Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino

Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

Derivadas

2018/1

Aula 01

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Equação da reta

Lembre que a fórmula para o coeficiente angular ou inclinação da reta que contém os pontos $\mathrm{A}(x_A, y_A)$ e $\mathrm{B}(x_B, y_B)$ é dada por:

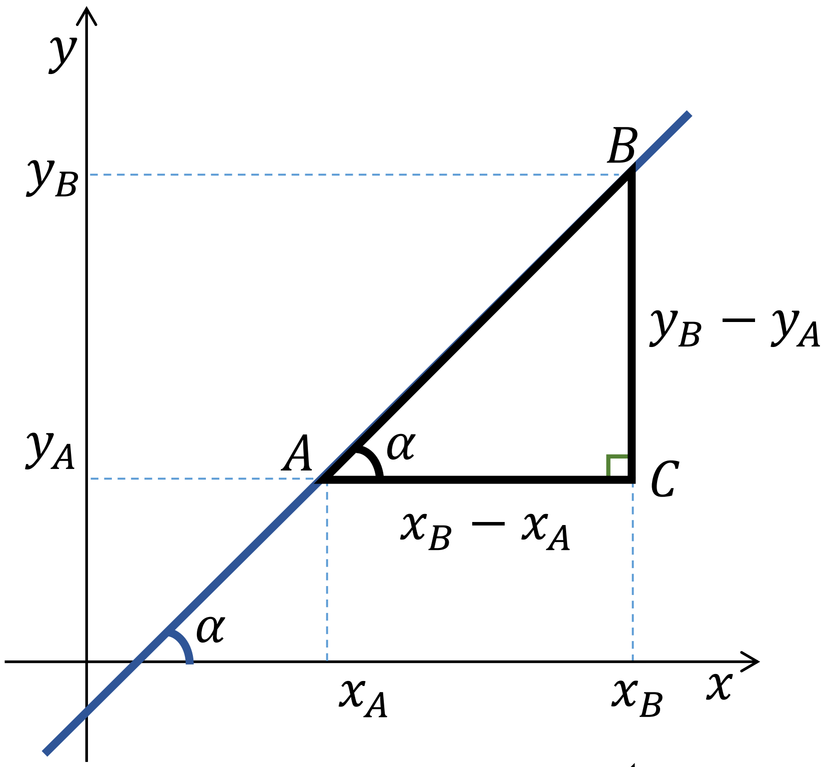
$$m = \tan\alpha$$

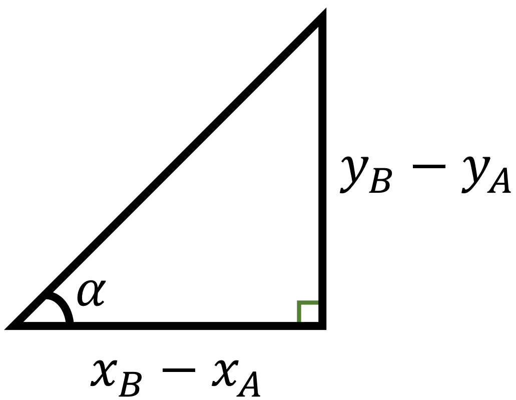
Ou ainda:

$$m = \tan\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

A equação da reta que possui coeficiente m e que contém o ponto $\mathrm{A}(x_A, y_A)$ é dada por:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$





Equação da reta

Exemplo: Encontre a equação da reta que contém os pontos A$(2,1)$ e B$(5,3)$.

Solução: Determinando o coeficiente angular (inclinação) da reta, temos:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-1}{5-2} = \frac{2}{3}$$

Determinando a equação da reta:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

$$y - 1 = \frac{2}{3}(x-2)$$

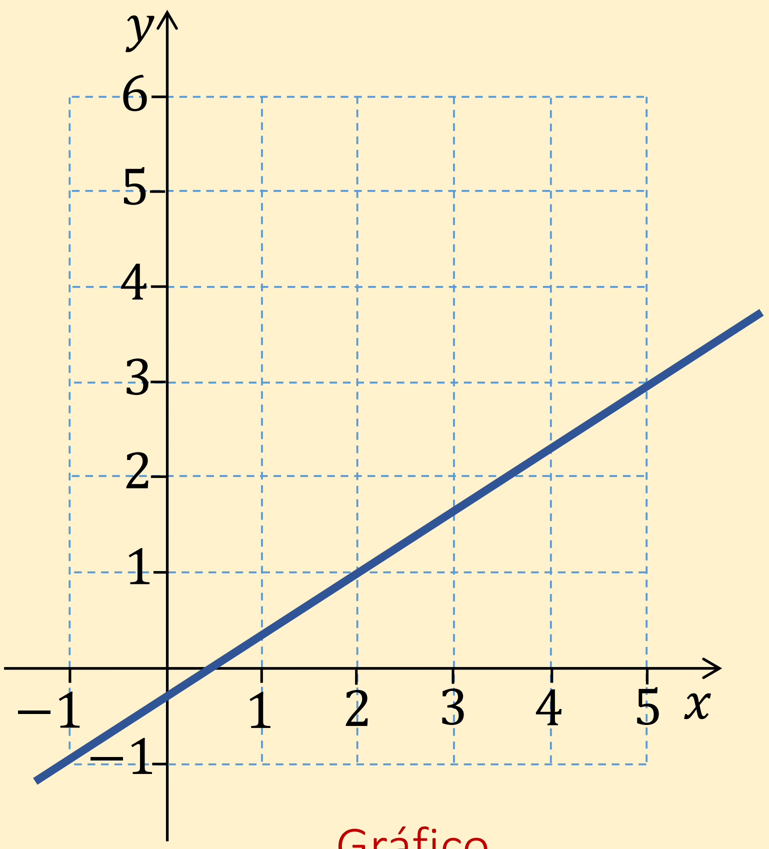
Portanto:

$$2x - 3y - 1 = 0$$

Equação geral

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

Equação reduzida



Gráfico

Reta tangente

Considere uma **reta secante** à curva $y = f(x)$ nos pontos $A(a, f(a))$ e $P(x, y)$, isto é, a reta intercepta a curva nos pontos A e P.

Ao aproximarmos os pontos A e P, isto é, fazendo

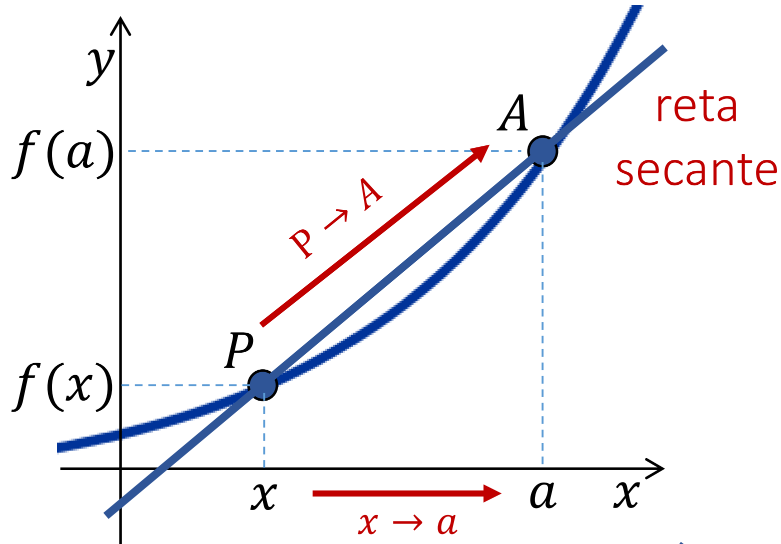
$$P \to A$$

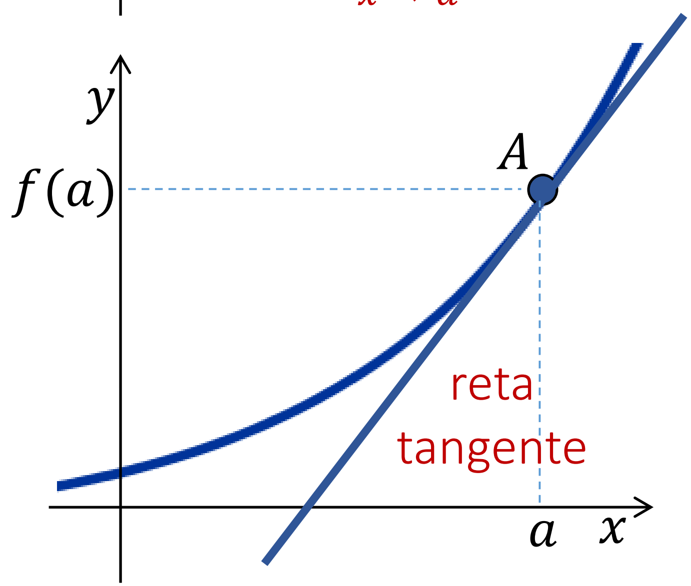
ou, equivalentemente,

$$x \to a$$

teremos, na situação limite, uma **reta tangente** a curva $y = f(x)$ no ponto fixado $A(a, f(a))$.

Isto é, uma reta que apenas tangencia a curva dada no ponto fixado A.





Inclinação da reta tangente

Pergunta: Qual o valor do coeficiente angular (inclinação) da reta tangente ao gráfico da função f passando pelo ponto $A(a, f(a))$?

Note que a inclinação m da reta tangente é obtida fazendo o limite, para $x \longrightarrow a$, da inclinação m_{PA} da reta secante.

$$m_{PA} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Inclinação da reta secante

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Inclinação da reta tangente

Resposta: A inclinação da reta tangente é dada por

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

desde que este limite exista.

Inclinação da reta tangente

Definição: A **reta tangente** à uma curva $y = f(x)$ em um ponto $A(a, f(a))$ é a reta que contém o ponto A e tem inclinação

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

(desde que este limite exista).

Observação: Fazendo a substituição

$$h = x - a$$

no limite acima, temos que $x = a + h$ e como $x \to a$ temos $h \to 0$.

Podemos então reescrever m como:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Equação reta tangente

Exemplo: (a) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função

$$f(x) = x^2 + 1$$

no ponto $A(1,2)$.

(b) Esboce, no mesmo plano cartesiano, os gráficos de f e da reta tangente.

Solução: Calculando a inclinação desta reta, teremos:

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[(1+h)^2 + 1] - [(1)^2 + 1]}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{[1 + 2h + h^2 + 1] - 2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 2h}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{h(h+2)}{h} = \lim_{h\to 0}(h+2) = 2.$$

Portanto, a equação da reta tangente será dada por:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

$$y - 2 = 2(x - 1)$$

$$y - 2x = 0$$

$$y = 2x$$

Equação reta tangente

Exemplo: (a) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função

$$f(x) = x^2 + 1$$

no ponto $A(1,2)$.

(b) Esboce, no mesmo plano cartesiano, os gráficos de f e da reta tangente.

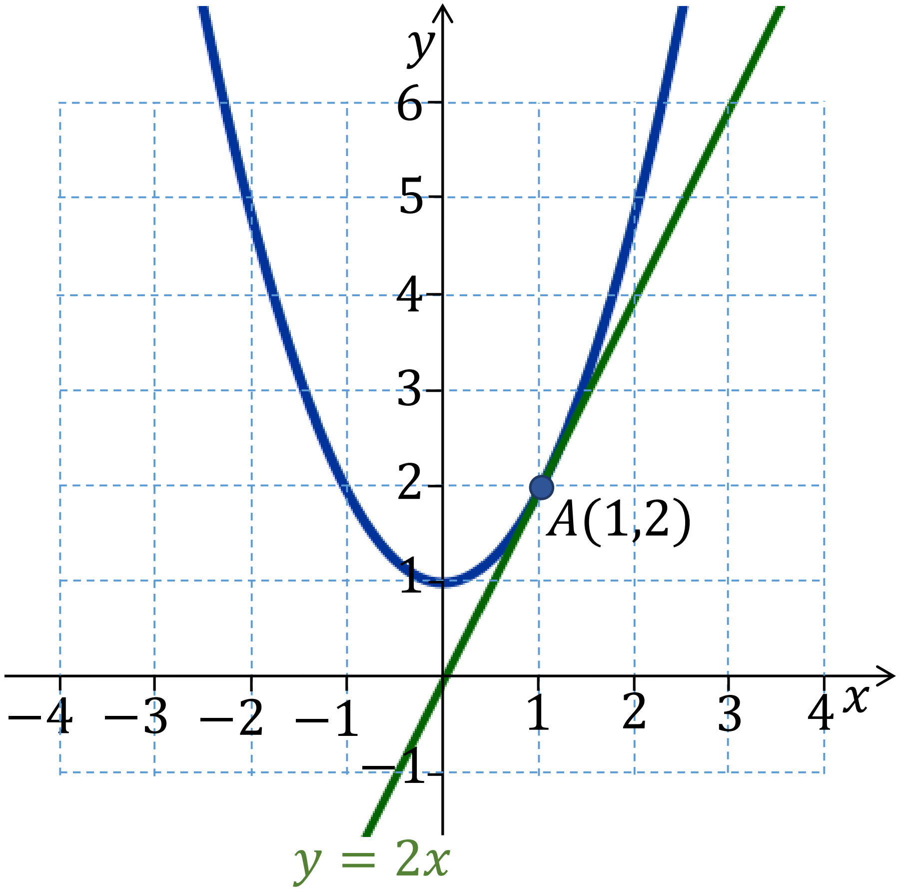
Solução: Esboçando, no mesmo plano cartesiano, os gráficos da função

$$f(x) = x^2 + 1$$

e da equação da reta tangente

$$y = 2x$$

ao gráfico de f no ponto $A(1,2)$, obtém-se os gráficos ao lado.



Definição de derivada

Definição: A **derivada** de uma função $y = f(x)$ em um número a denotada por $f'(a)$, é dada por

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

(desde que este limite exista).

Se o limite acima existe, se diz que a f é **derivável** no número a.
Do contrário, se diz que f é **não derivável** em a.

Uma forma equivalente de denotar a derivada seria:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Portanto, a equação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $A\big(a, f(a)\big)$ pode ser escrita como

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Definição de derivada

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

calcule $f'(1)$.

Solução: Calculando a derivada pela definição temos

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1-1-h}{1+h}}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-h}{1+h} \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{1+h} = -1$$

Portanto,

$$f'(1) = -1$$

Definição de derivada

Observação: Uma função f não possui derivada nos pontos onde não existe o limite (bilateral):

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Isto ocorre geralmente quando uma das situações a seguir ocorrem:

(a) A função f não está definida em $x = a$, isto é, $f(a)$ não existe;

(b) O limite acima é infinito.

Neste caso, teríamos uma "reta tangente vertical" em $x = a$.

(c) Os limites laterais

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{e} \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

não existem ou são diferentes entre si.

Definição de derivada

Definição: A derivada de uma função $y = f(x)$, denotada por f', é a função que associa a cada $x \in D(f)$ o número

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(desde que este limite exista).

Notações: Outras notações para a derivada de uma função $y = f(x)$ em um número x são:

$$f' \qquad y' \qquad D_x(f) \qquad \frac{dy}{dx} \qquad \frac{df}{dx}$$

Notação: A notação

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$$

também pode ser utilizada para denotar $f'(a)$.

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Calcule as derivadas pela definição:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $\qquad f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$

(b) $f(x) = 3x^2 - 8x + 5$ $\qquad f'(x) = 6x - 8$

(c) $f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

2) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função

$$f(x) = x^2 - 8x + 9$$

no ponto $P(2, -3)$.

Obs.: Utilize o limite para encontrar a inclinação da reta!!

$$y = -4x + 5$$

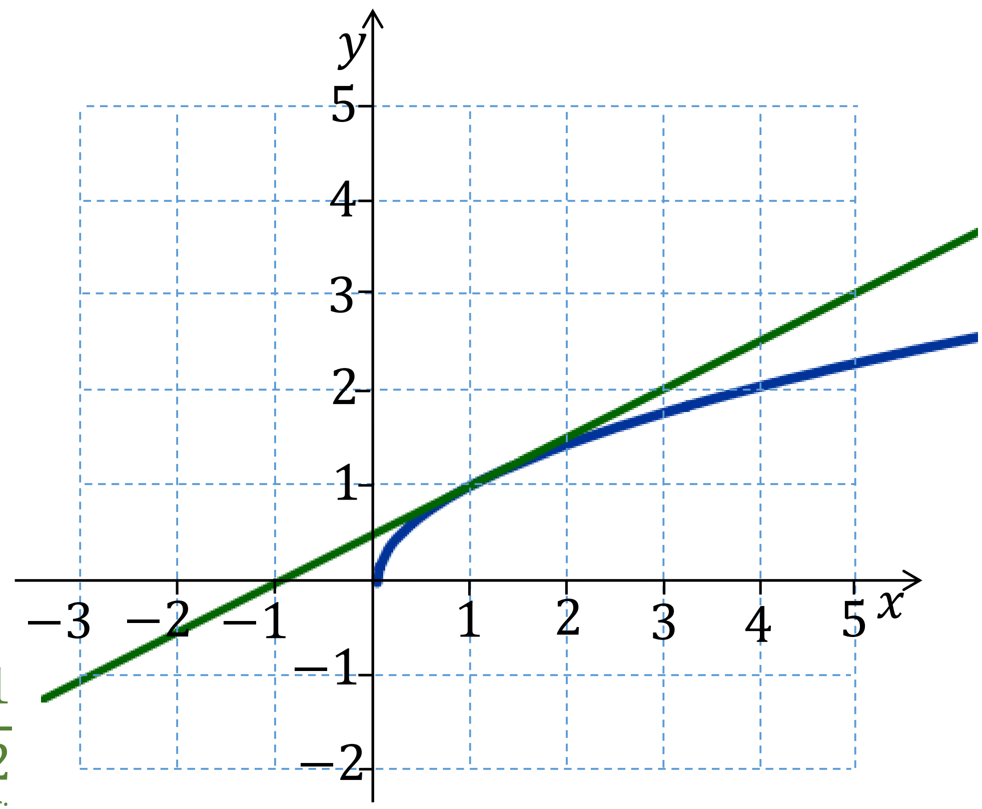
Exercícios

3) Esboce o gráfico da função

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Obs.: Utilize o limite para encontrar a inclinação da reta tangente!!

e a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1{,}1)$.



$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1{,}1)$.

Exercícios

4) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$$

$y = 12x + 9$

no ponto $x = -1$.

Obs.: Utilize o limite para encontrar a inclinação da reta!!

5) Calcule a derivada da função

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{2}{x^2 + 2x + 1}$$

utilizado a definição de derivada (pelo limite).

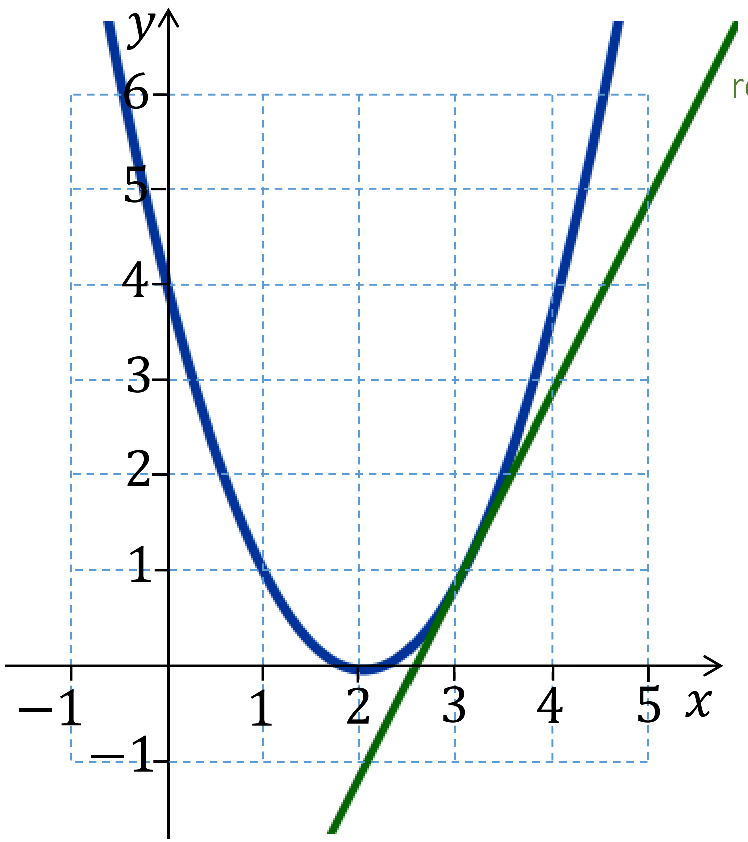
Exercícios

6) Esboce o gráfico da função

$$f(x) = x^2 - 4x + 4$$

Obs.: Utilize o limite para encontrar a inclinação da reta tangente!!

e a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(3,1)$.



$y = 2x - 5$

reta tangente ao gráfico de f no ponto $(3,1)$.

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/

O GAMA possui monitorias de:

- Pré-cálculo e Matemática Elementar (e disciplinas equivalentes)
- ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
- Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino

Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

Derivadas

2018/1

Aula 02

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Regras de derivação

Nesta aula, estudaremos algumas regras de derivação.

Derivada da constante: A derivada de uma função constante $f(x) = c$, onde c é qualquer número real, é igual a zero, ou seja,

$$[c]' = 0$$

De fato, sendo f uma função constante, digamos $f(x) = c$, teremos:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

Exemplo: Calcule a derivada das funções:

(a) $f(x) = 5$ (b) $f(x) = \sqrt{2 + \pi}$ (c) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{e} - e}{\ln \pi}$

Solução: Como todas as funções são constantes, tem-se

(a) $f'(x) = (5)' = 0$

(b) $f'(x) = \left(\sqrt{2 + \pi}\right)' = 0$

(c) $f'(x) = \left(\dfrac{\sqrt[3]{e} - e}{\ln \pi}\right)' = 0$

Regras de derivação

Derivada da potência: A derivada da função $f(x) = x^n$ é dada por

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

para todo n real.

Exemplo: Calcule a derivada das funções:

(a) $f(x) = x^8$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x^6}$ (c) $f(x) = \sqrt[4]{x}$

Solução: (a) Como $n = 8$, temos:

$$f'(x) = (x^8)' = 8x^{(8-1)} = 8x^7$$

(b) Como podemos reescrever a função como $f(x) = x^{-6}$, temos:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^6}\right)' = (x^{-6})' = -6x^{(-6-1)} = -6x^{-7} = -\frac{6}{x^7}$$

(c) Reescrevendo a função como $f(x) = x^{1/4}$, temos:

$$f'(x) = (\sqrt[4]{x})' = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4}x^{\left(\frac{1}{4}-1\right)} = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

Regras de derivação

Derivada do Múltiplo Constante: Se k é uma constante e u for uma função derivável, então

$$[ku]' = k[u]'$$

Isto é, a derivada do produto de uma constante por uma função é igual ao produto da constante pela derivada da função.

Exemplo: Calcule a derivada das funções:

(a) $f(x) = 6x^8$ (b) $f(x) = \frac{5}{x^6}$ (c) $f(x) = -4\sqrt[3]{x}$

Solução: (a)

$$f'(x) = (6x^8)' = 6(x^8)' = 6(8)x^7 = 48x^7$$

(b) $f'(x) = \left(\frac{5}{x^6}\right)' = 5\left(\frac{1}{x^6}\right)' = 5(x^{-6})' = 5(-6)x^{-7} = -\frac{30}{x^7}$

(c) $f'(x) = (-4\sqrt[3]{x})' = -4\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = -4\left(\frac{1}{3}\right)x^{\frac{1}{3}-1} = -\frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} = -\frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}}$

Regras de derivação

Derivada da Soma/diferença: Sejam u e v funções deriváveis, então

$$[u \pm v]' = u' \pm v'$$

Isto é, a derivada da soma/diferença é igual a soma/diferença das derivadas.

Exemplo: Calcule a derivada das funções:

(a) $f(x) = 6x^8 + 9x^2$ (b) $f(x) = \frac{5}{x^6} - 9\sqrt[3]{x^4} - 20x + 5$

Solução:

(a) $f'(x) = (6x^8 + 9x^2)' = (6x^8)' + (9x^2)' = 48x^7 + 18x.$

(b)

$$f'(x) = \left(\frac{5}{x^6} - 9\sqrt[3]{x^4} - 20x + 5\right)' = (5x^{-6})' - \left(9x^{\frac{4}{3}}\right)' - (20x)' + (5)'$$

$$= 5(-6)x^{-7} - 9\left(\frac{4}{3}\right)x^{\frac{1}{3}} - 20 = -30x^{-7} - 12x^{\frac{1}{3}} - 20.$$

Regras de derivação

Derivada do produto: Sejam u e v funções deriváveis, então

$$[u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Isto é, a derivada do produto de duas funções é igual a derivada da primeira vezes a segunda mais a primeira vezes a derivada da segunda.

Exemplo: Calcule a derivada das funções:

(a) $f(x) = (x^2 - 2)(2x^5 + 4)$ (b) $f(x) = (x^4 - 3x)\left(\sqrt[5]{x^7} - 100\right)$

Solução: (a)

$$f'(x) = [(x^2 - 2)(2x^5 + 4)]' = (x^2 - 2)'(2x^5 + 4) + (x^2 - 2)(2x^5 + 4)'$$

$$= 2x(2x^5 + 4) + (x^2 - 2)(10x^4) = 14x^6 - 20x^4 + 8x$$

(b) $$f'(x) = (x^4 - 3x)'\left(\sqrt[5]{x^7} - 100\right) + (x^4 - 3x)\left(\sqrt[5]{x^7} - 100\right)' =$$

$$(4x^3 - 3)\left(\sqrt[5]{x^7} - 100\right) + (x^4 - 3x)\frac{7}{5}x^{\frac{2}{5}} = \frac{27}{5}x^{\frac{22}{5}} - \frac{36}{5}x^{\frac{7}{5}} - 400x^3 + 300$$

Regras de derivação

Derivada do quociente: Sejam u e v funções deriváveis, então

$$\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Isto é, a derivada do quociente de duas funções é igual a derivada da de cima vezes a função de baixo, menos a função de cima vezes a derivada da função de baixo, tudo dividido pelo quadrado da função de baixo.

Exemplo: Calcule a derivada das funções:

(a) $f(x) = \frac{x^2+2}{x-3}$ (b) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x+1}$

Solução:

(a)

$$f'(x) = \left[\frac{x^2+2}{x-3}\right]' = \frac{(x^2+2)'(x-3) - (x^2+2)(x-3)'}{(x-3)^2}$$

$$= \frac{(2x)(x-3) - (x^2+2)(1)}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x-2}{x^2-6x+9}$$

Regras de derivação

(b)

$$f'(x) = \left[\frac{\sqrt{x}}{2x+1}\right]' = \frac{(\sqrt{x})'(2x+1) - (\sqrt{x})(2x+1)'}{(2x+1)^2} =$$

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(2x+1) - (\sqrt{x})(2)}{(2x+1)^2} = \frac{\frac{2x+1}{2\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}}{4x^2+4x+1} = \frac{\frac{2x+1-4x}{2\sqrt{x}}}{4x^2+4x+1}$$

$$= \frac{-2x+1}{2\sqrt{x}(4x^2+4x+1)}$$

Derivada de algumas funções elementares

Funções trigonométricas

$$[\sin x]' = \cos x$$

$$[\cos x]' = -\sin x$$

$$[\tan x]' = \sec^2 x$$

$$[\cot x]' = -\csc^2 x$$

$$[\sec x]' = \sec x \tan x$$

$$[\csc x]' = -\csc x \cot x$$

Funções trigonométricas inversas

$$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$[\arctan x]' = \frac{1}{x^2+1}$$

$$[\operatorname{arccot} x]' = -\frac{1}{x^2+1}$$

$$[\operatorname{arcsec} x]' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$[\operatorname{arccsc} x]' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Funções exponenciais

$(a > 0, a \neq 1)$

$$[a^x]' = a^x \ln a$$

$$[e^x]' = e^x$$

Funções logarítmicas

$(a > 0, a \neq 1)$

$$[\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$[\ln x]' = \frac{1}{x}$$

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Calcule a derivada das seguintes funções, utilizando a regra da potência.

(a) $f(x) = x^2$ $\quad f'(x) = 2x$

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

(c) $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

(e) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ $\quad f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

(f) $f(t) = \sqrt[5]{t^2}$ $\quad f'(t) = \frac{2}{5\sqrt[5]{t^3}}$

(g) $p(m) = m^{\frac{2}{3}}$ $\quad p'(m) = \frac{2}{3\sqrt[3]{m}}$

(h) $n(q) = \frac{1}{q^2}$ $\quad n'(q) = \frac{-2}{q^3}$

Exercícios

2) Calcule a derivada das funções dadas:

(a) $f(r) = \pi r^2$ $f'(x) = 2\pi r$

(b) $f(x) = \frac{1}{2}x^{-3} - 14$ $f'(x) = -\frac{3}{2x^4}$

(c) $f(x) = (7x - 1)(x^2 + 4)$ $f'(x) = 21x^2 - 2x + 28$

(d) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

3) Encontre uma equação da reta tangente à curva

$$f(x) = x^4 + 2x^2 - x$$

no ponto $(1,2)$. $y = 7x - 5$

Exercícios

4) Calcule a derivada das funções dadas:

(a) $f(x) = sen\, x + \frac{1}{2}\, cot\, x$ $\quad f'(x) = cos\, x - \dfrac{csc^2\, x}{2}$

(b) $f(x) = -4x^2 \cos x$ $\quad f'(x) = 4x^2 sin\, x - 8x cos\, x$

(c) $f(x) = \frac{5-\cos x}{5+sen\, x}$ $\quad f'(x) = \dfrac{5(sin\, x - cos\, x) + 1}{(5 + sen\, x)^2}$

(d) $h(y) = ye^y$+10 $\quad h'(y) = (y+1)e^y$

(e) $m(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ $\quad m'(x) = \dfrac{1 - 2\, ln\, x}{x^3}$

5) Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

(a) $y = e^x \cos x$ $\quad (0, 1)$ $\quad y = x + 1$

(b) $y = \sec x$ $\quad \left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$ $\quad y = 2\sqrt{3}\, x + 2 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

Exercícios

6) Calcule a derivada das funções dadas:

(a) $f(x) = x^3 + 5x - 2$ $f'(x) = 3x^2 + 5$

(b) $f(x) = \sqrt[5]{x^4} + 2x^3 - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{3}}$ $f'(x) = \dfrac{4}{5\sqrt[5]{x}} + 6x^2 - \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{x^2}$

(c) $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$ $f'(x) = 4x^3$

(d) $f(x) = \frac{x^4 - 2x}{x - 2}$ $f'(x) = \dfrac{3x^4 - 8x^3 + 4}{(x-2)^2}$

7) Encontre uma equação da reta tangente à curva

$$f(x) = \sqrt[4]{x}$$

no ponto $x = 1$. $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{4}$

Exercícios

8) Calcule a derivada das funções dadas:

(a) $f(x) = x^3 + \sin x + 2\cos x$ $\quad f'(x) = 3x^2 + \cos x - 2\sin x$

(b) $g(t) = t^3 \cos t$ $\quad g'(t) = 3t^2\, cos\, t - t^3\, sin\, t$

(c) $f(\theta) = \frac{\sec\theta}{1+\sec\theta}$ $\quad f'(\theta) = \frac{sec\,\theta\, tan\,\theta}{(1 + sec\,\theta)^2}$

(d) $f(x) = 2x\log x$ $\quad f'(x) = 2\log x + \frac{2}{\ln 10}$

9) Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

(a) $y = x^2 \ln x$ $\quad (1, 0)$ $\quad y = x - 1$

(b) $y = 1 + 2\sin x$ $\quad \left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$ $\quad y = 3$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/

O GAMA possui monitorias de:

- Pré-cálculo e Matemática Elementar (e disciplinas equivalentes)
- ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
- Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino

Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

Derivadas

2018/1

Aula 03

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Derivadas de ordem superior

Definição: Seja f uma função derivável. Se f' também for uma função derivável, então sua derivada $(f')'$é chamada ***derivada segunda*** de f.

Notação:

$$f'' = (f')' \qquad \text{ou ainda} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right]$$

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = 2x^3 - 9x,$$

calcule $f''(x)$.

Solução: Como

$$f'(x) = (2x^3 - 9x)' = 6x^2 - 9$$

teremos

$$f''(x) = (f')'(x) = (6x^2 - 9)' = 12x.$$

Derivadas de ordem superior

Definição: Seja f uma função derivável. Se f'' também for uma função derivável, então sua derivada $(f'')'$é chamada ***derivada terceira*** de f.

Notação:

$$f''' = (f'')' \quad \text{ou} \quad f^{(3)} = (f'')' \quad \text{ou ainda} \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]$$

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = x^3 - \cos x + e^x,$$

calcule $f^{(3)}(x)$.

Solução: Como

$$f'(x) = (x^3 - \cos x + e^x)' = 3x^2 + \operatorname{sen} x + e^x$$

teremos

$$f''(x) = (3x^2 + \operatorname{sen} x + e^x)' = 6x + \cos x + e^x$$

e portanto

$$f^{(3)}(x) = (6x + \cos x + e^x)' = 6 - \operatorname{sen} x + e^x.$$

Derivadas de ordem superior

Definição: Seja f uma função derivável. Se $f^{(n-1)}$ também for uma função derivável, então sua derivada $\left(f^{(n-1)}\right)'$ é chamada *derivada enésima* de f.

Notação:

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' \qquad \text{ou ainda} \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right]$$

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = 2^x,$$

calcule $f^{(5)}(x)$.

Solução: Como

$$f'(x) = (2^x)' = 2^x \ln 2$$

teremos

$$f^{(2)}(x) = (2^x \ln 2)' = \ln 2\,(2^x)' = 2^x (\ln 2)^2$$

e portanto

$$\vdots$$

$$f^{(5)}(x) = 2^x (\ln 2)^5$$

Regra da cadeia

Teorema (Regra da Cadeia): Se a função g for derivável em x e a função f for derivável em $g(x)$, então a função composta $h = f \ o \ g$ será derivável em x e a derivada da função composta será dada por

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Ou seja, a derivada da função composta é igual a derivada da função de fora calculada na função de dentro vezes a derivada da função de dentro.

Observação: Costuma-se denotar a função de dentro por uma variável auxiliar, geralmente u, para utilização da Regra da Cadeia.

Assim, se $y = f(g(x))$, denota-se

$$u = g(x) \qquad \text{e} \qquad y = f(u)$$

Desta forma, escreve-se

Derivada da função de dentro.

$$y' = f'(u) \cdot u'$$

Derivada da função composta.

Derivada da função de fora calculada na função de dentro.

Regra da cadeia

Exemplo: Calcule a derivada da função

$$h(x) = \sin(2x+1)\,.$$

Solução: Neste caso a função de dentro é

$$u = g(x) = 2x + 1$$

e a função de fora é

$$f(u) = \sin u.$$

Portanto,

$$f'(u) = \cos u \quad \text{e} \quad u' = g'(x) = 2$$

e temos:

$$h'(x) = (fog)'(x) = f'(u) \cdot u' = \cos(u) \cdot 2 = 2\cos(2x+1).$$

Regra da cadeia

Exemplo: Calcule a derivada da função

$$h(x) = \sqrt{x^2 + 2x}.$$

Solução: Neste caso, tem-se:

$$u = g(x) = x^2 + 2x \qquad f(u) = \sqrt{u}$$

(função de dentro) (função de fora)

Como,

$$f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \quad \text{e} \quad u' = g'(x) = 2x + 2$$

temos:

$$h'(x) = (fog)'(x) = f'(u) \cdot u' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x}} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}}.$$

Regra da cadeia

Observação: Regra da cadeia na notação de Leibniz:

Se $y = f(u)$ e $u = g(x)$ forem deriváveis, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Ou seja:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

Derivada da função composta.

Derivada da função de fora calculada na função de dentro.

Derivada da função de dentro.

Regra da cadeia

Exemplo: Calcule a derivada da função

$$y = e^{\sin x}.$$

Solução: Neste caso, podemos escrever a função dada como:

$$y = e^{u}$$ (função de fora)

$$u = \sin x.$$ (função de dentro)

Portanto:

$$\frac{dy}{du} = (e^{u})' = e^{u}$$

Derivada da função de fora calculada na função de dentro.

e

$$\frac{du}{dx} = (\sin x)' = \cos x$$

Derivada da função de dentro.

e utilizando a Regra da Cadeia temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = e^{u}(\cos x) = e^{\sin x}\cos x\,.$$

Regra da cadeia

Exemplo: Calcule a derivada da função

$$w = \ln(t^4 + 2)\,.$$

Solução: Neste caso, podemos escrever a função dada como:

$$w = \ln u \quad \text{(função de fora)}$$

$$u = t^4 + 2 \quad \text{(função de dentro)}$$

Portanto:

$$\frac{dw}{du} = (\ln u)' = \frac{1}{u}$$

Derivada da função de fora calculada na função de dentro.

e

$$\frac{du}{dt} = (t^4 + 2)' = 4t^3$$

Derivada da função de dentro.

e utilizando a Regra da Cadeia temos:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{du}\frac{du}{dt} = \frac{1}{u}4t^3 = \frac{4t^3}{t^4 + 2}\,.$$

Regra da cadeia

Funções trigonométricas

$$[\sin u]' = \cos u \cdot u'$$

$$[\cos u]' = -\sin u \cdot u'$$

$$[\tan u]' = \sec^2 u \cdot u'$$

$$[\cot u]' = -\csc^2 u \cdot u'$$

$$[\sec u]' = \sec u \tan u \cdot u'$$

$$[\csc u]' = -\csc u \cot u \cdot u'$$

Funções trigonométricas inversas

$$[\arcsin u]' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$[\arccos u]' = -\frac{u'}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$[\arctan u]' = \frac{u'}{x^2+1}$$

$$[\mathrm{arccot}\, u]' = -\frac{u'}{x^2+1}$$

$$[\mathrm{arcsec}\, u]' = \frac{u'}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$[\mathrm{arccsc}\, u]' = -\frac{u'}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Funções exponenciais

$(a > 0, a \neq 1)$

$$[a^u]' = u'a^u \ln a$$

$$[e^u]' = u'e^u$$

Funções logarítmicas

$(a > 0, a \neq 1)$

$$[\log_a u]' = \frac{u'}{u \ln a}$$

$$[\ln u]' = \frac{u'}{u}$$

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Calcule a segunda derivada das funções dadas :

(a) $f(x) = x \cos x$ $\quad$ $Resp.: f''(x) = -2\sin x - x \cos x$

(b) $f(x) = \sqrt{3}(e^{x} + x^{3})$ $\quad$ $Resp.: f''(x) = \sqrt{3}(e^{x} + 6x)$

(c) $f(x) = \sin x \cos x$ $\quad$ $Resp.: f''(x) = -4 \sin x \cos x$

2) Calcule a terceira derivada da função:

$$f(x) = 6x^{5} + 4x + 5 \qquad Resp.: f^{(3)}(x) = 360x^{2}$$

Exercícios

3) Calcule a derivada das funções usando a regra de cadeia:

(a) $f(x) = \sin(2x)$ $\quad Resp.: \ f'(x) = 2\cos 2x$

(b) $f(x) = \tan(x^2 + 1)$ $\quad Resp.: \ f'(x) = 2x\, sec^2(x^2 + 1)$

(c) $f(x) = \sqrt{x^3 + \csc(x)}$ $\quad Resp.: f'(x) = \dfrac{3x^2 - \csc x \cot x}{2\sqrt{x^3 + \csc x}}$

(d) $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^3$ $\quad Resp.: f'(x) = -\dfrac{9(x+1)^2}{(x-2)^4}$

(e) $f(x) = 2e^{x^2 - 4x}$ $\quad Resp.: f'(x) = 4(x-2)e^{x^2-4x}$

(f) $f(x) = \cos^2(x^2 + 1)$ $\quad Resp.: f'(x) = -4x\sin(x^2+1)\cos(x^2+1)$

4) Encontre a equação da reta tangente a curva

$$y = (x - 1)^5$$

no ponto $(2, 1)$. $\quad Resp.: \ y = 5x - 9$

Exercícios

5) Calcule a segunda derivada das funções dadas :

(a) $f(x) = 2x^{-5} + \ln x$ $\quad Resp.: f''(x) = 60x^{-7} - \frac{1}{x^2}$

(b) $f(x) = \frac{x^2+2}{x-1}$ $\quad Resp.: f''(x) = \frac{6}{(x-1)^3}$

6) Calcule a derivada das funções usando a regra de cadeia:

(a) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 + 2x^2 - 3x + 1}$ $\quad Resp.: f'(x) = \frac{4x^3 + 4x - 3}{3\sqrt[3]{(x^4 + 2x^2 - 3x + 1)^2}}$

(b) $f(x) = \ln(\sin(x))$ $\quad Resp.: f'(x) = \cot x$

(c) $f(x) = (1 + x^5 \cot x)^{-8}$ $\quad Resp.: f'(x) = -\frac{8(5x^4 \cot x - x^5 \csc^2 x)}{(x^5 \cot x + 1)^9}$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/

O GAMA possui monitorias de:

- Pré-cálculo e Matemática Elementar (e disciplinas equivalentes)
- ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
- Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino

Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

Derivadas

2018/1

Aula 04

Projeto

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Derivação implícita

Note que todas as funções dadas até agora, a variável dependente pôde ser escrita explicitamente em função da variável independente

Por exemplo:

$$y = 2x^2 - 3 \qquad y = \sqrt{x+1} \qquad y = \cos x + e^x \tan x$$

Nestes casos, se diz que a variável y foi dada **explicitamente** em função da variável x.

Existem casos em que é bastante trabalhoso ou até inviável expressar a variável dependente de forma explícita, em função da variável independente.

Por exemplo, como poderíamos expressar y em função de x nas equações abaixo?

$$x^3 + y^3 = 6xy \qquad xy + x\sin y = 1 \qquad e^{xy} = x + y$$

Nestes casos, se diz que a variável y foi dada **implicitamente** em função da variável x.

Derivação implícita

Note que, até agora, calculamos a derivada somente de funções dadas explicitamente!

Pergunta: É possível calcular a derivada de uma função na forma implícita?

A resposta para a pergunta acima é SIM!

Para calcular a derivada de uma função na forma implícita, vamos seguir os seguintes passos:

1) Derive os dois lados da equação considerando $y = y(x)$, ou seja, considerando y como função de x (utilize a regra da cadeia se necessário).

2) Tente isolar $\frac{dy}{dx}$ na equação resultante da derivação.

Derivação implícita

Exemplo: Se

$$x^2 + y^2 = 9,$$

calcule $\frac{dy}{dx}$.

Solução:

$$\frac{d}{dx}[x^2 + y^2] = \frac{d}{dx}[9] \xRightarrow{(1)} 2x\frac{dx}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \xRightarrow{(2)} 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\xRightarrow{(3)} \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} \xRightarrow{(4)} \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

(1) Derivando em relação a x e usando a Regra da Cadeia

(2) $\frac{dx}{dx} = 1$ (3) Isolando $\frac{dy}{dx}$ (4) Simplificação

Derivação implícita

Exemplo: Encontre a equação da reta tangente à curva
$$7y^2 = 4 + xy^3,$$
no ponto $(3,2)$.

Solução: Primeiramente vamos calcular a derivada de y em relação a x:

$$\frac{d}{dx}[7y^2] = \frac{d}{dx}[4 + xy^3] \Longrightarrow 14y\frac{dy}{dx} = 0 + \frac{dx}{dx}y^3 + x\frac{d[y^3]}{dx} \Longrightarrow$$

$$14y\frac{dy}{dx} = y^3 + 3xy^2\frac{dy}{dx} \Longrightarrow (14y - 3xy^2)\frac{dy}{dx} = y^3 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{14 - 3xy}$$

Calculando a derivada no ponto $(3,2)$ temos:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=3\\y=2}} = \frac{2^2}{14 - 3(3)(2)} = \frac{4}{14 - 18} = -1$$

Portanto:

$$y - y_A = m(x - x_A) \Longrightarrow y - 2 = (-1)(x - 3) \Longrightarrow y = -x + 5.$$

Regra de L'Hôspital

Teorema (Regra de L'Hôspital):

Se

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

Então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)'}{g(x)'}$$

O mesmo vale se $x \longrightarrow a$ for substituído por

$x \longrightarrow a^+$ ou $x \longrightarrow a^-$ ou $x \longrightarrow -\infty$ ou $x \longrightarrow +\infty$.

Observação: A regra de L'Hôspital vale para indeterminações do tipo

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{+\infty}{+\infty} \qquad \frac{+\infty}{-\infty} \qquad \frac{-\infty}{+\infty} \qquad \frac{-\infty}{-\infty}$$

Portanto, antes de aplicar a regra de L'Hôspital, faça uma *"verificação"* para ter certeza que a regra pode ser aplicada!

Regra de L'Hôspital

Exemplo: Calcule o limite:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

Solução:

Verificação: Como

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} \qquad \begin{matrix} \nearrow 0 \\ \searrow 0 \end{matrix}$$

temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ podemos aplicar a regra de L'Hôspital.

Portanto:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x^2 - 9)'}{(x - 3)'} = \lim_{x \to 3} \frac{2x}{1} = 2(3) = 6.$$

Regra de L'Hôspital

Exemplo: Calcule o limite:

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x^3+2x^2+x-5}{e^x}$$

Solução:

Verificação: Como

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\overset{+\infty}{x^3+2x^2+x-5}}{\underset{+\infty}{e^x}}$$

temos uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ podemos aplicar a regra de L'Hôspital.

Portanto, aplicando a Regra de L'Hôspital três vezes (faça a verificação a cada vez!) temos

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x^3+2x^2+x-5}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{3x^2+4x+1}{e^x}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{6x+4}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{6}{e^x}=0.$$

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Obtenha $\frac{dy}{dx}$, a partir das equações dadas por derivação implícita:

(a) $x^2y + 2y^3 = 3x + 2y$ $\qquad$ $Resp.: \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3 - 2xy}{x^2 + 6y^2 - 2}$

(b) $6x + \sqrt{xy} - 3y = 4$ $\qquad$ $Resp.: \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{12\sqrt{xy} + y}{x - 6\sqrt{xy}}$

2) Verifique se o ponto $P(-2, 8)$ pertence à curva

$$xy = -16$$

$Resp.: y = 4x + 16$

encontre a equação da reta tangente à curva neste ponto.

Exercícios

3) Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ 1

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}$ 2

(c) $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3}$ $+\infty$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{x - sen x}{x^3}$ $\frac{1}{6}$

(e) $\lim_{x\to -\infty} \frac{2^{-x}}{x^2+5x+6}$ $+\infty$

(f) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \cos x}\right)$ $-\frac{1}{2}$

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x)}{\sin(3x)}$ $\frac{4}{3}$

(h) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(2x)}$ $\frac{1}{2}$

Exercícios

4) Obtenha $\frac{dy}{dx}$, a partir das equações dadas por derivação implícita:

(a) $\cos(x+y) = x$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1+\sin(x+y)}{\sin(x+y)}$

(b) $e^{x+y^2} = 2x + y$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{e^{x+y^2}-2}{2ye^{x+y^2}-1}$

5) Verifique se o ponto $P(2,-3)$ pertence à curva

$$2x^3 - x^2y + y^3 - 1 = 0 \qquad y = -\frac{36}{23x} + \frac{3}{23}$$

dada e encontre a equação da reta tangente neste ponto.

6) Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to3} \frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$ $\qquad 2\sqrt{3}$

(b) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$ $\qquad \cos a$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x}$ $\qquad 0$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} 2xe^{-x^2}$ $\qquad 0$

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} 2x^{\frac{1}{x}}$ $\qquad 2$

(f) $\lim\limits_{x\to0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3}$ $\qquad -\frac{1}{3}$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/

O GAMA possui monitorias de:

- Pré-cálculo e Matemática Elementar (e disciplinas equivalentes)
- ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
- Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino

Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

Derivadas

2018/1

Aula 05

Projeto

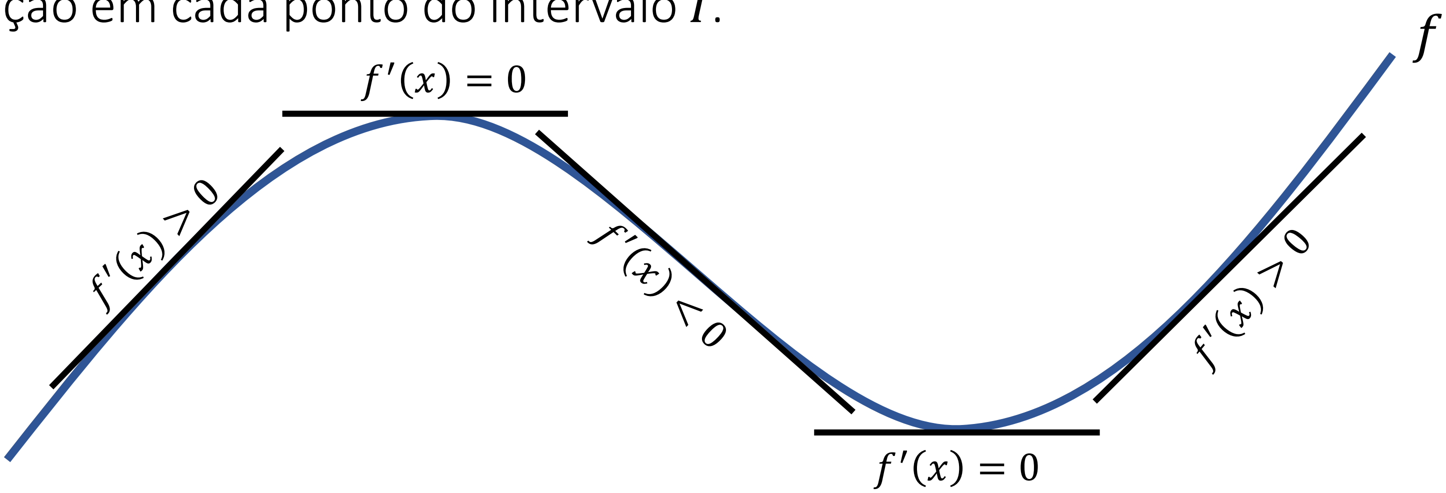
GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Teste da Primeira Derivada

Seja f uma função contínua e derivável num intervalo I.

Sabemos que a **primeira derivada** é a inclinação da reta tangente a essa função em cada ponto do intervalo I.



Com a primeira derivada podemos obter informações sobre:

Intervalos onde a função é crescente ou decrescente

Máximos e Mínimos Locais

Veremos nesta aula como obter cada uma dessas informações!

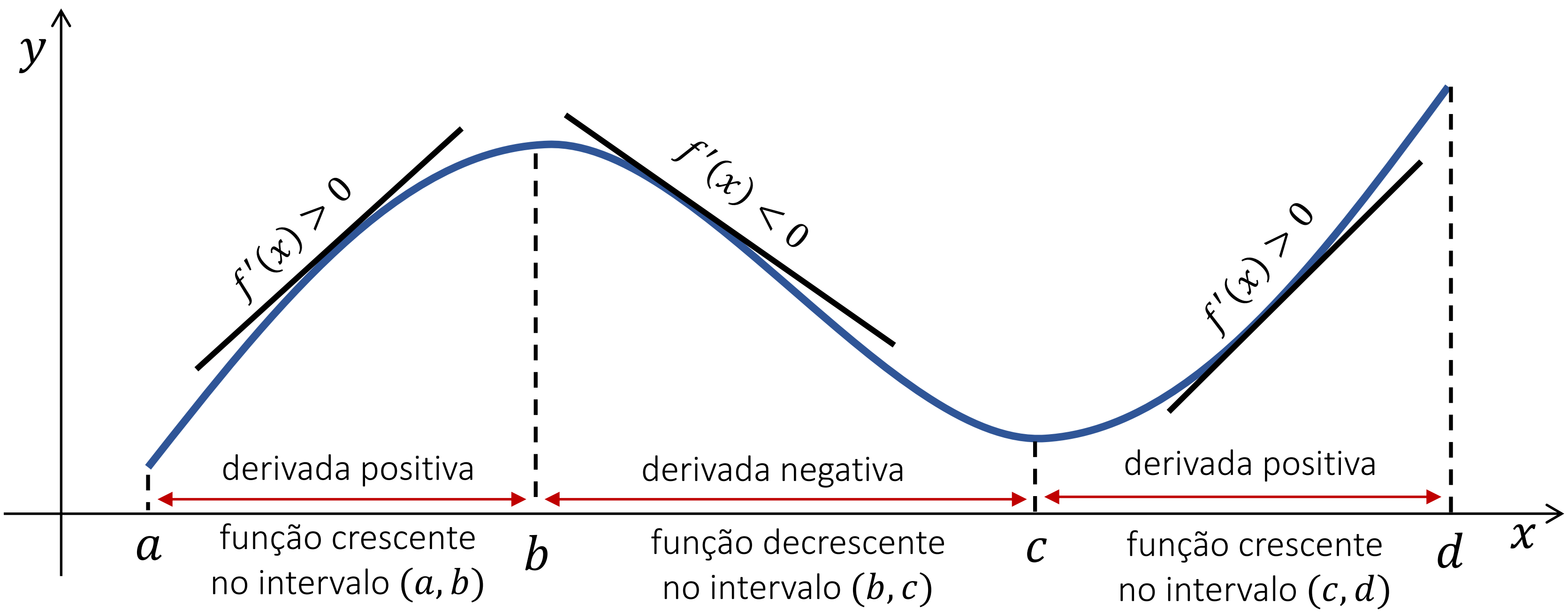
Teste da Primeira Derivada

Teorema: Sendo f uma função derivável, f' sua primeira derivada.

Onde f' é **positiva**, a função f é **crescente**.

Onde f' é **negativa**, a função f é **decrescente**.

Graficamente, a interpretação do Teorema acima é a seguinte:



Teste da Primeira Derivada

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = x^2 - 2x,$$

determine os intervalos onde a função é crescente e decrescente.

Solução: Como $f(x) = x^2 - 2x$, temos:

$$f'(x) = 2x - 2.$$

Vamos descobrir os intervalos de crescimento e decrescimento de f analisando o sinal de f'.

Quando a função $2x - 2 > 0$? Para todo $x > 1$.

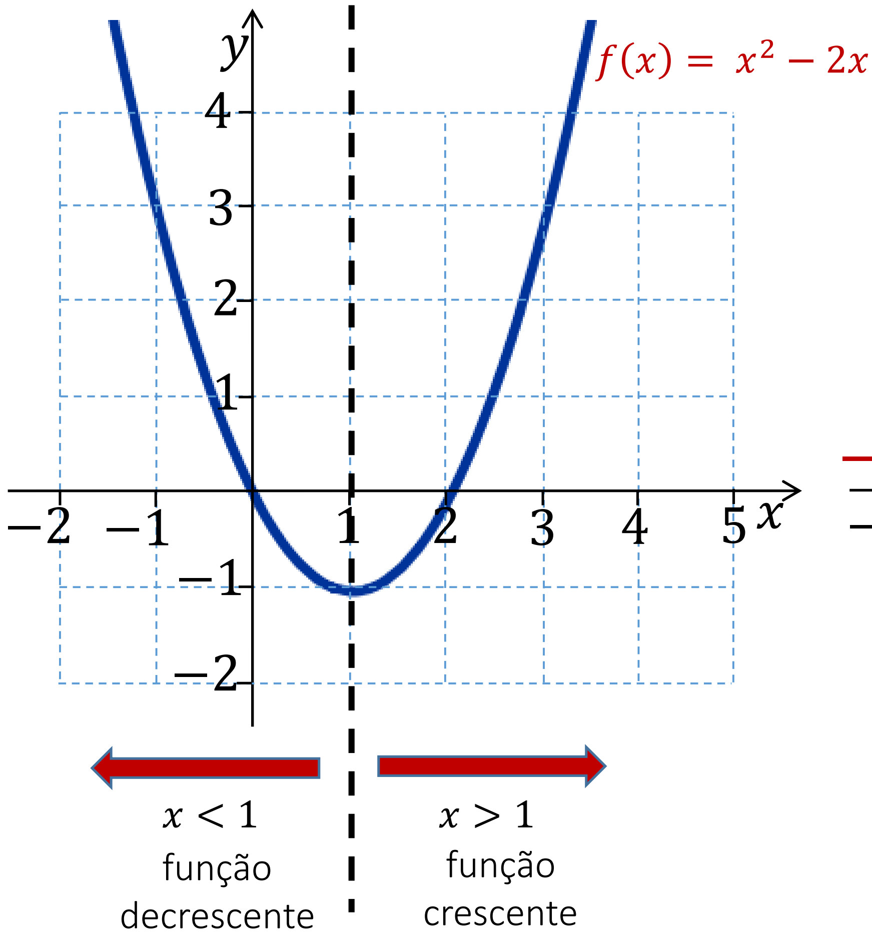
Consequentemente, f é crescente no intervalo $(1, +\infty)$.

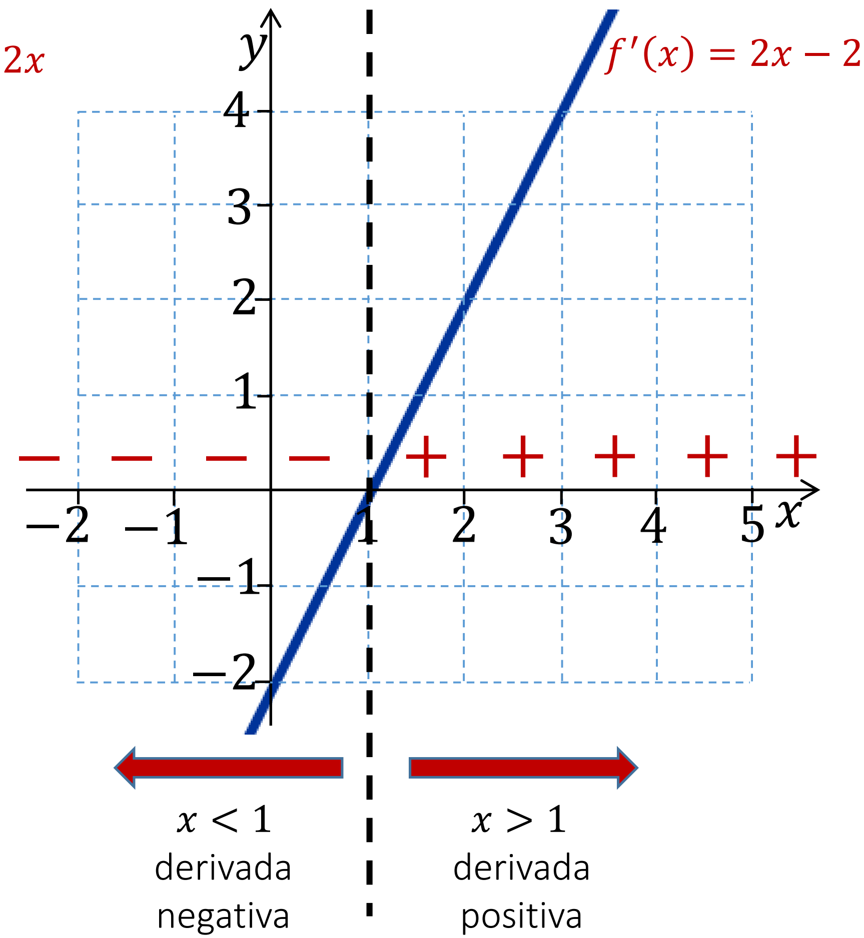
Quando a função $2x - 2 < 0$? Para todo $x < 1$.

Consequentemente, f é decrescente no intervalo $(-\infty, 1)$.

Teste da Primeira Derivada

Observe a relação "derivada positiva resulta em função crescente" e "derivada negativa resulta em função decrescente" no gráfico da função f do exemplo anterior.





Pontos críticos

Definição: Um número c pertencente ao domínio de uma função é chamado de **ponto crítico** da função f se uma das condições é satisfeita:

$$f'(c) = 0 \qquad \text{ou} \qquad f'(c) \text{ não existe.}$$

Portanto, para verificar se um número c é um ponto crítico de uma função f, precisamos seguir os seguintes passos:

1^o Passo: Derive a função f, ou seja, calcule $f'(x)$.

2^o Passo: Iguale a derivada a zero, ou seja, verifique se existem valores de c para os quais

$$f'(c) = 0.$$

3^o Passo: Verifique se existem valores de c para os quais $f'(c)$ não existe.

Se estes valores de c encontrados estiverem no domínio de f, eles serão os pontos críticos de f.

Pontos críticos

Exemplo: Verifique se a função

$$f(x) = x^2 + 2x - 4.$$

possui pontos críticos.

Solução:

1^o Passo: Como $f(x) = x^2 + 2x - 4$ então

$$f'(x) = 2x + 2.$$

2^o Passo: Igualando a derivada a zero, temos:

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1.$$

A derivada se anula em $x = -1$.

3^o Passo: Como f é uma função polinomial, então não existem pontos onde a derivada não existe!

Como $c = -1$ pertence ao domínio de f e $f'(-1) = 0$, então ele é um ponto crítico de f.

Note que a função f não possui outros pontos críticos.

Pontos críticos

Exemplo: Verifique se a função

$$f(x) = \sqrt{x}$$

possui pontos críticos.

Solução:

$\mathbf{1^o}$ **Passo:** Como $f(x) = \sqrt{x}$ então

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$\mathbf{2^o}$ **Passo:** Igualando a derivada a zero, temos:

$$f'(x) = 0 \ \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \rightarrow \nexists$$

Não existem pontos onde a derivada se anula

$\mathbf{3^o}$ **Passo:** Dada a expressão que define f', percebe-se que $c = 0$ é o único ponto onde a derivada não existe.

Como $c = 0$ pertence ao domínio de f e $f'(0)$ não existe, então ele é um ponto crítico de f.

Note que a função f não possui outros pontos críticos.

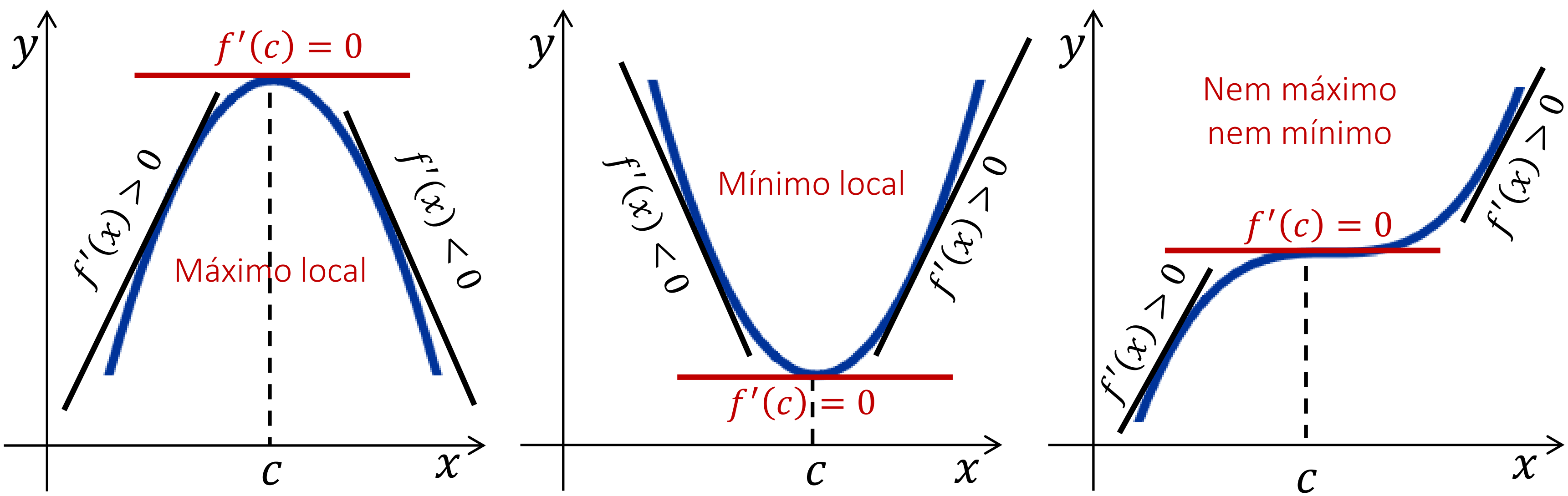
Máximos e mínimos locais

Teorema: Seja f uma função derivável em um intervalo I e $c \in I$ um ponto crítico de f.

Se o sinal de $f'(x)$ muda de positivo para negativo em c, então temos um **máximo local** em c.

Se o sinal de $f'(x)$ muda de negativo para positivo em c, então temos um **mínimo local** em c.

Se não há mudança no sinal de $f'(x)$ em c, então não temos um ponto de máximo nem de mínimo local.



Observação: O Teorema se aplica no caso em que não existe a derivada da função f em $x = c$.
Exemplo: $f(x) = |x|$ não é derivável em $x = 0$, embora este seja um ponto de mínimo.

Máximos e mínimos locais

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = x^2 + 2x - 4.$$

determine o ponto crítico e se ele é de máximo ou de mínimo.

Solução: Calculando f':

$$f'(x) = 2x + 2.$$

Igualando a derivada a zero:

$$2x + 2 = 0$$

$$2x = -2$$

$$x = -1 \quad \text{(ponto crítico)}$$

Sinal da derivada:

$$f' \quad - \ - \ - \ \underset{-1}{|} \ + \ + \ +$$

Como $f'(x)$ muda de negativo para positivo, logo $x = -1$ é um **mínimo local**.

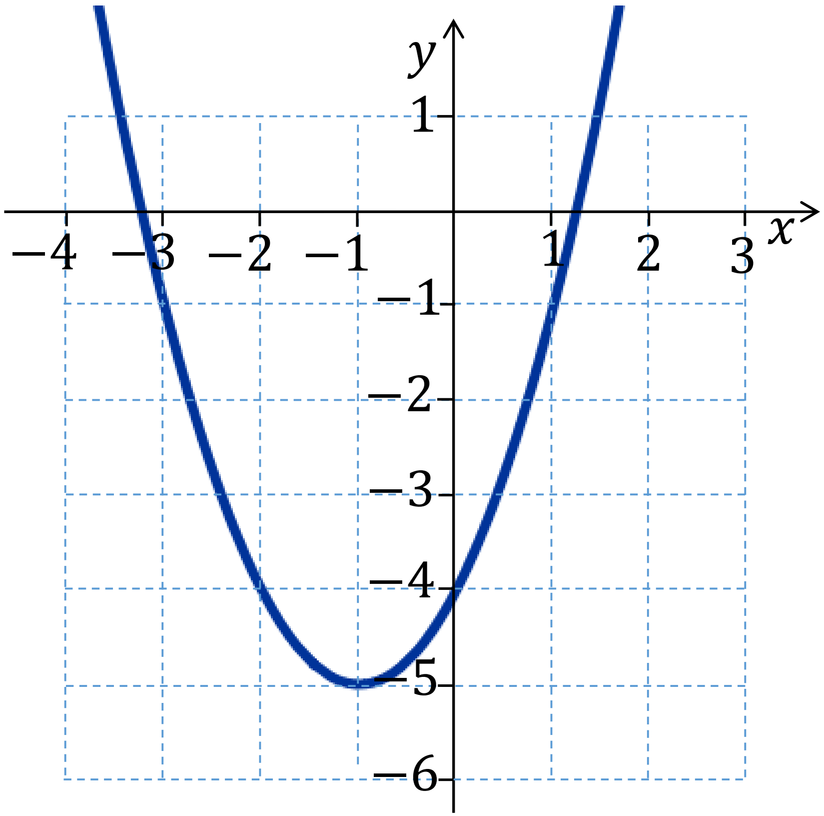


Gráfico de f

Exercícios Propostos

GAMA

Grupo de Apoio em Matemática

Exercícios

1) Em cada caso, determine os pontos críticos da função dada.

(a) $f(x) = 2x^5 + 5x^4 - 10x^3 - 15$ $x = -3$, $x = 0$ e $x = 1$

(b) $f(x) = 6x^{\frac{2}{3}}$ $x = 0$

Exercícios

2) Considere a função $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$.

Encontre onde a função é crescente, decrescente e seus pontos de máximos e mínimos.

Pontos críticos: $x = -1, x = 0$ e $x = 2$ Crescente em $(-1, 0)$ e $(2, +\infty)$

Decrescente em $(-\infty, -1)$ e $(0, 2)$ Máximo: $x = 0$ Mínimos: $x = -1$ e $x = 2$

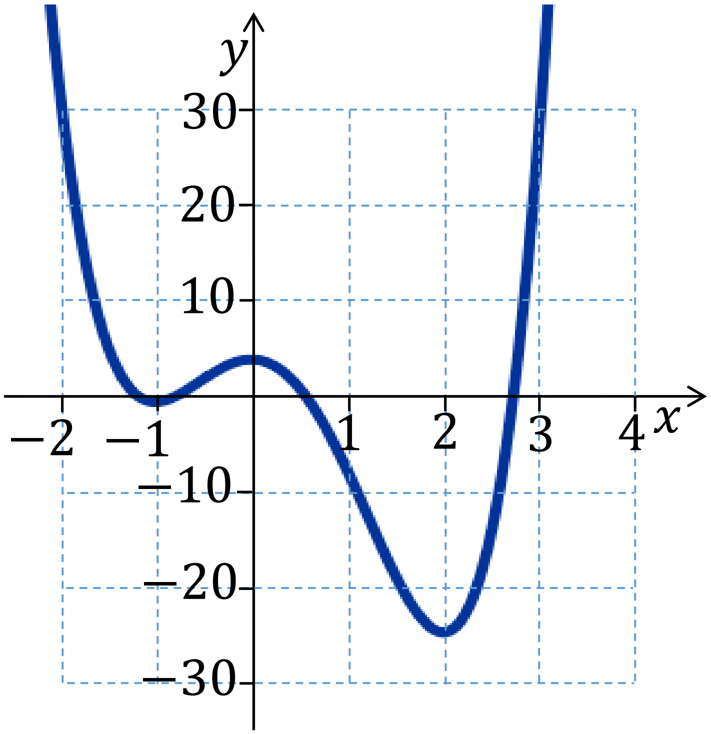


Gráfico de f

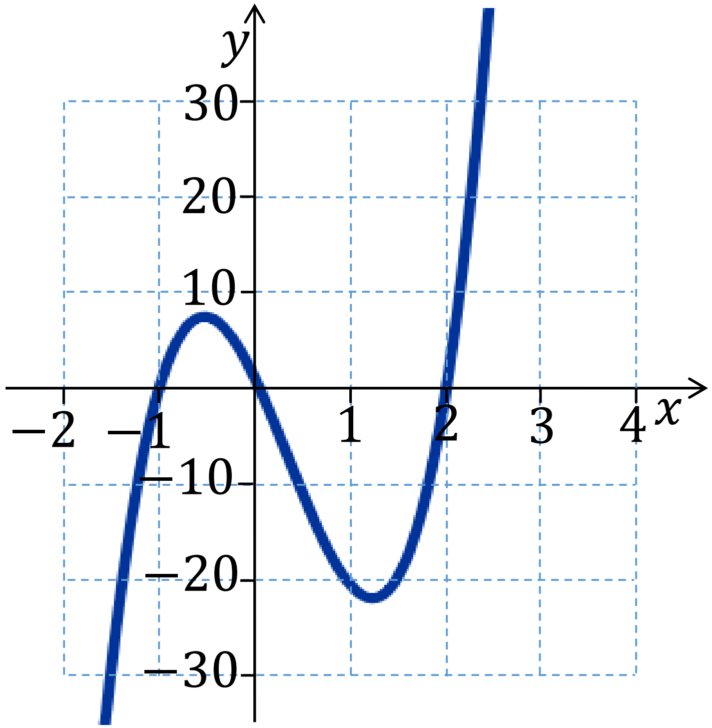


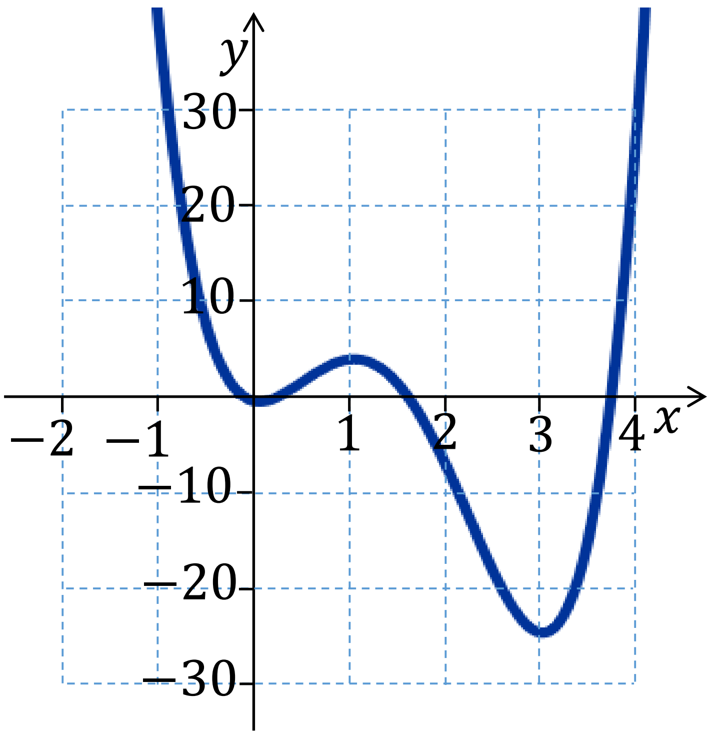
Gráfico de f'

Exercícios

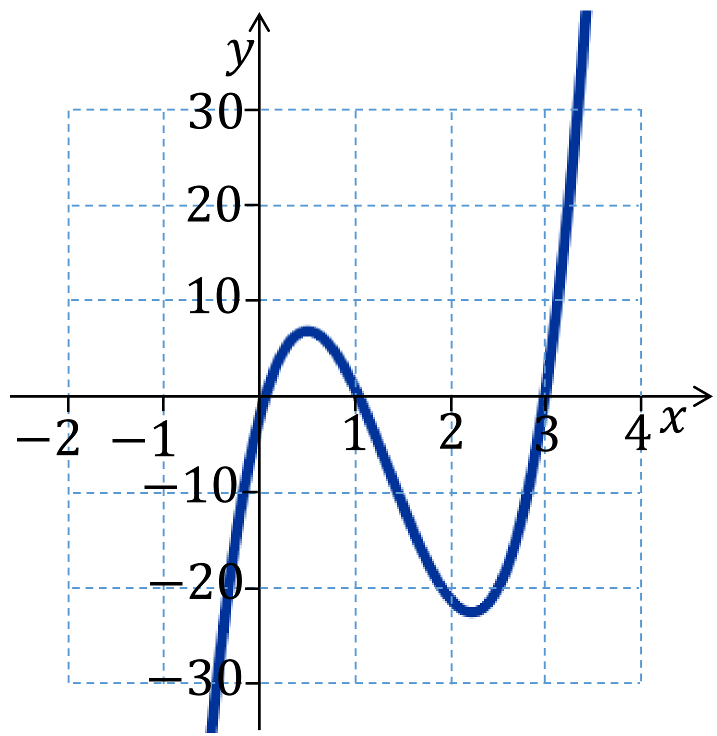
3) Seja a função $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$ definida em $\mathbb{R}$. Encontre os intervalos onde a função seja crescente e decrescente e seus valores de máximos e mínimos.

Pontos críticos: $x = 0$; $x = 1$ e $x = 3$ Crescente em $(0{,}1)$ e $(3, +\infty)$ Decrescente em $(-\infty, 0)$ e $(1\,, 3)$

Máximo local: $x = 1$ Mínimos locais: $x = 0$ e $x = 3$



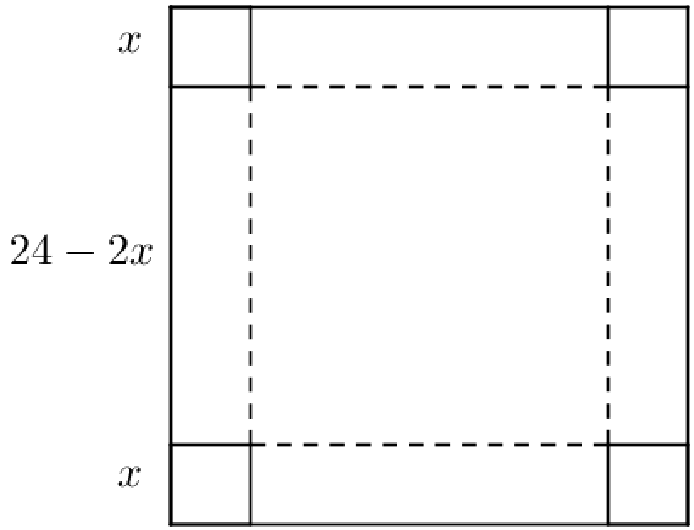
$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$



$f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 36x$

Exercícios

4) Um fabricante de caixas de papelão pretende fazer caixas sem tampas a partir de folhas quadradas de cartão com área igual a $576cm^2$, cortando quadrados iguais nos quatro cantos e dobrando os lados para cima. Determinar o lado do quadrado que deve ser cortado para se obter uma caixa com o maior volume possível.



$Resp.: x = 4\ cm$ com $1024\ cm^3$

Exercícios

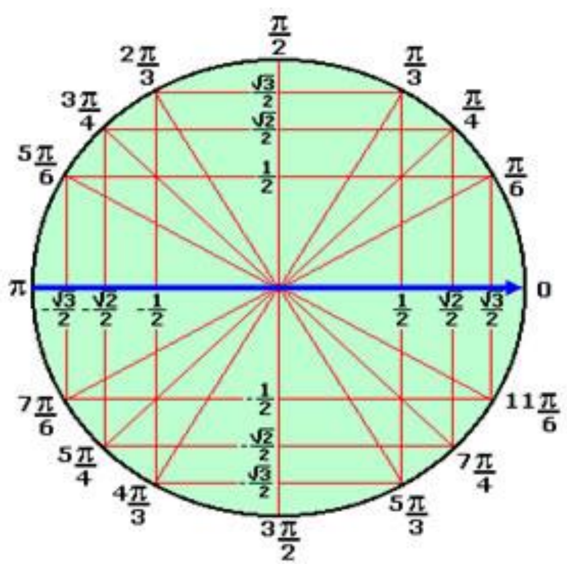
1) Encontre os valores de máximo e mínimos, onde a função é crescente e decrescente da função $g(x) = x + 2\sin x$ em $0 \leq x \leq 2\pi$.

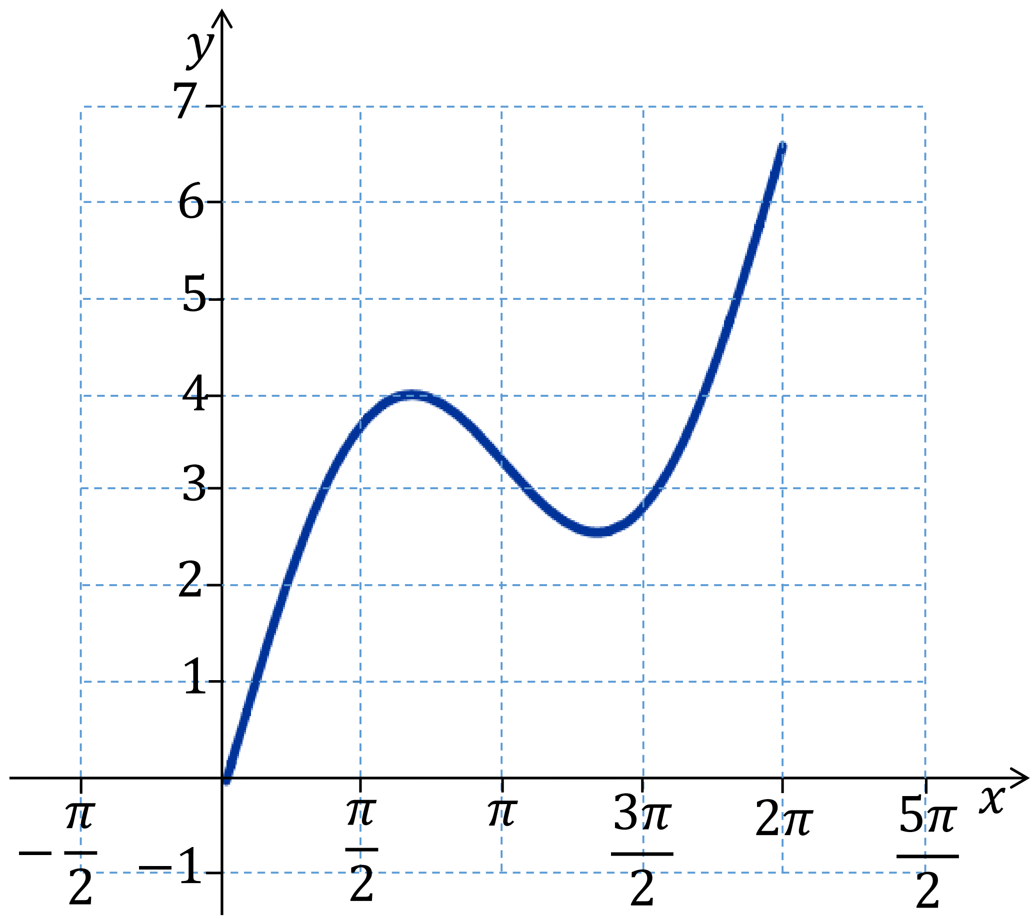
Pontos críticos: $x = \frac{2\pi}{3}; x = \frac{4\pi}{3}$

Crescente em $\left[0\,,\ \frac{2\pi}{3}\right[$ e $\left]\frac{4\pi}{3}\ ,\ 2\pi\right]$

Decrescente em $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$

Mínimo: $x = \frac{4\pi}{3}$ Máximo: $x = \frac{2\pi}{3}$





Exercícios

2) Utilize o teste da primeira derivada para determinar onde a função dada por

$$h(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$$

é crescente, decrescente e seus valores de máximos e mínimos.

Pontos críticos: $x = 0, x = 4$ e $x = 6$ Crescente em $(0, 4)$ Decrescente em $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$
Máximos: $x = 4$ Mínimos: $x = 0$

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/

O GAMA possui monitorias de:

- Pré-cálculo e Matemática Elementar (e disciplinas equivalentes)
- ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
- Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.

Universidade Federal de Pelotas

Instituto de Física e Matemática

Pró-reitoria de Ensino

Atividades de Reforço em Cálculo

Módulo de

Derivadas

2018/1

Aula 06

Projeto

GAMA

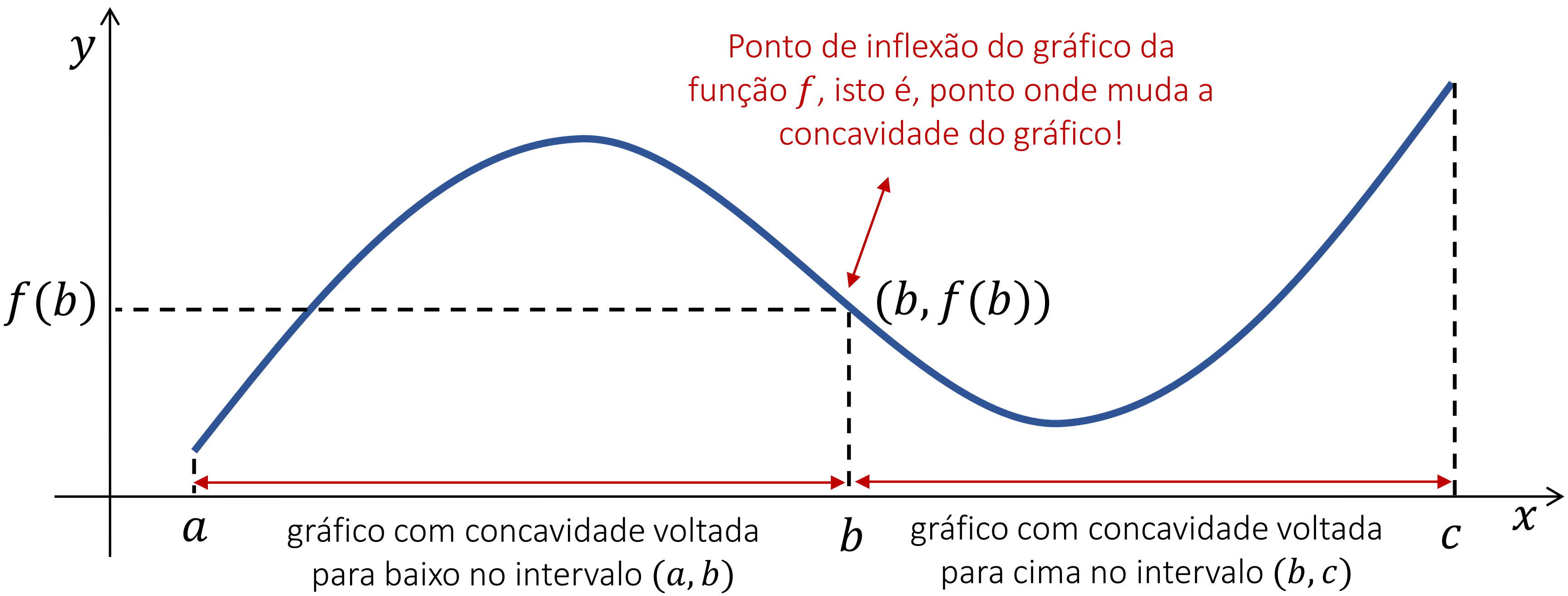
Grupo de Apoio em Matemática

Teste da Segunda Derivada

Seja f uma função contínua e duas vezes derivável num intervalo I.

Com a **segunda derivada** de f podemos obter informações sobre:

Máximos e mínimos locais	Concavidade do gráfico	Pontos de inflexão



Veremos agora como obter cada uma dessas informações:

Concavidade

Teorema: Sendo f uma função duas vezes derivável, f'e f'' sua primeira e segunda derivadas, respectivamente. Então:

Onde f'' for positiva, a concavidade da função é voltada para cima.

Onde f'' for negativa, a concavidade é voltada para baixo.

Portanto, para estudar a concavidade do gráfico de uma função f, podemos seguir os seguintes passos:

$\mathbf{1^o}$ **Passo:** Derive a função f, ou seja, calcule $f'(x)$.

$\mathbf{2^o}$ **Passo:** Derive a função f', ou seja, calcule $f''(x)$.

$\mathbf{3^o}$ **Passo:** Faça o estudo de sinal de$f''(x)$.

Nos intervalos onde$f''(x) > 0$ a concavidade é voltada para cima e onde $f''(x) < 0$ a concavidade é voltada para baixo.

Concavidade

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = x^3,$$

determine onde a concavidade é para cima e onde é para baixo.

Solução:

1^o Passo: Como $f(x) = x^3$ então:

$$f'(x) = 3x^2.$$

2^o Passo: Calculando f'', temos:

$$f''(x) = 6x.$$

3^o Passo: Estudando o sinal de f'' temos:

Quando $f''(x)$ é positiva?

Para todo $x > 0$.

Então, f é côncava para cima em $(0, +\infty)$.

Quando $f''(x)$ é negativa?

Para todo $x < 0$.

Então, f é côncava para baixo em $(-\infty, 0)$.

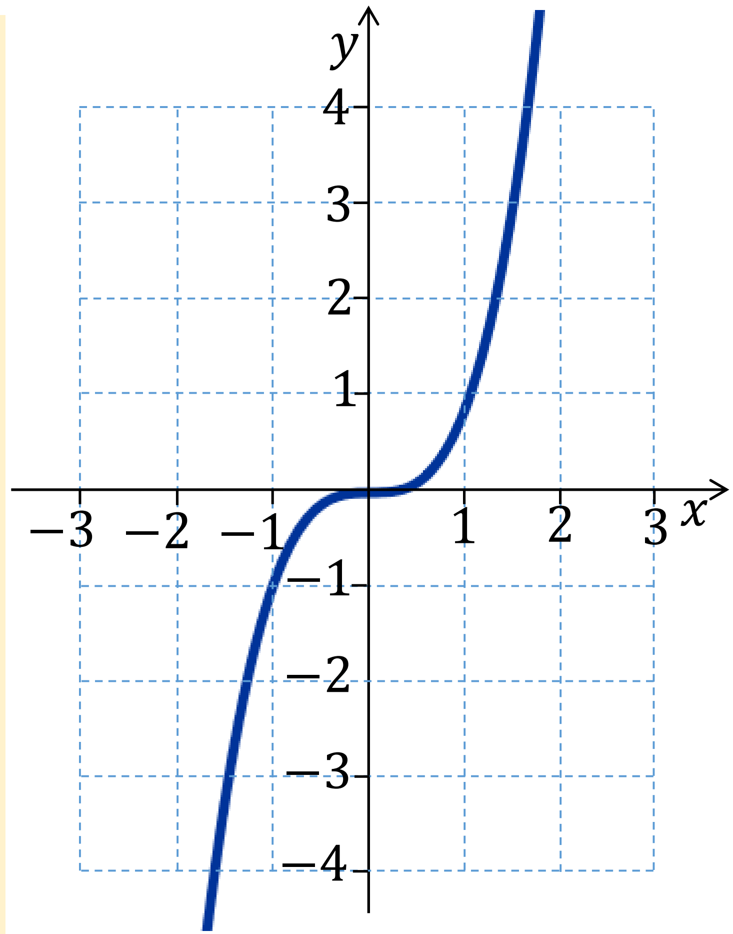


Gráfico de f

Teste da Segunda Derivada

Teorema: Seja f uma função tal que f'' seja contínua na proximidade de $x = c$.

Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f tem um ponto de **máximo local** em c.

Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f tem um ponto de **mínimo local** em c.

Portanto, para verivicar se a função f possui máximos ou mínimos locais, fazemos:

1^o Passo: Encontre $f'(x)$.

2^o Passo: Verifique se existe algum ponto crítico de f tal que $f'(c) = 0$.

3^o Passo: Encontre $f''(x)$.

4^o Passo: Analise o sinal de $f''(c)$.

Se $f''(c) < 0$ então $x = c$ é um máximo local.

Se $f''(c) > 0$ então $x = c$ é um mínimo local.

Teste da Segunda Derivada

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = x^2 + 2x - 4.$$

determine seu ponto crítico e se ele é de máximo ou de mínimo.

Solução:

$\mathbf{1^o}$ **Passo:** Como $f(x) = x^2 + 2x - 4$ então

$$f'(x) = 2x + 2.$$

$\mathbf{2^o}$ **Passo:** Como $f'(x) = 2x + 2$ então

$$f'(x) = 0 \to 2x + 2 = 0 \to x = -1.$$

ponto crítico!

$\mathbf{3^o}$ **Passo:** Como $f'(x) = 2x + 2$ então

$$f''(x) = 2.$$

$\mathbf{4^o}$ **Passo:** Como

$$f''(-1) = 2 > 0$$

Portanto, $x = -1$ é um mínimo local.

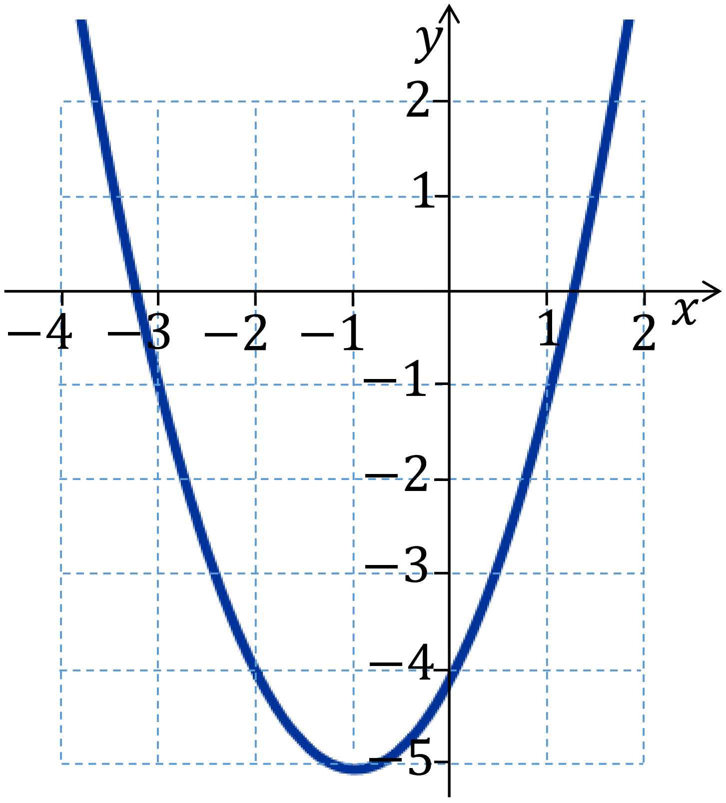


Gráfico de f

Pontos de inflexão

Definição: Um ponto P da curva $y = f(x)$ é chamado de ponto de inflexão se f é contínua no ponto e a curva mudar de côncava para cima para côncava para baixo ou vice-versa em P.

Portanto, para determinar se o gráfico de uma função f possui pontos de inflexão, fazemos:

1^o Passo: Encontre $f''(x)$.

2^o Passo: Verifique se f'' troca de sinal em algum número $x = d$.

3^o Passo: Verifique se f é contínua em $x = d$.

4^o Passo: Determine as coordenadas $(d, f(d))$ do ponto de inflexão.

Se f'' troca do sinal positivo para negativo, então o gráfico de f está trocando de côncavo para cima para côncavo para baixo.

Se f'' troca do sinal negativo para positivo, então o gráfico de f está trocando de côncavo para baixo para côncavo para cima.

Pontos de inflexão

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3.$$

determine se f possui pontos de inflexão.

Solução:

1^o Passo:

$$f''(x) = 6x - 12.$$

2^o Passo: Sinal de f'':

f'': $-\quad -\quad -\quad +\quad +\quad +$ (ponto 2)

3^o Passo: Como f é uma função polinomial, segue que f é contínua em $d = 2$.

Dos três passos acima, temos que a função f possui um ponto de inflexão $d = 2$.

4^o Passo: As coordenadas do ponto de inflexão são dadas por:

$$P = \big(2\,, f(2)\big) = (2, -1).$$

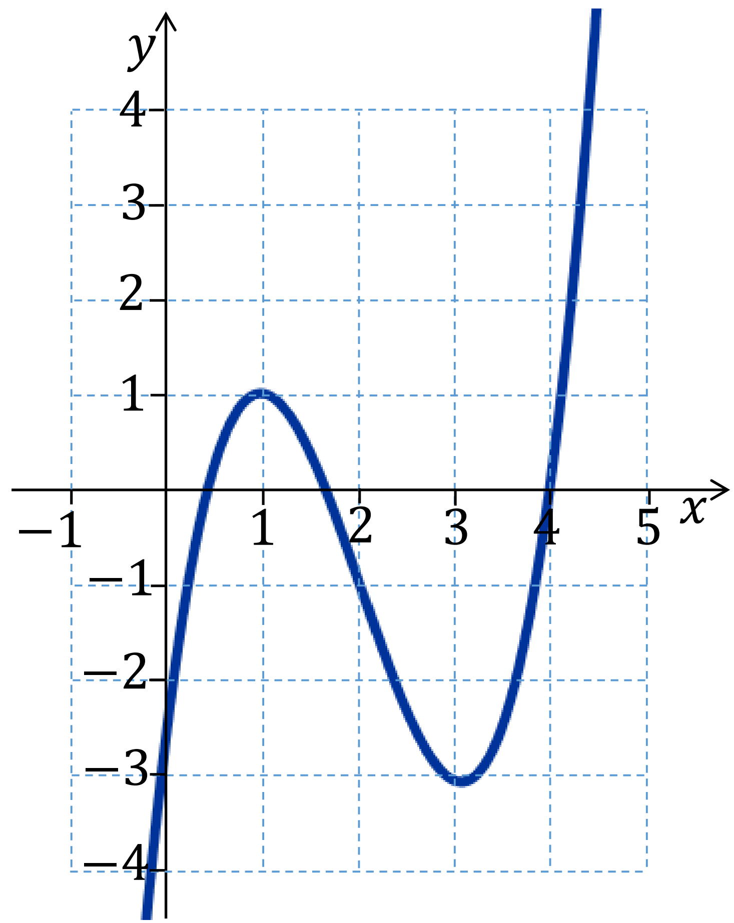


Gráfico de f

Exercícios Propostos

Exercícios

1) Para as funções abaixo, determine:

i) os intervalos nos quais f é ***crescente***;

ii) os intervalos nos quais f é ***decrescente***;

iii) os intervalos nos quais f é ***côncava para cima***;

iv) os intervalos nos quais f é ***côncava para baixo***;

v) as coordenadas dos ***pontos de inflexão*** *(se existirem)*;

vi) as coordenadas dos pontos de máximo ou mínimo *(se existirem)*;

vii) o ***esboço do gráfico*** da função f utilizando as informações obtidas nos itens anteriores.

(a) $f(x) = x^4 - 4x^3$

(b) $f(x) = (x-1)^3$

(c) $f(x) = \dfrac{(x+2)}{(x+1)}$

(d) $f(x) = x^2 - 4x$

(e) $f(x) = x^4 - 4x^2$

(f) $f(x) = \dfrac{(x^2+1)}{(x^2-1)}$

Exercícios

(a) $f(x) = x^4 - 4x^3$

i. $(3, +\infty)$

ii. $(-\infty, 3)$

iii. $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

iv. $(0,2)$

v. $(0, 0)$ e $(2, -16)$

vi. $(3, -27)$ (mínimo local)

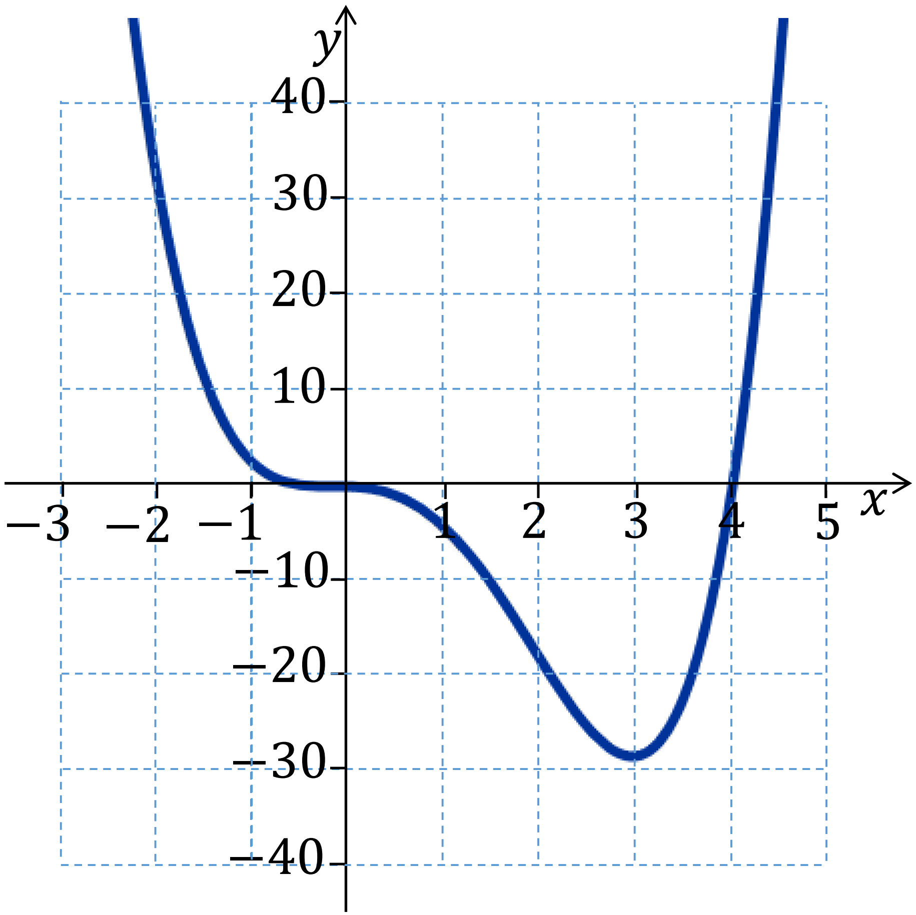


Gráfico de f

Exercícios

(b) $f(x) = (x-1)^3$

i. $\mathbb{R}$

ii. $\nexists$

iii. $(1, +\infty)$

iv. $(-\infty, 1)$

v. $(1, 0)$

vi. $\nexists$

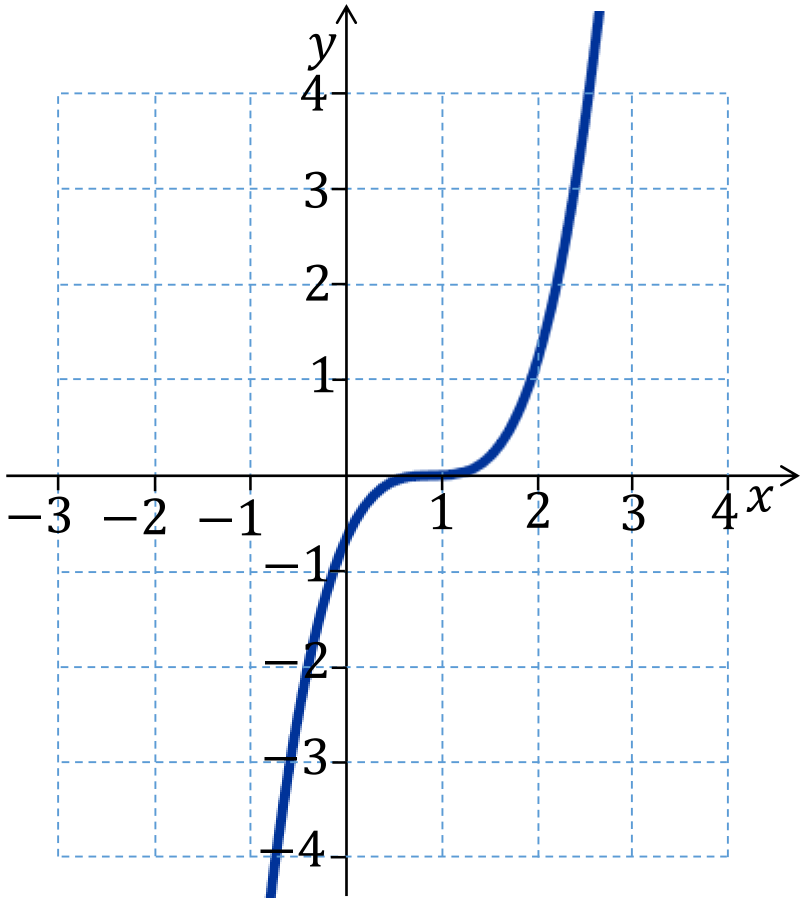


Gráfico de f

Exercícios

(c) $f(x) = \dfrac{(x+2)}{(x+1)}$

i. $\nexists$

ii. $\mathbb{R} - \{-1\}$

iii. $(-1, +\infty)$

iv. $(-\infty, -1)$

v. $\nexists$

vi. $\nexists$

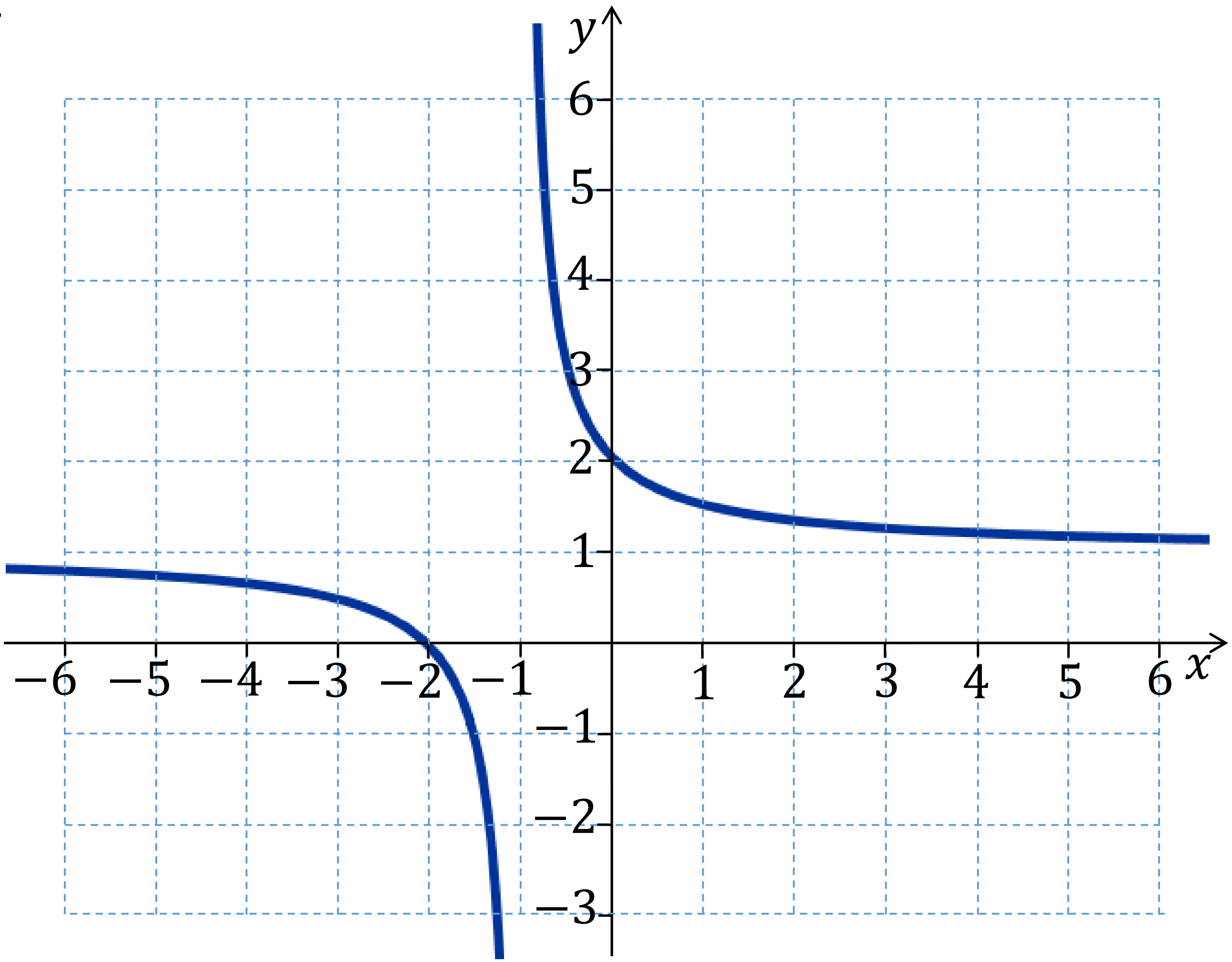


Gráfico de f

Exercícios

(d) $f(x) = x^2 - 4x$

i. $(2, +\infty)$

ii. $(-\infty, 2)$

iii. $\mathbb{R}$

iv. $\nexists$

v. $\nexists$

vi. $(2, -4)$ (mínimo local).

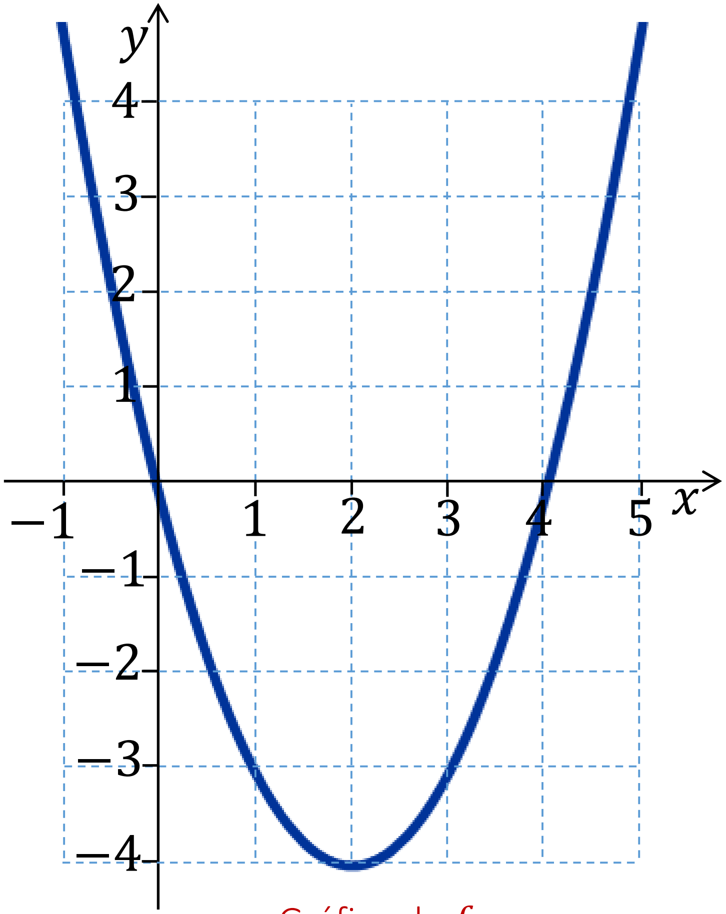


Gráfico de f

Exercícios

(e) $f(x) = x^4 - 4x^2$

i. $\left(-\sqrt{2},\ 0\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$

ii. $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(0, \sqrt{2}\right)$

iii. $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right)$

iv. $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

v. $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{20}{9}\right)$ e $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{20}{9}\right)$

vi. $\left(-\sqrt{2},\ -4\right)$ e $\left(\sqrt{2},\ -4\right)$ (mínimos locais) e $(0, 0)$ (máximo local).

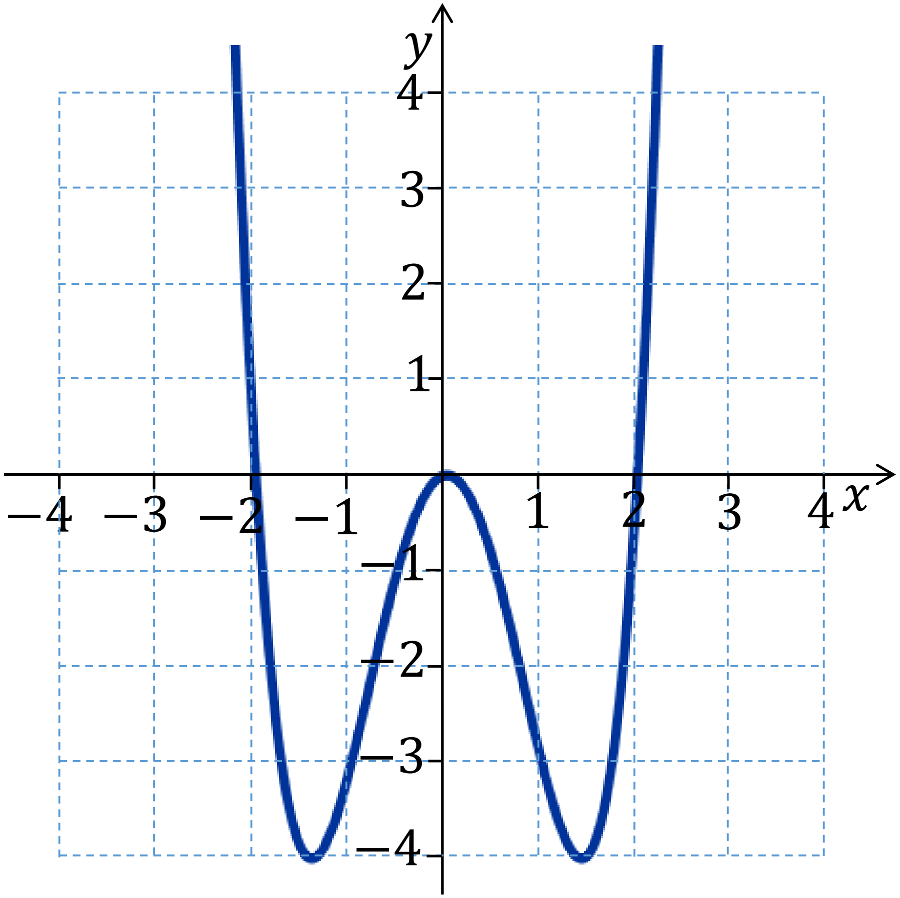


Gráfico de f

Exercícios

(f) $f(x) = \frac{(x^2+1)}{(x^2-1)}$

i. $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

ii. $(0, 1\ ) \cup (1, +\infty)$

iii. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

iv. $(-1,1)$

v. $\nexists$

vi. $(0, -1)$ (máximo local)

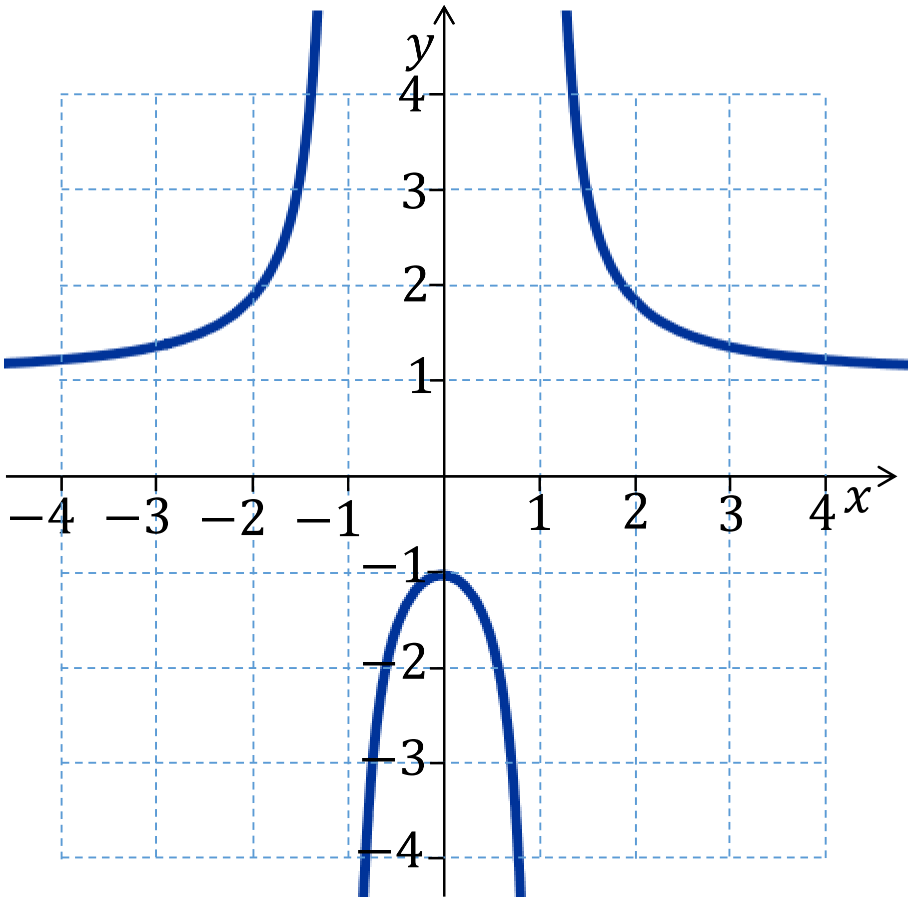


Gráfico de f

Monitorias!!

Não esqueça de procurar os monitores do GAMA para melhor esclarecer suas dúvidas!!

Os horários e locais de monitorias podem se encontrados na página do Projeto:

http://wp.ufpel.edu.br/projetogama/

O GAMA possui monitorias de:

- Pré-cálculo e Matemática Elementar (e disciplinas equivalentes)
- ALGA – Álgebra Linear e Geometria Analítica (e disciplinas equivalentes)
- Cálculo 1, Cálculo 1A e Cálculo I (e disciplinas equivalentes)

Certificado de 20 horas para quem procurar a monitoria do GAMA por pelo menos 15 vezes dentro do mesmo semestre letivo.