ECONOMIA COMPUTACIONAL COM O USO DO *MATHEMATICA* ™

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Prof. Marcelo de Oliveira Passos
Departamento de Economia – Universidade Federal de Pelotas
Mestrado em Organizações e Mercados – Economia Aplicada

Importante

- Aconselha-se utilizar a versão paga do programa Mathematica™ ou a versão de teste por 15 dias.
- Evite a pirataria.
- A versão de teste está disponível em https://www.wolfram.com/mathematica/trial/
- Os preços das versões pagas estão disponíveis em https://www.wolfram.com/mathematica/pricing/

Derivadas e integrais

- Abaixo, a descrição da integral $\int \left(3x^2 - x^3\right)$.
- O resultado não possui uma constante de integração.

- **> Integrate[(3x^2-x^3),x]**
- $x^3 - \frac{x^4}{4}$
- Diferenciando o resultado anterior temos:

- **>D[%,x]**
- $-2 + 4\, x + 2\, x^3$

Derivadas e integrais

- Este último resultado comprova que o cálculo está correto.
- É também possível usar o **Simplify** para retornar ao integrando original.
- **>Simplify[%]**
- $-(-3+x)\ x^2$

Derivadas e integrais

- O comando **Integrate** também funciona para integrais definidas, assim como para integrais múltiplas.
- O **NIntegrate** descobre aproximações numéricas.
- Abaixo, uma integral definida:
- **> NIntegrate[Sqrt[2-x^2-x^6],{x,0,1}]**
- 1.20566

Equações diferenciais

- Abaixo, há uma solução simbólica para uma equação diferencial simples com uma condição inicial.

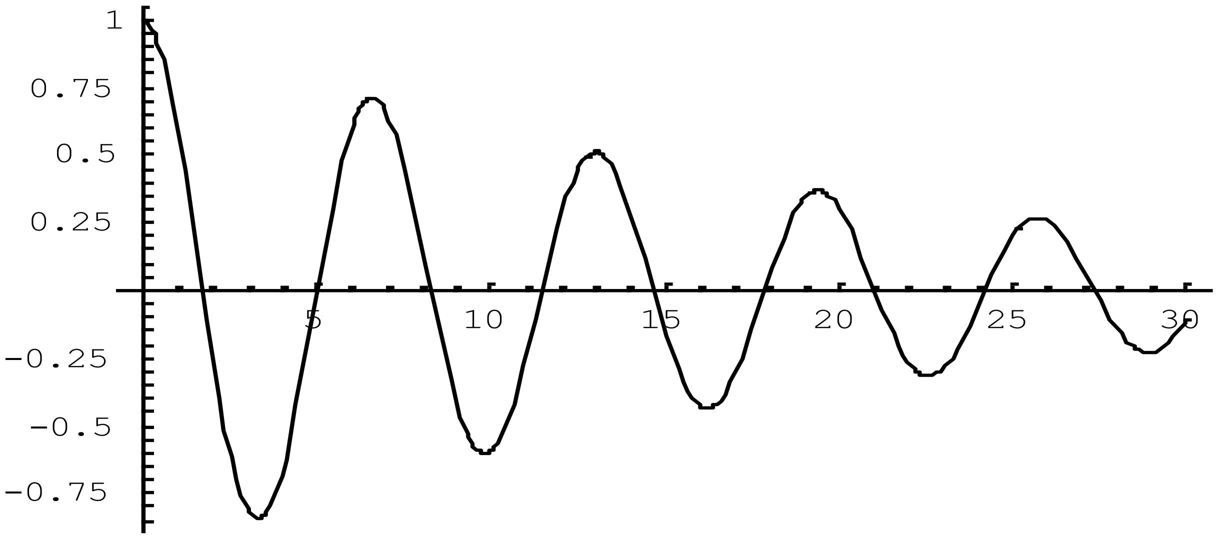
- > **DSolve[{y'[x]==a y[x]+1,y[0]==0},y[x],x]**
- $$\left\{\left\{y[x] \to \frac{-1+e^{a\,x}}{a}\right\}\right\}$$

Equações diferenciais

- Abaixo há uma solução numérica para uma equação diferencial não-linear.
- O resultado é uma regra para a função y.
- **InterpolatingFunction** representa uma função numérica que contém dados também numéricos indicados por <>.

- > **result=NDSolve[{y''[t]+0.1 y'[t]==-Sin[y[t]],y[0]==1,y'[0]==0},y,{t,0,50}]**
- {{y→InterpolatingFunction[{{0.,50.}},<>]}}

Equações diferenciais

- Você pode usar /. para aplicar a regra para a função y. Isto cria um gráfico a partir da avaliação de y[x] para um intervalo de valores de x.
- > **Plot[y[x]/.result,{x,0,30}]**
- 

Equações diferenciais

- O código seguinte define uma função f. Repare a sublinha (underscore) em x_ e o sinal := .

- > **f[x_]:=Expand[(1+x)^2]**

- É possível atribuir também variáveis, números ou expressões simbólicas à função f.

- >**{f[x],f[1.1],f[a+b]}**

- $\{1+2x+x^2,\ 4.41,\ 1+2a+a^2+2b+2ab+b^2\}$

Equações diferenciais

- Se você usar x em vez de x_ na definição de uma função g, a definição se aplicará somente à expressão literal g[x] e não a todas as expressões da forma g[_].
- > **g[x]:=Expand[(1+x)^2]; {g[x],g[1.1],g[a+b]}}**
- $\{1+2x+x^2, g[1.1], g[a+b]\}$

Equações diferenciais

- Se você usar = em vez de :=, o lado direito da sua definição será calculado imediatamente, em vez de ser calculado um lado de cada vez que da função.
- > **h[x_]=Expand[(1+x)^2];{h[x],h[1.1],h[a+b]}**
- $\{1+2x+x^2,\ 4.41,\ 1+2(a+b)+(a+b)^2\}$

Cálculo aplicado à Microeconomia

- A análise marginal é a técnica fundamental da economia neoclássica e a ferramenta principal para implementá-la é o Cálculo Diferencial.
- A discussão sobre o Cálculo inicia-se com a noção de limite.
- Muitos comandos embutidos no Mathematica ajudam a calcular numericamente e explorar graficamente os limites

Cálculo aplicado à Microeconomia

- O comando Limit segue a forma **Limit[expr, x⟶a]** que fornece o valor do limite da expressão expr, à medida em que x se aproxima do valor a.
- Matematicamente, este comando pode ser descrito como $\lim_{x \to a} f(x)$.
- Considere os dois exemplos seguintes.
- Dado $y = (3 - b \wedge 3)/(2 - b)$ calcular $\lim_{b \to 3} y$ (limite de y quando b tende a 3):

Cálculo aplicado à Microeconomia

- **>Limit[(3-b^3)/(2-b),b⟶3]**
- 24

- Há muitas maneiras de efetuar operações envolvendo técnicas de cálculo diferencial.
- A seguir, apresentaremos apenas algumas, no intuito de ilustrar as aplicações mais utilizadas na Microeconomia.

Cálculo aplicado à Microeconomia

- Por exemplo, seja f uma função descrita da seguinte forma: $f(y,z) = yz^3/(2y+z)$
- **>f=y*z^3/(2*y+z)**
- $$\frac{y\,z^3}{2\,y + z}$$

Cálculo aplicado à Microeconomia

- O comando para efetuar uma diferenciação é
- >**D[f,x]**
- onde f é a função a ser diferenciada em relação a x. Para diferenciar f em relação a z, o comando deve ser escrito tal como segue:
- >**D[f,z]**
- $$-\frac{y\,z^3}{(2\,y+z)^2}+\frac{3\,y\,z^2}{2\,y+z}$$

Cálculo aplicado à Microeconomia

- É possível também utilizar a notação sintética de derivadas, que utiliza o sobrescrito ‘ para representar a primeira derivada da função, tal como segue:

- > **f'[z]**
- $$\left(\frac{y\,z^3}{2\,y+z}\right)'[z]$$

Cálculo aplicado à Microeconomia

- Derivadas de ordens mais altas assumem a seguinte forma
- **D[f, xn]**
- Onde n representa a ordem da diferenciação. Assim sendo, a segunda derivada da função f em relação a z – normalmente chamada de f_{zz} – é
- >**D[f,z,z]**
- $$\frac{2\,y\,z^3}{(2\,y+z)^3} - \frac{6\,y\,z^2}{(2\,y+z)^2} + \frac{6\,y\,z}{2\,y+z}$$

Cálculo aplicado à Microeconomia

- De modo análogo, f_{zy} é dada por:
- >**D[f,z,y]**
- $$\frac{4\,y\,z^3}{(2\,y+z)^3}-\frac{6\,y\,z^2}{(2\,y+z)^2}-\frac{z^3}{(2\,y+z)^2}+\frac{3\,z^2}{2\,y+z}$$
- Também é utilizado a notação sintética de derivadas para função definidas corretamente
- >**f''[y]**
- $$\frac{y\,z^3}{2\,y+z}''[y]$$

Cálculo aplicado à Microeconomia

- **>f''[z]**
- $$\left(\frac{y\,z^3}{2\,y+z}\right)''[z]$$

- **>f''[y,z]**
- $$\left(\frac{y\,z^3}{2\,y+z}\right)''[y,\ z]$$

Cálculo aplicado à Microeconomia

- Partindo de uma função de custo total, onde Q representa a quantidade produzida, temos
- >**CT=Q^2-11Q+18**
- $18 - 11\,Q + Q^2$
- Pela equação acima, percebe-se que o Mathematica ordena os polinômios sempre do monômio de menor para o de maior grau.
- O custo médio (CME) pode ser obtido dividindo o custo total (CT) pela quantidade (Q).
- >**CME=CT/Q**

Cálculo aplicado à Microeconomia

- O custo médio (CME) pode ser obtido dividindo o custo total (CT) pela quantidade (Q).
- >**CME=CT/Q**
- $$\frac{18 - 11\,Q + Q^2}{Q}$$
- O custo marginal é obtido a partir da primeira derivada do custo total em relação Q.
- >**CMG=D[CT,Q]**
- -11+2 Q

Cálculo aplicado à Microeconomia

- Se considerarmos uma função de produção com dois insumos (trabalho e capital), temos:
- > **P=200*K*L^(1/2)**
- $200\,K\,\sqrt{L}$
- Onde Q representa o produto, K é o capital e L representa o trabalho. O produto médio é
- >**PME=P/L**
- $$\frac{200\,K}{\sqrt{L}}$$

Cálculo aplicado à Microeconomia

- A produtividade marginal do trabalho é dada pela derivada parcial da função de produção em relação ao trabalho.
- **>PMG=D[P,L]**
- $$\frac{100\,K}{\sqrt{L}}$$

Cálculo aplicado à Microeconomia

- A derivada segunda da função de produção em relação ao trabalho fornece um valor negativo
- >**D[P,L,L]**
- $$-\frac{50\,K}{L^{3/2}}$$
- Este valor negativo da segunda derivada indica que a função de produção apresenta retornos decrescentes de escala (retornos marginais decrescentes, ou seja, cada unidade adicional de trabalho empregada diminui o produto marginal).

Cálculo aplicado à Microeconomia

- Se supusermos que $K > 0$ e $L > 0$, o resultado indica que existem retornos decrescentes do fator trabalho.
- Para funções de produção mais complicadas a análise gráfica é mais adequada para determinar os retornos dos insumos.

Cálculo aplicado à Microeconomia

- Até este ponto nós assumimos que as variáveis não estão em função uma(s) das outra(s).
- Isto é, em termos matemáticos, o comando **D[f, x]** calcula uma derivada parcial da função da função **f** com relação a **x**.
- Se P for, contudo, uma função de L nós teríamos que tomar a derivada total da função acima com relação a L.

Cálculo aplicado à Microeconomia

- O comando de derivada total tem a mesma forma do comando da derivada parcial, mas usa **Dt**, **Dt[f,x]**.
- >**Dt[P,L]**
- $$\frac{100\,K}{\sqrt{L}} + 200\,\sqrt{L}\;\mathrm{Dt}[K,\,L]$$

Cálculo aplicado à Microeconomia

- No resultado acima, Dt[P,L]=dP/dL. Observe que se P e L são independentes um do outro, Dt[P,L] = 0, a derivada total é equivalente à derivada parcial e o resultado é
- $$\frac{100\,K}{\sqrt{L}}$$

Cálculo aplicado à Microeconomia

- Muitos tipos de integrais podem ser calculadas usando o comando **Integrate.**
- O comando para integrais indefinidas é **Integrate [expr, x]** onde **expr** se refere à expressão que está sendo integrada em relação a **x.**
- A integral $K = \int 80t^{1/4}dt$ pode ser assim definida:
- **>K = Integrate[80*t^(1/4),t]**
- $64\, t^{5/4}$

Cálculo aplicado à Microeconomia

- As integrais definidas são calculadas de uma das duas formas seguintes:
- (a) exata (que utiliza o Teorema Fundamental do Cálculo) ou
- (b) aproximada (que utiliza métodos numéricos).
- O comando **Integrate [expr, {x,a,b}]** calcula o valor exato, quando for possível, da integral definida ao longo do intervalo entre **a** e **b**.

Cálculo aplicado à Microeconomia

- O comando **NIntegrate[expr, {x,a,b}]** calcula uma aproximação para o valor da integral definida ao longo do intervalo compreendido entre **a** e **b** usando somente métodos numéricos.
- Um algoritmo adaptativo é usado para avaliar a integral, subdividindo o intervalo de integração até o grau desejado de precisão ser atingido.
- Considere a seguinte integral

$$\int_1^4 3x^4 dx$$

Cálculo aplicado à Microeconomia

- O comando **NIntegrate[expr, {x,a,b}]** calcula uma aproximação para o valor da integral definida ao longo do intervalo compreendido entre **a** e **b** usando somente métodos numéricos.
- Um algoritmo adaptativo é usado para avaliar a integral, subdividindo o intervalo de integração até o grau desejado de precisão ser atingido.
- Considere a seguinte integral

$$\int_1^4 3x^4 dx$$

Cálculo aplicado à Microeconomia

- Vamos usar o primeiro método para integrar a função
- **> Integrate[2*x^4,{x,1,2}]**
- $$\frac{62}{5}$$
- Observe que o *Mathematica* não fornece uma constante de integração.

Cálculo aplicado à Microeconomia

- Considere o nosso primeiro problema de integral resolvido acima.
- Se uma condição inicial for conhecida, tal como $K = 100$ em $t = 1$, nós poderemos fixar $t = 1$ para resolver para o termo constante.
- Para substituir $t = 1$ em K, o Mathematica possui muitas funções diferentes.

Cálculo aplicado à Microeconomia

- Uma forma simples de substituição é usar o comando de "replacement", /. , que toma a forma **expr/.x→value**, onde x representa o valor a ser substituído na expressão , **expr**.
- Use o atalho para subscrito [CTRL] + [-] para K_1.
- **>K_1=10-K/.t->1**
- -54
-

Cálculo aplicado à Microeconomia

- Para completar a solução, você pode colocar K mais a constante de integração K_1.
- >**K=K+K₁**
- $-54 + 64\, t^{5/4}$

- Um problema econômico comum envolvendo integrais é derivar a curva de custo total de uma curva de CMg e uma condição inicial conhecida, que é o custo fixo.

Cálculo aplicado à Microeconomia

- Seja uma curva de custo marginal dada por
- > **CMG=4*Q^2-32*Q+80**
- $80 - 32\,Q + 4\,Q^2$

- Vamos integrar esta função para obter a função de custo total:
- >**Integrate[CMG,Q]**
- $$80\,Q - 16\,Q^2 + \frac{4\,Q^3}{3}$$

Cálculo aplicado à Microeconomia

- Observe que nenhuma constante de integração foi fornecida.
- Em termos econômicos, a constante de integração representa o custo fixo, que não aparece neste caso.

Cálculo aplicado à Microeconomia

- Outro exemplo: Vamos resolver a seguinte equação para y: 6xy+30=5y
- **>Solve[6*x*y+30==5*y,y]**
- $$\left\{\left\{y \to -\frac{30}{-5+6\,x}\right\}\right\}$$
- Como vimos, como o Mathematica retorna as soluções das equações como uma lista agrupada ordenadamente, elas não podem ser usadas diretamente como input de outras estruturas matemáticas.

Cálculo aplicado à Microeconomia

- Embora uma solução seja dada, y = 30/-5+6x não é atribuída (assigned): digitar y gera “y” como resultado.
- **>y**
- `Y`
- Há duas técnicas que podem ser usadas para atribuir valores de solução sem digitar ou colar desnecessariamente.

Cálculo aplicado à Microeconomia

- Nós podemos atribuir a solução usando o sinal /. Recolocando o operador antecedido pelo comando%
- Dado que as soluções são listas, nós podemos usar **Part** ou [[ ]] para “extrair” a solução da lista.
- Vejamos a segunda técnica usando o comando **Solve** para resolver um sistema de equações.

Cálculo aplicado à Microeconomia

- Inclua a equação $y + x = 5$ com a equação anterior para criar um sistema determinante com duas equações (linearmente dependentes) e duas incógnitas, x e y.
- Nós nomeamos o resultado "sols" e aumentamos o comando **Solve** com dois colchetes { } para denotar listas ou equações e variáveis.
- Tal como foi anteriormente atribuído, y, deve ser apagado antes de resolver o novo sistema.

Cálculo aplicado à Microeconomia

- **>y=.**
- **>sols=Solve[{x*y+20==y,y+x==20},{x,y}]**
- {{x→0, y→20}, {x→21, y→-1}}
- O resultado é composto por duas soluções apresentadas em duas listas.
- Se nós procurarmos uma solução não-negativa para y, nós podemos atribuir y a partir da primeira parte digitando

Cálculo aplicado à Microeconomia

- **>y*=y/.Part[sols,1]**
- `y*=20`
- O valor atribuído agora para y é 20.
- Como atalho, o *Mathematica* tem um comando **First** e um **Last** que diz para o software para procurar o primeiro ou o último grupo na lista de solução.
- **>y*=y/.First[sols]**
- `y*=20>y*=20`

Cálculo aplicado à Microeconomia

- Estas técnicas também podem ser usadas para atribuir tanto x e y a partir do primeiro grupo. Nós podemos usar o operador [[ ]] para atribuir tanto x como y.
- **>{x*,y*}={x,y/.sols[[1]]**
- Ou nós podemos usar o operador [[ ]] para atribuir somente y pela extração do segundo elemento da primeira lista.
- **>y*=y/.sols[[2]]**
-

Cálculo aplicado à Microeconomia

- Como default, o *Mathematica* procura tanto por soluções complexas como reais.
- Devido ao fato de muitos problemas econômicos requererem soluções não-complexas, nós examinamos vários procedimentos de seleção ao longo do texto para eliminar soluções complexas.

Cálculo aplicado à Microeconomia

- Considere uma empresa que quer aumentar o investimento de \$2 milhões por ano para \$ 10 milhões dentro de cinco anos.
- Qual a porcentagem anual de aumento no investimento é necessário para cada ano?
- Suponha que exista composição anual.
- Assim, a fórmula básica para este problema e resolver a seguinte equação para r:
- $10 = 2\,(1+r)^5$.

Cálculo aplicado à Microeconomia

- **>Solve[20==2*(1+r)^4,r]**

$\{\{r \to -1 - 10^{1/4}\}, \{r \to -1 - i\, 10^{1/4}\}, \{r \to -1 + i\, 10^{1/4}\}, \{r \to -1 + 10^{1/4}\}\}$

- Antes de atribuir valores, o usuário pode desejar eliminar a estrutura de lista que os envolve.
- Flatten desfaz ou "achata" listas deletando as chaves internas (inner braces).
- O nível de achatamento (flattening) pode ser definido com uma opção.
- O comando assume a seguinte forma:

Cálculo aplicado à Microeconomia

- **>Solve[20==2*(1+r)^4,r]**

$\{\{r \to -1 - 10^{1/4}\}, \{r \to -1 - i\, 10^{1/4}\}, \{r \to -1 + i\, 10^{1/4}\}, \{r \to -1 + 10^{1/4}\}\}$

- Antes de atribuir valores, o usuário pode desejar eliminar a estrutura de lista que os envolve.
- **Flatten** desfaz ou "achata" listas deletando as chaves internas (inner braces). O nível de achatamento (flattening) pode ser definido com uma opção.

Cálculo aplicado à Microeconomia

- O comando assume a seguinte forma:
- **Flatten[list, n]**
- onde n representa o nível de *flattening*. Para ilustrar, nós usamos **Flatten** para eliminar a estrutura do resultado acima.
- **>Flatten[%]**

$$\{r \to -1 - 10^{1/4},\ r \to -1 - i\, 10^{1/4},\ r \to -1 + i\, 10^{1/4},\ r \to -1 + 10^{1/4}\}$$

Cálculo aplicado à Microeconomia

- A primeira e a última soluções são as únicas que não são complexas.
- As outras duas possuem o número imaginário i .
- Esperamos que o resultado seja um número real e portanto somente a primeira escolhas fazem sentido do ponto de vista econômico.
- Para atribuir o valor apropriado a r, os comandos **First** ou **Last** podem ser usados.
- **>r=r/.Last**[%]
- $-1 + 10^{1/4}$

Referências sobre o Mathematica

- BLACHMAN, Nancy. *Mathematica: a practical approach*. New Jersey: Prentice-Hall, 1992.
- DON, Eugene. *Mathematica - 750 exercises with answers .2nd ed. Schaum`s Outlines Series*. New York: McGraw-Hill, 2009.
- STINESPRING, John Robert. *Mathematica for Microeconomics*. New York:Harcourt/Academic Press, 2002.

Referências sobre Cálculo e Cálculo aplicado à Economia

- AYRES JR., F. *Cálculo Diferencial e Integral (Coleção Schaum)*. São Paulo: McGraw-Hill, 1981 (tradução do Eng° José Rodrigues de Carvalho).
- BALDANI, J.; BRADFIELD, J. & TURNER, R.W. *Mathematical Economics*. 2nd ed. Chulo Alto, CA: Southwestern College Publications, 2004.
- CHIANG, A. & WAINWRIGHT, K. *Matemática para economistas*. 4ª ed. Rio de Janeiro: Campus, 2005.

Referências sobre Cálculo e Cálculo aplicado à Economia

- DIXIT, A.K. *Optimization in Economic Theory*. 2nd ed. Oxford, USA: Oxford University Press, 1990.
- DOWLING, E. T. *Introduction to Mathematical Economics*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 2001. Schaum`s Outline Series.
- GOLGHER, A. B. e MARTINS, R. V. *Matemática: Exercícios Resolvidos da Anpec*. Belo Horizonte: Ed. da UFMG/Cedeplar, 2008.

Referências sobre Cálculo e Cálculo aplicado à Economia

- LOBO, O. G.; BORGES, J. M.; LOBO, F. G. *Análise Matemática: Cálculo Diferencial em R^n*. Vol. IV. Lisboa: Ed. Presença, 1992.
- ____________. *Análise Matemática: Cálculo Integral em R e R^n*. Vol. III. Lisboa: Ed. Presença, 1992.

Referências sobre Cálculo e Cálculo aplicado à Economia

- MORETTIN, P. A., HAZZAN, S. e BUSSAB, W. O. *Cálculo: Funções de Uma e Várias Variáveis*. São Paulo: Saraiva, 2003.
- SIMON, C.P. & BLUME, L. *Mathematics for Economists*. New York: W.W. Norton & Company Inc., 1994.