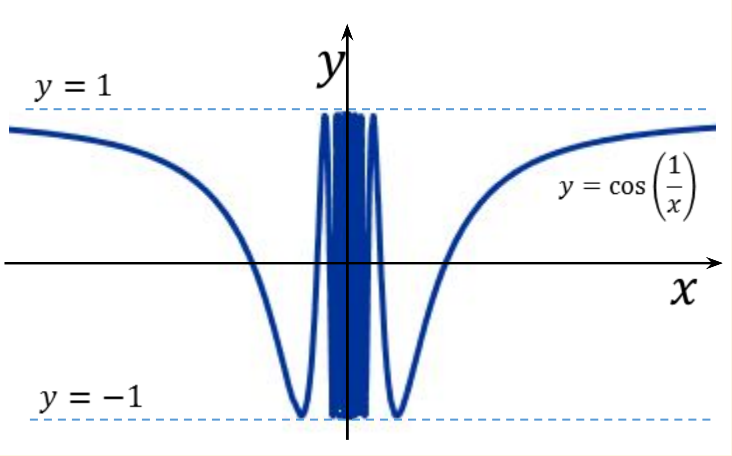
$$-1 \cdot x \leq x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \cdot x$$

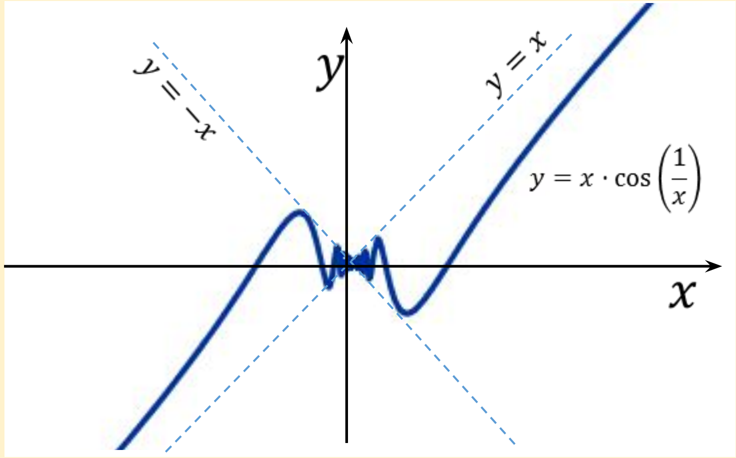
Como

$$\lim_{x\to 0^+} -x = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

temos, pelo Teorema do Confronto, que

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$





Limites Fundamentais

Existem alguns limites que são chamados de **limites fundamentais.**

São eles:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

primeiro limite fundamental

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

segundo limite fundamental

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (\text{onde } a > 0)$$

terceiro limite fundamental

Observação: Note que os três limites fundamentais são indeterminações.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x \to 0}{x \to 0}$$

Indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} \quad \left(1 + \frac{1}{x}\right) \to 1, \quad x \to \infty$$

Indeterminação do tipo 1^{∞}

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1 \to 0}{x \to 0}$$

Indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$

Limites Fundamentais

O **primeiro limite fundamental** é dado por:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Exemplos: Calcule os limites:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 8x}{8x}$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{2x}$ (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 7x}$

Importante: Em geral, para calcular um limite fundamental, utilizamos uma substituição conveniente na variável do limite.

Limites Fundamentais

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 8x}{8x}$

Solução: Fazemos

$u = 8x$ Substituição

Se $u = 8x$ e $x \to 0$ então $u \to 0$.

Portanto

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 8x}{8x} = \lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1.$$

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{2x}$

Solução: Fazemos

$u = 5x$ Substituição

Se $u = 5x$ e $x \to 0$ então $u \to 0$. Portanto

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{2x} \cdot \frac{5}{5} = \frac{5}{2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = \frac{5}{2} \cdot \lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = \frac{5}{2}.$$

Limites Fundamentais

(c) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 7x}$

Solução: Neste caso, vamos reescrever o limite dado da seguinte forma:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 7x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x \cdot \frac{3x}{3x}}{\sin 7x \cdot \frac{7x}{7x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin 7x}{7x}} \cdot \frac{3x}{7x}$$

$$= \frac{3}{7} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin 7x}{7x}} = \frac{3}{7} \cdot \frac{\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x}}{\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{7x}} = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{1} = \frac{3}{7}.$$

Limites Fundamentais

O **segundo limite fundamental** é dado por:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

No limite acima, o valor do limite permanece o mesmo se trocarmos "$+\infty$" por "$-\infty$".

Por este motivo, é comum escrever-se $x \to \pm\infty$ no limite acima, ou seja,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Exemplos: Calcule os limites:

(a) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{4x}$ (b) $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x}$ (c) $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

Importante: Em geral, para calcular um limite fundamental, utilizamos uma substituição conveniente na variável do limite.

Limites Fundamentais

(a) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{4x}$

Solução: Fazemos

$u = 4x$ ⟸ Substituição

Se $u = 4x$ e $x \to +\infty$ então $u \to +\infty$. Portanto

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{4x} = \lim_{u \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u} = e.$$

Limites Fundamentais

(b) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{2x}$

Solução: Fazemos

$$u = -\frac{x}{3}$$

Substituição

Se $u = -\frac{x}{3}$ e $x \to +\infty$ então $u \to -\infty$.

Portanto

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{2x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\left(-\frac{x}{3}\right)}\right)^{2x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\left(-\frac{x}{3}\right)}\right)^{\left(-\frac{x}{3}\right)\cdot(-6)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\left(-\frac{x}{3}\right)}\right)^{\left(-\frac{x}{3}\right)}\right)^{-6} = \left(\lim_{u \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u}\right)^{-6} = e^{-6}.$$

Limites Fundamentais

(c) $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$

Solução: Fazemos

$$u = \frac{1}{x}$$

Substituição

Se $u = \frac{1}{x}$ e $x \to 0$ então $u \to \infty$.

Portanto

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{u \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u} = e.$$

Importante: O limite

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

dado pelo exemplo acima também é chamado de segundo limite fundamental.

Limites Fundamentais

O **terceiro limite fundamental** é dado por:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \qquad (\text{onde } a > 0)$$

Exemplos: Calcule os limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{2^{3x} - 1}{3x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x - 4\sqrt{x}}$ (c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{3^{5x} - 3^{2x}}{x}$

Importante: Em geral, para calcular um limite fundamental, utilizamos uma substituição conveniente na variável do limite.

Limites Fundamentais

(a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{2^{3x} - 1}{3x}$

Solução: Fazemos

$$u = 3x$$

Substituição

Se $u = 3x$ e $x \to 0$ então $u \to 0$.

Portanto

$$\lim_{x \to 0} \frac{2^{3x} - 1}{3x} = \lim_{u \to 0} \frac{2^{u} - 1}{u} = \ln 2.$$

Limites Fundamentais

(b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x - 4\sqrt{x}}$

Solução: Fazemos

$$u = \sqrt{x}$$

Substituição

Se $u = \sqrt{x}$ e $x \to 0^+$ então $u \to 0$.

Portanto

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x - 4\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 4)}$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{e^u - 1}{u} \cdot \frac{1}{u - 4} = \ln e \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}.$$

Limites Fundamentais

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^{5x} - 3^{2x}}{x}$

Solução: Fazemos

$$u = 3x$$

Substituição

Se $u = 3x$ e $x \to 0$ então $u \to 0$.

Portanto

$$\lim_{x \to 0} \frac{3^{5x} - 3^{2x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{3^{2x}(3^{3x} - 1)}{x} = \lim_{x \to 0} 3^{2x} \cdot \frac{3^{3x} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} 3^{2x} \cdot \frac{3^{3x} - 1}{x} \cdot \frac{3}{3} = \lim_{x \to 0} 3^{2x+1} \cdot \frac{3^{3x} - 1}{3x}$$

$$= 3 \cdot \lim_{u \to 0} \frac{3^{u} - 1}{u} = 3 \cdot \ln 3 .$$

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Mostre que

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0\,.$$

2) Se

$$x^2 - 4x + 7 \leq f(x) \leq 4x - 9, \text{ para todo } x \geq 0,$$

encontre

$$\lim_{x\to 4} f(x).$$

3) Dado que, para todo x tem-se,

$$|g(x) - 2| \leq 3(x-1)^2$$

encontre

$$\lim_{x\to 1} g(x)\,.$$

4) Prove que

$$\lim_{x\to 0} \left| x sen\left(\frac{1}{x}\right)\right| = 0.$$

Exercícios

5) Utilizando os limites fundamentais, calcule:

(a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$

(b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{2x}$

(c) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin \pi x}{\sin 3x}$

(d) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$

(e) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2}{\cos x - 1}$

(f) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$

(g) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x}$

(h) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{2x}$

(i) $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{5x}}$

(j) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x+3}$

(k) $\lim_{x \to 0} \dfrac{2e^x - 2}{x}$

(l) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - 1}{e^{-x} - 1}$

Respostas

Exercício 5:

a) 3

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{\pi}{3}$

d) 0

e) -2

f) 1

g) 1

h) e^2

i) $\sqrt[5]{e}$

j) e

k) 2

l) -3

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

https://www.youtube.com/channel/UCB3NUeew6Ji_k39-_GDA3iQ/playlists

O GAMA possui monitorias de:

- **Pré-cálculo e Matemática Elementar** (e disciplinas equivalentes)
- **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
- **Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.