



# Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino



## Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

# Integrais

2020/1

## Aula 01

Projeto

# GAMA

Grupo de Apoio em  
Matemática

# Integral definida

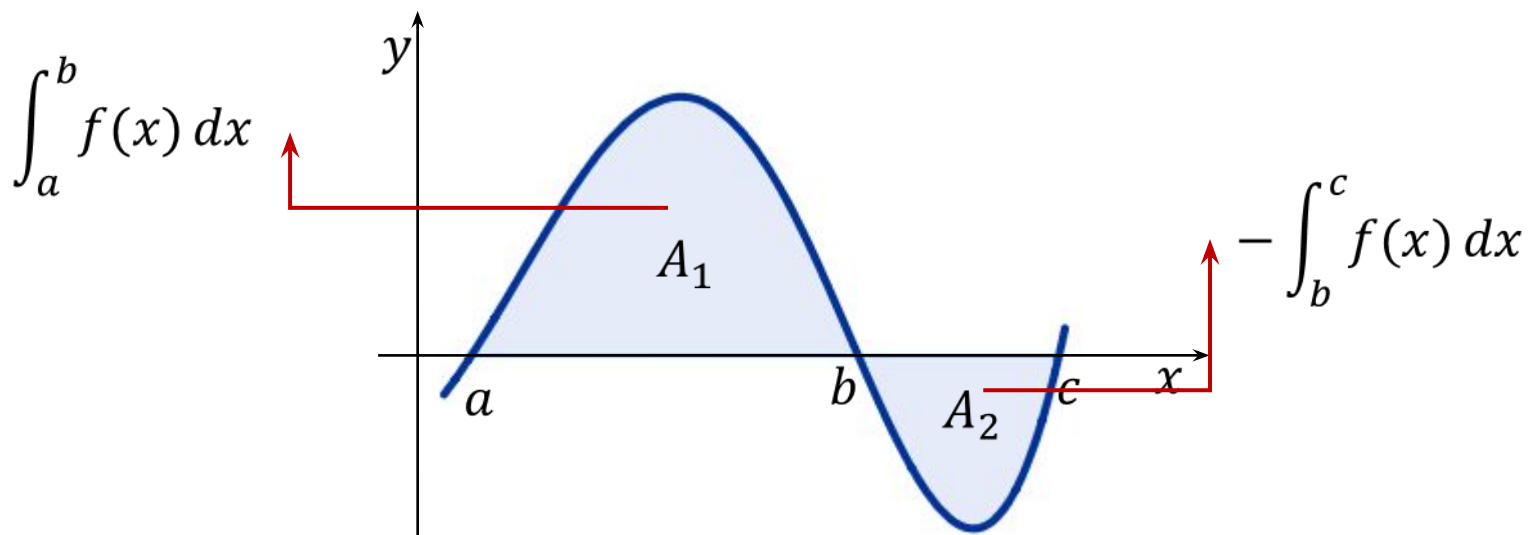
## Simbologia e nomenclatura

$$\int_a^b f(x) dx$$

Diagram illustrating the components of the definite integral notation  $\int_a^b f(x) dx$ :

- Sinal de integração** (Integration symbol):  $\int$
- limite superior** (Upper limit):  $b$
- limite inferior** (Lower limit):  $a$
- integrand**:  $f(x)$
- variável de integração** (Integration variable):  $dx$

## Interpretação geométrica



# Propriedades da integral definida

---

1) Se  $a$  existir no domínio da  $f$ , então:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

2) Se  $f$  for integrável em  $[a, b]$ , então:

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

3) Se  $c$  for uma constante, então:

$$\int_a^b cdx = c(b - a)$$

# Propriedades da integral definida

4) Se  $f$  for integrável em  $[a, b]$  e  $c$  for uma constante, então:

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$$

5) Se  $f$  e  $g$  forem integráveis em  $[a, b]$ , então a integral da soma/diferença é igual a soma/diferença das integrais:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

6) Se  $f$  for integrável em um intervalo fechado contendo os três pontos  $a$ ,  $b$  e  $c$ , então

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

# Antiderivada

**Definição:** Seja  $f$  uma função definida num intervalo  $[a, b]$ . Uma **antiderivada** de  $f$  em  $[a, b]$  é uma função  $F$  definida em  $[a, b]$ , tal que  $F'(x) = f(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ .

**Exemplo:** Determine uma antiderivada para a função  $f(x) = 12x^2 + 2x$ .

**Solução:** Uma antiderivada para a função  $f$  dada é:

$$F(x) = 4x^3 + x^2$$

Pois

$$F'(x) = (4x^3 + x^2)' = 12x^2 + 2x.$$

Note que outras antiderivadas para a função  $f$  são dadas por:

$$F_1(x) = 4x^3 + x^2 + 5 \quad F_2(x) = 4x^3 + x^2 - 100 \quad F_3(x) = 4x^3 + x^2 + \pi - e$$

Mais precisamente,  $f$  possui infinitas antiderivadas, todas da forma:

$$F(x) = 4x^3 + x^2 + C$$

onde  $C$  é uma constante.

# Antiderivada

## Antiderivada de algumas funções elementares

Função	Antiderivada	Justificativa
$f(x) = k$ <small>função constante</small>	$F(x) = kx + C$	$(kx + C)' = k$
$f(x) = x^n$ <small><math>(n \neq -1)</math></small>	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\left( \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \right)' = x^n$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln  x  + C$	$(\ln  x  + C)' = \frac{1}{x}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + C$	$(\sin x + C)' = \cos x$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + C$	$(-\cos x + C)' = \sin x$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$	$(e^x + C)' = e^x$

# Teorema Fundamental do Cálculo

**Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 1** : Se  $f$  for contínua em  $[a, b]$ , então  $f$  tem uma antiderivada em  $[a, b]$ . Então a função  $F$  definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

é uma antiderivada de  $f$  em  $[a, b]$ ; isto é,  $F'(x) = f(x)$  para cada  $x \in [a, b]$ .

Além disso,  $F$  é contínua em  $[a, b]$  e diferenciável em  $(a, b)$ .

Na notação de Leibniz, o Teorema acima afirma que

$$\frac{d}{dx} \left[ \int_a^x f(t)dt \right] = f(x)$$

“A derivada é a operação  
inversa da integral, e  
vice-versa”.

# Teorema Fundamental do Cálculo

**Exemplo:** Calcule a derivada das seguintes funções:

$$(a) F(x) = \int_0^x \cos t \, dt$$

$$(b) G(y) = \int_0^y (s^2 + 2s - 1) \, ds$$

**Solução:** Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 01, temos:

$$(a) F'(x) = \left[ \int_0^x \cos t \, dt \right]' = \cos x$$

$$(b) G'(y) = \left[ \int_0^y (s^2 + 2s - 1) \, ds \right]' = y^2 + 2y - 1$$

**Exemplo:** Calcule a seguinte derivada:

$$\frac{d}{dx} \left[ \int_1^x \tan w \, dw \right]$$

**Solução:** Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 01, temos:

$$\frac{d}{dx} \left[ \int_1^x \tan w \, dw \right] = \tan x$$



# Teorema Fundamental do Cálculo

**Exemplo:** Calcule a seguinte derivada:

$$\frac{d}{dx} \left[ \int_1^{x^3} \sqrt{t} dt \right]$$

Solução: Note que, neste caso, o limite superior não é  $x$ , mas  $x^3$ .

Portanto, utiliza-se a regra da cadeia no cálculo da derivada, da seguinte forma:

$$y = \int_1^{x^3} \sqrt{t} dt \quad \text{e} \quad u = x^3$$

Portanto, utilizando a regra da cadeia, temos:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{du} \left[ \int_1^u \sqrt{t} dt \right] \cdot \frac{du}{dx} = \sqrt{u} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \sqrt{x^3} \cdot (3x^2) = 3x^2 \sqrt{x^3} = 3x^3 \sqrt{x}. \end{aligned}$$

# Teorema Fundamental do Cálculo

## Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 2

Se  $f$  é contínua em  $[a, b]$  e se  $F$  é uma antiderivada de  $f$  em  $(a, b)$ , então:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Ou seja,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Antiderivada de  $f$  calculada  
no limite superior

Antiderivada de  $f$  calculada  
no limite inferior

**Notação:** É comum se escrever o Teorema acima de uma forma mais resumida:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b$$

onde

$$F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

# Teorema Fundamental do Cálculo

**Exemplo:** Calcule as seguintes integrais definidas:

$$(a) \int_{-2}^5 x dx \quad (b) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos y dy \quad (c) \int_{-1}^{\sqrt{7}} (2s + 3) ds \quad (d) \int_0^1 (t^3 - \sqrt{t}) dt$$

**Solução:** Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 2, temos:

$$(a) \int_{-2}^5 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^5 = \frac{(5)^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2} = \frac{25}{2} - \frac{4}{2} = \frac{21}{2}.$$

$$(b) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos y dy = \sin y \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \sin \pi - \sin \left( \frac{\pi}{2} \right) = 0 - 1 = -1.$$

$$\begin{aligned} (c) \int_{-1}^{\sqrt{7}} (2s + 3) ds &= 2 \int_{-1}^{\sqrt{7}} s ds + 3 \int_{-1}^{\sqrt{7}} ds = 2 \frac{s^2}{2} \Big|_{-1}^{\sqrt{7}} + 3 s \Big|_{-1}^{\sqrt{7}} \\ &= 2 \left( \frac{(\sqrt{7})^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} \right) + 3(\sqrt{7} + 1) = 7 - 1 + 3\sqrt{7} + 3 = 3(3 + \sqrt{7}). \end{aligned}$$

# Teorema Fundamental do Cálculo

$$\begin{aligned} \text{(d)} \quad \int_0^1 (t^3 - \sqrt{t}) dt &= \int_0^1 t^3 dt - \int_0^1 \sqrt{t} dt = \left. \frac{t^4}{4} \right|_0^1 - \left. \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^1 \\ &= \left( \frac{(1)^4}{4} - \frac{(0)^4}{4} \right) - \left( \frac{(1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{(0)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} = -\frac{5}{12}. \end{aligned}$$

# Exercícios Propostos



# Exercícios



1) Aplicando o TFC-1, encontre as seguintes derivadas:

a)  $\frac{d}{dx} \left[ \int_1^x t^3 dt \right]$

e)  $y = \int_0^{\tan x} \sqrt{t + \sqrt{t}} dt$

b)  $\frac{d}{dx} \left[ \int_0^x \sqrt{4 + t^6} dt \right]$

f)  $y = \int_2^{1/x} \arctan t dt$

c)  $\frac{d}{dx} \left[ \int_1^{x^3} \sqrt[3]{t^2 + 1} dt \right]$

g)  $y = \int_{1-3x}^1 \frac{u^3}{1 + u^2} du$

d)  $\frac{d}{dx} \left[ \int_2^{\tan x} \frac{1}{1 + t^2} dt \right]$

h)  $y = \int_{-x}^x \frac{1}{3 + t^2} dt$

# Exercícios



2) Calcule as seguintes integrais definidas aplicando o TFC – 2:

a)  $\int_2^3 x^2 dx$

f)  $\int_1^3 e^x dx$

k)  $\int_1^2 (1 + 2y)^2 dy$

b)  $\int_{-1}^2 |x| dx$

g)  $\int_3^6 \frac{1}{x} dx$

l)  $\int_{-2}^3 |2x - 1| dx$

c)  $\int_1^2 (6x - 2) dx$

h)  $\int_{\pi}^{2\pi} \cos \theta d\theta$

m)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 3 \sec^2 x dx$

d)  $\int_1^9 \sqrt{x} dx$

i)  $\int_1^4 (5 - 2t - 3t^2) dt$

e)  $\int_1^3 (3x^2 - 4) dx$

j)  $\int_1^2 \frac{3}{t^4} dt$

# Respostas



## Exercício 1:

a) *Resp.:  $x^3$*

b) *Resp.:  $\sqrt{4 + x^6}$*

c) *Resp.:  $3x^2\sqrt[3]{x^6 + 1}$*

d) *Resp.: 1*

e) *Resp.:  $y' = \sqrt{\tan x + \sqrt{\tan x}} \sec^2 x$*

f) *Resp.:  $y' = -\frac{\arctan(1/x)}{x^2}$*

g) *Resp.:  $y' = \frac{3(1 - 3x)^3}{1 + (1 - 3x)^2}$*

h) *Resp.:  $y' = \frac{2}{3 + x^2}$*

## Exercício 2:

a) *R:  $\frac{19}{3}$*

b) *R:  $\frac{5}{2}$*

c) *R: 7*

d) *R:  $\frac{52}{3}$*

e) *R: 18*

f) *R:  $e^3 - e$*

g) *R:  $\ln 2$*

h) *R: 0*

i) *R: -63*

j) *R:  $\frac{7}{8}$*

k) *R:  $\frac{49}{3}$*

l) *R:  $\frac{25}{2}$*

m) *R: 3*



# Monitorias!!



## Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

<http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/>

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

[https://www.youtube.com/channel/UCB3NUeew6Ji\\_k39-\\_GDA3iQ/playlists](https://www.youtube.com/channel/UCB3NUeew6Ji_k39-_GDA3iQ/playlists)

O GAMA possui monitorias de:

- ☐ Pré-cálculo e Matemática Elementar (e disciplinas equivalentes)
  - ☐ ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
  - ☐ Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.



# Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino



## Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

# Integrais

2020/1

## Aula 02

Projeto

# GAMA

Grupo de Apoio em  
Matemática

# Método da substituição

Seja  $F$  uma antiderivada de  $f$  (ou seja,  $F' = f$ ) e suponha que a função composta  $F(g(x))$  seja derivável. Então, pela regra da cadeia, tem-se:

$$\left(F(g(x))\right)' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

Na forma integral

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

Fazendo a seguinte mudança de variável

$$u = g(x) \quad \text{então} \quad \frac{du}{dx} = g'(x)$$

Podemos reescrever da seguinte forma

$$\int f(\underbrace{g(x)}_u) \underbrace{g'(x)dx}_{du} = \int f(u)du = F(u) + C = F(\underbrace{g(x)}_u) + C$$

método da substituição para integral indefinida

# Método da substituição

**Exemplo:** Calcule as seguintes integrais usando o método da substituição:

(a)  $\int e^{2x} dx$                       (b)  $\int \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta$                       (c)  $\int \frac{t}{\sqrt{1+2t^2}} dt$

**Solução:** Substituição

(a)  $\int e^{2x} dx = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C = \frac{e^u}{2} + C = \frac{e^{2x}}{2} + C$

Substitution:  $u = 2x$ ,  $du = 2dx \iff dx = \frac{du}{2}$

(b)  $\int \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2} du = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{\sin \theta} + C = -\csc \theta + C$

Substitution:  $u = \sin \theta$ ,  $du = \cos \theta d\theta$

(c)  $\int \frac{t}{\sqrt{1+2t^2}} dt = \int \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{du}{4} = \frac{1}{4} \int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \sqrt{u} + C = \frac{\sqrt{1+2t^2}}{2} + C$

Substitution:  $u = 1+2t^2$ ,  $du = 4tdt \iff tdt = \frac{du}{4}$

# Método da substituição

**Exemplo:** Calcule a integral

$$\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx$$

**Solução:**

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \iff \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx = \int \sin x (\sin^2 x)^2 \cos^2 x \, dx$$

$$= \int \sin x (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \, dx = \int \sin x \cos^2 x (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \, dx$$

$$= \int \sin x (\cos^2 x - 2\cos^4 x + \cos^6 x) \, dx = - \int (u^2 - 2u^4 + u^6) \, du$$

Substituição  
 $u = \cos x$   
 $du = -\sin x \, dx$   
 $\iff$   
 $-du = \sin x \, dx$

$$= - \int u^2 \, du + 2 \int u^4 \, du - \int u^6 \, du = -\frac{1}{3}u^3 + C_1 + \frac{2}{5}u^5 + C_2 - \frac{1}{7}u^7 + C_3$$

$$= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C \quad \text{onde } C_1 + C_2 + C_3 = C$$

# Método da substituição – Integral definida

Lembre que um método muito útil para resolver algumas integrais é o método da substituição.

Para utilizar o método da substituição em integrais definidas é necessário realizar algumas adequações nos limites de integração

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Adequação no limite superior  
 $x = b \iff u = g(b)$

$u = g(x)$   
 Substituição

Adequação no limite inferior  
 $x = a \iff u = g(a)$

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = F(u)\Big|_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$

Estamos supondo que  $g'$  é contínua em  $[a, b]$  e que  $f$  é contínua na imagem de  $u = g(x)$

# Método da substituição – Integral definida

**Exemplo:** Calcule a seguinte integral definida

$$\int_1^2 (x + 2)^5 dx$$

fazendo uma substituição conveniente e ajustando os limites de integração.

**Solução:** Neste caso, teremos:

$$\int_1^2 (x + 2)^5 dx = \int_3^4 u^5 du = \left[ \frac{u^6}{6} \right]_3^4 = \frac{1}{6} [(4)^6 - (3)^6] = \frac{3367}{6}.$$

Adequação no limite superior  
 $x = 2 \iff u = g(2) = 2 + 2 = 4$

Adequação no limite inferior  
 $x = 1 \iff u = g(1) = 1 + 2 = 3$

Substituição  
 $u = g(x) = x + 2 \quad du = dx$

**Observação:** Uma forma de resolver uma integral definida utilizando o método da substituição, sem modificar limites de integração, é a seguinte:

- 1) Resolva a integral indefinida utilizando o método da substituição.
- 2) Volte na variável original e substitua os limites da integral inicial.



# Método da substituição – Integral definida

**Exemplo:** Calcule a seguinte integral definida

$$\int_0^2 x(x^2 + 1)^3 dx$$

**Solução 1:** Fazendo uma substituição conveniente e ajustando os limites de integração, teremos:

$$\int_0^2 x(x^2 + 1)^3 dx = \int_1^5 u^3 \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int_1^5 u^3 du = \frac{1}{2} \left[ \frac{u^4}{4} \right]_1^5 = \frac{1}{8} [(5)^4 - (1)^4] = 78.$$



Substituição  
 $u = x^2 + 1$

$$du = 2x dx \iff x dx = \frac{du}{2}$$

Novos limites:

$$x = 0 \iff u = 1$$

$$x = 2 \iff u = 5$$

**Solução 2:** Primeiro resolvemos a integral indefinida:

$$\int x(x^2 + 1)^3 dx = \int u^3 \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int u^3 du = \frac{1}{2} \left[ \frac{u^4}{4} \right] = \frac{1}{8} u^4 = \frac{1}{8} (x^2 + 1)^4$$

Substituindo os limites de integração:

$$\int_0^2 x(x^2 + 1)^3 dx = \left[ \frac{1}{8} (x^2 + 1)^4 \right]_0^2 = \frac{1}{8} [625 - 1] = \frac{624}{8} = 78$$



# Exercícios Propostos



# Exercícios



1) Calcule as seguintes integrais:

$$(a) \int_0^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$(b) \int_1^2 \frac{dx}{(3 - 5x)^2}$$

$$(c) \int_0^1 \sin(3\pi t) dt$$

$$(d) \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan t)^3 \cdot \sec^2 t \, dt$$

$$(e) \int_0^3 x \cdot |x^2 - 4| dx$$

$$(f) \int_0^1 y \cdot (y^2 + 1)^5 dy$$

# Exercícios

---



2) Calcule as seguintes integrais utilizando o método da substituição:

(a)  $\int \frac{\ln v}{v} dv$

(b)  $\int e^{5s} ds$

(c)  $\int \frac{dx}{x (\ln x)^2}$

(d)  $\int 2x\sqrt{1+x^2} dx$

(e)  $\int \frac{2rdr}{(1-r)^7}$

(f)  $\int 2 \sin(y) \sqrt[3]{1+\cos(y)} dy$

# Exercícios



3) Encontre as integrais indefinidas:

$$(a) \int \frac{\cos 3u}{\sqrt{1 - 2 \sin 3u}} du$$

$$(b) \int \sqrt{t} \cos \sqrt{t^3} dt$$

$$(c) \int (2 \cot^2 \theta - 3 \tan^2 \theta) d\theta$$

$$(d) \int \frac{x^3 - 1}{x - 1} dx$$

$$(e) \int \frac{(1 + \cot^2 z) \cot z}{\csc z} dz$$

$$(f) \int \frac{3 \tan \theta - 4 \cos^2 \theta}{\cos \theta} d\theta$$

# Exercícios



4) Calcule a integral

$$\int x^2 \sqrt{x-1} dx$$

por dois métodos:

(a)  $u = x - 1$

(b)  $u = \sqrt{x-1}$

5) Calcule as integrais por meio da substituição indefinida:

(a)  $\int x(x^2 + 1)\sqrt{4 - 2x^2 - x^4} dx$

(b)  $\int \frac{(1 + \sqrt{x})^3}{\sqrt{x}} dx$

# Exercícios

---



6) Calcule as integrais por meio da substituição indefinida

(a)  $\int \cos^3 x \, dx$

(b)  $\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx$

(c)  $\int \sin^6 \theta \cos^5 \theta \, d\theta$

(d)  $\int \operatorname{tg}^6 x \sec^4 x \, dx$

(e)  $\int \operatorname{tg}^5 \theta \sec^7 \theta \, d\theta$

# Respostas



## Exercício 1:

a)  $Resp.: 2.(e^2 - 1)$

b)  $Resp.: \frac{1}{14}$

c)  $Resp.: \frac{2}{3\pi}$

d)  $Resp.: \frac{15}{4}$

e)  $Resp.: \frac{41}{4}$

f)  $Resp.: \frac{21}{4}$

## Exercício 2:

a)  $Resp.: \frac{(\ln v)^2}{2} + C$

b)  $Resp.: \frac{e^{5s}}{5} + C$

c)  $Resp.: -\frac{1}{\ln x} + C$

d)  $Resp.: \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2} + C$

e)  $Resp.: -\frac{2}{5}(1-r)^{-5} + \frac{1}{3}(1-r)^{-6} + C$

f)  $Resp.: -\frac{3}{2}(1 + \cos y)^{4/3} + C$

# Respostas



## Exercício 3:

a)  $Resp.: -\frac{1}{3}\sqrt{1 - 2\sin 3u} + C$

b)  $Resp.: \frac{2}{3}\sin\sqrt{t^3} + C$

c)  $Resp.: -2\cot\theta - 3\tan\theta + \theta + C$

d)  $Resp.: \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C$

e)  $Resp.: -\csc z + C$

f)  $Resp.: 3\sec\theta - 4\sin\theta + C$

## Exercício 4:

$Resp.: \frac{2}{7}(x-1)^{7/2} + \frac{4}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C$

## Exercício 5:

a)  $Resp.: -\frac{1}{6}(4 - 2x^2 - x^4)^{3/2} + C$

b)  $Resp.: \frac{1}{2}(1 + \sqrt{x})^4 + C$



# Respostas



## Exercício 6:

a) *Resp.:*  $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$

b) *Resp.:*  $-\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C$

c) *Resp.:*  $\frac{1}{7}\sin^7 \theta - \frac{2}{9}\sin^9 \theta + \frac{1}{11}\sin^{11} \theta + C$

d) *Resp.:*  $\frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x + \frac{1}{9}\operatorname{tg}^9 x + C$

e) *Resp.:*  $\frac{1}{11}\sec^{11} \theta - \frac{2}{9}\sec^9 \theta + \frac{1}{7}\sec^7 \theta + C$

# Monitorias!!



## Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

<http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/>

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

[https://www.youtube.com/channel/UCB3NUeew6Ji\\_k39-\\_GDA3iQ/playlists](https://www.youtube.com/channel/UCB3NUeew6Ji_k39-_GDA3iQ/playlists)

O GAMA possui monitorias de:

- ☐ Pré-cálculo e Matemática Elementar (e disciplinas equivalentes)
  - ☐ ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
  - ☐ Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.



# Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino



## Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

# Integrais

2020/1

## Aula 03

Projeto

# GAMA

Grupo de Apoio em  
Matemática

# Integração por partes

Estudaremos a seguir uma importante ferramenta no cálculo de algumas integrais, chamada de **método da integração por partes**.

Lembre que, a regra da **derivada do produto** nos diz que se  $f$  e  $g$  são duas funções deriváveis em relação à variável  $x$ , e digamos que

$$u = f(x) \quad \text{e} \quad v = g(x)$$

então

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad \text{Derivada do produto}$$

Lembrando que a integral e a derivada são operações inversas uma da outra, e que a integral da soma é igual a soma das integrais, obtemos:

$$u \cdot v = \int v \cdot du + \int u \cdot dv$$

Portanto, chegamos na **fórmula de integração por partes**:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

# Integração por partes

## Observações Importantes:

1) Note que, durante este processo, se obtém uma nova integral.

$$\underbrace{\int u \, dv}_{\text{Integral dada}} = uv - \underbrace{\int v \, du}_{\text{Integral obtida}}$$

O método de integração por partes se torna eficiente quando a integral obtida é mais simples do que a integral dada.

2) Em termos das funções  $f$  e  $g$ , o método de integração por partes fica escrito da seguinte forma:

$$\int \underbrace{f(x)}_u \cdot \underbrace{g'(x)}_{dv} dx = \underbrace{f(x)}_u \cdot \underbrace{g(x)}_v - \int \underbrace{g(x)}_v \cdot \underbrace{f'(x)}_{du} dx$$

3) O método de integração por partes para integrais definidas é dado por:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x) \cdot f'(x) dx$$

# Integração por partes

**Exemplo:** Calcule as integrais

$$(a) \int x \cdot \cos x \, dx$$

$$(b) \int_1^e t^2 \ln t \, dt$$

**Solução:**

$$(a) \int x \cdot \cos x \, dx = x \cdot \sin x - \int \sin x \, dx = x \cdot \sin x + \cos x + C.$$

$$u = x \implies du = dx \quad dv = \cos x \, dx \implies v = \int \cos x \, dx \implies v = \sin x$$

$$(b) \int_1^e t^2 \ln t \, dt = \ln t \frac{t^3}{3} \Big|_1^e - \int_1^e \frac{t^3}{3} \cdot \frac{1}{t} \, dt = \frac{t^3 \cdot \ln t}{3} \Big|_1^e - \frac{1}{3} \int_1^e t^2 \, dt$$

$$u = \ln t \implies du = \frac{1}{t} \, dt \quad dv = t^2 \, dt \implies v = \int t^2 \, dt \implies v = \frac{t^3}{3}$$

$$= \frac{e^3 \cdot \ln e}{3} - \frac{1^3 \cdot \ln 1}{3} - \frac{t^3}{9} \Big|_1^e = \frac{e^3}{3} - \left( \frac{e^3}{9} - \frac{1^3}{9} \right) = \frac{2e^3 + 1}{9}.$$

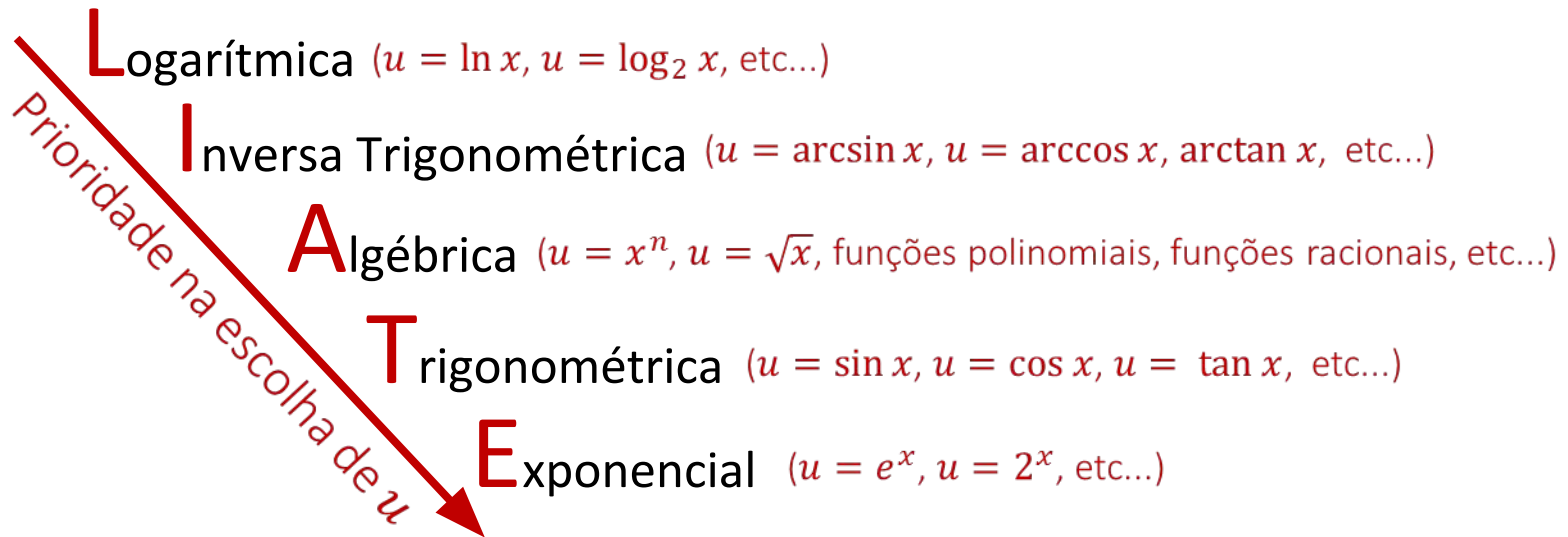
# Regra do LIATE

Na regra de integração por partes, precisamos escolher  $u$  e  $dv$  de maneira conveniente.

Uma boa sugestão para a escolha de  $u$  é conhecida como regra do

## LIATE

que funciona da seguinte forma:



**Observação:** A regra do LIATE fornece apenas uma SUGESTÃO.

Não é garantia de que esta escolha de  $u$  será a mais eficiente!!

# Integração por partes

**Exemplo:** Calcule a seguinte integral:

$$\int x \cdot e^{3x} dx$$

**Solução:** Note que

$$\int x \cdot e^{3x} dx$$

$\swarrow$  Função exponencial  
 $\searrow$  Função algébrica

De acordo com a regra do LIATE, temos:

$$u = x \Rightarrow du = dx \quad dv = e^{3x} dx \Rightarrow v = \int e^{3x} dx \Rightarrow v = \frac{e^{3x}}{3}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int x \cdot e^{3x} dx &= x \frac{e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3} dx = x \frac{e^{3x}}{3} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx \\ &= \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{3} \frac{e^{3x}}{3} + C = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{e^{3x}}{9} + C. \end{aligned}$$



# Integração por partes

**Exemplo:** Calcule a seguinte integral:

$$\int (t^2 + 1) \cdot \cos t \, dt$$

**Solução:** Note que

$$\int (t^2 + 1) \cdot \cos t \, dt$$

└───────────┐ └───────────┐  
Função algébrica Função trigonométrica

De acordo com a regra do LIATE, temos:

$$u = t^2 + 1 \Rightarrow du = 2t \, dt$$

$$dv = \cos t \, dt \Rightarrow v = \sin t$$

Portanto

$$\int (t^2 + 1) \cdot \cos t \, dt = (t^2 + 1) \cdot \sin t - 2 \int t \sin t \, dt \quad (1)$$

Note que, podemos novamente utilizar o método da integração por partes para resolver a integral

$$\int t \sin t \, dt$$

# Integração por partes

Continuação...

$$\int t \sin t \, dt$$

$\swarrow$  Função trigonométrica  
 $\searrow$  Função algébrica

De acordo com a regra do LIATE, temos:

$$u = t \Rightarrow du = dt \quad dv = \sin t \, dt \Rightarrow v = -\cos t$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int t \sin t \, dt &= t \cdot (-\cos t) - \int (-\cos t) dt \\ &= -t \cdot \cos t + \int \cos t \, dt = -t \cdot \cos t + \sin t \end{aligned} \quad (2)$$

De (1) e (2) obtemos

$$\begin{aligned} \int (t^2 + 1) \cdot \cos t \, dt &= (t^2 + 1) \cdot \sin t - 2(-t \cdot \cos t + \sin t) + C \\ &= (t^2 + 1) \cdot \sin t + 2t \cdot \cos t - 2 \sin t + C \end{aligned}$$

# Integração por partes

**Observação:** Do exemplo anterior, obtivemos:

$$\int (t^2 + 1) \cdot \cos t \, dt = (t^2 + 1) \cdot \sin t + 2t \cdot \cos t - 2 \sin t + C.$$

Depois de resolver uma integral indefinida, pode ser importante “tirar a prova real” para saber se seus cálculos estão corretos!

Lembre que a derivada da resposta deve ser igual ao integrando!!

No exemplo acima, como

$$\begin{aligned} & [(t^2 + 1) \cdot \sin t + 2t \cdot \cos t - 2 \sin t + C]' \\ &= [(t^2 + 1) \cdot \sin t]' + 2[t \cdot \cos t]' - 2[\sin t]' + C' \\ &= 2t \cdot \sin t + (t^2 + 1) \cdot \cos t + 2(\cos t - t \cdot \sin t) - 2 \cos t \\ &= 2t \cdot \sin t + (t^2 + 1) \cdot \cos t + 2 \cos t - 2t \cdot \sin t - 2 \cos t = (t^2 + 1) \cdot \cos t \end{aligned}$$

temos então a certeza de que **a resposta encontrada está correta!**

# Exercícios Propostos



# Exercícios



1) Calcule as seguintes integrais:

(a)  $\int \ln(2x + 1) dx$

(b)  $\int x^2 \cos 3x dx$

(c)  $\int e^{2\theta} \sin 3\theta d\theta$

2) Calcule as seguintes integrais:

(a)  $\int_0^2 x^2 e^x dx$

(b)  $\int_0^1 \frac{y}{e^{2y}} dy$

(c)  $\int_0^{\pi/4} e^{3x} \sin 4x dx$

(d)  $\int_1^2 \frac{\ln t}{t^2} dt$

(e)  $\int_0^{\pi/3} \sin 3y \cos y dy$

(f)  $\int_0^2 x e^{2x} dx$

# Exercícios



3) Calcule as seguintes integrais:

(a)  $\int_0^{\pi/8} \sin^5 2x \cos 2x \, dx$

(b)  $\int_0^1 x^2 (1 + 2x^3)^5 \, dx$

(c)  $\int_0^2 x e^{-x^2} \, dx$

(d)  $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \, dx$

(e)  $\int_0^{\pi/3} \operatorname{tg}^5 x \sec^4 x \, dx$

(f)  $\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \sin^5 x \cos^3 x \, dx$

(g)  $\int_0^{\pi/8} \sin 3x \cos 5x \, dx$

(h)  $\int_0^2 \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{16 - x^2}}$

(i)  $\int_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{9 + x^2}}$

# Respostas



## Exercício 1:

a)  $Resp.: \frac{1}{2}(2x + 1) \ln(2x + 1) - x + C$

b)  $Resp.: \frac{1}{3}x^2 \sin 3x + \frac{2}{9}x \cos 3x - \frac{2}{27} \sin 3x + C$

c)  $Resp.: \frac{1}{13}e^{2\theta}(2 \sin 3\theta - 3 \cos 3\theta) + C$

## Exercício 2:

a)  $Resp.: 2(e^2 - 1)$

e)  $Resp.: \frac{9}{16}$

b)  $Resp.: \frac{1}{4} - \frac{3}{4}e^{-2}$

f)  $Resp.: \frac{1}{4}(3e^4 + 1)$

c)  $Resp.: \frac{4}{25}(e^{3\pi/4} + 1)$

d)  $Resp.: \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$

## Exercício 3:

a)  $Resp.: \frac{1}{96}$

b)  $Resp.: \frac{182}{9}$

c)  $Resp.: \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^4}$

d)  $Resp.: e - \sqrt{e}$

e)  $Resp.: \frac{117}{8}$

f)  $Resp.: -\frac{11}{384}$

g)  $Resp.: \frac{1}{8}(\sqrt{2} - 1)$

h)  $Resp.: \frac{128}{3} - 24\sqrt{3}$

i)  $Resp.: \frac{2}{27}(3 - \sqrt{3})$

# Monitorias!!



## Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

<http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/>

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

[https://www.youtube.com/channel/UCB3NUeew6Ji\\_k39-\\_GDA3iQ/playlists](https://www.youtube.com/channel/UCB3NUeew6Ji_k39-_GDA3iQ/playlists)

O GAMA possui monitorias de:

- ☐ Pré-cálculo e Matemática Elementar (e disciplinas equivalentes)
  - ☐ ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
  - ☐ Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.





# Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino



## Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

# Integrais

2020/1

## Aula 04

Projeto

# GAMA

Grupo de Apoio em  
Matemática

# Área entre curvas

**Definição:** A área  $A$  da região limitada pelas curvas  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$  e pelas retas  $x = a$  e  $x = b$ , onde  $f$  e  $g$  são contínuas e  $f(x) \geq g(x)$ , para todo  $x \in [a, b]$  é:

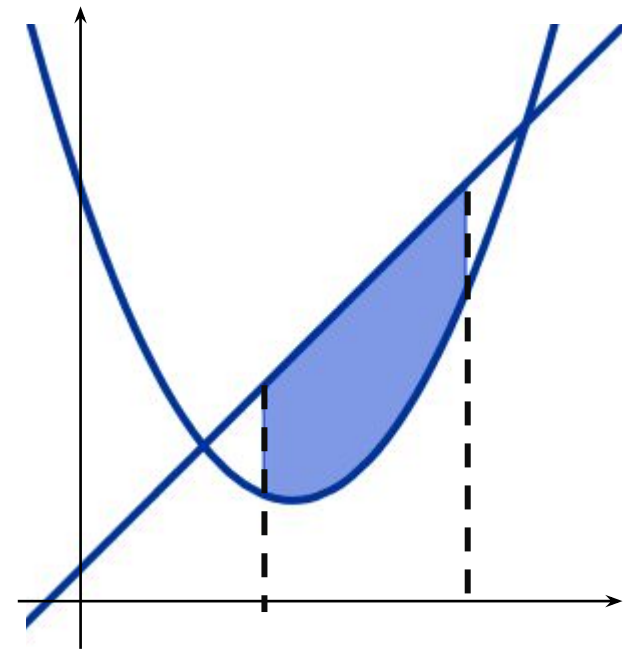
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

**Observação:** Antes de calcular a área, pode ser importante esboçar os gráficos das funções  $f$  e  $g$  para identificar qual função delimita a área superiormente (*função de cima*) e qual delimita a área inferiormente (*função de baixo*):

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Função de cima

Função de baixo

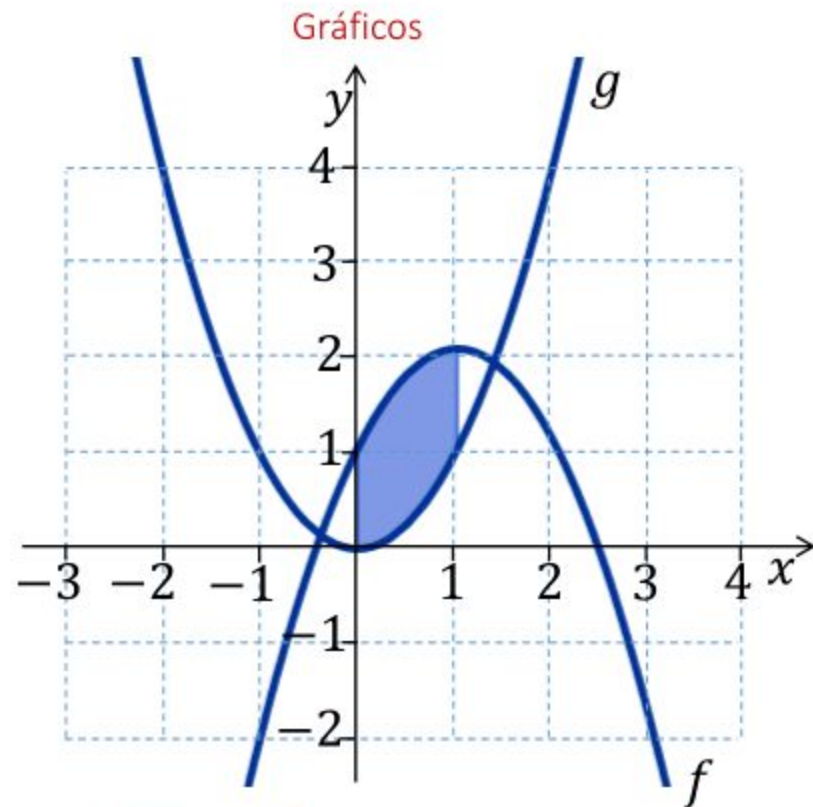


# Área entre curvas

**Exemplo:** Calcule a área compreendida pelas curvas  $f(x) = -x^2 + 2x + 1$  e  $g(x) = x^2$  e pelas retas  $x = 0$  e  $x = 1$ .

**Solução:** Neste caso, temos:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \\
 &= \int_0^1 [-x^2 + 2x + 1 - x^2] dx \\
 &= \int_0^1 [-2x^2 + 2x + 1] dx \\
 &= \left[ -2 \frac{x^3}{3} + 2 \frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 \\
 &= -\frac{2}{3} + 1 + 1 = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3} \text{ u. a.}
 \end{aligned}$$



$f(x) = -x^2 + 2x + 1$  Função de cima

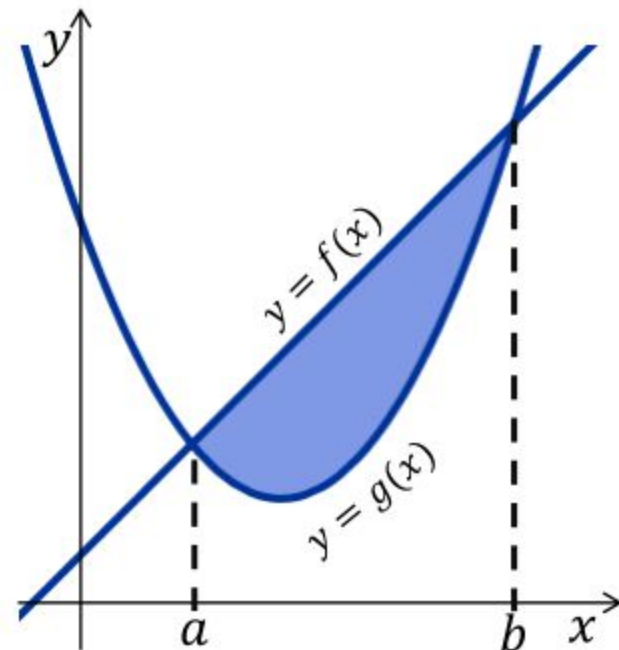
$g(x) = x^2$  Função de baixo

Limites de integração:  $a = 0$   $b = 1$

# Área entre curvas

**Observação:** Quando for necessário calcular a área entre os gráficos das funções  $f$  e  $g$ , pode ser necessário encontrar os extremos  $a$  e  $b$  resolvendo o sistema formado pelas equações que definem  $f$  e  $g$ :

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \quad \text{Sistema para encontrar os limites de integração!}$$



**Exemplo:** Calcule a área entre as curvas  $y = x^2$  e  $y = x + 2$ .

**Solução:** Neste caso, precisaremos encontrar primeiramente os limites de integração através da resolução do seguinte sistema:

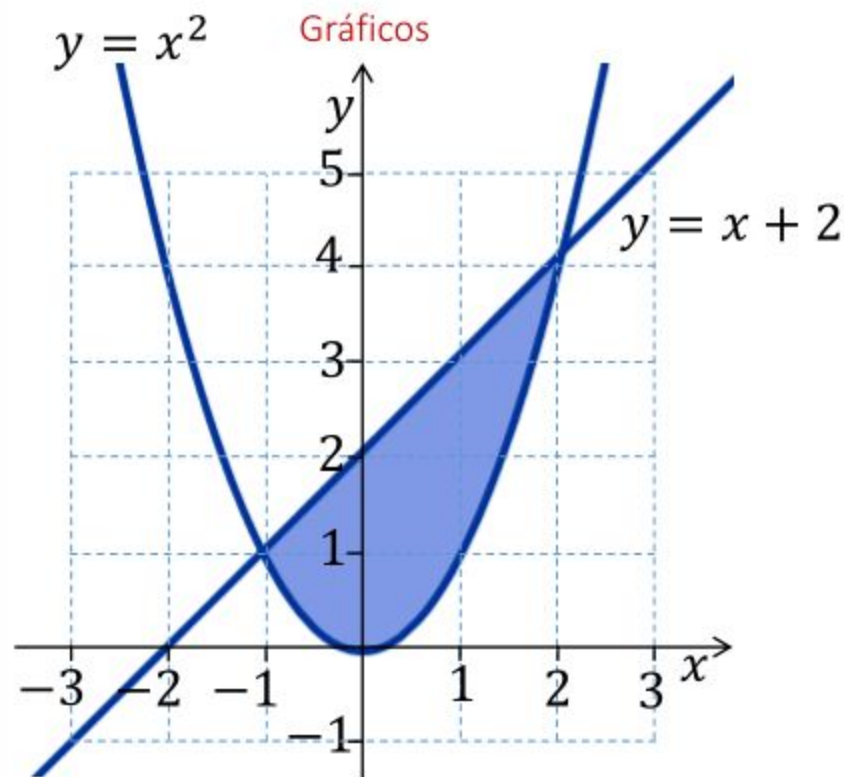
$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x = -1 \\ \text{ou} \\ x = 2 \end{matrix}$$

Portanto,  $a = -1$  e  $b = 2$ .

# Área entre curvas

Continuação...

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-1}^2 [(x+2) - x^2] dx \\
 &= \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx \\
 &= \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^2 \\
 &= \left[ -\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4 \right] - \left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right] \\
 &= \left[ \frac{-16 + 12 + 24}{6} \right] - \left[ \frac{2 + 3 - 12}{6} \right] \\
 &= \frac{20}{6} + \frac{7}{6} = \frac{27}{6} \text{ u. a.}
 \end{aligned}$$



$y = x + 2$  Função de cima

$y = x^2$  Função de baixo

Limites de integração:  $a = -1$   $b = 2$



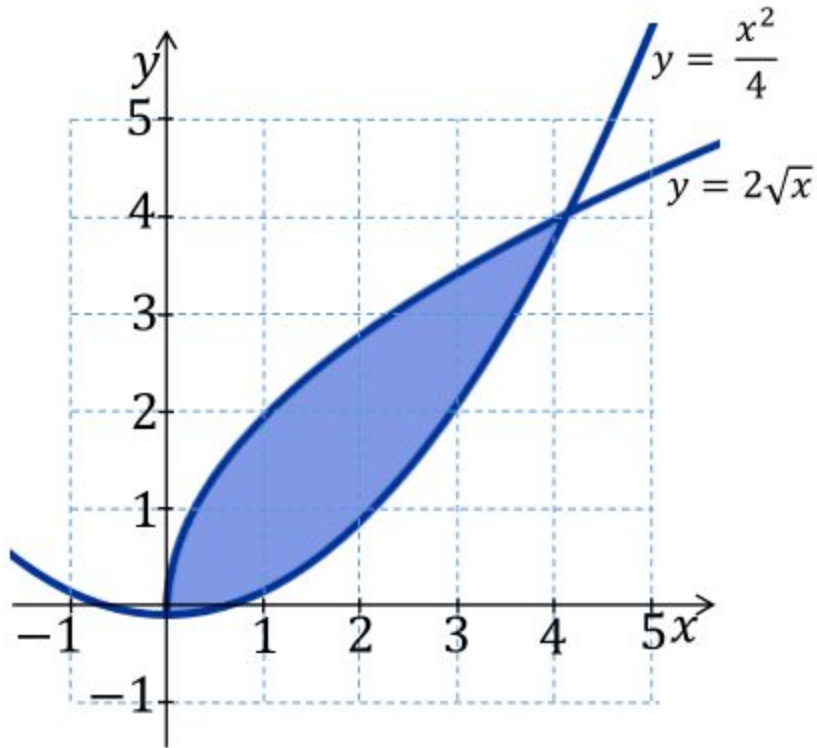
# Exercícios Propostos



# Exercícios

1) Calcule a área entre as curvas dadas:

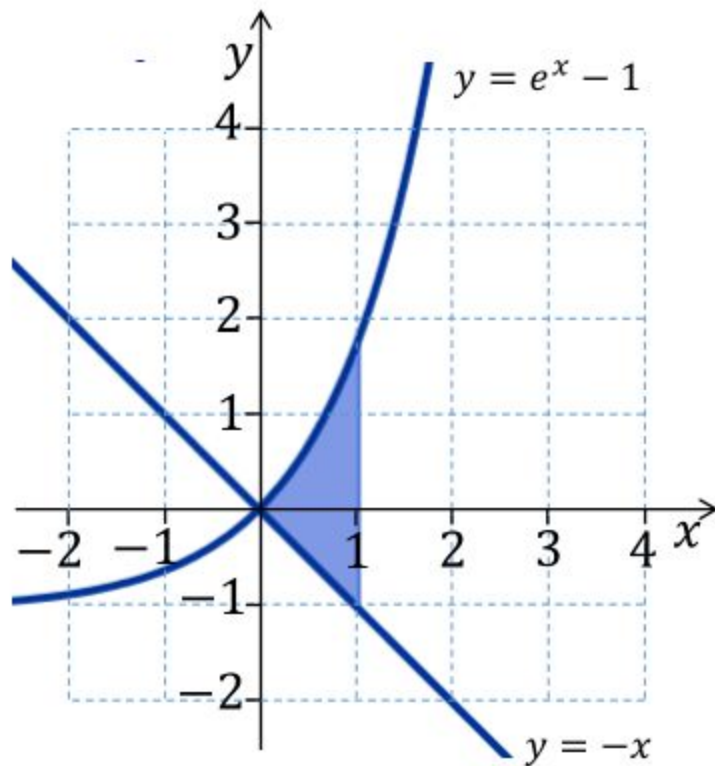
(a)  $y = \frac{x^2}{4}$  e  $y = 2\sqrt{x}$



# Exercícios

1) Calcule a área entre as curvas dadas:

(b)  $y = e^x - 1$  e  $y = -x$  e  $x = 1$

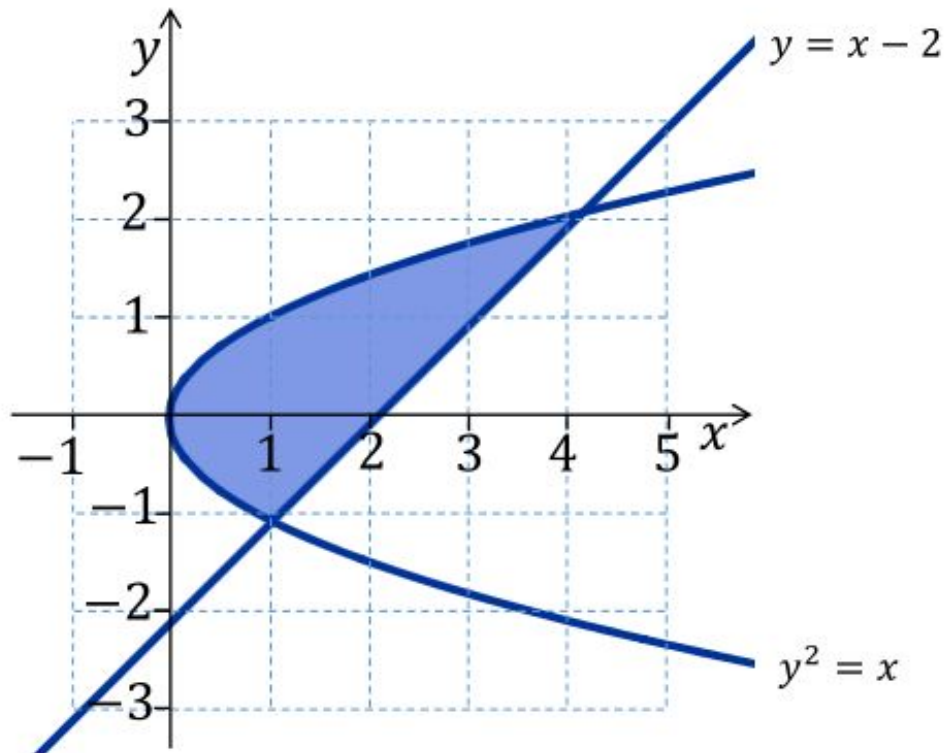




# Exercícios

1) Calcule a área entre as curvas dadas:

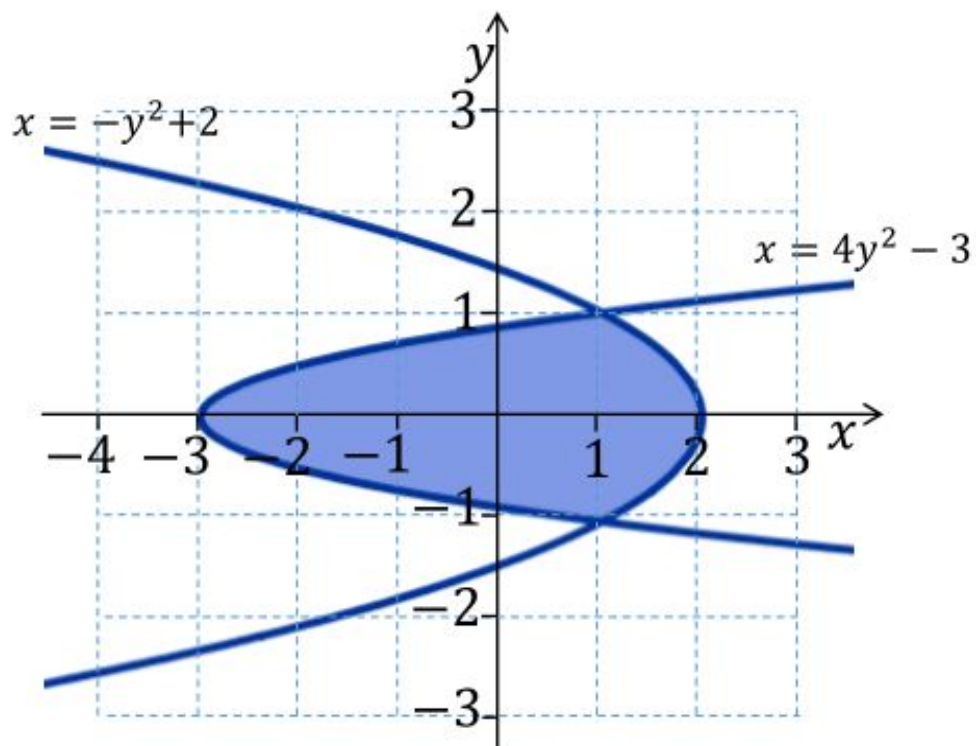
(c)  $y^2 = x$  e  $y = x - 2$



# Exercícios

1) Calcule a área entre as curvas dadas:

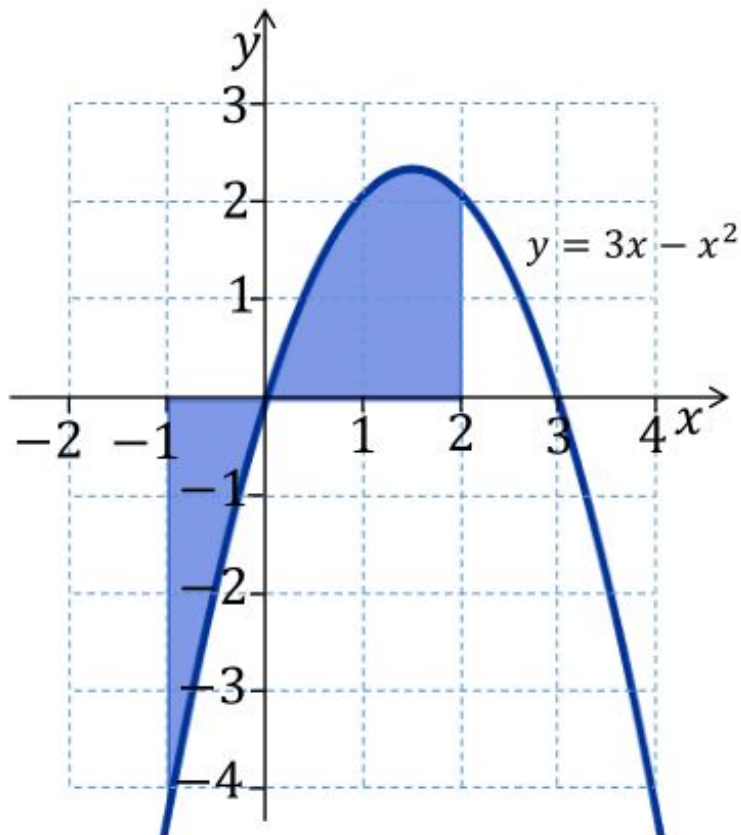
(d)  $y^2 = -x + 2$  e  $4y^2 = x + 3$



# Exercícios

1) Calcule a área entre as curvas dadas:

(e)  $y = 3x - x^2$ , eixo  $x$ ,  $x = -1$  e  $x = 2$



# Respostas



## Exercício 1:

$$\text{a) } A = \int_0^4 \left( 2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4} \right) dx = \frac{16}{3} \text{ u. a.}$$

$$\text{b) } A = \int_0^1 [e^x - 1 - (-x)] dx = e - \frac{3}{2} \text{ u. a.}$$

c) Podemos calcular a área de duas maneiras:

1) Integrando na variável  $x$

2) Integrando na variável  $y$

$$A = \int_0^1 [\sqrt{x} - (-\sqrt{x})] dx + \int_1^4 [\sqrt{x} - (x - 2)] dx = \frac{9}{2} \text{ u. a.} \quad A = \int_{-1}^2 [(y + 2) - y^2] dy = \frac{9}{2} \text{ u. a.}$$

$$\text{d) } A = \int_{-1}^1 [(-y^2 + 2) - (4y^2 - 3)] dy = \frac{20}{3} \text{ u. a.}$$

$$\text{e) } A = - \int_{-1}^0 (3x - x^2) dx + \int_0^2 (3x - x^2) dx = \frac{11}{6} + \frac{10}{3} = \frac{31}{6} \text{ u. a.}$$

# Comprimento de arco

**Definição:** Se  $f'$  for contínua em  $[a, b]$ , então o comprimento da curva  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , é:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx$$

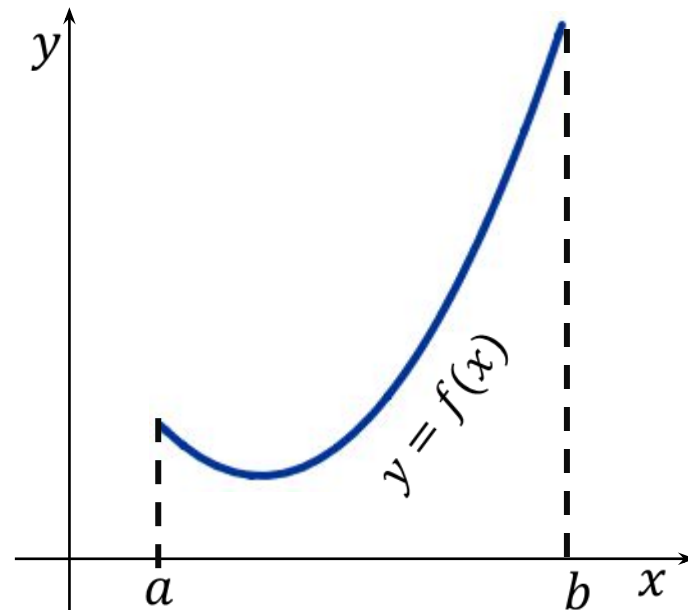
**Observação:** Em resumo, para calcular o comprimento de arco de uma curva, você deverá seguir os passos abaixo:

**1º passo:** derivar a função

**2º passo:** calcular  $1 + (f')^2$

**3º passo:** calcular a integral

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx$$



# Comprimento de arco

**Exemplo:** Encontre o comprimento da seguinte curva.

$$y = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + 2)^3} \quad 0 \leq x \leq 4$$

**Solução:**

**1º**

**passo:**

$$y = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + 2)^3} \Rightarrow y' = x\sqrt{x^2 + 2}$$

**2º**

**passo:**

$$\begin{aligned} 1 + (y')^2 &= 1 + \left(x\sqrt{x^2 + 2}\right)^2 = 1 + x^2(x^2 + 2) \\ &= x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2. \end{aligned}$$

**3º**

**passo:**

$$\begin{aligned} L &= \int_0^4 \sqrt{(x^2 + 1)^2} dx = \int_0^4 (x^2 + 1) dx = \left[ \frac{x^3}{3} + x \right]_0^4 \\ &= \frac{(4)^3}{3} + (4) = \frac{64 + 12}{3} = \frac{76}{3}. \end{aligned}$$

# Exercícios Propostos



# Exercícios

---



1) Encontre os comprimentos das seguintes curvas:

(a)  $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}, \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1$

(b)  $y = \ln(\sin x), \quad \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

(c)  $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad [0, 2]$

(d)  $y = x^{2/3}, \quad [1, 8]$



# Respostas



## Exercício 1:

a)  $Resp.: \frac{31}{48}$

b)  $Resp.: \ln \left( \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right)$

c)  $Resp.: \frac{1}{2} \left( e^2 - \frac{1}{e^2} \right)$

d)  $Resp.: \frac{80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}}{27}$

# Monitorias!!



## Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

<http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/>

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

[https://www.youtube.com/channel/UCB3NUeew6Ji\\_k39-\\_GDA3iQ/playlists](https://www.youtube.com/channel/UCB3NUeew6Ji_k39-_GDA3iQ/playlists)

O GAMA possui monitorias de:

- ☐ Pré-cálculo e Matemática Elementar (e disciplinas equivalentes)
  - ☐ ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
  - ☐ Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.



# Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino



## Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

# Integrais

2020/1

### Aula 05

Projeto

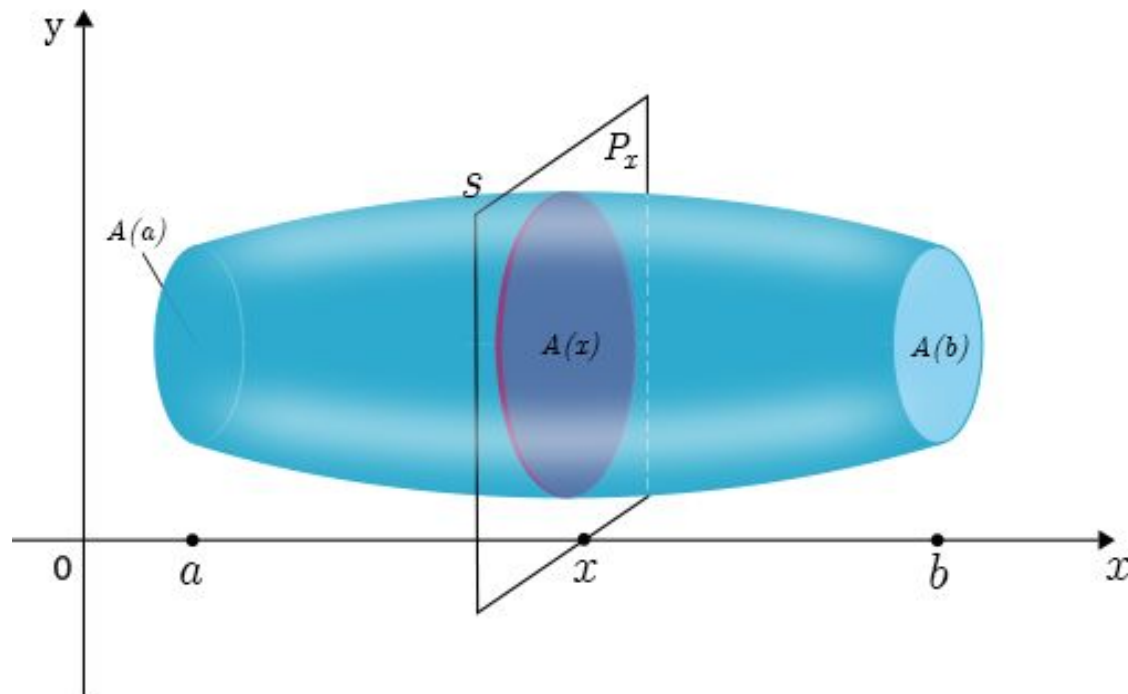
# GAMA

Grupo de Apoio em  
Matemática

# Volumes

**Definição:** Seja  $S$  um sólido que está entre  $x = a$  e  $x = b$ . Se a área da secção transversal de  $S$  no plano  $P_x$ , passando por  $x$  e perpendicular ao eixo  $x$ , é  $A(x)$ , onde  $A$  é uma função contínua, então o volume de  $S$  é

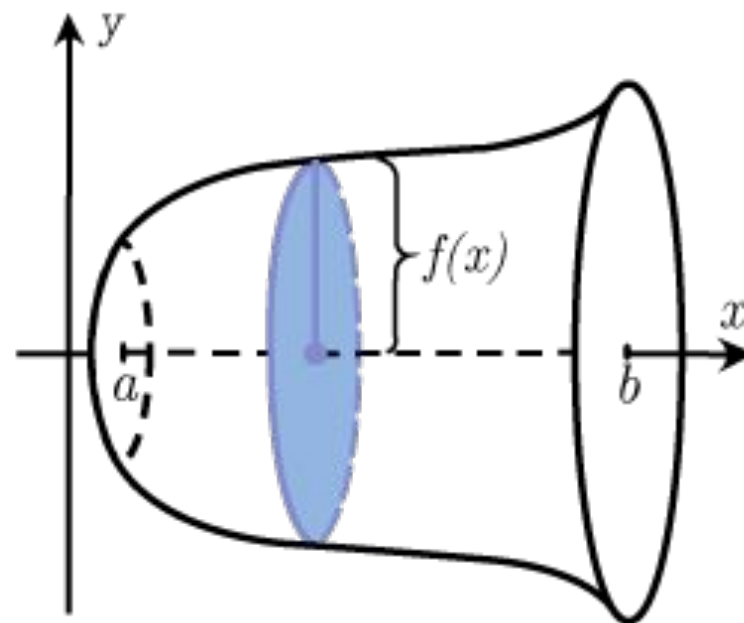
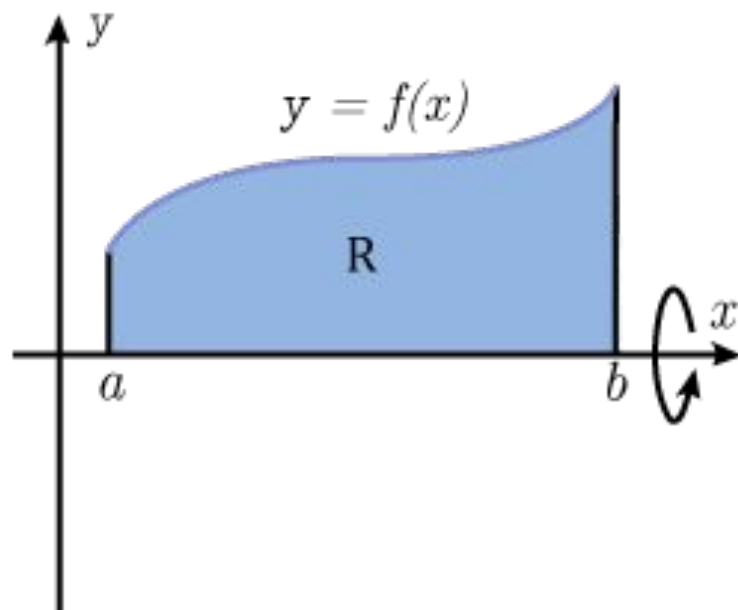
$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x_i^*) \Delta x = \int_a^b A(x) dx$$



# Método dos discos

**Definição:** Método dos discos é dado por

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

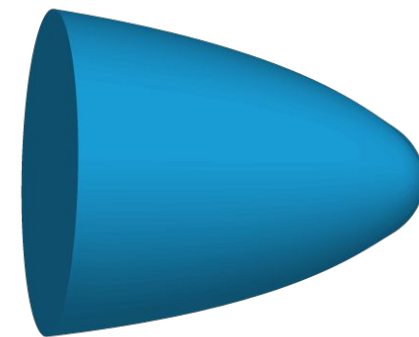
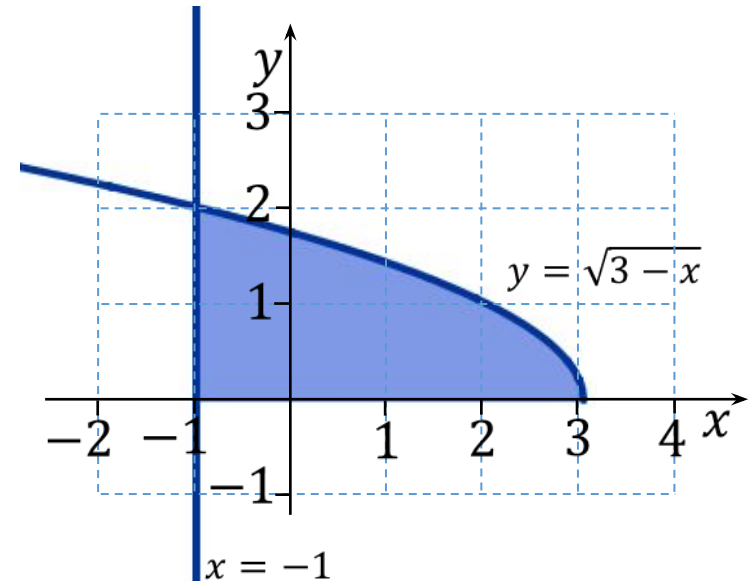


# Método dos discos

**Exemplo:** Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada por  $y = \sqrt{3-x}$  e  $x = -1$ , ao redor do eixo  $x$ .

**Solução:**

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{-1}^3 \pi [\sqrt{3-x}]^2 dx = \\
 &= \pi \int_{-1}^3 (3-x) dx = \pi \left[ 3x - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^3 \\
 &= \pi \left[ \left( 3(3) - \frac{(3)^2}{2} \right) - \left( 3(-1) - \frac{(-1)^2}{2} \right) \right] \\
 &= \pi \left[ \left( 9 - \frac{9}{2} \right) - \left( -3 - \frac{1}{2} \right) \right] = \\
 &= \pi \left[ \frac{9}{2} - \left( -\frac{7}{2} \right) \right] = \pi \left[ \frac{9}{2} + \frac{7}{2} \right] \\
 &= \frac{16}{2} \pi = 8\pi \text{ u. v.}
 \end{aligned}$$

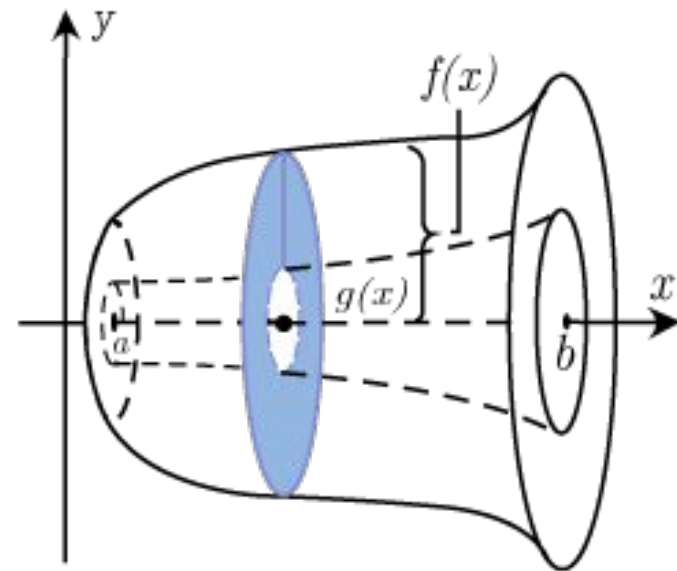
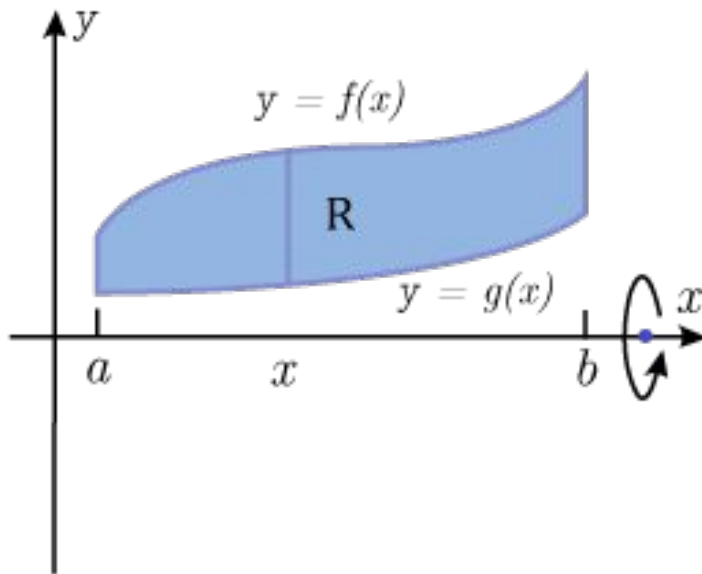


Sólido  
gerado

# Método do anel circular ou das arruelas

**Definição:** Método do anel ou arruelas é dado por

$$V = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2) dx$$

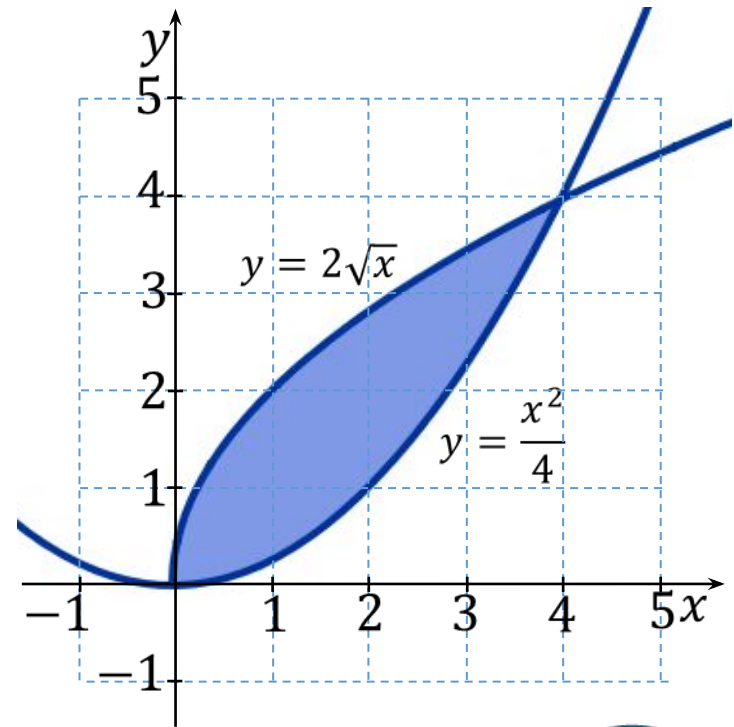


# Método do anel circular ou das arruelas

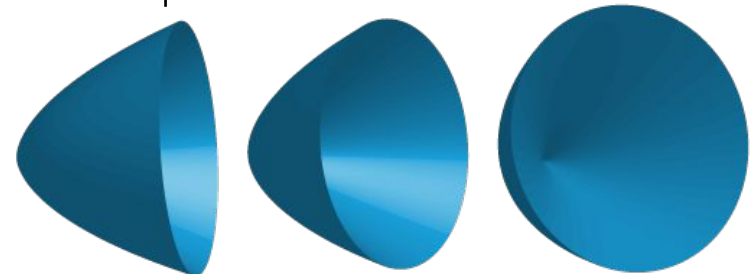
**Exemplo:** Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas  $y = 2\sqrt{x}$  e  $4y = x^2$  em torno do eixo  $x$ .

**Solução:**

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 \pi \left[ (2\sqrt{x})^2 - \left( \frac{x^2}{4} \right)^2 \right] dx \\ &= \pi \int_0^4 \left[ 4x - \frac{x^4}{16} \right] dx = \pi \left[ 4 \frac{x^2}{2} - \frac{1}{16} \frac{x^5}{5} \right]_0^4 \\ &= \pi \left[ 4 \frac{4^2}{2} - \frac{1}{16} \frac{4^5}{5} \right] = \pi \left[ 32 - \frac{64}{5} \right] \\ &= \pi \left[ \frac{160 - 64}{5} \right] = \frac{96}{5} \pi \text{ u. v.} \end{aligned}$$



Sólido  
gerado





# Método das cascas cilíndricas

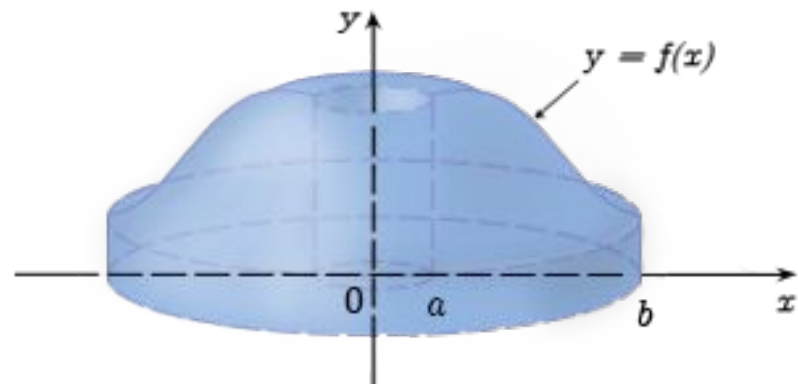
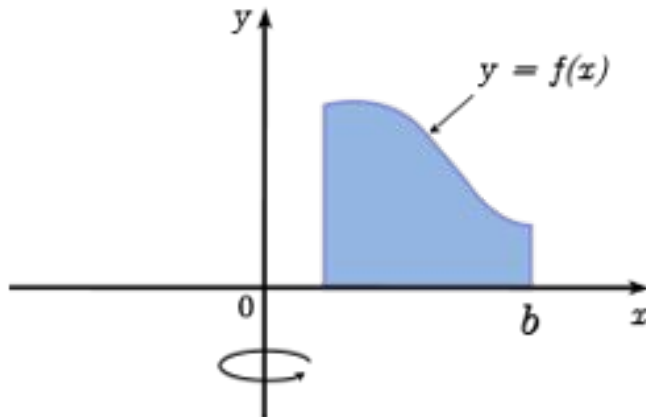
**Definição:** Método das cascas cilíndricas

Quando o eixo de revolução é o eixo  $y$  se integra em  $x$

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

Quando o eixo de revolução é o eixo  $x$  se integra em  $y$

$$V = \int_a^b 2\pi y f(y) dy$$

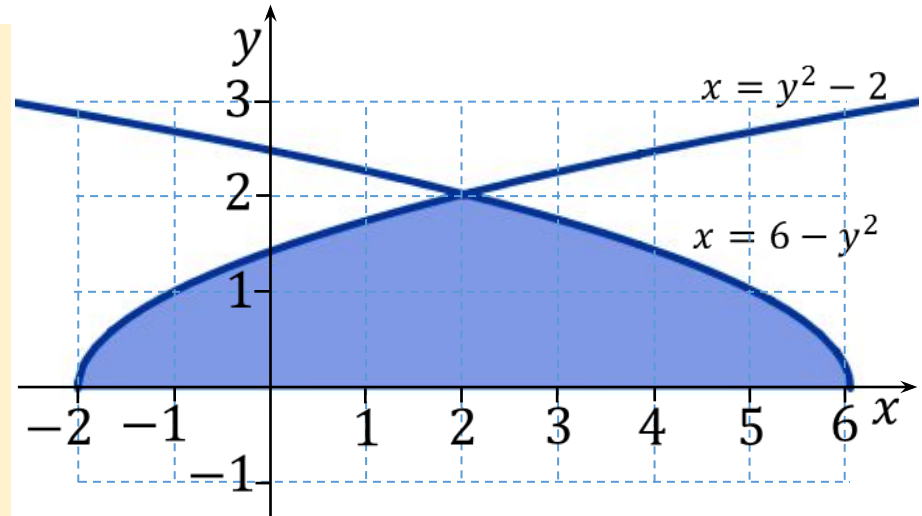


# Método das cascas cilíndricas

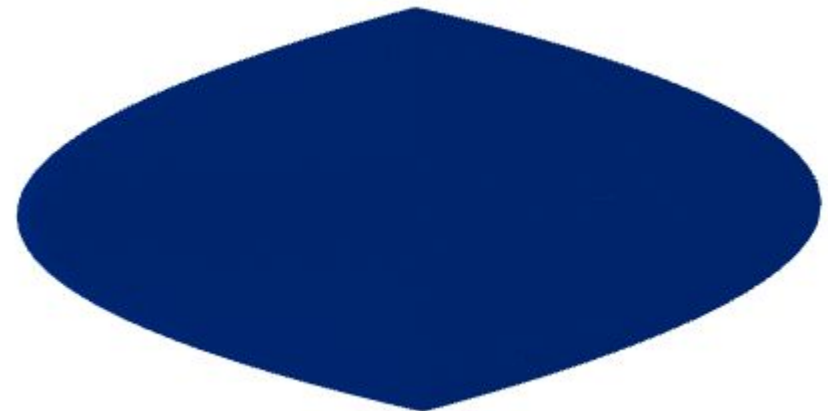
**Exemplo:** Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada por  $x = y^2 - 2$ ,  $x = 6 - y^2$  em torno do eixo  $x$ .

**Solução:**

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^2 2\pi y[(6 - y^2) - (y^2 - 2)]dy \\
 &= 2\pi \int_0^2 y[8 - 2y^2]dy \\
 &= 2\pi \int_0^2 (8y - 2y^3)dy \\
 &= 2\pi \left[ \frac{8y^2}{2} - \frac{2y^4}{4} \right]_0^2 \\
 &= 2\pi \left[ 4(2)^2 - \frac{2(2)^4}{4} \right] \\
 &= 2\pi[16 - 8] = 16\pi \text{ u. v.}
 \end{aligned}$$



Sólido gerado



# Exercícios Propostos



# Exercícios



1) Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas em torno dos eixos dados.

(a)  $y = e^x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = \ln 3$ , ao redor do eixo  $x$

b)  $y = \sqrt{x+2}$ ,  $y = 2\sqrt{x-1}$ ,  $y = 0$ , em torno do eixo  $x$

c)  $y = 2x - 1$ ,  $y = -2x + 3$ ,  $x = 2$ , em torno do eixo  $y$ .

d)  $y = 3x - x^3$ , eixo  $x$ ,  $x = 1$  em torno do eixo  $y$ .

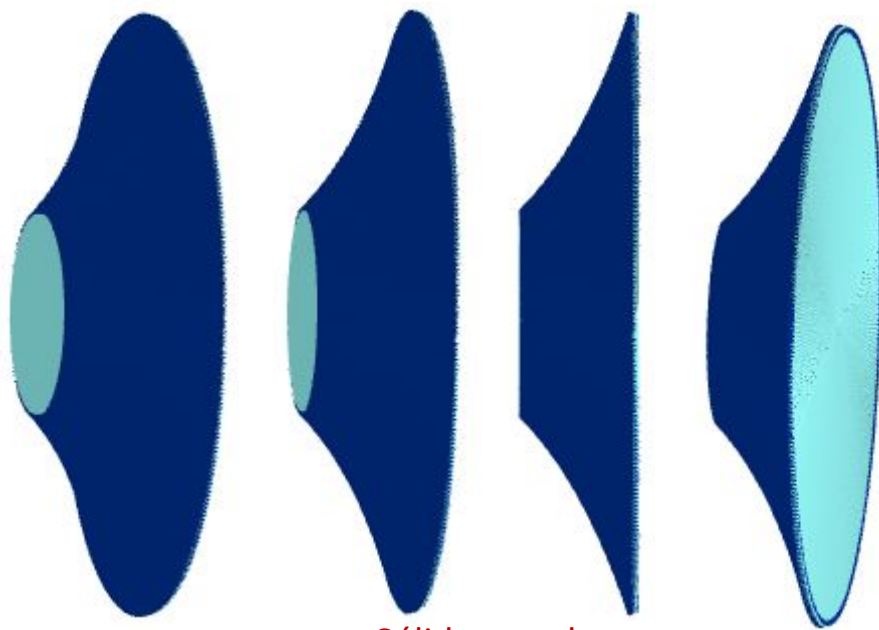
# Respostas

Exercício 1:

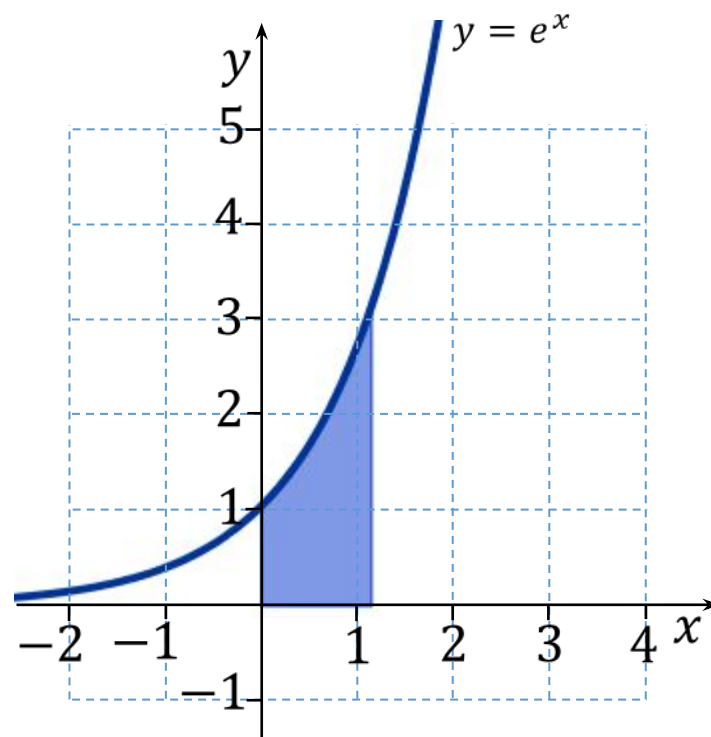
(a)  $y = e^x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = \ln 3$ , ao redor do eixo  $x$

Método dos discos

$$V = \int_0^{\ln 3} \pi [e^x]^2 dx = \pi \int_0^{\ln 3} e^{2x} dx = 4\pi u.v$$



Sólido gerado



# Respostas

## Exercício 1:

b)  $y = \sqrt{x+2}$ ,  $y = 2\sqrt{x-1}$ ,  $y = 0$ , em torno do eixo  $x$

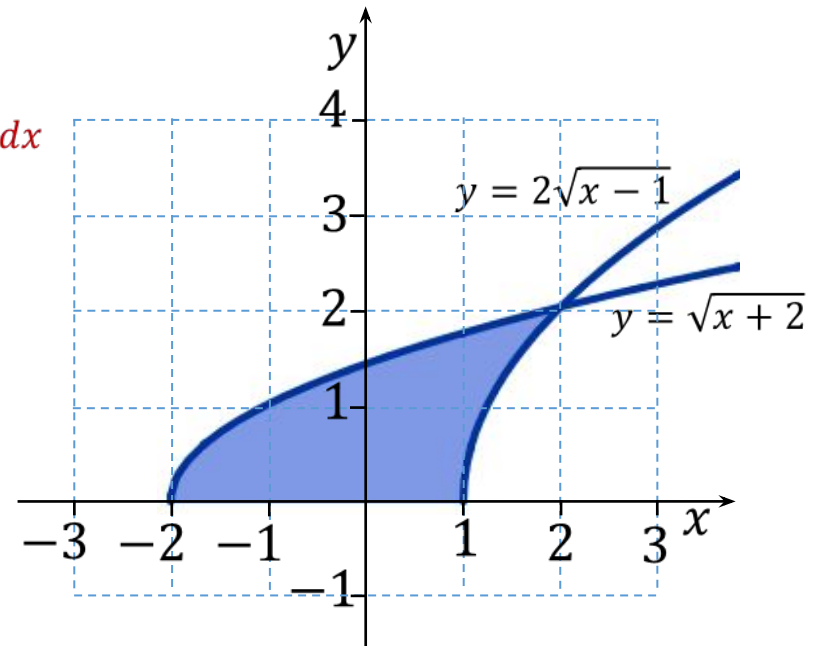
Método dos discos

$$V = \int_{-2}^1 \pi [\sqrt{x+2}]^2 dx + \int_1^2 \pi [(\sqrt{x+2})^2 - (2\sqrt{x-1})^2] dx$$

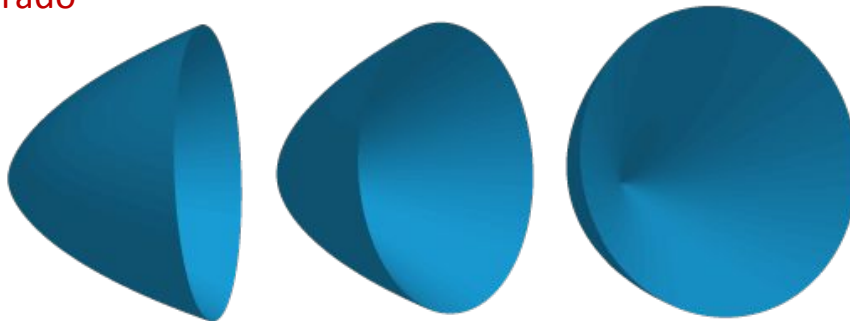
$$= \frac{9\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 6\pi \text{ u.v.}$$

Método das cascas cilíndricas

$$V = \int_0^2 2\pi y \left[ \left( \frac{y^2}{4} + 1 \right) - (y^2 - 2) \right] dy = 6\pi \text{ u.v.}$$



Sólido gerado



# Respostas

Exercício 1:

c)  $y = 2x - 1$ ,  $y = -2x + 3$ ,  $x = 2$ , em torno do eixo  $y$ .

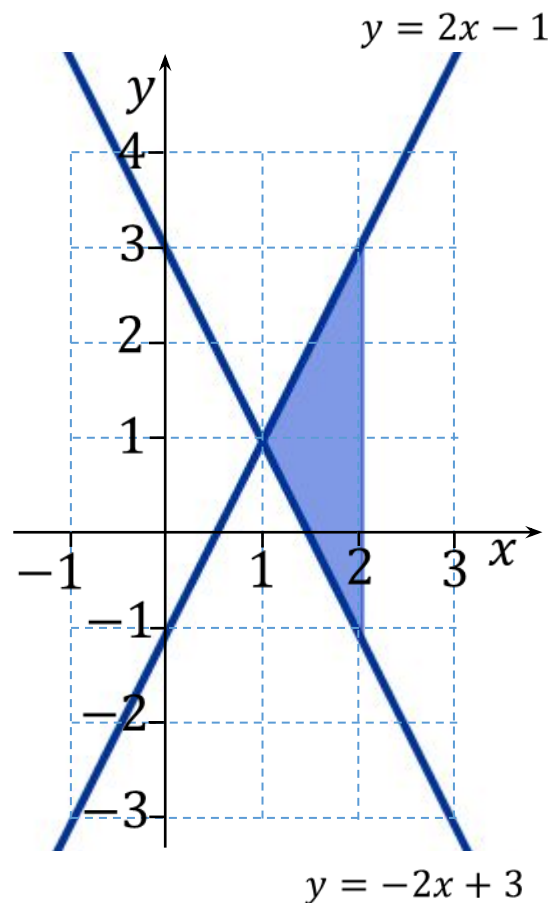
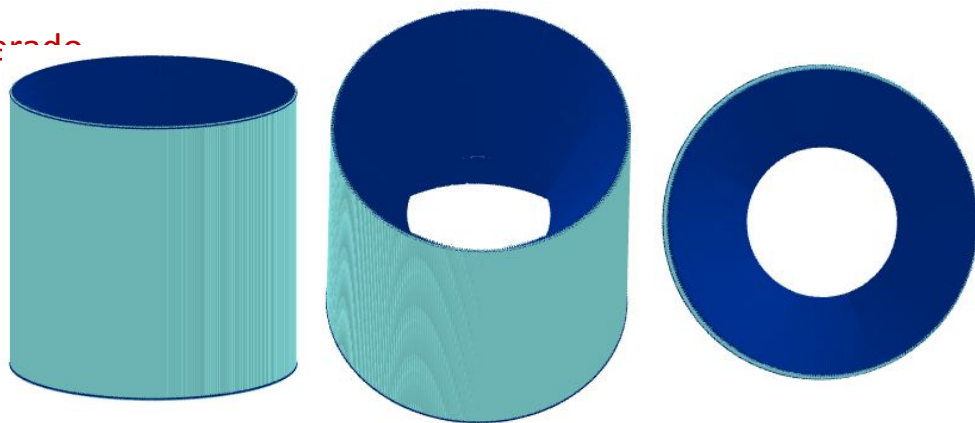
Método das arruelas

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^1 \pi \left[ (2)^2 - \left( \frac{3-y}{2} \right)^2 \right] dy + \int_1^3 \pi \left[ (2)^2 - \left( \frac{y+1}{2} \right)^2 \right] dy \\ &= \frac{10\pi}{3} + \frac{10\pi}{3} = \frac{20\pi}{3} u. v. \end{aligned}$$

Método das cascas cilíndricas

$$V = \int_1^2 2\pi x [(2x - 1) - (-2x + 3)] dx = \frac{20\pi}{3} u. v.$$

Sólido gerado



# Respostas

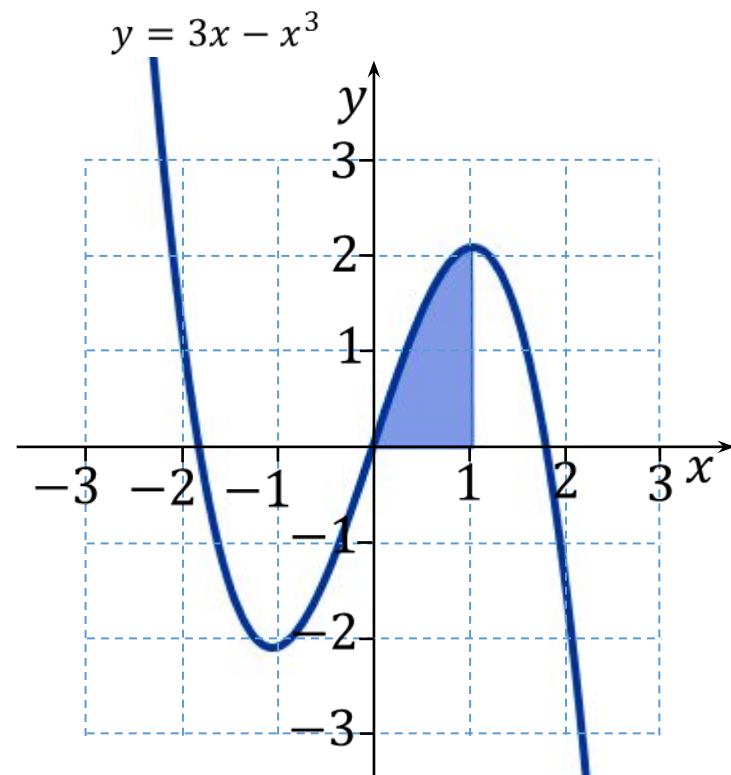
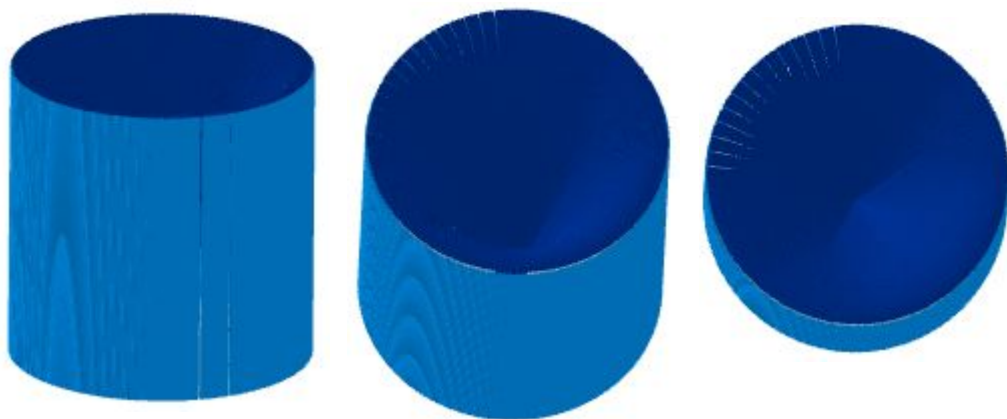
## Exercício 1:

d)  $y = 3x - x^3$ , eixo  $x$ ,  $x = 1$  em torno do eixo  $y$ .

Método das cascas cilíndricas

$$V = \int_0^1 2\pi x(3x - x^3) dx = \frac{8\pi}{5} u.v.$$

Sólido gerado





# Monitorias!!



## Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

<http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/>

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

[https://www.youtube.com/channel/UCB3NUeew6Ji\\_k39-\\_GDA3iQ/playlists](https://www.youtube.com/channel/UCB3NUeew6Ji_k39-_GDA3iQ/playlists)

O GAMA possui monitorias de:

- ☐ Pré-cálculo e Matemática Elementar (e disciplinas equivalentes)
  - ☐ ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
  - ☐ Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.



# Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino



## Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

# Integrais

2020/1

### Aula 06

Projeto

# GAMA

Grupo de Apoio em  
Matemática

# Integrais por substituição trigonométrica

As substituições trigonométricas podem servir para transformar integrais que envolvam

$$\sqrt{a^2 + x^2}$$

$$\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\sqrt{x^2 - a^2}$$

em integrais que podem ser calculadas diretamente.

As substituições mais comuns são:

$$x = a \operatorname{tg} \theta$$

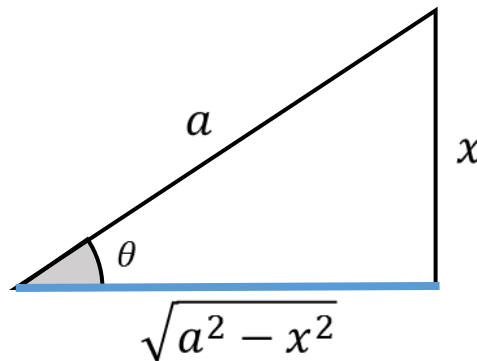
$$x = a \operatorname{sen} \theta$$

$$x = a \operatorname{sec} \theta$$

Podemos visualizar geometricamente como podem ser feitas essas substituições básicas, a partir de triângulos retângulos. Vejamos os casos a seguir.

# Integrais por substituição trigonométrica

Caso 1.  $\sqrt{a^2 - x^2}$



Para as variáveis apresentadas, sabemos que

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{x}{a}$$

logo,

$$x = a \operatorname{sen} \theta$$

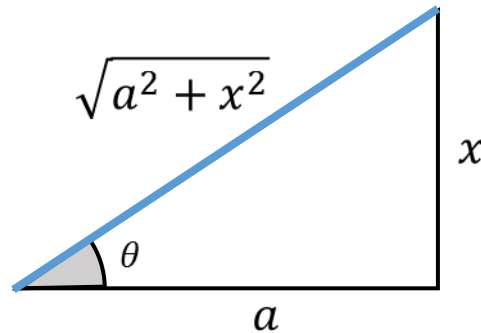
Para  $x = a \operatorname{sen} \theta$ , temos:

$$\begin{aligned} a^2 - x^2 &= a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta \\ &= a^2 (1 - \operatorname{sen}^2 \theta) \\ &= a^2 \cos^2 \theta \end{aligned}$$

$$\text{Então, } \sqrt{a^2 - x^2} = a |\cos \theta|.$$

# Integrais por substituição trigonométrica

Caso 2.  $\sqrt{a^2 + x^2}$



Para as variáveis apresentadas, sabemos que

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{x}{a}$$

logo,

$$x = a \operatorname{tg} \theta$$

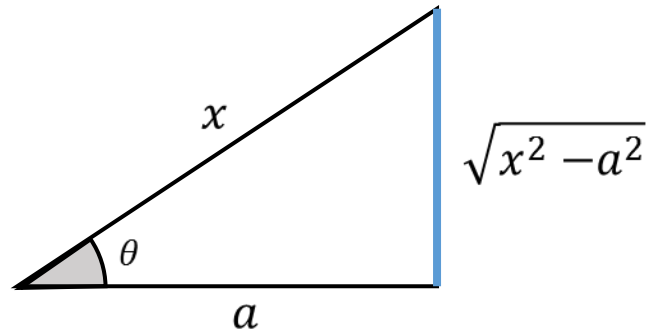
Para  $x = a \operatorname{tg} \theta$ , temos:

$$\begin{aligned} a^2 + x^2 &= a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \theta \\ &= a^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \theta) \\ &= a^2 \sec^2 \theta \end{aligned}$$

$$\text{Então, } \sqrt{a^2 + x^2} = a |\sec \theta|.$$

# Integrais por substituição trigonométrica

Caso 3.  $\sqrt{x^2 - a^2}$



Para as variáveis apresentadas, sabemos que

$$\sec \theta = \frac{x}{a}$$

logo,

$$x = a \sec \theta$$

Para  $x = a \sec \theta$ , temos:

$$\begin{aligned} x^2 - a^2 &= a^2 \sec^2 \theta - a^2 \\ &= a^2 (\sec^2 \theta - 1) \\ &= a^2 \operatorname{tg}^2 \theta \end{aligned}$$

$$\text{Então, } \sqrt{x^2 - a^2} = a |\operatorname{tg} \theta|.$$

# Substituição trigonométrica

**Exemplo 1:** Calcule

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}}$$

**Solução:** para eliminar o radical, fazemos a substituição

$$x = 2 \operatorname{sen} \theta$$

$$dx = 2 \cos \theta \, d\theta$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}} = \int \frac{2 \cos \theta \, d\theta}{(2 \operatorname{sen} \theta)^2 \sqrt{4 - 4 \operatorname{sen}^2 \theta}}$$

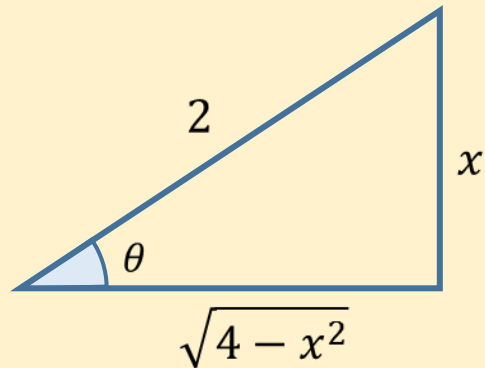
$$= \int \frac{2 \cos \theta \, d\theta}{(2 \operatorname{sen} \theta)^2 (2 \cos \theta)} = \frac{1}{4} \int \frac{d\theta}{\operatorname{sen}^2 \theta}$$

$$= \frac{1}{4} \int \operatorname{cosec}^2 \theta \, d\theta = -\frac{1}{4} \cot g \theta + C$$

Devemos expressar  $\cot g \theta$  em termos de  $x$ . Para isso substituímos  $x = 2 \operatorname{sen} \theta$  como  $\operatorname{sen} \theta = x/2$

# Substituição trigonométrica

Representando esses valores geometricamente



$$x = 2 \operatorname{sen} \theta$$

obtemos:

$$\cot g \theta = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x}$$

e, fazendo as devidas substituições

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}} = -\frac{1}{4} \cot g \theta + C = -\frac{1}{4} \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x} + C$$

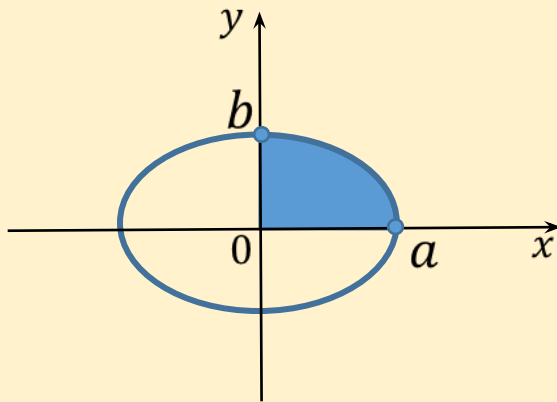


# Substituição trigonométrica

**Exemplo 2:** Encontre a área da elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Solução: a elipse é simétrica em torno dos eixos, logo sua área é 4 vezes a área do primeiro quadrante.



Resolvendo a equação da elipse em termos de  $x$ :

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Assim, a área é dada por:

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \end{aligned}$$

Fazendo a substituição

$$x = a \sen \theta$$

$$dx = a \cos \theta d\theta$$

# Substituição trigonométrica

Convertendo os limites de integração em  $x$  para os limites de integração em  $\theta$ :

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \arcsen(0) = 0$$

$$x = a \quad \Rightarrow \quad \theta = \arcsen(1) = \frac{\pi}{2}$$

Obtemos:

$$\begin{aligned} A &= \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{4b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos \theta \cdot a \cos \theta \, d\theta \\ &= 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \, d\theta \\ &= 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) \, d\theta \\ &= 2ab \left[ \theta + \frac{1}{2} \sen 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2ab \left[ \frac{\pi}{2} - 0 \right] = \pi ab \end{aligned}$$

# Substituição trigonométrica

Exemplo 3: Calcule  $\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x} dx$ , supondo que  $x \geq 5$ .

**Solução:** fazendo a substituição

$$x = 5 \sec \theta, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$$

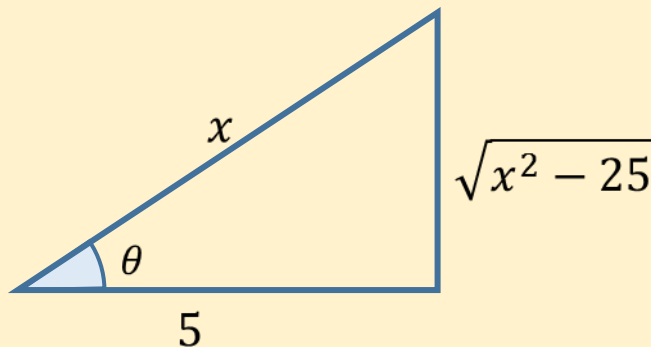
$$dx = 5 \sec \theta \operatorname{tg} \theta d\theta$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x} dx &= \int \frac{\sqrt{25 \sec^2 \theta - 25}}{5 \sec \theta} (5 \sec \theta \operatorname{tg} \theta) d\theta \\ &= \int \frac{5 |\operatorname{tg} \theta|}{5 \sec \theta} (5 \sec \theta \operatorname{tg} \theta) d\theta \\ &= 5 \int \operatorname{tg}^2 \theta d\theta \\ &= 5 \int (\sec^2 \theta - 1) d\theta = 5 \operatorname{tg} \theta - 5 \theta + C \end{aligned}$$

# Substituição trigonométrica

Para expressar a solução em termos de  $x$ , vamos representar geometricamente



$$x = 5 \sec \theta$$

$$\theta = \arcsin \left( \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x} \right)$$

O que nos dá

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{5}$$

Disso, obtemos:

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x} dx = \sqrt{x^2 - 25} - 5 \arcsin \left( \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x} \right) + C$$

# Integrais envolvendo $ax^2 + bx + c$

Integrais envolvendo polinômios também podem ser calculadas a partir deste método, primeiro completando os quadrados e, depois, fazendo uma substituição apropriada. Veja o exemplo:

**Exemplo 4 :** Calcule

$$\int \frac{x}{x^2 - 4x + 8} dx$$

**Solução:** completando os quadrados, temos

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 8 &= (x^2 - 4x + 8) + 4 - 4 \\ &= (x - 2)^2 + 4 \end{aligned}$$

A substituição  $u = x - 2$ ,  $du = dx$ , fornece

$$\int \frac{x}{x^2 - 4x + 8} = \int \frac{x}{(x - 2)^2 + 4} dx = \int \frac{u + 2}{u^2 + 4} du$$

# Integrais envolvendo $ax^2 + bx + c$

**Solução:**

$$= \int \frac{u}{u^2 + 4} du + 2 \int \frac{du}{u^2 + 4} = \frac{1}{2} \int \frac{2u}{u^2 + 4} du + 2 \int \frac{du}{u^2 + 4}$$

$$= \frac{1}{2} \ln(u^2 + 4) + 2 \left( \frac{1}{2} \right) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{u}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln[(x - 2)^2 + 4] + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{x - 2}{2} \right) + C$$

# Tabela Resumo

Em resumo, as três substituições básicas estão apresentadas na tabela abaixo, bem como os valores de  $\theta$  que satisfazem a reversibilidade das funções.

*EXPRESSÃO NO  
INTEGRANDO*

*SUBSTITUIÇÃO*

*SIMPLIFICAÇÃO*

$$\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$x = a \operatorname{sen} \theta$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$a^2 - x^2 = a^2 \cos^2 \theta$$

$$\sqrt{a^2 + x^2}$$

$$x = a \operatorname{tg} \theta$$

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$a^2 + x^2 = a^2 \sec^2 \theta$$

$$\sqrt{x^2 - a^2}$$

$$x = a \sec \theta$$

$$\begin{cases} 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} & (\text{se } x \geq a) \\ \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi & (\text{se } x \leq -a) \end{cases}$$

$$x^2 - a^2 = a^2 \operatorname{tg}^2 \theta$$

# Exercícios Propostos





# Exercícios



1) Calcule as seguintes integrais fazendo as devidas substituições

$$(a) \int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$$

$$(b) \int \sqrt{1-4x^2} \, dx$$

$$(c) \int_{-2}^2 \frac{dx}{4+x^2}$$

$$(d) \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} \, dx$$

$$(e) \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-2x^2}}$$

# Respostas



Exercício 1:

$$(a) \ln\left(\frac{1}{3}|x + \sqrt{x^2 + 9}|\right) + C$$

$$(b) \frac{1}{4}\left[\arcsin(2x) + 2x\sqrt{1 - 4x^2}\right] + C$$

$$(c) \frac{\pi}{4}$$

$$(d) \frac{\pi}{6}$$

$$(e) \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arcsin\sqrt{\frac{2}{7}}(x + 1)\right] + C$$

# Monitorias!!



## Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

<http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/>

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

[https://www.youtube.com/channel/UCB3NUeew6Ji\\_k39-\\_GDA3iQ/playlists](https://www.youtube.com/channel/UCB3NUeew6Ji_k39-_GDA3iQ/playlists)

O GAMA possui monitorias de:

- ☐ Pré-cálculo e Matemática Elementar (e disciplinas equivalentes)
  - ☐ ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
  - ☐ Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.