Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino

Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

Matemática Básica

2020/1

Aula 01

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Conjuntos Numéricos

Números naturais

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

Subconjunto notável

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$ Naturais positivos

Números inteiros

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Subconjuntos notáveis

$\mathbb{Z}_- = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$ Inteiros não- positivos

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ Inteiros não- negativos

$\mathbb{Z}_-^* = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1\}$ Inteiros negativos

$\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ Inteiros positivos

$\mathbb{Z}^* = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ Inteiros não nulos

Conjuntos Numéricos

Números racionais

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Decimais exatas

Dízimas periódicas

Subconjuntos notáveis $\quad \mathbb{Q}_- \quad \mathbb{Q}_+ \quad \mathbb{Q}_-^* \quad \mathbb{Q}_+^* \, \mathbb{Q}^*$

Números reais

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$

Irracionais

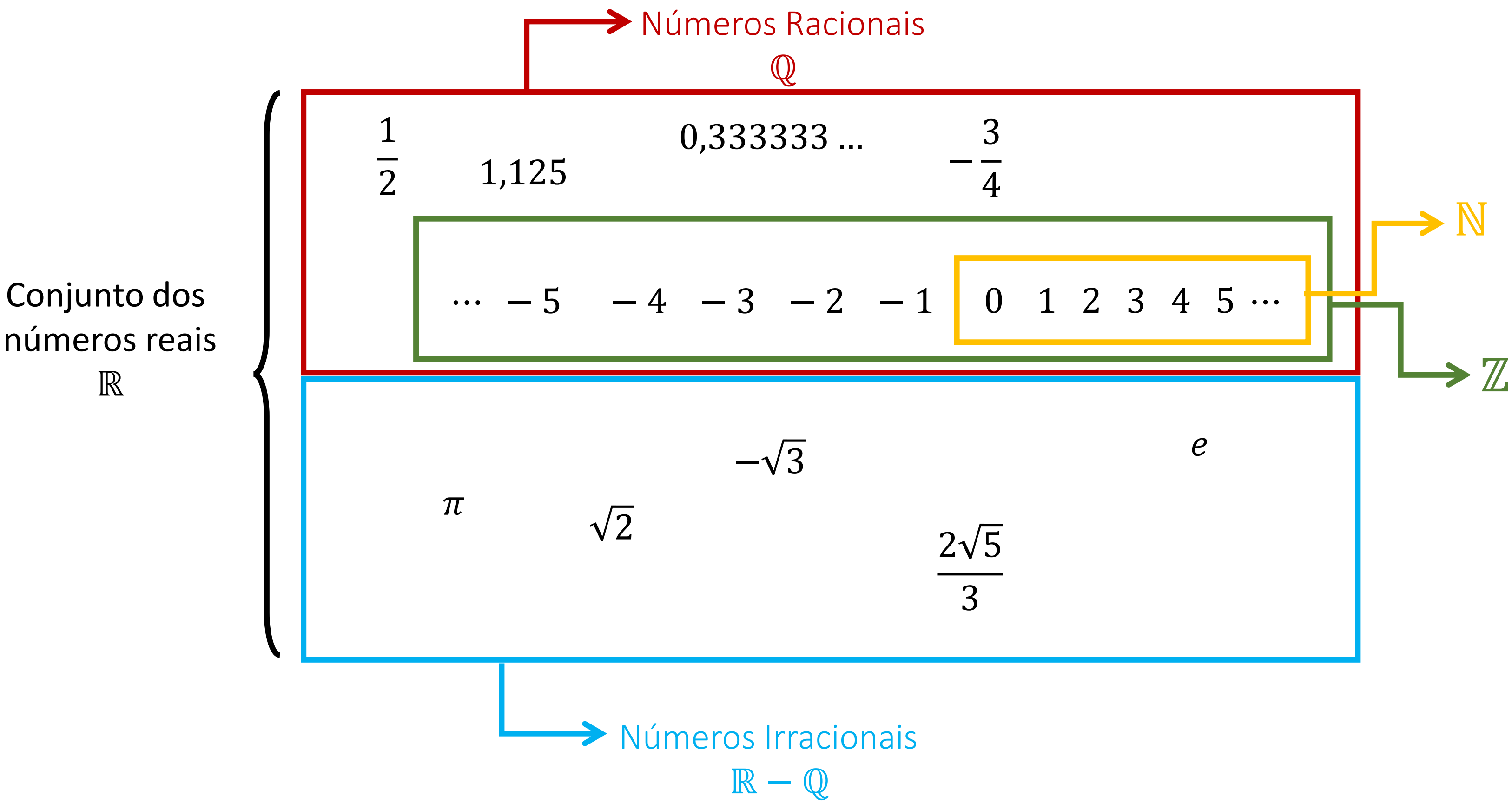
Todos os números reais
que não são racionais

Subconjuntos notáveis

$$\mathbb{R}_- \quad \mathbb{R}_+ \quad \mathbb{R}_-^* \quad \mathbb{R}_+^* \quad \mathbb{R}^*$$

Conjuntos Numéricos

Representação dos conjuntos numéricos por diagramas



Pertinência e inclusão

Pertinência		Inclusão			
Relaciona elemento e conjunto.		Relaciona dois conjuntos.			
$\in$	$\notin$	$\subset$	$\not\subset$	$\supset$	$\not\supset$
pertence	não pertence	está contido	não está contido	contém	não contém

O elemento x pertence ao conjunto A

$$x \in A$$

O elemento x não pertence ao conjunto A

$$x \notin A$$

A é subconjunto B

$$A \subset B$$

$$B \supset A$$

Todo elemento de A é também elemento de B

A não é subconjunto B

$$A \not\subset B$$

$$B \not\supset A$$

Nem todos elementos de A são elemento de B

Exemplos: Em cada caso, complete as lacunas com os símbolos $\in, \notin, \subset, \not\subset\ \supset, \not\supset$ da forma mais conveniente em

$$2 \underline{\ \in\ } \mathbb{N} \quad -5 \underline{\ \in\ } \mathbb{Z} \quad -5 \underline{\ \notin\ } \mathbb{N} \quad 0 \underline{\ \notin\ } \mathbb{N}^*$$

$$\{1,2,3\} \underline{\ \subset\ } \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\} \qquad \mathbb{N} \underline{\ \subset\ } \mathbb{Z} \qquad \{-1, 0, 2\} \underline{\ \not\supset\ } \mathbb{N}$$

$$\mathbb{N} \underline{\ \subset\ } \mathbb{Z} \underline{\ \subset\ } \mathbb{Q} \underline{\ \subset\ } \mathbb{R} \qquad \mathbb{Z} \underline{\ \not\supset\ } \mathbb{Q} \qquad \mathbb{R} \underline{\ \supset\ } \mathbb{Q} \qquad \mathbb{N} \underline{\ \not\subset\ } \mathbb{Z}^*$$

Regra de sinais

Somas e subtrações:

Sinais iguais: soma-se e conserva o sinal.

Sinais diferentes: subtrai-se e conserva-se o sinal do maior (em módulo).

Exemplos:

$8 + 3 = 11$ $\quad -7 - 3 = -10$ $\quad 5 - 3 = 2$ $\quad -10 + 4 = -6$

Multiplicações e divisões:

Sinais iguais: resulta em sinal positivo.

Sinais diferentes: resulta em sinal negativo.

Exemplos:

$(2) \cdot (3) = 6$ $\quad (-5) \cdot (-3) = 15$

$(4) \cdot (-8) = -32$ $\quad (-7) \cdot (2) = -14$

Intervalos reais

Intervalo aberto

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

Intervalo fechado

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

Intervalo semiaberto à esquerda

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

Intervalo semiaberto à direita

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

Intervalo ilimitado aberto à esquerda

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

Intervalo ilimitado fechado à esquerda

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

Intervalo ilimitado aberto à direita

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

Intervalo ilimitado fechado à direita

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$$

Operações com Intervalos

Exemplo: Represente os seguintes intervalos na reta real.

(a) $I_1 = (-2,1)$

(b) $I_2 = [-2,2]$

(c) $I_3 = (0,3]$

(d) $I_4 = [-1,3)$

(e) $I_5 = (-1,+\infty)$

(f) $I_6 = [1,+\infty)$

(g) $I_7 = (-\infty,3]$

(h) $I_8 = (-\infty,2)$

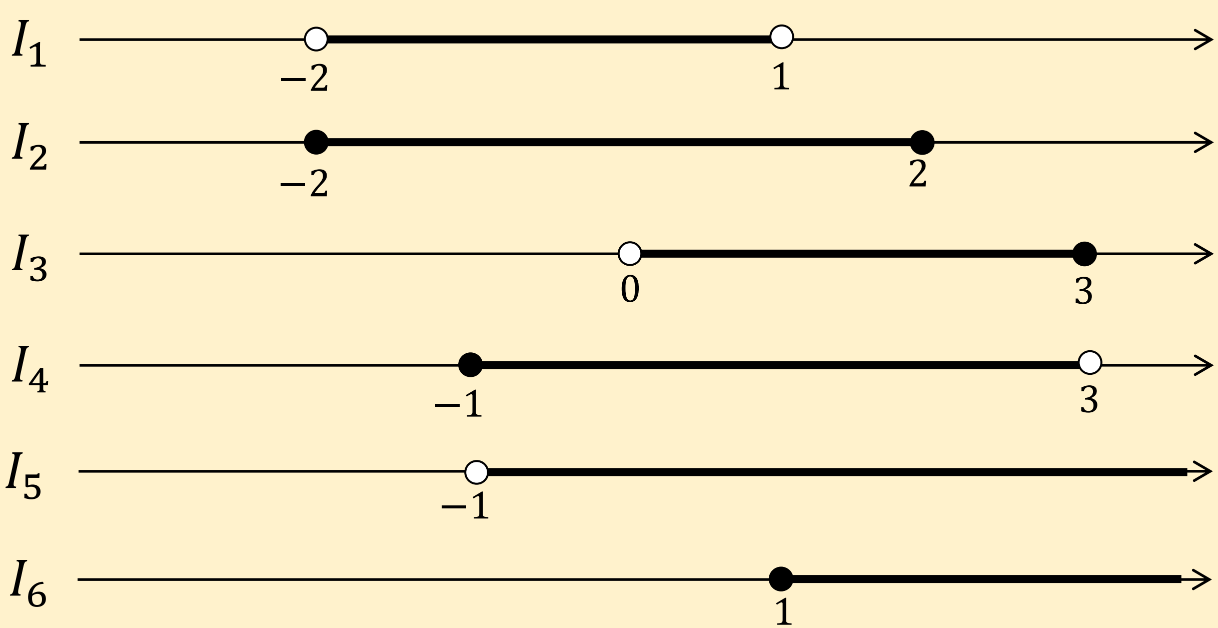
(i) $I_9 = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 0\}$

(j) $I_{10} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$

(k) $I_{11} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$

(l) $I_{12} = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 2\}$

Solução:



Operações com Intervalos

Exemplo: Represente os seguintes intervalos na reta real.

(a) $I_1 = (-2,1)$

(b) $I_2 = [-2,2]$

(c) $I_3 = (0,3]$

(d) $I_4 = [-1,3)$

(e) $I_5 = (-1,+\infty)$

(f) $I_6 = [1,+\infty)$

(g) $I_7 = (-\infty,3]$

(h) $I_8 = (-\infty,2)$

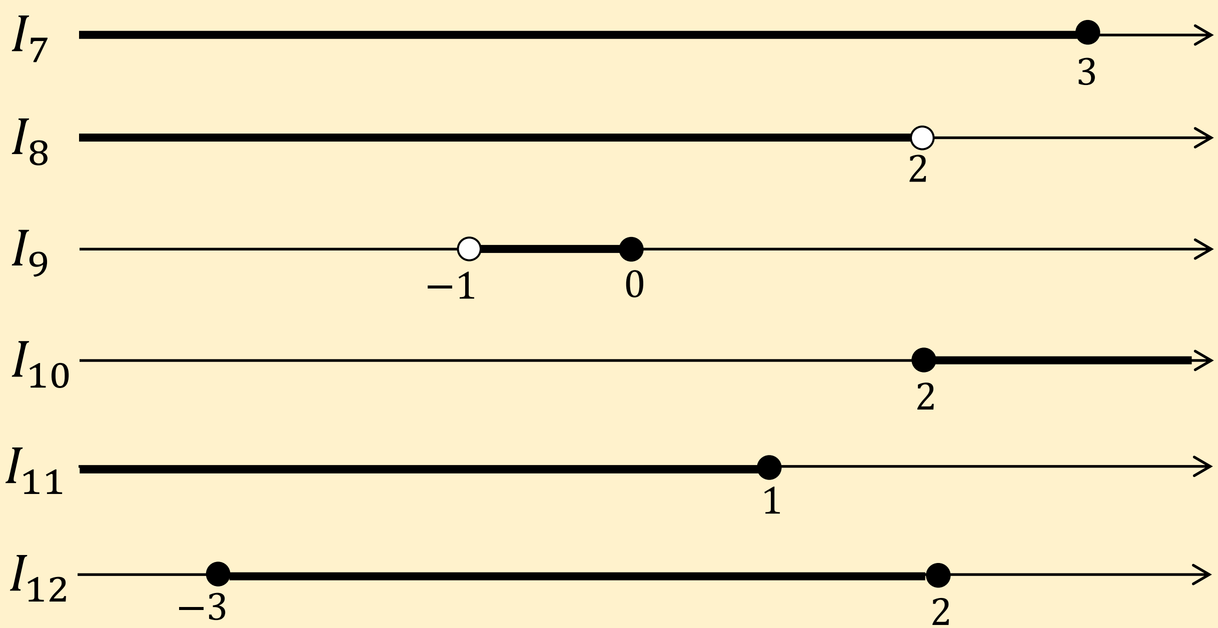
(i) $I_9 = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 0\}$

(j) $I_{10} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$

(k) $I_{11} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$

(l) $I_{12} = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 2\}$

Solução:



Operações com Intervalos

União

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A ou B

Diferença

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Elementos que pertencem ao conjuntos A e não pertencem ao conjunto B

Interseção

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Elementos que pertencem simultaneamente aos conjuntos A e B

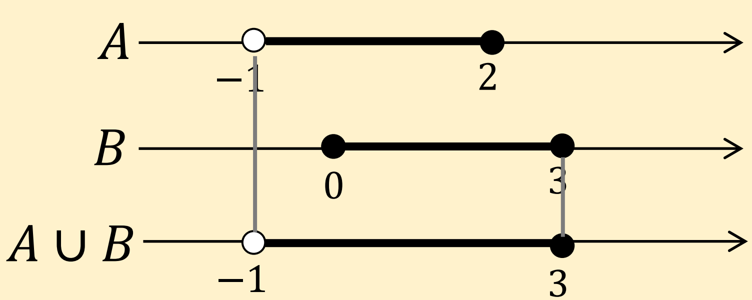
Complementar

$$A' = \{x \mid x \notin A\}$$

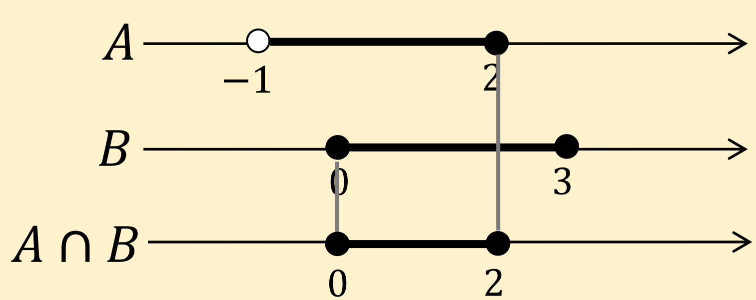
Elementos que não pertencem ao conjunto A

Exemplo: Sendo $A = (-1, 2]$ e $B = [0,3]$, determine $A \cup B$ e $A \cap B$.

Solução:



$$A \cup B = (-1, 3]$$



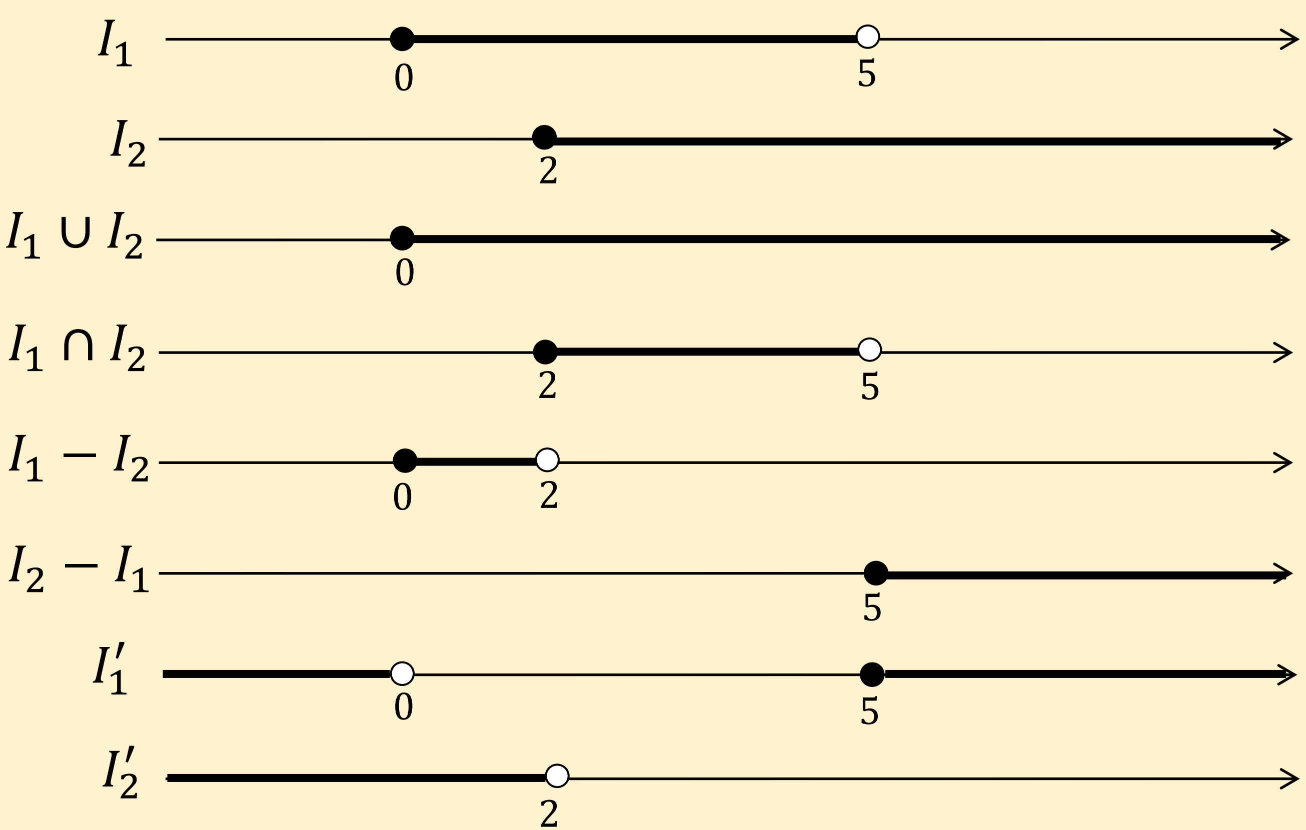
$$A \cap B = [0, 2]$$

Operações com Intervalos

Exemplo: Sendo $I_1 = [0, 5)$ e $I_2 = [2, +\infty)$, determine:

(a) $I_1 \cup I_2$ (b) $I_1 \cap I_2$ (c) $I_1 - I_2$ (d) $I_2 - I_1$ (e) I_1' (f) I_2'

Solução:



Decomposição em fatores primos

Definição: Um número natural p é chamado de **número primo** se $p \geq 2$ e p é divisível apenas por 1 e por p.

Exemplos:

2 é primo

3 é primo

4 não é primo
$4 = 2 \cdot 2$
divisível por 2.

5 é primo

6 não é primo
$6 = 2 \cdot 3$
divisível por 2 e por 3.

Exemplos: Em cada caso, decomponha o número dado como um produto de fatores primos.

(a) 12 (b) 125 (c) 232

Solução:

(a)
$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ \hline 1 & 2^2 \cdot 3 \end{array}$$

Decomposição em fatores primos
$12 = 2^2 \cdot 3$

(b)
$$\begin{array}{r|l} 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ \hline 1 & 5^3 \end{array}$$

Decomposição em fatores primos
$125 = 5^3$

(c)
$$\begin{array}{r|l} 232 & 2 \\ 116 & 2 \\ 58 & 2 \\ 29 & 29 \\ \hline 1 & 2^3 \cdot 29 \end{array}$$

Decomposição em fatores primos
$232 = 2^3 \cdot 29$

Mínimo múltiplo comum

Definição: O **mínimo múltiplo comum** de dois inteiros positivos a e b, denotado por $mmc(a,b)$ é o menor múltiplo comum de a e b.

Exemplos: Encontre

$$mmc(6,15)$$

Solução: Note que os múltiplos positivos de 6 e de 15 são:

$$M(6)=\{6,12,18,24,30,36,42,\ldots\} \text{ e } \quad M(15)=\{15,30,45,\ldots\}$$

Portanto,

$$mmc(6,15)=30$$

Menor múltiplo comum de 6 e 15

Na prática, encontra-se o $mmc(a,b)$ utilizando-se o seguinte método prático, que utiliza a forma fatorada de a e b:

$$\begin{array}{ccc|l} 6 & - & 15 & 2 \\ 3 & - & 15 & 3 \\ 1 & - & 5 & 5 \\ \hline 1 & - & 1 & 2\cdot 3\cdot 5 \end{array}$$

Portanto,

$$mmc(6,15)=2\cdot 3\cdot 5=30$$

Mínimo múltiplo comum

Pode-se calcular o mínimo múltiplo comum entre três ou mais números utilizando-se um método parecido ao do exemplo anterior.

Exemplos: Encontre

$$mmc(10, 28, 35)$$

Solução: Utilizando a fatoração simultânea de $10, 28$ e 35, tem-se:

$$\begin{array}{r|l}
10 - 28 - 35 & 2 \\
5 - 14 - 35 & 2 \\
5 - 7 - 35 & 5 \\
1 - 7 - 7 & 7 \\
\hline
1 - 1 - 1 & 2^2 \cdot 5 \cdot 7
\end{array}$$

Portanto,

$$mmc(10, 28, 35) = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 = 140$$

Operações e propriedades das frações

Igualdade de frações

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Duas frações são iguais sempre que a multiplicação cruzada resultar em números iguais.

Exemplo:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \quad \text{pois} \quad \underbrace{2 \cdot 6}_{12} = \underbrace{3 \cdot 4}_{12}$$

Exemplo:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{pois} \quad \underbrace{1 \cdot 2}_{2} = \underbrace{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}_{2}$$

Simplificação

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$$

Fatores comuns ao numerador e denominador podem ser simplificados.

Exemplo:

$$\frac{15}{12} = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{5}{4}$$

Exemplo:

$$\frac{25a}{5ab} = \frac{5 \cdot 5 \cdot a}{5 \cdot a \cdot b} = \frac{5}{b}$$

Operações e propriedades das frações

Soma/subtração

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{\frac{m}{b} \cdot a \pm \frac{m}{d} \cdot c}{m}$$

$m = m.m.c.(b,d)$ mínimo múltiplo comum entre b e d.

Exemplo:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{5} = \frac{\frac{10}{2} \cdot 1 + \frac{10}{5} \cdot 3}{10} = \frac{5+6}{10} = \frac{11}{10}.$$

$$\begin{array}{r|l} 2 - 5 & 2 \\ 1 - 5 & 5 \\ \hline 1 - 1 & 2 \cdot 5 \end{array}$$

$mmc(2,5) = 2 \cdot 5 = 10$

Exemplo:

$$\frac{3}{4} - \frac{7}{10} = \frac{\frac{20}{4} \cdot 3 - \frac{20}{10} \cdot 7}{20} = \frac{15-14}{20} = \frac{1}{20}.$$

$$\begin{array}{r|l} 4 - 10 & 2 \\ 2 - 5 & 2 \\ 1 - 5 & 5 \\ \hline 1 - 1 & 2 \cdot 2 \cdot 5 \end{array}$$

$mmc(4,10) = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$

Operações e propriedades das frações

Multiplicação

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Multiplica-se o de cima pelo de cima e o de baixo pelo de baixo.

Exemplo:

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{8}=\frac{3\cdot 1}{5\cdot 8}=\frac{3}{40}.$$

Exemplo:

$$\frac{a+1}{2a}\cdot\frac{b}{a}=\frac{(a+1)\cdot b}{(2a)\cdot a}=\frac{ab+b}{2a^2}.$$

Divisão

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Multiplica-se a primeira pelo inverso da segunda.

Exemplo:

$$\frac{5}{3}\div\frac{2}{7}=\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{2}=\frac{5\cdot 7}{3\cdot 2}=\frac{35}{6}.$$

Exemplo:

$$\frac{a^2}{2b}\div\frac{a}{b}=\frac{a^2}{2b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{a\cdot a\cdot b}{2\cdot b\cdot a}=\frac{a}{2}.$$

Operações com frações

Exemplos: Efetue as seguintes operações com frações

(a) $\frac{1}{5}+\frac{2}{3}$ (b) $\frac{1}{8}-\frac{5}{4}$ (c) $\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}$ (d) $\frac{4}{9}\div\frac{1}{2}$ (e) $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}-\frac{4}{15}$

Solução:

(a) $$\frac{1}{5}+\frac{2}{3}=\frac{\frac{15}{5}\cdot 1+\frac{15}{3}\cdot 2}{15}=\frac{3+10}{15}=\frac{13}{15}.$$

$$\begin{array}{l|l} 5 - 3 & 3 \\ 5 - 1 & 5 \\ \hline 1 - 1 & 3\cdot 5 \end{array}$$

$mmc(5,3)=3\cdot 5=15$

(b) $$\frac{1}{8}-\frac{5}{4}=\frac{\frac{8}{8}\cdot 1-\frac{8}{4}\cdot 5}{8}=\frac{1-10}{8}=-\frac{9}{8}.$$

$$\begin{array}{l|l} 8 - 4 & 2 \\ 4 - 2 & 2 \\ 2 - 1 & 2 \\ \hline 1 - 1 & 2\cdot 2\cdot 2 \end{array}$$

$mmc(8,4)=2^3=8$

(c) $$\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}=\frac{1\cdot 5}{3\cdot 2}=\frac{5}{6}.$$

(d) $$\frac{4}{9}\div\frac{1}{2}=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{1}=\frac{4\cdot 2}{9\cdot 1}=\frac{8}{9}.$$

(e) $$\frac{3}{4}+\frac{1}{3}-\frac{4}{15}=\frac{\frac{60}{4}\cdot 3+\frac{60}{3}\cdot 1-\frac{60}{15}\cdot 4}{60}$$

$$=\frac{15\cdot 3+20\cdot 1-4\cdot 4}{60}=\frac{45+20-16}{60}=\frac{49}{60}.$$

$$\begin{array}{l|l} 4 - 3 - 15 & 2 \\ 2 - 3 - 15 & 2 \\ 1 - 3 - 15 & 3 \\ 1 - 1 - 5 & 5 \\ \hline 1 - 1 - 1 & 2^2\cdot 3\cdot 5 \end{array}$$

$mmc(4,3,15)=2^2\cdot 3\cdot 5=60$

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Represente graficamente os intervalos a seguir e verifique se os números

$$5; \quad \pi; \quad \sqrt{5}; \quad -0{,}2; \quad \frac{5}{2};$$

pertencem a cada intervalo:

(a) $A = [-2{,}5)$

(b)$B = (2{,}7)$

(c)$C = (6, +\infty)$

2)Sendo: $A = [-2, 5]$, $B = (2, 7)$ e $C = (6, +\infty)$. Determine:

(a) $A \cap C$

(b) $A \cap B$

(c) $A - B$

(d) $A \cup C$

(e) $(A \cup C) \cup B$

(f) $(A - C) \cap B$

3)Sendo $U = \mathbb{R}$ represente cada um dos intervalos indicados por compreensão e na reta real:

(a) conjunto dos números maiores que −3 e menores que 1;

(b) conjunto dos números menores ou iguais a −4;

(c) conjunto dos números maiores que -1 ou menores que -3.

Exercícios

4) Realize cada uma das operações envolvendo frações:

(a) $\dfrac{3}{5} - \dfrac{2}{15} + \dfrac{1}{3}$

(b) $-\dfrac{4}{7} \cdot \dfrac{2}{3}$

(c) $\left(-\dfrac{3}{5}\right) \cdot \left(-\dfrac{2}{4}\right)$

(d) $\dfrac{1}{\left(1 + \frac{1}{3}\right)}$

(e) $\dfrac{4}{3} \div 2$

(f) $\dfrac{-\frac{5}{3}}{\frac{15}{6}}$

5) Calcule:

(a) $\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{5} \div \dfrac{3}{10} + 1$

(b) $2 + 3 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)$

(c) $\dfrac{1}{3} + \left[\dfrac{1}{3} \div \left(\dfrac{1}{4} + 1\right)\right] \cdot \left(-\dfrac{1}{9}\right)$

Exercícios

6) Represente graficamente na reta real os seguintes intervalos:

(a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3\}$

(b) $(-\infty, 2]$

(c) $[-3, \frac{1}{2}]$

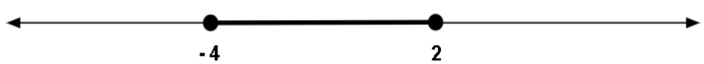
(d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 7\}$

(e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$

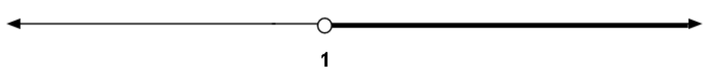
(f) $[0,6)$

7) Escreva os intervalos representados graficamente:

(a)

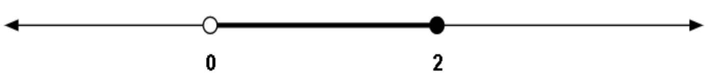


(b)

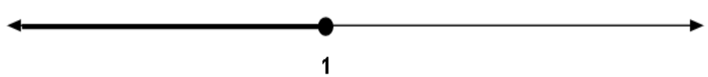


(c)

(d)



(e)



Exercícios

8) Dados os conjuntos a seguir, determine o que se pede.

(a) $\mathrm{A} = [2, 4]$ e $\mathrm{B} = [3, 6]$:

$\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$

$\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$

$\mathrm{A} - \mathrm{B}$

$\mathrm{B} - \mathrm{A}$

(b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$: $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}, \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$.

$\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$

$\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$

9) Dados os intervalos $\mathrm{A} = [-1, 4], \mathrm{B} = [1, 5], \mathrm{C} = [2, 4]$ e $\mathrm{D} = [1, 3]$, verifique se 1 pertence ao conjunto $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) - (\mathrm{C} - \mathrm{D})$.

Exercícios

10) Realize as seguinte operações envolvendo frações:

(a) $\frac{25}{3} + \frac{5}{2} \div 2$

(b) $\left(-\frac{3}{4}\right) \div \left(-\frac{5}{2}\right) + \left(\frac{27}{16}\right)$

(c) $-1 + \frac{2}{3} . \frac{7}{8}$

(d) $\frac{12}{5} - \frac{24}{15}$

(e) $\frac{2}{100} + \frac{98}{10}$

(f) $\frac{27}{8} \div \frac{5}{16}$

(g) $-2 . \frac{23}{8} - \frac{1}{2}$

(h) $2 . \frac{1}{8} + \frac{2}{7} - \frac{81}{9}$

Respostas

Exercício 1:

a) π , $\sqrt{5}$, -0,2 , $\frac{5}{2}$

b) 5 , π , $\sqrt{5}$, $\frac{5}{2}$

c) Nenhum

Exercício 2:

a) $\emptyset$

b) $(2{,}5]$

c) $[-2{,}2]$

d) $[-2{,}5] \cup (6,+\infty)$

e) $[-2, ,+\infty)$

f) $(2{,}5]$

Exercício 3:

a) $\{x \in \mathbb{R} \,|-3 < x < 1\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -4\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > -1\}$

Exercício 4:

a) $\frac{4}{5}$

b) $-\frac{8}{21}$

c) $\frac{3}{10}$

d) $\frac{3}{4}$

e) $\frac{2}{3}$

f) $-\frac{2}{3}$

Exercício 5:

a) $\frac{11}{6}$

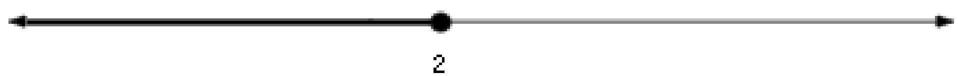
b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{41}{135}$

Respostas

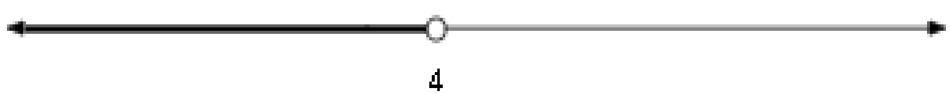
Exercício 6:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

Exercício 7:

a) $\{x \in \mathbb{R} | -4 \leq x \leq 2\}$ ou $[-4, 2]$

b) $\{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$ ou $(1, +\infty)$

c) $\{x \in \mathbb{R} | -3 < x < 3\}$ ou $(-3, 3)$

d) $\{x \in \mathbb{R} | 0 < x \leq 2\}$ ou $(0, 2]$

e) $\{x \in \mathbb{R} | x \leq 1\}$ ou $(-\infty, 1]$

Respostas

Exercício 8:

a) $A \cap B$ $\{x \in \mathbb{R} | 3 \leq x \leq 4\}$ ou $[3, 4]$

$A \cup B$ $\{x \in \mathbb{R} | 2 \leq x \leq 6\}$ ou $[2, 6]$

$A - B$ $\{x \in \mathbb{R} | 2 \leq x < 3\}$ ou $[2, 3)$

$B - A$ $\{x \in \mathbb{R} | 4 < x \leq 6\}$ ou $(4, 6]$

b) $A \cap B$ $\{x \in \mathbb{R} | x < 1\}$ ou $(-\infty, 1)$

$A \cup B$ $\{x \in \mathbb{R} | x < 4\}$ ou $(-\infty, 4)$

Exercício 9:

$\{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 3\}$ ou $[1,3]$, portanto $1 \in (A \cap B) - (C - D)$.

Exercício 10:

a) $\frac{115}{12}$

b) $\frac{159}{80}$

c) $-\frac{5}{12}$

d) $\frac{4}{5}$

e) $\frac{491}{50}$

f) $\frac{54}{5}$

g) $-\frac{25}{4}$

h) $-\frac{237}{28}$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/

O GAMA possui monitorias de:

- Pré-cálculo e Matemática Elementar (e disciplinas equivalentes)
- ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
- Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas
Instituto de Física e Matemática
Pró-reitoria de Ensino

Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

Matemática Básica

2020/1

Aula 02

Projeto
GAMA
Grupo de Apoio em Matemática

Potências em $\mathbb{R}$

Dados $a \in \mathbb{R}^*$ e $n \in \mathbb{N}$, definimos a **potência enésima** como:

$$\underbrace{a}_{\text{Base}}^{\overbrace{n}^{\text{Expoente}}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ \dots \ \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^0 = 1$$

Exemplo: Calcule as seguintes potências

(a) 2^3 (b) 5^{-2} (c) 3^0

Solução: Utilizando a definição de potência, tem-se:

(a) $2^3 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ fatores}} = 8$

(b) $5^{-2} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{\underbrace{5 \cdot 5}_{2 \text{ fatores}}} = \dfrac{1}{25}$

(c) $3^0 = 1$

Propriedades das potências

Produto de potências de mesma base

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Exemplo:

$$2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$$

Exemplo:

$$3^{2a} \cdot 3^5 = 3^{2a+5}$$

Quociente de potências de mesma base

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Exemplo:

$$\frac{3^5}{3^3} = 3^{5-3} = 3^2$$

Exemplo:

$$\frac{a^{5+b}}{a^c} = a^{5+b-c}$$

Potência de potência

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Exemplo:

$$(5^3)^4 = 5^{3 \cdot 4} = 5^{12}$$

Exemplo:

$$(a^2)^{2b} = a^{2 \cdot 2b} = a^{4b}$$

Fração com expoente negativo

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

Exemplo:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

Exemplo:

$$\left(\frac{1}{b}\right)^{-3} = b^3$$

Propriedades das potências

Produto de potências de mesmo expoente

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

Exemplo:

$$2^5 \cdot 3^5 = (2 \cdot 3)^5 = 6^5$$

Exemplo:

$$4 \cdot a^2 = (2 \cdot a)^2$$

Quociente de potências de mesmo expoente

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

Exemplo: $$\frac{2^7}{5^7} = \left(\frac{2}{5}\right)^7$$

Exemplo: $$\frac{b^3}{27} = \left(\frac{b}{3}\right)^3$$

Potência de base negativa e expoente par

$$(-a)^n = a^n$$

Exemplo:

$$(-2)^6 = 2^6 = 64$$

Exemplo:

$$(-2x)^2 = (2x)^2 = 4 \cdot x^2$$

Potência de base negativa e expoente ímpar

$$(-a)^n = -a^n$$

Exemplo:

$$(-2)^5 = -2^5 = -32$$

Exemplo: $$\left(-\frac{1}{2a}\right)^3 = -\frac{1}{8a^3}$$

Potências em $\mathbb{R}$

Exemplo: Calcule as seguintes potências

(a) $(-3)^4$ (b) $(-2)^5$ (c) $\left(\frac{1}{5}\right)^3$ (d) $\left(\frac{5}{2}\right)^0$ (e) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2}$ (f) $(2^4)^3$

Solução: Utilizando as propriedades de potência, tem-se:

(a) $(-3)^4 = 3^4 = 81$

(b) $(-2)^5 = -2^5 = -32$

(c) $\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1^3}{5^3} = \frac{1}{125}$

(d) $\left(\frac{5}{2}\right)^0 = 1$

(e) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{7^2}{2^2} = \frac{49}{4}$

(f) $(2^4)^3 = 2^{12} = 4096$

Potências de Base 10

Com o uso do sistema numérico decimal, as potências de base 10 são particularmente importantes! Note que:

Potência 2

$$10^2 = \overbrace{100}^{2 \text{ zeros}}$$

Potência 3

$$10^3 = 1.\overbrace{000}^{3 \text{ zeros}}$$

Potência 4

$$10^4 = 1\overbrace{0.000}^{4 \text{ zeros}}$$

Potência 5

$$10^5 = 1\overbrace{00.000}^{5 \text{ zeros}}$$

Potência -1

$$10^{-1} = \overbrace{0}^{1 \text{ zero}},1$$

Potência -2

$$10^{-2} = \overbrace{0,0}^{2 \text{ zeros}}1$$

Potência -3

$$10^{-3} = \overbrace{0,00}^{3 \text{ zeros}}1$$

Potência -4

$$10^{-4} = \overbrace{0,000}^{4 \text{ zeros}}1$$

No caso geral:

Expoente positivo

Potência n

$$10^n = 1\overbrace{00 \ldots 0}^{n \text{ zeros}}$$

Expoente negativo

Potência $-n$

$$10^{-n} = \overbrace{0,0 \ldots 0}^{n \text{ zeros}}1$$

Potências de Base 10

No geral, quando multiplicamos um número decimal por uma potência 10^n, onde n é um número inteiro, podemos dizer que,

"a vírgula anda n casas para a esquerda ou n casas para a direita"

de acordo com o sinal do expoente n.

- ✓ Se n é positivo, a vírgula se desloca n unidades para a direita;
- ✓ Se n é negativo, a vírgula se desloca $|n|$ unidades para a esquerda;

Exemplo: Efetue os seguintes produtos:

(a) $(12{,}5) \cdot 10^4$ (b) $(12{,}5) \cdot 10^{-4}$

Solução:

(a) $$(12{,}5) \cdot 10^4 = (12{,}50000000\ldots) \cdot 1\overbrace{0.000}^{4\text{ zeros}} = 125.000.$$

"A vírgula se desloca 4 casas para a direita"

(b) $$(12{,}5) \cdot 10^{-4} = (\ldots 00000012{,}5) \cdot \overbrace{0{,}000}^{4\text{ zeros}}1 = 0{,}00125.$$

"A vírgula se desloca 4 casas para a esquerda"

Unidades de medida

Prefixos das principais unidades de medida

Potências	Prefixo	Símbolo	metro (m)	grama (g)	litro (l)
10^{12}	*Tera*	T	Tm	Tg	Tl
10^{9}	*Giga*	G	Gm	Gg	Gl
10^{6}	*Mega*	M	Mm	Mg	Ml
10^{3}	*Kilo*	k	km	kg	kl
10^{2}	*Hecto*	h	hm	hg	hl
10	*Deca*	da	dam	dag	dal
10^{0}			m	g	l
10^{-1}	*Deci*	d	dm	dg	dl
10^{-2}	*Centi*	c	cm	cg	cl
10^{-3}	*Mili*	m	mm	mg	ml
10^{-6}	*Micro*	μ	μm	μg	μl
10^{-9}	*Nano*	n	nm	ng	nl
10^{-12}	*Pico*	ρ	ρm	ρg	ρl

Unidades de medida

Comprimento: a unidade padrão é o metro.

Quilômetro	Hectômetro	Decâmetro	Metro	Decímetro	Centímetro	Milímetro
km	hm	dam	m	dm	cm	mm
$10^3 m$	$10^2 m$	$10^1\ m$	$10^0 m$	$10^{-1} m$	$10^{-2} m$	$10^{-3} m$
$1.000m$	$100m$	$10m$	$1m$	$0{,}1m$	$0{,}01m$	$0{,}001m$

Múltiplos

Submúltiplos

Conversões

Da direita para a esquerda, divide-se por 10 em cada passo

$$km \xleftarrow{\div 10} hm \xleftarrow{\div 10} dam \xleftarrow{\div 10} m \xleftarrow{\div 10} dm \xleftarrow{\div 10} cm \xleftarrow{\div 10} mm$$

km	hm	dam	m	dm	cm	mm

$$km \xrightarrow{\cdot 10} hm \xrightarrow{\cdot 10} dam \xrightarrow{\cdot 10} m \xrightarrow{\cdot 10} dm \xrightarrow{\cdot 10} cm \xrightarrow{\cdot 10} mm$$

Da esquerda para a direita, multiplica-se por 10 em cada passo

Conversões de unidades de medida

Exemplo: Converta:

(a) 5,2 hectômetros para centímetros

(b) 130 milímetros para metros

Solução:

(a)

Unidade informada ↓ (hm) — Unidade pretendida ↓ (cm)

km	hm	dam	m	dm	cm	mm

$hm \xrightarrow{\cdot 10} dam \xrightarrow{\cdot 10} m \xrightarrow{\cdot 10} dm \xrightarrow{\cdot 10} cm$

Hectômetros		Centímetros
$5{,}2$	$\longleftrightarrow$	$(5{,}2)\cdot 10^4$
$5{,}2$	$\longleftrightarrow$	$(5{,}2)\cdot 10.000$
$5{,}2$	$\longleftrightarrow$	52.000

Resposta: 5,2 hectômetros equivalem a 52.000 centímetros

Conversões de unidades de medida

Exemplo: Converta:

(a) $5{,}2$ hectômetros para centímetros

(b) 130 milímetros para metros

Solução:

(b)

$$m \xleftarrow{\div 10} dm \xleftarrow{\div 10} cm \xleftarrow{\div 10} mm$$

km	hm	dam	m	dm	cm	mm

Unidade pretendida (m)

Unidade informada (mm)

Milímetros		Metros
130	$\longleftrightarrow$	$130 \cdot 10^{-3}$
130	$\longleftrightarrow$	$130 \cdot 0{,}001$
130	$\longleftrightarrow$	$0{,}13$

Resposta: 130 milímetros equivalem a $0{,}13$ metros.

Conversões de unidades de área e volume

Conversão de área

$$km^2 \underset{\cdot 10^2}{\overset{\div 10^2}{\leftrightarrows}} hm^2 \underset{\cdot 10^2}{\overset{\div 10^2}{\leftrightarrows}} dam^2 \underset{\cdot 10^2}{\overset{\div 10^2}{\leftrightarrows}} m^2 \underset{\cdot 10^2}{\overset{\div 10^2}{\leftrightarrows}} dm^2 \underset{\cdot 10^2}{\overset{\div 10^2}{\leftrightarrows}} cm^2 \underset{\cdot 10^2}{\overset{\div 10^2}{\leftrightarrows}} mm^2$$

Conversão de volume

$$km^3 \underset{\cdot 10^3}{\overset{\div 10^3}{\leftrightarrows}} hm^3 \underset{\cdot 10^3}{\overset{\div 10^3}{\leftrightarrows}} dam^3 \underset{\cdot 10^3}{\overset{\div 10^3}{\leftrightarrows}} m^3 \underset{\cdot 10^3}{\overset{\div 10^3}{\leftrightarrows}} dm^3 \underset{\cdot 10^3}{\overset{\div 10^3}{\leftrightarrows}} cm^3 \underset{\cdot 10^3}{\overset{\div 10^3}{\leftrightarrows}} mm^3$$

Conversões de unidades de medida

Exemplo: Converta:

(a) $1500m^2$ para km^2 (b) $230dam^3$ para mm^3

Solução:

(a)

$\div 10^2$ $\div 10^2$ $\div 10^2$

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2

Unidade pretendida

Unidade informada

Metros quadrados		Quilômetros quadrados
1500	$\longleftrightarrow$	$1500 \cdot 10^{-6}$
1500	$\longleftrightarrow$	$1500 \cdot 0{,}000001$
1500	$\longleftrightarrow$	$0{,}0015$

Resposta: 1500 metros quadrados equivalem a $0{,}0015$ quilômetros quadrados.

Conversões de unidades de medida

Exemplo: Converta:

(a) $1500m^2$ para km^2

(b) $230dam^3$ para mm^3

Solução:

(b)

Unidade informada: dam^3

Unidade pretendida: mm^3

km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3

$\cdot 10^3$ $\quad \cdot 10^3$ $\quad \cdot 10^3$ $\quad \cdot 10^3$

Decâmetros Cúbicos		Milímetros Cúbicos
230	$\longleftrightarrow$	$230 \cdot 10^{12}$
1500	$\longleftrightarrow$	$230 \cdot 1000000000000$
1500	$\longleftrightarrow$	$230.000.000.000.000$

Resposta: 230 decâmetros cúbicos equivalem a $230.000.000.000.000$ milímetros cúbicos.

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Calcule as seguintes potências:

(a) $(-2)^3$

(b) $(-2)^2$

(c) -2^2

(d) 2^{-2}

(e) $(-2)^{-2}$

(f) -3^{-3}

(g) 3^{2^3}

(h) $(3^2)^3$

2) Calcule as seguintes potências:

(a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$

(b) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$

(c) $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$

(d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

(e) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$

(f) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$

(g) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$

(h) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$

3) Efetue os seguintes produtos:

(a) $25 \cdot 10^5$

(b) $(3{,}2) \cdot 10^4$

(c) $(0{,}041) \cdot 10^2$

(d) $(0{,}0243) \cdot 10^7$

(e) $3 \cdot 10^{-2}$

(f) $452 \cdot 10^{-5}$

(g) $(7{,}02) \cdot 10^{-3}$

(h) $224{,}5 \cdot 10^{-1}$

Exercícios

4) Efetue as seguintes conversões:

(a) 512 hectômetros para metros;

(b) 1255decímetros para decâmetros;

(c) $1{,}2$quilômetros para centímetros;

(d) $0{,}230$decâmetros para decímetros;

(e) $(1{,}7) \cdot 10^5$milímetros para metros;

(f) 1200metros quadrados para hectômetros quadrados;

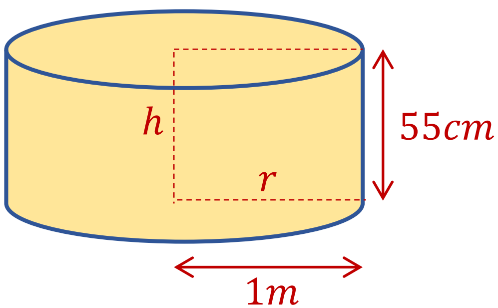
(g) $1{,}25$ decâmetros quadrados para metros quadrados;

(h) $3{,}42$metros cúbicos para decímetros cúbicos;

Exercícios

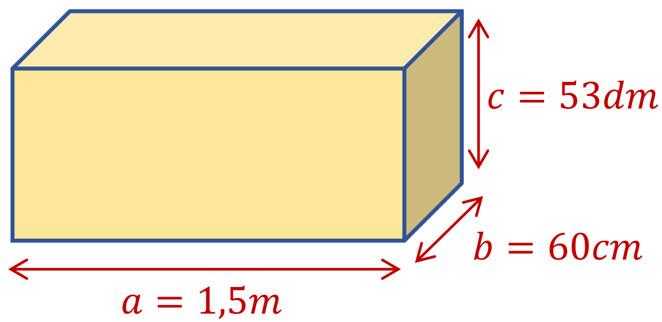
5) O **metro cúbico,** no Sistema Internacional de Unidade (SI), é a unidade fundamental para o cálculo do volume/capacidade. Sabendo que 1 litro equivale a 1 decímetro cúbico, determine a capacidade, em litros, dos seguintes reservatórios:

(a)

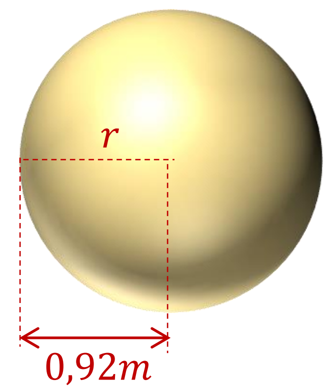


Utilizar $\pi \cong 3{,}14$

(b)



(c)



Utilizar $\pi \cong 3{,}14$

Exercícios

6) Calcule as seguintes potências:

(a) $3^5 . 3^{-3}$

(b) $(-5)^{2^3}$

(c) $(-4)^{2+5}$

(d) $(-\frac{1}{3})^4$

(e) $\left((-5)^2\right)^3$

(f) $(-5^2)^3$

(g) $\left(\left(-\frac{1}{5}\right)^3\right)^{2-3}$

(h) $\left(\frac{2^3}{5}\right)^3$

(i) $((-6)^3)^5 . (-216)^{-7+2}$

(j) $\left(\frac{5^3}{5^6}\right)$

Exercícios

7) Calcule os seguintes produtos:

(a) $3{,}75\ .\ 10^3$

(b) $49.10^3 . 0{,}1.10^{-1}$

(c) $0{,}005.10^2$

(d) $10007{,}06.10^{-3}$

(e) $0{,}1005.10^4$

(f) $65345{,}7.10^{-5}$

(g) $0{,}120005.10^1$

(h) $0{,}007.10^{-2}$

(i) $2{,}504.10^7$

(j) 679.10^{-1}

8) Efetue as conversões de unidades como solicitado em cada letra:

(a) $25.10^{-3}\ hm\ \rightarrow m$

(b) $0{,}0000012Tm\ \rightarrow m$

(c) $2005\ cm\ \rightarrow km$

(d) $2\ dam\ \rightarrow cm$

(e) $37.10^3\ mm\ \rightarrow dm$

(f) $1.10^9\ pm\ \rightarrow \mu m$

(g) $342\ \mu m^2 \rightarrow nm^2$

(h) $100\ km^3\ \rightarrow m^3$

(i) $49.10^6\ Mm\ \rightarrow Gm$

(j) $999{,}8\ hm\ \rightarrow dam$

Exercícios

9) Sabendo que 1L (um litro) equivale a $1dm^3$, quantos litros possui um reservatório d’água de $50m^3$? Foram consumidos $25000cm^3$ de água do reservatório. Quantos litros restaram?

Respostas

Exercício 1:

a) -8

b) 4

c) -4

d) $\frac{1}{4}$

e) $\frac{1}{4}$

f) $-\frac{1}{27}$

g) 6561

h) 729

Exercício 2:

a) $\frac{8}{27}$

b) $-\frac{27}{64}$

c) $\frac{9}{16}$

d) $\frac{9}{4}$

e) $\frac{2}{3}$

f) 64

g) $-\frac{27}{8}$

h) 9

Exercício 3:

a) 2500000

b) 32000

c) $4{,}1$

d) 243000

e) $0{,}03$

f) $0{,}00452$

g) $0{,}00702$

h) $22{,}45$

Exercício 4:

a) 51.200

b) $12{,}55$

c) 120.000

d) 23

e) 170

f) $0{,}12$

g) 125

h) 3.420

Exercício 5:

a) Volume $\cong$ $1.727\ litros$

b) Volume $\cong$ $4.770\ litros$

c) Volume $\cong$ $3.260{,}11\ litros$

Exercício 6:

a) 9

b) 390625

c) -16384

d) $\frac{1}{81}$

e) 15625

f) -15625

g) -125

h) $\frac{512}{125}$

i) 1

j) $\frac{1}{125}$

Respostas

Exercício 7:

a) 3750

b) 490

c) $0{,}5$

d) $10{,}00706$

e) 1005

f) $0{,}653457$

g) $1{,}20005$

h) $0{,}00007$

i) 25040000

j) $67{,}9$

Exercício 8:

a) $2{,}5\ m$

b) $1200000\ m$

c) $0{,}02005\ km$

d) $2000\ cm$

e) $370\ dm$

f) $1000\ \mu m$

g) $342.10^6\ nm^2$

h) $1.10^{11}\ m^3$

i) $49.10^3\ Gm$

j) $9998\ dam$

Exercício 9:

$50000\ litros, 49975\ litros.$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/

O GAMA possui monitorias de:

- Pré-cálculo e Matemática Elementar (e disciplinas equivalentes)
- ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
- Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino

Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

Matemática Básica

2020/1

Aula 03

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Raízesem $\mathbb{R}$

Dados $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$, definimos a **raiz enésima**como:

Índice

$\sqrt[n]{b} = a$ se, e somente se, $a^n = b$.

Radicando

Propriedades das Raízes

Raiz como expoente fracionário

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Exemplo:

$$\sqrt{6} = 6^{\frac{1}{2}}$$

Exemplo:

$$\sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$$

Potência de raiz

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Exemplo:

$$(\sqrt{x})^6 = \sqrt{x^6}$$

Exemplo:

$$\left(\sqrt[5]{3}\right)^2 = \sqrt[5]{9}$$

Produto de raízes de mesmo índice

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Exemplo:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10}$$

Exemplo:

$$\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{2b}$$

Raiz de raiz

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Exemplo:

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[12]{2}$$

Exemplo:

$$\sqrt[5]{\sqrt{x}} = \sqrt[10]{x}$$

Quociente de raízes de mesmo índice

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Exemplo:

$$\frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[4]{\frac{6}{5}}$$

Exemplo:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$$

Raízes em $\mathbb{R}$

Exemplo: Calcule:

(a) $\sqrt{1024}$ (b) $\sqrt[5]{32}$ (c) $(-8)^{\frac{1}{3}}$ (d) $16^{\frac{3}{2}}$ (e) $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}$

Solução: Utilizando a definição de raiz e suas propriedades, tem-se:

(a) $\sqrt{1024} = \sqrt{2^{10}} = 2^{\frac{10}{2}} = 2^5 = 32$

(b) $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

(c) $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

(d) $16^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{16^3} = \sqrt{(2^4)^3} = \sqrt{2^{12}} = 2^{\frac{12}{2}} = 2^6 = 64$

(e) $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}} = (81)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

Raízes em $\mathbb{R}$

Exemplo: Simplifique ao máximo:

(a) $\sqrt{24}$ (b) $\sqrt[3]{32}$ (c) $\sqrt[4]{512}$

Solução: Utilizando a definição de raiz e suas propriedades, tem-se:

(a) $\sqrt{24} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{2 \cdot 3} = 2\sqrt{6}$

(b) $\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^2} = 2\sqrt[3]{4}$

(c) $\sqrt[4]{512} = \sqrt[4]{2^9} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2^4 \cdot 2} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{2} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt[4]{2} = 4\sqrt[4]{2}$

Racionalização

Racionalizar uma fração *significa* multiplicar e dividir a fração por um fator racionalizante de modo a simplificar as raízes do denominador.

Os casos mais comuns de racionalização são os seguintes:

Caso 1: o denominador é uma raiz quadrada.

Neste caso, o fator racionalizante é a própria raiz quadrada que aparece no denominador.

Exemplo	Fator	Forma racionalizada
$\frac{1}{\sqrt{a}}$	$\sqrt{a}$	$\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^2}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{2}{\sqrt{6}}$	$\sqrt{6}$	$\frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6^2}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Racionalização

Caso 2: o denominador é uma raiz de índice n.

Neste caso, se no denominador há a raiz $\sqrt[n]{a^m}$, o fator racionalizante será $\sqrt[n]{a^{n-m}}$.

Exemplo	Fator	Forma racionalizada
$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$	$\sqrt[n]{a^{n-m}}$	$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^n}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$
$\frac{1}{\sqrt[5]{7^2}}$	$\sqrt[5]{7^3}$	$\frac{1}{\sqrt[5]{7^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^3}} = \frac{\sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^5}} = \frac{\sqrt[5]{7^3}}{7} = \frac{\sqrt[5]{343}}{7}$
$-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$	$\sqrt[3]{2^2}$	$-\frac{3}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = -\frac{3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = -\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$
$\frac{5}{\sqrt[4]{8}}$	$\sqrt[4]{2}$	$\frac{5}{\sqrt[4]{8}} = \frac{5}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{5}{\sqrt[4]{2^3}} \cdot \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}} = \frac{5\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^4}} = \frac{5\sqrt[4]{2}}{2}$

Racionalização

Caso 3: o denominador é uma soma/diferença envolvendo uma raiz quadrada. Neste caso, o fator racionalizante será o "conjugado" do denominador.

Exemplo	Fator	Forma racionalizada
$\dfrac{1}{\sqrt{a}+b}$	$\sqrt{a}-b$	$\dfrac{1}{\sqrt{a}+b}\cdot\dfrac{\sqrt{a}-b}{\sqrt{a}-b}=\dfrac{\sqrt{a}-b}{(\sqrt{a})^2-\sqrt{a}\cdot b+\sqrt{a}\cdot b-b^2}=\dfrac{\sqrt{a}-b}{a-b^2}$
$\dfrac{1}{\sqrt{a}-b}$	$\sqrt{a}+b$	$\dfrac{1}{\sqrt{a}-b}\cdot\dfrac{\sqrt{a}+b}{\sqrt{a}+b}=\dfrac{\sqrt{a}+b}{(\sqrt{a})^2-\sqrt{a}\cdot b+\sqrt{a}\cdot b-b^2}=\dfrac{\sqrt{a}+b}{a-b^2}$
$\dfrac{3}{\sqrt{2}+1}$	$\sqrt{2}-1$	$\dfrac{3}{\sqrt{2}+1}\cdot\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{3(\sqrt{2}-1)}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{2}+\sqrt{2}-(1)^2}=\dfrac{3\sqrt{2}-3}{2-1}=3\sqrt{2}-3$
$\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}-2}$	$\sqrt{7}+2$	$\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}-2}\cdot\dfrac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}+2}=\dfrac{\sqrt{5}(\sqrt{7}+2)}{\left(\sqrt{7}\right)^2-2\sqrt{7}+2\sqrt{7}-(2)^2}=\dfrac{\sqrt{35}+2\sqrt{5}}{3}$
$\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$	$\sqrt{3}+\sqrt{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{2}\sqrt{3}+-\sqrt{2}\sqrt{3}-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$

Racionalização

Exemplo: Racionalize as frações:

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{2}{3\sqrt{5}}$ (c) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$ (d) $\frac{2}{\sqrt[5]{9}}$ (e) $\frac{1}{3-\sqrt{2}}$ (f) $\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

Solução:

(a)

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(b)

$$\frac{2}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{3\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{3 \cdot \sqrt{25}} = \frac{2\sqrt{5}}{3 \cdot 5} = \frac{2\sqrt{5}}{15}.$$

(c)

$$\frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{2\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{2\sqrt[3]{2^2}}{2} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}.$$

(d)

$$\frac{2}{\sqrt[5]{9}} = \frac{2}{\sqrt[5]{3^2}} = \frac{2}{\sqrt[5]{3^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^3}} = \frac{2\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{2\sqrt[5]{3^3}}{3} = \frac{2\sqrt[5]{27}}{3}.$$

Racionalização

Exemplo: Racionalize as frações:

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\dfrac{2}{3\sqrt{5}}$ (c) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}$ (d) $\dfrac{2}{\sqrt[5]{9}}$ (e) $\dfrac{1}{3-\sqrt{2}}$ (f) $\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

Solução:

(e)

$$\frac{1}{3-\sqrt{2}} = \frac{1}{3-\sqrt{2}} \cdot \frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \frac{3+\sqrt{2}}{3^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3+\sqrt{2}}{9-2} = \frac{3+\sqrt{2}}{7}.$$

(f)

$$\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2})}{1^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}-2}{-1} = 2-\sqrt{2}.$$

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Simplifique os radicais.

(a) $\sqrt{576}$ (b) $\sqrt[3]{64}$ (c) $\sqrt{12}$ (d) $\sqrt[3]{2^7}$

2) Reduza os radicais a seguir e efetue as operações indicadas em cada caso.

(a) $\sqrt{2}-\sqrt{8}$

(b) $\sqrt{3}-2\sqrt{12}+\sqrt{27}$

(c) $\sqrt{125}+\sqrt{20}-\sqrt{45}$

(d) $\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{250}+\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{16}$

3) Calcule cada produto abaixo:

(a) $(2\sqrt{5}+8)(\sqrt{5}-1)$

(b) $(-5+3\sqrt{2})(4-\sqrt{2})$

(c) $(\sqrt{6}-2)(9-\sqrt{6})$

(d) $(1-2\sqrt{7})(1+2\sqrt{7})$

4) Calcule o valor numérico da expressão

$$8^{\frac{1}{2}}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[6]{8}-32^{\frac{1}{2}}+128^{\frac{1}{2}}-\sqrt{32}$$

Exercícios

5) Efetue as operações com as raízes

(a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$

(b) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{6}$

(c) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{18}$

(d) $\sqrt{6} \div \sqrt{3}$

6) Introduza cada expressão a seguir em um só radical:

(a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{5}$

(b) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{2}$

(c) $\sqrt[3]{40} \div \sqrt{2}$

(d) $\sqrt{8} \div \sqrt[3]{16}$

7) Determine o valor de x na expressão

$$x = \sqrt{7 + \sqrt[3]{6 + \sqrt[4]{16}}}$$

Exercícios

8) Racionalize as frações abaixo:

(a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (b) $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ (c) $\frac{\sqrt{x}}{y\sqrt{y}}$

9) Racionalize as frações abaixo:

(a) $\frac{3}{\sqrt[3]{3}}$ (b) $\frac{2}{\sqrt[4]{8}}$ (c) $\frac{xy}{\sqrt[5]{x^2y^3}}$

10) Racionalize as frações abaixo:

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

(b) $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$

(c) $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}$

(d) $\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}$

Exercícios

11) Simplifique os radicais.

(a) $\sqrt{24}$ (b) $\sqrt{75}$ (c) $\sqrt[3]{250}$ (d) $\sqrt[5]{-972}$

12) Reduza os radicais e calcule o valor numérico das expressões.

(a) $\sqrt{3}+\sqrt{48}$

(b) $3\sqrt{32}+2\sqrt{8}-2\sqrt{18}$

(c) $\sqrt{28}-10\sqrt{7}$

(d) $6\sqrt{3}+\sqrt{75}$

(e) $\sqrt{98}+5\sqrt{18}$

(f) $\sqrt{75}-2\sqrt{12}+\sqrt{27}$

(g) $\sqrt{12}-9\sqrt{3}+\sqrt{75}$

(h) $5\sqrt{180}+\sqrt{245}-17\sqrt{5}$

13) Efetue as operações com raízes:

(a) $\sqrt{2}.\sqrt{7}$ (b) $\sqrt[3]{5}.\sqrt[3]{10}$ (c) $\sqrt[3]{30}\div\sqrt[3]{10}$

(d) $\sqrt[4]{15}\div\sqrt[4]{5}$ (e) $\left(\sqrt{2}-2\right).(3-\sqrt{2})$

(f) $\left(7\sqrt{7}+1\right).(\sqrt{7}-1)$

Exercícios

14) Para cada expressão reduza a um só radical.

(a) $\sqrt{2}.\sqrt[3]{16}$

(b) $\sqrt{5}.\sqrt[3]{15}$

(c) $\sqrt[3]{25} \div \sqrt[4]{2}$

(d) $\sqrt[3]{10} \div \sqrt[5]{3}$

15) Racionalize as frações abaixo:

(a) $\frac{5}{\sqrt{3}}$

(b) $\frac{2}{\sqrt{18}}$

(c) $\frac{1}{10\sqrt{7}}$

(d) $\frac{5}{\sqrt[5]{25}}$

(e) $\frac{1}{\sqrt{3}+5}$

(f) $\frac{2}{2\sqrt{2}-1}$

Respostas

Exercício 1:

a) 24

b) 4

c) $2\sqrt{3}$

d) $4\sqrt[3]{2}$

Exercício 2:

a) $-\sqrt{2}$

b) 0

c) $4\sqrt{5}$

d) $10\sqrt[3]{2}$

Exercício 3:

a) $2+6\sqrt{5}$

b) $17\sqrt{2}-26$

c) $11\sqrt{6}-24$

d) -27

Exercício 4:

$4\sqrt{2}$

Exercício 5:

a) 6

b) $2\sqrt[3]{3}$

c) 6

d) $\sqrt{2}$

Exercício 6:

a) $\sqrt[6]{3^3 5^2}$

b) $\sqrt[12]{2^{11}}$

c) $\sqrt[6]{2^3 5^2}$

d) $\sqrt[6]{2}$

Exercício 7:

$x = 3$

Exercício 8:

a) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

c) $\dfrac{\sqrt{xy}}{y^2}$

Exercício 9:

a) $\sqrt[3]{9}$

b) $\sqrt[4]{2}$

c) $\sqrt[5]{x^3y^2}$

Exercício 10:

a) $\sqrt{2}+1$

b) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

c) $\dfrac{-3\sqrt{2}-4}{2}$

d) $\dfrac{4-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}$

Exercício 11:

a) $2\sqrt{6}$

b) $5\sqrt{3}$

c) $5\sqrt[3]{2}$

d) $-3\sqrt[5]{4}$

Respostas

Exercício 12:

a) $5\sqrt{3}$

b) $10\sqrt{2}$

c) $-8\sqrt{7}$

d) $11\sqrt{3}$

e) $22\sqrt{2}$

f) $4\sqrt{3}$

g) $-2\sqrt{3}$

h) $20\sqrt{5}$

Exercício 13:

a) $\sqrt{14}$

b) $\sqrt[3]{50}$

c) $\sqrt[3]{3}$

d) $\sqrt[4]{3}$

e) $5\sqrt{2} - 8$

f) $-6\sqrt{7} + 48$

Exercício 14:

a) $\sqrt[6]{2^3 . 16^2}$

b) $\sqrt[6]{5^3 . 15^2}$

c) $\sqrt[12]{\frac{25^4}{2^3}}$

d) $\sqrt[15]{\frac{10^5}{3^3}}$

Exercício 15:

a) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{\sqrt{18}}{9}$

c) $\frac{\sqrt{7}}{70}$

d) $\sqrt[5]{125}$

e) $\frac{-\sqrt{3}+5}{22}$

f) $\frac{4\sqrt{2}+2}{7}$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/

O GAMA possui monitorias de:

- Pré-cálculo e Matemática Elementar (e disciplinas equivalentes)
- ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
- Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino

Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

Matemática Básica

2020/1

Aula 04

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Fatoração

De maneira geral, fatorar uma expressão significa escreve-la como um produto de dois ou mais fatores.

Estudaremos a seguir os casos mais comuns de fatoração de expressões algébricas.

Fatoração por fator comum em evidência

$$mx \pm my = m(x \pm y)$$

Prova da fórmula:

$$m(x+y) = mx + my$$

Exemplo: Fatore as seguintes expressões:

(a) $7x + 7y$ (b) $10m - 25n$ (c) $2m - 4n + 10$ (d) $x^5 + 3x^2$

Solução:

(a) $7x + 7y = 7(x+y)$

(b) $10m - 25n = 5(2m - 5n)$

(c) $2m - 4n + 10 = 2(m - 2n + 5)$

(d) $x^5 + 3x^2 = x^2(x^3 + 3)$

Fatoração

Fatoração por agrupamento

$$mx + my + nx + ny = (m + n)(x + y)$$

Prova da fórmula:

$$(m + n)(x + y) = mx + my + nx + ny$$

Exemplo: Fatore as seguintes expressões:

(a) $xy + 2x + 5y + 10$

(b) $2xy^2 + 4xy - 6y^2 - 12y$

Solução:

(a)

$$xy + 2x + 5y + 10$$

$$= x(y + 2) + 5(y + 2) = (x + 5)(y + 2)$$

(b)

$$2xy^2 + 4xy - 6y^2 - 12y = 2[xy^2 + 2xy - 3y^2 - 6y]$$

$$= 2[x(y^2 + 2y) - 3(y^2 + 2y)]$$

$$= 2(x - 3)(y^2 + 2y) = 2y(x - 3)(y + 2).$$

Produtos notáveis

Primeiro caso de produtos notáveis:

Quadrado da soma de dois termos

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Prova da fórmula:

$$(x+y)^2 = (x+y)\cdot(x+y) = x^2 + \underbrace{xy + yx}_{2xy} + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

quadrado da soma de dois termos

quadrado do primeiro

mais duas vezes o produto do primeiro pelo segundo

quadrado do segundo

Exemplo: Fatore as seguintes expressões:

(a) $x^2 + 4x + 4$ (b) $x^2 + 6xy + 9y^2$ (c) $4m^2 + 28m + 49$

Solução:

(a) $x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2x(2) + 2^2 = (x+2)^2$.

(b) $x^2 + 6xy + 9y^2 = x^2 + 2x(3y) + (3y)^2 = (x+3y)^2$.

(c) $4m^2 + 28m + 49 = (2m)^2 + 2(2m)(7) + (7)^2 = (2m+7)^2$.

Produtos notáveis

Segundo caso de produtos notáveis:

Quadrado da diferença de dois termos

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Prova da fórmula:

$$(x-y)^2 = (x-y)\cdot(x-y) = x^2 \underbrace{- xy - yx}_{-2xy} + y^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

quadrado da diferença de dois termos

quadrado do primeiro

menos duas vezes o produto do primeiro pelo segundo

quadrado do segundo

Exemplo: Fatore as seguintes expressões:

(a) $x^2 - 6x + 9$ (b) $x^2 - 4xy + 4y^2$ (c) $x^2 - 2x\sqrt{3} + 3$

Solução:

(a) $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2x(3) + 3^2 = (x-3)^2$.

(b) $x^2 - 4xy + 4y^2 = x^2 - 2x(2y) + (2y)^2 = (x-2y)^2$.

(c) $x^2 - 2x\sqrt{3} + 3 = x^2 - 2x(\sqrt{3}) + (\sqrt{3})^2 = (x-\sqrt{3})^2$.

Produtos notáveis

Terceiro caso de produtos notáveis:

Diferença de dois quadrados

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Prova da fórmula:

$$(x+y)\cdot(x-y) = x^2 - \cancel{xy} + \cancel{yx} - y^2 = x^2 - y^2$$

Produto da soma pela diferença de dois termos

quadrado do primeiro

quadrado do segundo

Exemplo: Fatore as seguintes expressões:

(a) $x^2 - 9$ (b) $4y^2 - 25$ (c) $m^4 - 4$

Solução:

(a) $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$.

(b) $4y^2 - 25 = (2y+5)(2y-5)$.

(c) $m^4 - 4 = (m^2+2)(m^2-2) = (m^2+2)\left(m+\sqrt{2}\right)\left(m-\sqrt{2}\right)$.

Produtos notáveis

Quarto caso de produtos notáveis:

Diferença de dois cubos

$$x^3 - y^3 = (x-y).(x^2+xy+y^2)$$

Prova da fórmula:

$$(x-y).(x^2+xy+y^2) = x^3 + \cancel{x^2y} + \cancel{xy^2} - \cancel{yx^2} - \cancel{xy^2} - y^3 = x^3 - y^3$$

Exemplo: Fatore as seguintes expressões:

(a) $x^3 - 27$ (b) $8n^3 - 125$ (c) $y^3 - 2$

Solução:

(a) $x^3 - 27 = (x-3)(x^2+3x+9)$.

(b) $8n^3 - 125 = (2n-5)(4n^2+10n+25)$.

(c) $y^3 - 2 = \left(y - \sqrt[3]{2}\right)\left(y^2 + y\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)$.

Fatoração do trinômio do segundo grau

Um importante caso de fatoração é chamado de fatoração do **trinômio de segundo grau**.

$$ax^2 + bx + c$$

(trinômio pois há três termos na expressão e de segundo grau, pois o maior expoente é dois).

Fatoração do trinômio do segundo grau

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

x_1 e x_2 são as raízes da equação de segundo grau

Lembre que, para encontrar as raízes de uma equação de segundo grau, utiliza-se a **fórmula de Bháskara**.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

fórmula de Bháskara

Fatoração do trinômio do segundo grau

Exemplo: Fatore a expressão $x^2 + 3x - 4$.

Solução: Neste caso, tem-se $a = 1$, $b = 3$ e $c = -4$.

Aplicando a fórmula de Bháskara, tem-se

$$x = \frac{-(3) \pm \sqrt{(3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = \frac{-3 + 5}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-3 - 5}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

Obtém-se duas raízes reais e distintas dadas por $x_1 = 1$ e $x_2 = -4$.

Reescrevendo o trinômio dado na forma fatorada, tem-se

$$x^2 + 3x - 4 = \underbrace{1}_{a} \cdot \underbrace{(x - 1)}_{x - x_1}\underbrace{(x + 4)}_{x - x_2} = (x - 1)(x + 4).$$

Fatoração do trinômio do segundo grau

Exemplo: Fatore a expressão $x^2 - 6x + 9$.

Solução: Neste caso, tem-se $a = 1$, $b = -6$ e $c = 9$.

Aplicando a fórmula de Bháskara, tem-se

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (9)}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm 0}{2} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{6+0}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\[2ex] x_2 = \dfrac{6-0}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

Obtém-se duas raízes e idênticas $x_{1,2} = 3$.

Reescrevendo o trinômio dado na forma fatorada, tem-se

$$x^2 - 6x + 9 = \underbrace{1}_{a} \cdot \underbrace{(x-3)}_{x - x_1}\underbrace{(x-3)}_{x - x_2} = (x-3)^2$$

Observação: Note que esta fatoração é um caso de trinômio quadrado perfeito.

Fatoração e produtos notáveis

Fator comum em evidência

$$mx + my = m(x + y)$$

Agrupamento

$$mx + my + nx + ny = (m + n)(x + y)$$

Fatoração por produtos notáveis

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Quadrado da soma
de dois termos

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Quadrado da diferença
de dois termos

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

Produto da soma pela diferença
de dois termos

$$x^3 - y^3 = (x - y).(x^2 + xy + y^2)$$

Diferença de dois cubos

Fatoração do trinômio do segundo grau

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

x_1 e x_2 são as raízes da equação
de segundo grau

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Fatore cada expressão algébrica:

(a) $xy - x$

(b) $25xy - 5xy^2 + 15x^2y^2$

(c) $4y^6 + 4y^5 + y + 1$

(d) $2a^3 + 6ax - 3a^2b - 9bx$

(e) $3x^2y^2 - 12xy + 12$

(f) $y^4 - 6mxy^2 + 9m^2x^2$

(g) $9a^2x^2 - 6ab^3x + b^6$

(h) $100 - x^2y^2$

(i) $ax^2 - ay^2$

(j) $25x^3 - 16x$

(k) $x^2 - x - 12$

(l) $2x^2 - 6x + 4$

Exercícios

2) Fatore cada expressão algébrica:

(a) $4x - 3xy$

(b) $xy + y^2 - y$

(c) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y$

(d) $x^2 - 81$

(e) $100 - x^2$

(f) $x^2 - \frac{4}{25}$

(g) $1 - x^2y^2$

(h) $x^{10} - 100$

(i) $4x^2 - 12xy + 9y^2$

(j) $y^2 + 10y + 25$

(k) $121x^2y^2 + 44xy + 4$

(l) $a^4 - b^4$

Respostas

Exercício 1:

a) $x(y-1)$

b) $5xy(5-y+3xy)$

c) $(y+1)(4y^5+1)$

d) $(a^2+3x)(2a-3b)$

e) $3(xy-2)^2$

f) $(y^2-3mx)^2$

g) $(3ax-b^3)^2$

h) $(10-xy)(10+xy)$

i) $a(x-y)(x+y)$

j) $x(5x-4)(5x+4)$

k) $(x+3)(x-4)$

l) $2(x-1)(x-2)$

Exercício 2:

a) $x(4-3y)$

b) $y(x+y-1)$

c) $\frac{1}{3}(x+\frac{1}{2}y)$

d) $(x+9)(x-9)$

e) $(10+x)(10-x)$

f) $(x+\frac{2}{5})(x-\frac{2}{5})$

g) $(1+xy)(1-xy)$

h) $(x^5+10)(x^5-10)$

i) $(2x-3y)^2$

j) $(y+5)^2$

k) $(11xy+2)^2$

l) $(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/

O GAMA possui monitorias de:

- Pré-cálculo e Matemática Elementar (e disciplinas equivalentes)
- ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
- Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino

Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

Matemática Básica

2020/1

Aula 05

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Expressões algébricas

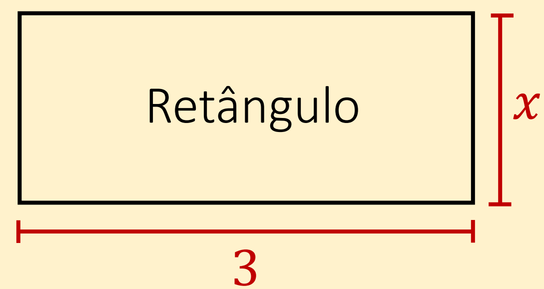
Definição: Chama-se **expressão algébrica** toda expressão na qual estão presentes letras ou símbolos que denotam grandezas genéricas ou desconhecidas, que são chamadas de incógnitas ou variáveis.

Exemplo: Considere um retângulo de base $3\ m$ e altura $x\ m$. Expresse a área e o perímetro desse retângulo.

Solução:

Neste caso, a área e o perímetro do retângulo são expressões algébricas com incógnita x.

$$A = 3 \cdot x \qquad P = 2x + 6$$



Exemplo: Se V é uma quantia de dinheiro que uma pessoa possui e o custo de um refrigerante é $R\$\ 2{,}00$ e de um pastel é $R\$\ 3{,}00$; escreva uma expressão que calcule o troco que ela receberá ao comprar x refrigerantes e y pastéis.

Solução:

$$T = V - 2x - 3y$$

Neste caso, o valor do troco é uma expressão algébrica com incógnitas V, x e y.

Valor numérico

Definição: O **valor numérico** de uma expressão algébrica é obtido quando se substitui a incógnita por um número em particular.

Exemplo: Considere a expressão algébrica:

$$y = \frac{2m - n}{n + 2}.$$

Calcule o valor numérico desta expressão para

$$m = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad n = -\frac{2}{5}.$$

Solução: Substituindo os valores atribuídos a m e n na expressão algébrica, obtém-se:

$$y = \frac{2m - n}{n + 2} = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{2}{5}\right)}{\left(-\frac{2}{5}\right) + 2} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{2}{5}}{\frac{-2 + 10}{5}} = \frac{\frac{10 + 6}{15}}{\frac{8}{5}} = \frac{16}{15} \cdot \frac{5}{8} = \frac{2}{3}.$$

Simplificação de frações algébricas

Um caso particularmente interessante de expressões algébricas são as **frações algébricas**.

Exemplo: São exemplos de frações algébricas:

(a) $\frac{y}{x}$ (b) $\frac{2}{xy}$ (c) $\frac{3x^2y^3}{z^3wt^5}$ (d) $\frac{x+y}{1+z}$ (e) $\frac{x^2+3xy-5}{2z-3}$

As **simplificações de frações algébricas** são efetuadas de forma similar às efetuadas com frações numéricas, ou seja, podem ser simplificados somente os fatores comuns ao numerador e ao denominador da fração.

Exemplo: Simplifique a expressão:

$$\frac{15xy^3w^2}{20x^4y}$$

Solução:

$$\frac{15xy^3w^2}{20x^4y} = \frac{3y^2w^2}{4x^3}.$$

Simplificação de frações algébricas

Em alguns casos pode ser extremamente útil utilizar fatoração e produtos notáveis para simplificar uma fração algébrica.

Exemplo: Simplifique as expressões:

(a) $\dfrac{x^2 - y^2}{4x + 4y}$ (b) $\dfrac{m^2 - 2mn + n^2}{m^2 - n^2}$ (c) $\dfrac{x^3y - 2x^2y^2}{x^2 - 4xy + 4y^2}$

Solução:

(a)

$$\frac{x^2 - y^2}{4x + 4y} = \frac{(x+y)(x-y)}{4(x+y)} = \frac{x-y}{4}.$$

(b)

$$\frac{m^2 - 2mn + n^2}{m^2 - n^2} = \frac{(m-n)(m-n)}{(m-n)(m+n)} = \frac{m-n}{m+n}.$$

(c)

$$\frac{x^3y - 2x^2y^2}{x^2 - 4xy + 4y^2} = \frac{x^2y(x-2y)}{(x-2y)(x-2y)} = \frac{x^2y}{x-2y}.$$

Multiplicação/divisão de frações algébricas

Assim como foi definida a multiplicação/divisão/potências de números racionais, efetua-se a multiplicação/divisão/potências de frações algébricas.

Exemplo. Calcule:

(a) $\dfrac{3x}{x+1}\cdot\dfrac{x-2}{3x+1}$ (b) $\dfrac{3-x}{x^2+x}\div\dfrac{2x^2}{x+1}$ (c) $\left(\dfrac{x+2}{2y}\right)^{-2}$

Solução:

(a)

$$\frac{3x}{x+1}\cdot\frac{x-2}{3x+1}=\frac{3x(x-2)}{(x+1)(3x+1)}=\frac{3x^2-6x}{3x^2+x+3x+1}=\frac{3x^2-6x}{3x^2+4x+1}.$$

(b)

$$\frac{3-x}{x^2+x}\div\frac{2x^2}{x+1}=\frac{3-x}{x^2+x}\cdot\frac{x+1}{2x^2}=\frac{3-x}{x(x+1)}\cdot\frac{x+1}{2x^2}=\frac{3-x}{2x^3}.$$

(c)

$$\left(\frac{x+2}{2y}\right)^{-2}=\left(\frac{2y}{x+2}\right)^{2}=\frac{(2y)^2}{(x+2)^2}=\frac{4y^2}{x^2+4x+4}.$$

Soma/subtração de frações algébricas

Assim como foi definida a soma/subtração de frações, efetua-se a soma/subtração de frações algébricas. Observe que o método para encontrar o mmc dos denominadores é bastante similar ao utilizado para números racionais.

Exemplo: Calcule:

(a) $\dfrac{2x-3}{x}-\dfrac{2}{3x}$

(b) $\dfrac{x+2}{2x}-\dfrac{x-1}{3x^2}+\dfrac{2x-1}{6x}$

Solução: (a) Como $mmc(x,3x)=3x$, tem-se

$$\frac{2x-3}{x}-\frac{2}{3x}=\frac{3(2x-3)-2}{3x}=\frac{6x-9-2}{3x}=\frac{6x-11}{3x}.$$

(b) Como $mmc(2x,3x^2,6x)=6x^2$, tem-se

$$\frac{x+2}{2x}-\frac{x-1}{3x^2}+\frac{2x-1}{6x}=\frac{3x(x+2)-2(x-1)+x(2x-1)}{6x^2}$$

$$=\frac{3x^2+6x-2x+2+2x^2-x}{6x^2}=\frac{5x^2+3x+2}{6x^2}.$$

Soma/subtração de frações algébricas

Exemplo. Calcule:

(a) $\dfrac{x+2}{2x}+\dfrac{3}{x-1}$ (b) $\dfrac{x+1}{x^2-4}-\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{5x-1}{3x}$

Solução:

(a) Como $mmc(2x, x-1) = 2x(x-1)$, tem-se

$$\frac{x+2}{2x}+\frac{3}{x-1}=\frac{(x+2)(x-1)+3(2x)}{2x(x-1)}=\frac{x^2+x-2+6x}{2x^2-2x}=\frac{x^2+7x-2}{2x^2-2x}.$$

(b) Como $mmc(x^2-4, x-2, 3x) = 3x(x^2-4)$, tem-se

$$\frac{x+1}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}-\frac{5x-1}{3x}=\frac{3x(x+1)-2(3x)(x+2)-(5x-1)(x^2-4)}{3x(x^2-4)}$$

$$=\frac{3x^2+3x-6x^2-12x-5x^3+20x+x^2-4}{3x(x^2-4)}=\frac{-5x^3-2x^2+11x-4}{3x^3-12x}.$$

Exercícios Propostos

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Exercícios

1) Considere um pedaço de cartolina retangular de lados $x\ cm$ e $y\ cm$.
Deseja-se montar uma caixa, em forma de paralelepípedo retângulo, sem a tampa de cima com esta cartolina.
Para isto, de cada ponta do retângulo vai-se tirar um quadrado de lado 2 cm (estamos então considerando $x > 4$ e $y > 4$).
Com estas informações, monte a expressão que informa o volume dessa caixa.

2) Em cada caso, calcule o valor numérico:

(a) $M = 3xy - y$, para $x = -\frac{1}{2}$ e $y = -\frac{2}{5}$

(b) $M = \frac{x+2y}{y-x}$, para $x = \frac{2}{3}$ e $y = -\frac{1}{7}$

Exercícios

3) Simplifique cada fração algébrica:

(a) $\dfrac{20x^3y^2z^4}{15x^6y^6z}$

(b) $\dfrac{x-5}{x^2-25}$

(c) $\dfrac{x^2-y^2}{xy+y^2}$

(d) $\dfrac{xy+y+5x+5}{3y+15}$

(e) $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$

(f) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$

4) Efetue as operações seguintes e simplifique:

(a) $\left(\dfrac{-4m^2n^5p}{3r^2t^7}\right)^2$

(b) $\dfrac{x+3}{x-4}\cdot\dfrac{x^2-8x+16}{x^2-9}$

(c) $\dfrac{x+y}{7x-7y}\div\dfrac{x^2+xy}{7x}$

(d) $\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right)\div\left(\dfrac{x}{y}+1\right)$

Exercícios

5) Efetue as operações seguintes e simplifique:

(a) $\dfrac{4x^2 - 7xy}{3x^2} + \dfrac{8y^2 - 3x}{6x} - \dfrac{5}{12}$

(b) $\dfrac{5}{2x+2} - \dfrac{7}{3x-3} + \dfrac{1}{6x-6}$

(c) $\dfrac{x+1}{2x-2} - \dfrac{x-1}{2x+2} + \dfrac{4x}{x^2-1}$

(d) $\dfrac{4t^2}{t^2 - s^2} - \dfrac{t-s}{t+s} + \dfrac{t+s}{t-s}$

6) Simplifique a seguinte expressão:

$$\frac{\dfrac{x^2}{y^2} - \dfrac{y^2}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{xy} + \dfrac{1}{y^2}}$$

Exercícios

7) Peça a um amigo para pensar em um número, multiplicá-lo por 3, somar 6, multiplicar por 4 e dividir por 12, dizendo para você o resultado final. Você pode então "adivinhar" qual o número em que seu amigo pensou. Parece mágica, não é? Como isto é possível?

8) Determine o valor da expressão $a^{-3} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot c^{-1}$, quando $a = -1, b = -8$ e $c = \frac{1}{4}$

9) Calcule o valor numérico de cada expressão abaixo:

(a) $M = x^2y - y^2$, para $x = 2$ e $y = -1$

(b) $M = \frac{(x+y)^{-1}}{x^{-1}+y^{-1}}$, para $x = -\frac{2}{5}$e$y = 5$

Exercícios

10) Simplifique cada fração algébrica:

(a) $$\frac{a-2x}{2bx-ab}$$

(b) $$\frac{x^2-4xy+4y^2}{x^2-4y^2}$$

(c) $$\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}$$

(d) $$\frac{x^4-1}{x^4+2x^2+1}$$

(e) $$\frac{x^2-x-6}{2x^2+4x}$$

(f) $$\frac{x^2+4x-5}{x^2-2x+1}$$

Exercícios

11) Efetue as operações seguintes e simplifique:

(a) $\dfrac{x^4 - 256}{x^2 + xy + 4x + 4y} \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{2x - 8}$

(b) $\dfrac{x^2 + 2xy + y^2}{x - y} \div \dfrac{x + y}{x^2 - 2xy + y^2}$

(c) $\left(1 + \dfrac{x - a}{x + a}\right) \div \left(1 - \dfrac{x - a}{x + a}\right)$

(d) $\dfrac{m^2 - 36}{x^2y^2} \div \dfrac{2m + 12}{xy^2}$

(e) $\left(\dfrac{3x^{\frac{3}{2}}y^3}{x^2y^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-2}$

(f) $\dfrac{2}{a + b} \div \dfrac{4}{ax + bx}$

Exercícios

12) Calcule o valor numérico de cada expressão abaixo:

(a) $M = \frac{x^2-2x}{\sqrt{x}}$, para $x = 4$

(b) $M = x^2 - 2xy + y^2$, para $x = -1$ e $y = \frac{1}{4}$

(c) $M = \sqrt{\frac{a^2+ax}{y}}$, para $\alpha = 8, x = 10$ e $\mathrm{y} = 9$

(d) $M = \frac{y + \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{y}}$, para $x = 10$ e $\mathrm{y} = 5$

13) Simplifique cada fração algébrica

(a) $\frac{ac-c}{c^2-c}$

(b) $\frac{3x+3y}{3-3a}$

(c) $\frac{a^2-b^2}{a^3-a^2b}$

(d) $\frac{x^2-8x+16}{x^2-16}$

Exercícios

14) Efetue as operações seguintes e simplifique:

(a) $\frac{x+y}{y} - \frac{y}{x+y} - \frac{2x}{x+y}$

(b) $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{2x}{x^2-1}$

(c) $\frac{x}{a+1} \div \frac{x^4}{a^2-1}$

(d) $\frac{a^2-1}{x^2-y^2} \div \frac{a^2-2a+1}{3x+3y}$

(e) $\frac{m^2-36}{x^2y^2} \div \frac{2m+12}{xy^2}$

(f) $\frac{3a^4}{x^7+x^6} \div \frac{9a^4}{2x+2}$

Respostas

Exercício 1:

$$V = 2 \cdot (x - 4) \cdot (y - 4)$$

Exercício 2:

a) $M = 1$

b) $M = -\dfrac{8}{17}$

Exercício 3:

a) $\dfrac{4z^3}{3x^3y^4}$

b) $\dfrac{1}{x+5}$

c) $\dfrac{x-y}{y}$

d) $\dfrac{x+1}{3}$

e) $\dfrac{x+y}{x-y}$

f) $\dfrac{x-2}{x+3}$

Exercício 4:

a) $\dfrac{16m^4n^{10}p^2}{9r^4t^{14}}$

b) $\dfrac{(x-4)}{(x-3)}$

c) $\dfrac{1}{x-y}$

d) $1 - \dfrac{y}{x}$

Exercício 5:

a) $\dfrac{5x - 28y + 16y^2}{12x}$

b) $\dfrac{x-14}{3(x-1)(x+1)}$

c) $\dfrac{6x}{(x-1)(x+1)}$

d) $\dfrac{4t}{t-s}$

Exercício 6:

$$\frac{(x - y)(x^2 + y^2)}{x + y}$$

Exercício 7:

O resultado é $y = x + 2$, então o número pensado é $x = y - 2$, pois $y = \frac{(3x+6)\cdot 4}{12}$

Exercício 8:

8

Exercício 9:

a) $M = -5$

b) $M = -\dfrac{50}{23^2}$

Respostas

Exercício 10:

a) $-\frac{1}{b}$

b) $\frac{x-2y}{x+2y}$

c) $\frac{x+y}{x-y}$

d) $\frac{x^2-1}{x^2+1}$

e) $\frac{x-3}{2x}$

f) $\frac{x+5}{x-1}$

Exercício 11:

a) $\frac{(x^2+16)(x-y)}{2}$

b) $(x-y)(x+y)$

c) $\frac{x}{a}$

d) $\frac{m-6}{2x}$

e) $\frac{x}{9y^7}$

f) $\frac{x}{2}$

Exercício 12:

a) 4

b) $\frac{25}{16}$

c) 4

d) $\frac{1}{2}$

Exercício 13:

a) $\frac{a-1}{c-1}$

b) $\frac{x+y}{1-a}$

c) $\frac{a+b}{a^2}$

d) $\frac{x-4}{x+4}$

Exercício 14:

a) $\frac{x^2}{y(x+y)}$

b) $\frac{2}{x+1}$

c) $\frac{a-1}{x^3}$

d) $\frac{3(a+1)}{(x-y)(a-1)}$

e) $\frac{m-6}{2x}$

f) $\frac{2}{3x^6}$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/

O GAMA possui monitorias de:

- Pré-cálculo e Matemática Elementar (e disciplinas equivalentes)
- ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
- Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino

Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

Matemática Básica

2020/1

Aula 06

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Polinômios

Definição: Chama-se um polinômio de grau n na variável x a expressão $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, onde a_1, a_2, ...,a_n são os coeficientes do polinômio com $a_n \neq 0$.

Exemplos:

$p(x) = 3x^3 - 5x + 1$ polinômio de grau três, ou de terceiro grau.

$q(x) = -x^5 + 2x^2$ polinômio de grau cinco, ou de quinto grau.

$v(x) = 8$ polinômio de grau zero.

Operações com polinômios

Para somar dois polinômios somam-se os coeficientes dos termos de mesmo grau.

O mesmo é feito ao efetuar a diferença de dois polinômios.

Exemplo: Dados os polinômios

$$p(x) = 3x^4 - x^3 - 5x + 1 \text{ e } q(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 7$$

Calcule:

(a) a soma $p(x) + q(x)$ (b) a diferença $p(x) - q(x)$

Solução:

(a)

$$p(x) + q(x) = (3x^4 - x^3 - 5x + 1) + (2x^3 - x^2 + 3x - 7)$$
$$= 3x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 6.$$

(b)

$$p(x) - q(x) = (3x^4 - x^3 - 5x + 1) - (2x^3 - x^2 + 3x - 7)$$
$$= (3x^4 - x^3 - 5x + 1) - 2x^3 + x^2 - 3x + 7$$
$$= 3x^4 - x^3 - 2x^3 + x^2 - 5x - 3x + 1 + 7$$
$$= 3x^4 - 3x^3 + x^2 - 8x + 8.$$

Operações com polinômios

Já para efetuar o **produto de polinômios** usamos propriedades distributivas, regras de sinais e propriedades de potência dos expoentes de x.

Exemplo: Calcule:

(a) $x \cdot (x-1)$ (b) $(x+1)\cdot(2x-x^2)$ (c) $(x^2-3x+1)\cdot(x^2-x)$

Solução:

(a)

$$x \cdot (x-1) = x^2 - x.$$

(b)

$$(x+1)\cdot(2x-x^2) = 2x^2 - x^3 + 2x - x^2 = -x^3 + x^2 + 2x.$$

(c)

$$(x^2-3x+1)\cdot(x^2-x) = x^4 - x^3 - 3x^3 + 3x^2 + x^2 - x$$

$$= x^4 - 4x^3 + 4x^2 - x.$$

Operações com polinômios

Para efetuar a **divisão de polinômios** precisamos recorrer a um procedimento de divisão muito semelhante ao algoritmo para divisão de números inteiros, como no exemplo a seguir.

Exemplo: Em cada caso, efetue a divisão dos polinômios

(a) $(x^2 - 5x + 6) \div (x - 2)$ (b) $(x^4 - x^2 + 1) \div (x^2 - 2x + 3)$

Solução:

(a)

$$
\begin{array}{rr|l}
\overbrace{x^2 - 5x + 6}^{\text{Dividendo}} & & \overbrace{x - 2}^{\text{Divisor}} \\ \cline{3-3}
-x^2 + 2x & & \underbrace{x - 3}_{\text{Quociente}} \\ \cline{1-1}
-3x + 6 & & \\
3x - 6 & & \\ \cline{1-1}
\underbrace{0}_{\text{Resto}} & &
\end{array}
$$

Portanto

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

(b)

$$
\begin{array}{rr|l}
\overbrace{x^4 + 0x^3 - x^2 + 0x + 1}^{\text{Dividendo}} & & \overbrace{x^2 - 2x + 3}^{\text{Divisor}} \\ \cline{3-3}
-x^4 + 2x^3 - 3x^2 & & \underbrace{x^2 + 2x}_{\text{Quociente}} \\ \cline{1-1}
2x^3 - 4x^2 + 0x + 1 & & \\
-2x^3 + 4x^2 - 6x & & \\ \cline{1-1}
\underbrace{-6x + 1}_{\text{Resto}} & &
\end{array}
$$

Portanto

$$(x^4 - x^2 + 1) = (x^2 - 2x + 3)(x^2 + 2x) - 6x + 1$$

Dispositivo Prático de Briot- Ruffini

O Dispositivo Prático de Briot-Ruffini é um método prático para efetuar a divisão de um polinômio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

por um binômio do primeiro grau

$$q(x) = x - a$$

O primeiro passo consiste em dispor os valores de a e os coeficientes do polinômio (em ordem decrescente em relação ao grau) da seguinte forma:

$$q(x) = x - a \qquad p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
a & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\
\hline
 & & & & & & \\
\end{array}$$

Vamos mostrar como este dispositivo é aplicado por meio de um exemplo resolvido!

Dispositivo Prático de Briot- Ruffini

Exemplo: Efetue $(2x^3 + 3x^2 - 3x + 5) \div (x - 1)$.

Solução:

Passo 01

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 & 5 \\ \hline a & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{array}$$

Passo 02

Soma

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 & 5 \\ \hline & 2 & 5 & & \end{array}$$

multiplica

desce

resultado

Passo 03

Soma

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 & 5 \\ \hline & 2 & 5 & 2 & \end{array}$$

multiplica

resultado

Passo 04

Soma

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 & 5 \\ \hline & 2 & 5 & 2 & 7 \end{array}$$

multiplica

resultado

Passo 05

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 & 5 \\ \hline & 2 & 5 & 2 & 7 \end{array}$$

$2x^2 + 5x + 2$
quociente

resto

Observação: O número de "passos" dependerá do grau do polinômio.

Dispositivo Prático de Briot- Ruffini

Exemplo: Efetue $(x^4 + 3x^3 - 2x - 6) \div (x + 3)$.

Solução:

Passo 01

$$\begin{array}{r|rrrr|r} -3 & 1 & 3 & 0 & -2 & -6 \\ \hline a & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{array}$$

Passo 02

Soma

$$\begin{array}{r|rrrr|r} -3 & 1 & 3 & 0 & -2 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & & & \end{array}$$

multiplica

desce resultado

Passo 03

Soma

$$\begin{array}{r|rrrr|r} -3 & 1 & 3 & 0 & -2 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & & \end{array}$$

multiplica

resultado

Passo 04

Soma

$$\begin{array}{r|rrrr|r} -3 & 1 & 3 & 0 & -2 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & -2 & \end{array}$$

multiplica

resultado

Passo 05

Soma

$$\begin{array}{r|rrrr|r} -3 & 1 & 3 & 0 & -2 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

multiplica

resultado

Passo 06

$$\begin{array}{r|rrrr|r} -3 & 1 & 3 & 0 & -2 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

$x^3 - 2$ quociente

resto

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Efetue as seguintes operações com polinômios:

(a) $(x^3 - 3x^2 + 1) + (1 - 3x^2 - x^3)$

(b) $(2x^3 - 7x + 3) - (4x^3 - x^2 - 3x)$

(c) $(3x^2 - 4x + 2) \cdot (x^3 - 2x)$

(d) $(-2x^3 - 3x^2 + 4x + 1) \div (x^2 + 1)$

(e) $(2x^5 - x^4 - 14x^3 + 9x^2 - 4x + 1) \div (2x^3 + 5x^2 - x + 1)$

(f) $(x^2 - x - 12) \div (x - 4)$

(g) $(2x^5 - 3x^3 + 4x - 3) \div (x - 1)$

(h) $(2x^4 - 3x^3 - 3) \div (x + 1)$

Exercícios

2) Efetue as seguintes operações com polinômios:

(a) $(4x^5 - 3x^3 - x^2) + (7x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 2)$

(b) $(1 - x) - (x^3 - 4x^5 - x + 2)$

(c) $(x^2 - 4x + 1) \cdot (3x^2 - x - 1)$

(d) $(3x^5 + 2x^4 + x^2 - 5) \div (-x^2 + x - 1)$

(e) $(x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x - 3) \div (2x^2 + x + 1)$

(f) $(x^2 - x - 6) \div (x + 2)$

(g) $(x^5 + 1) \div (x + 1)$

(h) $(x^5 - 4x^4 - 2x^2 - 3x + 2) \div (x - 4)$

Respostas

Exercício 1:

a) $-6x^2 + 2$

b) $-2x^3 + x^2 - 4x + 3$

c) $3x^5 - 4x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 4x$

d) $-2x - 3$ e resto $6x + 4$

e) $x^2 - 3x + 1$

f) $x + 3$

g) $2x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 3$

h) $2x^3 - 5x^2 + 5x - 5$ e resto 2

Exercício 2:

a) $4x^5 + 7x^4 - 5x^3 + x^2 - x + 2$

b) $4x^5 - x^3 - 1$

c) $3x^4 - 13x^3 + 6x^2 + 3x - 1$

d) $-3x^3 - 5x^2 - 2x + 2$ e resto $-4x - 3$

e) $\frac{x^2}{2} - \frac{9x}{4} + \frac{15}{8}$ e resto $-\frac{5x + 39}{8}$

f) $x - 3$

g) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

h) $x^4 - 2x - 11$ e resto -42

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/

O GAMA possui monitorias de:

- Pré-cálculo e Matemática Elementar (e disciplinas equivalentes)
- ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
- Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.