Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino

Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

Derivadas

2020/1

Aula 01

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

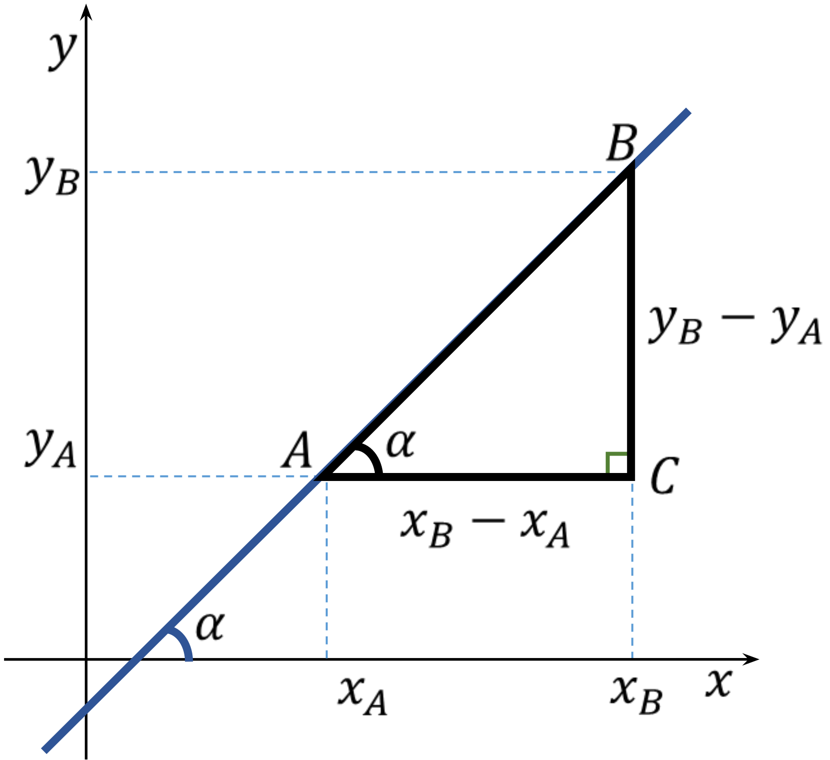
Equação da reta

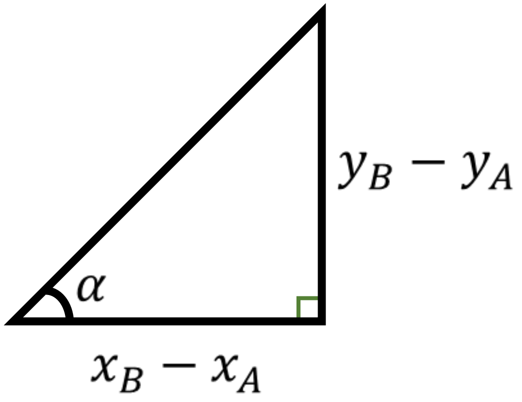
Lembre que a fórmula para o coeficiente angular ou inclinação da reta que contém os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ é dada por:

$$m = \tan\alpha$$

Ou ainda:

$$m = \tan\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$





A equação da reta que possui coeficiente m e que contém o ponto $A(x_A, y_A)$ é dada por:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

Equação da reta

Exemplo: Encontre a equação da reta que contém os pontos A$(2,1)$ e B$(5,3)$.

Solução: Determinando o coeficiente angular (inclinação) da reta, temos:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-1}{5-2} = \frac{2}{3}$$

Determinando a equação da reta:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

$$y - 1 = \frac{2}{3}(x - 2)$$

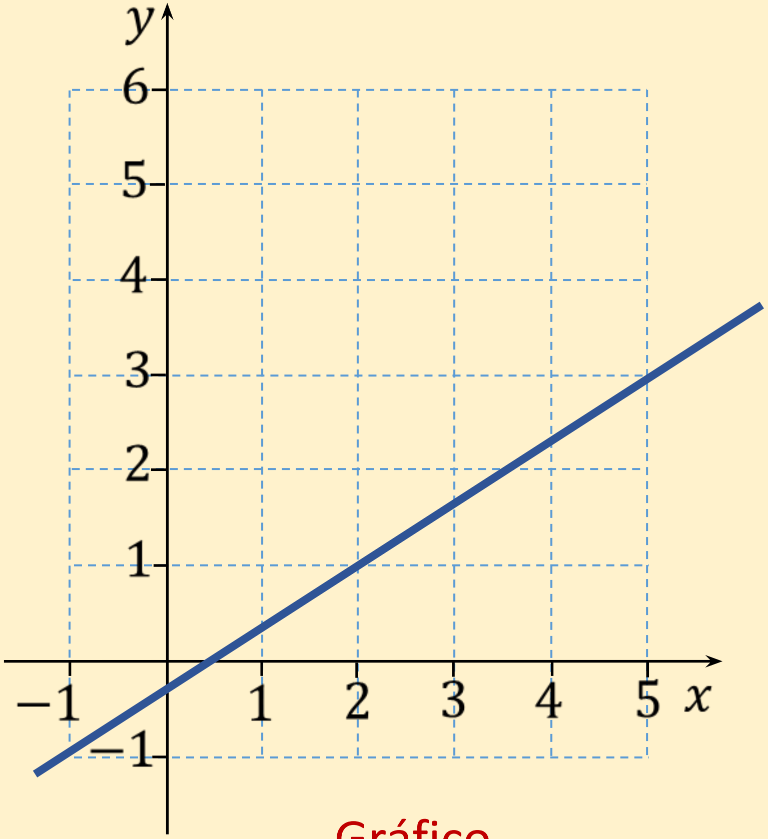
Portanto:

$$2x - 3y - 1 = 0$$

Equação geral

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

Equação reduzida



Gráfico

Reta tangente

Considere uma reta secante à curva $y = f(x)$ nos pontos $A(a, f(a))$ e $P(x, y)$, isto é, a reta intercepta a curva nos pontos A e P.

Ao aproximarmos os pontos A e P, isto é, fazendo

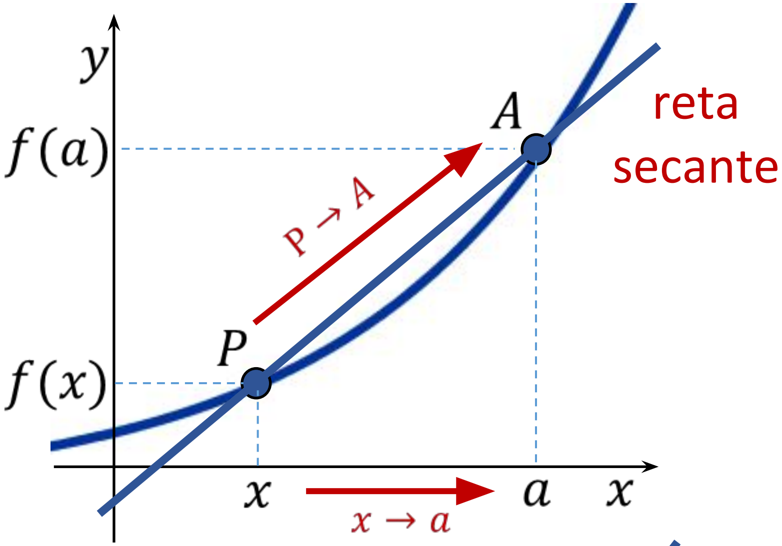
$$P \to A$$

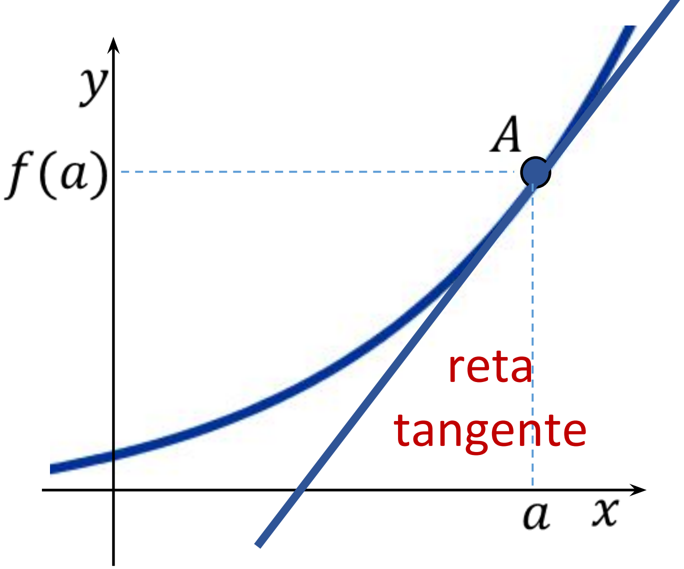
ou, equivalentemente,

$$x \to a$$

teremos, na situação limite, uma reta tangente a curva $y = f(x)$ no ponto fixado $A(a, f(a))$.

Isto é, uma reta que apenas tangencia a curva dada no ponto fixado A.





Inclinação da reta tangente

Pergunta: Qual o valor do coeficiente angular (inclinação) da reta tangente ao gráfico da função f passando pelo ponto $A(a, f(a))$?

Note que a inclinação m da reta tangente é obtida fazendo o limite, para $x \longrightarrow a$, da inclinação m_{PA} da reta secante.

$$m_{PA} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Inclinação da reta secante

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Inclinação da reta tangente

Resposta: A inclinação da reta tangente é dada por

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

desde que este limite exista.

Inclinação da reta tangente

Definição: A **reta tangente** à uma curva $y = f(x)$ em um ponto $A(a, f(a))$ é a reta que contém o ponto A e tem inclinação

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

(desde que este limite exista).

Observação: Fazendo a substituição

$$h = x - a$$

no limite acima, temos que $x = a + h$ e como $x \to a$ temos $h \to 0$.

Podemos então reescrever m como:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Equação reta tangente

Exemplo: (a) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função

$$f(x) = x^2 + 1$$

no ponto $A(1,2)$.

(b) Esboce, no mesmo plano cartesiano, os gráficos de f e da reta tangente.

Solução: Calculando a inclinação desta reta, teremos:

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[(1+h)^2 + 1] - [(1)^2 + 1]}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{[1 + 2h + h^2 + 1] - 2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 2h}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{h(h+2)}{h} = \lim_{h\to 0} (h+2) = 2.$$

Portanto, a equação da reta tangente será dada por:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

$$y - 2 = 2(x - 1)$$

$$y - 2x = 0$$

$$y = 2x$$

Equação reta tangente

Exemplo: (a) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função

$$f(x) = x^2 + 1$$

no ponto $A(1,2)$.

(b) Esboce, no mesmo plano cartesiano, os gráficos de f e da reta tangente.

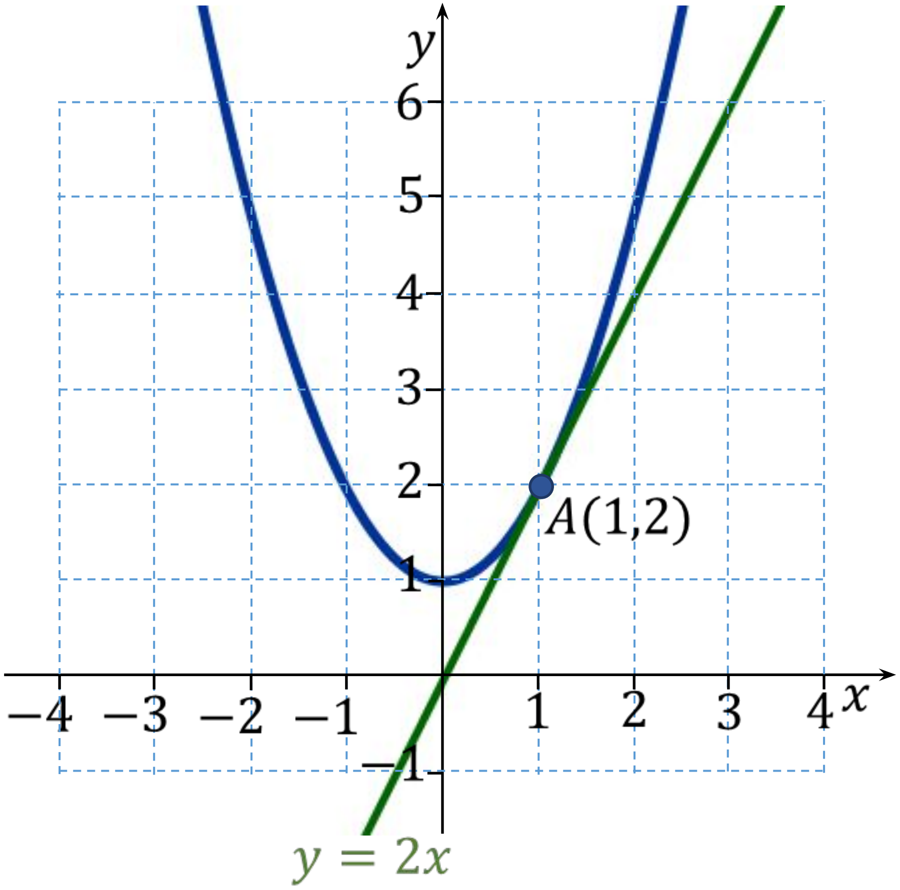
Solução: Esboçando, no mesmo plano cartesiano, os gráficos da função

$$f(x) = x^2 + 1$$

e da equação da reta tangente

$$y = 2x$$

ao gráfico de f no ponto $A(1,2)$, obtém-se os gráficos ao lado.



Definição de derivada

Definição: A derivada de uma função $y = f(x)$ em um número a denotada por $f'(a)$, é dada por

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

(desde que este limite exista).

Se o limite acima existe, se diz que a f é derivável no número a.
Do contrário, se diz que f é não derivável em a.

Uma forma equivalente de denotar a derivada seria:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Portanto, a equação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $A(a, f(a))$ pode ser escrita como

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Definição de derivada

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

calcule $f'(1)$.

Solução: Calculando a derivada pela definição temos

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{1+h}-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1-1-h}{1+h}}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{-h}{1+h}\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{1+h} = -1$$

Portanto,

$$f'(1) = -1$$

Definição de derivada

Observação: Uma função f não possui derivada nos pontos onde não existe o limite (bilateral):

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Isto ocorre geralmente quando uma das situações a seguir ocorrem:

(a) A função f não está definida em $x = a$, isto é, $f(a)$ não existe;

(b) O limite acima é infinito.

Neste caso, teríamos uma "reta tangente vertical" em $x = a$.

(c) Os limites laterais

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

não existem ou são diferentes entre si.

Definição de derivada

Definição: A **derivada de uma função** $y = f(x)$, denotada por f', é a função que associa a cada $x \in D(f)$ o número

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(desde que este limite exista).

Notações: Outras notações para a derivada de uma função $y = f(x)$ em um número x são:

$$f' \qquad y' \qquad D_x(f) \qquad \frac{dy}{dx} \qquad \frac{df}{dx}$$

Notação: A notação

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$$

também pode ser utilizada para denotar $f'(a)$.

Exercícios Propostos

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Exercícios

1) Calcule as derivadas pela definição:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

(b) $f(x) = 3x^2 - 8x + 5$

(c) $f(x) = \sqrt{x}$

2) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2 - 8x + 9$ no ponto $P(2, -3)$.

Obs.: Utilize o limite para encontrar a inclinação da reta!!

3) Esboce o gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}$ e a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1,1)$.

Obs.: Utilize o limite para encontrar a inclinação da reta tangente!!

Exercícios

4) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$ no ponto $x = -1$.

Obs.: Utilize o limite para encontrar a inclinação da reta!!

5) Calcule a derivada da função $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ utilizado a definição de derivada (pelo limite).

6) Esboce o gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 4$ e a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(3,1)$.

Obs.: Utilize o limite para encontrar a inclinação da reta tangente!!

Respostas.

Exercício 1:

a) $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$

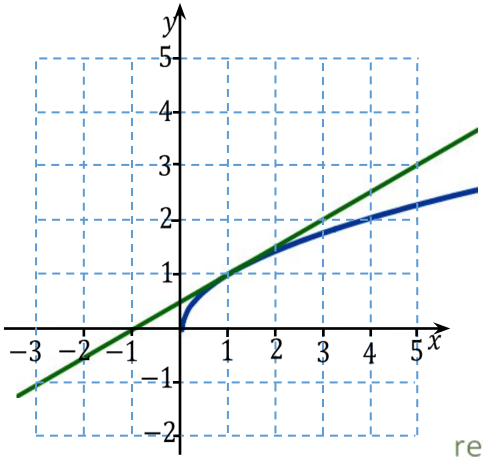
b) $f'(x) = 6x - 8$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Exercício 2:

$y = -4x + 5$

Exercício 3:



$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1,1)$.

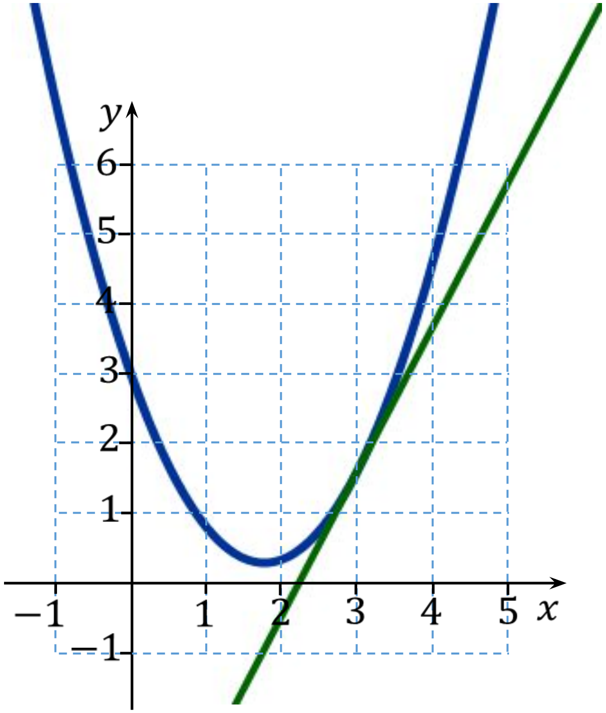
Exercício 4:

$y = 12x + 9$

Exercício 5:

$$f'(x) = \frac{2}{x^2 + 2x + 1}$$

Exercício 6:



$$y = 2x - 5$$

reta tangente ao gráfico de f no ponto $(3,1)$.

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

https://www.youtube.com/channel/UCB3NUeew6Ji_k39-_GDA3iQ/playlists

O GAMA possui monitorias de:

- ☐ **Pré-cálculo e Matemática Elementar** (e disciplinas equivalentes)
  - ☐ **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
    - ☐ **Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino

Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

Derivadas

2020/1

Aula 02

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Regras de derivação

Nesta aula, estudaremos algumas regras de derivação.

Derivada da constante: A derivada de uma função constante $f(x) = c$, onde c é qualquer número real, é igual a zero, ou seja,

$$[c]' = 0$$

De fato, sendo f uma função constante, digamos $f(x) = c$, teremos:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

Exemplo: Calcule a derivada das funções:

(a) $f(x) = 5$

(b) $f(x) = \sqrt{2+\pi}$

(c) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{e} - e}{\ln \pi}$

Solução: Como todas as funções são constantes, tem-se

(a) $f'(x) = (5)' = 0$

(b) $f'(x) = \left(\sqrt{2+\pi}\right)' = 0$

(c) $f'(x) = \left(\dfrac{\sqrt[3]{e} - e}{\ln \pi}\right)' = 0$

Regras de derivação

Derivada da potência: A derivada da função $f(x) = x^n$ é dada por

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

para todo n real.

Exemplo: Calcule a derivada das funções:

(a) $f(x) = x^8$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x^6}$ (c) $f(x) = \sqrt[4]{x}$

Solução: (a) Como $n = 8$, temos:

$$f'(x) = (x^8)' = 8x^{(8-1)} = 8x^7$$

(b) Como podemos reescrever a função como $f(x) = x^{-6}$, temos:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^6}\right)' = (x^{-6})' = -6x^{(-6-1)} = -6x^{-7} = -\frac{6}{x^7}$$

(c) Reescrevendo a função como $f(x) = x^{1/4}$, temos:

$$f'(x) = (\sqrt[4]{x})' = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4}x^{\left(\frac{1}{4}-1\right)} = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

Regras de derivação

Derivada do Múltiplo Constante: Se k é uma constante e u for uma função derivável, então

$$[ku]' = k[u]'$$

Isto é, a derivada do produto de uma constante por uma função é igual ao produto da constante pela derivada da função.

Exemplo: Calcule a derivada das funções:

(a) $f(x) = 6x^8$ (b) $f(x) = \frac{5}{x^6}$ (c) $f(x) = -4\sqrt[3]{x}$

Solução: (a)

$$f'(x) = (6x^8)' = 6(x^8)' = 6(8)x^7 = 48x^7$$

(b) $$f'(x) = \left(\frac{5}{x^6}\right)' = 5\left(\frac{1}{x^6}\right)' = 5(x^{-6})' = 5(-6)x^{-7} = -\frac{30}{x^7}$$

(c) $$f'(x) = (-4\sqrt[3]{x})' = -4\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = -4\left(\frac{1}{3}\right)x^{\frac{1}{3}-1} = -\frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} = -\frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Regras de derivação

Derivada da Soma/diferença: Sejam u e v funções deriváveis, então

$$[u \pm v]' = u' \pm v'$$

Isto é, a derivada da soma/diferença é igual a soma/diferença das derivadas.

Exemplo: Calcule a derivada das funções:

(a) $f(x) = 6x^8 + 9x^2$ (b) $f(x) = \frac{5}{x^6} - 9\sqrt[3]{x^4} - 20x + 5$

Solução:

(a) $f'(x) = (6x^8 + 9x^2)' = (6x^8)' + (9x^2)' = 48x^7 + 18x.$

(b)

$$f'(x) = \left(\frac{5}{x^6} - 9\sqrt[3]{x^4} - 20x + 5\right)' = (5x^{-6})' - \left(9x^{\frac{4}{3}}\right)' - (20x)' + (5)'$$

$$= 5(-6)x^{-7} - 9\left(\frac{4}{3}\right)x^{\frac{1}{3}} - 20 = -30x^{-7} - 12x^{\frac{1}{3}} - 20.$$

Regras de derivação

Derivada do produto: Sejam u e v funções deriváveis, então

$$[u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Isto é, a derivada do produto de duas funções é igual a derivada da primeira vezes a segunda mais a primeira vezes a derivada da segunda.

Exemplo: Calcule a derivada das funções:

(a) $f(x) = (x^2 - 2)(2x^5 + 4)$ (b) $f(x) = (x^4 - 3x)\left(\sqrt[5]{x^7} - 100\right)$

Solução: (a)

$$f'(x) = [(x^2 - 2)(2x^5 + 4)]' = (x^2 - 2)'(2x^5 + 4) + (x^2 - 2)(2x^5 + 4)'$$

$$= 2x(2x^5 + 4) + (x^2 - 2)(10x^4) = 14x^6 - 20x^4 + 8x$$

(b) $$f'(x) = (x^4 - 3x)'\left(\sqrt[5]{x^7} - 100\right) + (x^4 - 3x)\left(\sqrt[5]{x^7} - 100\right)' =$$

$$(4x^3 - 3)\left(\sqrt[5]{x^7} - 100\right) + (x^4 - 3x)\frac{7}{5}x^{\frac{2}{5}} = \frac{27}{5}x^{\frac{22}{5}} - \frac{36}{5}x^{\frac{7}{5}} - 400x^3 + 300$$

Regras de derivação

Derivada do quociente: Sejam u e v funções deriváveis, então

$$\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Isto é, a derivada do quociente de duas funções é igual a derivada da de cima vezes a função de baixo, menos a função de cima vezes a derivada da função de baixo, tudo dividido pelo quadrado da função de baixo.

Exemplo: Calcule a derivada das funções:

(a) $f(x) = \frac{x^2+2}{x-3}$ (b) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x+1}$

Solução:

(a)

$$f'(x) = \left[\frac{x^2+2}{x-3}\right]' = \frac{(x^2+2)'(x-3) - (x^2+2)(x-3)'}{(x-3)^2}$$

$$= \frac{(2x)(x-3) - (x^2+2)(1)}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x-2}{x^2-6x+9}$$

Regras de derivação

(b)

$$f'(x) = \left[\frac{\sqrt{x}}{2x+1}\right]' = \frac{(\sqrt{x})'(2x+1) - (\sqrt{x})(2x+1)'}{(2x+1)^2} =$$

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(2x+1) - (\sqrt{x})(2)}{(2x+1)^2} = \frac{\frac{2x+1}{2\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}}{4x^2+4x+1} = \frac{\frac{2x+1-4x}{2\sqrt{x}}}{4x^2+4x+1}$$

$$= \frac{-2x+1}{2\sqrt{x}(4x^2+4x+1)}$$

Derivada de algumas funções elementares

Funções trigonométricas

$$[\sin x]' = \cos x$$

$$[\cos x]' = -\sin x$$

$$[\tan x]' = \sec^2 x$$

$$[\cot x]' = -\csc^2 x$$

$$[\sec x]' = \sec x \tan x$$

$$[\csc x]' = -\csc x \cot x$$

Funções trigonométricas inversas

$$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$[\arctan x]' = \frac{1}{x^2+1}$$

$$[\operatorname{arccot} x]' = -\frac{1}{x^2+1}$$

$$[\operatorname{arcsec} x]' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$[\operatorname{arccsc} x]' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Funções exponenciais

$(a > 0, a \neq 1)$

$$[a^x]' = a^x \ln a$$

$$[e^x]' = e^x$$

Funções logarítmicas

$(a > 0, a \neq 1)$

$$[\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$[\ln x]' = \frac{1}{x}$$

Exercícios Propostos

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Exercícios

1) Calcule a derivada das seguintes funções, utilizando a regra da potência.

(a) $f(x) = x^2$

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$

(c) $f(x) = \sqrt{x}$

(d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

(e) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

(f) $f(t) = \sqrt[5]{t^2}$

(g) $p(m) = m^{\frac{2}{3}}$

(h) $n(q) = \frac{1}{q^2}$

2) Calcule a derivada das funções dadas:

(a) $f(r) = \pi r^2$

(b) $f(x) = \frac{1}{2}x^{-3} - 14$

(c) $f(x) = (7x - 1)(x^2 + 4)$

(d) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$

3) Encontre uma equação da reta tangente à curva $f(x) = x^4 + 2x^2 - x$ no ponto $(1,2)$.

Exercícios

4) Calcule a derivada das funções dadas:

(a) $f(x) = sen\ x + \frac{1}{2}\ cot\ x$

(b) $f(x) = -4x^2 \cos x$

(c) $f(x) = \frac{5-\cos x}{5+sen\, x}$

(d) $h(y) = ye^y + 10$

(e) $m(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

5) Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

(a) $y = e^x \cos x \qquad (0, 1)$

(b) $y = \sec x \qquad \left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$

Exercícios

6) Calcule a derivada das funções dadas:

(a) $f(x) = x^3 + 5x - 2$

(b) $f(x) = \sqrt[5]{x^4} + 2x^3 - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{3}}$

(c) $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$

(d) $f(x) = \frac{x^4 - 2x}{x - 2}$

7) Encontre uma equação da reta tangente à curva $f(x) = \sqrt[4]{x}$ no ponto $x = 1$.

8) Calcule a derivada das funções dadas:

(a) $f(x) = x^3 + \sin x + 2\cos x$

(b) $g(t) = t^3 \cos t$

(c) $f(\theta) = \frac{\sec\theta}{1 + \sec\theta}$

(d) $f(x) = 2x \log x$

Exercícios

9) Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

(a) $y = x^2 \ln x$ $(1, 0)$

(b) $y = 1 + 2\sin x$ $\left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$

Respostas.

Exercício 1:

a) $f'(x) = 2x$

b) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

c) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

d) $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

e) $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

f) $f'(t) = \frac{2}{5\sqrt[5]{t^3}}$

g) $p'(m) = \frac{2}{3\sqrt[3]{m}}$

h) $n'(q) = \frac{-2}{q^3}$

Exercício 2:

a) $f'(x) = 2\pi r$

b) $f'(x) = -\frac{3}{2x^4}$

c) $f'(x) = 21x^2 - 2x + 28$

d) $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

Exercício 3:

$y = 7x - 5$

Exercício 4:

a) $f'(x) = cos\,x - \frac{csc^2\,x}{2}$

b) $f'(x) = 4x^2 sin\,x - 8xcos\,x$

c) $f'(x) = \frac{5(sin\,x - cos\,x) + 1}{(5 + sen\,x)^2}$

d) $h'(y) = (y + 1)e^y$

e) $m'(x) = \frac{1 - 2\,ln\,x}{x^3}$

Exercício 5:

a) $y = x + 1$

b) $y = 2\sqrt{3}\,x + 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

Respostas.

Exercício 6:

a) $f'(x) = 3x^2 + 5$

b) $f'(x) = \dfrac{4}{5\sqrt[5]{x}} + 6x^2 - \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{x^2}$

c) $f'(x) = 4x^3$

d) $f'(x) = \dfrac{3x^4 - 8x^3 + 4}{(x-2)^2}$

Exercício 7:

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$$

Exercício 8:

a) $f'(x) = 3x^2 + \cos x - 2\sin x$

b) $g'(t) = 3t^2\, cos\, t - t^3\, sin\, t$

c) $f'(\theta) = \dfrac{sec\,\theta\, tan\,\theta}{(1 + sec\,\theta)^2}$

d) $f'(x) = 2\log x + \dfrac{2}{\ln 10}$

Exercício 9:

a) $y = x - 1$

b) $y = 3$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

https://www.youtube.com/channel/UCB3NUeew6Ji_k39-_GDA3iQ/playlists

O GAMA possui monitorias de:

- ❑ **Pré-cálculo e Matemática Elementar** (e disciplinas equivalentes)
- ❑ **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
- ❑ **Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino

Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

Derivadas

2020/1

Aula 03

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em
Matemática

Derivadas de ordem superior

Definição: Seja f uma função derivável. Se f' também for uma função derivável, então sua derivada $(f')'$ é chamada *derivada segunda* de f.

Notação:

$$f'' = (f')'$$

ou ainda

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right]$$

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = 2x^3 - 9x,$$

calcule $f''(x)$.

Solução: Como

$$f'(x) = (2x^3 - 9x)' = 6x^2 - 9$$

teremos

$$f''(x) = (f')'(x) = (6x^2 - 9)' = 12x.$$

Derivadas de ordem superior

Definição: Seja f uma função derivável. Se f'' também for uma função derivável, então sua derivada $(f'')'$é chamada *derivada terceira* de f.

Notação:

$f''' = (f'')'$ ou $f^{(3)} = (f'')'$ ou ainda $\dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{d^2y}{dx^2}\right]$

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = x^3 - \cos x + e^x,$$

calcule $f^{(3)}(x)$.

Solução: Como

$$f'(x) = (x^3 - \cos x + e^x)' = 3x^2 + \operatorname{sen} x + e^x$$

teremos

$$f''(x) = (3x^2 + \operatorname{sen} x + e^x)' = 6x + \cos x + e^x$$

e portanto

$$f^{(3)}(x) = (6x + \cos x + e^x)' = 6 - \operatorname{sen} x + e^x.$$

Derivadas de ordem superior

Definição: Seja f uma função derivável. Se $f^{(n-1)}$ também for uma função derivável, então sua derivada $\left(f^{(n-1)}\right)'$ é chamada *derivada enésima* de f.

Notação:

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' \quad \text{ou ainda} \quad \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right]$$

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = 2^x,$$

calcule $f^{(5)}(x)$.

Solução: Como

$$f'(x) = (2^x)' = 2^x \ln 2$$

teremos

$$f^{(2)}(x) = (2^x \ln 2)' = \ln 2\,(2^x)' = 2^x(\ln 2)^2$$

e portanto

$$\vdots$$

$$f^{(5)}(x) = 2^x(\ln 2)^5$$

Regra da cadeia

Teorema (Regra da Cadeia): Se a função g for derivável em x e a função f for derivável em $g(x)$, então a função composta $h = f \ o \ g$ será derivável em x e a derivada da função composta será dada por

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'\,(x).$$

Ou seja, **a derivada da função composta é igual a derivada da função de fora calculada na função de dentro vezes a derivada da função de dentro**.

Observação: Costuma-se denotar a função de dentro por uma variável auxiliar, geralmente u, para utilização da Regra da Cadeia.

Assim, se $y = f(g(x))$, denota-se

$$u = g(x) \qquad \text{e} \qquad y = f(u)$$

Desta forma, escreve-se

Derivada da função de dentro.

$$y' = f'(u) \cdot u'$$

Derivada da função composta.

Derivada da função de fora calculada na função de dentro.

Regra da cadeia

Exemplo: Calcule a derivada da função

$$h(x) = \sin(2x+1)\,.$$

Solução: Neste caso a função de dentro é

$$u = g(x) = 2x + 1$$

e a função de fora é

$$f(u) = \sin u.$$

Portanto,

$$f'(u) = \cos u \quad \text{e} \quad u' = g'(x) = 2$$

e temos:

$$h'(x) = (fog)'(x) = f'(u)\cdot u' = \cos(u)\cdot 2 = 2\cos(2x+1).$$

Regra da cadeia

Exemplo: Calcule a derivada da função

$$h(x) = \sqrt{x^2 + 2x}.$$

Solução: Neste caso, tem-se:

$$u = g(x) = x^2 + 2x \qquad f(u) = \sqrt{u}$$

(função de dentro) (função de fora)

Como,

$$f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \quad \text{e} \quad u' = g'(x) = 2x + 2$$

temos:

$$h'(x) = (fog)'(x) = f'(u) \cdot u' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}.$$

Regra da cadeia

Observação: Regra da cadeia na notação de Leibniz:

Se $y = f(u)$ e $u = g(x)$ forem deriváveis, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Ou seja:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

Derivada da função composta.

Derivada da função de fora calculada na função de dentro.

Derivada da função de dentro.

Regra da cadeia

Exemplo: Calcule a derivada da função

$$y = e^{\sin x}.$$

Solução: Neste caso, podemos escrever a função dada como:

$$y = e^{u}$$ (função de fora)

$$u = \sin x.$$ (função de dentro)

Portanto:

$$\frac{dy}{du} = (e^{u})' = e^{u}$$

Derivada da função de fora calculada na função de dentro.

e

$$\frac{du}{dx} = (\sin x)' = \cos x$$

Derivada da função de dentro.

e utilizando a Regra da Cadeia temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = e^{u}(\cos x) = e^{\sin x}\cos x\,.$$

Regra da cadeia

Exemplo: Calcule a derivada da função

$$w = \ln(t^4 + 2)\,.$$

Solução: Neste caso, podemos escrever a função dada como:

$$w = \ln u$$ (função de fora)

$$u = t^4 + 2$$ (função de dentro)

Portanto:

$$\frac{dw}{du} = (\ln u)' = \frac{1}{u}$$

Derivada da função de fora calculada na função de dentro.

e

$$\frac{du}{dt} = (t^4 + 2)' = 4t^3$$

Derivada da função de dentro.

e utilizando a Regra da Cadeia temos:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{du}\frac{du}{dt} = \frac{1}{u}4t^3 = \frac{4t^3}{t^4 + 2}\,.$$

Regra da cadeia

Funções trigonométricas

$$[\sin u]' = \cos u \cdot u'$$

$$[\cos u]' = -\sin u \cdot u'$$

$$[\tan u]' = \sec^2 u \cdot u'$$

$$[\cot u]' = -\csc^2 u \cdot u'$$

$$[\sec u]' = \sec u \tan u \cdot u'$$

$$[\csc u]' = -\csc u \cot u \cdot u'$$

Funções trigonométricas inversas

$$[\arcsin u]' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$[\arccos u]' = -\frac{u'}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$[\arctan u]' = \frac{u'}{x^2+1}$$

$$[\operatorname{arccot} u]' = -\frac{u'}{x^2+1}$$

$$[\operatorname{arcsec} u]' = \frac{u'}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$[\operatorname{arccsc} u]' = -\frac{u'}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Funções exponenciais

$(a > 0, a \neq 1)$

$$[a^u]' = u' a^u \ln a$$

$$[e^u]' = u' e^u$$

Funções logarítmicas

$(a > 0, a \neq 1)$

$$[\log_a u]' = \frac{u'}{u \ln a}$$

$$[\ln u]' = \frac{u'}{u}$$

Exercícios Propostos

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Exercícios

1) Calcule a segunda derivada das funções dadas :

(a) $f(x) = x\cos x$

(b) $f(x) = \sqrt{3}(e^x + x^3)$

(c) $f(x) = \sin x \cos x$

2) Calcule a terceira derivada da função:

$$f(x) = 6x^5 + 4x + 5$$

Exercícios

3) Calcule a derivada das funções usando a regra de cadeia:

(a) $f(x) = \sin(2x)$

(b) $f(x) = \tan(x^2 + 1)$

(c) $f(x) = \sqrt{x^3 + \csc(x)}$

(d) $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^3$

(e) $f(x) = 2e^{x^2-4x}$

(f) $f(x) = \cos^2(x^2 + 1)$

4) Encontre a equação da reta tangente a curva $y = (x-1)^5$ no ponto $(2, 1)$.

Exercícios

5) Calcule a segunda derivada das funções dadas :

(a) $f(x) = 2x^{-5} + \ln x$

(b) $f(x) = \frac{x^2+2}{x-1}$

6) Calcule a derivada das funções usando a regra de cadeia:

(a) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 + 2x^2 - 3x + 1}$

(b) $f(x) = \ln(\sin(x))$

(c) $f(x) = (1 + x^5 \cot x)^{-8}$

Respostas.

Exercício 1:

a) $Resp.: f"(x) = -2\sin x - x\cos x$

b) $Resp.: f"(x) = \sqrt{3(}e^{x} + 6x)$

c) $Resp.: f"(x) = \ -4\sin x\cos x$

Exercício 2:

$Resp.: f^{(3)}(x) = 360x^{2}$

Exercício 3:

a) $Resp.: f'(x) = 2\cos 2x$

b) $Resp.: f'(x) = 2x\,sec^{2}(x^{2}+1)$

c) $Resp.: f'(x) = \dfrac{3x^{2} - \csc x\cot x}{2\sqrt{x^{3} + \csc x}}$

d) $Resp.: f'(x) = -\dfrac{9(x+1)^{2}}{(x-2)^{4}}$

e) $Resp.: f'(x) = 4(x-2)e^{x^{2}-4x}$

f) $Resp.: f'(x) = -4x\sin(x^{2}+1)\cos(x^{2}+1)$

Exercício 4:

$Resp.: y = 5x - 9$

Exercício 5:

a) $Resp.: f''(x) = 60x^{-7} - \dfrac{1}{x^{2}}$

b) $Resp.: f''(x) = \dfrac{6}{(x-1)^{3}}$

Exercício 6:

a) $Resp.: f'(x) = \dfrac{4x^{3} + 4x - 3}{3\sqrt[3]{(x^{4} + 2x^{2} - 3x + 1)^{2}}}$

b) $Resp.: f'(x) = \cot x$

c) $Resp.: f'(x) = -\dfrac{8(5x^{4}\cot x - x^{5}\csc^{2}x)}{(x^{5}\cot x + 1)^{9}}$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

https://www.youtube.com/channel/UCB3NUeew6Ji_k39-_GDA3iQ/playlists

O GAMA possui monitorias de:

- ☐ **Pré-cálculo e Matemática Elementar** (e disciplinas equivalentes)
  - ☐ **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
    - ☐ **Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino

Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

Derivadas

2020/1

Aula 04

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em
Matemática

Derivação implícita

Note que todas as funções dadas até agora, a variável dependente pôde ser escrita explicitamente em função da variável independente

Por exemplo:

$$y = 2x^2 - 3 \qquad y = \sqrt{x+1} \qquad y = \cos x + e^x \tan x$$

Nestes casos, se diz que a variável y foi dada explicitamente em função da variável x.

Existem casos em que é bastante trabalhoso ou até inviável expressar a variável dependente de forma explícita, em função da variável independente.

Por exemplo, como poderíamos expressar y em função de x nas equações abaixo?

$$x^3 + y^3 = 6xy \qquad xy + x\sin y = 1 \qquad e^{xy} = x + y$$

Nestes casos, se diz que a variável y foi dada implicitamente em função da variável x.

Derivação implícita

Note que, até agora, calculamos a derivada somente de funções dadas explicitamente!

Pergunta: É possível calcular a derivada de uma função na forma implícita?

A resposta para a pergunta acima é SIM!

Para calcular a derivada de uma função na forma implícita, vamos seguir os seguintes passos:

1) Derive os dois lados da equação considerando $y = y(x)$, ou seja, considerando y como função de x (utilize a regra da cadeia se necessário).

2) Tente isolar $\frac{dy}{dx}$ na equação resultante da derivação.

Derivação implícita

Exemplo: Se

$$x^2 + y^2 = 9,$$

calcule $\frac{dy}{dx}$.

Solução:

$$\frac{d}{dx}[x^2 + y^2] = \frac{d}{dx}[9] \xRightarrow{(1)} 2x\frac{dx}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \xRightarrow{(2)} 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\xRightarrow{(3)} \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} \xRightarrow{(4)} \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

(1) Derivando em relação a x e usando a Regra da Cadeia

(2) $\frac{dx}{dx} = 1$

(3) Isolando $\frac{dy}{dx}$

(4) Simplificação

Derivação implícita

Exemplo: Encontre a equação da reta tangente à curva

$$7y^2 = 4 + xy^3,$$

no ponto $(3, 2)$.

Solução: Primeiramente vamos calcular a derivada de y em relação a x:

$$\frac{d}{dx}[7y^2] = \frac{d}{dx}[4 + xy^3] \Longrightarrow 14y\frac{dy}{dx} = 0 + \frac{dx}{dx}y^3 + x\frac{d[y^3]}{dx} \Longrightarrow$$

$$14y\frac{dy}{dx} = y^3 + 3xy^2\frac{dy}{dx} \Longrightarrow (14y - 3xy^2)\frac{dy}{dx} = y^3 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{14 - 3xy}$$

Calculando a derivada no ponto $(3, 2)$ temos:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=3\\y=2}} = \frac{2^2}{14 - 3(3)(2)} = \frac{4}{14 - 18} = -1$$

Portanto:

$$y - y_A = m(x - x_A) \Longrightarrow y - 2 = (-1)(x - 3) \Longrightarrow y = -x + 5.$$

Regra de L'Hôspital

Teorema (Regra de L'Hôspital):

Se

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

Então

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

O mesmo vale se $x \longrightarrow a$ for substituído por

$x \longrightarrow a^+$ ou $x \longrightarrow a^-$ ou $x \longrightarrow -\infty$ ou $x \longrightarrow +\infty$.

Observação: A regra de L'Hôspital vale para indeterminações do tipo

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{+\infty}{+\infty} \qquad \frac{+\infty}{-\infty} \qquad \frac{-\infty}{+\infty} \qquad \frac{-\infty}{-\infty}$$

Portanto, antes de aplicar a regra de L'Hôspital, faça uma *"verificação"* para ter certeza que a regra pode ser aplicada!

Regra de L'Hôspital

Exemplo: Calcule o limite:

$$\lim_{x\longrightarrow 3}\frac{x^2-9}{x-3}$$

Solução:

Verificação: Como

$$\lim_{x\longrightarrow 3}\frac{x^2-9 \longrightarrow 0}{x-3 \longrightarrow 0}$$

temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ podemos aplicar a regra de L'Hôspital.

Portanto:

$$\lim_{x\longrightarrow 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\longrightarrow 3}\frac{(x^2-9)'}{(x-3)'}=\lim_{x\longrightarrow 3}\frac{2x}{1}=2(3)=6.$$

Regra de L'Hôspital

Exemplo: Calcule o limite:

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x^3+2x^2+x-5}{e^x}$$

Solução:

Verificação: Como

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x^3+2x^2+x-5 \nearrow +\infty}{e^x \searrow +\infty}$$

temos uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ podemos aplicar a regra de L'Hôspital.

Portanto, aplicando a Regra de L'Hôspital três vezes (faça a verificação a cada vez!) temos

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x^3+2x^2+x-5}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{3x^2+4x+1}{e^x}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{6x+4}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{6}{e^x} = 0.$$

Exercícios Propostos

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Exercícios

1) Obtenha $\frac{dy}{dx}$, a partir das equações dadas por derivação implícita:

(a) $x^2y + 2y^3 = 3x + 2y$

(b) $6x + \sqrt{xy} - 3y = 4$

2) Verifique se o ponto $P(-2,8)$ pertence à curva $xy = -16$

encontre a equação da reta tangente à curva neste ponto.

3) Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}$

(c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - senx}{x^3}$

(e) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2^{-x}}{x^2+5x+6}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \cos x}\right)$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(4x)}{\sin(3x)}$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(2x)}$

Exercícios

4) Obtenha $\frac{dy}{dx}$, a partir das equações dadas por derivação implícita:

(a) $\cos(x + y) = x$

(b) $e^{x+y^2} = 2x + y$

5) Verifique se o ponto $P(2, -3)$ pertence à curva

$$2x^3 - x^2 y + y^3 - 1 = 0$$

dada e encontre a equação da reta tangente neste ponto.

6) Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$

(b) $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$

(c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^x}$

(d) $\lim\limits_{x \to \infty} 2xe^{-x^2}$

(e) $\lim\limits_{x \to \infty} 2x^{\frac{1}{x}}$

(f) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$

Respostas.

Exercício 1:

a) $Resp.: \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3 - 2xy}{x^2 + 6y^2 - 2}$

b) $Resp.: \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{12\sqrt{xy} + y}{x - 6\sqrt{xy}}$

Exercício 2:

$Resp.: \ y = 4x + 16$

Exercício 3:

a) 1

b) 2

c) $+\infty$

d) $\dfrac{1}{6}$

e) $+\infty$

f) $-\dfrac{1}{2}$

g) $\dfrac{4}{3}$

h) $\dfrac{1}{2}$

Exercício 4:

a) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1 + \sin(x + y)}{\sin(x + y)}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{e^{x+y^2} - 2}{2ye^{x+y^2} - 1}$

Exercício 5:

$$y = -\frac{36}{23x} + \frac{3}{23}$$

Exercício 6:

a) $2\sqrt{3}$

b) $\cos a$

c) 0

d) 0

e) 2

f) $-\dfrac{1}{3}$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

https://www.youtube.com/channel/UCB3NUeew6Ji_k39-_GDA3iQ/playlists

O GAMA possui monitorias de:

- **Pré-cálculo e Matemática Elementar** (e disciplinas equivalentes)
- **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
- **Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino

Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

Derivadas

2020/1

Aula 05

Projeto

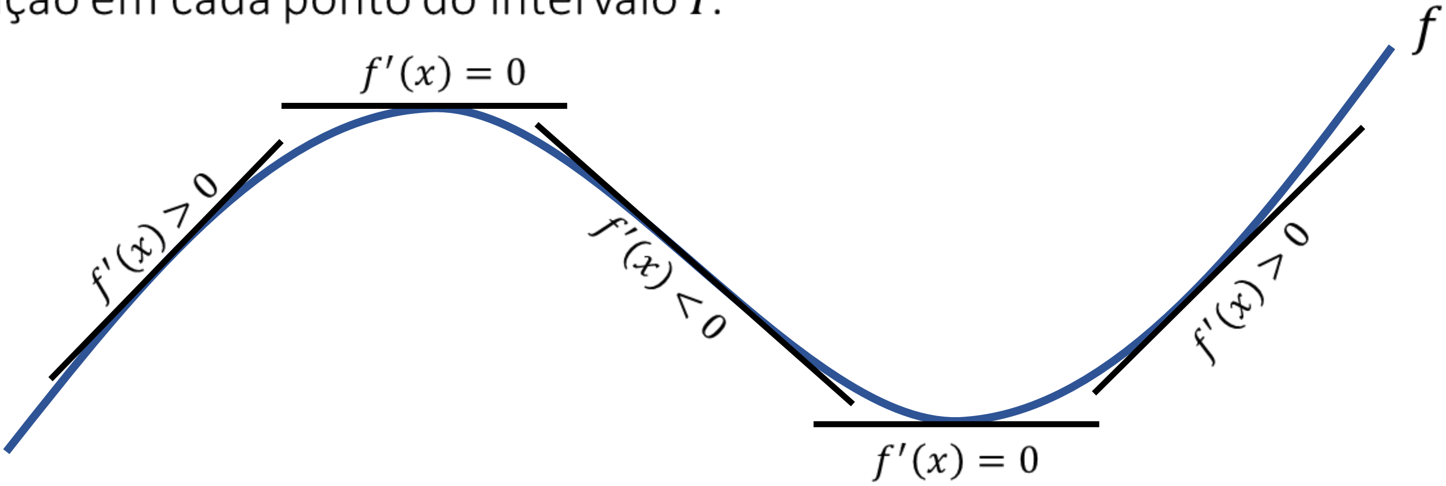
GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Teste da Primeira Derivada

Seja f uma função contínua e derivável num intervalo I.

Sabemos que a primeira derivada é a inclinação da reta tangente a essa função em cada ponto do intervalo I.



Com a primeira derivada podemos obter informações sobre:

Intervalos onde a função é crescente ou decrescente

Máximos e Mínimos Locais

Veremos nesta aula como obter cada uma dessas informações!

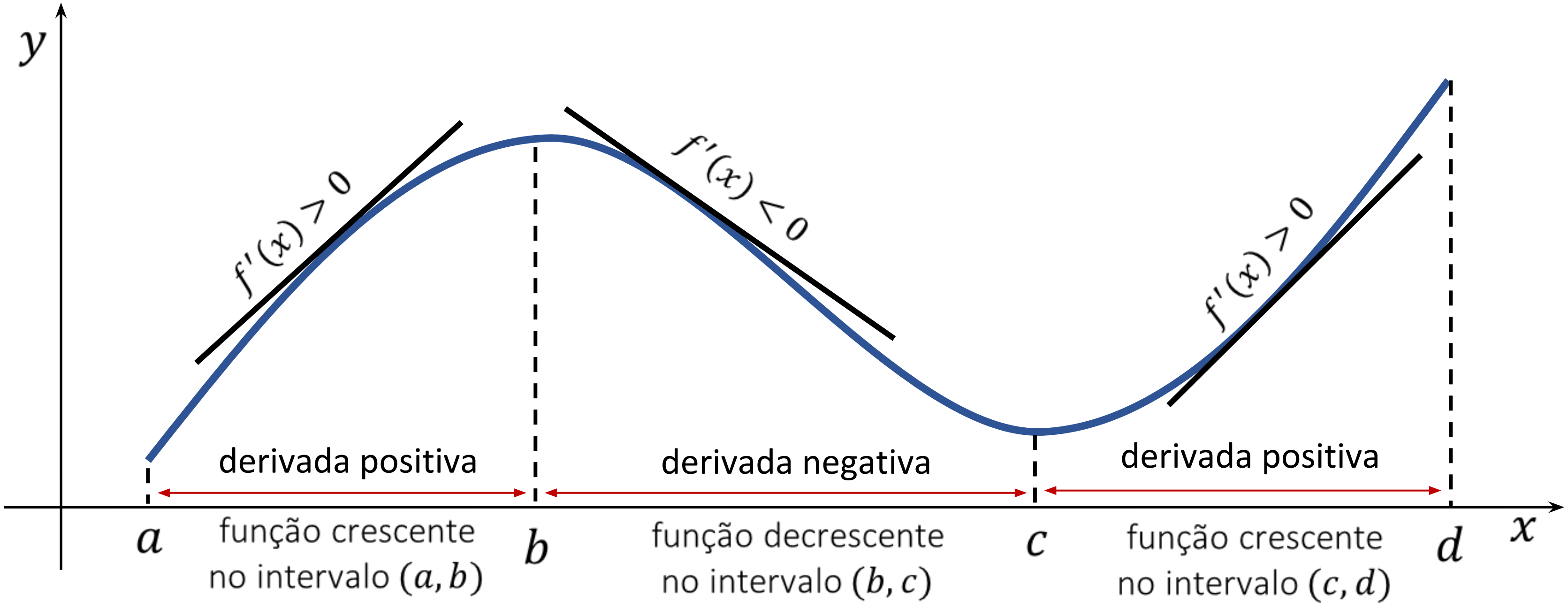
Teste da Primeira Derivada

Teorema: Sendo f uma função derivável, f' sua primeira derivada.

Onde f' é positiva, a função f é crescente.

Onde f' é negativa, a função f é decrescente.

Graficamente, a interpretação do Teorema acima é a seguinte:



Teste da Primeira Derivada

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = x^2 - 2x,$$

determine os intervalos onde a função é crescente e decrescente.

Solução: Como $f(x) = x^2 - 2x$, temos:

$$f'(x) = 2x - 2.$$

Vamos descobrir os intervalos de crescimento e decrescimento de f analisando o sinal de f'.

Quando a função $2x - 2 > 0$? Para todo $x > 1$.

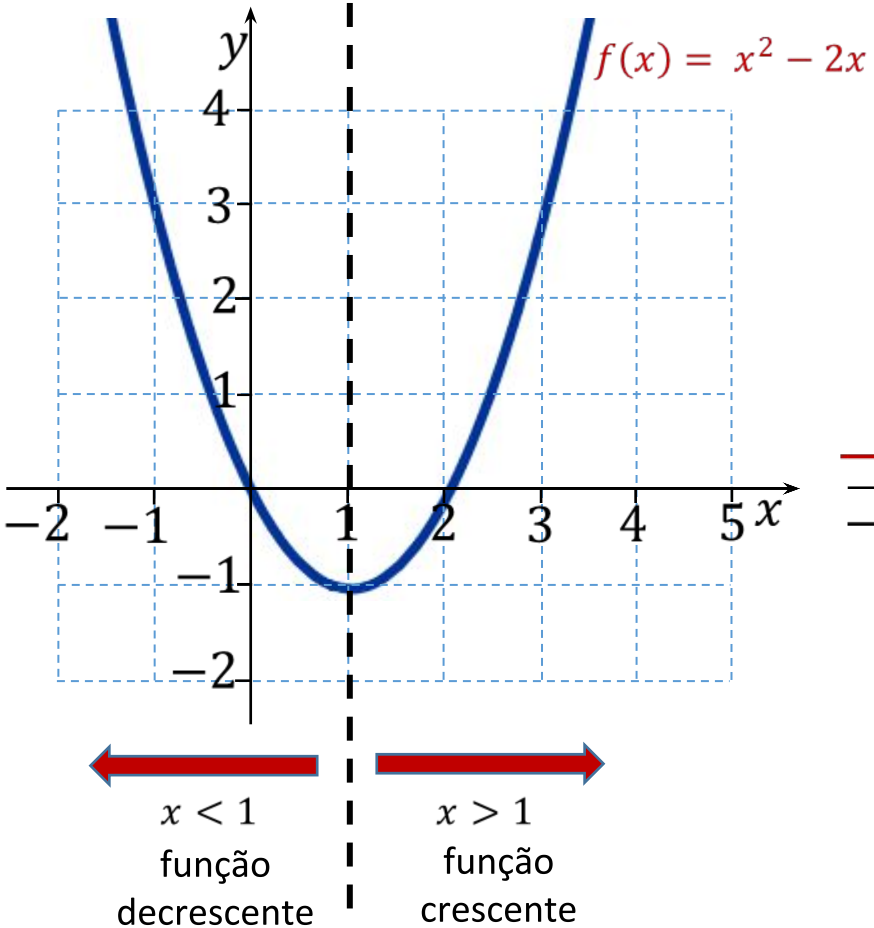
Consequentemente, f é crescente no intervalo $(1, +\infty)$.

Quando a função $2x - 2 < 0$? Para todo $x < 1$.

Consequentemente, f é decrescente no intervalo $(-\infty, 1)$.

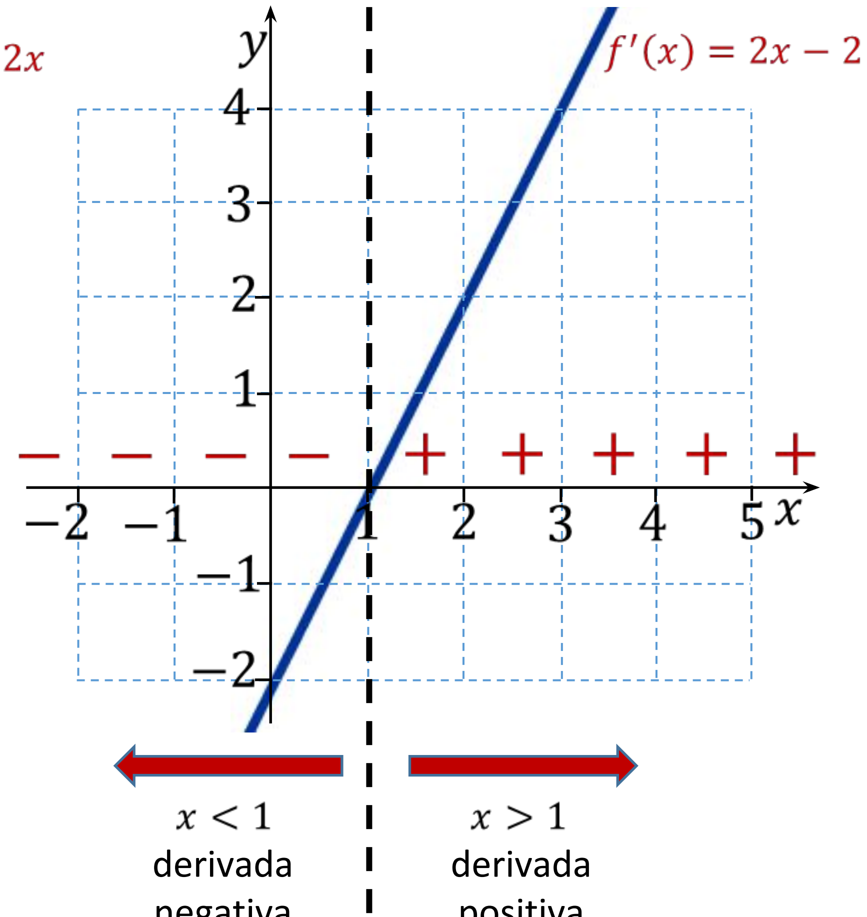
Teste da Primeira Derivada

Observe a relação “derivada positiva resulta em função crescente” e “derivada negativa resulta em função decrescente” no gráfico da função f do exemplo anterior.



$x < 1$
função decrescente

$x > 1$
função crescente



$x < 1$
derivada negativa

$x > 1$
derivada positiva

Pontos críticos

Definição: Um número c pertencente ao domínio de uma função é chamado de **ponto crítico** da função f se uma das condições é satisfeita:

$f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Portanto, para verificar se um número c é um ponto crítico de uma função f, precisamos seguir os seguintes passos:

1^o **Passo:** Derive a função f, ou seja, calcule $f'(x)$.

2^o **Passo:** Iguale a derivada a zero, ou seja, verifique se existem valores de c para os quais

$$f'(c) = 0.$$

3^o **Passo:** Verifique se existem valores de c para os quais $f'(c)$ não existe.

Se estes valores de c encontrados estiverem no domínio de f, eles serão os pontos críticos de f.

Pontos críticos

Exemplo: Verifique se a função

$$f(x) = x^2 + 2x - 4.$$

possui pontos críticos.

Solução:

$\mathbf{1^o}$ Passo: Como $f(x) = x^2 + 2x - 4$ então

$$f'(x) = 2x + 2.$$

$\mathbf{2^o}$ Passo: Igualando a derivada a zero, temos:

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x + 2 = 0 \;\rightarrow\; x = -1.$$

A derivada se anula em $x = -1$.

$\mathbf{3^o}$ Passo: Como f é uma função polinomial, então não existem pontos onde a derivada não existe!

Como $c = -1$ pertence ao domínio de f e $f'(-1) = 0$, então ele é um ponto crítico de f.

Note que a função f não possui outros pontos críticos.

Pontos críticos

Exemplo: Verifique se a função

$$f(x) = \sqrt{x}$$

possui pontos críticos.

Solução:

1^o Passo: Como $f(x) = \sqrt{x}$ então

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2^o Passo: Igualando a derivada a zero, temos:

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \rightarrow \nexists$$

Não existem pontos onde
a derivada se anula

3^o Passo: Dada a expressão que define f', percebe-se que $c = 0$ é o único ponto onde a derivada não existe.

Como $c = 0$ pertence ao domínio de f e $f'(0)$ não existe, então ele é um ponto crítico de f.

Note que a função f não possui outros pontos críticos.

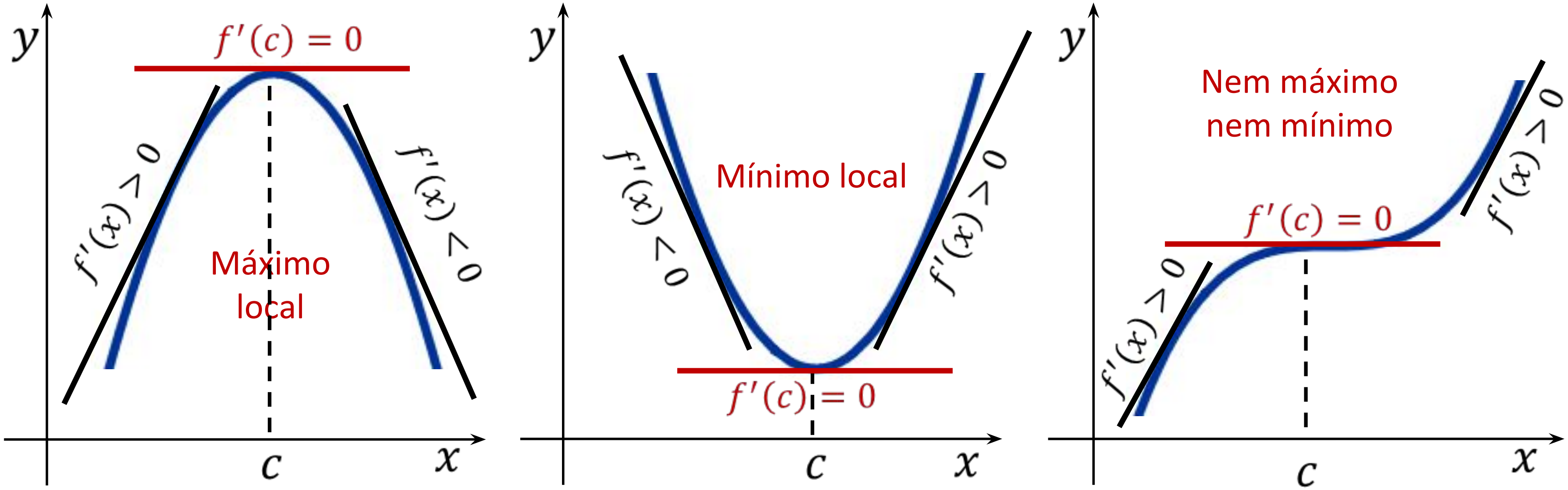
Máximos e mínimos locais

Teorema: Seja f uma função derivável em um intervalo I e $c \in I$ um ponto crítico de f.

Se o sinal de $f'(x)$ muda de positivo para negativo em c, então temos um máximo local em c.

Se o sinal de $f'(x)$ muda de negativo para positivo em c, então temos um mínimo local em c.

Se não há mudança no sinal de $f'(x)$ em c, então não temos um ponto de máximo nem de mínimo local.



Observação: O Teorema se aplica no caso em que não existe a derivada da função f em $x = c$.
Exemplo: $f(x) = |x|$ não é derivável em $x = 0$, embora este seja um ponto de mínimo.

Máximos e mínimos locais

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = x^2 + 2x - 4.$$

determine o ponto crítico e se ele é de máximo ou de mínimo.

Solução: Calculando f':

$$f'(x) = 2x + 2.$$

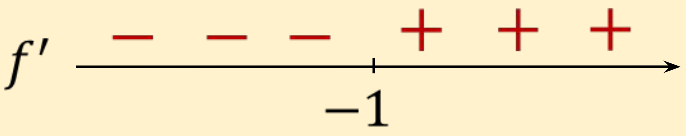
Igualando a derivada a zero:

$$2x + 2 = 0$$

$$2x = -2$$

$$x = -1 \quad \text{(ponto crítico)}$$

Sinal da derivada:



Como $f'(x)$ muda de negativo para positivo, logo $x = -1$ é um mínimo local.

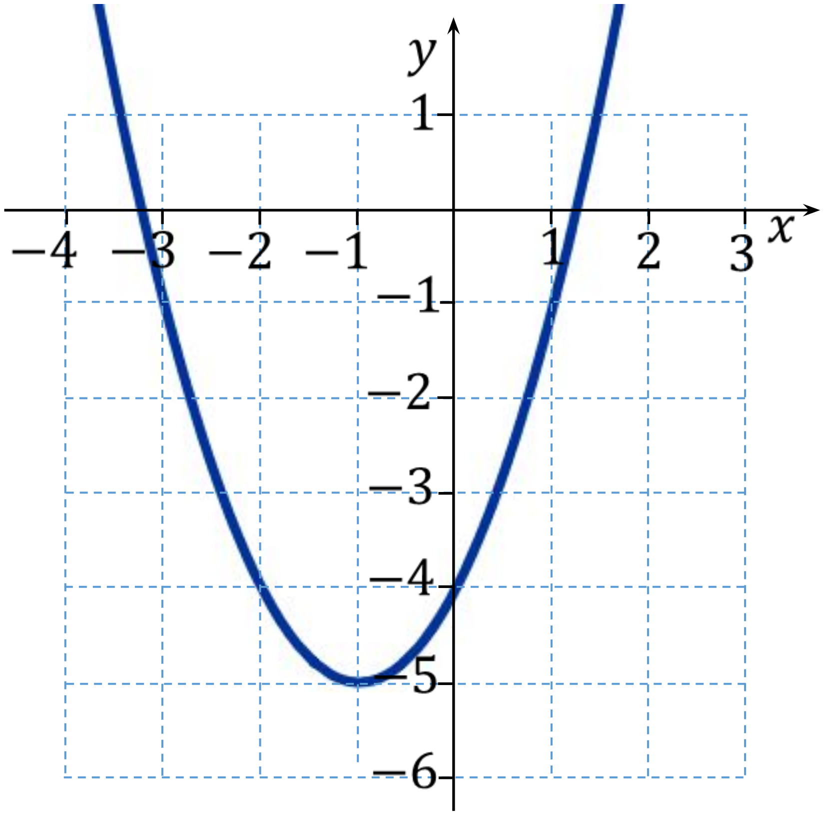


Gráfico de f

Exercícios Propostos

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Exercícios

---

1) Em cada caso, determine os pontos críticos da função dada.

(a) $f(x) = 2x^5 + 5x^4 - 10x^3 - 15$

(b) $f(x) = 6x^{\frac{2}{3}}$

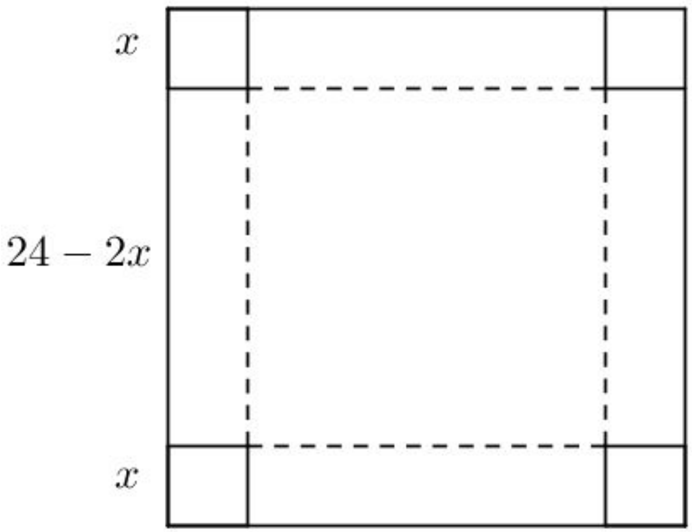
2) Considere a função $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$.

Encontre onde a função é crescente, decrescente e seus pontos de máximos e mínimos.

3) Seja a função $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$ definida em $\mathbb{R}$. Encontre os intervalos onde a função seja crescente e decrescente e seus valores de máximos e mínimos.

Exercícios

4) Um fabricante de caixas de papelão pretende fazer caixas sem tampas a partir de folhas quadradas de cartão com área igual a $576cm^2$, cortando quadrados iguais nos quatro cantos e dobrando os lados para cima. Determinar o lado do quadrado que deve ser cortado para se obter uma caixa com o maior volume possível.



Exercícios

5) Considere a função $g(x) = x + 2\,sen(x)$ em $0 \leq x \leq 2\pi$. Encontre os valores de máximos e mínimos e onde a função é crescente e decrescente.

6) Utilize o teste da primeira derivada para determinar onde a função dada por

$$h(x) = x^{\frac{2}{3}}(6-x)^{\frac{1}{3}}.$$

é crescente, decrescente e seus valores de máximos e mínimos.

Respostas

Exercício 1:

a) $x = -3$, $x = 0$ e $x = 1$

b) $x = 0$

Exercício 2:

Pontos críticos: $x = -1, x = 0$ e $x = 2$ Crescente em $(-1, 0)$ e $(2, +\infty)$

Decrescente em $(-\infty, -1)$ e $(0, 2)$ Máximo: $x = 0$ Mínimos: $x = -1$ e $x = 2$

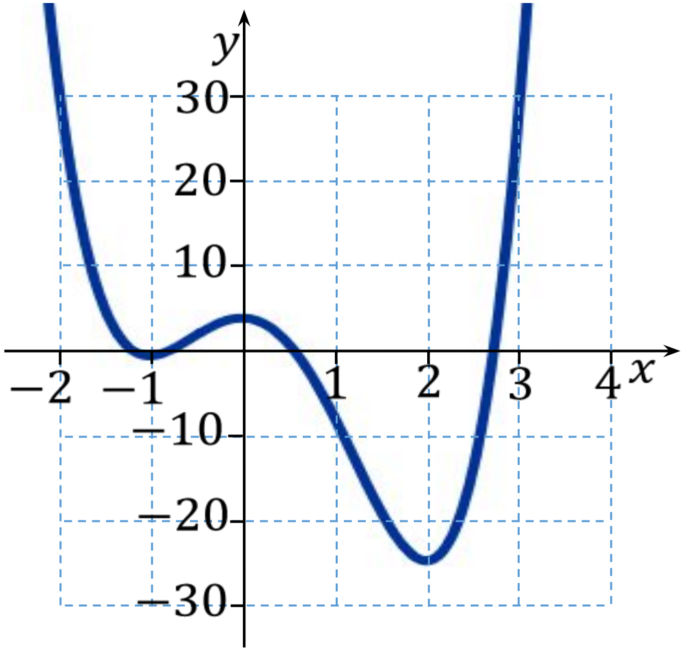


Gráfico de f

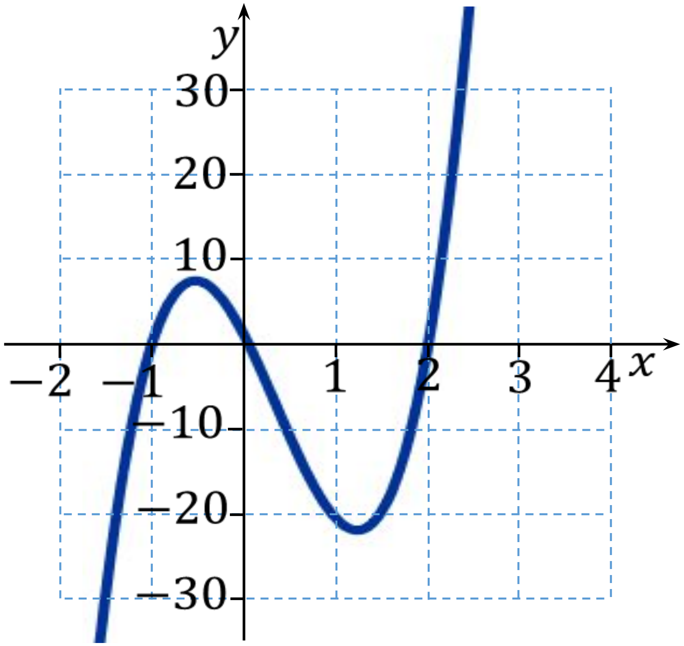


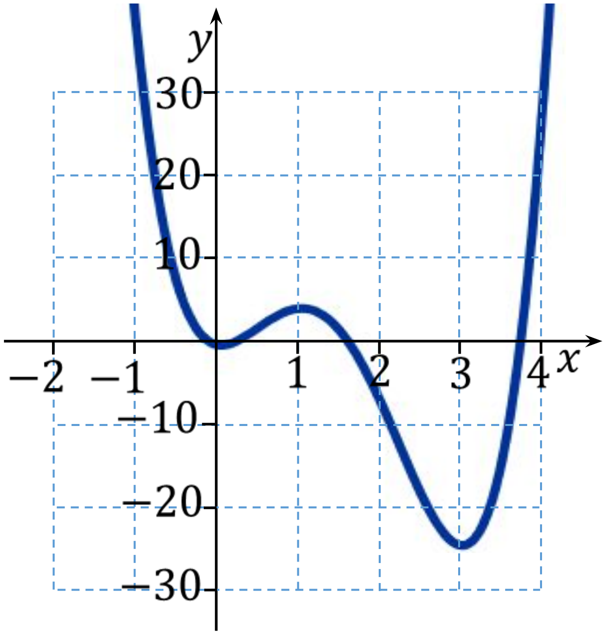
Gráfico de f'

Respostas

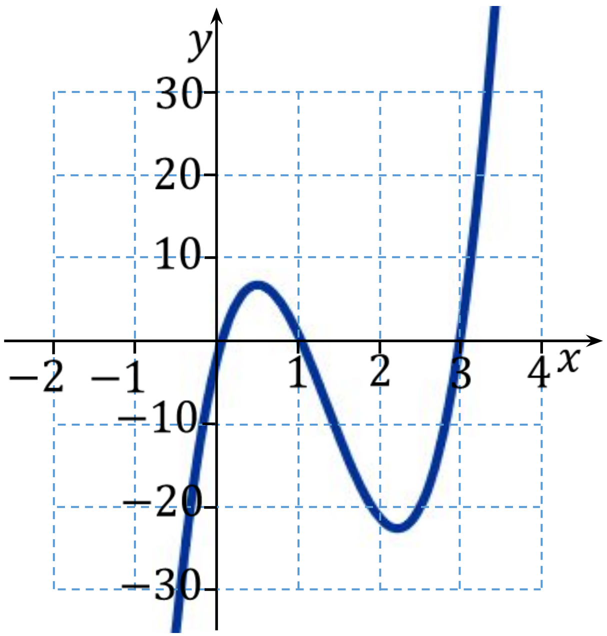
Exercício 3:

Pontos críticos: $x = 0$; $x = 1$ e $x = 3$ Crescente em $(0,1)$ e $(3, +\infty)$ Decrescente em $(-\infty, 0)$ e $(1\ , 3)$

Máximo local: $x = 1$ Mínimos locais: $x = 0$ e $x = 3$



$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$



$f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 36x$

Exercício 4:

$Resp.: x = 4\ cm$ com $1024\ cm^3$

Respostas

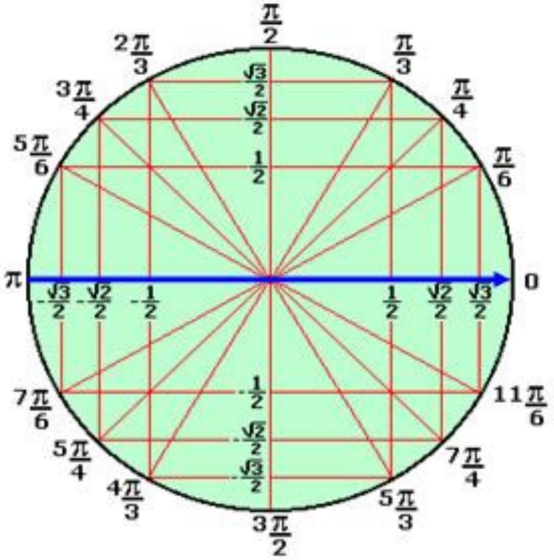
Exercício 5:

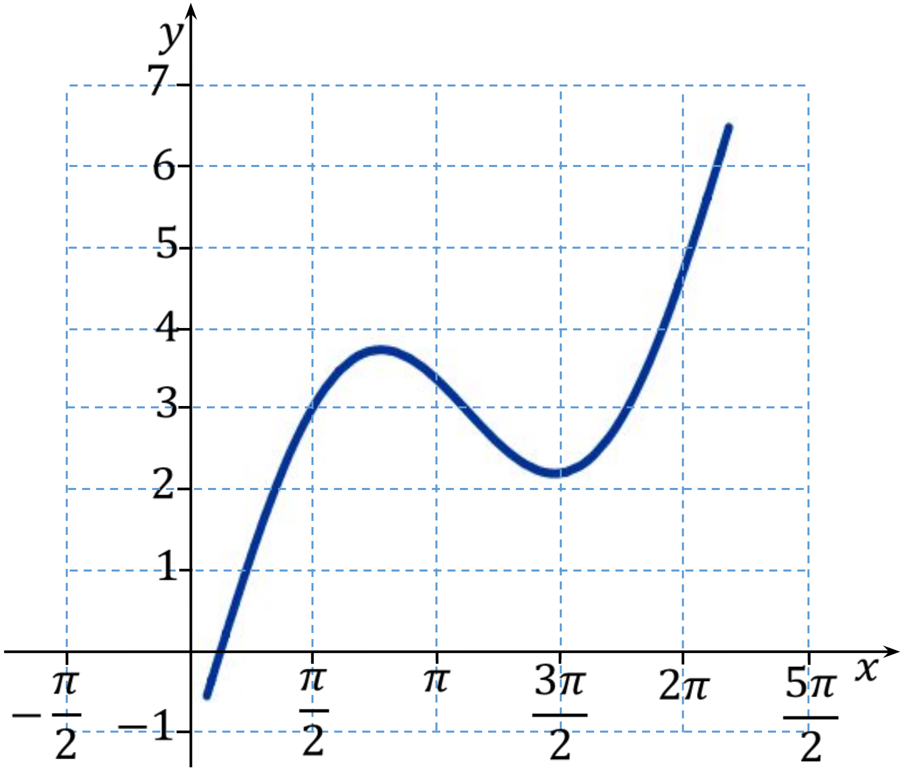
Pontos críticos: $x = \frac{2\pi}{3}$; $x = \frac{4\pi}{3}$

Crescente em $\left[0\,,\,\frac{2\pi}{3}\right[$ e $\left]\frac{4\pi}{3}\,,\,2\pi\right]$

Decrescente em $(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$

Mínimo: $x = \frac{4\pi}{3}$ Máximo: $x = \frac{2\pi}{3}$





Exercício 6:

Pontos críticos: $x = 0, x = 4$ e $x = 6$ Crescente em $(0, 4)$ Decrescente em $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$

Máximos: $x = 4$ Mínimos: $x = 0$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

https://www.youtube.com/channel/UCB3NUeew6Ji_k39-_GDA3iQ/playlists

O GAMA possui monitorias de:

- ☐ **Pré-cálculo e Matemática Elementar** (e disciplinas equivalentes)
  - ☐ **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
    - ☐ **Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino

Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

Derivadas

2020/1

Aula 06

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em
Matemática

Teste da Segunda Derivada

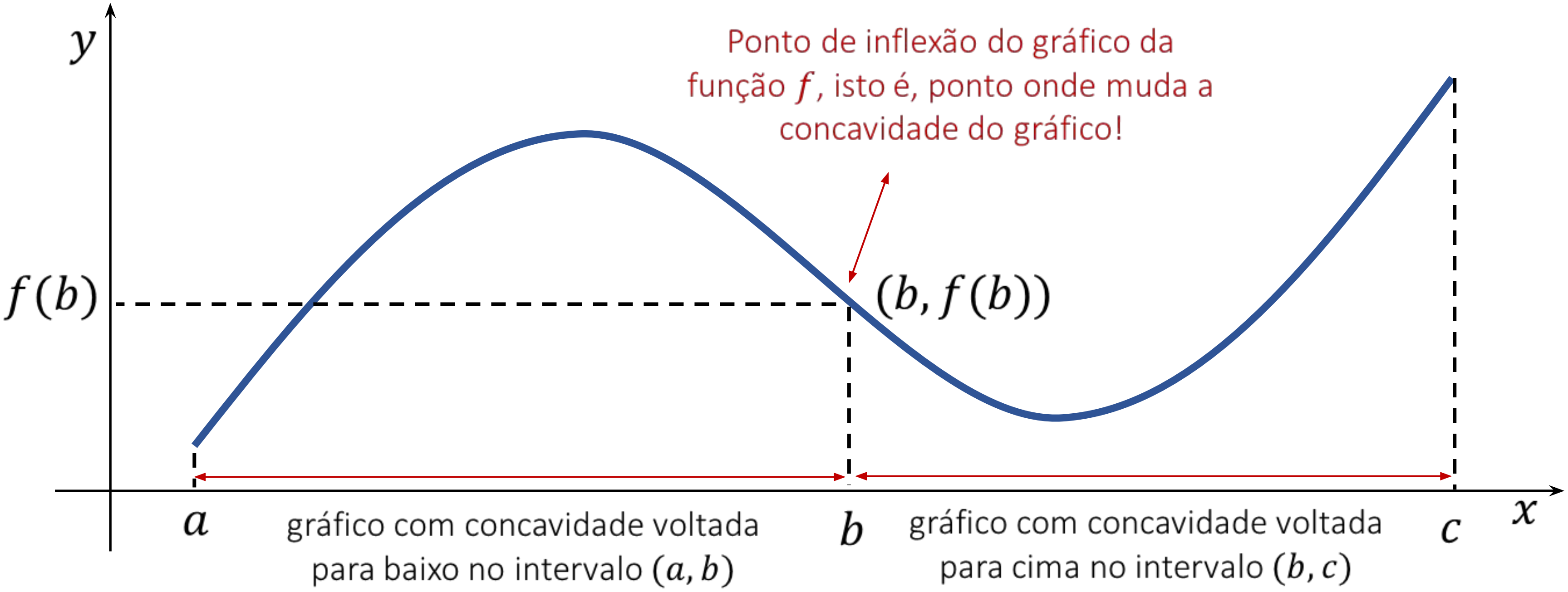
Seja f uma função contínua e duas vezes derivável num intervalo I.

Com a segunda derivada de f podemos obter informações sobre:

Máximos e mínimos locais

Concavidade do gráfico

Pontos de inflexão



Veremos agora como obter cada uma dessas informações:

Concavidade

Teorema: Sendo f uma função duas vezes derivável, f'e f'' sua primeira e segunda derivadas, respectivamente. Então:

Onde f'' for positiva, a concavidade da função é voltada para cima.

Onde f'' for negativa, a concavidade é voltada para baixo.

Portanto, para estudar a concavidade do gráfico de uma função f, podemos seguir os seguintes passos:

$\mathbf{1^o}$ Passo: Derive a função f, ou seja, calcule $f'(x)$.

$\mathbf{2^o}$ Passo: Derive a função f', ou seja, calcule $f''(x)$.

$\mathbf{3^o}$ Passo: Faça o estudo de sinal de $f''(x)$.

Nos intervalos onde $f''(x) > 0$ a concavidade é voltada para cima e onde $f''(x) < 0$ a concavidade é voltada para baixo.

Concavidade

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = x^3,$$

determine onde a concavidade é para cima e onde é para baixo.

Solução:

1^o Passo: Como $f(x) = x^3$ então:

$$f'(x) = 3x^2.$$

2^o Passo: Calculando f'', temos:

$$f''(x) = 6x.$$

3^o Passo: Estudando o sinal de f'' temos:

Quando $f''(x)$ é positiva?

Para todo $x > 0$.

Então, f é côncava para cima em $(0, +\infty)$.

Quando $f''(x)$ é negativa?

Para todo $x < 0$.

Então, f é côncava para baixo em $(-\infty, 0)$.

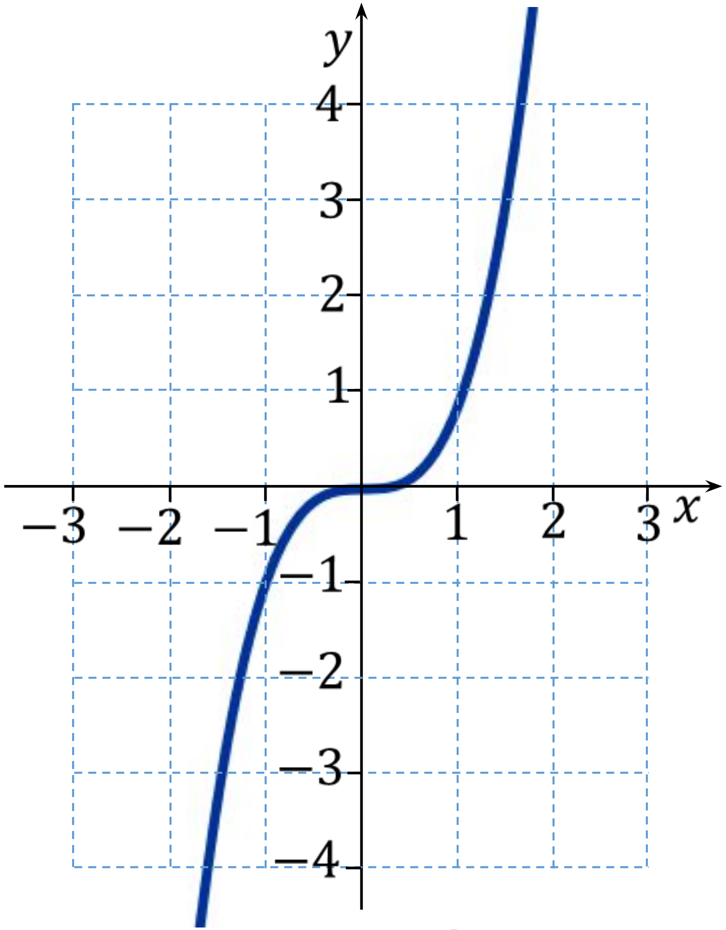


Gráfico de f

Teste da Segunda Derivada

Teorema: Seja f uma função tal que f'' seja contínua na proximidade de $x = c$.

Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f tem um ponto de máximo local em c.

Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f tem um ponto de mínimo local em c.

Portanto, para verivicar se a função f possui máximos ou mínimos locais, fazemos:

1^o **Passo:** Encontre $f'(x)$.

2^o **Passo:** Verifique se existe algum ponto crítico de f tal que $f'(c) = 0$.

3^o **Passo:** Encontre $f''(x)$.

4^o **Passo:** Analise o sinal de $f''(c)$.

Se $f''(c) < 0$ então $x = c$ é um máximo local.

Se $f''(c) > 0$ então $x = c$ é um mínimo local.

Teste da Segunda Derivada

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = x^2 + 2x - 4.$$

determine seu ponto crítico e se ele é de máximo ou de mínimo.

Solução:

1^o Passo: Como $f(x) = x^2 + 2x - 4$ então

$$f'(x) = 2x + 2.$$

2^o Passo: Como $f'(x) = 2x + 2$ então

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1.$$

ponto crítico!

3^o Passo: Como $f'(x) = 2x + 2$ então

$$f''(x) = 2.$$

4^o Passo: Como

$$f''(-1) = 2 > 0$$

Portanto, $x = -1$ é um mínimo local.

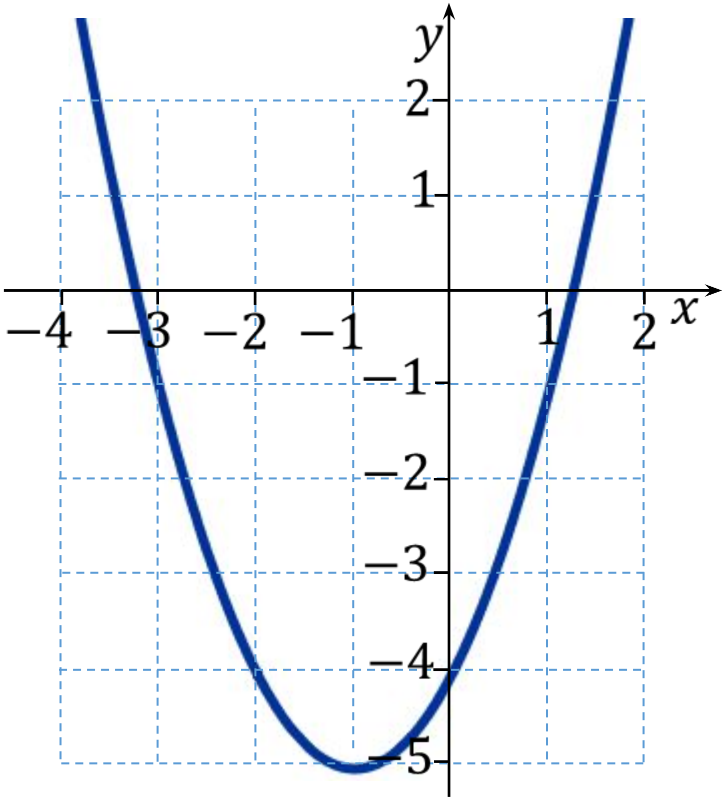


Gráfico de f

Pontos de inflexão

Definição: Um ponto P da curva $y = f(x)$ é chamado de ponto de inflexão se f é contínua no ponto e a curva mudar de côncava para cima para côncava para baixo ou vice-versa em P.

Portanto, para determinar se o gráfico de uma função f possui pontos de inflexão, fazemos:

$\mathbf{1^o}$ Passo: Encontre $f''(x)$.

$\mathbf{2^o}$ Passo: Verifique se f'' troca de sinal em algum número $x = d$.

$\mathbf{3^o}$ Passo: Verifique se f é contínua em $x = d$.

$\mathbf{4^o}$ Passo: Determine as coordenadas $(d, f(d))$ do ponto de inflexão.

Se f'' troca do sinal positivo para negativo, então o gráfico de f está trocando de côncavo para cima para côncavo para baixo.

Se f'' troca do sinal negativo para positivo, então o gráfico de f está trocando de côncavo para baixo para côncavo para cima.

Pontos de inflexão

Exemplo: Dada a função

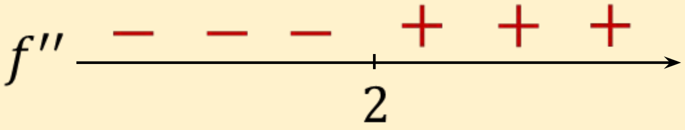
$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3.$$

determine se f possui pontos de inflexão.

Solução:

1^o Passo: $$f''(x) = 6x - 12.$$

2^o Passo: Sinal de f'':



3^o Passo: Como f é uma função polinomial, segue que f é contínua em $d = 2$.

Dos três passos acima, temos que a função f possui um ponto de inflexão $d = 2$.

4^o Passo: As coordenadas do ponto de inflexão são dadas por:

$$P = \big(2\,,f(2)\big) = (2,-1).$$

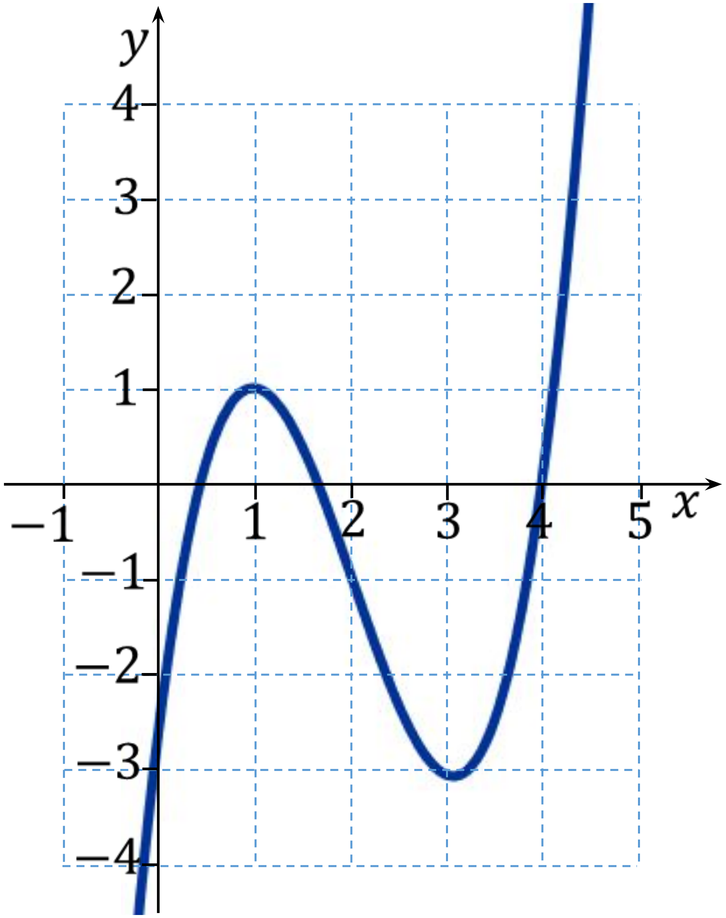


Gráfico de f

Exercícios Propostos

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Exercícios

1) Para as funções abaixo, determine:

i) os intervalos nos quais f é ***crescente***;

ii) os intervalos nos quais f é ***decrescente***;

iii) os intervalos nos quais f é ***côncava para cima***;

iv) os intervalos nos quais f é ***côncava para baixo***;

v) as coordenadas dos ***pontos de inflexão*** *(se existirem)*;

vi) as coordenadas dos pontos de máximo ou mínimo *(se existirem)*;

vii) o ***esboço do gráfico*** da função f utilizando as informações obtidas nos itens anteriores.

(a) $f(x) = x^4 - 4x^3$

(b) $f(x) = (x-1)^3$

(c) $f(x) = \dfrac{(x+2)}{(x+1)}$

(d) $f(x) = x^2 - 4x$

(e) $f(x) = x^4 - 4x^2$

(f) $f(x) = \dfrac{(x^2+1)}{(x^2-1)}$

Respostas

Exercício 1:

(a) $f(x) = x^4 - 4x^3$

i. $(3, +\infty)$

ii. $(-\infty, 3)$

iii. $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

iv. $(0,2)$

v. $(0, 0)$ e $(2, -16)$

vi. $(3, -27)$ (mínimo local)

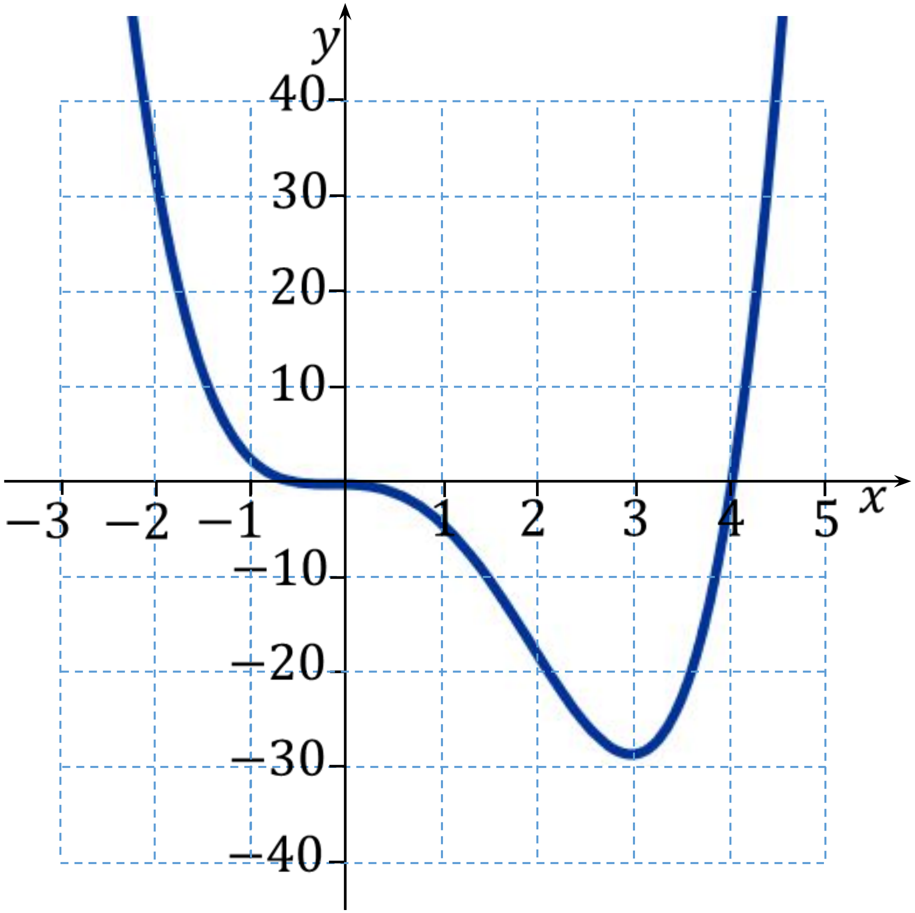


Gráfico de f

Respostas

Exercício 1:

(b) $f(x) = (x - 1)^3$

- i. $\mathbb{R}$
- ii. $\nexists$
- iii. $(1, +\infty)$
- iv. $(-\infty, 1)$
- v. $(1, 0)$
- vi. $\nexists$

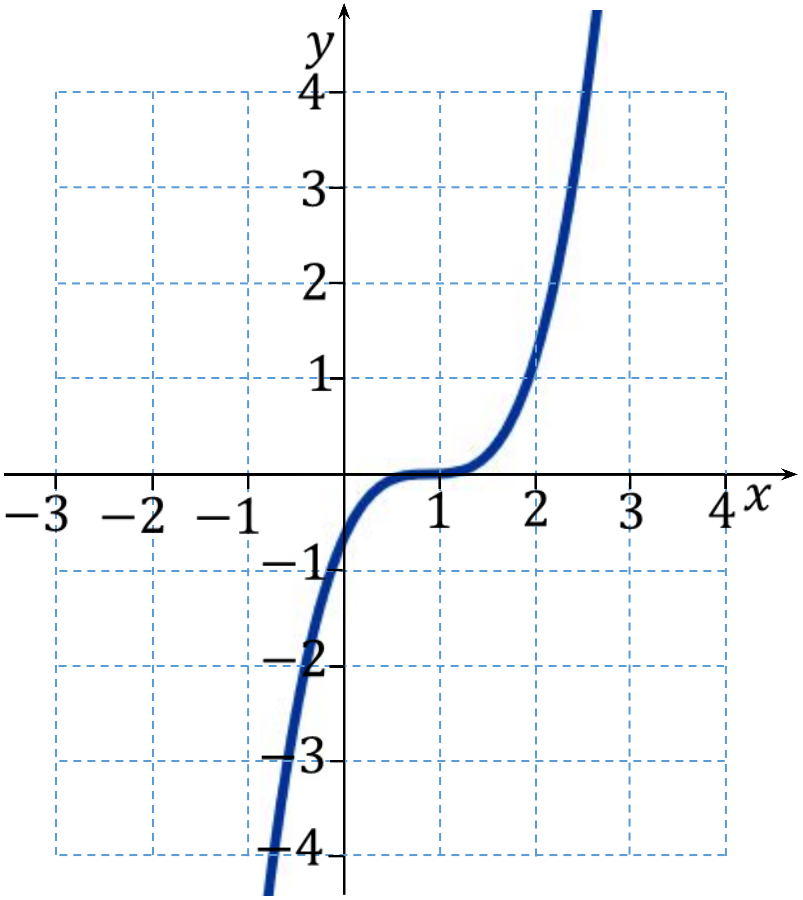


Gráfico de f

Respostas

Exercício 1:

(c) $f(x) = \dfrac{(x+2)}{(x+1)}$

i. $\nexists$

ii. $\mathbb{R} - \{-1\}$

iii. $(-1, +\infty)$

iv. $(-\infty, -1)$

v. $\nexists$

vi. $\nexists$

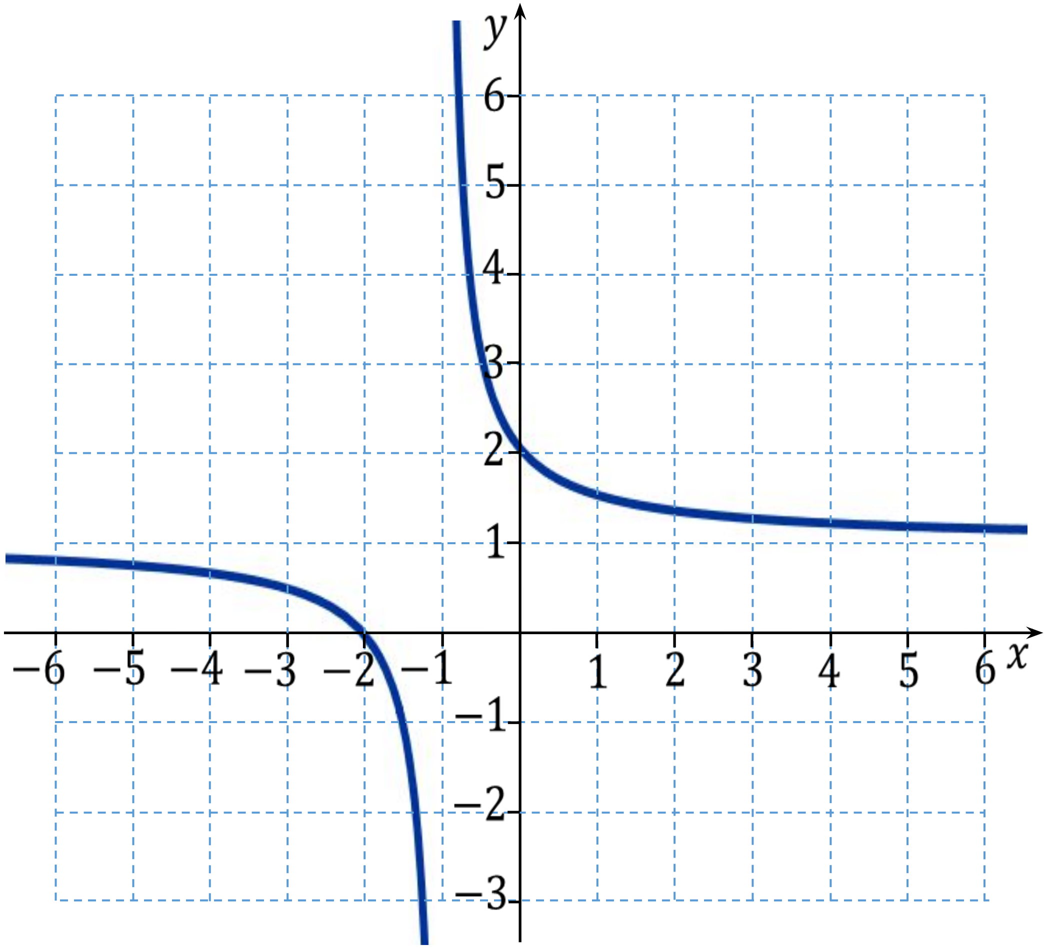


Gráfico de f

Respostas

Exercício 1:

(d) $f(x) = x^2 - 4x$

i. $(2, +\infty)$

ii. $(-\infty, 2)$

iii. $\mathbb{R}$

iv. $\nexists$

v. $\nexists$

vi. $(2, -4)$ (mínimo local).

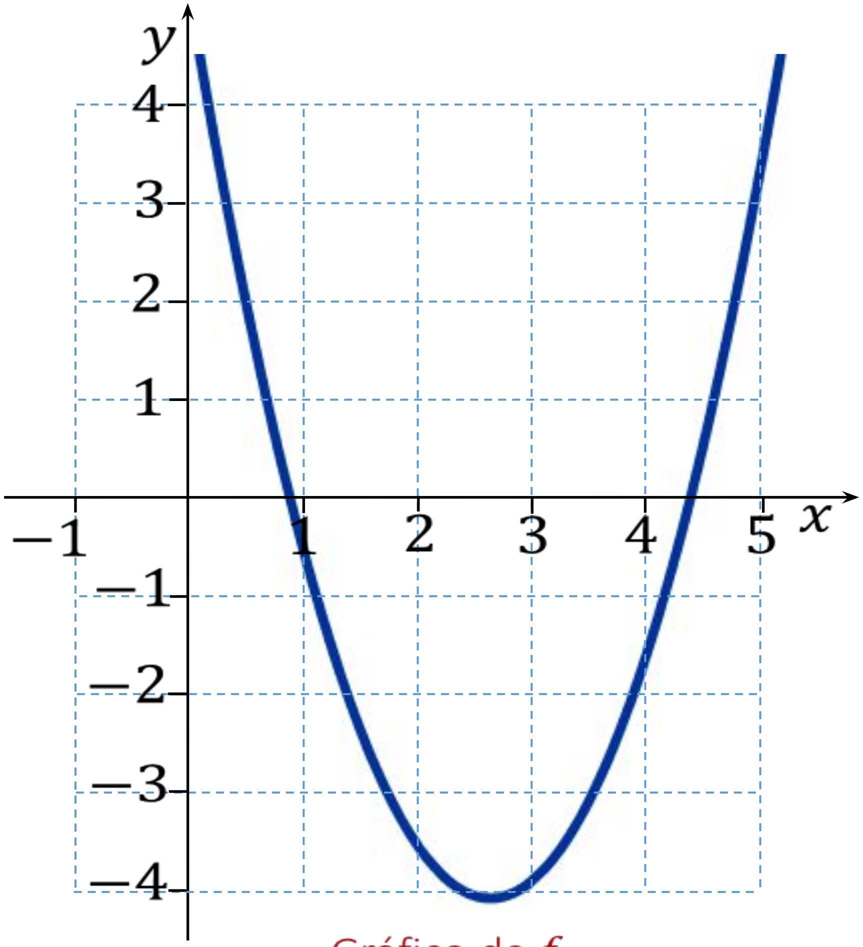


Gráfico de f

Respostas

Exercício 1:

(e) $f(x) = x^4 - 4x^2$

i. $(-\sqrt{2},\ 0) \cup (\sqrt{2},+\infty)$

ii. $(-\infty,-\sqrt{2}) \cup (0,\sqrt{2})$

iii. $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{2}{3}},+\infty\right)$

iv. $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

v. $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},-\frac{20}{9}\right)$ *e* $\left(\sqrt{\frac{2}{3}},-\frac{20}{9}\right)$

vi. $(-\sqrt{2},\ -4)$ e $(\sqrt{2},\ -4)$ (mínimos locais) e $(0,0)$ (máximo local).

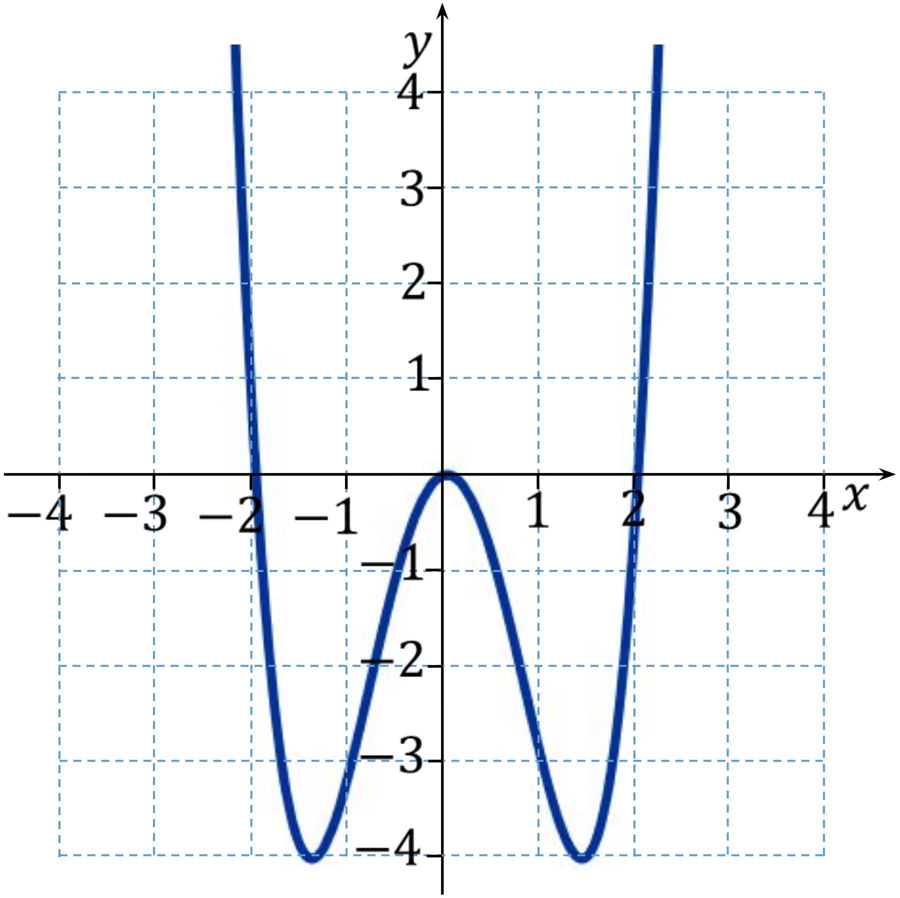


Gráfico de f

Respostas

Exercício 1:

(f) $f(x) = \frac{(x^2+1)}{(x^2-1)}$

- i. $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
- ii. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
- iii. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- iv. $(-1,1)$
- v. $\nexists$
- vi. $(0, -1)$ (máximo local)

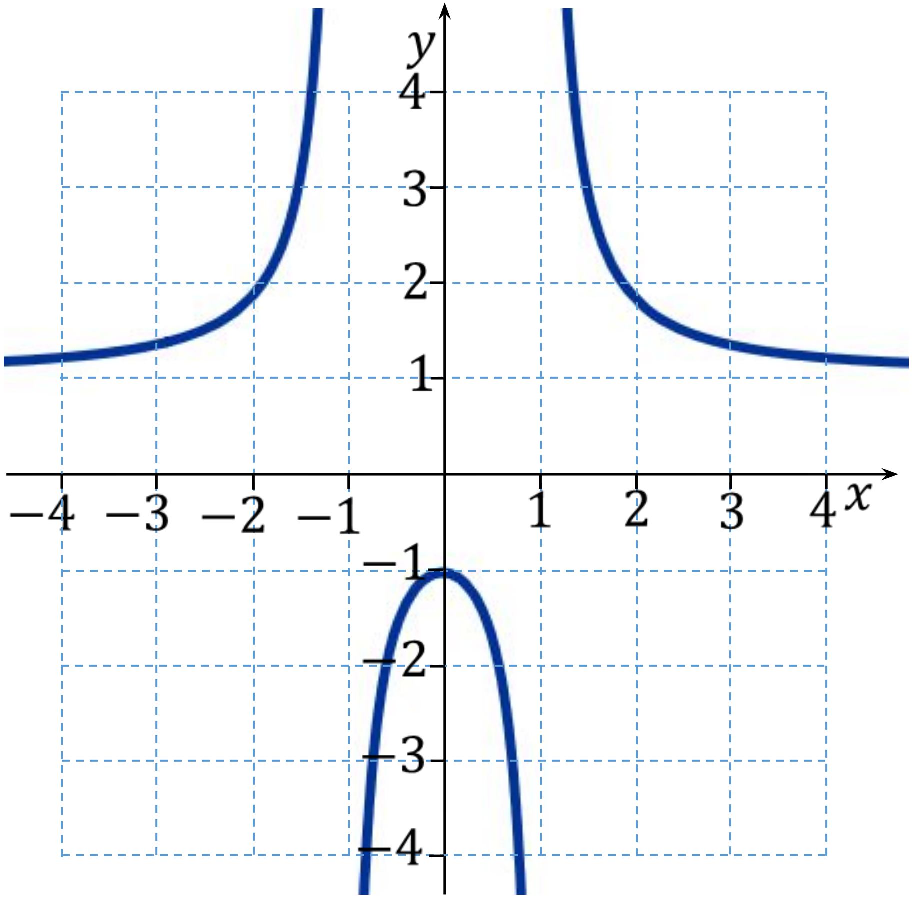


Gráfico de f

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/

Não deixe de visitar e se inscrever em nosso canal no YouTube para ter acesso às nossas vídeo-aulas:

https://www.youtube.com/channel/UCB3NUeew6Ji_k39-_GDA3iQ/playlists

O GAMA possui monitorias de:

- ❑ **Pré-cálculo e Matemática Elementar** (e disciplinas equivalentes)
  - ❑ **ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica** (e disciplinas equivalentes)
    - ❑ **Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I** (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.