Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino

Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

Integrais

2018/1

Aula 01

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Integral definida

Simbologia e nomenclatura

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Sinal de integração

limite superior

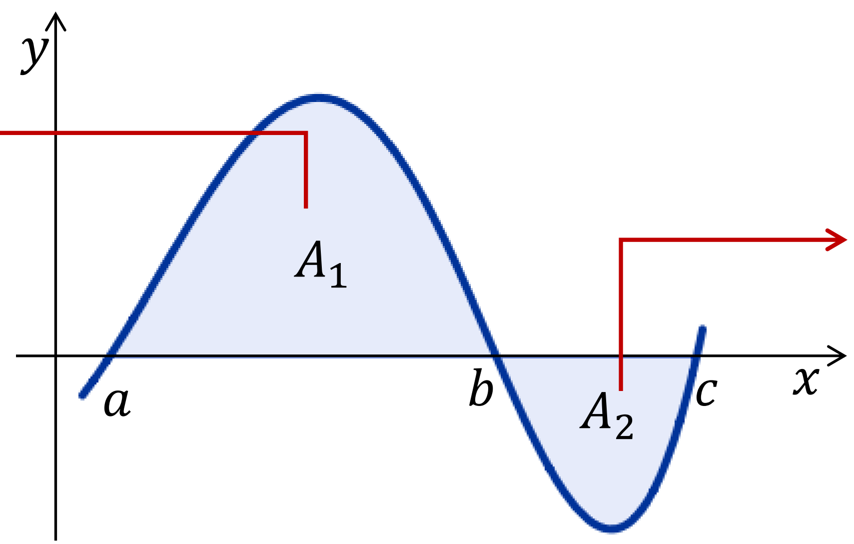
integrando

variável de integração

limite inferior

Interpretação geométrica

$$\int_a^b f(x)\,dx$$



$$-\int_b^c f(x)\,dx$$

Propriedades da integral definida

1) Se a existir no domínio da f, então:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

2) Se f for integrável em $[a, b]$, então:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

3) Se c for uma constante, então:

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

Propriedades da integral definida

4) Se f for integrável em $[a,b]$ e c for uma constante, então:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

5) Se f e g forem integráveis em $[a,b]$, então a integral da soma/diferença é igual a soma/diferença das integrais:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

6) Se f for integrável em um intervalo fechado contendo os três pontos a, b e c, então

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Antiderivada

Definição: Seja f uma função definida num intervalo $[a, b]$. Uma antiderivada de f em $[a, b]$ é uma função F definida em $[a, b]$, tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Exemplo: Determine uma antiderivada para a função $f(x) = 12x^2 + 2x$.

Solução: Uma antiderivada para a função f dada é:

$$F(x) = 4x^3 + x^2$$

Pois

$$F'(x) = (4x^3 + x^2)' = 12x^2 + 2x.$$

Note que outras antiderivadas para a função f são dadas por:

$$F_1(x) = 4x^3 + x^2 + 5 \quad F_2(x) = 4x^3 + x^2 - 100 \quad F_3(x) = 4x^3 + x^2 + \pi - e$$

Mais precisamente, f possui infinitas antiderivadas, todas da forma:

$$F(x) = 4x^3 + x^2 + C$$

onde C é uma constante.

Antiderivada

Antiderivada de algumas funções elementares

Função	Antiderivada	Justificativa
$f(x) = k$ função constante	$F(x) = kx + C$	$(kx + C)' = k$
$f(x) = x^n$ $(n \neq -1)$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' = x^n$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln\|x\| + C$	$(\ln\|x\| + C)' = \dfrac{1}{x}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + C$	$(\sin x + C)' = \cos x$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + C$	$(-\cos x + C)' = \sin x$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$	$(e^x + C)' = e^x$

Teorema Fundamental do Cálculo

Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 1 : Se f for contínua em $[a, b]$, então f tem uma antiderivada em $[a, b]$. Então a função F definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

é uma antiderivada de f em$[a, b]$; isto é, $F'(x) = f(x)$ para cada $x \in [a, b]$.

Além disso, F é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b).

Na notação de Leibniz, o Teorema acima afirma que

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$$

"A derivada é a operação inversa da integral, e vice-versa".

Teorema Fundamental do Cálculo

Exemplo: Calcule a derivada das seguintes funções:

(a) $F(x) = \int_0^x \cos t \, dt$ (b) $G(y) = \int_0^y (s^2 + 2s - 1) ds$

Solução: Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 01, temos:

(a) $F'(x) = \left[\int_0^x \cos t \, dt\right]' = \cos x$

(b) $G'(y) = \left[\int_0^y (s^2 + 2s - 1) ds\right]' = y^2 + 2y - 1$

Exemplo: Calcule a seguinte derivada:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^x \tan w \, dw\right]$$

Solução: Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 01, temos:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^x \tan w \, dw\right] = \tan x$$

Teorema Fundamental do Cálculo

Exemplo: Calcule a seguinte derivada:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^{x^3} \sqrt{t}dt\right]$$

Solução: Note que, neste caso, o limite superior não é x, mas x^3.

Portanto, utiliza-se a regra da cadeia no cálculo da derivada, da seguinte forma:

$$y = \int_1^{x^3} \sqrt{t}dt \qquad \text{e} \qquad u = x^3$$

Portanto, utilizando a regra da cadeia, temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}\left[\int_1^{u} \sqrt{t}dt\right] \cdot \frac{du}{dx} = \sqrt{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \sqrt{x^3} \cdot (3x^2) = 3x^2\sqrt{x^3} = 3x^3\sqrt{x}.$$

Teorema Fundamental do Cálculo

Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 2

Se f é contínua em $[a, b]$ e se F é uma antiderivada de f em (a, b), então:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Ou seja,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Antiderivada de f calculada no limite superior

Antiderivada de f calculada no limite inferior

Notação: É comum se escrever o Teorema acima de uma forma mais resumida:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

onde

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Teorema Fundamental do Cálculo

Exemplo: Calcule as seguintes integrais definidas:

(a) $\int_{-2}^{5} x dx$ (b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos y \, dy$ (c) $\int_{-1}^{\sqrt{7}} (2s+3) ds$ (d) $\int_{0}^{1} (t^3 - \sqrt{t}) dt$

Solução: Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 2, temos:

(a) $\int_{-2}^{5} x dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-2}^{5} = \frac{(5)^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2} = \frac{25}{2} - \frac{4}{2} = \frac{21}{2}.$

(b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos y \, dy = \sin y\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \sin \pi - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 - 1 = -1.$

(c) $\int_{-1}^{\sqrt{7}} (2s+3) ds = 2\int_{-1}^{\sqrt{7}} s ds + 3\int_{-1}^{\sqrt{7}} ds = 2\left.\frac{s^2}{2}\right|_{-1}^{\sqrt{7}} + 3\, s\Big|_{-1}^{\sqrt{7}}$

$= 2\left(\frac{(\sqrt{7})^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2}\right) + 3(\sqrt{7}+1) = 7 - 1 + 3\sqrt{7} + 3 = 3(3+\sqrt{7}).$

Teorema Fundamental do Cálculo

(d) $$\int_0^1 (t^3 - \sqrt{t})dt = \int_0^1 t^3 dt - \int_0^1 \sqrt{t} dt = \frac{t^4}{4}\bigg|_0^1 - \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1$$

$$= \left(\frac{(1)^4}{4} - \frac{(0)^4}{4}\right) - \left(\frac{(1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{(0)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} = -\frac{5}{12}.$$

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Aplicando o TFC-1, encontre as seguintes derivadas:

a) $\dfrac{d}{dx}\left[\int_1^x t^3 dt\right]$ $\quad$ $Resp.: x^3$

b) $\dfrac{d}{dx}\left[\int_0^x \sqrt{4+t^6}\, dt\right]$ $\quad$ $Resp.: \sqrt{4+x^6}$

c) $\dfrac{d}{dx}\left[\int_1^{x^3} \sqrt[3]{t^2+1}\, dt\right]$ $\quad$ $Resp.: 3x^2\sqrt[3]{x^6+1}$

d) $\dfrac{d}{dx}\left[\int_2^{\tan x} \dfrac{1}{1+t^2}\, dt\right]$ $\quad$ $Resp.: 1$

e) $y = \int_0^{\tan x} \sqrt{t+\sqrt{t}}\; dt$

$Resp.: y' = \sqrt{\tan x + \sqrt{\tan x}}\, sec^2\, x$

f) $y = \int_2^{1/x} \arctan t\; dt$

$Resp.: y' = -\dfrac{\arctan(1/x)}{x^2}$

g) $y = \int_{1-3x}^{1} \dfrac{u^3}{1+u^2}\, du$

$Resp.: y' = \dfrac{3(1-3x)^3}{1+(1-3x)^2}$

h) $y = \int_{-x}^{x} \dfrac{1}{3+t^2}\, dt$

$Resp.: y' = \dfrac{2}{3+x^2}$

Exercícios

2) Calcule as seguintes integrais definidas aplicando o TFC – 2:

a) $\int_2^3 x^2 dx$ $R: \frac{19}{3}$

b) $\int_{-1}^2 |x| dx$ $R: \frac{5}{2}$

c) $\int_1^2 (6x-2) dx$ $R: 7$

d) $\int_1^9 \sqrt{x} dx$ $R: \frac{52}{3}$

e) $\int_1^3 (3x^2-4) dx$ $R: 18$

f) $\int_1^3 e^x dx$ $R: e^3 - e$

g) $\int_3^6 \frac{1}{x} dx$ $R: \ln 2$

h) $\int_\pi^{2\pi} \cos\theta \, d\theta$ $R: 0$

i) $\int_1^4 (5-2t-3t^2) dt$ $R: -63$

j) $\int_1^2 \frac{3}{t^4} dt$ $R: \frac{7}{8}$

k) $\int_1^2 (1+2y)^2 dy$ $R: \frac{49}{3}$

l) $\int_{-2}^3 |2x-1| dx$ $R: \frac{25}{2}$

m) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 3\sec^2 x \, dx$ $R: 3$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem ser encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/

O GAMA possui monitorias de:

- Pré-cálculo e Matemática Elementar (e disciplinas equivalentes)
- ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
- Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino

Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

Integrais

2018/1

Aula 02

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Método da substituição

Seja F uma antiderivada de f (ou seja, $F' = f$) e suponha que a função composta $F\big(g(x)\big)$ seja derivável. Então, pela regra da cadeia, tem-se:

$$\Big(F\big(g(x)\big)\Big)' = F'\big(g(x)\big)g'(x) = f\big(g(x)\big)g'(x)$$

Na forma integral

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

Fazendo a seguinte mudança de variável

$$u = g(x) \quad \text{então} \quad \frac{du}{dx} = g'(x)$$

Podemos reescrever da seguinte forma

$$\int f(\underbrace{g(x)}_{u})\,\underbrace{g'(x)dx}_{du} = \int f(u)du = F(u) + C = F(\underbrace{g(x)}_{u}) + C$$

método da substituição para integral indefinida

Método da substituição

Exemplo: Calcule as seguintes integrais usando o método da substituição:

(a) $\int e^{2x}\,dx$ (b) $\int \frac{cos\theta}{sen^2\theta}\,d\theta$ (c) $\int \frac{t}{\sqrt{1+2t^2}}\,dt$

Solução:

Substituição

$u = 2x$ $du = 2dx \Longleftrightarrow dx = \frac{du}{2}$ $u = 2x$

(a) $\int e^{2x}\,dx = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{e^u}{2} + C = \frac{e^{2x}}{2} + C$

(b) $\int \frac{cos\theta}{sen^2\theta}\,d\theta = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2}du = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{\sin\theta} + C = -\csc\theta + C$

Substituição

$u = \sin\theta$ $du = \cos\theta\,d\theta$ $u = \sin\theta$

(c) $\int \frac{t}{\sqrt{1+2t^2}}\,dt = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\frac{du}{4} = \frac{1}{4}\int u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\sqrt{u} + C = \frac{\sqrt{1+2t^2}}{2} + C$

Substituição

$u = 1 + 2t^2$ $du = 4tdt \Longleftrightarrow tdt = \frac{du}{4}$ $u = 1 + 2t^2$

Método da substituição

Exemplo: Calcule a integral

$$\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx$$

Solução:

$\cos^2 x + sin^2 x = 1 \iff sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx = \int \sin x \, (\sin^2 x)^2 \cos^2 x \, dx$$

$$= \int \sin x (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \, dx = \int \sin x \cos^2 x \, (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) dx$$

$$= \int \sin x \, (\cos^2 x - 2\cos^4 x + \cos^6 x) \; dx = -\int (u^2 - 2u^4 + u^6) \, du$$

Substituição $u = \cos x$

$du = -\sin x \; dx$

$\Updownarrow$

$-du = \sin x \; dx$

$$= -\int u^2 \, du + 2\int u^4 \; du - \int u^6 \; du = -\frac{1}{3}u^3 + C_1 + \frac{2}{5}u^5 + C_2 - \frac{1}{7}u^7 + C_3$$

$$= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C$$

onde $C_1 + C_2 + C_3 = C$

Método da substituição – Integral definida

Lembre que um método muito útil para resolver algumas integrais é o método da substituição.

Para utilizar o método da substituição em integrais definidas é necessário realizar algumas adequações nos limites de integração

Adequação no limite superior

$x = b \iff u = g(b)$

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

$u = g(x)$

Substituição

Adequação no limite inferior

$x = a \iff u = g(a)$

Ou seja, se F é uma primitiva da função f, então:

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = F(u)\Big|_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$

Estamos supondo que g' é contínua em $[a, b]$ e que f é contínua na imagem de $u = g(x)$

Método da substituição – Integral definida

Exemplo: Calcule a seguinte integral definida

$$\int_1^2 (x+2)^5 dx$$

fazendo uma substituição conveniente e ajustando os limites de integração.

Solução: Neste caso, teremos:

Adequação no limite superior

$x = 2 \iff u = g(2) = 2 + 2 = 4$

$$\int_1^2 (x+2)^5 dx = \int_3^4 u^5 du = \left[\frac{u^6}{6}\right]_3^4 = \frac{1}{6}\left[(4)^6 - (3)^6\right] = \frac{3367}{6}.$$

Adequação no limite inferior

$x = 1 \iff u = g(1) = 1 + 2 = 3$

Substituição

$u = g(x) = x + 2 \quad du = dx$

Observação: Uma forma de resolver uma integral definida utilizando o método da substituição, sem modificar limites de integração, é a seguinte:

1) Resolva a integral indefinida utilizando o método da substituição.

2) Volte na variável original e substitua os limites da integral inicial.

Método da substituição – Integral definida

Exemplo: Calcule a seguinte integral definida

$$\int_0^2 x(x^2+1)^3 dx$$

Solução 1: Fazendo uma substituição conveniente e ajustando os limites de integração, teremos:

$$\int_0^2 x(x^2+1)^3 dx = \int_1^5 u^3 \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int_1^5 u^3\, du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^5 = \frac{1}{8}[(5)^4 - (1)^4] = 78.$$

Substituição

$u = x^2 + 1$ $\quad du = 2xdx \iff xdx = \frac{du}{2}$

Novos limites:

$x = 0 \implies u = 1$

$x = 2 \implies u = 5$

Solução 2: Primeiro resolvemos a integral indefinida:

$$\int x(x^2+1)^3 dx = \int u^3 \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^3\, du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right] = \frac{1}{8}u^4 = \frac{1}{8}(x^2+1)^4$$

Substituindo os limites de integração:

$$\int_0^2 x(x^2+1)^3 dx = \left[\frac{1}{8}(x^2+1)^4\right]_0^2 = \frac{1}{8}[625-1] = \frac{624}{8} = 78$$

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Calcule as seguintes integrais:

(a) $\int_0^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ $\quad Resp.:\ 2.(e^2-1)$

(b) $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$ $\quad Resp.:\ \frac{1}{14}$

(c) $\int_0^1 \sin(3\pi t)dt$ $\quad Resp.:\ \frac{2}{3\pi}$

(d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan t)^3.\sec^2 t\,dt$ $\quad Resp.:\ \frac{15}{4}$

(e) $\int_0^3 x.|x^2-4|dx$ $\quad Resp.:\ \frac{41}{4}$

(f) $\int_0^1 y.(y^2+1)^5\,dy$ $\quad Resp.:\ \frac{21}{4}$

Exercícios

2) Calcule as seguintes integrais utilizando o método da substituição:

(a) $\int \frac{\ln v}{v} dv$ $\quad Resp.: \frac{(\ln v)^2}{2} + C$

(b) $\int e^{5s} ds$ $\quad Resp.: \frac{e^{5s}}{5} + C$

(c) $\int \frac{dx}{x\,(\ln x)^2}$ $\quad Resp.: -\frac{1}{\ln x} + C$

(d) $\int 2x\sqrt{1+x^2}dx$ $\quad Resp.: \frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + C$

(e) $\int \frac{2r dr}{(1-r)^7}$ $\quad Resp.: -\frac{2}{5}(1-r)^{-5} + \frac{1}{3}(1-r)^{-6} + C$

(f) $\int 2\sin y\sqrt[3]{1+\cos y}\,dy$ $\quad Resp.: -\frac{3}{2}(1+\cos y)^{4/3} + C$

Exercícios

3) Encontre as integrais indefinidas:

(a) $\int \frac{\cos 3u}{\sqrt{1-2\sin 3u}}\,du$ $\quad Resp.: -\frac{1}{3}\sqrt{1-2\sin 3u}+C$

(b) $\int \sqrt{t}\cos\sqrt{t^3}\,dt$ $\quad Resp.: \frac{2}{3}\sin\sqrt{t^3}+C$

(c) $\int (2\cot^2\theta - 3\tan^2\theta)\,d\theta$ $\quad Resp.: -2\cot\theta - 3\tan\theta + \theta + C$

(d) $\int \frac{x^3-1}{x-1}\,dx$ $\quad Resp.: \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+C$

(e) $\int \frac{(1+\cot^2 z)\cot z}{\csc z}\,dz$ $\quad Resp.: -\csc z + C$

(f) $\int \frac{3\tan\theta - 4\cos^2\theta}{\cos\theta}\,d\theta$ $\quad Resp.: 3\sec\theta - 4\sin\theta + C$

Exercícios

4) Calcule a integral

$$\int x^2\sqrt{x-1}\,dx$$

por dois métodos:

(a) $u = x - 1$ (b) $u = \sqrt{x-1}$

$Resp.: \frac{2}{7}(x-1)^{7/2} + \frac{4}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C$

5) Calcule as integrais por meio da substituição indefinida:

(a) $\int x(x^2+1)\sqrt{4-2x^2-x^4}\,dx$ $Resp.: -\frac{1}{6}(4-2x^2-x^4)^{3/2} + C$

(b) $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}\,dx$ $Resp.: \frac{1}{2}(1+\sqrt{x})^4 + C$

Exercícios

6) Calcule as integrais por meio da substituição indefinida

(a) $\int cos^3x \ dx$ $\quad Resp.: \sin x - \frac{1}{3}sin^3x + C$

(b) $\int sin^5x \, cos^2 x \, dx$ $\quad Resp.: -\frac{1}{3}cos^3x + \frac{2}{5}cos^5x - \frac{1}{7}cos^7x + C$

(c) $\int sin^6\theta \, cos^5\theta \ d\theta$ $\quad Resp.: \frac{1}{7}sin^7\theta - \frac{2}{9}sin^9\theta + \frac{1}{11}sin^{11}\theta + C$

(d) $\int tg^6x \, sec^4x \ dx$ $\quad Resp.: \frac{1}{7}tg^7x + \frac{1}{9}tg^9x + C$

(e) $\int tg^5\theta \, sec^7\theta \ d\theta$ $\quad Resp.: \frac{1}{11}sec^{11}\theta - \frac{2}{9}sec^9\theta + \frac{1}{7}sec^7\theta + C$

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino

Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

Integrais

2018/1

Aula 03

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Integração por partes

Estudaremos a seguir uma importante ferramenta no cálculo de algumas integrais, chamada de método da integração por partes.

Lembre que, a regra da derivada do produto nos diz que se f e g são duas funções deriváveis em relação à variável x, e digamos que

$$u = f(x) \qquad \text{e} \qquad v = g\,(x)$$

então

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Derivada do produto

Lembrando que a integral e a derivada são operações inversas uma da outra, e que a integral da soma é igual a soma das integrais, obtemos:

$$u \cdot v = \int v \cdot du + \int u \cdot dv$$

Portanto, chegamos na fórmula de integração por partes:

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

Integração por partes

Observações Importantes:

1) Note que, durante este processo, se obtém uma nova integral.

$$\underbrace{\int u\,dv}_{\text{Integral dada}} = uv - \underbrace{\int v\,du}_{\text{Integral obtida}}$$

O método de integração por partes se torna eficiente quando a integral obtida é mais simples do que a integral dada.

2) Em termos das funções f e g, o método de integração por partes fica escrito da seguinte forma:

$$\int \underbrace{f(x)}_{u} \cdot \underbrace{g'(x)dx}_{dv} = \underbrace{f(x)}_{u} \cdot \underbrace{g(x)}_{v} - \int \underbrace{g(x)}_{v} \cdot \underbrace{f'(x)dx}_{du}$$

3) O método de integração por partes para integrais definidas é dado por:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x) \cdot f'(x)dx$$

Integração por partes

Exemplo: Calcule as integrais

(a) $\displaystyle\int x \cdot \cos x \, dx$ (b) $\displaystyle\int_1^e t^2 \ln t \, dt$

Solução:

(a) $$\int x \cdot \cos x \, dx = x \cdot \sin x - \int \sin x \, dx \; = x \cdot \sin x + \cos x + C.$$

$$u = x \implies du = dx \qquad dv = \cos x \, dx \implies v = \int \cos x \, dx \implies v = \sin x$$

(b) $$\int_1^e t^2 \ln t \, dt \; = \ln t \left.\frac{t^3}{3}\right|_1^e - \int_1^e \frac{t^3}{3} \cdot \frac{1}{t} dt \; = \left.\frac{t^3 \cdot \ln t}{3}\right|_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e t^2 dt$$

$$u = \ln t \implies du = \frac{1}{t} dt \qquad dv = t^2 \, dt \implies v = \int t^2 \, dt \implies v = \frac{t^3}{3}$$

$$= \frac{e^3 \cdot \ln e}{3} - \frac{1^3 \cdot \ln 1}{3} - \left.\frac{t^3}{9}\right|_1^e = \frac{e^3}{3} - \left(\frac{e^3}{9} - \frac{1^3}{9}\right) \; = \frac{2e^3+1}{9}.$$

Regra do LIATE

Na regra de integração por partes, precisamos escolher u e dv de maneira conveniente.

Uma boa sugestão para a escolha de u é conhecida como regra do

LIATE

que funciona da seguinte forma:

Prioridade na escolha de u

Logarítmica $(u = \ln x, u = \log_2 x$, etc...)

Inversa Trigonométrica $(u = \arcsin x, u = \arccos x, \arctan x$, etc...)

Algébrica $(u = x^n, u = \sqrt{x}$, funções polinomiais, funções racionais, etc...)

Trigonométrica $(u = \sin x, u = \cos x, u = \tan x$, etc...)

Exponencial $(u = e^x, u = 2^x$, etc...)

Observação: A regra do LIATE fornece apenas uma SUGESTÃO.
Não é garantia de que esta escolha de u será a mais eficiente!!

Integração por partes

Exemplo: Calcule a seguinte integral:

$$\int x \cdot e^{3x}\, dx$$

Solução: Note que

$$\int \underbrace{x}_{\text{Função algébrica}} \cdot \underbrace{e^{3x}}_{\text{Função exponencial}}\, dx$$

De acordo com a regra do LIATE, temos:

$$u = x \implies du = dx \qquad dv = e^{3x}\, dx \implies v = \int e^{3x}\, dx \implies v = \frac{e^{3x}}{3}$$

Portanto

$$\int x \cdot e^{3x}\; dx = x\frac{e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3} dx \; = x\frac{e^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\; dx$$

$$= \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\frac{e^{3x}}{3} + C = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{e^{3x}}{9} + C.$$

Integração por partes

Exemplo: Calcule a seguinte integral:

$$\int (t^2 + 1) \cdot \cos t \, dt$$

Solução: Note que

$$\int \underbrace{(t^2 + 1)}_{\text{Função algébrica}} \cdot \underbrace{\cos t}_{\text{Função trigonométrica}} \; dt$$

De acordo com a regra do LIATE, temos:

$$u = t^2 + 1 \implies du = 2tdt \qquad dv = \cos t \; dt \implies v = \sin t$$

Portanto

$$\int (t^2 + 1) \cdot \cos t \; dt = (t^2 + 1) \cdot \sin t - 2 \int t \sin t \, dt \qquad (1)$$

Note que, podemos novamente utilizar o método da integração por partes para resolver a integral

$$\int t \sin t \, dt$$

Integração por partes

Continuação...

$$\int t \sin t \, dt$$

Função trigonométrica

Função algébrica

De acordo com a regra do LIATE, temos:

$$u = t \implies du = dt \qquad dv = \sin t \; dt \implies v = -\cos t$$

Portanto

$$\int t \sin t \, dt = t \cdot (-\cos t) - \int (-\cos t) dt$$

$$= -t \cdot \cos t + \int \cos t \, dt = -t \cdot \cos t + \sin t \qquad (2)$$

De (1) e (2) obtemos

$$\int (t^2 + 1) \cdot \cos t \; dt = (t^2 + 1) \cdot \sin t - 2(-t \cdot \cos t + \sin t) + C$$

$$= (t^2 + 1) \cdot \sin t + 2t \cdot \cos t - 2 \sin t + C$$

Integração por partes

Observação: Do exemplo anterior, obtivemos:

$$\int (t^2+1)\cdot\cos t\,dt = (t^2+1)\cdot\sin t + 2t\cdot\cos t - 2\sin t + C.$$

Depois de resolver uma integral indefinida, pode ser importante “tirar a prova real” para saber se seus cálculos estão corretos!

Lembre que a derivada da resposta deve ser igual ao integrando!!

No exemplo acima, como

$$[(t^2+1)\cdot\sin t + 2t\cdot\cos t - 2\sin t + C\,]'$$

$$= [(t^2+1)\cdot\sin t]' + 2[t\cdot\cos t]' - 2[\sin t]' + C'$$

$$= 2t\cdot\sin t + (t^2+1)\cdot\cos t + 2(\cos t - t\cdot\sin t) - 2\cos t$$

$$= 2t\cdot\sin t + (t^2+1)\cdot\cos t + 2\cos t - 2t\cdot\sin t - 2\cos t \;= (t^2+1)\cdot\cos t$$

temos então a certeza de que a resposta encontrada está correta!

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Calcule as seguintes integrais:

(a) $\int \ln(2x+1)\,dx$ $\quad$ $Resp.: \frac{1}{2}(2x+1)\ln(2x+1) - x + C$

(b) $\int x^2 \cos 3x \ dx$ $\quad$ $Resp.: \frac{1}{3}x^2 \sin 3x + \frac{2}{9}x\cos 3x - \frac{2}{27}\sin 3x + C$

(c) $\int e^{2\theta} \sin 3\theta \ d\theta$ $\quad$ $Resp.: \frac{1}{13}e^{2\theta}(2\sin 3\theta - 3\cos 3\theta) + C$

2) Calcule as seguintes integrais:

(a) $\int_0^2 x^2 e^x \, dx$ $\quad$ $Resp.: \ 2(e^2 - 1)$

(b) $\int_0^1 \frac{y}{e^{2y}} dy$ $\quad$ $Resp.: \frac{1}{4} - \frac{3}{4}e^{-2}$

(c) $\int_0^{\pi/4} e^{3x} \sin 4x \ dx$ $\quad$ $Resp.: \frac{4}{25}\left(e^{3\pi/4} + 1\right)$

(d) $\int_1^2 \frac{\ln t}{t^2} dt$ $\quad$ $Resp.: \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$

(e) $\int_0^{\pi/3} \sin 3y \cos y \ dy$ $\quad$ $Resp.: \frac{9}{16}$

(f) $\int_0^2 x e^{2x} dx$ $\quad$ $Resp.: \frac{1}{4}(3e^4 + 1)$

Exercícios

3) Calcule as seguintes integrais:

(a) $\int_0^{\pi/8} sin^5 2x\cos 2x\,dx$ $Resp.: \frac{1}{96}$

(b) $\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5dx$ $Resp.: \frac{182}{9}$

(c) $\int_0^2 xe^{-x^2}\,dx$ $Resp.: \frac{1}{2}-\frac{1}{2e^4}$

(d) $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$ $Resp.: e-\sqrt{e}$

(e) $\int_0^{\pi/3} tg^5x\,sec^4x\,dx$ $Resp.: \frac{117}{8}$

(f) $\int_{\pi/2}^{3\pi/4} sin^5x\,cos^3x\,dx$ $Resp.: -\frac{11}{384}$

(g) $\int_0^{\pi/8} \sin 3x\cos 5x\ \,dx$ $Resp.: \frac{1}{8}(\sqrt{2}-1)$

(h) $\int_0^2 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{16-x^2}}$ $Resp.: \frac{128}{3}-24\sqrt{3}$

(i) $\int_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{9+x^2}}$ $Resp.: \frac{2}{27}(3-\sqrt{3})$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem ser encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/

O GAMA possui monitorias de:

- ❑ Pré-cálculo e Matemática Elementar (e disciplinas equivalentes)
- ❑ ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
- ❑ Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino

Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

Integrais

2018/1

Aula 04

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Área entre curvas

Definição: A área A da região limitada pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$, onde f e g são contínuas e $f(x) \geq g(x)$, para todo $x \in [a, b]$ é:

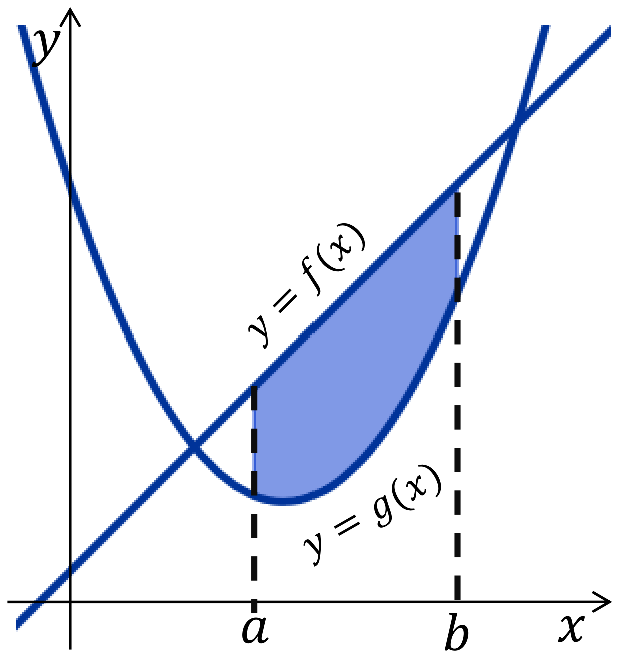
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Observação: Antes de calcular a área, pode ser importante esboçar os gráficos das funções f e g para identificar qual função delimita a área superiormente (*função de cima*) e qual delimita a área inferiormente (*função de baixo*):

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Função
de cima

Função
de baixo



Área entre curvas

Exemplo: Calcule a área compreendida pelas curvas $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ e $g(x) = x^2$ e pelas retas $x = 0$ e $x = 1$.

Solução: Neste caso, temos:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

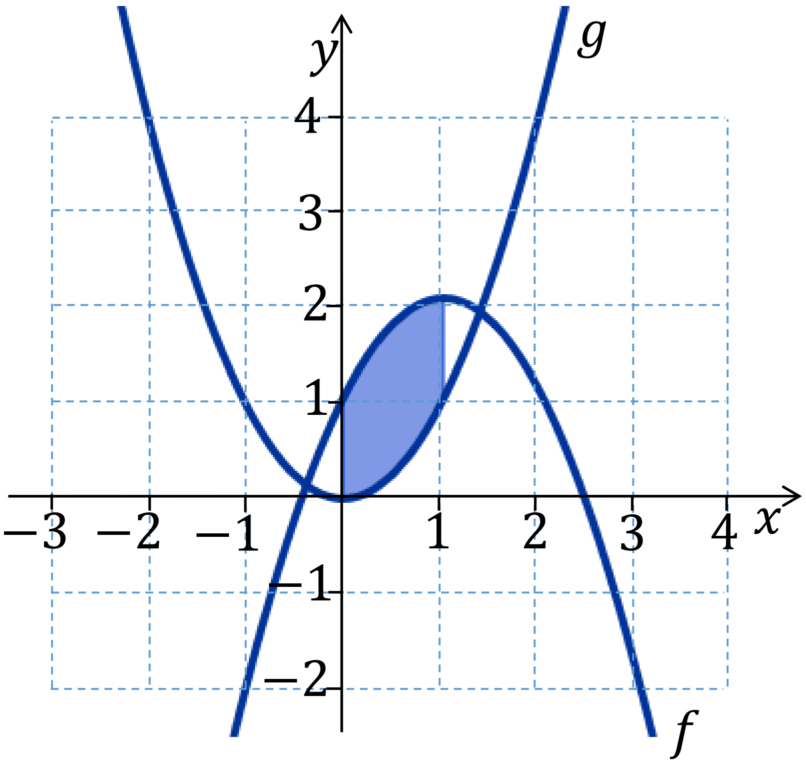
$$= \int_0^1 [-x^2 + 2x + 1 - x^2]dx$$

$$= \int_0^1 [-2x^2 + 2x + 1]dx$$

$$= \left[-2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1$$

$$= -\frac{2}{3} + 1 + 1 = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}\ u.a.$$

Gráficos



$f(x) = -x^2 + 2x + 1$ Função de cima

$g(x) = x^2$ Função de baixo

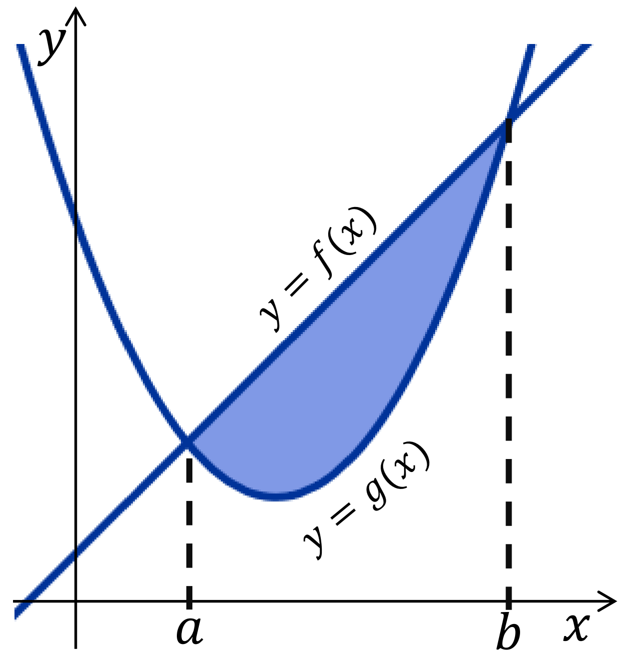
Limites de integração: $a = 0$ $b = 1$

Área entre curvas

Observação: Quando for necessário calcular a área entre os gráficos das funções f e g, pode ser necessário encontrar os extremos a e b resolvendo o sistema formado pelas equações que definem f e g:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

Sistema para encontrar os limites de integração!



Exemplo: Calcule a área entre as curvas $y = x^2$ e $y = x + 2$.

Solução: Neste caso, precisaremos encontrar primeiramente os limites de integração através da resolução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases} \Longrightarrow x^2 = x + 2 \Longrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Longrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 2$$

Portanto, $a = -1$ e $b = 2$.

Área entre curvas

Continuação...

$$A = \int_{-1}^{2} [(x+2) - x^2]dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)dx$$

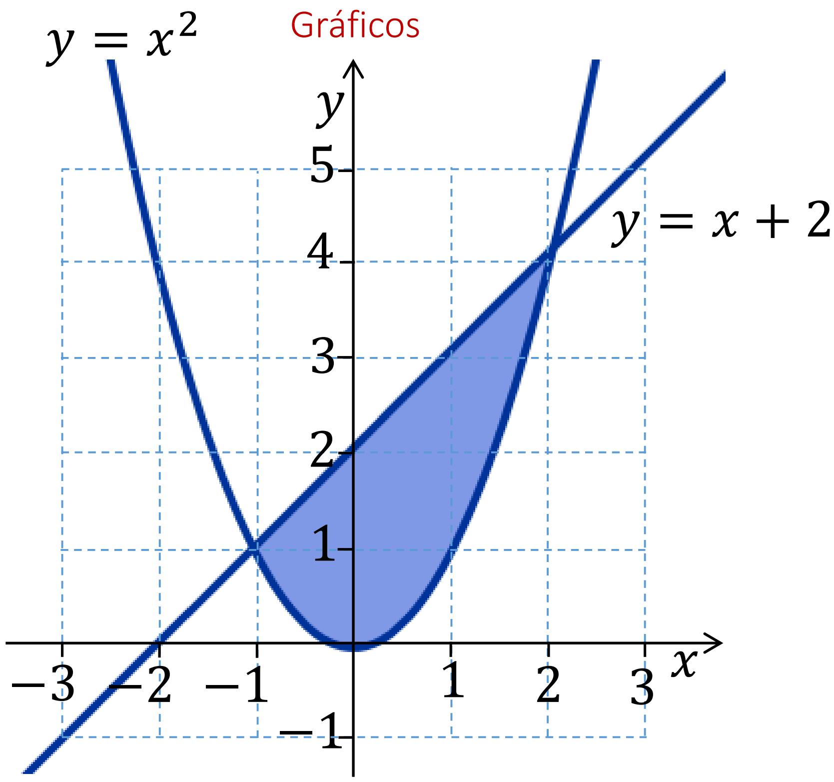
$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left[-\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4\right] - \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right]$$

$$= \left[\frac{-16 + 12 + 24}{6}\right] - \left[\frac{2 + 3 - 12}{6}\right]$$

$$= \frac{20}{6} + \frac{7}{6} = \frac{27}{6}\ u.a.$$

Gráficos



$y = x + 2$ Função de cima

$y = x^2$ Função de baixo

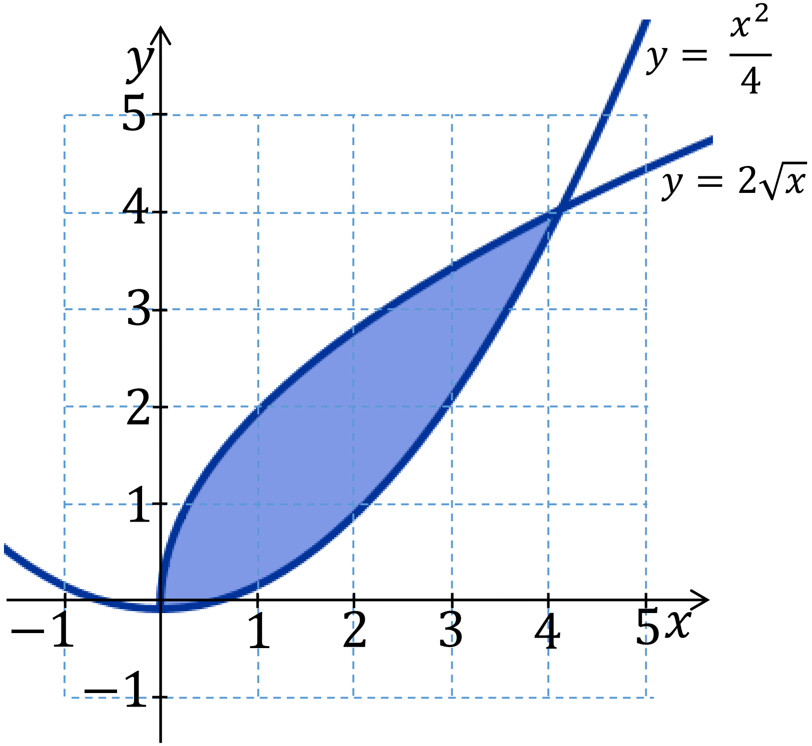
Limites de integração: $a = -1$ $b = 2$

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Calcule a área entre as curvas dadas:

(a) $y = \dfrac{x^2}{4}$ e $y = 2\sqrt{x}$

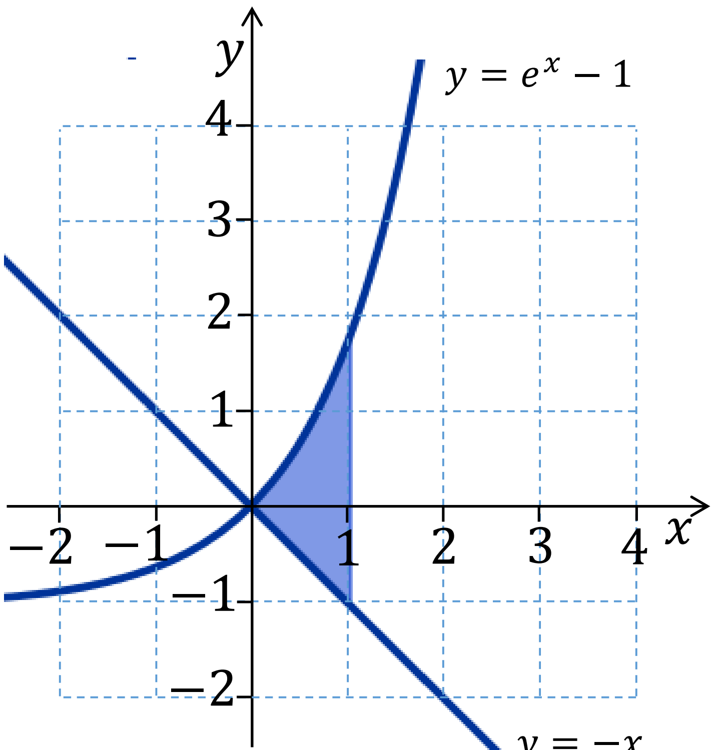


$$A = \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}\right) dx = \frac{16}{3}\ u.a.$$

Exercícios

1) Calcule a área entre as curvas dadas:

(b) $y = e^x - 1$ e $y = -x$ e $x = 1$

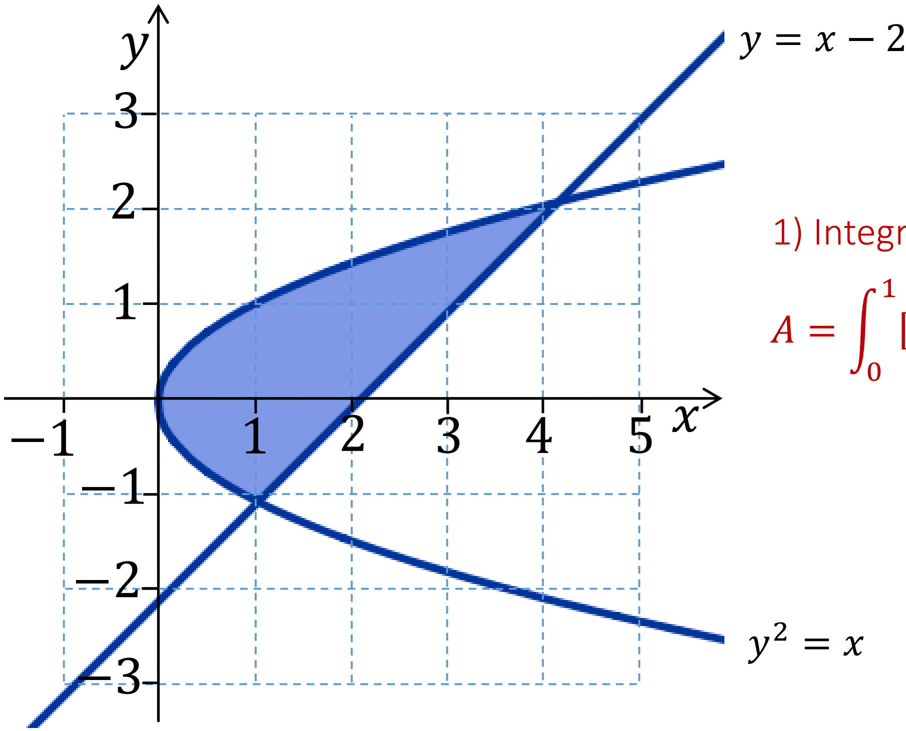


$$A = \int_0^1 [e^x - 1 - (-x)]\,dx = e - \frac{3}{2} u.a.$$

Exercícios

1) Calcule a área entre as curvas dadas:

(c) $y^2 = x$ e $y = x - 2$



Podemos calcular a área de duas maneiras:

1) Integrando na variável x

$$A = \int_0^1 [\sqrt{x} - (-\sqrt{x})]dx + \int_1^4 [\sqrt{x} - (x-2)]dx = \frac{9}{2}\ u.a.$$

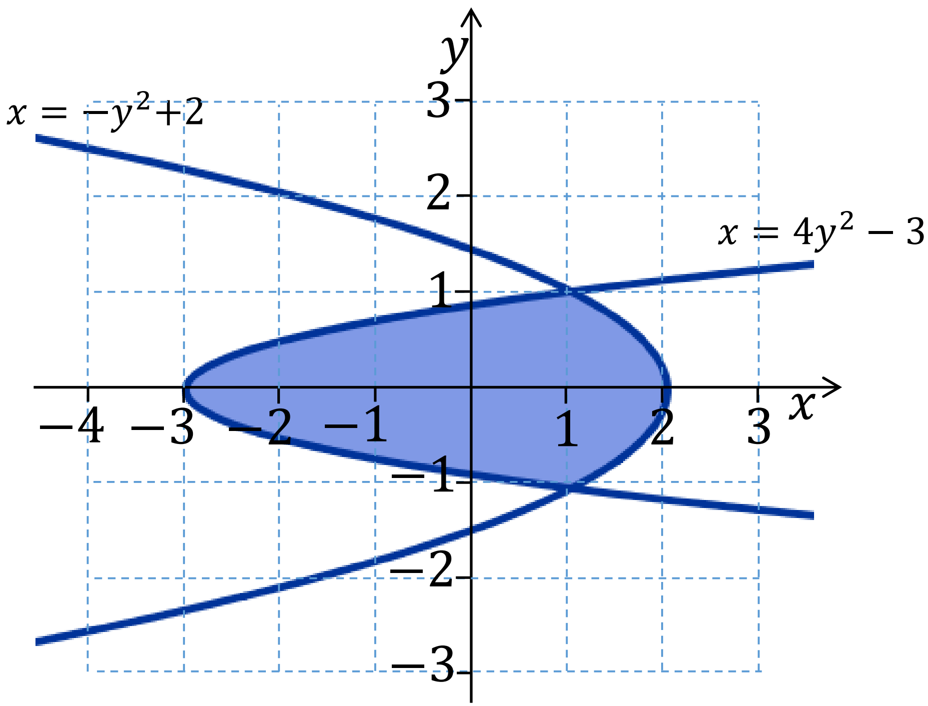
2) Integrando na variável y

$$A = \int_{-1}^2 [(y+2) - y^2]dy = \frac{9}{2}\ u.a.$$

Exercícios

1) Calcule a área entre as curvas dadas:

(d) $y^2 = -x + 2$ e $4y^2 = x + 3$

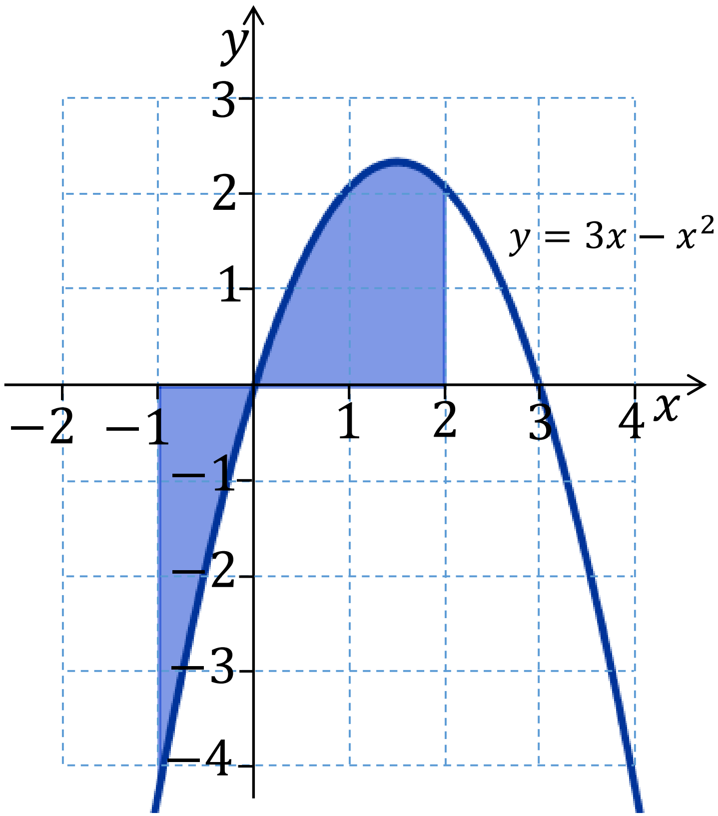


$$A = \int_{-1}^{1} [(-y^2 + 2) - (4y^2 - 3)]dy = \frac{20}{3} \; u.a.$$

Exercícios

1) Calcule a área entre as curvas dadas:

(e) $y = 3x - x^2$, eixo x, $x = -1$ e $x = 2$



$$A = -\int_{-1}^{0} (3x - x^2)dx + \int_{0}^{2} (3x - x^2)dx$$

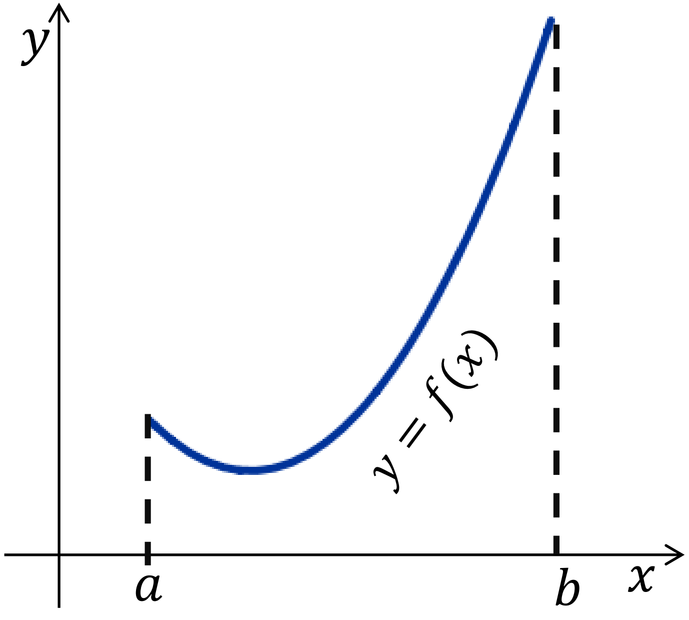
$$= \frac{11}{6} + \frac{10}{3} = \frac{31}{6}\ u.a.$$

Comprimento de arco

Definição: Se f' for contínua em $[a, b]$, então o comprimento da curva $y = f(x), a \leq x \leq b$, é:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx$$

Observação: Em resumo, para calcular o comprimento de arco de uma curva, você deverá seguir os passos abaixo:



1º passo: derivar a função

2º passo: calcular $1 + (f')^2$

3º passo: calcular a integral

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx$$

Comprimento de arco

Exemplo: Encontre o comprimento da seguinte curva.

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+2)^3} \qquad 0 \le x \le 4$$

Solução:

1º passo:

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+2)^3} \implies y' = x\sqrt{x^2+2}$$

2º passo:

$$1 + (y')^2 = 1 + \left(x\sqrt{x^2+2}\right)^2 = 1 + x^2(x^2+2)$$

$$= x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2+1)^2.$$

3º passo:

$$L = \int_0^4 \sqrt{(x^2+1)^2}\,dx = \int_0^4 (x^2+1)dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^4$$

$$= \frac{(4)^3}{3} + (4) = \frac{64+12}{3} = \frac{76}{3}.$$

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Encontre os comprimentos das seguintes curvas:

(a) $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}, \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1$ $\quad$ $Resp.: \frac{31}{48}$

(b) $y = \ln(\sin x), \quad \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ $\quad$ $Resp.: \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$

(c) $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad [0,2]$ $\quad$ $Resp.: \frac{1}{2}\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right)$

(d) $y = x^{2/3}, \quad [1,8]$ $\quad$ $Resp.: \frac{80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}}{27}$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem ser encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/

O GAMA possui monitorias de:

- Pré-cálculo e Matemática Elementar (e disciplinas equivalentes)
- ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
- Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino

Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

Integrais

2018/1

Aula 05

Projeto

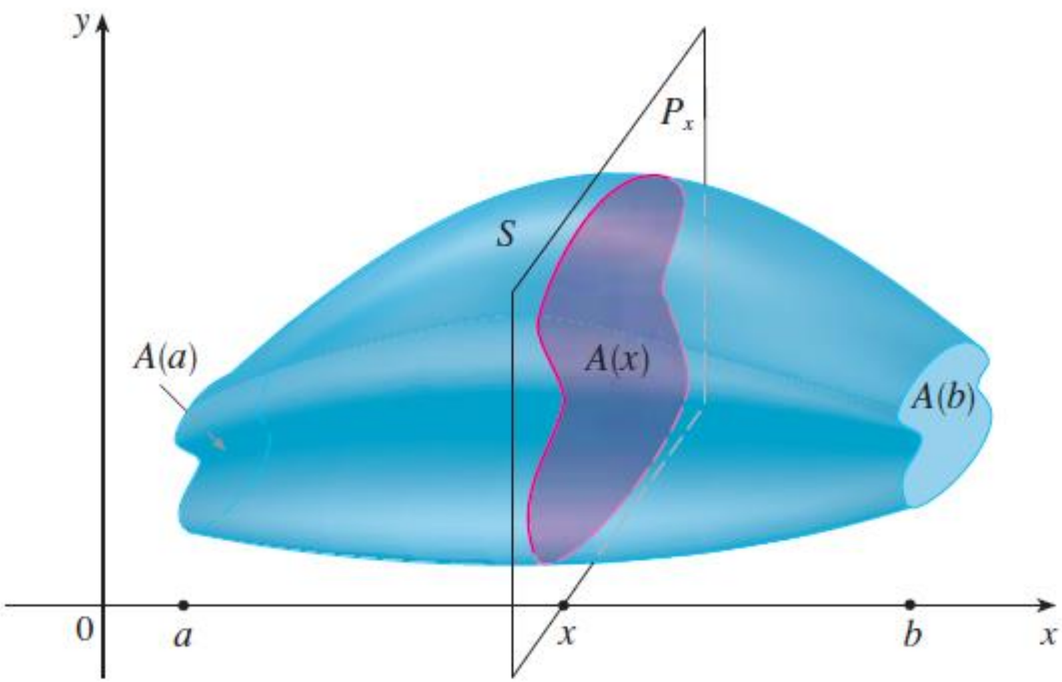
GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Volumes

Definição: Seja S um sólido que está entre $x = a$ e $x = b$. Se a área da secção transversal de S no plano P_x, passando por x e perpendicular ao eixo x, é $A(x)$, onde A é uma função contínua, então o volume de S é

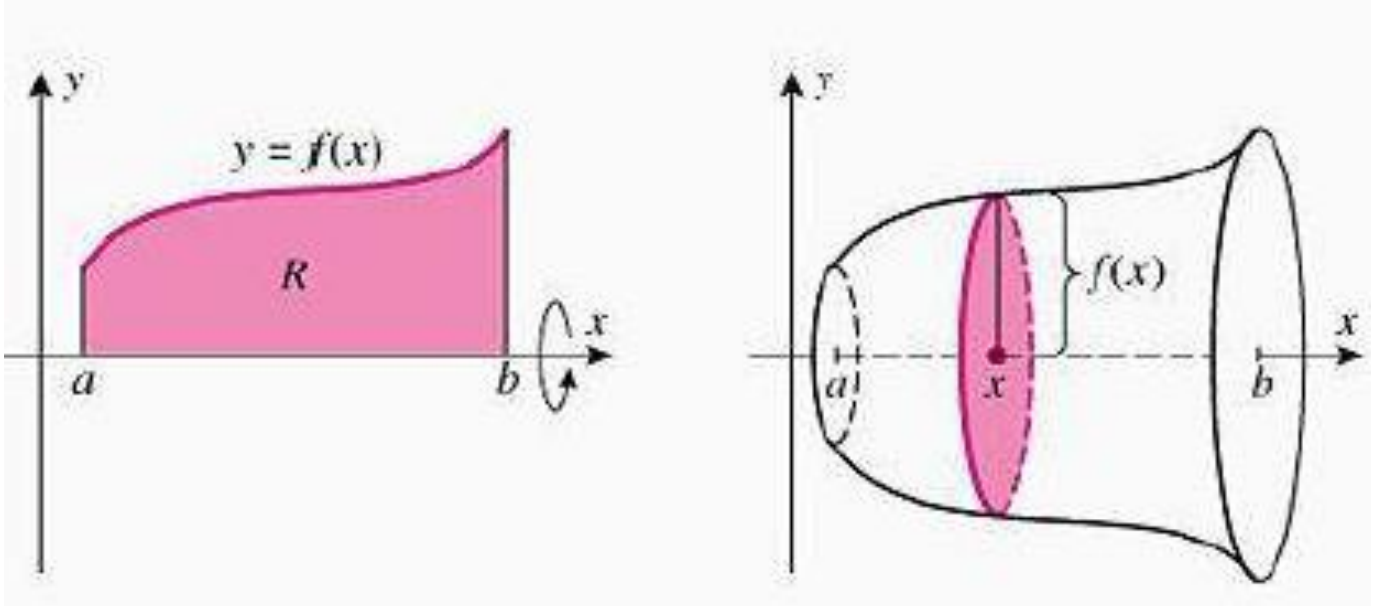
$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x = \int_a^b A(x)dx$$



Método dos discos

Definição: Método dos discos é dado por

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 \, dx$$



Método dos discos

Exemplo: Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada por $y = \sqrt{3-x}$ e $x = -1$, ao redor do eixo x.

Solução:

$$V = \int_{-1}^{3} \pi\left[\sqrt{3-x}\right]^2 dx =$$

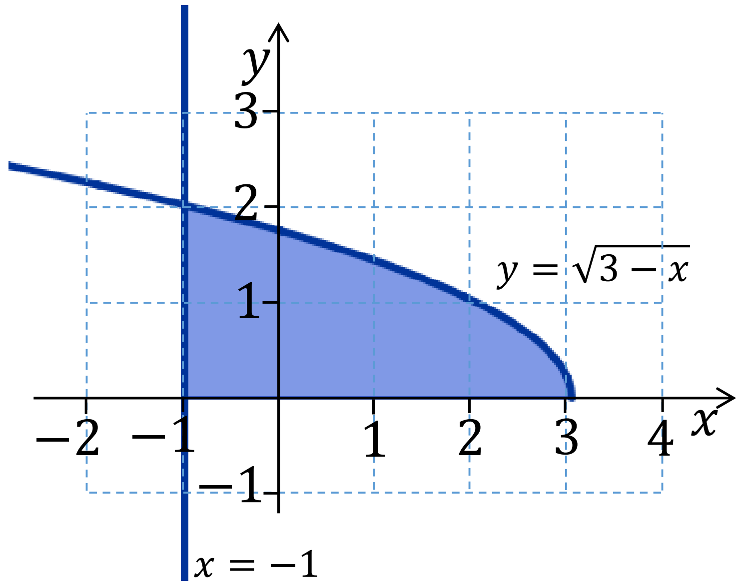
$$= \pi \int_{-1}^{3} (3-x)dx = \pi \left[3x - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{3}$$

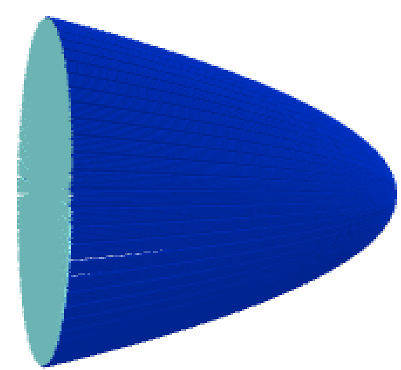
$$= \pi\left[\left(3(3) - \frac{(3)^2}{2}\right) - \left(3(-1) - \frac{(-1)^2}{2}\right)\right]$$

$$= \pi\left[\left(9 - \frac{9}{2}\right) - \left(-3 - \frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= \pi\left[\frac{9}{2} - \left(-\frac{7}{2}\right)\right] = \pi\left[\frac{9}{2} + \frac{7}{2}\right]$$

$$= \frac{16}{2}\pi = 8\pi\ u.v.$$



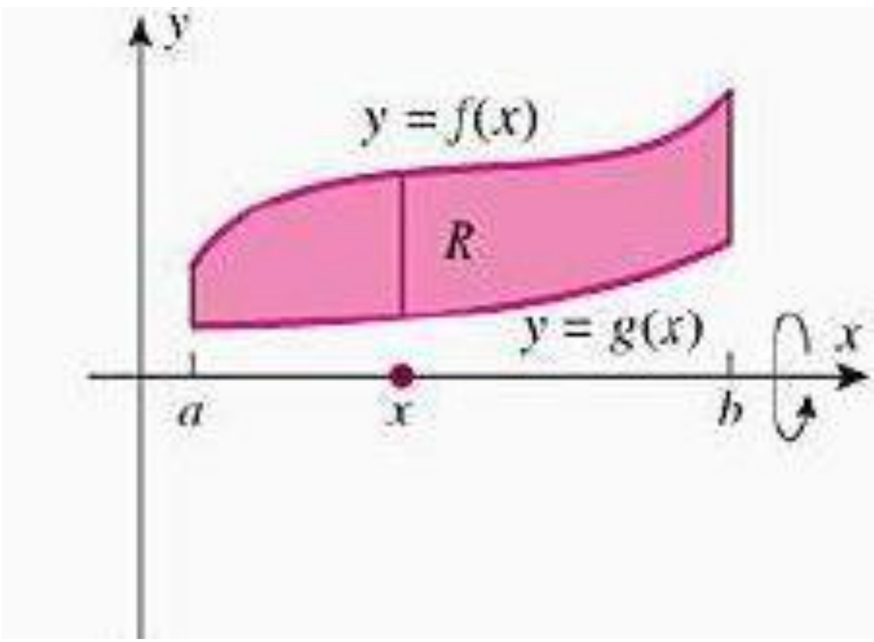


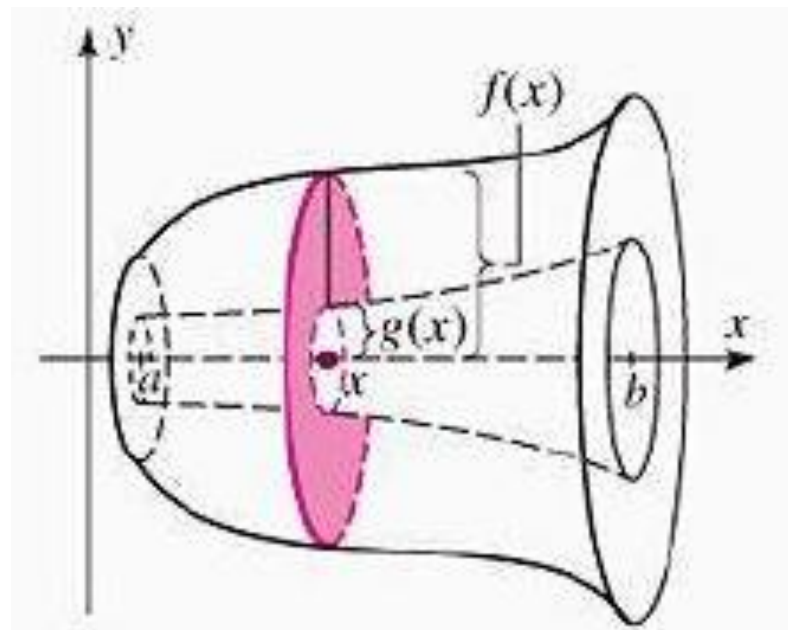
Sólido gerado

Método do anel circular ou das arruelas

Definição: Método do anel ou arruelas é dado por

$$V = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\, dx$$





Método do anel circular ou das arruelas

Exemplo: Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas $y = 2\sqrt{x}$ e $4y = x^2$ em torno do eixo x.

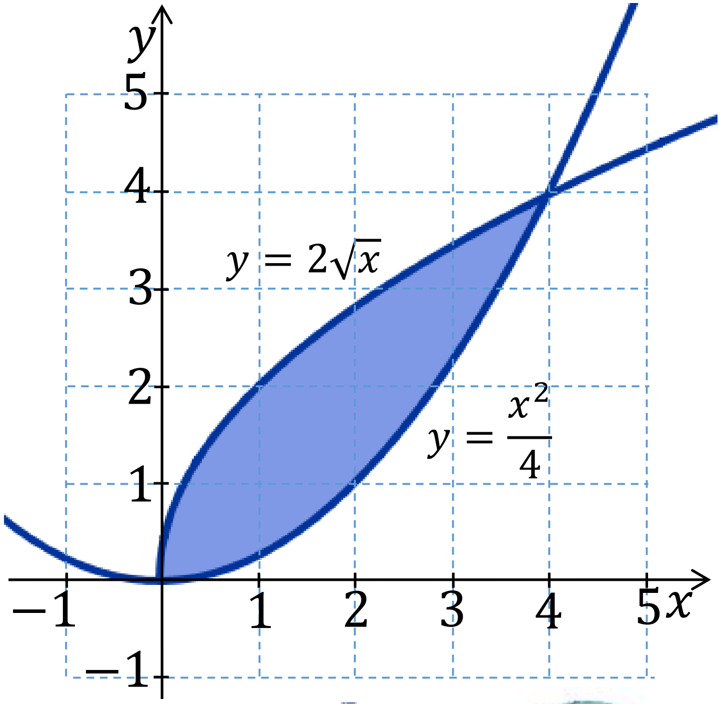
Solução:

$$V = \int_0^4 \pi \left[(2\sqrt{x})^2 - \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 \right] dx$$

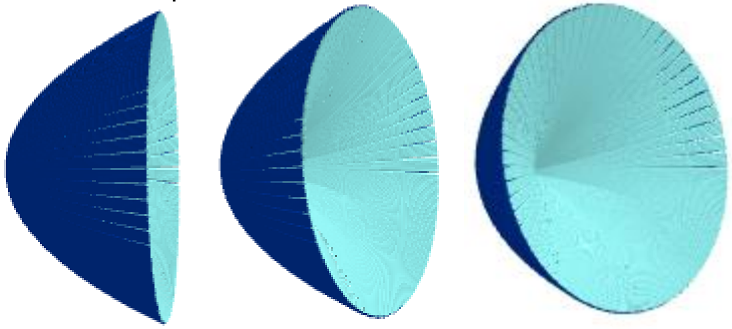
$$= \pi \int_0^4 \left[4x - \frac{x^4}{16} \right] dx = \pi \left[4\frac{x^2}{2} - \frac{1}{16}\frac{x^5}{5} \right]_0^4$$

$$= \pi \left[4\frac{4^2}{2} - \frac{1}{16}\frac{4^5}{5} \right] = \pi \left[32 - \frac{64}{5} \right]$$

$$= \pi \left[\frac{160 - 64}{5} \right] = \frac{96}{5}\pi \, u.v.$$



Sólido gerado



Método das cascas cilíndricas

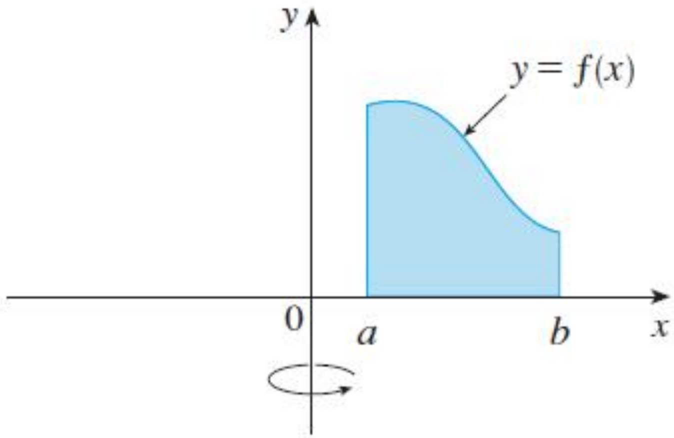
Definição: Método das cascas cilíndricas

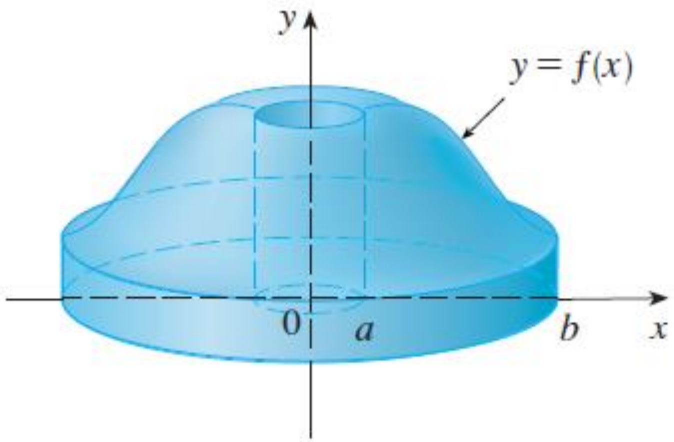
Quando o eixo de revolução é o eixo y se integra em x

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)dx$$

Quando o eixo de revolução é o eixo x se integra em y

$$V = \int_a^b 2\pi y f(y)dy$$





Método das cascas cilíndricas

Exemplo: Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada por $x = y^2 - 2,\ x = 6 - y^2$ em torno do eixo x.

Solução:

$$V = \int_0^2 2\pi y[(6 - y^2) - (y^2 - 2)]dy$$

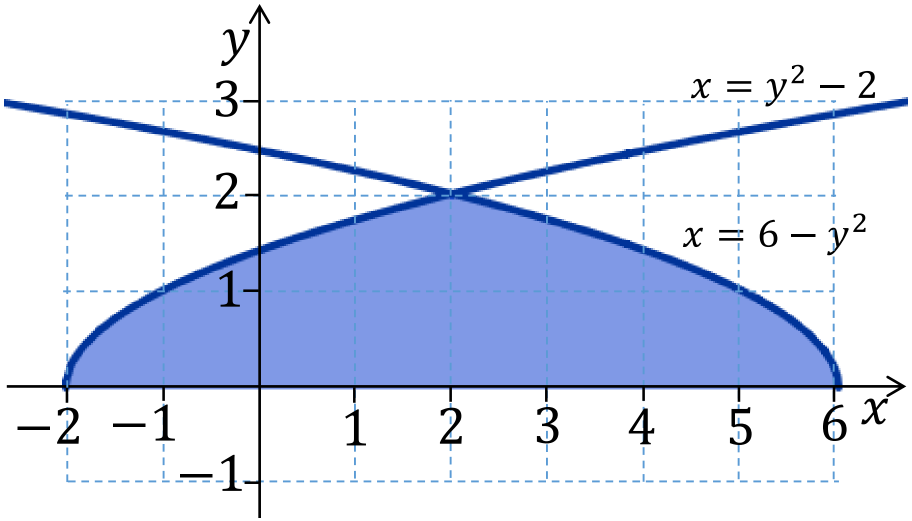
$$= 2\pi \int_0^2 y[8 - 2y^2]dy$$

$$= 2\pi \int_0^2 (8y - 2y^3)dy$$

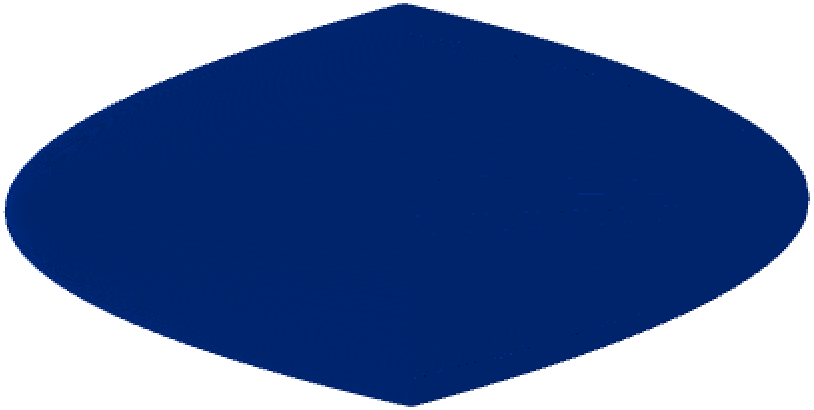
$$= 2\pi \left[\frac{8y^2}{2} - \frac{2y^4}{4}\right]_0^2$$

$$= 2\pi \left[4(2)^2 - \frac{2(2)^4}{4}\right]$$

$$= 2\pi[16 - 8] = 16\pi\ u.v.$$



Sólido gerado



Exercícios Propostos

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

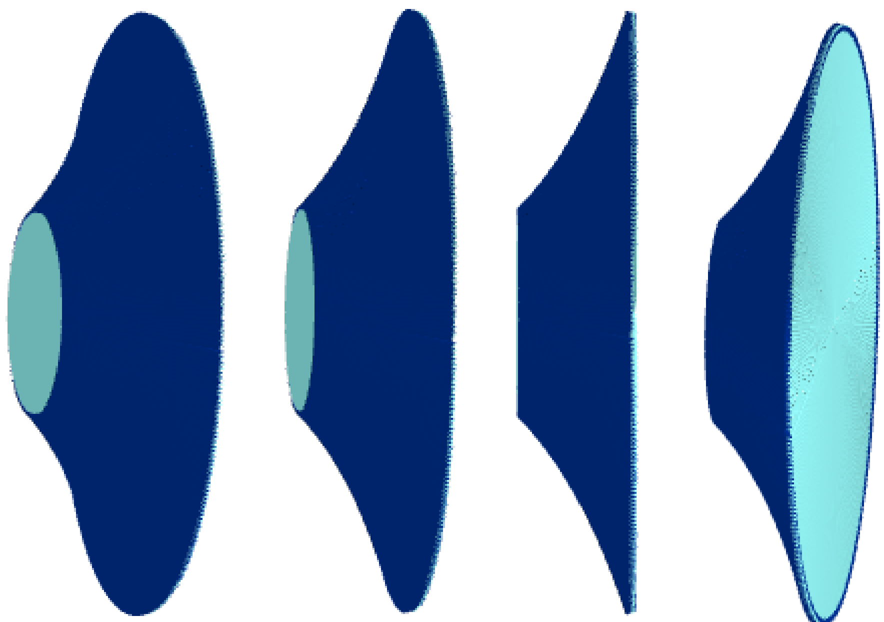
Exercícios

1) Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas em torno dos eixos dados.

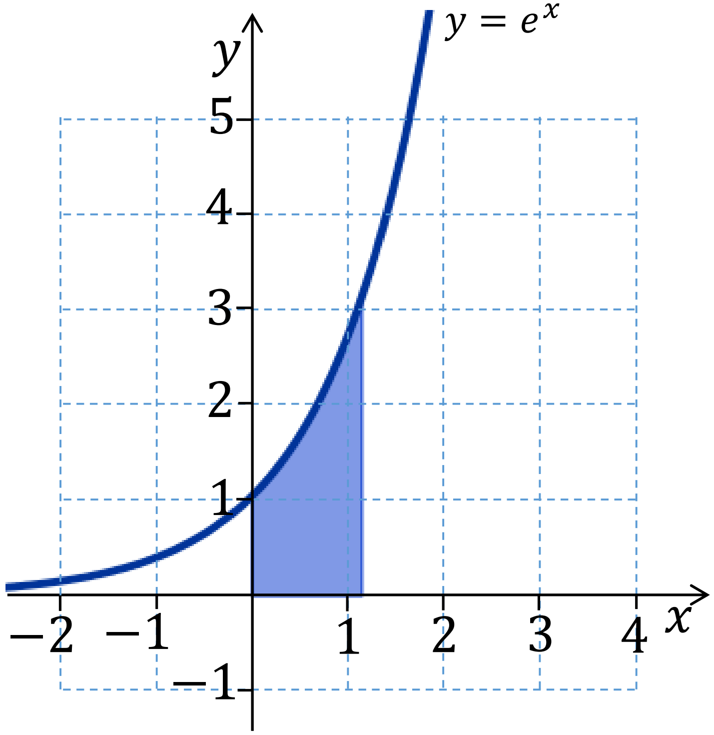
(a) $y = e^x, y = 0, x = 0, x = \ln 3$, ao redor do eixo x

Método dos discos

$$V = \int_0^{\ln 3} \pi[e^x]^2 dx = \pi \int_0^{\ln 3} e^{2x} dx = 4\pi\ u.v$$



Sólido gerado



Exercícios

1) Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas em torno dos eixos dados.

b) $y = \sqrt{x+2},\ y = 2\sqrt{x-1},\ y = 0$, em torno do eixo x

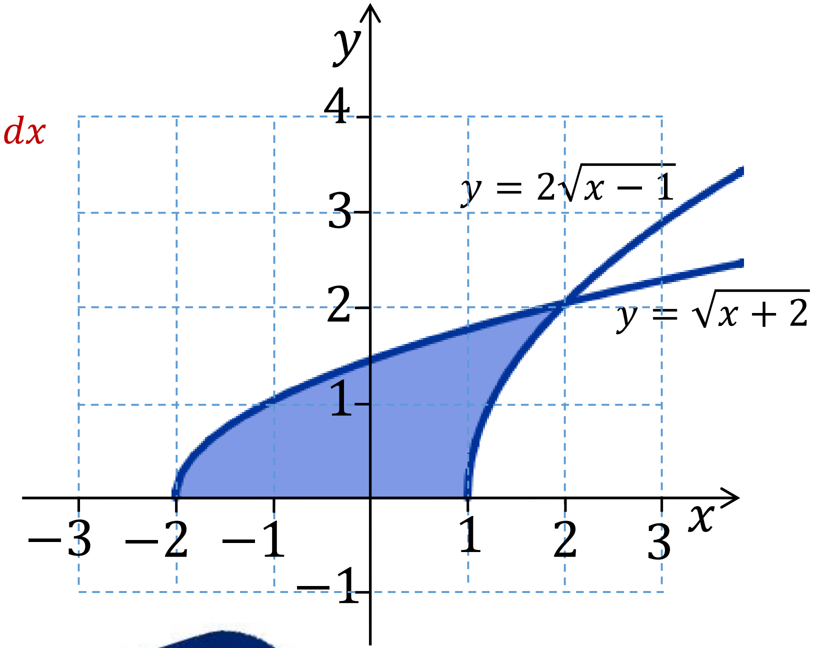
Método dos discos

$$V = \int_{-2}^{1} \pi\left[\sqrt{x+2}\right]^2 dx + \int_{1}^{2} \pi\left[\left(\sqrt{x+2}\right)^2 - \left(2\sqrt{x-1}\right)^2\right] dx$$

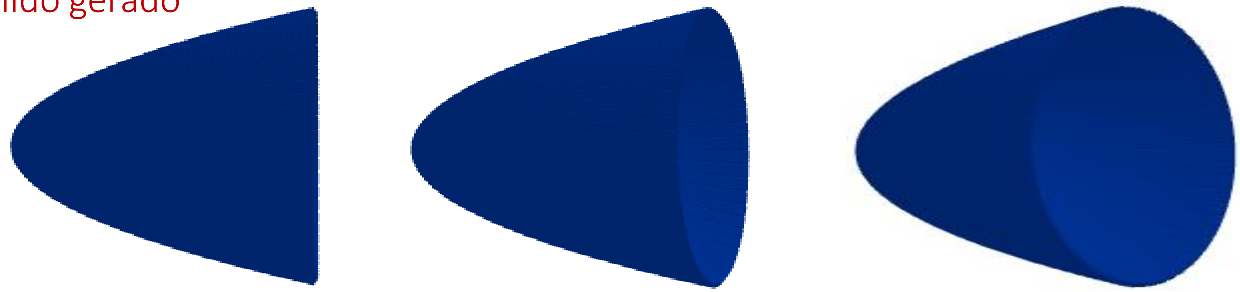
$$= \frac{9\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 6\pi\ u.v.$$

Método das cascas cilíndricas

$$V = \int_{0}^{2} 2\pi y\left[\left(\frac{y^2}{4}+1\right) - (y^2 - 2)\right] dy = 6\pi\ u.v$$



Sólido gerado



Exercícios

1) Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas em torno dos eixos dados.

c) $y = 2x - 1,\ y = -2x + 3,\ x = 2,$ em torno do eixo y.

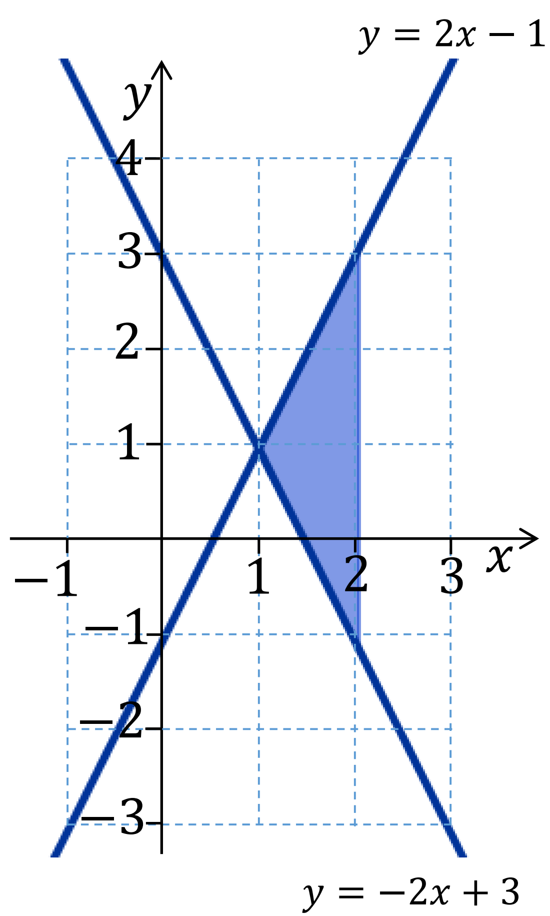
Método das arruelas

$$V = \int_{-1}^{1} \pi \left[(2)^2 - \left(\frac{3-y}{2} \right)^2 \right] dy + \int_{1}^{3} \pi \left[(2)^2 - \left(\frac{y+1}{2} \right)^2 \right] dy$$

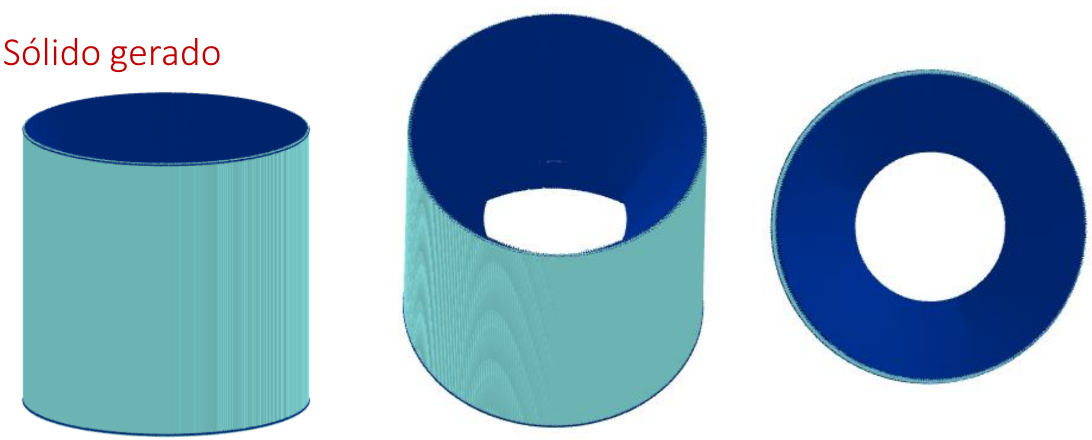
$$= \frac{10\pi}{3} + \frac{10\pi}{3} = \frac{20\pi}{3} u.v.$$

Método das cascas cilíndricas

$$V = \int_{1}^{2} 2\pi x[(2x-1) - (-2x+3)]dx = \frac{20\pi}{3} u.v.$$



Sólido gerado



Exercícios

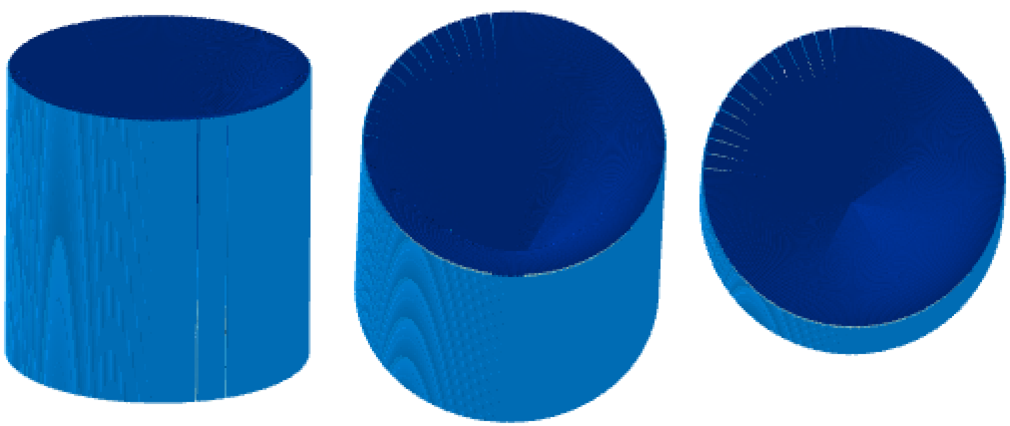
1) Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas em torno dos eixos dados.

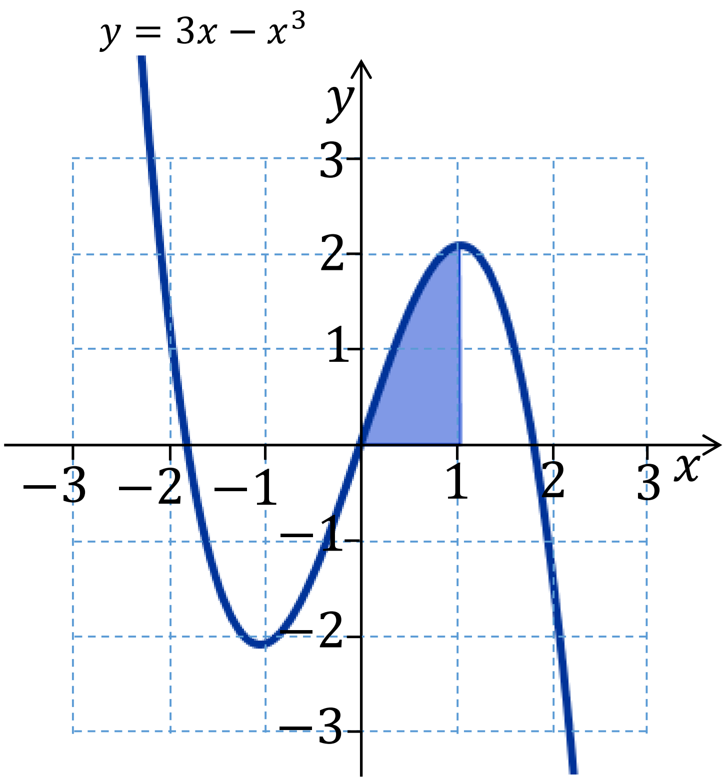
d) $y = 3x - x^3$, eixo x, $x = 1$ em torno do eixo y.

Método das cascas cilíndricas

$$V = \int_0^1 2\pi x(3x - x^3)dx = \frac{8\pi}{5} u.v.$$

Sólido gerado





Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem ser encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/

O GAMA possui monitorias de:

- ❑ Pré-cálculo e Matemática Elementar (e disciplinas equivalentes)
- ❑ ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
- ❑ Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino

Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

Integrais

2018/1

Aula 06

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Integrais por substituição trigonométrica

As substituições trigonométricas podem servir para transformar integrais que envolvam

$$\sqrt{a^2 + x^2} \qquad \sqrt{a^2 - x^2} \qquad \sqrt{x^2 - a^2}$$

em integrais que podem ser calculadas diretamente.

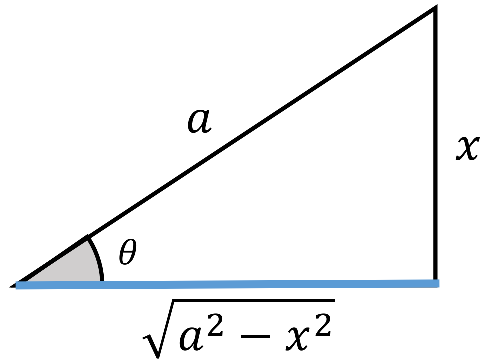
As substituições mais comuns são:

$$x = a\,tg\,\theta \qquad x = a\,sen\,\theta \qquad x = a\,sec\,\theta$$

Podemos visualizar geometricamente como podem ser feitas essas substituições básicas, a partir de triângulos retângulos. Vejamos os casos a seguir.

Integrais por substituição trigonométrica

Caso 1. $\sqrt{a^2 - x^2}$



Para as variáveis apresentadas, sabemos que

$$sen\ \theta = \frac{x}{a}$$

logo,

$$x = a\ sen\ \theta$$

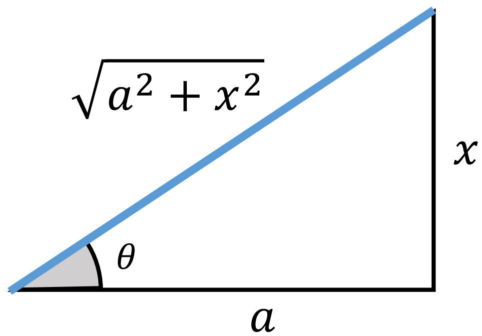
Para $x = a\ sen\ \theta$, temos:

$$\begin{aligned} a^2 - x^2 &= a^2 - a^2\ sen^2\ \theta \\ &= a^2(1 - sen^2\ \theta) \\ &= a^2\ cos^2\ \theta \end{aligned}$$

Então, $\sqrt{a^2 - x^2} = a\ |\cos\theta|$.

Integrais por substituição trigonométrica

Caso 2. $\sqrt{a^2 + x^2}$



Para as variáveis apresentadas, sabemos que

$$tg\,\theta = \frac{x}{a}$$

logo,

$$x = a\,tg\,\theta$$

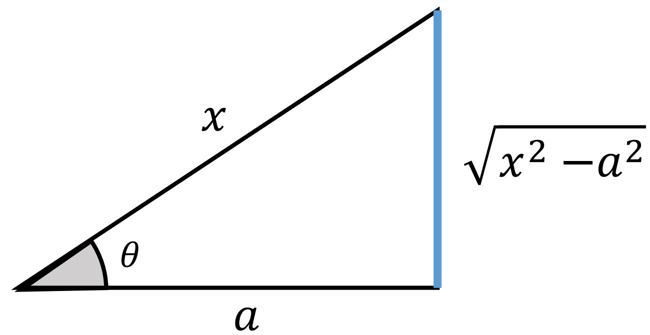
Para $x = a\,tg\,\theta$, temos:

$$\begin{aligned} a^2 + x^2 &= a^2 + a^2 tg^2\,\theta \\ &= a^2(1 + tg^2\,\theta) \\ &= a^2\,sec^2\,\theta \end{aligned}$$

Então, $\sqrt{a^2 + x^2} = a\,|\sec\theta|$.

Integrais por substituição trigonométrica

Caso 3. $\sqrt{x^2 - a^2}$



Para as variáveis apresentadas, sabemos que

$$\boxed{sec\ \theta = \frac{x}{a}}$$

logo,

$$\boxed{x = a\ sec\ \theta}$$

Para $x = a\ sec\ \theta$, temos:

$$\begin{aligned} x^2 - a^2 &= a^2\ sec^2\ \theta - a^2 \\ &= a^2(sec^2\ \theta - 1) \\ &= a^2\ tg^2\ \theta \end{aligned}$$

Então, $\sqrt{x^2 - a^2} = a\ |\text{tg}\ \theta|$.

Substituição trigonométrica

Exemplo 1: Calcule

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$$

Solução: para eliminar o radical, fazemos a substituição

$$x = 2\,sen\,\theta$$

$$dx = 2\cos\theta\,d\theta$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{2\cos\theta\,d\theta}{(2\,sen\,\theta)^2\sqrt{4-4\,sen^2\,\theta}}$$

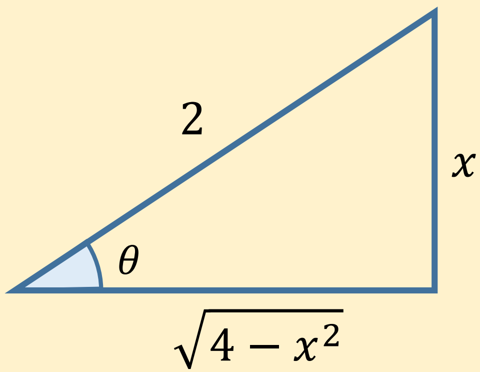
$$= \int \frac{2\cos\theta\,d\theta}{(2\,sen\,\theta)^2(2\cos\theta)} = \frac{1}{4}\int \frac{d\theta}{sen^2\theta}$$

$$= \frac{1}{4}\int cossec^2\theta\,d\theta = -\frac{1}{4}cotg\,\theta + C$$

Devemos expressar $cotg\,\theta$ em termos de x. Para isso substituímos $x = 2\,sen\,\theta$ como $sen\,\theta = {}^{x}/_{2}$

Substituição trigonométrica

Representando esses valores geometricamente



$$x = 2\, sen\, \theta$$

obtemos:

$$cotg\, \theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

e, fazendo as devidas substituições

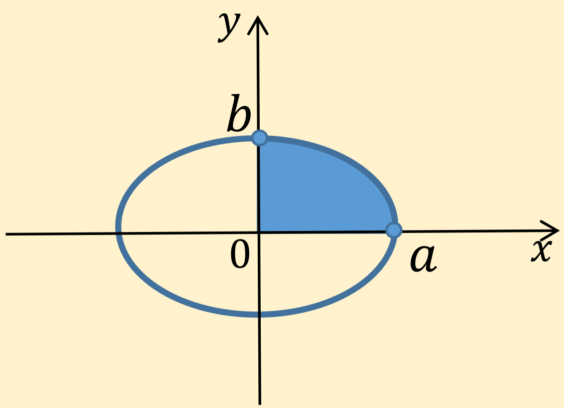
$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{1}{4} cotg\, \theta + C \quad = -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + C$$

Substituição trigonométrica

Exemplo 2: Encontre a área da elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Solução: a elipse é simétrica em torno dos eixos, logo sua área é 4 vezes a área do primeiro quadrante.



Resolvendo a equação da elipse em termos de x:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Assim, a área é dada por:

$$A = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$= \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

Fazendo a substituição

$$\boxed{x = a\ sen\ \theta}$$

$$\boxed{dx = a\ cos\theta\ d\theta}$$

Substituição trigonométrica

Convertendo os limites de integração em x para os limites de integração em θ:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = arc\ sen\ (0) = 0$$

$$x = a \quad \Rightarrow \quad \theta = arc\ sen\ (1) = \frac{\pi}{2}$$

Obtemos:

$$A = \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \quad = \frac{4b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos\theta\ \cdot a\cos\theta\ d\theta$$

$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2\theta\ d\theta$$

$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 + cos2\theta)\ d\theta$$

$$= 2ab\left[\theta + \frac{1}{2}\ sen2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2ab\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \pi ab$$

Substituição trigonométrica

Exemplo 3: Calcule $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}\,dx$, supondo que $x \geq 5$.

Solução: fazendo a substituição

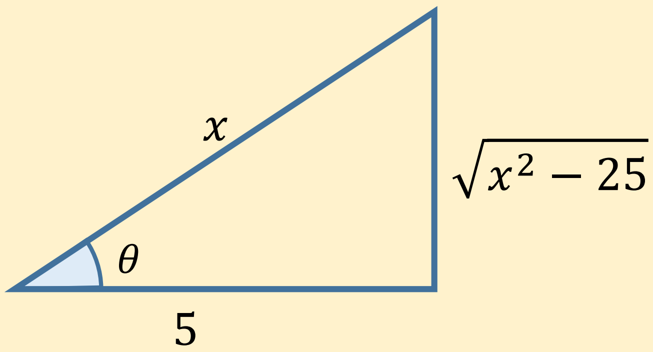
$$\boxed{x = 5\sec\theta\,, \qquad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}} \qquad \boxed{dx = 5\sec\theta\ tg\theta\ d\theta}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}\,dx &= \int \frac{\sqrt{25\,sec^2\theta - 25}}{5\,sec\theta}(5\sec\theta\ \ tg\theta)\ d\theta \\
&= \int \frac{5\,|tg\ \theta|}{5\,sec\theta}(5\sec\theta\ \ tg\theta)\ d\theta \\
&= 5\int tg^2\theta\ \ d\theta \\
&= 5\int (sec^2\theta - 1)\ \ d\theta = 5\ tg\ \theta - 5\ \theta + C
\end{aligned}$$

Substituição trigonométrica

Para expressar a solução em termos de x, vamos representar geometricamente



$$\boxed{x = 5\sec\theta}$$

$$\boxed{\theta = arc\sec\left(\frac{x}{5}\right)}$$

O que nos dá

$$tg\,\theta = \frac{\sqrt{x^2-25}}{5}$$

Disso, obtemos:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx = \sqrt{x^2-25} - 5arc\sec\left(\frac{x}{5}\right) + C$$

Integrais envolvendo $ax^2 + bx + c$

Integrais envolvendo polinômios também podem ser calculadas a partir deste método, primeiro completando os quadrados e, depois, fazendo uma substituição apropriada. Veja o exemplo:

Exemplo 4 : Calcule

$$\int \frac{x}{x^2 - 4x + 8}\,dx$$

Solução: completando os quadrados, temos

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 8 &= (x^2 - 4x + 8) + 4 - 4 \\ &= (x-2)^2 + 4 \end{aligned}$$

A substituição $u = x - 2,\ du = dx$, fornece

$$\int \frac{x}{x^2 - 4x + 8} = \int \frac{x}{(x-2)^2 + 4}\,dx = \int \frac{u+2}{u^2 + 4}\,du$$

Integrais envolvendo $ax^2 + bx + c$

Solução:

$$= \int \frac{u}{u^2 + \ 4} du + 2\int \frac{du}{u^2 + \ 4} = \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2 + \ 4} du + 2\int \frac{du}{u^2 + \ 4}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(u^2 + 4) + 2\left(\frac{1}{2}\right) arc\ tg\ \frac{u}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln[(x-2)^2 + 4] + \ arc\ tg\left(\frac{x-2}{2}\right) + C$$

Tabela Resumo

Em resumo, as três substituições básicas estão apresentadas na tabela abaixo, bem como os valores de θ que satisfazem a reversibilidade das funções.

EXPRESSÃO NO INTEGRANDO	*SUBSTITUIÇÃO*	*RESTRIÇÃO SOBRE O θ*	*SIMPLIFICAÇÃO*
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\ sen\ \theta$	$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$a^2 - x^2 = a^2 \cos^2 \theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a\ tg\ \theta$	$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$a^2 + x^2 = a^2 \sec^2 \theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta$	$\begin{cases} 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \ \ (se\ x \geq a) \\ \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \ \ (se\ x \leq -a) \end{cases}$	$x^2 - a^2 = a^2\, tg^2\, \theta$

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Calcule as seguintes integrais fazendo as devidas substituições

$(a)\ \int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$ $\quad \ln\left|\sqrt{9+x^2}+x\right|+C$

$(b)\ \int \sqrt{1-4x^2}\ dx$ $\quad \frac{1}{4}\left[arc\ sen\ (2x)+2x\sqrt{1-4x^2}\right]+C$

$(c)\ \int_{-2}^{2} \frac{dx}{4+x^2}$ $\quad \frac{\pi}{4}$

$(d)\ \int_{0}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}dx$ $\quad \frac{\pi}{6}$

$(e)\ \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-2x^2}}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left[arc\ sen\ \sqrt{\frac{2}{7}}(x+1)\right]+C$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem ser encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/

O GAMA possui monitorias de:

- Pré-cálculo e Matemática Elementar (e disciplinas equivalentes)
  - ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
    - Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.