

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
Instituto de Física e Matemática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática



Dissertação

Modelagem Matemática da Idade Gestacional em Éguas Crioulas: Aplicação do Modelo Polinomial Cúbico e Análise de Incertezas via Simulação de Monte Carlo

Aline de Souza Muniz

Pelotas, 2026

Aline de Souza Muniz

Modelagem Matemática da Idade Gestacional em Éguas Crioulas: Aplicação do Modelo Polinomial Cúbico e Análise de Incertezas via Simulação de Monte Carlo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática do Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Régis Sperotto de Quadros
Coorientadores: Profa. Dra. Bruna da Rosa Curcio
Profa. Dra. Pollyane Vieira da Silva

Pelotas, 2026

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas
Catalogação da Publicação

M963m Muniz, Aline de Souza

Modelagem matemática da idade gestacional em éguas crioulas [recurso eletrônico] : aplicação do modelo polinomial cúbico e análise de incertezas via simulação de Monte Carlo / Aline de Souza Muniz ; Régis Sperotto de Quadros, orientador ; Bruna da Rosa Curio, Pollyane Vieira da Silva, coorientadoras. — Pelotas, 2026.
104 f. : il.

Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2026.

1. Acompanhamento Gestacional. 2. Função Cúbica. 3. Monte Carlo. 4. Método dos Percentis. 5. Éguas Crioulas. I. Quadros, Régis Sperotto de, orient. II. Curio, Bruna da Rosa, coorient. III. Silva, Pollyane Vieira da, coorient. IV. Título.

CDD 511.8

Aline de Souza Muniz

Modelagem Matemática da Idade Gestacional em Éguas Crioulas: Aplicação do Modelo Polinomial Cúbico e Análise de Incertezas via Simulação de Monte Carlo

Dissertação aprovada, como requisito parcial, para obtenção do grau de Mestre em Modelagem Matemática, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas.

Data da Defesa: 26 de fevereiro de 2026

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Régis Sperotto de Quadros - Orientador (UFPel)

Profa. Dra. Bruna da Rosa Curcio - Coorientadora (UFPel)

Profa. Dra. Pollyane Vieira da Silva - Coorientadora (UFPel)

Prof. Dr. Cássio Baissvenger Pazinato - Membro externo (IFSUL)

Profa. Dra. Vitória Müller - Membro interno (UFPel)

Prof. Dr. Rogério Costa Campos - Membro interno (UFPel)

AGRADECIMENTOS

A realização deste trabalho só foi possível graças ao apoio de diversas pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram ao longo dessa trajetória.

Primeiramente, agradeço a Deus pela força e pela perseverança nos momentos mais difíceis desta caminhada, pois sem Ele nada seria possível.

Aos meus pais, Denise e Zomildo, pelo incentivo constante e apoio em todos os momentos da minha vida. Vocês são meu orgulho e meu maior exemplo. Mesmo sem terem tido as mesmas oportunidades que eu tive, sempre me apoiaram nessa caminhada incansável em busca dos meus sonhos.

Também agradeço à minha família, pelo carinho e pelo apoio ao longo dessa trajetória. Em especial, aos meus avós, por eu ter a felicidade de ainda tê-los comigo. Lembro também, com carinho e saudade, das pessoas queridas que infelizmente perdi ao longo desses dois anos.

Ao meu namorado, Wellerson, pelo carinho, pela paciência e pelo apoio constante durante esta jornada. Obrigada por estar ao meu lado nos momentos difíceis e por celebrar comigo cada conquista.

Ao meu orientador, professor Régis, pela orientação, pela paciência, pelos ensinamentos e pelas valiosas contribuições ao longo do desenvolvimento desta pesquisa. Obrigada por ter acreditado em mim desde o início.

As minhas coorientadoras, professora Bruna e professora Pollyane, pelo apoio, pelos ensinamentos e pela parceria ao longo do desenvolvimento deste trabalho. Foi muito gratificante trabalhar com vocês e aprender tanto sobre a área de Estatística e Medicina Veterinária. Essa experiência foi fundamental e me fez perceber o quanto me identifiquei com esta linha de pesquisa.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, pelos conhecimentos compartilhados durante o curso e pela contribuição para a minha formação acadêmica. E em especial à coordenadora, professora Daniela, que tive muita sorte de ter conhecido ainda na graduação. Sou profundamente grata por ter acreditado em mim e por ter me incentivado a seguir o caminho da Modelagem Matemática. Este programa possui grande importância para nós alunos, mas também para a comunidade, ao promover a integração entre pesquisa, interdisciplinaridade e matemática.

Aos colegas e amigos, pelo apoio, pelas conversas, pela troca de experiências e por tornarem essa jornada mais leve.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pela concessão da bolsa de estudos que possibilitou a realização deste trabalho.

Por fim, agradeço a todos que, de alguma forma, fizeram parte desta caminhada e contribuíram para a concretização deste trabalho.

"O que sabemos é uma gota; o que ignoramos é um oceano."

— ISAAC NEWTON

RESUMO

MUNIZ, Aline de Souza. **Modelagem Matemática da Idade Gestacional em Éguas Crioulas: Aplicação do Modelo Polinomial Cúbico e Análise de Incertezas via Simulação de Monte Carlo**. Orientador: Régis Sperotto de Quadros. 2026. 104 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2026.

A estimativa da idade gestacional em éguas da raça Crioula é essencial para um manejo reprodutivo eficiente, pois influencia desde o acompanhamento nutricional até o preparo adequado para o parto. Comumente, essa estimativa é realizada por profissionais da área veterinária por meio da mensuração do diâmetro da órbita ocular fetal, obtida via ultrassonografia transretal. Contudo, essa técnica apresenta limitações relacionadas à posição fetal no útero, o que pode comprometer sua visualização. Como alternativa complementar, testou-se o uso da espessura da junção útero-placentária (JUP), por se tratar de uma medida acessível, de fácil obtenção e menos restritiva em relação à visualização fetal. No entanto, observou-se elevada variabilidade da JUP, o que limita sua utilização como preditora da idade gestacional, por este motivo, neste estudo, ela foi empregada como variável complementar para avaliação da saúde placentária. Este estudo teve como principal objetivo avaliar modelos matemáticos mais adequados que o linear tradicionalmente utilizado, aplicados à estimativa da idade gestacional a partir da órbita ocular fetal, bem como descrever o comportamento da JUP ao longo dos meses gestacionais e obter intervalos de referência para apoio ao monitoramento placentário no contexto de riscos e possíveis alterações na gestação. Para o ajuste de curvas aos dados observados, foi utilizado um modelo cúbico em conjunto com o método estocástico de Monte Carlo (MMC), com o propósito de quantificar e analisar as incertezas associadas às estimativas. Os intervalos de confiança foram obtidos pelo método dos percentis, aplicados sobre os resultados de múltiplas simulações realizadas pelo MMC, permitindo avaliar a variabilidade e a precisão das previsões. A aplicação dos modelos matemáticos e as análises estatísticas foram realizadas utilizando o software Python. Os modelos apresentaram bom desempenho de ajuste aos valores médios mensais ($R^2 > 0,98$), com erros médios absolutos inferiores a 0,03. Como contribuição prática, foi desenvolvido um aplicativo para celular destinado a integrar esses modelos e facilitar sua aplicação na rotina veterinária, otimizando o tempo, automatizando os cálculos e ampliando a acessibilidade da previsão da idade gestacional em equinos no intervalo de 5 a 11 meses.

Palavras-chave: Acompanhamento Gestacional, Função Cúbica, Monte Carlo, Método dos Percentis, Éguas Crioulas, Órbita Ocular Fetal, Junção Útero-Placentária.

ABSTRACT

MUNIZ, Aline de Souza. **Mathematical Modeling of Gestational Age in Criollo Mares: Application of a Cubic Polynomial Model and Uncertainty Analysis via Monte Carlo Simulation.** Advisor: Régis Sperotto de Quadros. 2026. 104 f. Dissertation (Masters in Mathematical Modeling) – Institute of Physics and Mathematics, Federal University of Pelotas, Pelotas, 2026.

The estimation of gestational age in Criollo mares is essential for efficient reproductive management, as it influences nutritional monitoring and appropriate preparation for parturition. Commonly, this estimation is performed by veterinary professionals through the measurement of the fetal ocular orbital diameter obtained via transrectal ultrasonography. However, this technique presents limitations related to fetal positioning within the uterus, which may compromise its visualization. As a complementary alternative, the thickness of the Combined Thickness of the Uterus and Placenta (CTUP) was evaluated, as it is an accessible measurement, easy to obtain, and less restrictive with respect to fetal visualization. Nevertheless, high variability of the CTUP was observed, which limits its use as a predictor of gestational age; therefore, in this study, it was employed as a complementary variable for the assessment of placental health. The main objective of this study was to evaluate mathematical models more suitable than the traditionally used linear model for estimating gestational age based on the fetal ocular orbit, as well as to describe the behavior of the CTUP throughout the gestational months and to obtain reference intervals to support placental monitoring in the context of potential risks and gestational alterations. Curve fitting to the observed data was performed using a cubic model combined with the stochastic Monte Carlo method (MCM), with the purpose of quantifying and analyzing uncertainties associated with the estimates. Confidence intervals were obtained using the percentile method applied to the results of multiple simulations generated by the MCM, allowing the assessment of variability and predictive precision. Mathematical modeling and statistical analyses were conducted using the Python software. The models showed good fitting performance to monthly mean values ($R^2 > 0.98$), with mean absolute errors below 0.03. As a practical contribution, a mobile application was developed to integrate these models and facilitate their application in veterinary practice, optimizing time, automating calculations, and expanding accessibility to gestational age estimation in equines within the 5- to 11-month interval.

Keywords: Gestational Monitoring, Cubic Function, Monte Carlo, Percentile Method, Criollo Mares, Fetal Orbital Diameter, Combined Thickness of the Uterus and Placenta.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Feto no 100º dia de gestação. Fonte: (Ginther, 1998).	24
Figura 2	Feto no 190º dia de gestação. Fonte: (Ginther, 1998).	25
Figura 3	Feto no 240º dia de gestação. Fonte: (Ginther, 1998).	25
Figura 4	Contenção da égua e esvaziamento do reto. Fonte: Da autora, 2024.	27
Figura 5	Introdução do transdutor linear e obtenção das medidas ultrassono- gráficas. Fonte: Da autora, 2024.	27
Figura 6	Imagem ultrassonográfica da órbita ocular fetal com medição reali- zada. Fonte: Da autora, 2024.	29
Figura 7	Representação esquemática das estruturas anatômicas visualiza- das: (1) crânio, (2) órbita óssea, (3) corpo vítreo e (4) cristalino. Fonte: (Turner; Mcdonnell; Feit; Grogan; Foglia, 2006).	29
Figura 8	Exame ultrassonográfico da junção útero-placentária (JUP). A ima- gem A mostra a artéria uterina e a JUP, enquanto na imagem B, em amarelo, pode-se observar a metodologia utilizada para medir a JUP e a imagem C mostra a utilização do doppler colorido para iden- tificar e delimitar melhor a artéria uterina. Fonte: (Santos; Curcio; Dallo; Thier; Dallmann; Nogueira, 2024).	31
Figura 9	Gráfico da função Logística para diferentes valores de β_1 , sendo β_2 = 4 e $\beta_3 = 2$. Fonte: Adaptado de (Silva, 2018).	38
Figura 10	Gráfico da função Logística para diferentes valores de β_1 , sendo β_2 = - 4 e $\beta_3 = 2$. Fonte: Adaptado de (Silva, 2018).	39
Figura 11	Gráfico da função Logística para diferentes valores de β_2 , sendo β_1 = 4 e $\beta_3 = 4$. Fonte: Adaptado de (Silva, 2018).	39
Figura 12	Gráfico da função Logística para diferentes valores de β_3 , sendo β_1 = 2 e $\beta_2 = - 2$. Fonte: Adaptado de (Silva, 2018).	40
Figura 13	Gráfico da função Logística para diferentes valores de β_3 , sendo β_1 = 2 e $\beta_2 = 2$. Fonte: Adaptado de (Silva, 2018).	40
Figura 14	Gráfico do modelo Gompertz para diferentes valores de β_1 , sendo $\beta_2 = 2$ e $\beta_3 = 1$. Fonte: Adaptado de (Silva, 2018).	42
Figura 15	Gráfico do modelo Gompertz para diferentes valores de β_2 , sendo $\beta_1 = 4$ e $\beta_3 = 1$. Fonte: Adaptado de (Silva, 2018).	42
Figura 16	Gráfico do modelo Gompertz para diferentes valores de β_3 , sendo $\beta_1 = 4$ e $\beta_2 = 2$. Fonte: Adaptado de (Silva, 2018).	43
Figura 17	Gráfico do modelo Chanter para diferentes valores de β_1 , sendo β_2 = 3, $\beta_3 = 1$ e $\beta_4 = 0,5$. Fonte: Adaptado de (Silva, 2018).	44

Figura 18	Gráfico do modelo Chanter para diferentes valores de β_1 , sendo $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = 1$ e $\beta_4 = -0,5$. Fonte: Adaptado de (Silva, 2018).	45
Figura 19	Gráfico do modelo Chanter para diferentes valores de β_3 , sendo $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 3$ e $\beta_4 = 0,5$. Fonte: Adaptado de (Silva, 2018).	45
Figura 20	Gráfico do modelo Chanter para diferentes valores de β_3 , sendo $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 3$ e $\beta_4 = -0,5$. Fonte: Adaptado de (Silva, 2018).	46
Figura 21	Gráfico do modelo Chanter para diferentes valores de β_4 positivos, sendo $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 4$ e $\beta_3 = 2$. Fonte: Adaptado de (Silva, 2018). . .	46
Figura 22	Gráfico do modelo Chanter para diferentes valores de β_4 negativos, sendo $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 4$ e $\beta_3 = 2$. Fonte: Adaptado de (Silva, 2018). . .	47
Figura 23	Gráfico do modelo Von Bertalanffy para diferentes valores de k , sendo $\beta_1 = 2$. Fonte: Da autora, 2025.	48
Figura 24	Gráfico do modelo Von Bertalanffy para diferentes valores de β_1 com $k = 1$ fixo. Fonte: Da autora, 2025.	49
Figura 25	Gráfico do modelo Cúbico para diferentes valores de β_1 com $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = 2$ e $\beta_4 = 1$. Fonte: Da autora, 2025.	50
Figura 26	Gráfico do modelo Cúbico para diferentes valores de β_2 com $\beta_1 = 3$, $\beta_3 = 2$ e $\beta_4 = 1$. Fonte: Da autora, 2025.	51
Figura 27	Gráfico do modelo Cúbico para diferentes valores de β_3 com $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 2$ e $\beta_4 = 1$. Fonte: Da autora, 2025.	51
Figura 28	Gráfico do modelo Cúbico para diferentes valores de β_4 com $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 2$ e $\beta_3 = 1$. Fonte: Da autora, 2025.	52
Figura 29	Fluxograma geral do Método de Monte Carlo. Fonte: (Queiroz; Júnior; Jahn; Hahn; Fontana; Bolzan, 2013).	55
Figura 30	Localização do Município de Capão do Leão no Rio Grande do Sul. Fonte: Adaptado de (Portal dos Festivais, 2017).	64
Figura 31	Esquema do Método de Monte Carlo. Fonte: Da autora, 2025.	66
Figura 32	Boxplot da medida da órbita fetal por mês gestacional (5 ^o –11 ^o). Fonte: Da autora, 2025.	70
Figura 33	Modelos ajustados à variável órbita ao longo dos meses de gestação. Fonte: Da autora, 2025.	72
Figura 34	Comparação entre o modelo linear proposto por (Hartwig; Antunez; Dos santos; Lisboa; Pfeifer; Nogueira; Curcio, 2013) e o modelo Cúbico. Fonte: Da autora, 2025.	73
Figura 35	Resíduos do ajuste cúbico para a variável órbita. Fonte: Da autora, 2025.	74
Figura 36	Gráfico do ajuste Cúbico com Monte Carlo para a órbita. Fonte: Da autora, 2025.	76
Figura 37	Gráfico do ajuste cúbico com o método dos percentis por meio de Monte Carlo para a órbita. Fonte: Da autora, 2025.	78
Figura 38	Modelo cúbico ajustado à variável órbita ao longo dos meses de gestação para éguas específicas. Fonte: Da autora, 2025.	79
Figura 39	Gráfico box plot dos parâmetros da função cúbica para a órbita. Fonte: Da autora, 2025.	80
Figura 40	Boxplot da JUP por mês gestacional. Fonte: Da autora, 2025.	82
Figura 41	Modelos ajustados à variável JUP ao longo dos meses de gestação. Fonte: Da autora, 2025.	84

Figura 42	Resíduos do ajuste cúbico para a variável JUP. Fonte: Da autora, 2025.	85
Figura 43	Gráfico do ajuste cúbico com o método de Monte Carlo para a variável JUP. Fonte: Da autora, 2024.	86
Figura 44	Gráfico do ajuste Cúbico com intervalo de confiança pelo Método dos Percentis através do Método de Monte Carlo para a JUP. Fonte: Da autora, 2025.	88
Figura 45	Modelo cúbico ajustado à variável JUP ao longo dos meses de gestação para éguas específicas. Fonte: Da autora, 2025.	89
Figura 46	Gráfico box plot dos parâmetros da função cúbica para a variável JUP. Fonte: Da autora, 2025.	90
Figura 47	Tela inicial do aplicativo <i>EquiGest</i> . Da autora, 2025.	92
Figura 48	Formulário de entrada de dados para cálculo gestacional. Da autora, 2025.	93
Figura 49	Tela do banco de dados com histórico de avaliações e resultados. Da autora, 2025.	94
Figura 50	Tela de orientações de uso e ajuda do aplicativo <i>EquiGest</i> . Da autora, 2025.	95

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Valores médios da órbita ocular fetal (cm) em éguas da raça Crioula entre o 5 ^o e o 11 ^o mês de gestação.	69
Tabela 2	Estatísticas descritivas da órbita por mês gestacional (dados individuais).	70
Tabela 3	Postos médios e grupos homogêneos do pós-teste de Dunn para a órbita por mês gestacional.	71
Tabela 4	<i>DMA</i> , <i>DPR</i> e R^2 para a Órbita Ocular Fetal.	73
Tabela 5	Comparação entre os modelos Cúbico e Linear para estimativa da idade gestacional através da medida da órbita ocular fetal.	74
Tabela 6	Intervalo de confiança para pontos específicos (95%) para a variável órbita.	77
Tabela 7	Parâmetros estimados para a variável órbita.	79
Tabela 8	Valores da junção útero-placentária (JUP) para cada mês de gestação em éguas da raça Crioula.	81
Tabela 9	Estatísticas descritivas da JUP por mês gestacional (dados individuais).	82
Tabela 10	Postos médios e grupos homogêneos do pós-teste de Dunn para a JUP por mês gestacional ($\alpha = 0,05$).	83
Tabela 11	<i>DMA</i> , <i>DPR</i> e R^2 para a Junção Útero-Placentária (JUP).	85
Tabela 12	Intervalo de confiança para pontos específicos (95%) da JUP.	87
Tabela 13	Parâmetros estimados para a variável JUP.	89

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABCCC	Associação Brasileira dos Criadores de Cavalos Crioulos
ANOVA	<i>Analysis of variance</i> (Análise de Variância)
cm	Centímetro
<i>DMA</i>	Desvio Médio Absoluto
<i>DPR</i>	Desvio Padrão Residual
gl	Graus de Liberdade
H_0/H_1	Hipótese nula / Hipótese alternativa
IC	Intervalo de Confiança
IIQ	Intervalo Interquartil
JUP	Junção Útero-Placentária
LGN	Lei dos Grandes Números
LM	Método de Levenberg-Marquardt
MMC	Método de Monte Carlo
MMQ	Método dos Mínimos Quadrados
PDF	Função Densidade de Probabilidade
SQR	Soma dos Quadrados dos Resíduos
SQT	Soma Total dos Quadrados
TCL	Teorema Central do Limite
UFPeI	Universidade Federal de Pelotas
i.i.d.	Independentes e Identicamente Distribuídas
a, b, c, d	Coefficientes do modelo cúbico
\bar{x}	Média aritmética
\bar{y}	Média aritmética dos valores observados da variável dependente
β	Parâmetros estimados dos modelos
ϵ_i	Erro aleatório (resíduo)
n_i, n_j	Tamanho amostral dos grupos

\bar{R}_i, \bar{R}_j	Postos médios
n / N	Número de observações
$N(0, \sigma^2)$	Distribuição normal com média 0 e variância σ^2
α	Nível de significância
\hat{y}	Valor estimado pelo modelo
p	Valor p
R^2	Coeficiente de determinação
x_i	Valor observado da variável
\sum	Operador de somatório
σ	Desvio padrão
σ^2	Variância
W	Estatística W do Método de Shapiro-Wilk
H	Estatística H do teste de Kruskal–Wallis
Z_{ij}	Estatística do teste de Dunn

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Objetivos	19
1.1.1	Objetivo Geral	19
1.1.2	Objetivos Específicos	20
1.2	Estrutura do Trabalho	20
2	REFERENCIAL TEÓRICO	22
2.1	Cavalo Crioulo	22
2.2	Gestação Equina	22
2.2.1	Concepção	23
2.2.2	Fase Embrionária (0 a 39 dias)	23
2.2.3	Fase Fetal (do 40º dia até cerca do 280º dia)	24
2.3	Técnicas de Avaliação Ultrassonográfica	25
2.4	Parâmetros Obstétricos Equinos	28
2.4.1	Medida da Órbita Ocular Fetal	28
2.4.2	Medida da Junção Útero-Placentária	30
2.5	Modelos Matemáticos para Estimativa da Idade Gestacional na Literatura	31
3	MATERIAIS E MÉTODOS	34
3.1	População e Amostra	34
3.2	Avaliação dos Pressupostos Estatísticos	34
3.2.1	Teste de Shapiro-Wilk	34
3.2.2	Teste de Kruskal-Wallis	35
3.2.3	Teste de Dunn	36
3.3	Modelos de Crescimento	37
3.3.1	Logístico	37
3.3.2	Gompertz	41
3.3.3	Chanter	43
3.3.4	Von Bertalanffy	47
3.4	Modelo Polinomial Cúbico	49
3.5	Métodos Estatísticos Aplicados	52
3.5.1	Cálculo dos Resíduos	52
3.5.2	Monte Carlo	53
3.5.3	Percentis	55
3.6	Ajuste de Curvas e Estimativa dos Parâmetros	57
3.6.1	Método dos Mínimos Quadrados	57

3.6.2	Método de Levenberg-Marquardt	60
3.7	Métricas Estatísticas para Análise dos Ajustes	62
3.7.1	Coeficiente de Determinação (R^2)	62
3.7.2	Desvio Médio Absoluto Residual	63
3.7.3	Desvio Padrão Residual	63
3.8	Descrição e Coleta de Dados	64
3.9	Implementação Computacional	65
4	ANÁLISE E RESULTADOS	68
4.1	Órbita Ocular Fetal	68
4.2	Junção Útero-Placentária	81
5	APLICATIVO	91
5.0.1	Funcionamento geral do aplicativo	91
5.0.2	Entrada de dados e cálculo gestacional	92
5.0.3	Banco de dados e histórico de avaliações	93
5.0.4	Seção de ajuda e orientações de uso	95
5.0.5	Considerações finais e limitações	95
6	CONCLUSÕES	96
	REFERÊNCIAS	99

1 INTRODUÇÃO

O Brasil ocupa a 4ª posição mundial em relação ao tamanho do rebanho de cavalos (Conselho Regional de Medicina Veterinária da Paraíba, 2023), ficando atrás apenas da China, México e Estados Unidos (Globo Rural, 2023). O setor movimenta aproximadamente R\$ 30 bilhões anuais em produção equina (Globo Rural, 2023; Conselho Regional de Medicina Veterinária da Paraíba, 2023). No contexto latino-americano, o país é líder, com cerca de 8 milhões de animais (Associação Brasileira dos Criadores de Jumento Pêga, 2025). Entre as diversas raças presentes no território nacional, a Crioula destaca-se na região Sul, representando 86,41% dos equinos dessa categoria no Brasil. São aproximadamente 135 mil animais distribuídos em 23 estados, segundo dados da Associação Brasileira dos Criadores de Cavalo Crioulo (ABCCC) (Governo do Estado do Rio Grande do Sul, 2024).

Além da relevância genética e funcional da raça, o setor apresenta impacto econômico expressivo. De acordo com dados atualizados, a movimentação financeira gerada pela raça Crioula alcançou cerca de R\$ 400 milhões de reais em 2024, com projeção de crescimento para R\$ 500 milhões (Governo do Estado do Rio Grande do Sul, 2024). Apenas em leilões e comercializações diretas, foram negociados quase 5 mil animais. Assim, a raça Crioula representa não apenas um patrimônio cultural do Rio Grande do Sul, mas também um importante vetor econômico, gerando empregos e fortalecendo a socioeconomia regional. Nesse contexto, torna-se cada vez mais relevante o interesse por alternativas que reduzam perdas reprodutivas e aumentem a eficiência no manejo.

No manejo reprodutivo das éguas Crioulas, a estimativa da idade gestacional é fundamental para garantir o acompanhamento adequado do desenvolvimento fetal e a preparação de um ambiente propício para o parto, incluindo planejamento nutricional, protocolos de vacinação e medidas que assegurem a produção de colostro de qualidade, fundamental para a absorção de anticorpos essenciais à imunidade do potro nas primeiras horas de vida (Hartwig; Antunez; Dos santos; Lisboa; Pfeifer; Nogueira; Curcio, 2013). A prática de monta natural em manada é comum, o que dificulta a determinação da data exata de ovulação e, conseqüentemente, a detecção precoce da

gestação (Hartwig; Antunez; Dos santos; Lisboa; Pfeifer; Nogueira; Curcio, 2013).

Atualmente, o método padrão para estimar a idade gestacional para éguas em monta natural, baseia-se na mensuração do diâmetro da órbita ocular fetal. No entanto, a obtenção dessa medida depende do posicionamento do feto e acesso da órbita fetal mediamente a palpação transretal. Como medida complementar, avaliou-se utilizar a espessura da junção útero-placentária (JUP), por ser uma estrutura de mensuração mais acessível e menos dependente da visualização fetal. Entretanto, neste estudo, os resultados evidenciaram elevada variabilidade dessa medida, sendo, portanto considerada como parâmetro auxiliar voltado à avaliação da condição placentária ao longo da gestação. O procedimento que permite essas medições é denominado exame ultrassonográfico transretal, realizado com transdutor linear, e fornece informações relevantes ao acompanhamento reprodutivo. No entanto, é importante ressaltar, que o uso dessa técnica demanda tempo, treinamento especializado e equipamentos específicos. Diante dessas limitações, modelos matemáticos foram utilizados para descrever e prever a relação entre o diâmetro da órbita ocular fetal e os meses de gestação em éguas mestiças Crioulas, bem como para caracterizar o comportamento da JUP ao longo do período gestacional como informação complementar de monitoramento. Embora tais limitações permaneçam, os modelos propostos permitem estimar a idade gestacional a partir dessas medidas biométricas.

Para isso, foram empregados os modelos não lineares Logístico, Gompertz, Chanter e Von Bertalanffy, comumente utilizados em estudos de curvas de crescimento (Silva, 2018; Mazzini, 2001), além do modelo polinomial cúbico, amplamente utilizado para capturar comportamentos mais complexos, como mudanças na taxa de crescimento ou decréscimo ao longo da gestação.

A avaliação da qualidade dos ajustes dos modelos aos dados observados foi realizada com base nas métricas estatísticas: desvio médio absoluto (DMA) dos resíduos, desvio padrão residual (DPR) e o coeficiente de determinação (R^2). Adicionalmente, foi realizada uma análise estocástica com o uso do Método de Monte Carlo (MMC), possibilitando a quantificação das incertezas no ajuste e a criação de uma região de confiança ao redor da curva ajustada. Com o novo conjunto de dados gerado pelo MMC, aplicou-se o método dos percentis para a construção dos intervalos de confiança para cada mês gestacional.

A principal proposta deste trabalho é encontrar um modelo que descreva de forma mais adequada a relação entre o diâmetro da órbita ocular fetal e os meses de gestação, superando o modelo linear tradicionalmente utilizado na literatura. Adicionalmente, busca-se caracterizar a variação da espessura da junção útero-placentária (JUP) ao longo da gestação em éguas Crioulas, discutindo seu potencial como parâmetro auxiliar no acompanhamento da condição placentária. Espera-se, com isso, contribuir com profissionais da área veterinária e criadores de equinos ao oferecer uma

modelagem mais consistente para a estimativa gestacional baseada na órbita, além de informações complementares para o monitoramento reprodutivo. Após a definição do modelo aplicado à órbita e dos intervalos de confiança associados, propõe-se o desenvolvimento de um aplicativo que automatize os cálculos e padronize a apresentação das estimativas, facilitando a aplicação em campo.

Diante das limitações dos métodos tradicionais de estimativa gestacional, como a dependência da experiência do examinador, a variabilidade biológica entre fetos, a redução da precisão em estágios mais avançados, e da necessidade de modelos mais adequados à realidade da prática veterinária, a presente pesquisa busca responder à seguinte questão norteadora: **Como aplicar e avaliar modelos matemáticos para estimar os meses de gestação em éguas da raça Crioula a partir do diâmetro da órbita ocular fetal, quantificando incertezas, e de que forma a variação da JUP ao longo da gestação pode contribuir como parâmetro auxiliar no acompanhamento da saúde placentária?**

Essa questão constitui o eixo central da investigação e traduz a busca por métodos preditivos capazes de aprimorar a acurácia na determinação do período gestacional, favorecendo um manejo mais eficiente e saudável das éguas Crioulas.

A formulação dessa problemática está ancorada na necessidade prática de aperfeiçoar os instrumentos de monitoramento reprodutivo, oferecendo estimativas mais consistentes com a raça estudada. Ao integrar variáveis biológicas específicas e relevantes, pretende-se identificar padrões mensuráveis e representá-los matematicamente por meio de modelos adequados ao conjunto de dados.

A seguir, são apresentados os objetivos gerais e específicos do trabalho.

1.1 Objetivos

Esta seção apresenta os objetivos que norteiam o desenvolvimento desta dissertação, organizados em objetivo geral e objetivos específicos. O objetivo geral expressa a finalidade central da pesquisa, enquanto os objetivos específicos detalham as etapas metodológicas necessárias para alcançar esse propósito. A formulação desses objetivos estabelece uma base científica sólida para o desenvolvimento de ferramentas práticas que auxiliem no manejo reprodutivo de equinos.

1.1.1 Objetivo Geral

Propor, validar e aplicar modelos matemáticos e estatísticos para estimar os meses de gestação em éguas da raça Crioula a partir do diâmetro da órbita ocular fetal, e caracterizar a variação da espessura da junção útero-placentária (JUP) ao longo do período gestacional como apoio ao monitoramento da condição placentária, utilizando modelos não lineares e o modelo polinomial cúbico, com procedimentos de quantifica-

ção de incertezas, visando aprimorar a precisão das estimativas.

1.1.2 Objetivos Específicos

1. Organizar e descrever as mensurações ultrassonográficas do diâmetro da órbita ocular fetal e da JUP entre o 5^o e o 11^o mês gestacional em éguas da raça Crioula;
2. Ajustar e comparar modelos de crescimento não lineares (Logístico, Gompertz, Von Bertalanffy e Chanter), estimando os parâmetros pelo Método dos Mínimos Quadrados por meio do método iterativo de Levenberg-Marquardt, a fim de descrever a evolução das variáveis ao longo da gestação;
3. Ajustar e avaliar o modelo polinomial cúbico para descrever a evolução das variáveis ao longo da gestação, comparando seu desempenho com os modelos não lineares;
4. Selecionar o modelo mais adequado com base em métricas de desempenho (DMA , DPR , R^2);
5. Quantificar incertezas associadas às estimativas por simulação de Monte Carlo e obter intervalos de confiança pelo método dos percentis;
6. Validar estatisticamente os modelos ajustados por meio de análise residual;
7. Caracterizar o comportamento da JUP ao longo dos meses gestacionais e estabelecer faixas de referência para apoio ao monitoramento placentário em função da idade estimada pela órbita;
8. Comparar os resultados obtidos com evidências da literatura, destacando convergências e contribuições do estudo;
9. Desenvolver um aplicativo para celular que implemente o modelo selecionado para a órbita e disponibilize a interpretação da JUP por faixas de referência, com interface acessível para uso em campo;

1.2 Estrutura do Trabalho

A presente dissertação está estruturada em seis capítulos. O Capítulo 1 apresenta a introdução geral do trabalho, contextualizando o tema e destacando a relevância da pesquisa. São expostos o objetivo geral, os objetivos específicos, bem como a justificativa do estudo e o delineamento das metas a serem alcançadas.

O Capítulo 2 aborda a fundamentação teórica que sustenta o estudo. Incluindo uma revisão da literatura sobre as fases da gestação equina, aspecto fundamental

para compreender as técnicas empregadas. Também são discutidos os procedimentos ultrassonográficos utilizados para a obtenção das duas principais variáveis analisadas: o diâmetro da órbita ocular fetal e a espessura da junção útero-placentária (JUP). Além disso, realiza-se uma análise com o intuito de identificar métodos e modelos já aplicados à estimativa da idade gestacional em equinos.

O Capítulo 3 corresponde à seção de Materiais e Métodos. Inicialmente, realiza-se uma análise exploratória do conjunto de dados, incluindo a avaliação de pressupostos e a aplicação de testes inferenciais, como o teste de normalidade de Shapiro–Wilk e procedimentos de comparação entre meses gestacionais, por meio do teste de Kruskal–Wallis nos dados brutos, seguido do pós-teste de Dunn. Na sequência, são apresentados os cinco modelos matemáticos utilizados para descrever a curva de ajuste aos dados observacionais: Logístico, Gompertz, Chanter, Von Bertalanffy e Cúbico, acompanhados dos procedimentos estatísticos empregados para avaliar a qualidade do ajuste, como desvio médio absoluto (*DMA*), desvio padrão (*DPR*) e coeficiente de determinação (R^2). O capítulo contempla ainda técnicas avançadas, como a simulação de Monte Carlo e o método dos percentis, para a análise das incertezas, além da abordagem de mínimos quadrados adotada na estimação dos parâmetros.

O Capítulo 4 apresenta a análise dos resultados, organizados separadamente para a órbita e para a JUP, detalhando os ajustes e as respectivas interpretações.

No Capítulo 5 é apresentado o aplicativo para celular desenvolvido com o intuito de integrar os modelos propostos e automatizar os cálculos, auxiliando a aplicação prática.

O Capítulo 6 reúne as conclusões e perspectivas futuras do trabalho, destacando o modelo que apresentou o melhor ajuste aos dados observacionais e discutindo suas implicações práticas para a estimativa da idade gestacional em éguas Crioulas.

Por fim, apresentam-se as referências bibliográficas que serviram de base teórica e metodológica para o desenvolvimento desta pesquisa.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Cavalo Crioulo

O cavalo Crioulo constitui um dos principais símbolos da cultura gaúcha, sendo reconhecido pela sua relevância histórica e funcional. Sua origem remonta aos cavalos espanhóis das raças Jaca e Andaluz, trazidos para a América do Sul no século XVII (Agron, 2025). Ao longo dos séculos, o processo de seleção natural, aliado às práticas de manejo desenvolvidas na região Sul, resultou em animais rústicos, resistentes e altamente adaptados a diferentes condições ambientais. A raça Crioula possui um sistema de criação mais extensivo, nos quais ainda se utiliza a monta natural em manada, prática menos comum em outras raças, o que dificulta saber a idade gestacional das éguas e conseqüentemente a previsão exata do parto.

Do ponto de vista morfológico, os cavalos Crioulos caracterizam-se como animais de porte médio, com altura média aproximada de 1,45 metros e peso que pode ultrapassar 450 kg (Agron, 2025). Essas características físicas, somadas à rusticidade, resistência e longevidade, consolidam a raça como um recurso genético estratégico para a equinocultura brasileira e latino-americana. A raça Crioula, adaptada às condições climáticas e ambientais do sul do Brasil, apresenta características morfofisiológicas próprias que a diferenciam de outras raças de cavalos, justificando a necessidade de estudos específicos direcionados a essa população (Lau; Lisboa; Dos santos; Hartwig; Curcio, 2010).

2.2 Gestação Equina

A gestação em éguas apresenta duração média entre 320 e 360 dias (Curcio; Silva; Scalco, 2021), podendo ser dividida em três terços gestacionais. Do ponto de vista do desenvolvimento, a literatura clássica (Ginther, 1998), distingue as fases em concepção, período embrionário e período fetal.

- **Concepção:** A concepção ocorre quando há a fecundação do óvulo pelo espermatozoide, marcando o início da gestação.

- **Período Embrionário (até cerca de 39 dias):** Abrange a fecundação, formação do blastocisto, mobilidade uterina, reconhecimento materno da gestação e fixação embrionária. Corresponde à fase mais crítica, responsável pela maioria das perdas gestacionais precoces.
- **Período Fetal (do 40º dia até aproximadamente o 280º dia):** Nesta fase, observa-se o crescimento e a diferenciação dos tecidos fetais. Estruturas como a junção útero-placentária (JUP) e a órbita ocular já se mostram desenvolvidas, podendo ser mensuradas por meio de exames ultrassonográficos.

A estimativa da idade gestacional na espécie equina, especialmente nas fases iniciais, exige uma compreensão detalhada dos eventos fisiológicos que ocorrem logo após a concepção. Nos primeiros dias da gestação, o embrião passa por transformações significativas, cruciais para o desenvolvimento fetal subsequente. Cada fase apresenta características fisiológicas e morfológicas próprias, que impactam diretamente o desenvolvimento do feto e, conseqüentemente, dos parâmetros utilizados para estimar a idade gestacional. Assim, compreender as peculiaridades da gestação equina permite realizar avaliações mais precisas da idade gestacional e adotar estratégias de manejo reprodutivo que minimizem perdas (Wenzen, 2019).

2.2.1 Concepção

Os equinos apresentam um padrão reprodutivo sazonal, com maior atividade durante os dias longos da primavera e do verão (Aurich, 2011). Nessa fase, o ciclo estral (cio) das éguas é caracterizado pela alternância entre períodos de receptividade e não receptividade ao garanhão. Esse período possui duração média de 12 dias dentro de um ciclo estral de aproximadamente 21 dias, o que torna necessária a realização de testes de receptividade a cada 48 horas (Ginther, 1992).

A ovulação ocorre nas últimas 24 a 48 horas do ciclo estral, e o óvulo permanece viável para fecundação por até 48 horas após sua liberação (Allen, 1984). Em condições de manejo com menor controle reprodutivo, a determinação precisa do momento da cobertura e da ovulação pode ser limitada, o que reforça a necessidade de modelos para estimativa do período gestacional ao longo da gestação.

2.2.2 Fase Embrionária (0 a 39 dias)

Após a fecundação, o zigoto passa por divisões sucessivas até atingir os estágios de mórula (entre 4 a 5 dias) e, posteriormente, de blastocisto (6º a 7º dia), quando o embrião atinge o útero (Ginther, 1992). Na prática clínica, a gestação pode ser acompanhada por ultrassonografia desde o início, onde a vesícula embrionária pode ser identificada por ultrassonografia a partir do 9º dia, sendo o diagnóstico de gestação geralmente realizado no 12º dia. A fixação embrionária ocorre em média no 16º dia

pós-ovulação, quando a vesícula, até então esférica e móvel, passa a permanecer estática, marcando uma etapa decisiva da gestação (Ginther, 1995).

2.2.3 Fase Fetal (do 40º dia até cerca do 280º dia)

A partir do 40º dia de gestação tem início o processo de calcificação do esqueleto fetal, marcando a transição para a fase fetal (Franciulli; Cordeiro; Fonseca; Rodrigues; Sarmiento; Ambrosio; Carvalho; Miglino; Silva, 2011). Nos meses seguintes, observa-se maior mobilidade intrauterina, favorecida pelo espaço uterino disponível e pelo volume de fluido, o que pode influenciar a visualização de estruturas fetais. Com o avanço da gestação, o crescimento fetal reduz o espaço intrauterino e tende a estabilizar o posicionamento, favorecendo avaliações biométricas. No 100º dia, o feto ainda é móvel dentro do útero (Figura 1), isso pela quantidade de fluído alantoide e pelo feto ainda não ocupar completamente a cavidade uterina (Ginther, 1998).

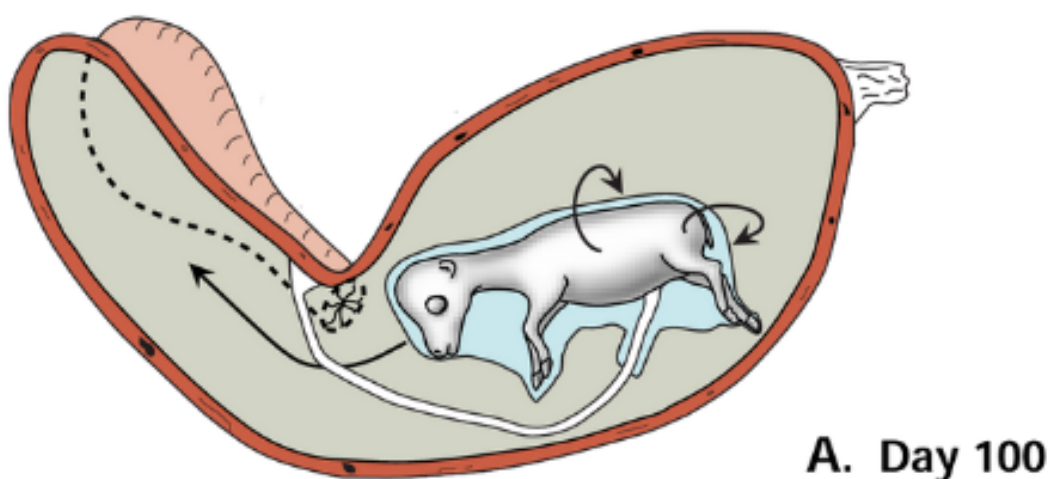


Figura 1 – Feto no 100º dia de gestação. Fonte: (Ginther, 1998).

A partir do 4º mês, o crescimento fetal reduz o espaço intrauterino, diminuindo a amplitude dos movimentos, embora a atividade motora ainda se mantenha presente (Ginther, 1998). Por volta do 190º dia, o feto assume uma posição cranial (Figura 2), ou seja, com a cabeça voltada para o colo uterino, permanecendo confinado no corpo uterino enquanto os cornos se mantêm fechados (Ginther, 1998). Essa configuração indica maior estabilização do posicionamento fetal com menor variação espacial quando comparada aos meses anteriores.

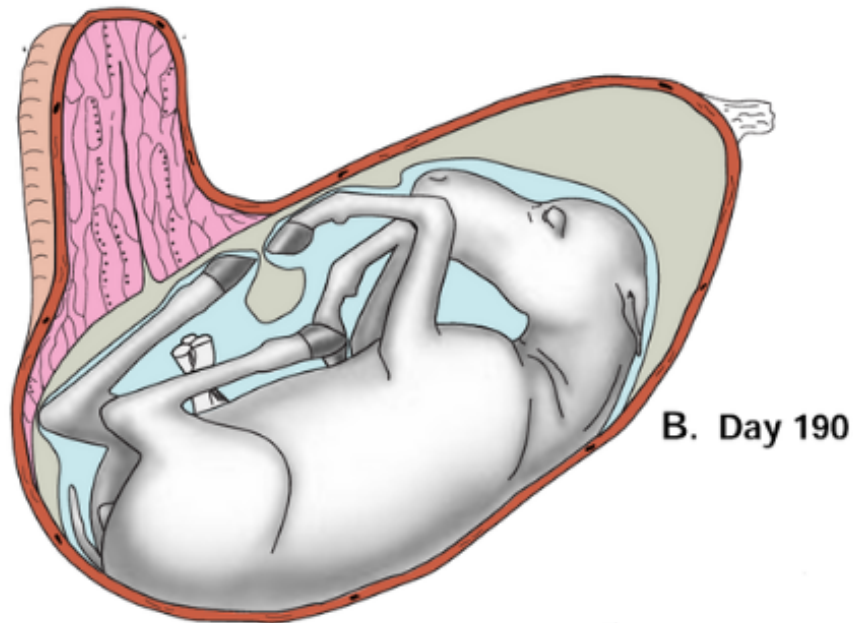


Figura 2 – Feto no 190º dia de gestação. Fonte: (Ginther, 1998).

Na etapa final da gestação, os membros posteriores do feto passam a ocupar um dos cornos uterinos (Figura 3), enquanto as membranas placentárias que recobrem essa região deixam de ser visíveis nos exames ultrassonográficos (Ginther, 1998).

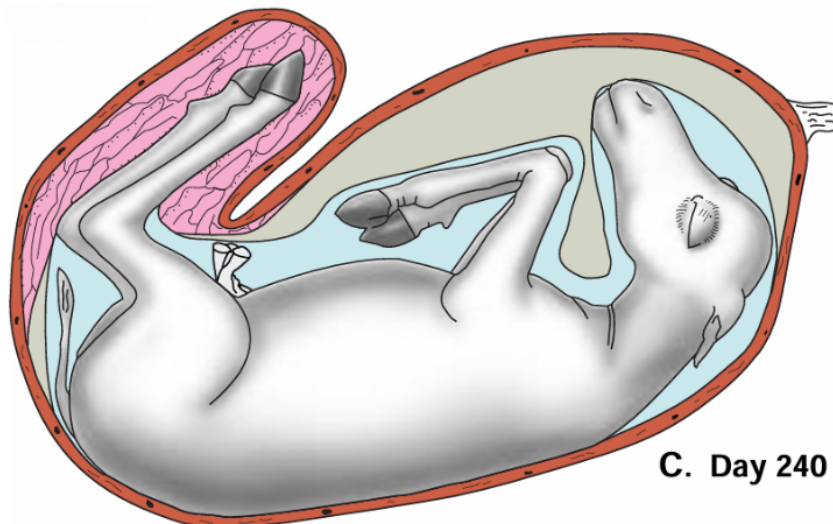


Figura 3 – Feto no 240º dia de gestação. Fonte: (Ginther, 1998).

Essa configuração anatômica é típica da fase final da gestação e favorece a posição adequada para o parto.

2.3 Técnicas de Avaliação Ultrassonográfica

Como descrito por (Ginther, 1998), até o 4º mês de gestação o feto equino apresenta elevada mobilidade intrauterina, favorecida pelo volume de líquido alantoide,

pelo comprimento do cordão umbilical e pelo espaço uterino disponível. Nessa fase, o feto muda frequentemente de posição.

Após esse período, o crescimento fetal associado à reorganização anatômica do útero reduz progressivamente o espaço intrauterino, limitando a mobilidade do feto (Ginther, 1998). Essa restrição espacial favorece a estabilização do feto em apresentação craniana, considerada a posição ideal para o parto. Por esse motivo, a ultrassonografia transretal, com o objetivo de realizar a mensuração da órbita ocular fetal e da espessura da junção útero-placentária (JUP), é preferencialmente utilizada a partir do 5º mês de gestação, pela maior estabilidade fetal e pelo desenvolvimento das estruturas biométricas serem passíveis de mensuração a partir desse período. Entretanto, recomenda-se, na prática clínica, a realização de exames obstétricos mensais desde os 30 dias de gestação até o parto, visando o acompanhamento contínuo do desenvolvimento fetal.

É importante destacar que a estimativa da idade gestacional, e conseqüentemente a data aproximada do nascimento do potro, é decisiva para realizar o monitoramento adequado do parto (Curcio; Silva; Scalco, 2021). Para isso, além dos modelos matemáticos de predição, devem-se considerar também sinais fisiológicos e comportamentais maternos que indicam a proximidade do parto.

Para obtenção das medidas biométricas via transretal, utiliza-se um transdutor linear de média frequência, geralmente entre 5 e 7,5 MHz, capaz de captar imagens com boa definição (Turner; Mcdonnell; Feit; Grogan; Foglia, 2006). A realização do exame requer contenção física adequada da égua, de modo a garantir a segurança tanto do animal quanto do operador. Em seguida, procede-se ao esvaziamento manual do reto, utilizando luvas descartáveis e lubrificante, com o objetivo de remover o conteúdo fecal e possibilitar melhor acesso à cavidade uterina por via transretal (Hartwig; Antunez; Dos santos; Lisboa; Pfeifer; Nogueira; Curcio, 2013).

As Figuras 4 e 5 ilustram, respectivamente, o procedimento de contenção da égua e o processo de obtenção da imagem ultrassonográfica.



Figura 4 – Contenção da égua e esvaziamento do reto. Fonte: Da autora, 2024.



Figura 5 – Introdução do transdutor linear e obtenção das medidas ultrassonográficas. Fonte: Da autora, 2024.

Diante do exposto, a obtenção precisa da medida da órbita fetal representa uma

estratégia eficaz para estimar a idade gestacional em éguas, uma vez que apresenta crescimento progressivo e relativamente previsível ao longo da gestação. Os parâmetros analisados possibilitam a formulação de modelos matemáticos aplicáveis ao acompanhamento clínico, subsidiando decisões em campo e contribuindo para a melhoria dos índices reprodutivos. Dessa forma, a ultrassonografia consolida-se como ferramenta essencial no manejo gestacional, combinando praticidade, segurança e confiabilidade diagnóstica.

2.4 Parâmetros Obstétricos Equinos

2.4.1 Medida da Órbita Ocular Fetal

Nas fases iniciais da gestação, até aproximadamente 70 dias, a combinação da avaliação do tamanho e da assimetria uterina por palpação transretal, associada ao exame ultrassonográfico do concepto, possibilita uma estimativa mais precisa da idade gestacional (Turner; McDonnell; Feit; Grogan; Foglia, 2006). No entanto, à medida que o feto cresce e se desloca em direção à cavidade abdominal, a obtenção dessas medidas torna-se mais difícil. Nessas circunstâncias, especialmente durante as fases intermediária e final da gestação, utiliza-se com maior frequência ultrassonografia transabdominal com transdutor convexo, voltada à mensuração de estruturas fetais, como o diâmetro da órbita fetal. Entretanto, esse método demanda maior tempo de execução, profissionais experientes e equipamentos ultrassonográficos especializados, os quais nem sempre estão disponíveis para veterinários de campo (Turner; McDonnell; Feit; Grogan; Foglia, 2006).

A medição da órbita ocular fetal por via transretal constitui a técnica mais difundida para estimativa da idade gestacional, destacando-se por sua praticidade, rapidez e confiabilidade (Lau; Lisboa; Dos santos; Hartwig; Curcio, 2010; Turner; McDonnell; Feit; Grogan; Foglia, 2006). Diversos estudos demonstram uma correlação estatisticamente significativa entre o diâmetro da órbita ocular e o tempo de gestação, reforçando seu potencial como ferramenta diagnóstica na determinação da idade fetal.

A mensuração do diâmetro da órbita ocular fetal deve ser realizada paralelamente ao cristalino. Para obtenção da medida, utiliza-se um transdutor linear de aproximadamente 7,5 MHz, introduzido via transretal, sendo posicionado ao longo do útero e varrido da esquerda para a direita, iniciando-se na região da cérvis e avançando progressivamente em direção ao crânio até que a órbita seja encontrada (Turner; McDonnell; Feit; Grogan; Foglia, 2006). Após sua localização, a imagem é congelada e a mensuração realizada (Hartwig; Antunez; Dos santos; Lisboa; Pfeifer; Nogueira; Curcio, 2013).

As Figuras 6 e 7 apresentam a imagem capturada no monitor do aparelho ultrassonográfico com a mensuração da órbita ocular fetal e um esquema anatômico corres-

pondente, respectivamente.

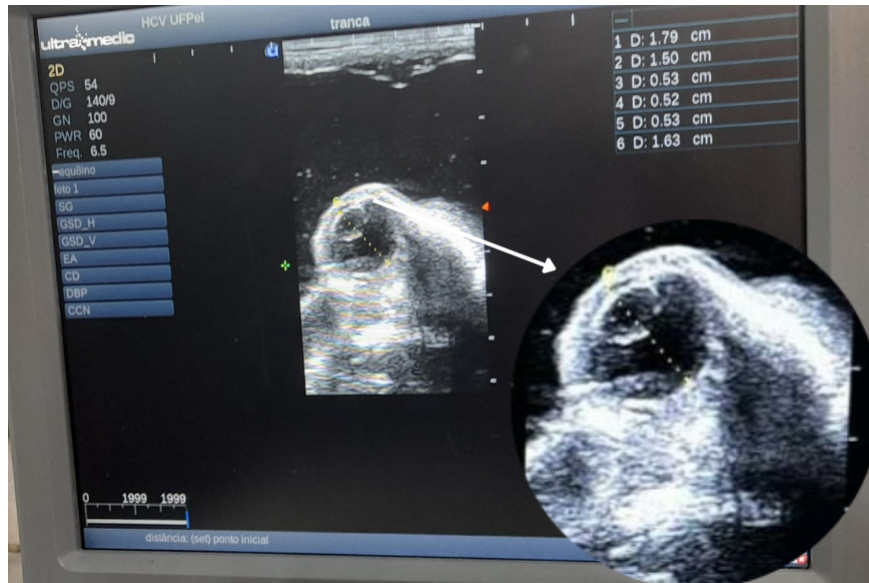


Figura 6 – Imagem ultrassonográfica da órbita ocular fetal com medição realizada. Fonte: Da autora, 2024.

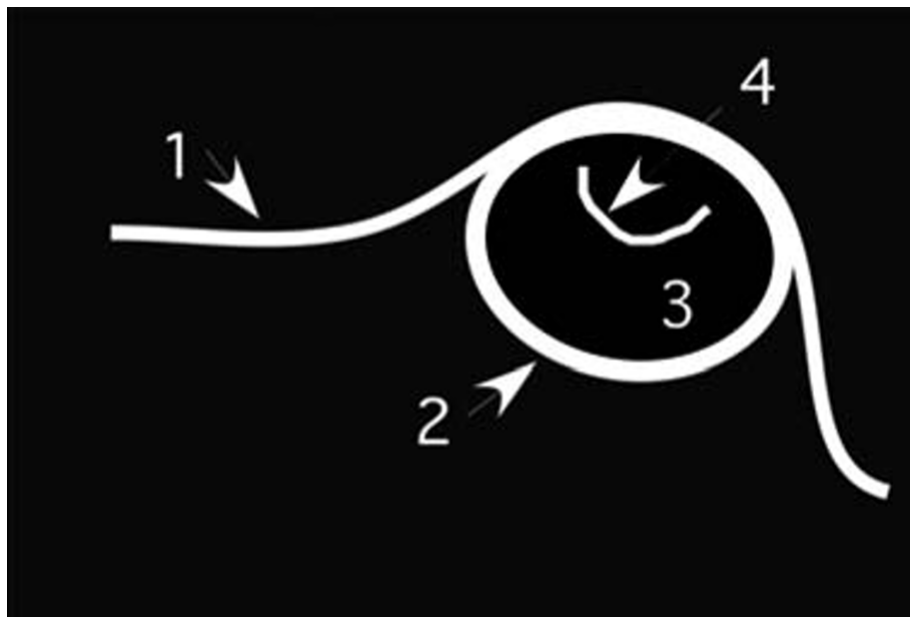


Figura 7 – Representação esquemática das estruturas anatômicas visualizadas: (1) crânio, (2) órbita óssea, (3) corpo vítreo e (4) cristalino. Fonte: (Turner; Mcdonnell; Feit; Grogan; Foglia, 2006).

A órbita ocular fetal possui características ecográficas bem definidas, o que facilita sua identificação. Na primeira metade da gestação, a imagem sagital apresenta-se como uma estrutura anecogênica, de contorno aproximadamente circular, enquanto na segunda metade esse formato tende a tornar-se mais oval (Turner; Mcdonnell; Feit; Grogan; Foglia, 2006).

O uso da órbita ocular fetal como parâmetro para estimar a idade gestacional é vantajoso por apresentar menor influência de variáveis maternas. Conforme apontado por (Turner; Mcdonnell; Feit; Grogan; Foglia, 2006), fatores como paridade e condição corporal da égua influenciam significativamente no peso do potro ao nascer, mas não exercem impacto estatisticamente relevante sobre o diâmetro do olho fetal. Esses resultados indicam que, embora variáveis maternas possam afetar no desenvolvimento ponderal do neonato, o crescimento do olho fetal apresenta padrão mais estável e previsível ao longo da gestação. Assim, a medição da órbita ocular constitui um parâmetro confiável e relativamente independente de fatores externos, sendo especialmente útil para a determinação da idade gestacional em equinos.

2.4.2 Medida da Junção Útero-Placentária

A junção útero-placentária (JUP) corresponde à região de contato entre o útero e a membrana córion-alantoide da placenta, desempenhando papel fundamental na transferência de nutrientes entre a égua e o feto (Matta, 2013). A avaliação ultrassonográfica dessa estrutura tem grande importância no monitoramento de anomalias na gestação, uma vez que alterações na espessura da JUP podem indicar comprometimentos na integridade da unidade feto-placentária, como processos inflamatórios (placentites) ou outras disfunções, caracterizando gestações de alto risco.

A placenta da égua apresenta-se como epiteliocorial difusa, composta por seis camadas (Pozor, 2016). Estudos indicam que éguas primíparas (de primeira cria) tendem a apresentar maiores valores de espessura da JUP em comparação àquelas que já tiveram dois ou mais partos (Hendriks; Colenbrander; VAN DER WEIJDEN; Stout, 2009).

A mensuração da JUP pode ser realizada de forma semelhante à mensuração da órbita, por meio de ultrassonografia transretal com transdutor linear de 7,5 MHz. O procedimento requer contenção adequada da égua e esvaziamento do reto, posteriormente, o veterinário deve alinhar o transdutor com a região da cérvix uterina e avança em direção cranial até a região do corpo uterino, local onde a interface útero-placentária se torna mais evidente (Curcio; Wendt; Silva; Nogueira, 2019).

Na Figura 8, é possível identificar a imagem correspondente à artéria uterina e, adjacente a ela e ao fluido alantoideano, observa-se uma região hiperecogênica homogênea, a qual representa a união entre o endométrio e o alantocórion, conhecida como junção útero-placentária (JUP) (Santos; Curcio; Dallo; Thier; Dallmann; Nogueira, 2024)(Figura 8A). Após a identificação da estrutura, a imagem deve ser congelada e, sempre que possível, realizam-se três medições consecutivas para o cálculo da média (Santos; Curcio; Dallo; Thier; Dallmann; Nogueira, 2024), conforme demonstrado na (Figura 8B). A ultrassonografia Doppler em modo colorido pode auxiliar na identificação da artéria uterina, facilitando a delimitação do ponto inicial para a men-

suração da JUP (Santos; Curcio; Dallo; Thier; Dallmann; Nogueira, 2024), conforme ilustrado na (Figura 8C).

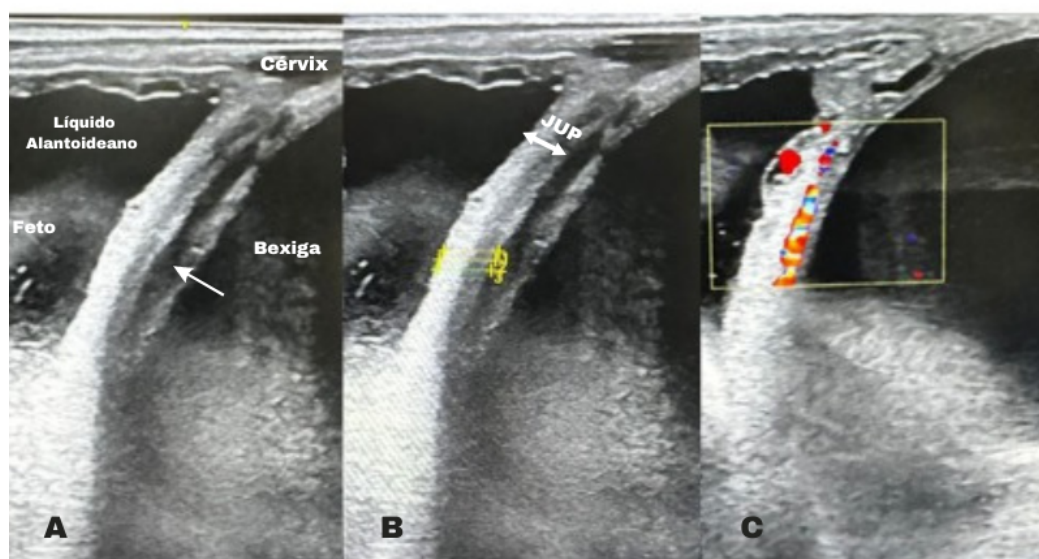


Figura 8 – Exame ultrassonográfico da junção útero-placentária (JUP). A imagem A mostra a artéria uterina e a JUP, enquanto na imagem B, em amarelo, pode-se observar a metodologia utilizada para medir a JUP e a imagem C mostra a utilização do doppler colorido para identificar e delimitar melhor a artéria uterina. Fonte: (Santos; Curcio; Dallo; Thier; Dallmann; Nogueira, 2024).

De acordo com (Troedsson; Sage, 2001), a espessura da JUP deve ser mensurada entre o meio do ramo da artéria uterina e o fluido alantoide. Pesquisas demonstram que a estrutura apresenta crescimento relativamente constante nos primeiros meses, com maior incremento ao final da gestação. Segundo (Renaudin, 2017), os valores esperados da espessura da JUP são inferiores a 8 mm entre 270 e 300 dias, inferiores a 10 mm entre 301 e 330 dias e inferiores a 12 mm após 330 dias de gestação.

2.5 Modelos Matemáticos para Estimativa da Idade Gestacional na Literatura

Na raça Crioula, a cobertura em rebanhos é uma prática comum em fazendas de criação de equinos, o que dificulta a determinação da data exata de ovulação e a detecção precoce da gestação. De acordo com estudos clássicos, como o de (Hartwig; Antunez; Dos santos; Lisboa; Pfeifer; Nogueira; Curcio, 2013), a estimativa da idade gestacional baseada no diâmetro da órbita ocular fetal tem sido tradicionalmente realizada por meio de modelos de regressão linear. Os autores analisaram 164 mensurações obtidas em 124 éguas, com idades gestacionais variando entre 119 e 341 dias, e relataram um padrão de crescimento linear até 341 dias de gestação. Nessa pesquisa, o modelo apresentou alto coeficiente de determinação ($R^2 = 0,985$), indicando que

aproximadamente 98,5% da variação observada foi explicada pela regressão, configurando um ajuste estatisticamente satisfatório. O estudo também observou diferenças entre a raça Crioula e os chamados cavalos leves no que se refere às dimensões e ao comportamento de crescimento da órbita ocular fetal. Essa distinção dificilmente pode ser atribuída apenas ao porte do animal, já que os Crioulos, em geral, apresentam menor tamanho e menor massa corporal quando comparados aos cavalos leves. Assim, variações anatômicas, como medidas oculares e características cranianas, podem estar relacionadas aos resultados encontrados. Além disso, comparações entre outras raças também apontam divergências desse tipo, o que sugere influência de aspectos morfológicos e de processos seletivos próprios de cada população.

De forma semelhante, (Fornari; Finger; Kickhofel; Roman; Almeida; Curcio, 2014) aplicou um modelo linear para relacionar o diâmetro da órbita ocular fetal com os meses de gestação em éguas mestiças Crioulas, avaliando 14 éguas gestantes. Contudo, obteve-se um coeficiente de determinação inferior ($R^2 = 0,61$) para os dados analisados. Embora esse resultado indique certo nível de correlação, ele sugere uma capacidade explicativa limitada do modelo. Nessa perspectiva, utilizar mais de uma medida fetal na ultrassonografia, como a aorta fetal e a órbita ocular, podem contribuir para acompanhar melhor o crescimento durante a gestação (Fornari; Finger; Kickhofel; Roman; Almeida; Curcio, 2014). Como cada estrutura pode crescer em ritmos diferentes, combinar essas medidas tende a aumentar a robustez da estimativa da idade gestacional e reduz a chance de erro quando se utiliza apenas um parâmetro.

A análise gráfica realizada pelos autores evidenciou um crescimento linear do 5º ao 9º mês de gestação. Entretanto os meses finais não foram avaliados neste estudo, e é nesse período que o padrão de crescimento tende a se afastar da linearidade.

Embora o agronegócio equino brasileiro tenha relevância amplamente reconhecida, ainda são limitadas as pesquisas científicas dedicadas a cavalos da raça Crioula. Os achados disponíveis reforçam a necessidade de análises específicas por raça, buscando-se um modelo capaz de descrever as características próprias de cada população estudada.

Em um estudo de maior abrangência utilizando pôneis (Turner; McDonnell; Feit; Grogan; Foglia, 2006), utilizou a largura e o comprimento do olho fetal. Entre essas variáveis, o comprimento apresentou melhor desempenho como preditor único dos dias restantes até o parto. Embora a largura também se associe a essa estimativa, ela é fortemente correlacionada ao comprimento e não melhora de forma relevante a predição. Assim, medir apenas o comprimento mostrou-se suficiente. Os autores recomendam repetir o procedimento mais duas vezes, totalizando três mensurações e utilizar a média desses três valores para obter uma estimativa mais confiável dos dias até o parto. Além disso, foram utilizados modelos de regressão com efeitos mistos, afim de considerar a natureza longitudinal dos dados, com medidas repetidas

dentro de cada gestação, repetição entre éguas e desenho amostral desbalanceado. Verificou-se também que o crescimento da órbita ocular fetal ao longo da gestação não segue um padrão linear, mas sim curvilíneo, refletindo a dinâmica biológica do desenvolvimento fetal. De acordo com os autores, o crescimento tende a ser mais acelerado nas fases iniciais e intermediárias, tornando-se mais constante no terço final da gestação.

Também foram avaliadas mensurações do olho fetal em 66 gestações de éguas leves (aproximadamente 400 a 550 kg), utilizando os mesmos métodos descritos anteriormente para as éguas pôneis.

Ao compararem seus resultados, com trabalhos anteriores baseados em modelos lineares, os autores destacaram como principal limitação desse modelo a suposição de taxa de crescimento constante durante todo o período gestacional, hipótese que não condiz com o comportamento real observado. Além disso, muitos estudos concentram suas medições apenas no período intermediário da gestação, resultando em escassez de dados referentes ao terço final, justamente onde os desvios em relação à linearidade se tornam mais pronunciados. Essa limitação metodológica pode levar à falsa impressão de bom ajuste dos modelos lineares, quando, na prática, eles não representam adequadamente o padrão de crescimento nas fases extremas da gestação. Com um conjunto ampliado de observações no período médio e final, os autores mostraram que a relação entre idade gestacional e comprimento do olho fetal segue um comportamento curvilíneo, assim como ocorreu no grupo de pôneis. Ao considerar os dois conjuntos de dados, observa-se ainda que, após 100 dias de gestação, as medidas oculares fetais em cavalos tendem a ser maiores do que as registradas em pôneis para o mesmo período. Assim, a evidência apresentada reforça que, também em éguas leves, a associação entre olho fetal e idade gestacional é melhor representada por uma curva do que por um modelo linear, mantendo coerência com o padrão descrito para pôneis.

Dessa forma, a literatura indica que os modelos não lineares oferecem maior capacidade para descrever o crescimento da órbita ocular fetal ao longo da gestação, principalmente no terço final, uma vez que conseguem capturar variações no padrão de desenvolvimento que não são contempladas pelos modelos lineares. Embora medidas biométricas fetais sejam utilizadas na prática veterinária, ainda são escassos os estudos que empregam modelagem matemática para descrever a evolução dessas variáveis ao longo da gestação em equinos, o que reforça a relevância de investigações adicionais. Essa lacuna será discutida nas seções seguintes, onde também serão avaliados os modelos aplicados à espessura da junção útero-placentária (JUP), com o intuito de construir faixas de referência para apoio a avaliação clínica dessa estrutura.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

3.1 População e Amostra

Em estatística, define-se população como o conjunto de todos os elementos ou resultados sob investigação (Bussab; Morettin, 2010). Entretanto, a análise da totalidade dos indivíduos é, na prática, muitas vezes inviável, seja por restrições logísticas, de tempo ou de recursos financeiros. Nessas circunstâncias, utiliza-se uma amostra, entendida como um subconjunto representativo da população. Os resultados obtidos a partir das observações amostrais são então extrapolados para a população por meio da estatística inferencial, possibilitando a estimativa de parâmetros populacionais a partir de estatísticas amostrais. No contexto deste estudo, trabalhou-se com uma amostra composta por avaliações de 38 éguas da raça Crioula, disponibilizada pela Faculdade de Veterinária da UFPel, a qual representa uma fração da população total de éguas Crioulas.

3.2 Avaliação dos Pressupostos Estatísticos

A verificação dos pressupostos estatísticos constitui uma etapa importante na análise de dados, pois permite avaliar a adequação dos métodos estatísticos aplicados. Dessa forma, antes da interpretação dos resultados, foram analisadas propriedades dos dados e dos resíduos gerados pelos modelos ajustados. Para essa avaliação, foram considerados aspectos como normalidade da distribuição e homogeneidade das variâncias, por meio da aplicação de testes estatísticos específicos descritos nas seções seguintes.

3.2.1 Teste de Shapiro-Wilk

O teste de Shapiro-Wilk é um método estatístico amplamente utilizado para verificar se um conjunto de dados segue uma distribuição normal (Dutt-ross, 2020), também conhecida como curva Gaussiana ou curva de Gauss, sendo considerado um dos mais eficazes para amostras pequenas e médias.

Esse procedimento testa a hipótese nula de que os dados seguem uma distribui-

ção normal contra a hipótese alternativa de não normalidade. Se o valor de p obtido for superior ao nível de significância adotado ($\alpha = 0,05$), não se rejeita a hipótese nula, indicando que os dados podem ser tratados como normalmente distribuídos. A decisão do teste é baseada na estatística W , a qual é uma estatística de teste definida como função da amostra e, portanto, uma variável aleatória. Por outro lado, valores pequenos da estatística W , que varia entre 0 e 1, sugerem desvio da normalidade, sendo que $W = 1$, representa perfeita aderência à distribuição normal (Razali; Wah, 2011).

Este teste, originalmente proposto por (Shapiro; Wilk, 1965), define a estatística W da seguinte forma para uma amostra aleatória ordenada em ordem crescente:

$$W = \frac{\sum_{i=1}^n (a_i x_i)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (1)$$

em que x_i representa o i -ésimo valor da amostra ordenada, \bar{x} é a média amostral, e os coeficientes a_1, a_2, \dots, a_n são calculados com base nos valores esperados das estatísticas de ordem da distribuição normal e em suas covariâncias, conforme:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)^T = \frac{m^T V^{-1}}{(m^T V^{-1} V^{-1} m)^{1/2}}, \quad (2)$$

sendo $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)^T$ o vetor dos valores esperados das estatísticas de ordem da amostra e V é a matriz de covariância associada a esses valores.

Esse teste foi inicialmente aplicado aos dados brutos da junção útero-placentária (JUP) e da órbita ocular fetal, como análise preliminar da distribuição amostral. Posteriormente, foi aplicado também aos resíduos dos modelos cúbicos ajustados, assegurando a verificação da normalidade.

3.2.2 Teste de Kruskal-Wallis

Quando os pressupostos como normalidade, homogeneidade de variâncias e independência não são satisfeitas, torna-se mais adequado utilizar testes não paramétricos (Moreno; Morcillo, 2019).

Dessa forma, adotou-se o teste de Kruskal-Wallis, um procedimento não paramétrico análogo ao teste F da ANOVA, porém baseado em postos (*ranks*). O teste avalia a hipótese nula de que as distribuições dos k grupos independentes são equivalentes. No contexto deste estudo, os grupos foram definidos pelos meses gestacionais (5° ao 11°), com o objetivo de verificar se havia diferença global entre os meses para as variáveis analisadas.

Sejam N observações distribuídas em k grupos independentes, com tamanhos

n_1, n_2, \dots, n_k , tal que $\sum_{j=1}^k n_j = N$ (Pontes; Corrente, 2001). Inicialmente, todos os valores observados são ordenados conjuntamente em ordem crescente e, em seguida, são atribuídos postos (ranks), que correspondem às posições ocupadas por cada observação nessa ordenação. No contexto deste estudo, os postos referem-se às posições das medidas observadas das variáveis analisadas ao longo dos meses de gestação. Seja R_j a soma dos postos do grupo j . A estatística do teste é dada por:

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{j=1}^k \frac{(R_j)^2}{n_j} - 3(N+1). \quad (3)$$

Na presença de empates, aplica-se a correção padrão para ajustes de postos. A decisão estatística é obtida comparando-se H com a distribuição qui-quadrado, com $k - 1$ graus de liberdade, adotando-se nível de significância $\alpha = 0,05$. Resultados com $p < \alpha$ indicam rejeição da hipótese nula, evidenciando que ao menos um dos grupos (meses) difere dos demais.

Como o teste de Kruskal-Wallis identifica apenas a diferença global, quando o resultado foi significativo procedeu-se à etapa pós-hoc para identificar quais pares de meses diferiram entre si, conforme descrito na subseção seguinte.

3.2.3 Teste de Dunn

O pós-hoc de Dunn atribui postos às observações considerando todos os tratamentos simultaneamente e, em seguida, realiza comparações múltiplas para detectar quais grupos diferem de forma estatisticamente significativa (Pontes; Corrente, 2001).

A estatística de comparação pode ser expressa como:

$$Z_{ij} = \frac{\bar{R}_i - \bar{R}_j}{\sqrt{\frac{N(N+1)}{12} \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}} \quad (4)$$

em que \bar{R}_i e \bar{R}_j representam os postos médios dos grupos, n_i e n_j são os tamanhos amostrais e N é o total de observações. Na presença de empates, aplica-se a correção correspondente no denominador. Os p -valores das comparações par a par foram obtidos a partir da distribuição normal padrão e ajustados para múltiplas comparações.

Com o objetivo de controlar o erro do tipo I, entendido como a rejeição indevida da hipótese nula em comparações múltiplas, empregou-se a correção de Bonferroni. Desse modo, pares de meses foram considerados diferentes quando o p -valor ajustado foi inferior a 0,05. Para fins de síntese, os resultados também podem ser apresentados por grupos homogêneos (letras), nos quais meses que compartilham ao menos uma letra não diferem estatisticamente, enquanto meses sem letras em comum diferem ao nível de significância adotado.

3.3 Modelos de Crescimento

Os modelos de crescimento não lineares foram empregados neste estudo por se mostrarem mais adequados à representação de processos biológicos de crescimento, em comparação aos modelos lineares, pois permitem descrever relações em que a variável resposta depende de forma não linear dos parâmetros do modelo. Em modelos dessa natureza, os parâmetros não aparecem de maneira linear na expressão matemática, o que em geral impede a obtenção de estimativas por meio de soluções analíticas fechadas. Assim como nos modelos lineares, a estimação dos parâmetros é baseada na minimização da soma dos quadrados dos resíduos, buscando reduzir a discrepância entre valores previstos e observados. No entanto, diferentemente da regressão linear, quando o modelo é não linear nos parâmetros, o processo de estimação dos parâmetros não admite solução algébrica fechada, exigindo o uso de métodos iterativos de otimização numérica (Azarias; Gonzaga; Machado; Muniz; Silva, 2023).

Neste trabalho, foram avaliados quatro modelos não lineares nos parâmetros: Logístico, Gompertz, Chanter, Von Bertalanffy. Os três primeiros apresentam curvas de crescimento do tipo sigmoide, caracterizadas por um formato em "S", com uma fase inicial de crescimento lento, seguida por uma aceleração e, posteriormente, por uma desaceleração à medida que se aproxima de um limite superior (Silva, 2018).

O modelo de Von Bertalanffy, embora também represente um crescimento assintótico, distingue-se por apresentar uma curva sigmoide assimétrica. Diferentemente dos modelos anteriores, cuja simetria implica uma taxa de crescimento máxima em um ponto central, o modelo de Von Bertalanffy caracteriza-se por um crescimento mais acelerado nas fases iniciais, seguido por uma desaceleração gradual à medida que o sistema se aproxima de seu valor máximo teórico (Mischan; Pinho, 2014; Ratkowsky, 1990). Essa particularidade torna o modelo especialmente aplicável a fenômenos biológicos em que a fase inicial exerce papel predominante no desenvolvimento.

3.3.1 Logístico

O modelo Logístico, proposto por Pierre François Verhulst em 1838, é uma função matemática amplamente utilizada para modelar o crescimento de uma população ou de um fenômeno com crescimento limitado (Murray, 2002). Esse tipo de crescimento é caracterizado por uma fase inicial exponencialmente acelerada, seguida por desaceleração progressiva até a estabilização em um valor máximo, denominado capacidade de suporte.

A versão de três parâmetros do modelo Logístico é definida por três elementos principais: a assíntota horizontal, o ponto de inflexão e o parâmetro de escala. A assíntota, denotada por β_1 , corresponde ao valor máximo teórico atingido pela variável dependente no eixo y . O ponto de inflexão corresponde à coordenada no eixo

x em que taxa de crescimento é máxima (Pinheiro; Bates, 2000), ocorrendo quando $x = -\beta_2/\beta_3$. Nesse ponto, a curva atinge metade de sua capacidade máxima ($\beta_1/2$) (Mischau; Pinho, 2014). A função $Y(x)$ apresenta simetria em torno de seu ponto de inflexão, o que constitui uma de suas principais características estruturais no modelo logístico (Silva, 2018).

O parâmetro de escala β_3 , controla a inclinação da curva, definindo a velocidade de transição entre as fases de crescimento acelerado e estabilização. Em termos práticos, β_3 representa a distância no eixo x entre o ponto de inflexão e o ponto em que a função atinge aproximadamente 73% da assíntota superior (Pinheiro; Bates, 2000).

De acordo com (Silva, 2018), o modelo Logístico pode ser expresso pela seguinte equação:

$$Y(x) = \frac{\beta_1}{1 + e^{-\beta_2 - \beta_3 x}} \quad (5)$$

em que β_1 , β_2 e β_3 são parâmetros deste modelo.

A análise da influência dos parâmetros no modelo Logístico foi conduzida de forma semelhante à abordagem apresentada por (Silva, 2018). O comportamento gráfico da função, considerando diferentes valores arbitrários para seus parâmetros pode ser visualizado nas Figuras 9, 10, 11, 12 e 13.

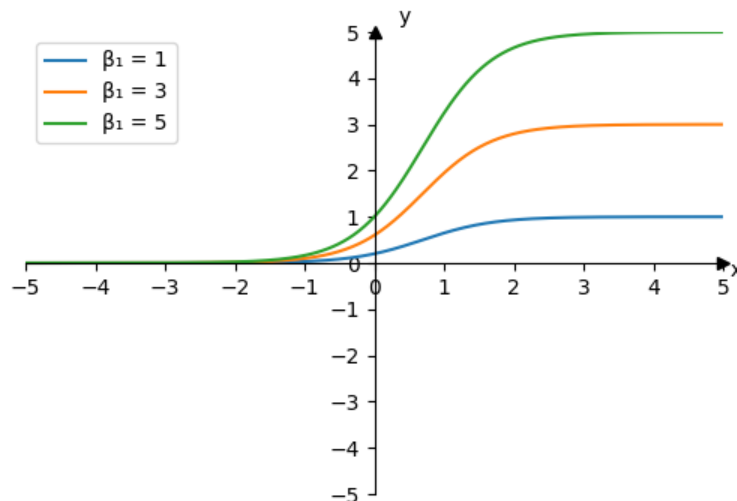


Figura 9 – Gráfico da função Logística para diferentes valores de β_1 , sendo $\beta_2 = 4$ e $\beta_3 = 2$. Fonte: Adaptado de (Silva, 2018).

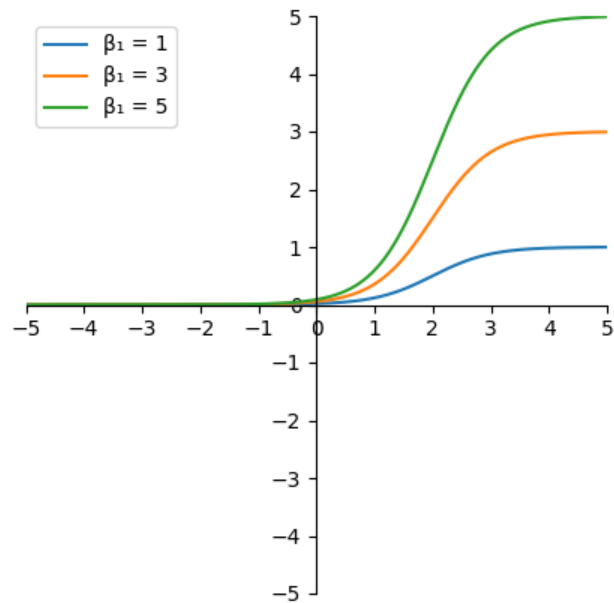


Figura 10 – Gráfico da função Logística para diferentes valores de β_1 , sendo $\beta_2 = -4$ e $\beta_3 = 2$.
Fonte: Adaptado de (Silva, 2018).

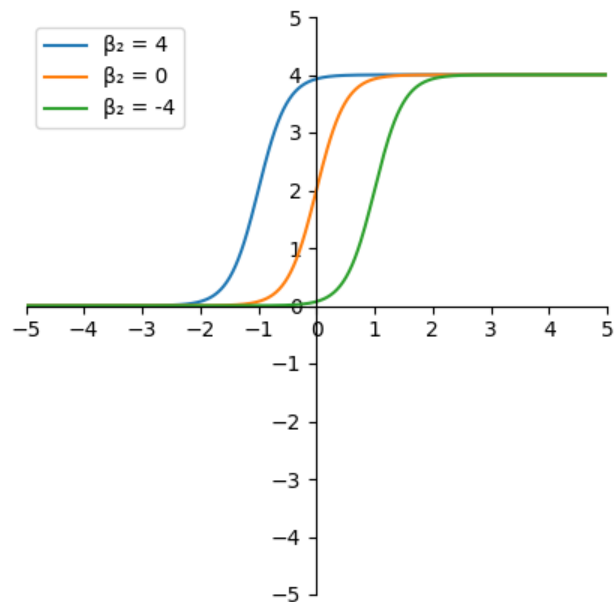


Figura 11 – Gráfico da função Logística para diferentes valores de β_2 , sendo $\beta_1 = 4$ e $\beta_3 = 4$.
Fonte: Adaptado de (Silva, 2018).

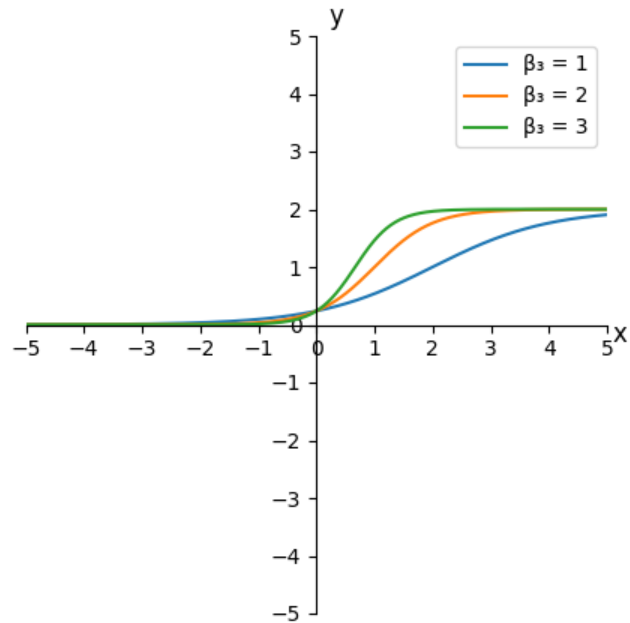


Figura 12 – Gráfico da função Logística para diferentes valores de β_3 , sendo $\beta_1 = 2$ e $\beta_2 = -2$.
Fonte: Adaptado de (Silva, 2018).

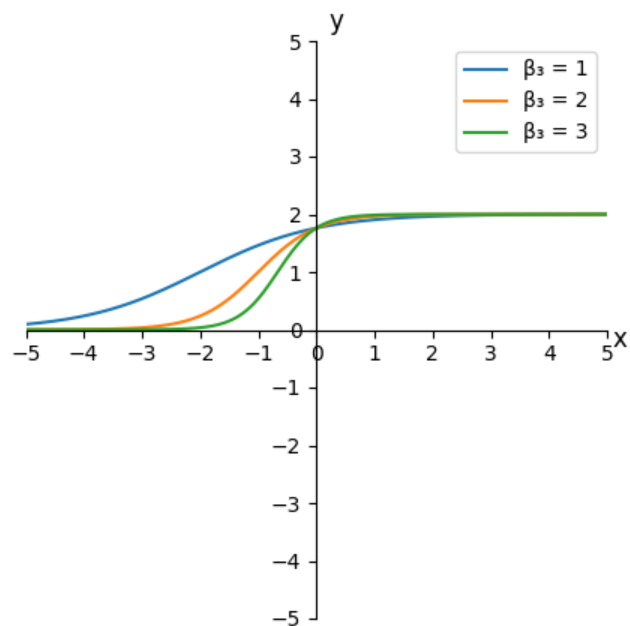


Figura 13 – Gráfico da função Logística para diferentes valores de β_3 , sendo $\beta_1 = 2$ e $\beta_2 = 2$.
Fonte: Adaptado de (Silva, 2018).

Os parâmetros possuem a seguinte interpretação: β_1 representa a assíntota superior da função, isto é, o valor máximo que $Y(x)$ pode atingir quando $x \rightarrow \infty$. β_2

atua como intercepto Logístico, deslocando a curva ao longo do eixo x e β_3 é a taxa de crescimento que controla a inclinação da curva Logística, onde maiores valores resultam em uma curva mais inclinada.

Por fim, ressalta-se que β_1 e β_3 são estritamente positivos, garantindo que a curva apresente comportamento biologicamente plausível, enquanto β_2 pode assumir valores positivos ou negativos, deslocando a curva para a direita ou esquerda (Silva, 2018).

3.3.2 Gompertz

O modelo de Gompertz, proposto por Benjamin Gompertz em 1825, foi inicialmente utilizado na construção de tabelas atuariais voltadas à estimativa de probabilidades de sobrevivência e mortalidade em populações humanas (Silva, 2018). Posteriormente, consolidou-se como uma ferramenta versátil para descrever fenômenos de crescimento em diferentes áreas do conhecimento, especialmente em processos biológicos.

Esse modelo caracteriza-se por um crescimento rápido nas fases iniciais, seguido de uma desaceleração exponencial progressiva, até que a variável de interesse se estabilize em torno de um limite superior (Máximo, 2023). Essa característica o torna particularmente adequado para fenômenos biológicos, nos quais o desenvolvimento inicial é acelerado, mas tende a reduzir sua intensidade com o avanço do tempo.

A formulação matemática do modelo de Gompertz é dada por:

$$Y(x) = \beta_1 \cdot e^{-e^{-\beta_2 \cdot (x - \beta_3)}} \quad (6)$$

em que β_1 , β_2 e β_3 são parâmetros positivos da equação.

Semelhante ao que foi feito por (Silva, 2018), parâmetros arbitrários foram atribuídos a função para caracterizar a curva do modelo Gompertz quando os parâmetros variam.

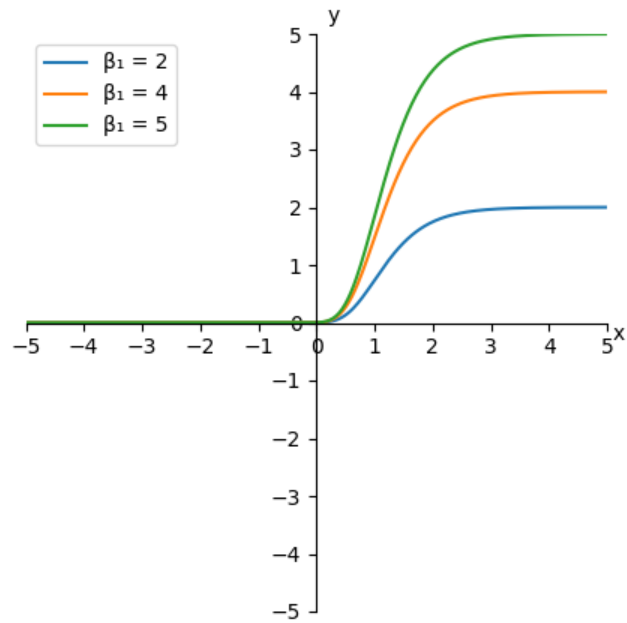


Figura 14 – Gráfico do modelo Gompertz para diferentes valores de β_1 , sendo $\beta_2 = 2$ e $\beta_3 = 1$.
Fonte: Adaptado de (Silva, 2018).

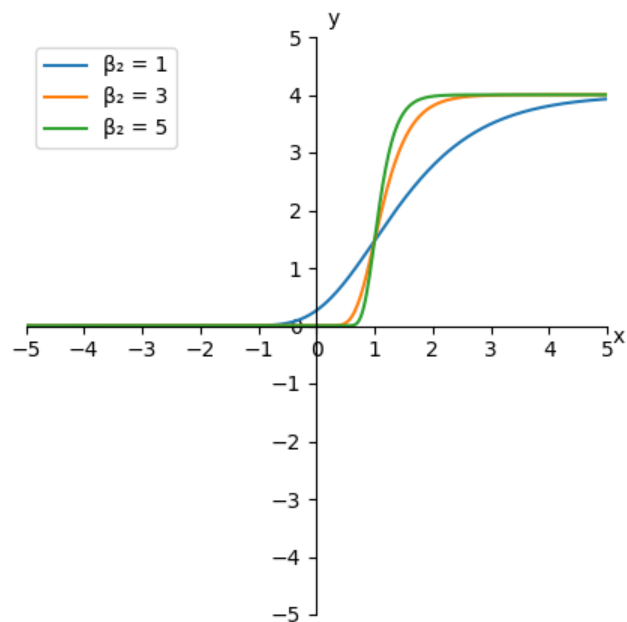


Figura 15 – Gráfico do modelo Gompertz para diferentes valores de β_2 , sendo $\beta_1 = 4$ e $\beta_3 = 1$.
Fonte: Adaptado de (Silva, 2018).

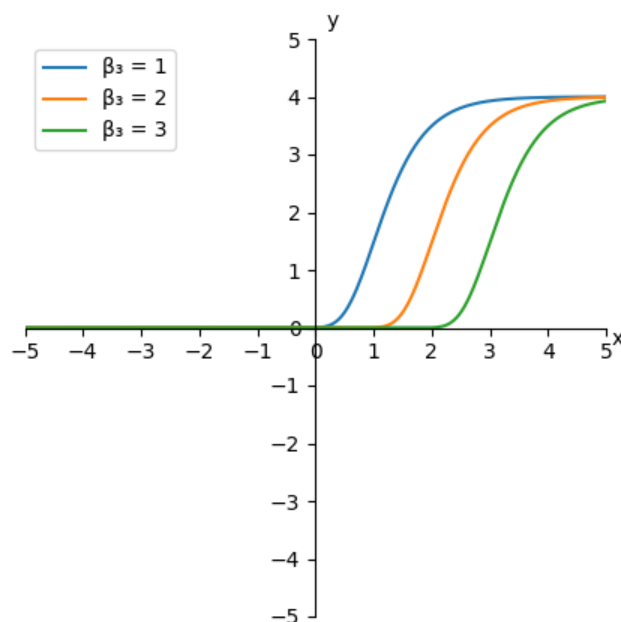


Figura 16 – Gráfico do modelo Gompertz para diferentes valores de β_3 , sendo $\beta_1 = 4$ e $\beta_2 = 2$. Fonte: Adaptado de (Silva, 2018).

Assim como o modelo Logístico, o modelo de Gompertz apresenta β_1 como assíntota superior à direita, ou valor máximo teórico que a função pode alcançar, de modo que $Y = \beta_1$ corresponde a assíntota horizontal a direita e $Y = 0$ à assíntota horizontal à esquerda; β_2 é a taxa de crescimento responsável pela velocidade com que a função se aproxima da assíntota; β_3 é o ponto de inflexão deslocado que define a posição da curva no eixo x . A função $Y(x)$ é estritamente crescente, com concavidade voltada para cima em $x < \beta_3$ e voltada para baixo em $x > \beta_3$ (Silva, 2018).

No entanto, diferentemente do modelo Logístico, que é simétrico em torno do ponto de inflexão, o modelo de Gompertz apresenta assimetria em $\left(\beta_3, \frac{\beta_1}{e}\right)$ (Silva, 2018), o que o torna mais adequado para representar crescimentos biológicos e populacionais assimétricos.

3.3.3 Chanter

O modelo de Chanter, proposto por Denis Osborne Chanter em 1976, é amplamente utilizado para representar padrões de crescimento biológico caracterizados por uma fase inicial de crescimento exponencial, seguida por desaceleração gradual até atingir um limite assintótico (Silva, 2018). Essa configuração o torna especialmente útil para a descrição de processos fisiológicos e de desenvolvimento em organismos vivos, nos quais o crescimento não ocorre de forma linear ao longo do tempo.

Sua formulação matemática é expressa por:

$$Y(x) = \frac{\beta_1 \cdot \beta_2}{\beta_1 + (\beta_2 - \beta_1) \cdot e\left(-\frac{\beta_3}{\beta_4} \cdot (1 - e^{-\beta_4 x})\right)} \quad (7)$$

em que β_1 , β_2 , β_3 e β_4 são os parâmetros do modelo.

O modelo de Chanter é considerado um híbrido entre os modelos Logístico e Gompertz, combinando características estruturais de ambos (Silva, 2022). Para que a curva ajustada represente de forma realista o padrão de crescimento observado, é desejável que os parâmetros assumam valores positivos, com exceção de β_4 , que pode assumir valores negativos dependendo da configuração dos dados.

De acordo com (Silva, 2018, 2022), a interpretação dos parâmetros é dada por: β_1 corresponde ao valor inicial da função, representando a interseção da curva com o eixo das ordenadas no ponto $x = 0$. Para valores negativos de β_4 , o parâmetro β_2 corresponde a assíntota superior a direita, ou seja, o limite máximo que a função tende a alcançar. Os parâmetros β_3 e β_4 , apresentam uma interpretação prática menos direta, estando associados à forma e à taxa de variação da curva, exigindo estudos mais aprofundados para que se possa compreender com precisão suas influências sobre o comportamento do crescimento modelado. Variando o parâmetro β_1 de acordo com (Silva, 2018), temos o seguinte gráfico:

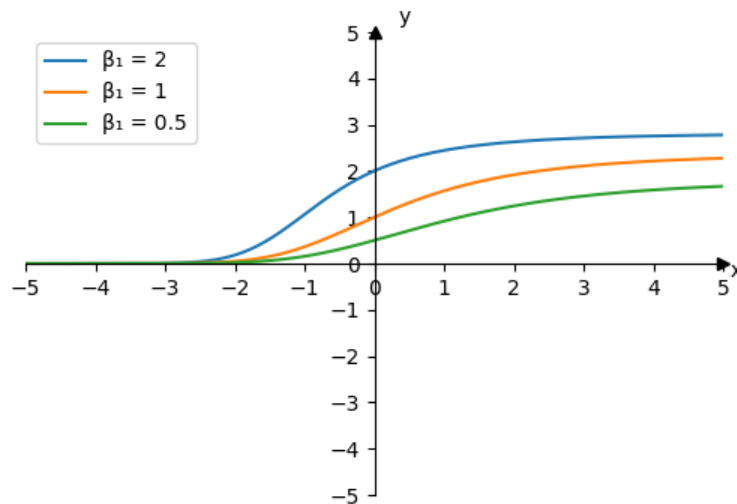


Figura 17 – Gráfico do modelo Chanter para diferentes valores de β_1 , sendo $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = 1$ e $\beta_4 = 0,5$. Fonte: Adaptado de (Silva, 2018).

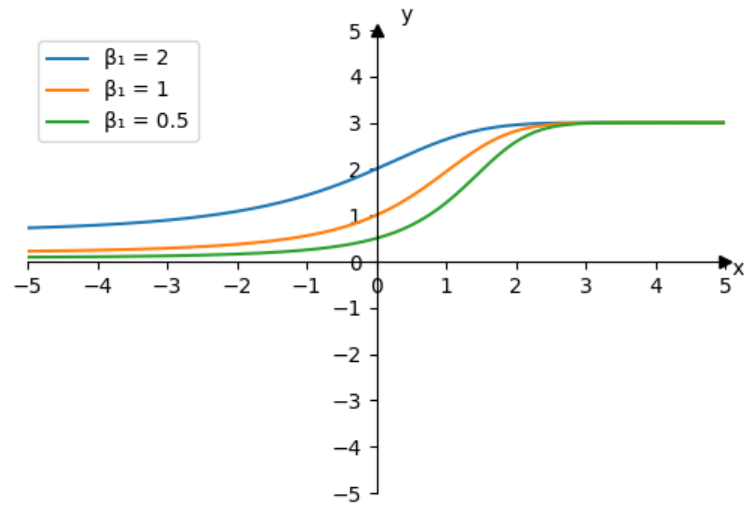


Figura 18 – Gráfico do modelo Chanter para diferentes valores de β_1 , sendo $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = 1$ e $\beta_4 = -0,5$. Fonte: Adaptado de (Silva, 2018).

Observamos que o parâmetro β_1 indica o momento em que a função intercepta o eixo y (Figuras 17 e 18).

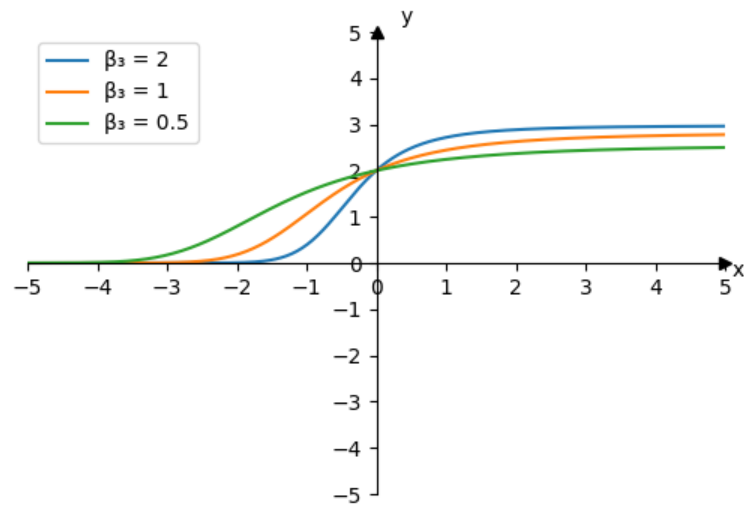


Figura 19 – Gráfico do modelo Chanter para diferentes valores de β_3 , sendo $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 3$ e $\beta_4 = 0,5$. Fonte: Adaptado de (Silva, 2018).

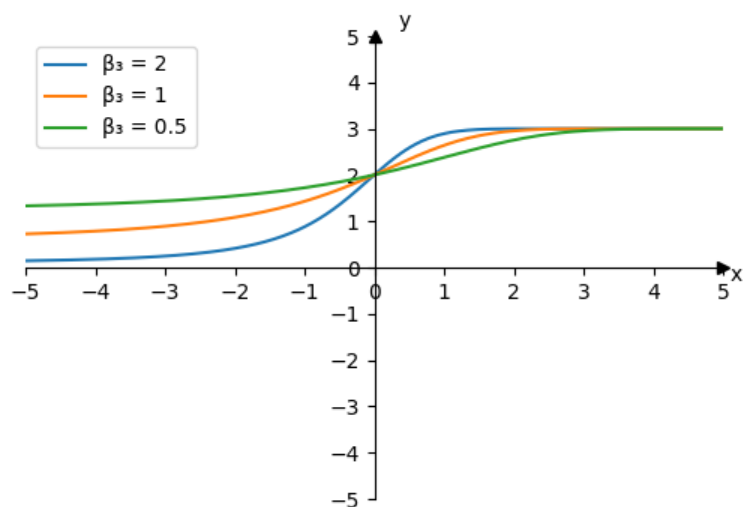


Figura 20 – Gráfico do modelo Chanter para diferentes valores de β_3 , sendo $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 3$ e $\beta_4 = -0,5$. Fonte: Adaptado de (Silva, 2018).

Para valores fixos de β_1 e β_2 , e para β_4 com valor positivo (Figura 19) e negativo (Figura 20), observa-se que para valores menores de β_3 o crescimento é mais lento e conforme aumenta, a curva fica mais fechada (Silva, 2018).

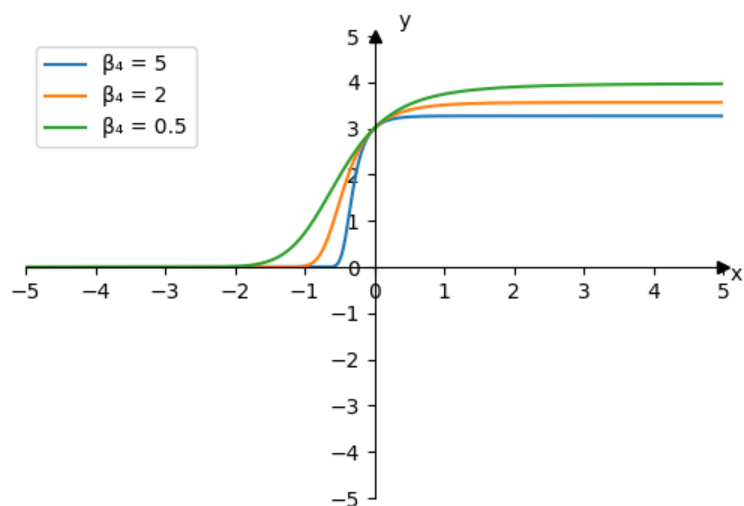


Figura 21 – Gráfico do modelo Chanter para diferentes valores de β_4 positivos, sendo $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 4$ e $\beta_3 = 2$. Fonte: Adaptado de (Silva, 2018).

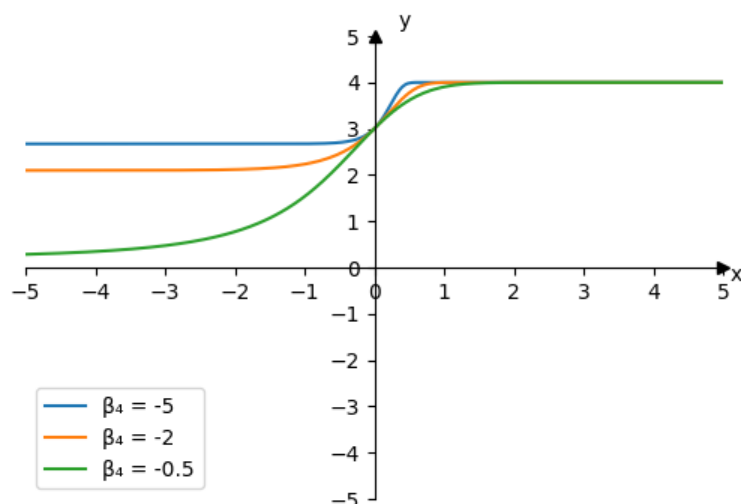


Figura 22 – Gráfico do modelo Chanter para diferentes valores de β_4 negativos, sendo $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 4$ e $\beta_3 = 2$. Fonte: Adaptado de (Silva, 2018).

Variando o parâmetro β_4 , com valores positivos (Figura 21), quanto maior seu valor mais rápido atinge a assíntota. Enquanto para valores negativos (Figura 22), quanto menor o valor mais rápido atinge a assíntota (Silva, 2018).

3.3.4 Von Bertalanffy

O modelo de Von Bertalanffy, também conhecido como teoria geral dos sistemas, foi proposto pelo biólogo austríaco Ludwig Von Bertalanffy no ano de 1938, com o intuito inicial de descrever o crescimento em peixes, particularmente no aumento de peso ao longo do tempo (Scapim, 2008). Posteriormente, os princípios associados ao modelo foram ampliados e incorporados à Teoria Geral dos Sistemas, uma estrutura interdisciplinar destinada a explicar o funcionamento e a interação de sistemas complexos em áreas como biologia, psicologia, sociologia e economia.

O modelo de Bertalanffy pode ser representado pela seguinte equação:

$$Y(x) = \beta_1 \cdot (1 - e^{-k \cdot x}) \quad (8)$$

em que $Y(x)$ representa a variável de crescimento em função do tempo ou da variável independente x . O parâmetro β_1 corresponde ao valor assintótico máximo que a função pode atingir, indicando o limite superior que o crescimento biológico tende a alcançar. Já o k , por sua vez, é a constante de crescimento, responsável por definir a velocidade com que o sistema se aproxima desse limite.

O comportamento descrito pelo modelo caracteriza-se por uma fase inicial de crescimento rápido, seguida por uma desaceleração progressiva à medida que o valor assintótico é atingido. Essa assimetria em relação ao ponto de inflexão diferencia o mo-

delo de Bertalanffy de outros modelos sigmoides e o torna particularmente adequado para representar fenômenos biológicos em que o desenvolvimento inicial é mais intenso, seguido por uma estabilização gradativa. Variando a constante de crescimento k (Figura 23), pode-se observar que valores maiores produzem curvas mais inclinadas nas fases iniciais, indicando que o crescimento ocorre de forma mais rápida, enquanto valores menores levam mais tempo para que a função atinja seu limite superior.

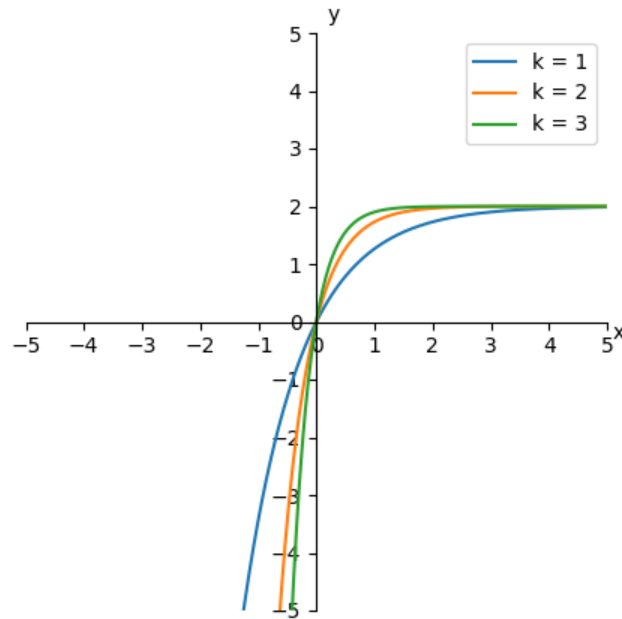


Figura 23 – Gráfico do modelo Von Bertalanffy para diferentes valores de k , sendo $\beta_1 = 2$.
Fonte: Da autora, 2025.

Variando o parâmetro β_1 e mantendo o k fixo é possível observar o limite máximo que cada curva atinge com um crescimento delimitado pela taxa máxima (Figura 24).

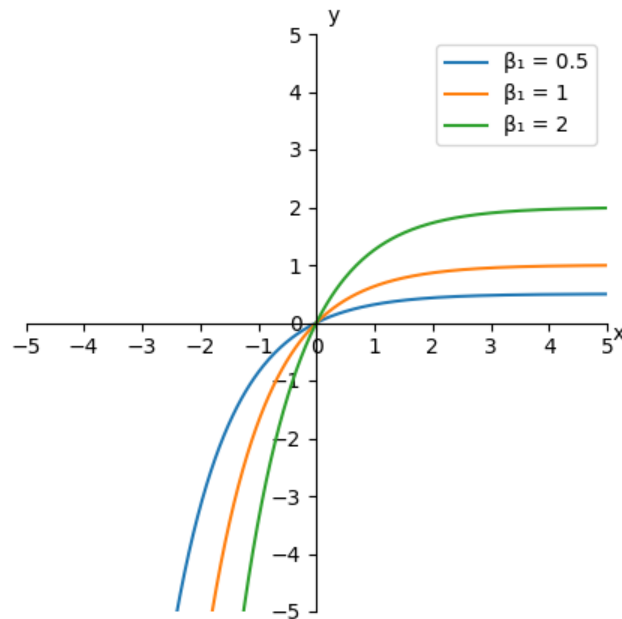


Figura 24 – Gráfico do modelo Von Bertalanffy para diferentes valores de β_1 com $k = 1$ fixo. Fonte: Da autora, 2025.

3.4 Modelo Polinomial Cúbico

O modelo polinomial Cúbico, embora não linear em relação à variável independente, é linear em relação aos seus parâmetros, o que permite sua estimação por métodos clássicos de regressão linear. Sua principal vantagem reside na flexibilidade para representar padrões observacionais complexos, incluindo pontos de inflexão ao longo do tempo, mesmo quando o comportamento não segue uma forma sigmoide típica (Motulsky; Christopoulos, 2004).

A função polinomial cúbica pode ser expressa da seguinte forma:

$$p(x) = \beta_1 x^3 + \beta_2 x^2 + \beta_3 x + \beta_4 \quad (9)$$

em que $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ representam os parâmetros a serem estimados, $p(x)$ corresponde a variável resposta, neste estudo, as medidas da junção útero-placentária (JUP) ou da órbita ocular fetal, e x refere-se aos meses de gestação.

O modelo cúbico é uma função polinomial de terceiro grau que se caracteriza por sua flexibilidade funcional (Coelho; Vellame; Coelho filho; Ledo, 2006), sendo capaz de capturar a variação não linear presente nos dados observados. Essa flexibilidade decorre da presença do termo de terceira ordem, que permite ao polinômio capturar curvaturas ascendentes e descendentes, bem como pontos de inflexão, sem impor uma forma biológica específica à curva, o que pode ser útil em contextos empíricos.

A aplicação do modelo cúbico em dados de crescimento fetal é particularmente útil quando o comportamento da variável não se ajusta a funções sigmóides clássicas, como Logístico ou Gompertz, mas apresenta mudanças de concavidade ao longo do tempo. Dessa forma, o modelo fornece uma representação matemática adaptável aos dados, com foco em ajuste e predição dentro do domínio amostral. Para analisar o comportamento da curva cúbica foram atribuídos valores arbitrários para o parâmetro β_1 , que está associado ao termo cúbico da função e exerce influência na forma da curva (Figura 25).

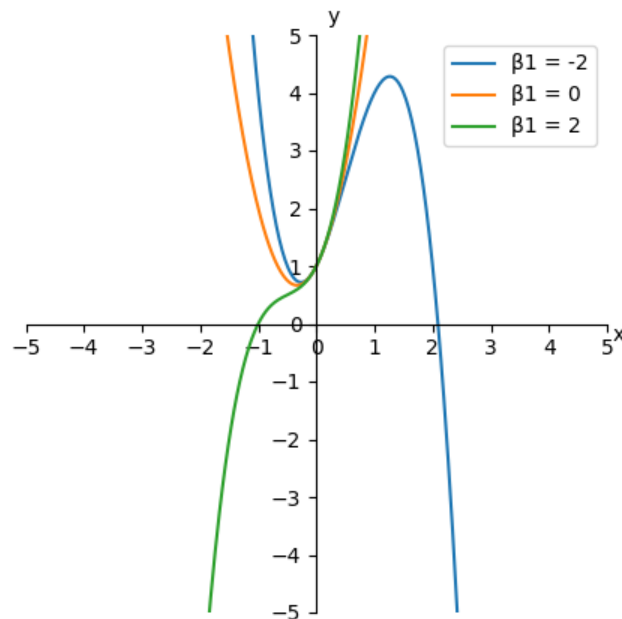


Figura 25 – Gráfico do modelo Cúbico para diferentes valores de β_1 com $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = 2$ e $\beta_4 = 1$. Fonte: Da autora, 2025.

O parâmetro β_2 corresponde ao termo quadrático do polinômio e está relacionado à curvatura da função. Variações nesse coeficiente influenciam a intensidade da concavidade da curva ao longo do domínio considerado (Figura 26).

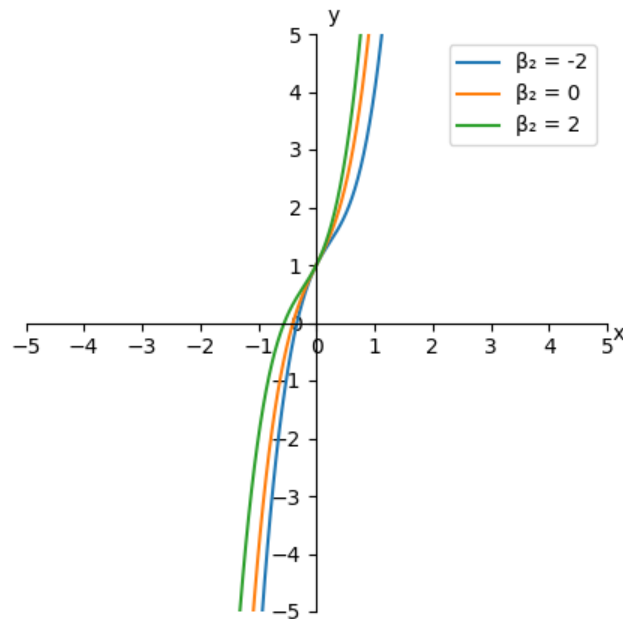


Figura 26 – Gráfico do modelo Cúbico para diferentes valores de β_2 com $\beta_1 = 3$, $\beta_3 = 2$ e $\beta_4 = 1$. Fonte: Da autora, 2025.

Por sua vez, o coeficiente β_3 representa o termo linear da função, estando associado à inclinação inicial da curva. Alterações nesse parâmetro podem tornar o crescimento inicial mais acentuado ou mais suave (Figura 27).

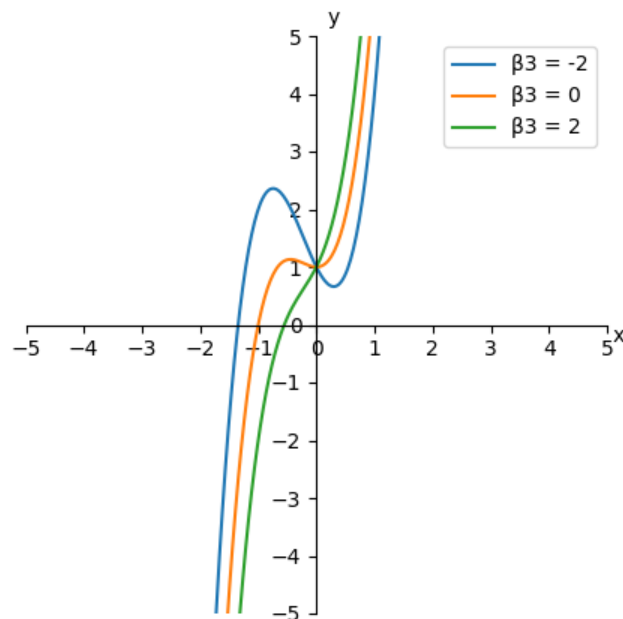


Figura 27 – Gráfico do modelo Cúbico para diferentes valores de β_3 com $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 2$ e $\beta_4 = 1$. Fonte: Da autora, 2025.

Por fim, o parâmetro β_4 corresponde ao termo constante do polinômio, representando o valor da função quando $x = 0$ (intercepto). A variação desse coeficiente provoca um deslocamento vertical da curva, sem alterar sua forma geral (Figura 28).

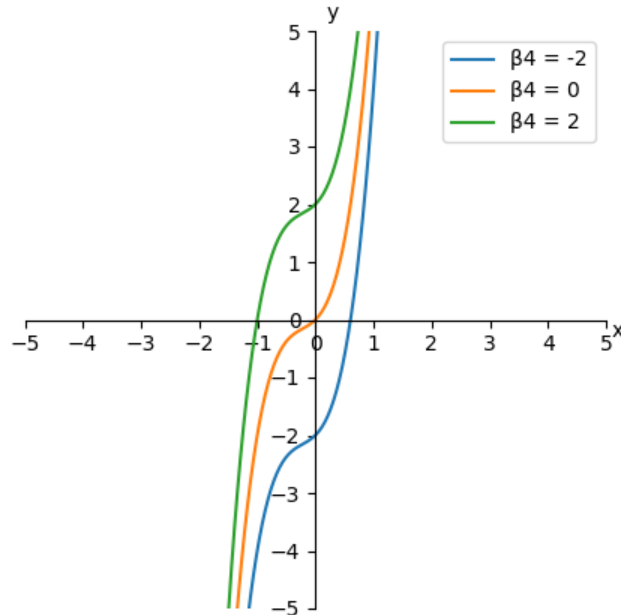


Figura 28 – Gráfico do modelo Cúbico para diferentes valores de β_4 com $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 2$ e $\beta_3 = 1$. Fonte: Da autora, 2025.

3.5 Métodos Estatísticos Aplicados

3.5.1 Cálculo dos Resíduos

A análise dos resíduos constitui uma etapa fundamental para avaliação da qualidade e da validade estatística de um modelo ajustado a dados observacionais. Os resíduos representam a diferença entre os valores obtidos experimentalmente e aqueles estimados pelo modelo matemático. Formalmente, um resíduo ε_i é definido como:

$$\varepsilon_i = y_{o,i} - y_{a,i} \quad (10)$$

em que y_o é o valor observado, y_a é o valor ajustado, ε_i corresponde ao resíduo da observação $i = 1, \dots, n$, refletindo a parcela da variabilidade existente de y que não é explicada pela variável independente x (Silva; Mattos, 2017).

A avaliação dos resíduos é de fundamental importância por diferentes razões. Primeiramente, permite identificar potenciais falhas do modelo, como situações de subajuste (*underfitting*), quando a função não captura a complexidade dos dados, ou sobreajuste (*overfitting*), quando o modelo se ajusta excessivamente às particularida-

des da amostra, perdendo poder de generalização. Além disso, possibilita verificar a aleatoriedade dos erros, condição esperada em modelos estatisticamente adequados.

Outro aspecto relevante consiste no uso da análise gráfica dos resíduos, que auxilia na detecção de padrões sistemáticos, heterocedasticidade ou violações de pressupostos estatísticos. A ausência de tais padrões reforça a validade da escolha do modelo. No presente estudo, essa verificação foi aplicada ao polinômio cúbico, permitindo confirmar sua adequação na representação da relação entre as variáveis biológicas analisadas.

3.5.2 Monte Carlo

O método estocástico de Monte Carlo (MMC) é uma técnica estatística amplamente utilizada para quantificar incertezas e obter soluções aproximadas em problemas cuja resolução analítica é complexa ou inviável. Sua aplicação é particularmente relevante em contextos que apresentam variabilidade e ruído nos dados, permitindo a modelagem de sistemas complexos, não lineares e com múltiplos parâmetros de incerteza (Viana; Levino; Mota, 2008).

Segundo (Donatelli; Konrath, 2005), os resultados de um processo de medição podem divergir do valor verdadeiro da grandeza mensurada em decorrência de diferentes tipos de erro, classificados como *estocásticos*, de comportamento aleatório consistente, e *grosseiros*, provenientes de falhas no sistema de medição, condições ambientais adversas ou execução inadequada de procedimentos. Em estudos experimentais, essas incertezas afetam diretamente a confiabilidade das estimativas, o que justifica a adoção de métodos robustos para avaliação de variabilidade.

Diferentemente dos métodos analíticos clássicos, que requerem pressupostos rígidos, como normalidade, homocedasticidade e conhecimento prévio da distribuição dos erros, o MMC permite simulações baseadas em números pseudoaleatórios, dispensando a necessidade de definir previamente uma distribuição paramétrica exata (Viana; Levino; Mota, 2008). Os geradores pseudoaleatórios utilizados atualmente são rápidos, ocupam pouco espaço de memória e permitem a reprodução de sequências específicas quando necessário, oferecendo flexibilidade para aplicações diversas.

O MMC fundamenta-se na geração contínua e aleatória de amostras para simular diferentes cenários estatisticamente possíveis. Formalmente, trata-se de um conjunto de variáveis aleatórias indexadas no tempo, representadas por $\{X(t), t \in T\}$ (Alves; Delgado, 1997), em que cada conjunto gerado corresponde a um evento ou cenário viável. As amostras resultantes formam uma distribuição de probabilidade, passível de ser analisada por meio de estatísticas descritivas, como média e desvio padrão (Neto; Moura; Forte, 2002).

O método foi inicialmente desenvolvido por Stanislaw Ulam e John von Neumann na década de 1940, tendo aplicações consolidadas nas áreas de modelagem mate-

mática, física, engenharia e ciências biológicas (Metropolis; Ulam, 1949).

O princípio fundamental do MMC está associado à **Lei dos Grandes Números (LGN)**, segundo a qual, para um número suficientemente grande de simulações independentes, a média amostral converge para o valor esperado da variável de interesse. Seja X_1, X_2, \dots, X_n um conjunto de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas $\varepsilon_i \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \sigma^2)$, com média nula e variância constante e com valor esperado μ , tem-se:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{\text{q.c.}} \mu, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Outra base teórica essencial é o **Teorema Central do Limite (TCL)**, que estabelece que, para n suficientemente grande, a distribuição da média amostral \bar{X}_n aproxima-se de uma distribuição normal, independentemente da distribuição original das variáveis X_i , desde que estas possuam média e variância finitas:

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, 1), \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Do ponto de vista prático, o método consiste em aproximar o valor esperado de uma função $g(X)$, cuja integral exata seja de difícil cálculo, pela média de n amostras geradas segundo a função densidade de probabilidade $f(x)$ da variável X :

$$I = E[g(X)] = \int_{\Omega} g(x)f(x) dx \approx \hat{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i), \quad (13)$$

com $X_1, X_2, \dots, X_n \sim f(x)$.

O estimador de Monte Carlo \hat{I}_n possui as seguintes propriedades estatísticas (Metropolis; Ulam, 1949):

- **Não-viesado:** $E[\hat{I}_n] = I$
- **Variância:** $\text{Var}(\hat{I}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$

A variância decresce proporcionalmente a $1/n$, e o erro padrão do método é aproximadamente:

$$\varepsilon \approx \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (14)$$

Um elemento central na aplicação do MMC é a definição das funções densidade de probabilidade (PDFs) das variáveis de entrada, que descrevem a probabilidade relativa de ocorrência de diferentes valores. Em muitos contextos experimentais, essas PDFs aproximam-se de uma distribuição normal, devido à ação combinada de múltiplos fatores aleatórios independentes e à aplicabilidade do Teorema Central do Limite.

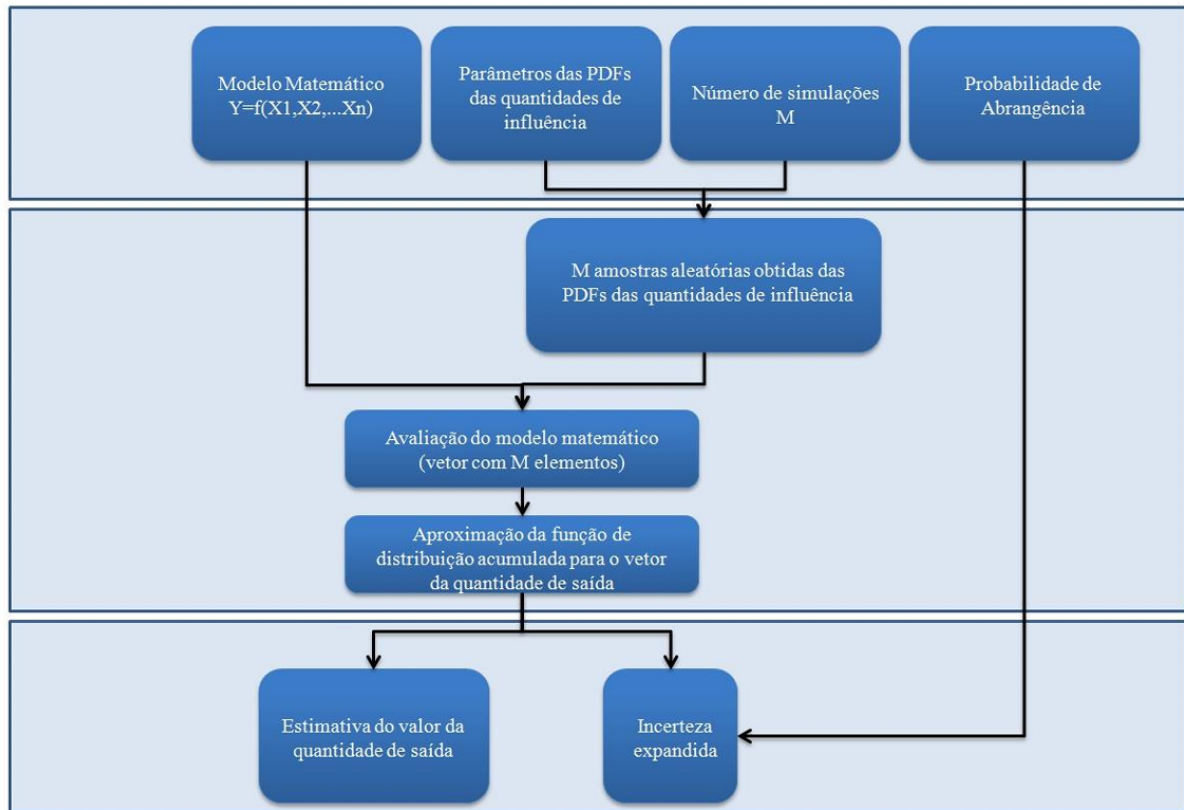


Figura 29 – Fluxograma geral do Método de Monte Carlo. Fonte: (Queiroz; Júnior; Jahn; Hahn; Fontana; Bolzan, 2013).

O fluxograma apresentado na Figura 29 descreve, de forma sequencial, as etapas gerais do Método de Monte Carlo. Inicialmente, define-se o modelo matemático que relaciona as variáveis de entrada (X_1, X_2, \dots, X_n) à variável de saída. Em seguida, determinam-se os parâmetros das funções densidade de probabilidade (PDFs) das variáveis de influência, o número total de simulações (M) e a probabilidade de abrangência desejada.

A partir dessas informações, são geradas M amostras aleatórias para cada variável de entrada, de acordo com suas PDFs. Essas amostras são então utilizadas na avaliação do modelo matemático, resultando em um vetor com M valores simulados da variável de saída.

Os resultados obtidos permitem a aproximação da função de distribuição acumulada dessa variável, a partir da qual são estimados o valor central (estimativa) e a incerteza expandida associada. Dessa forma, o fluxograma ilustra o processo iterativo e probabilístico característico do método de Monte Carlo, evidenciando a geração de cenários, a propagação das incertezas e a análise estatística final.

3.5.3 Percentis

A determinação de intervalos de confiança pode ser realizada por diferentes abordagens, cuja escolha depende tanto das características da distribuição dos dados

quanto da estatística de interesse. Neste estudo, optou-se pela utilização do método dos percentis, devido à sua simplicidade e aplicabilidade mesmo na ausência de informações sobre a distribuição teórica dos dados originais (Mcmurray; Pearson; Casarim, 2017).

A quantificação da incerteza associada aos valores ajustados da variável dependente ao longo da curva cúbica, foi conduzida por meio da simulação de Monte Carlo paramétrica. Foram realizadas $N = 10000$ simulações, em que os dados originais foram perturbados por ruído aleatório gerado a partir de uma distribuição normal $N(0, \sigma^2)$, sendo σ^2 a variância dos resíduos do modelo cúbico. A partir dessa distribuição, o intervalo de confiança com nível $100(1 - \alpha)\%$ é definido pelos percentis $\alpha/2$ e $1 - \alpha/2$ (De paula, 2020).

O intervalo de confiança de 95% foi obtido a partir dos percentis 2.5% e 97.5%, da distribuição empírica gerada pelas simulações de Monte Carlo paramétrico, segundo a equação:

$$[\hat{y}_{\text{inf}}, \hat{y}_{\text{sup}}] = \left[\hat{y}_B^{*(\alpha/2)}, \hat{y}_B^{*(1-\alpha/2)} \right], \quad (15)$$

em que $\hat{y}_B^{*(\alpha/2)}$ e $\hat{y}_B^{*(1-\alpha/2)}$ correspondem, respectivamente, aos limites inferior e superior do intervalo de confiança, $\alpha = 0,05$ e B representa o número de iterações realizadas pelo Método de Monte Carlo (MMC), na qual foram utilizadas 10000 iterações.

A implementação foi realizada em linguagem Python, permitindo a obtenção dos intervalos de confiança para pontos específicos ao longo da curva ajustada, tanto para a variável JUP quanto para a órbita, ao longo dos meses de gestação. Esse procedimento possibilitou delimitar a região de confiança em torno do ajuste, refletindo a variabilidade esperada dos dados e incorporando as incertezas inerentes às medições biológicas.

O método percentil é uma abordagem simples e eficiente para a construção de intervalos de confiança utilizando o método de Monte Carlo. A ideia central consiste em realizar um grande número de simulações da estatística de interesse e, a partir da ordenação dos valores simulados, determinar os limites do intervalo com base em percentis da distribuição empírica gerada. Assim, para obter um intervalo de confiança com nível de 95%, selecionam-se os valores correspondentes aos percentis 2,5% e 97,5% das simulações. Dessa forma, os limites inferior e superior do intervalo são definidos diretamente pelas posições desses percentis na amostra ordenada dos resultados simulados.

Esse método apresenta bons resultados mesmo quando a distribuição da estatística de interesse é desconhecida. Contudo, seu desempenho pode ser influenciado pela simetria da distribuição empírica obtida. Para distribuições aproximadamente simétricas, a cobertura do intervalo tende a ser satisfatória, enquanto distribuições

assimétricas podem comprometer sua precisão.

3.6 Ajuste de Curvas e Estimativa dos Parâmetros

Nesta pesquisa, empregou-se o ajuste de curvas como abordagem estatística e computacional para modelar a relação entre os meses de gestação e as variáveis biométricas obtidas em éguas da raça Crioula.

De forma geral, o problema de ajuste pode ser descrito da seguinte maneira: dado um conjunto de pares ordenados $\{(x_j, y_j)\}_{j=1}^N$, busca-se determinar uma função $f \in \mathcal{F}$ tal que a diferença entre os valores observados y_j e os valores estimados $f(x_j)$ seja minimizada. Diferente da interpolação, em que a função deve necessariamente passar por todos os pontos experimentais, o ajuste de curvas procura identificar a função que melhor se aproxima do comportamento real dos dados, de modo a reproduzir sua tendência subjacente (Justo; Sauter; Azevedo; Guidi; Konzen, 2018).

Entre os métodos mais utilizados para essa finalidade, destaca-se o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ), cuja finalidade consiste em estimar os parâmetros da função de modo a minimizar a soma dos quadrados dos resíduos.

3.6.1 Método dos Mínimos Quadrados

O Método dos Mínimos Quadrados (MMQ), proposto por Carl Friedrich Gauss em 1809, é uma das técnicas mais utilizadas para ajustar modelos matemáticos a dados experimentais. Seu objetivo consiste em encontrar o conjunto de parâmetros que minimize a discrepância entre os valores observados e aqueles estimados pelo modelo, garantindo que a soma dos quadrados dos resíduos seja a menor possível. Os resíduos correspondem a diferença entre os valores observados y_i e os estimados \hat{y}_i pelo modelo (Silva; Mattos, 2017). Assim, define-se a função objetivo

$$q = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (16)$$

em que cada termo do somatório representa o resíduo ao quadrado, isto é, a discrepância entre a observação e o valor previsto pelo modelo. O processo de ajuste consiste em determinar os parâmetros que minimizam q .

No caso particular em que a função de ajuste é polinomial, como ocorre com a função cúbica, o problema pode ser interpretado como um caso específico de regressão linear. O termo linear refere-se à linearidade em relação aos parâmetros a serem estimados, ainda que a função seja não linear na variável independente (Silva, 2018). Isso significa que as derivadas parciais da função em relação a esses parâmetros não dependem dos próprios parâmetros (Silva, 2018).

Considerando um polinômio de grau m :

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m, \quad (17)$$

em que os coeficientes a_i representam os parâmetros do modelo a serem estimados por meio do MMQ (Guidi, 2026). Substituindo essa expressão em q , obtém-se:

$$q = \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{j=0}^m a_j x_i^j \right)^2$$

Para que q seja mínimo, derivam-se as expressões em relação a cada parâmetro a_k e igualam-se os resultados a zero. Esse processo gera um sistema de $m + 1$ equações lineares denominado equações normais (Guidi, 2026):

$$\sum_{j=0}^m \left(\sum_{i=1}^n x_i^{j+k} \right) a_j = \sum_{i=1}^n y_i x_i^k, \quad \text{para cada } k = 0, 1, \dots, m. \quad (18)$$

Esse sistema é resolvido para determinar os coeficientes a_j .

De forma compacta, o sistema pode ser reescrito como:

$$X^T X \mathbf{a} = X^T \mathbf{y}, \quad (19)$$

onde X representa a matriz de delineamento, \mathbf{a} o vetor de parâmetros e \mathbf{y} o vetor de observações (Justo; Sauter; Azevedo; Guidi; Konzen, 2018):

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (20)$$

Esse sistema admite solução única sempre que a matriz $X^T X$ for inversível, ou seja, quando as colunas de X forem linearmente independentes. A solução explícita é dada por:

$$\mathbf{a} = (X^T X)^{-1} X^T \mathbf{y}. \quad (21)$$

Do ponto de vista geométrico, essa formulação evidencia que o vetor de resíduos $(\mathbf{y} - X\mathbf{a})$ é ortogonal ao espaço gerado pelas colunas de X , o que garante que a curva ajustada seja a melhor aproximação em termos de distância euclidiana entre os pontos observados e a superfície gerada pelo modelo.

Para modelos não lineares nos parâmetros, como os modelos Logístico, Gompertz, Bertalanffy e Chanter, não há solução analítica direta. Nesses casos, a determinação dos coeficientes requer a resolução de um problema de otimização numérica, o qual busca encontrar a melhor curva de ajuste ao minimizar a soma dos resíduos elevados

ao quadrado. Formalmente, define-se a função objetivo:

$$S(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{j=1}^n [y_j - f(x_j; \boldsymbol{\beta})]^2, \quad (22)$$

em que y_j representa o valor observado, $f(x_j; \boldsymbol{\beta})$ é o valor estimado pela função paramétrica, e $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$ o vetor de parâmetros desconhecidos. O objetivo consiste em determinar $\boldsymbol{\beta}$ de modo a minimizar $S(\boldsymbol{\beta})$.

Para esse tipo de problema, empregam-se métodos numéricos iterativos. Entre os métodos disponíveis, utilizou-se o algoritmo de Levenberg-Marquardt, amplamente utilizado em regressão não linear por combinar as vantagens do método do gradiente descendente e do método de Gauss-Newton, proporcionando maior estabilidade e velocidade de convergência (Lima, 2022).

Assume-se que os erros sejam variáveis aleatórias independentes, normalmente distribuídas com média zero e variância constante σ^2 , ou seja, $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ (Silva, 2018).

Na forma matricial, o modelo pode ser escrito como:

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (23)$$

em que \mathbf{y} é o vetor ($n \times 1$) de observações, $f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta})$ é o vetor de respostas previstas pelo modelo, e $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o vetor dos resíduos (Silva, 2018). Assim, considerando a aproximação $\hat{\mathbf{y}} = f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta})$, o vetor de resíduos é dado por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}. \quad (24)$$

A soma dos quadrados dos resíduos (SQR) pode, então, ser expressa como:

$$\text{SQR} = \boldsymbol{\varepsilon}^\top \boldsymbol{\varepsilon} = [\mathbf{y} - f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta})]^\top [\mathbf{y} - f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta})]. \quad (25)$$

Expandindo a expressão, obtém-se:

$$\text{SQR} = \mathbf{y}^\top \mathbf{y} - 2\mathbf{y}^\top f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}) + f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta})^\top f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}). \quad (26)$$

De forma análoga ao caso linear, o problema central consiste em encontrar os parâmetros $\boldsymbol{\beta}$ que minimizam essa função (Silva, 2018). A principal diferença reside no fato de que, por se tratar de um problema não linear, as derivadas parciais em relação a $\boldsymbol{\beta}$ não resultam em equações lineares, inviabilizando uma solução direta. Para superar essa dificuldade, empregam-se métodos iterativos de otimização, que atualizam progressivamente os valores dos parâmetros até a convergência para um ponto de mínimo. O método de Levenberg-Marquardt automatiza a minimização de $S(\boldsymbol{\beta})$, retornando os parâmetros ajustados e a matriz de covariância associada, que

fornece uma medida da incerteza dos estimadores.

3.6.2 Método de Levenberg-Marquardt

O método de Levenberg-Marquardt (LM), desenvolvido de forma independente por Kenneth Levenberg (1944) e Donald Marquardt (1963), é uma das abordagens numéricas mais difundidas para problemas de regressão não linear. Sua principal característica é combinar as vantagens de dois métodos clássicos de otimização: o gradiente descendente e o Gauss–Newton (Lima, 2022).

No gradiente descendente, os parâmetros do modelo são atualizados iterativamente na direção oposta ao gradiente da função objetivo, garantindo estabilidade, mas frequentemente apresentando convergência lenta, sobretudo em regiões de curvatura suave. No método de Gauss–Newton, a minimização da função de mínimos quadrados ocorre por meio da aproximação da matriz Hessiana (H), que envolve as segundas derivadas da função objetivo. Em vez de calcular essa matriz de forma exata, utiliza-se a aproximação baseada no produto $J^T J$, onde J é a matriz jacobiana. Essa simplificação permite que a função seja tratada localmente por uma expansão quadrática, garantindo uma convergência mais rápida em regiões próximas ao mínimo (Lima, 2022), mas podendo ser instável quando os parâmetros iniciais estão distantes da solução ótima.

O LM surge como um algoritmo híbrido, ajustando dinamicamente sua estratégia entre as duas abordagens. Em regiões de alta incerteza ou com valores iniciais distantes da solução, o método comporta-se de maneira semelhante ao gradiente descendente, priorizando a estabilidade. À medida que se aproxima do mínimo da função objetivo, a influência do componente de Gauss–Newton se intensifica, proporcionando maior rapidez na convergência (Lima, 2022).

Matematicamente, o objetivo do LM é encontrar o vetor de parâmetros $\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m]^T$ que minimiza a soma dos quadrados dos resíduos de um modelo não linear do tipo $y = f(x, \beta)$, de forma a minimizar a função (Lima, 2022):

$$S(\beta) = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, \beta)]^2 \quad (27)$$

em que y_i corresponde ao valor observado e $f(x_i, \beta)$ ao valor estimado pelo modelo para a variável independente x_i .

A cada iteração, o algoritmo parte de uma estimativa inicial β_k e considera uma expansão linear de primeira ordem da função em torno dessa estimativa (Lima, 2022):

$$f(x_i, \beta_k + \mathbf{q}) \approx f(x_i, \beta_k) + \mathbf{J}(x_i, \beta_k)\mathbf{q},$$

onde \mathbf{q} representa o vetor de correções a serem aplicadas aos parâmetros e \mathbf{J} é a

matriz Jacobiana, cujas linhas contêm os vetores de derivadas parciais da função em relação a cada parâmetro (Lima, 2022), isto é:

$$\mathbf{J}(x_i, \beta) = \left[\frac{\partial f(x_i, \beta)}{\partial \beta_1}, \frac{\partial f(x_i, \beta)}{\partial \beta_2}, \dots, \frac{\partial f(x_i, \beta)}{\partial \beta_p} \right].$$

Substituindo essa aproximação na função objetivo, chega-se ao sistema:

$$\mathbf{J}^\top \mathbf{J} \mathbf{q} = \mathbf{J}^\top \mathbf{e} \quad (28)$$

em que $\mathbf{e} = \mathbf{y} - f(\mathbf{x}, \beta)$ é o vetor de resíduos. Esse é justamente o sistema de equações do método de Gauss-Newton.

A inovação do LM está na introdução de um fator de amortecimento λ que modifica o sistema para:

$$\mathbf{q} = (\mathbf{J}^\top \mathbf{J} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{J}^\top \mathbf{e}, \quad (29)$$

sendo \mathbf{I} a matriz identidade. O parâmetro λ é ajustado dinamicamente: quando a atualização reduz efetivamente o valor de $S(\beta)$, λ é diminuído, aproximando o método do Gauss-Newton, e quando a atualização não melhora a solução, λ é aumentado, fazendo com que o algoritmo se comporte de modo semelhante ao gradiente descendente. Esse mecanismo adaptativo garante que o algoritmo avance apenas quando houver redução na soma dos quadrados dos resíduos, equilibrando eficiência e robustez.

O procedimento iterativo pode ser descrito de forma semelhante a (Lima, 2022):

1. Definir uma estimativa inicial β_0 , um valor inicial para $\lambda > 0$ e um fator de ajuste $\nu > 1$.
2. Em cada iteração, calcular o vetor de correção \mathbf{q} .
3. Se $S(\beta_k + \mathbf{q}) < S(\beta_k)$:
 - atualizar os parâmetros $\beta_{k+1} = \beta_k + \mathbf{q}$;
 - reduzir λ (por exemplo, $\lambda \leftarrow \lambda/\nu$);
 - prosseguir para a próxima iteração.
4. Caso contrário, aumentar λ (por exemplo, $\lambda \leftarrow \nu\lambda$) e recalculer \mathbf{q} até que haja redução do erro.

Esse processo é repetido até a convergência, quando a variação entre iterações sucessivas se torna suficientemente pequena ou quando o número máximo de iterações é atingido.

No presente estudo, o método de Levenberg–Marquardt foi utilizado para o ajuste dos modelos não lineares (Logístico, Gompertz, Bertalanffy e Chanter), garantindo estimativas robustas e estáveis dos parâmetros.

3.7 Métricas Estatísticas para Análise dos Ajustes

Dentre os critérios amplamente empregados para avaliar a qualidade de ajuste de modelos estatísticos, destacam-se o coeficiente de determinação, o coeficiente de determinação ajustado e o desvio padrão residual (Puiatti, 2018). Neste estudo, a avaliação dos modelos foi realizada por meio do desvio médio absoluto dos resíduos (*DMA*), do desvio padrão dos resíduos (*DPR*) e do coeficiente de determinação (R^2), complementada pela análise gráfica dos ajustes.

Essas métricas são complementares e permitem, respectivamente: (i) analisar a magnitude média dos erros absolutos, fornecendo uma medida direta da precisão das estimativas; (ii) avaliar a dispersão dos resíduos em torno da média, refletindo a variabilidade não explicada pelo modelo; e (iii) quantificar a proporção da variabilidade total da variável resposta explicada pela função ajustada. Em conjunto, esses indicadores oferecem subsídios para a escolha do modelo que apresenta o melhor desempenho de ajuste.

3.7.1 Coeficiente de Determinação (R^2)

Em parte dos estudos voltados à modelagem de curvas de crescimento animal, o coeficiente de determinação (R^2) é amplamente empregado como critério para selecionar o modelo mais adequado (Teixeira n.; Cruz; Faria; Souza; Carneiro; Malhado, 2016). Esse parâmetro estatístico é utilizado para quantificar a qualidade do ajuste de modelos de regressão, sejam eles lineares ou não lineares, indicando a proporção da variabilidade total dos dados que é explicada pelo modelo, ou seja, indica o quão bem o comportamento da variável dependente pode ser previsto com base na variável independente (Quinino; Reis; Bessegato, 1991). Em outras palavras, o R^2 expressa a capacidade preditiva do modelo, refletindo o grau de concordância entre os valores observados e aqueles estimados pela equação ajustada.

O coeficiente de determinação assume valores no intervalo de 0 a 1, sendo que valores mais próximos de 1 indicam um melhor ajuste e, conseqüentemente, maior confiabilidade na utilização do modelo (Montgomery; Peck; Vining, 2021). Sua formulação matemática, conforme apresentada por (Reis; Cecon; Puiatti; Finger; Nascimento; Silva; Carneiro; Silva, 2014), é dada por:

$$R^2 = 1 - \frac{\text{SQR}}{\text{SQT}}$$

em que SQR : $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ representa a soma dos quadrados dos resíduos e SQT:

$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ corresponde à soma total dos quadrados, corrigida pela média. Neste contexto, y_i denota os valores observados, \hat{y}_i os valores preditos pelo modelo e \bar{y} a média dos valores observados.

3.7.2 Desvio Médio Absoluto Residual

O Desvio Médio Absoluto dos resíduos (*DMA*) é uma métrica estatística amplamente utilizada para avaliar a qualidade de ajuste de um modelo. Essa medida corresponde à média aritmética dos valores absolutos das diferenças entre os valores observados e aqueles estimados pelo modelo, sendo calculada pela razão entre a soma desses desvios absolutos e o número total de observações (Sarmiento; Regazzi; Sousa; Torres; Breda; Menezes, 2006). De acordo com (Sarmiento; Regazzi; Sousa; Torres; Breda; Menezes, 2006), o *DMA* é definido como:

$$DMA = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|,$$

em que y_i representa o valor observado, \hat{y}_i o valor estimado pelo modelo e n o tamanho da amostra. Valores menores de *DMA*, próximos de zero, indicam melhor desempenho do modelo, pois refletem discrepâncias médias reduzidas entre observações e predições.

Além de sua função como indicador de acurácia, o *DMA* pode ser interpretado como uma medida de dispersão em escala absoluta, quantificando a magnitude média dos desvios individuais em relação à curva ajustada. Assim, trata-se de uma métrica intuitiva e robusta, especialmente útil quando se deseja avaliar a precisão das previsões sem amplificar o efeito de grandes erros isolados, como ocorre no caso do erro quadrático médio.

3.7.3 Desvio Padrão Residual

O Desvio Padrão dos Resíduos (*DPR*) é uma medida estatística utilizada para quantificar a dispersão dos resíduos em relação aos valores ajustados pelo modelo. Essa medida corresponde à raiz quadrada da variância amostral dos resíduos, sendo amplamente empregada na avaliação da qualidade de ajuste de modelos estatísticos (Ribeiro; Souza; Muniz; Fernandes; Moura, 2018). Valores reduzidos de *DPR*, próximos de zero, indicam maior precisão do modelo, pois refletem menor variabilidade dos resíduos.

O cálculo do *DPR* é realizado a partir da raiz quadrada do erro quadrático médio amostral (Mean Squared Error, MSE), conforme apresentado por (Costa; Finger; Cunha, 2014):

zadas entre o 5^o e o 11^o mês de gestação, período em que as biometrias analisadas podem ser obtidas de forma mais consistente. Cada gestação foi monitorada desde a concepção até o parto, possibilitando determinar o mês gestacional correspondente a cada exame realizado.

3.9 Implementação Computacional

A implementação computacional desta pesquisa foi desenvolvida integralmente em linguagem `Python`, escolhido por sua versatilidade e pelo ecossistema consolidado de bibliotecas científicas, que permitem desde a manipulação de dados até a modelagem estatística avançada e a visualização gráfica. O processo computacional foi estruturado em quatro etapas principais: preparação e organização dos dados, verificação dos pressupostos estatísticos, ajuste dos modelos matemáticos e quantificação da incerteza por simulação estocástica.

Na etapa inicial, as medidas biométricas da órbita ocular fetal e da junção útero-placentária (JUP) foram organizadas em estruturas tabulares por meio da biblioteca `Pandas`. Para cada mês gestacional, as informações foram armazenadas em `DataFrames`, possibilitando operações de agregação, cálculo de médias mensais e integração das duas variáveis no mesmo fluxo de análise.

Previamente à modelagem, realizou-se a verificação dos pressupostos estatísticos de normalidade e homogeneidade. A normalidade das distribuições e dos resíduos foi avaliada pelo teste de Shapiro-Wilk (biblioteca `SciPy`). A detecção de desvios da normalidade em variáveis específicas fundamentou a decisão pelo uso do teste não paramétrico de Kruskal-Wallis para a comparação global entre os meses gestacionais, seguido pelo pós-hoc de Dunn com correção de Bonferroni para identificar diferenças significativas entre pares de meses.

Em seguida, procedeu-se ao ajuste dos modelos matemáticos. Para o modelo cúbico, a estimação inicial dos coeficientes foi realizada por meio da função `numpy.polyfit`, que fornece a solução analítica das equações normais associadas ao método dos mínimos quadrados polinomial. Para os modelos mais complexos e não lineares nos parâmetros, o ajuste foi implementado utilizando a função `curve_fit` da biblioteca `SciPy`, que combina algoritmos de otimização não lineares, como Levenberg–Marquardt, garantindo robustez na estimação.

A avaliação estatística dos modelos foi realizada por diferentes ferramentas. A biblioteca `Scikit-learn` foi empregada para o cálculo do coeficiente de determinação (R^2) e do desvio médio absoluto (DMA), enquanto a dispersão dos resíduos foi estimada pelo desvio padrão residual (DPR). A normalidade dos dados foi testada por meio do teste de Shapiro-Wilk, implementado na biblioteca `SciPy`. Análises gráficas dos resíduos foram realizadas utilizando `Matplotlib` e `Seaborn`, o que permitiu avaliar

visualmente a adequação dos ajustes e identificar eventuais padrões residuais.

A fim de analisar a variabilidade inerente aos dados biológicos e fornecer intervalos de confiança para as estimativas, aplicou-se o Método de Monte Carlo, esquematizado na Figura 31.

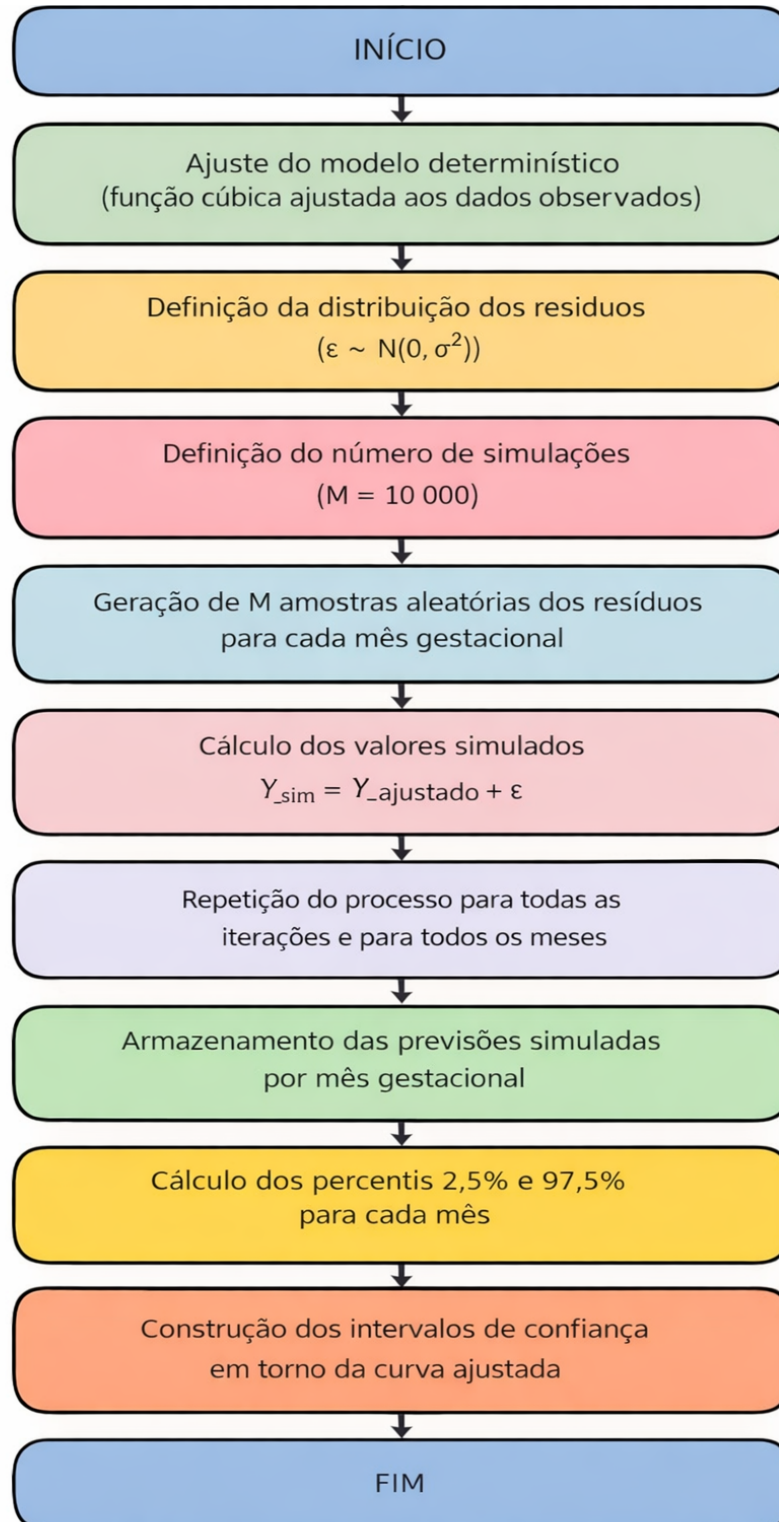


Figura 31 – Esquema do Método de Monte Carlo. Fonte: Da autora, 2025.

Inicialmente, definiu-se o modelo determinístico, representado pela função cúbica ajustada às medidas biométricas. Em seguida, foram realizadas $N = 10000$ simulações independentes, número considerado suficientemente grande para garantir a estabilidade das estimativas obtidas pelo método de Monte Carlo. Em cada iteração, geraram-se novos conjuntos de dados a partir das observações reais, adicionando-se ruído aleatório com distribuição normal $N(0, \sigma^2)$, sendo σ^2 a variância dos resíduos do ajuste cúbico.

A cada simulação, os parâmetros do modelo eram reestimados e a curva correspondente era armazenada. Ao final, a distribuição empírica obtida para cada ponto da curva permitiu calcular intervalos de confiança de 95%, determinados pelos percentis 2,5% e 97,5% das simulações.

Por fim, a visualização dos resultados incluiu gráficos de ajuste, intervalos de confiança, distribuições residuais e boxplots dos coeficientes gerados nas simulações de Monte Carlo. Essas representações gráficas, produzidas com `Matplotlib` e `Seaborn`, tiveram papel central na interpretação dos modelos, permitindo avaliar a aderência estatística, a robustez das estimativas e a magnitude das incertezas associadas.

Dessa forma, a implementação computacional aqui desenvolvida integrou diferentes componentes do ecossistema científico em `Python`, abrangendo desde a manipulação de dados e estimação de parâmetros até a análise de incertezas e a validação estatística dos ajustes, assegurando rigor metodológico, reprodutibilidade e clareza na investigação proposta.

4 ANÁLISE E RESULTADOS

Os dados coletados foram inicialmente organizados de forma a distinguir as observações referentes à órbita ocular fetal e à junção útero-placentária (JUP), obtidas em éguas da raça Crioula entre o 5º e o 11º mês de gestação, no período de 2015 a 2024. Para cada mês gestacional, foi calculada a média aritmética dos valores observados, utilizada como medida central para representar as mensurações correspondentes a cada período. Essa etapa teve como objetivo reduzir a variabilidade individual inerente às mensurações ultrassonográficas, minimizando flutuações decorrentes de diferenças biológicas entre os animais e, ao mesmo tempo, facilitando a aplicação de modelos matemáticos de ajuste destinados a descrever a relação entre o tempo gestacional e as medidas biométricas.

A média (\bar{x}) para cada mês foi obtida conforme a Equação 34, em que x_i representa cada observação individual do mês em questão e n o número total de éguas avaliadas:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (30)$$

Esse procedimento foi aplicado separadamente para cada variável, resultando na construção de duas séries temporais médias, uma para a órbita e outra para a JUP, que serviram como base para as análises estatísticas e modelagens subsequentes.

4.1 Órbita Ocular Fetal

As mensurações referentes à órbita ocular fetal foram organizadas por mês gestacional, do 5º ao 11º mês, sendo posteriormente calculada a média aritmética para cada período (Tabela 1), o que permitiu observar a progressão da tendência central e construir uma série temporal da evolução da órbita ao longo da gestação.

Tabela 1 – Valores médios da órbita ocular fetal (cm) em éguas da raça Crioula entre o 5^o e o 11^o mês de gestação.

Mês de gestação	Órbita (cm)
5	1,9643
6	2,1714
7	2,4996
8	2,6767
9	2,8817
10	2,9559
11	3,0584

A análise das médias evidencia um crescimento contínuo e consistente da medida da órbita ao longo do período avaliado, com crescimento mais acentuado nos meses iniciais e intermediários, seguido por uma fase de estabilização mais próxima ao final da gestação. Esse comportamento é compatível com descrições da literatura, segundo as quais o desenvolvimento fetal equino não ocorre de forma linear, mas sim em fases de aceleração e desaceleração alternadas.

Ao analisar todas as observações individuais ($n = 306$), o teste de Shapiro-Wilk apresentou $p < 0,05$ ($W = 0,9591$; $p < 0,0001$), de modo que a distribuição dos valores não pode ser assumida como normal. Dessa forma, além da média e do desvio-padrão, a caracterização descritiva por mês foi apresentada também por mediana e intervalo interquartil (IIQ), pois essas estatísticas representam melhor a tendência central e a dispersão quando há assimetria e presença de valores extremos.

A Tabela 2 apresenta as estatísticas descritivas da órbita por mês gestacional. Observa-se um aumento progressivo dos valores centrais ao longo do intervalo avaliado, com deslocamento gradual da mediana para níveis maiores à medida que o mês gestacional avança. Em termos práticos, isso indica crescimento consistente da órbita ao longo da gestação, ainda que exista variabilidade intra-mês, especialmente nos meses iniciais.

Tabela 2 – Estatísticas descritivas da órbita por mês gestacional (dados individuais).

Mês	N	Média	DP	Mediana	IIQ
5	56	1,9643	0,3067	1,9800	0,5450
6	51	2,1714	0,3806	2,3000	0,6050
7	49	2,4996	0,2155	2,5400	0,2200
8	46	2,6767	0,2058	2,6800	0,2125
9	40	2,8817	0,1990	2,8600	0,1775
10	39	2,9559	0,1290	2,9600	0,1750
11	25	3,0584	0,1567	3,0500	0,2200

A variabilidade intra-mês, representada pelo desvio padrão e pelo intervalo interquartil, é maior nos meses iniciais e tende a diminuir nos meses médios e finais, indicando que os valores da órbita se tornam mais homogêneos e previsíveis à medida que a gestação avança (Figura 32). Uma possível explicação para esse comportamento está relacionada à maior dificuldade de mensuração ultrassonográfica nessa fase inicial, uma vez que as estruturas fetais ainda apresentam dimensões reduzidas, o que pode aumentar a sensibilidade da medida a pequenas variações na posição do transdutor ou na definição dos limites anatômicos. Além disso, o número de observações varia entre os meses analisados, o que também pode influenciar a dispersão das medidas. À medida que a gestação avança e as estruturas fetais tornam-se mais evidentes nas imagens ultrassonográficas, observa-se uma tendência de maior estabilidade nas medidas.

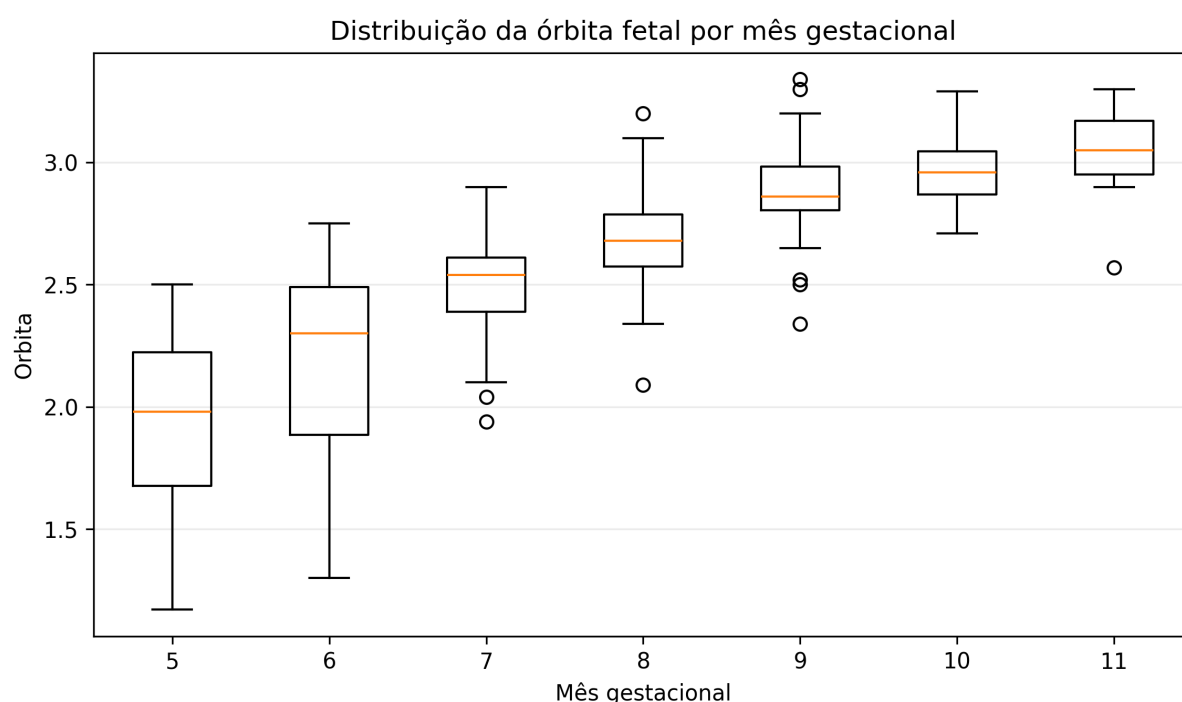


Figura 32 – Boxplot da medida da órbita fetal por mês gestacional (5^o–11^o). Fonte: Da autora, 2025.

Pequenas variações pontuais na dispersão podem ser observadas, mas o padrão geral confirma o crescimento consistente da órbita ao longo do período avaliado.

A comparação entre os meses realizada pelo teste de Kruskal-Wallis mostrou diferença significativa entre os grupos ($H = 232,07$; $p < 0,0001$). Para identificar quais meses diferiram entre si, aplicou-se o pós-hoc de Dunn com correção para comparações múltiplas (Tabela 3). Os grupos homogêneos (letras) sintetizam os resultados do pós-teste onde meses que compartilham ao menos uma letra não diferem entre si.

Tabela 3 – Postos médios e grupos homogêneos do pós-teste de Dunn para a órbita por mês gestacional.

Mês	Posto médio	Grupo homogêneo
11	270,06	A
10	248,13	A
9	225,99	AB
8	175,37	BC
7	133,51	CD
6	81,08	DE
5	49,27	E

Conforme pode-se observar há um padrão de aumento progressivo da órbita ao longo da gestação, com maior separação entre os meses iniciais e os meses finais. O 5º mês (E) apresentou os menores valores permanecendo isolado em relação aos meses finais. Os meses 6º (DE) e 7º (CD) caracterizaram uma transição; o 8º mês (BC) permaneceu em nível intermediário, e os meses 10º e 11º (A) formaram o grupo superior, sem diferença estatística entre si. O 9º mês (AB) apresentou sobreposição parcial com o grupo superior, indicando maior distinção entre meses distantes e maior sobreposição entre meses adjacentes.

Essa sobreposição entre meses consecutivos sugere que, embora a órbita apresente crescimento progressivo ao longo da gestação, a variação entre meses próximos pode não ser suficientemente grande para permitir uma separação estatística clara entre todos os períodos gestacionais. Esse comportamento é esperado em medidas biométricas fetais obtidas por ultrassonografia, nas quais o crescimento ocorre de forma contínua e pode apresentar variações individuais entre os fetos avaliados. Ainda assim, observa-se uma tendência consistente de aumento das medidas com o avanço da gestação, o que reforça o potencial da órbita fetal como parâmetro auxiliar na estimativa da idade gestacional.

A Figura 33 apresenta os ajustes obtidos pelos modelos cúbico, Logístico, Gompertz, Von Bertalanffy e Chanter às médias mensais considerando o intervalo do 5º ao 11º mês. Visualmente, todos os modelos capturaram a tendência de crescimento, ainda que com diferenças sutis nos extremos da gestação. A sobreposição das curvas

reforça a boa capacidade de ajuste dos modelos.

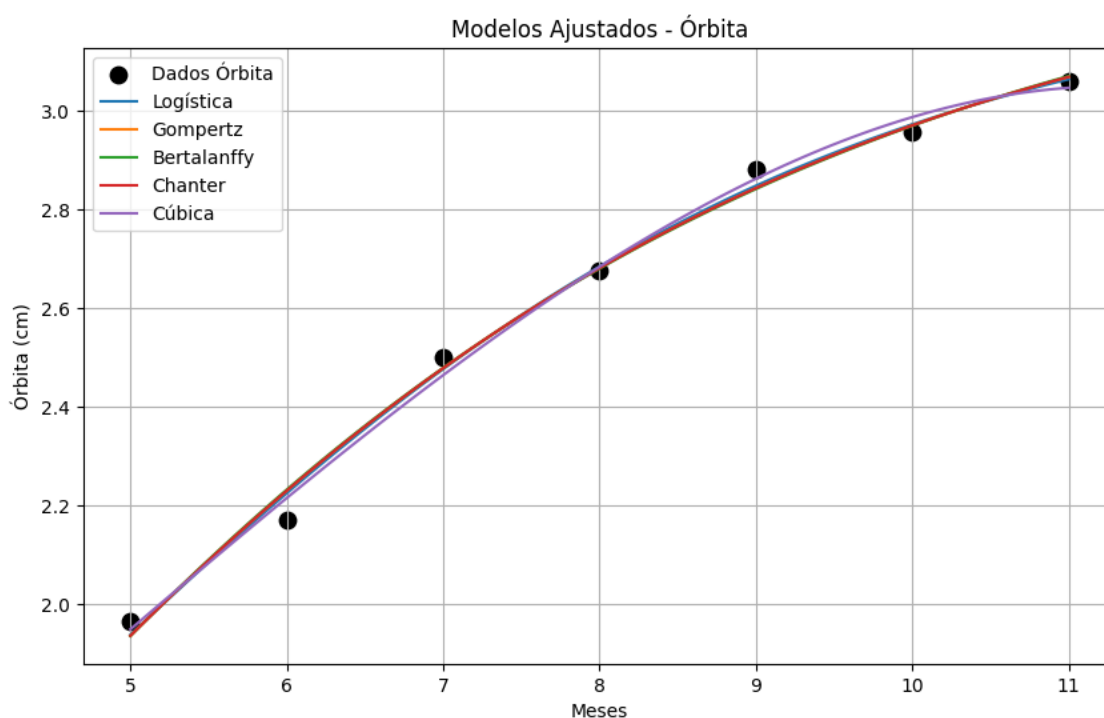


Figura 33 – Modelos ajustados à variável órbita ao longo dos meses de gestação. Fonte: Da autora, 2025.

Os modelos sigmóides (Logístico, Gompertz, Von Bertalanffy e Chanter) exibiram comportamento mais suave, especialmente no início (5º mês) e no final (11º mês), refletindo a tendência biológica de aceleração inicial seguida por estabilização. Já o modelo cúbico destacou-se por sua flexibilidade de curvatura, ajustando-se de modo mais preciso às variações intermediárias (6º ao 9º mês), período de maior velocidade de crescimento.

Embora todos os modelos descrevam adequadamente a tendência biológica geral, as métricas de precisão apresentadas na Tabela 4 indicam pequena superioridade do modelo cúbico. Esse modelo apresentou o menor desvio médio absoluto ($DMA = 0,0235$) e o maior coeficiente de determinação ($R^2 = 0,9951$), apresentando melhor ajuste aos dados observados.

Tabela 4 – *DMA*, *DPR* e R^2 para a Órbita Ocular Fetal.

Modelos	<i>DMA</i>	<i>DPR</i>	R^2
Logístico	0,0237	0,0283	0,9945
Gompertz	0,0251	0,0305	0,9936
Bertalanffy	0,0256	0,0314	0,9932
Chanter	0,0251	0,0305	0,9936
Cúbica	0,0235	0,0287	0,9951

A comparação direta entre o modelo cúbico e o modelo linear, proposto por (Hartwig; Antunez; Dos santos; Lisboa; Pfeifer; Nogueira; Curcio, 2013), apresentada na Figura 34, evidencia a maior adequação do modelo cúbico aos dados observados. Enquanto a curva linear superestima a órbita nos meses finais de gestação, o modelo cúbico acompanha de forma mais fiel o comportamento empírico, capturando as variações de aceleração e desaceleração. Esses achados corroboram com as pesquisas de (Turner; Mcdonnell; Feit; Grogan; Foglia, 2006), que destacam que o crescimento da órbita não segue linearidade, mas sim padrões curvilíneos.

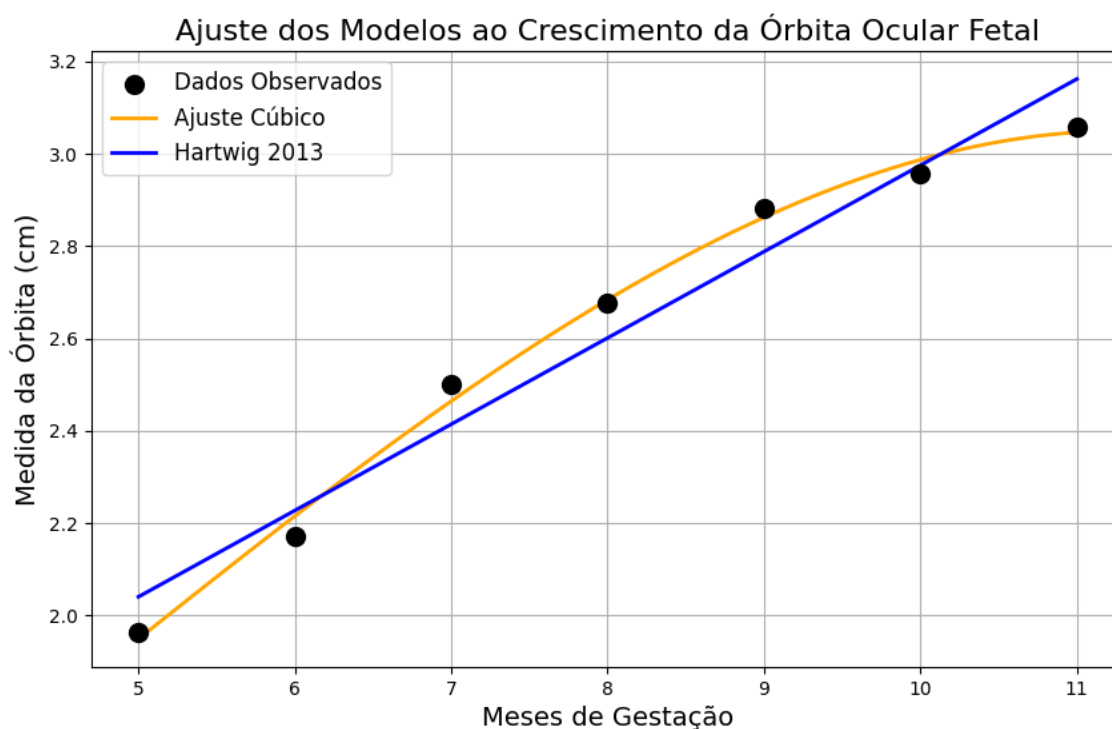


Figura 34 – Comparação entre o modelo linear proposto por (Hartwig; Antunez; Dos santos; Lisboa; Pfeifer; Nogueira; Curcio, 2013) e o modelo Cúbico. Fonte: Da autora, 2025.

As métricas estatísticas (Tabela 5) reforçam esse resultado: embora o modelo linear apresente R^2 relativamente elevado (0,9591) para o conjunto de dados observados, seus erros foram maiores ($DMA = 0,0727$; $DPR = 0,0772$) em relação ao modelo cúbico ($DMA = 0,0235$; $DPR = 0,0287$).

Tabela 5 – Comparação entre os modelos Cúbico e Linear para estimativa da idade gestacional através da medida da órbita ocular fetal.

Modelo	R^2	DMA	DPR
Cúbico	0,9951	0,0235	0,0287
Linear	0,9591	0,0727	0,0772

Portanto, o modelo cúbico mostrou-se mais robusto e biologicamente adequado para descrever o crescimento da órbita ocular fetal, em concordância com (Turner; Mcdonnell; Feit; Grogan; Foglia, 2006), que destaca a limitação de modelos lineares em variáveis de crescimento dinâmico.

A análise residual do ajuste cúbico aplicado à variável órbita (Figura 35) mostra que os resíduos encontram-se distribuídos de maneira equilibrada em torno da linha zero, alternando entre valores positivos e negativos sem revelar padrões sistemáticos de superestimação ou subestimação. Esse comportamento indica que o modelo não apresenta tendência estrutural, característica fundamental para a validade estatística do ajuste.

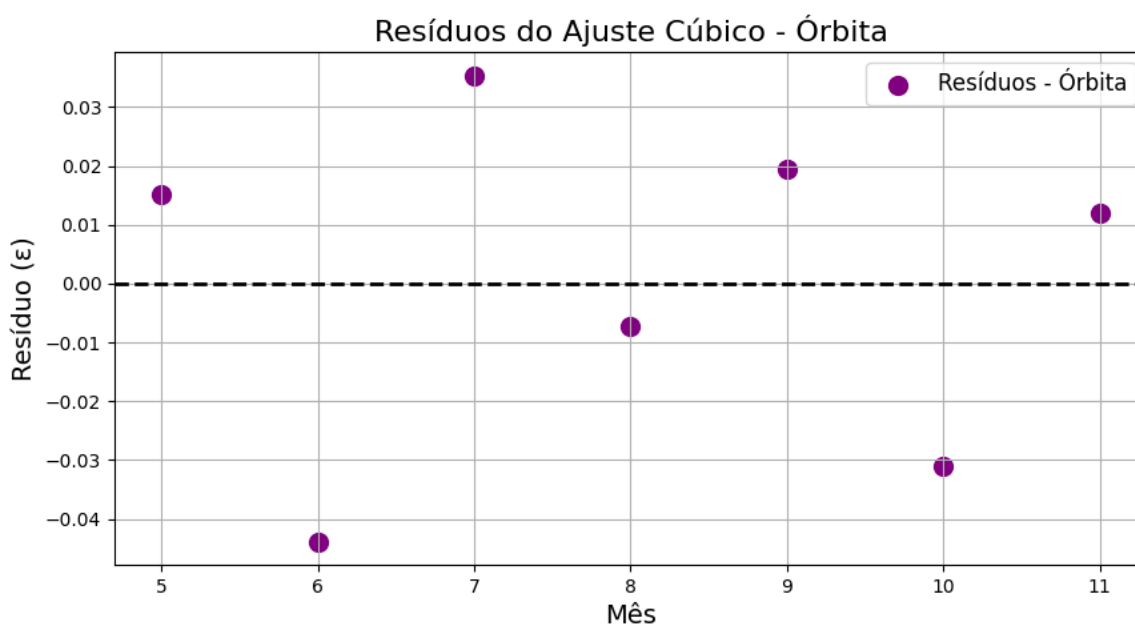


Figura 35 – Resíduos do ajuste cúbico para a variável órbita. Fonte: Da autora, 2025.

A amplitude dos resíduos, restrita ao intervalo de $-0,043$ a $0,036$, mostra-se reduzida, reforçando a consistência do modelo e sugerindo que os erros podem ser

atribuídos a variações aleatórias inerentes ao processo biológico. Além disso, não se observam indícios visuais fortes de heterocedasticidade no gráfico de resíduos, o que reforça a adequação do ajuste e confirma que a variabilidade não compromete a qualidade preditiva.

O teste de Shapiro-Wilk aplicado aos resíduos apresentou valor de estatística $W = 0,9304$ e $p = 0,5544$, não rejeitando a hipótese nula de normalidade ($p > 0,05$). Esse resultado corrobora a inspeção gráfica, indicando que os resíduos podem ser tratados como normalmente distribuídos.

Esse resultado é desejável em estudos de modelagem, pois demonstra que a função cúbica não apenas acompanha de forma fidedigna a trajetória empírica, mas também mantém a aleatoriedade dos desvios. Dessa forma, o ajuste preserva a independência entre erros e variáveis explicativas, descartando indícios de viés estrutural e sugerindo robustez estatística do modelo.

Para avaliar robustez do ajuste e quantificar a incerteza associada às estimativas, aplicou-se o Método de Monte Carlo paramétrico com 10000 simulações. Cada reamostragem foi obtida por perturbação paramétrica dos valores ajustados, adicionando ruído aleatório normal $N(0, \sigma^2)$, com σ^2 estimada a partir da variância residual. Em cada iteração, os parâmetros foram reestimados, e os intervalos de confiança de 95% foram obtidos pelos percentis 2,5% e 97,5%.

Esse procedimento assegurou uma avaliação mais rigorosa da estabilidade do modelo e da precisão das estimativas, contemplando a variabilidade inerente aos dados biológicos. A Figura 36 apresenta o resultado do procedimento de Monte Carlo, evidenciando a curva ajustada pelo modelo cúbico (linha central) acompanhada da região sombreada que representa o intervalo de confiança de 95%. Observa-se que a faixa de variação em torno da curva é estreita e acompanha de forma consistente a tendência dos dados observados, o que indica boa precisão do modelo mesmo diante da introdução de variabilidade estocástica nas simulações.

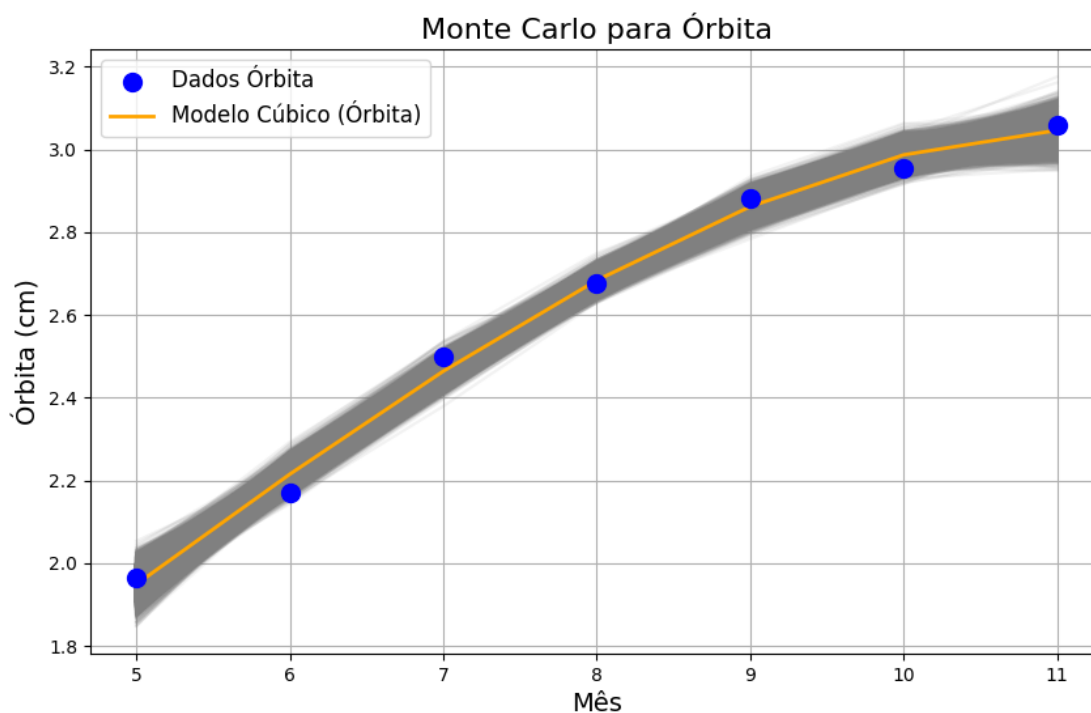


Figura 36 – Gráfico do ajuste Cúbico com Monte Carlo para a órbita. Fonte: Da autora, 2025.

Nota-se ainda que, à medida que os meses de gestação avançam, o intervalo de confiança mantém-se controlado, com pequeno aumento principalmente no 10° e 11° mês, período onde também ocorre sobreposição dos intervalos de confiança. Esse comportamento é desejável em modelos preditivos aplicados a dados biológicos, pois demonstra estabilidade na capacidade de estimar a evolução da variável. A estreita faixa de incerteza sugere que a função cúbica é capaz de capturar adequadamente a dinâmica média do crescimento da órbita ocular fetal, fornecendo estimativas para diferentes estágios gestacionais.

Os intervalos de confiança obtidos por meio do método dos percentis, apresentados na Tabela 6, reforçam essa interpretação ao quantificar a amplitude mínima e máxima das estimativas nos meses avaliados. Em todos os casos, as variações entre os limites inferiores (2,5%) e superiores (97,5%) mostraram-se reduzidas, indicando que a variabilidade nas estimativas é relativamente baixa. Observa-se, entretanto, sobreposição entre alguns intervalos de meses consecutivos, especialmente nas fases finais da gestação (9,5° e 11° mês), o que indica menor capacidade de distinção entre esses períodos. Esses achados são compatíveis com o que foi encontrado no pós teste de Dunn, que indicou que não há diferença estatística entre o 10° e 11° mês de gestação. Ainda assim, esse comportamento é esperado em processos biológicos de crescimento e não compromete o uso do modelo como ferramenta de apoio clínico, permitindo estimativas por faixas gestacionais. Esse resultado é particularmente relevante no contexto prático, pois fornece maior suporte ao profissional veterinário na

utilização do modelo para estimar a idade gestacional a partir da medida da órbita fetal, pois além do valor pontual do modelo, os intervalos possuem interpretação prática direta.

Tabela 6 – Intervalo de confiança para pontos específicos (95%) para a variável órbita.

Mês	IC Inferior	IC Superior
5,0	1,8936	1,9999
5,5	2,0357	2,1268
6,0	2,1778	2,2538
6,5	2,3023	2,3788
7,0	2,4268	2,5038
7,5	2,5392	2,6108
8,0	2,6516	2,7177
8,5	2,7376	2,8083
9,0	2,8237	2,8988
9,5	2,8856	2,9628
10,0	2,9475	3,0267
10,5	2,9705	3,0625
11,0	2,9934	3,0983

Em síntese, a análise conjunta da Figura 36 e da Tabela 6 sugere que o método de Monte Carlo foi útil para testar a aplicação do modelo cúbico. As estimativas acompanharam os valores observados, indicando que o modelo consegue lidar com parte da variabilidade e das incertezas comuns em sistemas biológicos.

Os intervalos de confiança apresentaram-se relativamente estreitos e alinhados aos dados experimentais, o que demonstra que o modelo combina bom ajuste com capacidade preditiva consistente para valores próximos da média. Essa propriedade confere relevância prática ao modelo, uma vez que margens de erro reduzidas e controladas fornecem maior segurança para sua aplicação em decisões clínicas e no manejo reprodutivo em campo.

A Figura 37 ilustra o ajuste cúbico da órbita ocular fetal com intervalos de confiança de 95% obtidos pelo método dos percentis. Observa-se que os pontos experimentais acompanham de forma precisa a curva ajustada, enquanto as barras de erro se mantêm curtas e homogêneas em toda a série temporal. Esse comportamento reforça a elevada precisão do modelo cúbico em diferentes estágios gestacionais, sem indícios de instabilidade ou flutuações inesperadas.

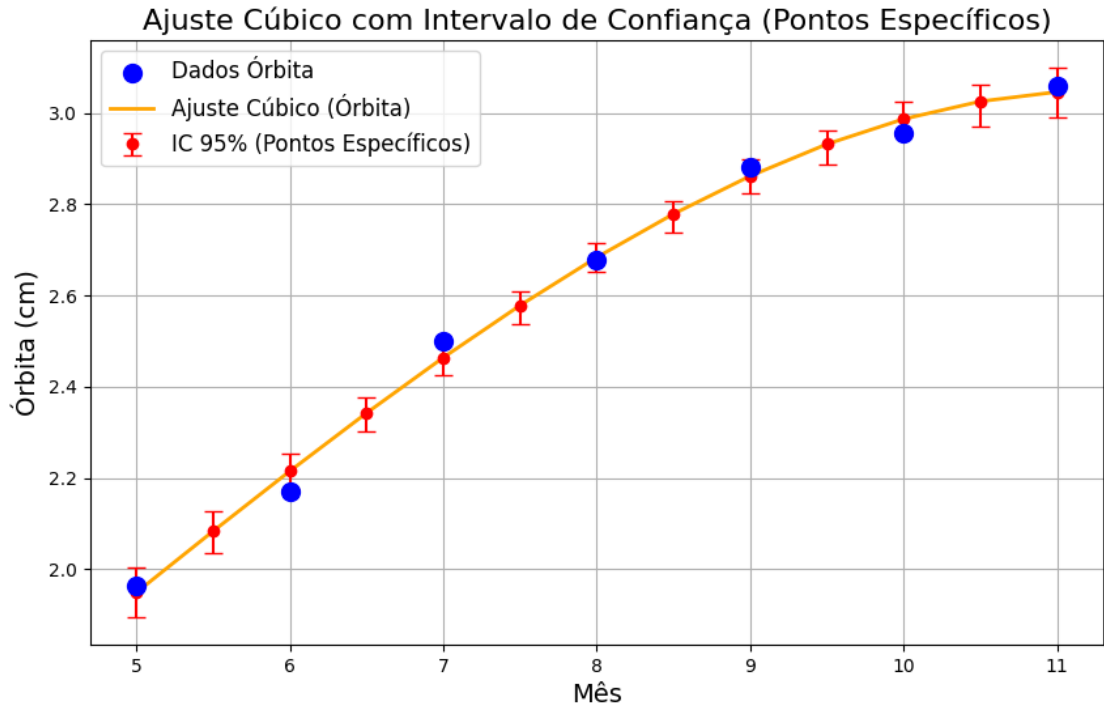


Figura 37 – Gráfico do ajuste cúbico com o método dos percentis por meio de Monte Carlo para a órbita. Fonte: Da autora, 2025.

Outro aspecto relevante é que, mesmo nos meses mais avançados da gestação (9^o ao 11^o), os intervalos de confiança são consistentes com o conjunto analisado, sugerindo estabilidade das estimativas do modelo dentro do intervalo observado. Esse comportamento indica potencial de aplicação prática, desde que a utilização seja restrita ao período avaliado e considerada a variabilidade inerente às mensurações.

A fim de complementar o ajuste obtido a partir das médias mensais e evidenciar que trajetórias individuais podem acompanhar a tendência central estimada, foram selecionadas quatro éguas com séries completas de mensurações entre o 5^o e o 11^o mês de gestação. Os casos foram escolhidos por apresentarem registros em todos os meses analisados e comportamento de crescimento crescente ao longo do período, permitindo comparar a evolução individual com o padrão médio descrito pelo modelo.

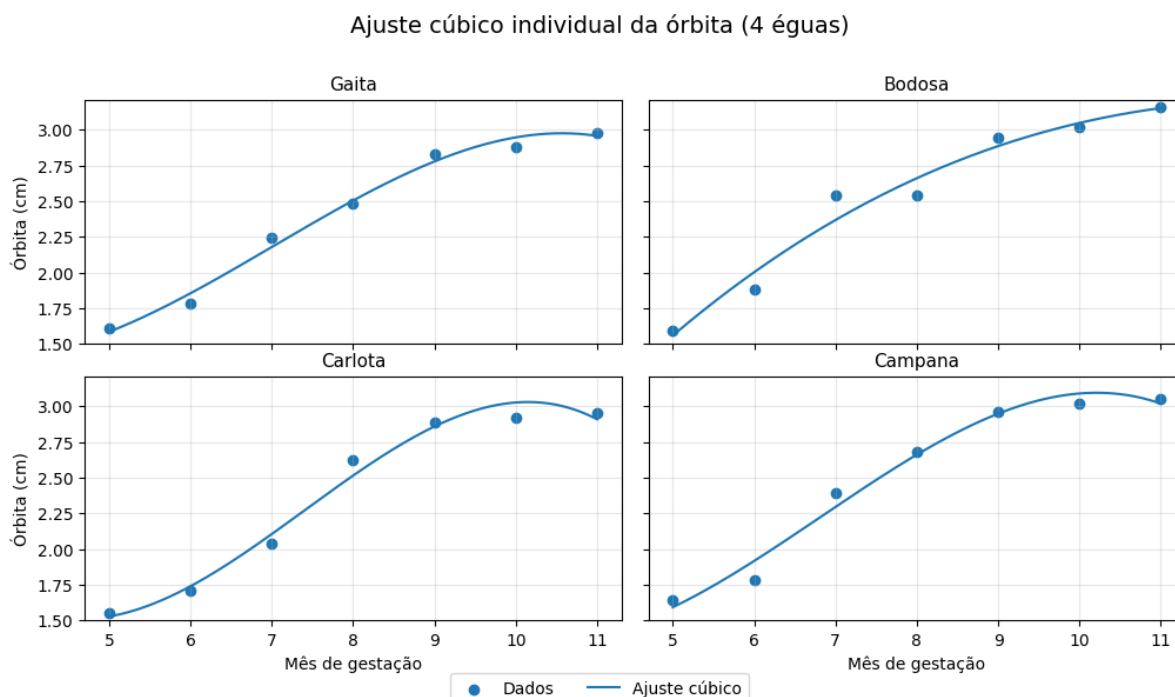


Figura 38 – Modelo cúbico ajustado à variável órbita ao longo dos meses de gestação para éguas específicas. Fonte: Da autora, 2025.

Observa-se que, nas quatro éguas com séries completas, o diâmetro da órbita apresenta crescimento ao longo do período de 5 a 11 meses, com estabilização gradual da taxa de aumento nos meses finais. Embora existam diferenças entre as trajetórias individuais, o padrão geral de crescimento é semelhante entre os animais, e o ajuste cúbico acompanha adequadamente a curvatura observada no intervalo analisado. Assim, essa comparação ilustra que a tendência central descrita pelas médias mensais é compatível com trajetórias individuais quando se considera a variabilidade esperada das mensurações.

A Tabela 7 apresenta os parâmetros ajustados pelo método dos mínimos quadrados (MMQ). Para a função cúbica, empregou-se a versão polinomial do MMQ, enquanto, para os modelos não lineares nos parâmetros, utilizou-se o MMQ não linear.

Tabela 7 – Parâmetros estimados para a variável órbita.

Modelo	β_1	β_2	β_3	β_4
Logístico	3.284	0.378	4.036	–
Gompertz	3.376	2.413	0.293	–
Bertalanffy	3.417	0.651	0.265	–
Chanter	3.022	2.168	7.084	2.935
Cúbica	-0.002	0.028	0.145	0.783

Os modelos avaliados diferem em estrutura paramétrica e conseguem representar a tendência geral de crescimento. No entanto, no intervalo estudado, o modelo cúbico se destacou por apresentar melhor ajuste aos dados, refletido por menores erros e resíduos sem padrão sistemático. A etapa de Monte Carlo reforçou essa interpretação ao indicar estabilidade paramétrica, com médias próximas às estimativas pontuais e baixa variabilidade entre as reamostragens.

A Figura 39 apresenta a distribuição dos parâmetros β_1 , β_2 , β_3 e β_4 do modelo cúbico obtida via Monte Carlo. A interpretação gráfica revela que o parâmetro cúbico (β_1) foi o mais estável, com caixa estreita e ausência de outliers, reforçando sua baixa incerteza e papel consistente na curvatura da função. O termo quadrático (β_2) também apresentou baixa variabilidade e poucos outliers, indicando contribuição estável na forma da curva. Já o coeficiente linear (β_3) mostrou maior dispersão, refletindo sensibilidade da inclinação às flutuações biológicas dos dados. Por fim, o intercepto (β_4) foi o mais instável, com ampla variação e forte presença de outliers, o que demonstra que a linha de base do modelo é mais suscetível a deslocamentos verticais decorrentes da variabilidade amostral.

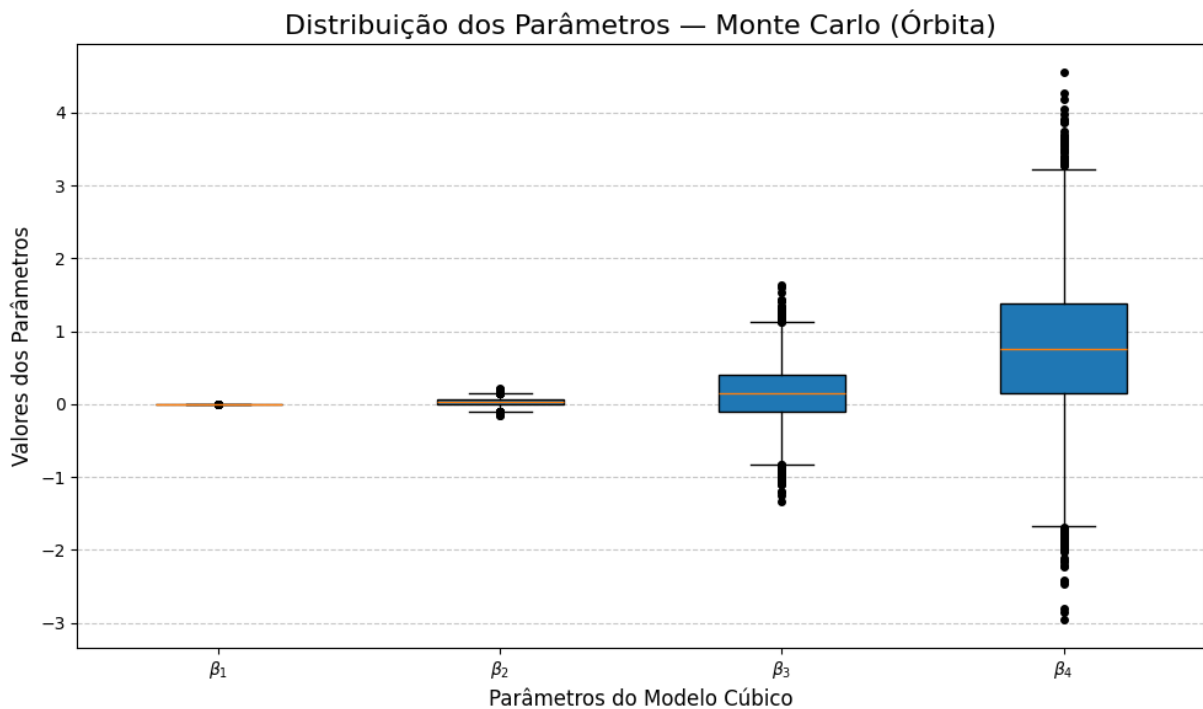


Figura 39 – Gráfico box plot dos parâmetros da função cúbica para a órbita. Fonte: Da autora, 2025.

A maior variabilidade observada no intercepto (β_4) pode estar associada a diferenças individuais entre as éguas ou a pequenas variações no posicionamento do transdutor durante o exame ultrassonográfico, o que afeta a linha de base sem alterar o padrão geral de crescimento.

Em conjunto, os resultados sugerem que o modelo cúbico é adequado para descrever o crescimento da órbita ocular fetal no intervalo analisado (5^o a 11^o mês), representando a tendência central observada e apresentando incerteza controlada nas estimativas para valores próximos da média.

4.2 Junção Útero-Placentária

De forma análoga ao procedimento realizado para a órbita ocular fetal, a variável Junção Útero-Placentária (JUP) foi organizada em função dos meses de gestação e suas médias mensais calculadas (Tabela 8). Esse procedimento possibilitou resumir a tendência central por mês, reduzindo a variabilidade individual das medidas ultrassonográficas e construindo uma série temporal representativa da evolução dessa biometria ao longo da gestação. Ressalta-se, contudo, que a JUP apresenta maior variabilidade e maior sobreposição entre meses consecutivos, de modo que, neste estudo, ela foi empregada como parâmetro complementar de avaliação da saúde da placenta, interpretado em função da idade gestacional estimada pela órbita.

Tabela 8 – Valores da junção útero-placentária (JUP) para cada mês de gestação em éguas da raça Crioula.

Mês de gestação	JUP (cm)
5	0.3511
6	0.3670
7	0.3613
8	0.4578
9	0.4880
10	0.6218
11	0.7591

Ao considerar as observações individuais da junção útero-placentária (JUP) ao longo dos meses gestacionais (5^o ao 11^o), o teste de Shapiro-Wilk, assim como aconteceu na órbita, também apresentou um valor p com nível de significância abaixo do esperado ($W = 0,9422$; $p < 0,0001$), de modo que a distribuição dos valores não pode ser assumida como normal. Assim, além das médias, a caracterização descritiva por mês foi apresentada também por mediana e intervalo interquartil, por serem medidas mais robustas frente à assimetria e à presença de valores extremos. A Tabela 9 apresenta as estatísticas descritivas da JUP por mês gestacional, e mostra um aumento mais significativo dos valores a partir do 8^o mês.

Tabela 9 – Estatísticas descritivas da JUP por mês gestacional (dados individuais).

Mês	N	Média	DP	Mediana	IIQ
5	56	0.3511	0.1425	0.3400	0.2125
6	53	0.3670	0.1153	0.3600	0.1400
7	52	0.3613	0.0907	0.3550	0.1400
8	50	0.4578	0.1328	0.4700	0.2050
9	46	0.4880	0.1073	0.4550	0.1775
10	44	0.6218	0.1814	0.6000	0.1900
11	32	0.7591	0.1781	0.7500	0.1675

A Figura 40 apresenta a distribuição da JUP por mês gestacional. Observa-se tendência de aumento da mediana do 5^o ao 11^o mês, com maior dispersão nos meses finais e presença de valores extremos em alguns períodos.

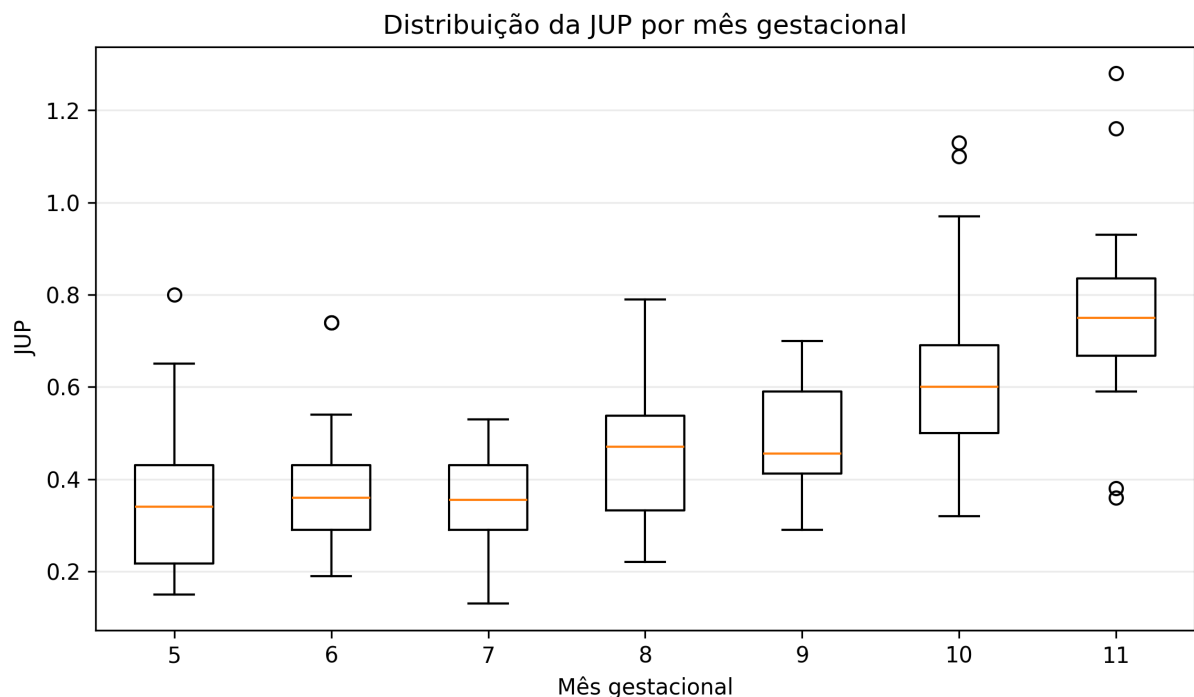


Figura 40 – Boxplot da JUP por mês gestacional. Fonte: Da autora, 2025.

A comparação entre os meses foi realizada pelo teste de Kruskal-Wallis, que mostrou existir diferença estatisticamente significativa entre os grupos ($H = 147,17$; $p < 0,0001$). Para identificar quais meses diferiram entre si, aplicou-se o pós-hoc de Dunn com correção para comparações múltiplas (Tabela 10). De modo análogo ao descrito para a órbita, as letras representam grupos homogêneos, onde meses que compartilham ao menos uma letra não diferem estatisticamente ($\alpha = 0,05$).

Tabela 10 – Postos médios e grupos homogêneos do pós-teste de Dunn para a JUP por mês gestacional ($\alpha = 0,05$).

Mês	Posto médio	Grupo homogêneo
11	292,61	A
10	249,16	AB
9	194,67	BC
8	172,30	C
6	112,86	D
7	111,85	D
5	105,66	D

Como pode ser analisado, os grupos homogêneos indicaram que os meses 5°, 6° e 7° não diferiram entre si, formando um bloco com menores valores, além do 6° mês apresentar posto médio maior que o 7° mês. Observou-se ainda um padrão de transição no terço final, no qual meses consecutivos apresentaram sobreposição parcial: o 8° mês foi semelhante ao 9°, o 9° foi semelhante ao 10°, e o 10° foi semelhante ao 11°. Em contrapartida, meses mais distantes não compartilharam o mesmo grupo, sendo observada diferença entre a JUP em meses mais dispersos como na comparação entre o terço inicial (do 5° ao 7° mês) em relação ao terço final (do 8° ao 11° mês), o que caracteriza aumento progressivo da JUP com o avanço gestacional, porém com maior sobreposição entre meses adjacentes. Esse padrão sugere que a JUP capta a evolução temporal, mas com menor capacidade de diferenciar meses consecutivos quando comparada à órbita.

Ao comparar os resultados de ambas as variáveis, observa-se que tanto a órbita fetal quanto a JUP apresentam crescimento ao longo dos meses gestacionais, com diferenças estatisticamente significativas entre os grupos mensais segundo o teste de Kruskal-Wallis. Entretanto, os padrões de separação entre meses não são semelhantes. Na órbita, os grupos homogêneos formam uma progressão mais definida, com transições entre meses intermediários, sugerindo um gradiente mensal mais bem definido. Já na JUP, há maior formação de blocos, com os meses iniciais (5° a 7°) permanecendo semelhantes entre si e uma elevação mais marcada a partir do 8° mês, ainda que com sobreposição entre meses consecutivos.

Em termos práticos, isso significa que a órbita tende a apresentar uma evolução mais regular ao longo do intervalo avaliado, enquanto a JUP mostra aumento consistente, porém com maior variabilidade e sobreposição entre meses adjacentes. Essa diferença é coerente com a interpretação do estudo, no qual a órbita se comporta como parâmetro mais estável de crescimento fetal, ao passo que a JUP pode refletir maiores variações associadas à mensuração, ao avaliador e às características biológicas. Por essa razão, neste trabalho, a órbita foi adotada como biometria princi-

pal para estimar a idade gestacional, enquanto a JUP foi considerada como variável complementar, útil para avaliar se a espessura da junção útero-placentária (JUP) está compatível com a faixa esperada para a idade estimada.

A Figura 41 apresenta os ajustes obtidos pelos modelos testados (cúbico, Logístico, Gompertz, Bertalanffy e Chanter). Todos reproduziram a tendência de crescimento da JUP, mas apresentaram maior dispersão em relação à órbita, reflexo da variabilidade biológica e da sensibilidade da medida a fatores externos.

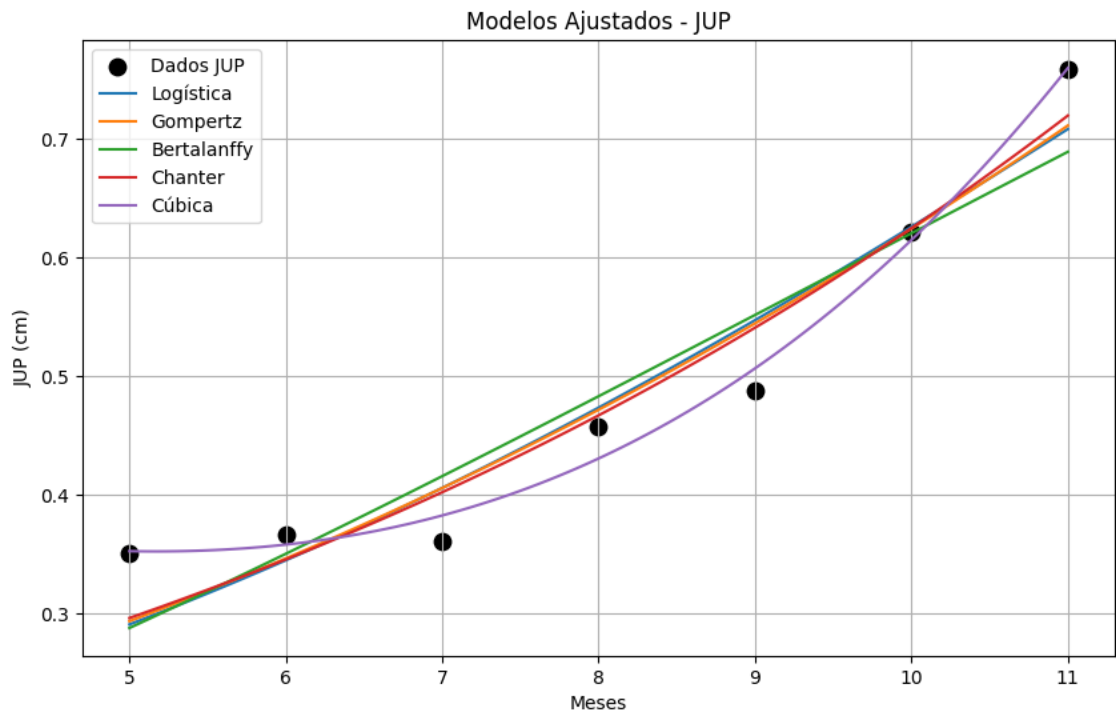


Figura 41 – Modelos ajustados à variável JUP ao longo dos meses de gestação. Fonte: Da autora, 2025.

As métricas de ajuste (Tabela 11) demonstraram desempenho superior do modelo cúbico, que apresentou o menor desvio médio absoluto ($DMA = 0,0122$), o menor desvio padrão residual ($DPR = 0,0167$) e o maior coeficiente de determinação ($R^2 = 0,9882$). Em contraste, modelos como Bertalanffy ($R^2 = 0,8812$) e Logístico ($R^2 = 0,9120$) demonstraram menor capacidade explicativa, sugerindo menor adequação para capturar o padrão observado da JUP neste conjunto de dados e no intervalo analisado.

Tabela 11 – *DMA*, *DPR* e R^2 para a Junção Útero-Placentária (JUP).

Modelos	<i>DMA</i>	<i>DPR</i>	R^2
Logístico	0.0367	0.0422	0.9120
Gompertz	0.0348	0.0403	0.9196
Bertalanffy	0.0421	0.0490	0.8812
Chanter	0.0317	0.0370	0.9323
Cúbica	0.0122	0.0167	0.9882

Dessa forma, no intervalo estudado (5^o ao 11^o mês), o modelo cúbico apresentou melhor desempenho entre os modelos avaliados, indicando sua adequação para descrever a tendência média da JUP em éguas Crioulas. Ressalta-se, entretanto, que a escolha do modelo para a JUP tem aqui finalidade descritiva e de construção de faixas de referência, e não de predição direta da idade gestacional.

A análise dos resíduos do ajuste cúbico aplicado à variável JUP (Figura 42) mostrou distribuição equilibrada em torno da linha zero, alternância entre valores positivos e negativos e amplitude máxima inferior a 0,03 cm. Não se observam padrões sistemáticos evidentes, o que sugere que os desvios são predominantemente aleatórios no intervalo avaliado.

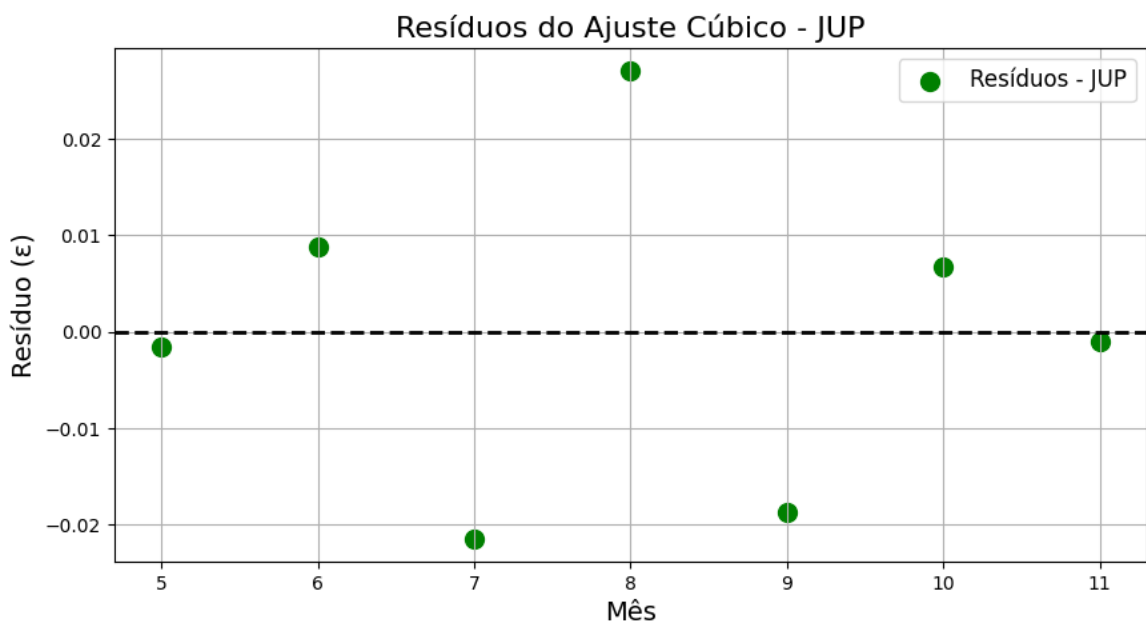


Figura 42 – Resíduos do ajuste cúbico para a variável JUP. Fonte: Da autora, 2025.

O teste de Shapiro-Wilk aplicado aos resíduos apresentou estatística $W = 0,9457$ e $p = 0,6908$, não rejeitando a hipótese de normalidade ($p > 0,05$).

Em ambos os casos (órbita e JUP), a inspeção gráfica dos resíduos e o teste de normalidade confirmaram que o ajuste cúbico ajustou-se adequadamente às variáveis biológicas em estudo, capturando as variações reais sem apresentar vieses ou padrões sistemáticos de erro, sugerindo adequação estatística às análises.

Para avaliar a robustez preditiva do modelo, aplicou-se o Método de Monte Carlo com 10000 simulações. Em cada iteração, ruídos aleatórios $N(0, \sigma^2)$ foram adicionados aos valores ajustados, seguidos de reestimação dos parâmetros. A Figura 43 apresenta o ajuste cúbico acompanhado da região sombreada que representa o intervalo de confiança do método de Monte Carlo. Observa-se que a faixa de incerteza possui um alargamento maior do que para a órbita, evidenciando sua maior variabilidade não captada pelo modelo. Pode-se notar um alargamento maior nos meses iniciais onde também existe sobreposição nos intervalos de confiança.

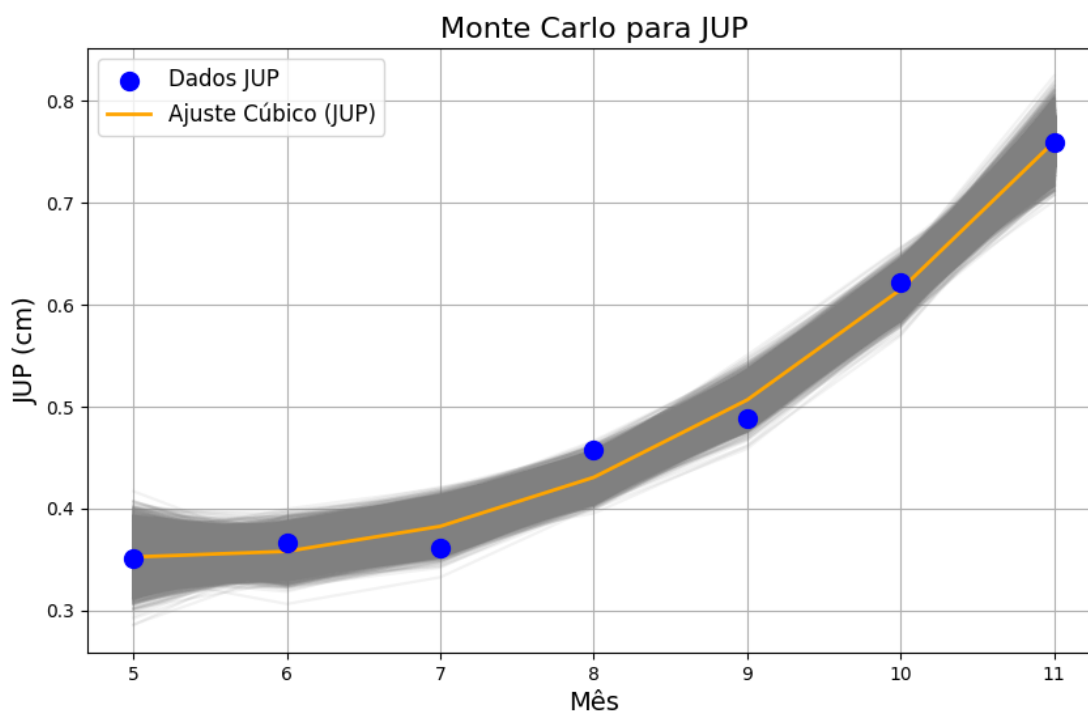


Figura 43 – Gráfico do ajuste cúbico com o método de Monte Carlo para a variável JUP. Fonte: Da autora, 2024.

A Tabela 12 apresenta os intervalos de confiança calculados para pontos específicos da JUP. Observa-se que a amplitude entre os limites inferior e superior é relativamente pequena, porém nota-se sobreposição entre os intervalos de diferentes meses, especialmente até o 9º mês gestacional. Esse padrão indica baixa capacidade de discriminação temporal da JUP, motivo pelo qual os intervalos foram empregados como ferramenta de apoio à avaliação da saúde placentária, e não como preditor direto da idade gestacional. Na aplicação prática proposta, a idade gestacional é estimada pela órbita e, em seguida, a medida observada de JUP é comparada com a faixa esperada

para aquela idade: valores abaixo do intervalo sugerem JUP inferior ao padrão amostral observado, valores dentro do intervalo indicam compatibilidade, e valores acima sugerem JUP superior ao esperado para o período. Essa classificação tem finalidade de apoio ao acompanhamento e não substitui avaliação clínica.

Tabela 12 – Intervalo de confiança para pontos específicos (95%) da JUP.

Mês	IC Inferior	IC Superior
5,0	0,3219	0,3850
5,5	0,3291	0,3826
6,0	0,3363	0,3802
6,5	0,3483	0,3925
7,0	0,3603	0,4048
7,5	0,3855	0,4278
8,0	0,4107	0,4509
8,5	0,4475	0,4899
9,0	0,4843	0,5290
9,5	0,5387	0,5833
10,0	0,5931	0,6376
10,5	0,6622	0,7144
11,0	0,7314	0,7912

A Figura 44 ilustra o ajuste cúbico obtido pelo método dos percentis. Os pontos observados acompanham a curva ajustada, enquanto as barras de erro permanecem curtas e homogêneas em toda a série temporal. Mesmo a partir do 8º mês, quando a JUP apresentou crescimento mais acelerado, a amplitude dos intervalos manteve-se controlada, sugerindo consistência do ajuste no domínio analisado.

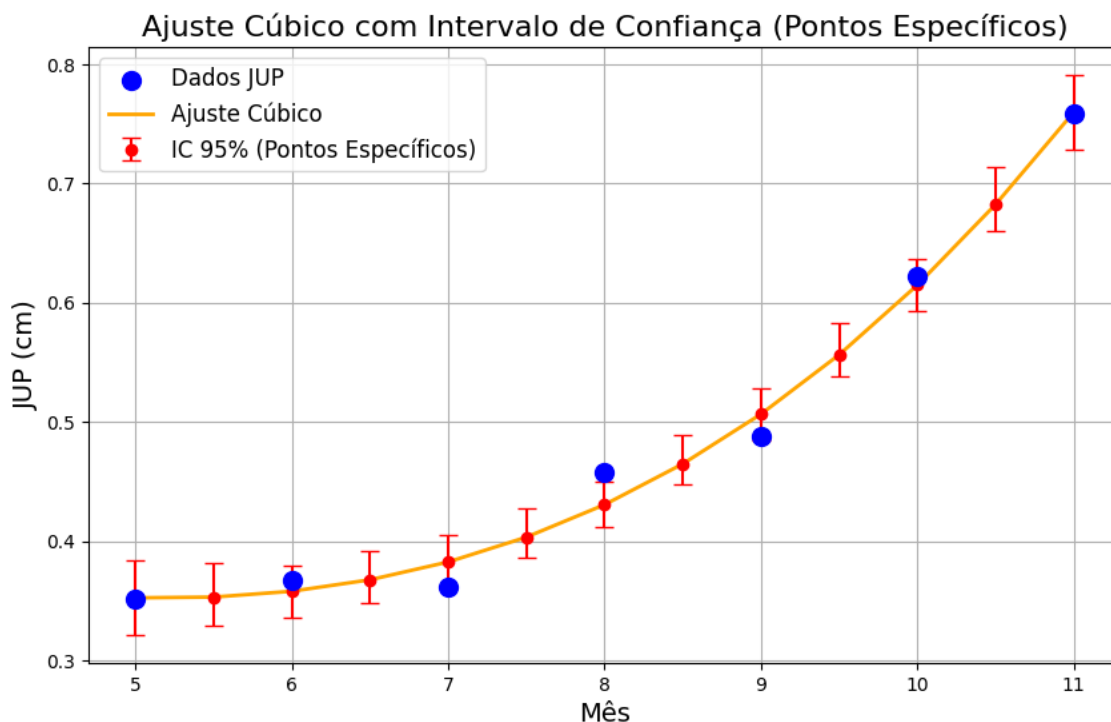


Figura 44 – Gráfico do ajuste Cúbico com intervalo de confiança pelo Método dos Percentis através do Método de Monte Carlo para a JUP. Fonte: Da autora, 2025.

Os dados gráficos demonstram que a expansão da junção útero-placentária (JUP) permanece relativamente estável entre o 5º e 7º mês de gestação, com crescimento mais acelerado a partir do 8º mês. A amplitude dos intervalos evidencia uma tendência de aumento progressivo da JUP, alcançando valores superiores a 0,73 cm ao final do 11º mês.

Além disso, observa-se que o ajuste cúbico acompanha os dados observados, enquanto os intervalos percentílicos capturam a variabilidade esperada em sistemas biológicos.

Ao analisar trajetórias individuais de algumas éguas para a JUP, observa-se uma tendência geral de aumento ao longo da gestação, as curvas individuais apresentaram maior variabilidade em relação ao padrão médio. Diferentemente da órbita ocular fetal, as trajetórias das éguas não seguiram de forma tão uniforme a tendência central, evidenciando diferenças tanto na magnitude quanto no formato das curvas. Essa interpretação é compatível com a grande variabilidade encontrada nos dados dessa variável.

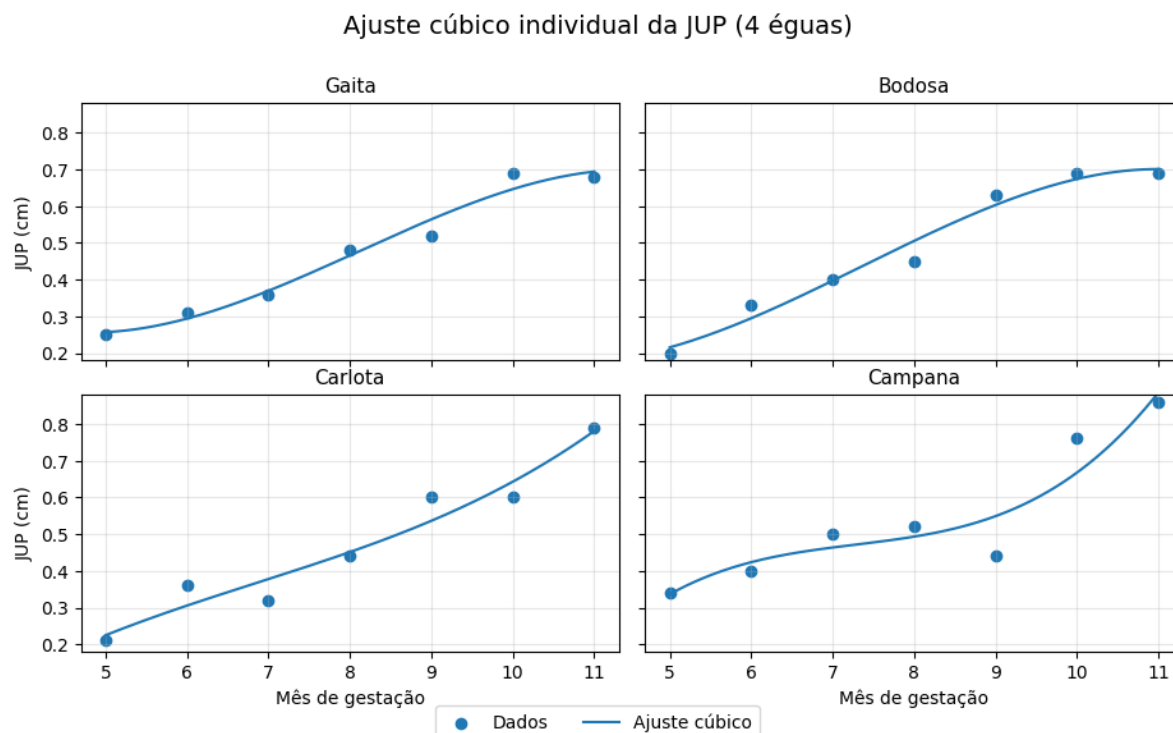


Figura 45 – Modelo cúbico ajustado à variável JUP ao longo dos meses de gestação para éguas específicas. Fonte: Da autora, 2025.

A Tabela 13 reúne os parâmetros estimados a partir do ajuste pelo método dos mínimos quadrados (MMQ). No caso da função cúbica aplicada à JUP, utilizou-se a formulação polinomial do MMQ, enquanto, para os modelos de natureza não linear nos parâmetros, foi adotada a versão não linear do método.

Tabela 13 – Parâmetros estimados para a variável JUP.

Modelo	β_1	β_2	β_3	β_4
Logístico	1.585	0.213	12	–
Gompertz	10	4.489	0.048	–
Bertalanffy	2	0.701	0.077	–
Chanter	0.132	10	0.168	0.010
Cúbica	0.001	-0.004	-0.021	0.456

A análise da distribuição dos coeficientes do modelo cúbico (Figura 46) revelou que os parâmetros β_1 e β_2 apresentaram baixa variabilidade, garantindo estabilidade na definição da curvatura da função. O coeficiente β_3 (linear) mostrou maior dispersão, refletindo a sensibilidade da inclinação às flutuações amostrais, enquanto o intercepto β_4 exibiu maior amplitude e presença de *outliers*, indicando que a linha de base do

modelo absorve parte da variabilidade biológica.

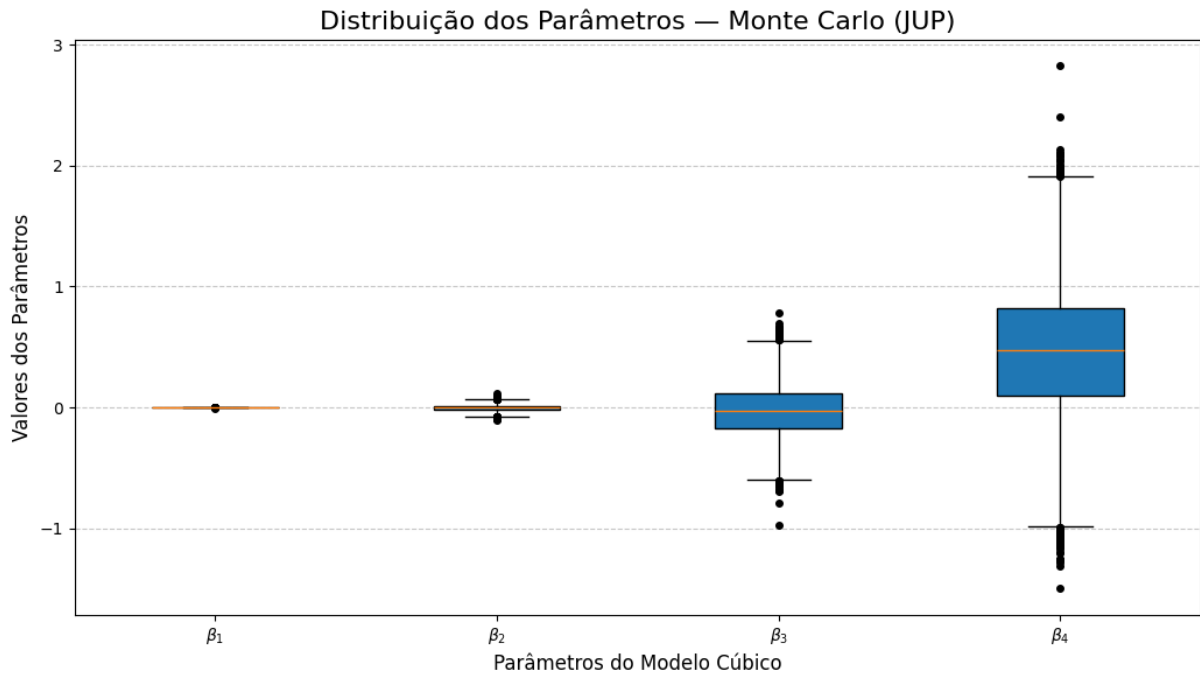


Figura 46 – Gráfico box plot dos parâmetros da função cúbica para a variável JUP. Fonte: Da autora, 2025.

Em síntese, os parâmetros cúbicos demonstraram estabilidade suficiente para assegurar a confiabilidade do ajuste, enquanto os termos linear e constante concentraram maior incerteza, característica coerente com a natureza biológica dos dados. A análise estocástica, portanto, sustenta a estabilidade do ajuste no conjunto analisado, sugerindo que as estimativas permanecem consistentes mesmo sob diferentes cenários de variabilidade.

Por fim, a comparação entre as duas variáveis evidencia que, embora a JUP apresente bom desempenho estatístico e relevância prática, os intervalos de confiança obtidos para a órbita foram mais estreitos e com menor sobreposição entre os meses. Isso indica menor incerteza associada às estimativas da órbita, consolidando-a como a biometria de maior precisão. Assim, a JUP se configura como medida complementar, utilizada neste estudo para compor faixas de referência por mês e apoiar a avaliação clínica em relação à idade estimada pela órbita, contribuindo para o monitoramento da gestação no intervalo analisado.

5 APLICATIVO

Com o objetivo de transferir os resultados obtidos na etapa de modelagem para uma ferramenta aplicável em campo, foi desenvolvido o aplicativo denominado *EquiGest*. O aplicativo serve como instrumento de apoio à estimativa da idade gestacional de éguas da raça Crioula, a partir da medida ultrassonográfica da órbita ocular fetal e, de forma complementar e informativa sobre a saúde gestacional, a partir da junção útero-placentária (JUP).

A proposta do *EquiGest* é facilitar a realização dos cálculos, otimizar o tempo de avaliação e centralizar o armazenamento dos registros em um único ambiente, para uso por veterinários e criadores, especialmente em rotinas de manejo em campo. Ressalta-se que o aplicativo foi implementado para uso no intervalo de 5 a 11 meses, correspondente ao domínio observado neste estudo, não sendo recomendado para extrapolações fora desse intervalo.

5.0.1 Funcionamento geral do aplicativo

O aplicativo recebe como entrada os valores informados pelo usuário, realiza o mapeamento dessas medidas para o intervalo gestacional por meio do modelo cúbico ajustado e da estrutura de incerteza derivada das simulações, e retorna como saída (i) a estimativa pontual da idade gestacional (em meses e dias) e (ii) um intervalo provável associado à estimativa, construído a partir da variabilidade quantificada nas simulações. Adicionalmente, quando a medida da JUP é informada, o aplicativo realiza uma avaliação ao comparar o valor observado com a faixa esperada (intervalo ideal) correspondente ao período gestacional estimado, classificando a JUP como dentro do esperado, abaixo do esperado ou acima do esperado.

A tela inicial do aplicativo apresenta os atalhos principais para navegação, permitindo acesso direto ao módulo de cálculo, ao banco de dados e à seção de ajuda, conforme apresentado na Figura 47.

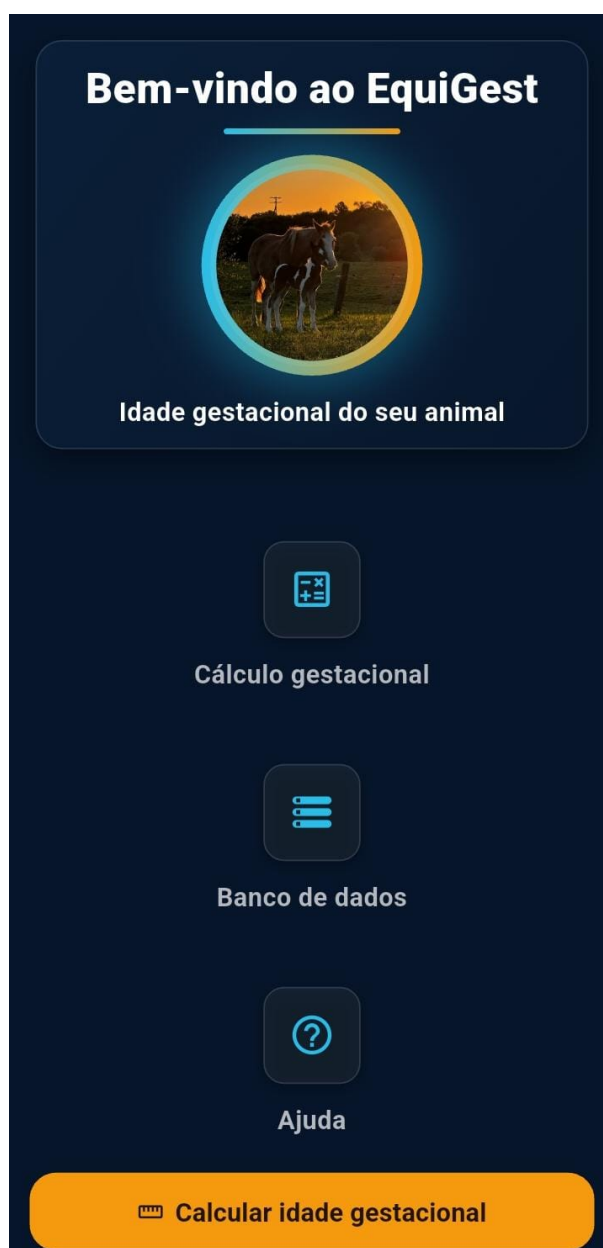


Figura 47 – Tela inicial do aplicativo *EquiGest*. Da autora, 2025.

5.0.2 Entrada de dados e cálculo gestacional

Ao selecionar a opção de cálculo gestacional, o usuário é direcionado para o formulário de entrada de dados (Figura 48). Nessa etapa, são apresentados campos de identificação do animal para fins de registro. Como campos obrigatórios, incluem-se a medida da órbita ocular fetal em cm, essencial para a estimativa dos meses de gestação e a raça do animal, tendo em vista que o aplicativo foi desenvolvido com modelos apropriados para a raça Crioula. Como dados opcionais, para salvamento no banco de dados podem ser informados o nome da égua e a idade. A junção útero-placentária (JUP) também pode ser registrada, sendo utilizada para monitoramento da condição gestacional por comparação com a faixa esperada.

← **Cálculo gestacional**

Dados da avaliação

Calcule a idade gestacional

Campos marcados com * são obrigatórios

Nome da égua

Raça *

Idade

Medida da órbita (cm) *

Medida da JUP (cm)

Calcular idade gestacional

Figura 48 – Formulário de entrada de dados para cálculo gestacional. Da autora, 2025.

Após o acionamento do botão de cálculo da idade gestacional, o aplicativo processa a informação utilizando o modelo cúbico selecionado e validado na etapa estatística para o cálculo pontual. Em seguida, a estimativa é apresentada também em intervalo provável, baseado na variabilidade quantificada pelas simulações de Monte Carlo. Para o salvamento dos resultados no banco de dados, o usuário deve clicar no botão “Salvar”, disponibilizado na parte inferior após o preenchimento dos campos.

5.0.3 Banco de dados e histórico de avaliações

O *EquiGest* inclui um módulo de armazenamento local, denominado “Banco de dados”, que permite registrar e consultar avaliações realizadas. Essa funcionalidade foi desenvolvida para facilitar o acompanhamento do histórico de medições, mantendo

um registro cronológico das entradas, resultados e classificação relacionada à JUP.

A Figura 49 apresenta um exemplo de listagem de registros, contendo: dados básicos do animal, valores informados, estimativa gestacional, intervalo provável e mensagem de avaliação da JUP em relação ao intervalo esperado.

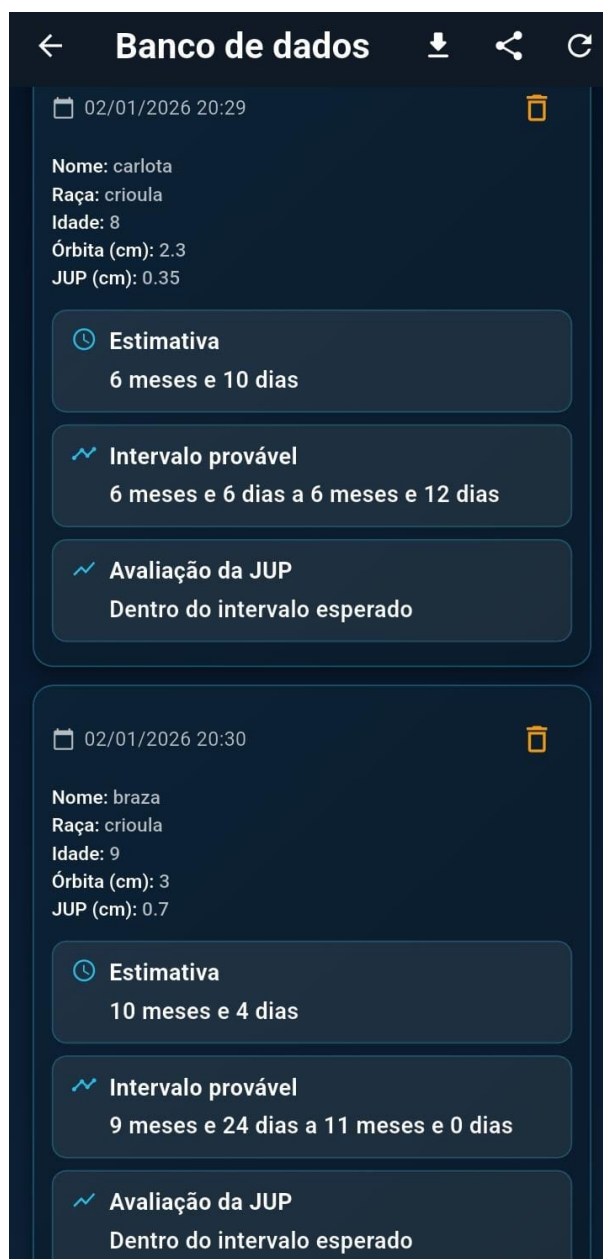


Figura 49 – Tela do banco de dados com histórico de avaliações e resultados. Da autora, 2025.

Na parte superior da interface, observa-se o cabeçalho com o título “Banco de dados” e ícones de ação que permitem exportação, compartilhamento e atualização da lista de registros. Essas opções apoiam o uso prático do aplicativo, permitindo extrair resultados para armazenamento externo e envio a outros profissionais, quando necessário.

Os registros são apresentados separadamente, cada um correspondendo a uma

avaliação salva. No topo de cada avaliação é exibida a data e hora do registro, garantindo controle dos registros. No canto superior direito, há o ícone de exclusão, que permite remover registros individualmente.

5.0.4 Seção de ajuda e orientações de uso

Para reduzir erros de preenchimento e melhorar a usabilidade, o aplicativo inclui uma seção de ajuda com instruções diretas sobre inserção de dados, faixas válidas e interpretação dos resultados. Essa seção orienta o usuário quanto ao domínio de aplicação (5 a 11 meses) e reforça a necessidade de consistência nas medidas ultrassonográficas.

A Figura 50 apresenta a tela de ajuda do *EquiGest*.

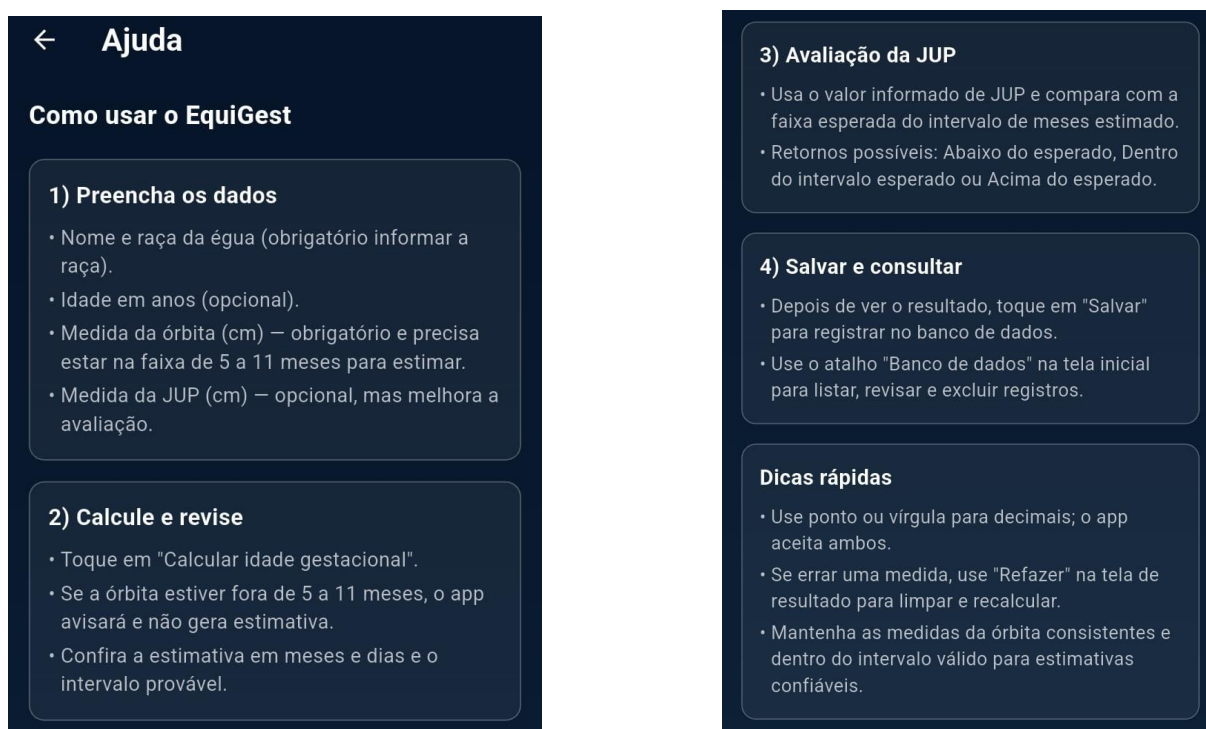


Figura 50 – Tela de orientações de uso e ajuda do aplicativo *EquiGest*. Da autora, 2025.

5.0.5 Considerações finais e limitações

Ao integrar a modelagem matemática com uma interface simples, o *EquiGest* constitui uma etapa de aplicação prática dos resultados desta pesquisa, favorecendo o uso padronizado do método em cenários de campo. Apesar disso, o aplicativo possui as limitações do estudo, onde sua validade está restrita ao intervalo observado e sua precisão depende da qualidade das medidas obtidas por ultrassonografia. Assim, os resultados devem ser interpretados como suporte à tomada de decisão, e não como substituição da avaliação clínica e reprodutiva.

6 CONCLUSÕES

Este estudo modelou a evolução média da órbita ocular fetal e da junção útero-placentária (JUP) em éguas da raça Crioula entre o 5^o e o 11^o mês de gestação, comparando os modelos Logístico, Gompertz, Von Bertalanffy e Chanter com um modelo polinomial cúbico e quantificando a incerteza associada às estimativas.

No intervalo analisado, todos os modelos reproduziram tendências compatíveis com a evolução fisiológica. Entretanto, a comparação das métricas (*DMA*, *DPR* e R^2) indicaram maior aderência descritiva do modelo cúbico aos dados, com melhor desempenho comparado aos outros modelos, especialmente para a JUP. Enquanto para a variável órbita, todos os modelos foram considerados adequados, com pequenas diferenças entre as métricas. A órbita apresentou crescimento mais regular e menor variabilidade, configurando-se como a base mais adequada para a estimativa da idade gestacional.

Para a JUP, apesar do bom ajuste descritivo no período avaliado, observou-se maior dispersão, o que limita seu uso como preditora direta da idade gestacional. Assim, neste trabalho a JUP foi utilizada como parâmetro complementar, permitindo classificar a medida observada em relação às faixas esperadas para o período estimado pela órbita, contribuindo de forma informativa para o acompanhamento da condição gestacional. Do ponto de vista clínico, esse resultado sugere que a JUP deve ser interpretada como um indicador de triagem e acompanhamento placentário, e não como um marcador temporal da idade gestacional. Na prática, valores de JUP dentro das faixas esperadas para o período estimado pela órbita tendem a reforçar a interpretação de evolução gestacional compatível, enquanto medidas elevadas ao longo das avaliações podem sinalizar necessidade de reavaliação mais frequente e investigação de alterações da unidade feto-placentária, especialmente em gestações de risco.

Entre as limitações práticas, destacam-se a dispersão interindividual da JUP e a sobreposição de valores entre meses consecutivos, o que reduz sua capacidade discriminatória para estimar idade gestacional. Além disso, fatores como condições maternas, variações fisiológicas, eventuais diferenças de técnica de mensuração e até mesmo o avaliador podem contribuir para a variabilidade observada, reforçando que a

JUP deve ser utilizada de forma complementar e sempre integrada à avaliação clínica e a outras informações ultrassonográficas.

As equações ajustadas pelo método dos mínimos quadrados (MMQ) foram:

- Para a variável órbita:

$$y(x) = -0,002x^3 + 0,028x^2 + 0,145x + 0,783 \quad (31)$$

- Para a variável JUP:

$$y(x) = 0,001x^3 - 0,004x^2 - 0,021x + 0,456 \quad (32)$$

A etapa de simulação pelo Método de Monte Carlo possibilitou incorporar a variabilidade dos dados e produzir intervalos prováveis associados às estimativas, ampliando a utilidade prática do método ao fornecer, além do valor pontual, um intervalo de incerteza. Os ajustes foram realizados a partir das médias mensais, de modo que a quantificação de incertezas foi propagada principalmente sobre o processo de ajuste das curvas e não sobre toda a variabilidade individual observada nos dados brutos. Por essa razão, os intervalos obtidos tendem a ser relativamente estreitos, refletindo a boa aderência do modelo às tendências centrais e a precisão descritiva do ajuste.

Consequentemente, as estimativas tornam-se mais confiáveis para éguas cujas mensurações se aproximam do comportamento médio da população estudada. Em contrapartida, para observações mais afastadas dessa tendência central, a incerteza prática pode ser maior, uma vez que o modelo foi construído para representar a evolução média e não trajetórias individuais. Assim, os intervalos apresentados devem ser interpretados como uma medida de incerteza associada à curva média ajustada, servindo como referência populacional, e não como garantia de precisão uniforme para todos os indivíduos.

Como produto aplicado, foi desenvolvido o aplicativo *EquiGest*, que operacionaliza os resultados ao retornar automaticamente a estimativa pontual da idade gestacional, o intervalo provável e, quando informada, a classificação da JUP em relação ao mês estimado.

Destaca-se que o modelo cúbico foi ajustado a partir de dados compreendidos entre o 5º e o 11º mês de gestação, intervalo no qual as variáveis analisadas podem ser mensuradas de forma consistente. Dessa forma, as estimativas produzidas pelo modelo são válidas apenas dentro desse período gestacional. A utilização da equação fora desse intervalo configura uma extrapolação matemática, podendo gerar resultados sem significado biológico ou clínico. Assim, recomenda-se que o modelo seja aplicado exclusivamente no domínio de dados para o qual foi ajustado, respeitando os limites de validade estabelecidos neste estudo.

Como perspectivas futuras, recomenda-se ampliar a base amostral e registrar as

mensurações em escala temporal contínua. Sugere-se ainda incluir novas biometrias fetais e variáveis maternas, visando à construção de modelos que descrevam melhor os dados individuais e não dependam de uma única variável. Além disso, recomenda-se a implementação de modelos multivariados e de abordagens bayesianas para a quantificação de incertezas. Propõe-se também o aprimoramento e atualização do aplicativo, com rotinas de armazenamento dos exames e acompanhamento da evolução gestacional das éguas.

REFERÊNCIAS

AGRON. **Cavalo da Raça Crioulo**: resistência, rusticidade e versatilidade. Acesso em: 14 jul. 2025, Disponível em: <https://agron.com.br/noticias/animais-e-criacoes/2025/01/07/cavalo-da-raca-crioulo/>.

ALLEN, W. R. Hormonal control of early pregnancy in the mare. **Animal Reproduction Science**, Amsterdam, v.7, n.1-3, p.283–304, 1984.

ALVES, R.; DELGADO, C. **Processos estocásticos**. Faculdade de Economia, Universidade do Porto, 1997. Notas de aula.

Associação Brasileira dos Criadores de Jumento Pêga. **Equídeos no Brasil**. Acesso em: 25 de fev. 2025., Disponível em: <https://abcjpega.org.br/equideos-no-brasil/>.

AURICH, C. Reproductive cycles of horses. **Animal Reproduction Science**, Amsterdam, v.124, n.3-4, p.220–228, 2011.

AZARIAS, E. C. P.; GONZAGA, N. A.; MACHADO, L. E. M.; MUNIZ, J. A.; SILVA, E. M. Uso dos modelos von Bertalanffy e Logístico na descrição do acúmulo de massa seca das plantas daninhas *Amaranthus retroflexus* e *Amaranthus hybridus*. **Revista Foco**, Curitiba, v.16, n.7, p.1–17, 2023.

BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A. **Estatística Básica**. 6.ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

COELHO, E. F.; VELLAME, L. M.; COELHO FILHO, M. A.; LEDO, C. A. S. Desempenho de modelos de calibração de guias de onda acopladas a TDR e a multiplexadores em três tipos de solos. **Revista brasileira de ciência do solo**, Viçosa, v.30, p.23–30, 2006.

Conselho Regional de Medicina Veterinária da Paraíba. **Brasil tem o 4ª maior rebanho equino do mundo; setor movimentou R\$ 30 bilhões**. Acesso em: 25 jun. 2025, Disponível em: <https://www.crmvpb.org.br/brasil-tem-o-4a-maior-rebanho-equino-do-mundo-setor-movimentou-r-30-bilhoes/>.

COSTA, E. A.; FINGER, C. A.; CUNHA, T. A. da. Influência da posição sociológica na relação hipsométrica de *Araucaria angustifolia*. **Revista Brasileira de Ciências Agrárias**, Recife, PE, Brasil, v.9, n.1, p.110–116, 2014.

CURCIO, B. R.; SILVA, G. C.; SCALCO, R. Monitoramento do parto em éguas. **Revista Brasileira de Reprodução Animal**, Belo Horizonte, MG, v.45, n.4, p.296–301, 2021.

CURCIO, B. R.; WENDT, C. G.; SILVA, G. C.; NOGUEIRA, C. E. W. Monitoramento da gestação em éguas - o que fazer na rotina de campo. **Revista Brasileira de Reprodução Animal**, Belo Horizonte, MG, v.43, n.2, p.261–268, 2019.

DE PAULA, J. C. G. **Avaliação da probabilidade de cobertura do intervalo de confiança bootstrap percentílico para proporção em comparação ao usual intervalo de confiança de Wald**. Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, 2020. Monografia (Especialista em Estatística Aplicada).

DONATELLI, G. D.; KONRATH, A. C. Simulação de Monte Carlo na avaliação de incertezas de medição. , Sorocaba, SP, v.13, n.25/26, p.5–15, 2005.

DUTT-ROSS, S. **Manual de Análise de Dados**. Rio de Janeiro, 2020.

FORNARI, L. M.; FINGER, I. S.; KICKHOFEL, L. d. A.; ROMAN, M.; ALMEIDA, B. A. d.; CURCIO, B. d. R. Avaliação do desenvolvimento de fetos equinos através do diâmetro da órbita e aorta fetal do 5º ao 9º mês de gestação. **XXXIII Congresso de Iniciação Científica**, Pelotas, 2014.

FRANCIOLLI, A. L. R.; CORDEIRO, B. M.; FONSECA, E. T. da; RODRIGUES, M. N.; SARMENTO, C. A. P.; AMBROSIO, C. E.; CARVALHO, A. F. de; MIGLINO, M. A.; SILVA, L. A. Characteristics of the equine embryo and fetus from days 15 to 107 of pregnancy. **Theriogenology**, Amsterdam, v.76, n.5, p.819–832, 2011.

GINTHER, O. J. **Reproductive Biology of the Mare: Basic and Applied Aspects**. 2.ed. Cross Plains, Wisconsin: Equiservices, 1992.

GINTHER, O. J. **Ultrasonic Imaging and Animal Reproduction: Book 1. Fundamentals**. Cross Plains, WI: Equiservices Publishing, 1995.

GINTHER, O. J. **Equine pregnancy: physical interactions between the uterus and conceptus**. Proceedings American Association of Equine Practitioners, 1998. 73-104p. v.44.

Globo Rural. **Criação de cavalos movimentada R\$ 30 bilhões no Brasil**. Acesso em: 25 jun. 2025, Disponível em: <https://globo.com/feiras/noticia/2023/07/criacao-de-cavalos-movimentada-r-30-bilhoes-no-brasil.ghtml>.

Governo do Estado do Rio Grande do Sul. **Cavalo Crioulo é o novo símbolo do Rio Grande do Sul**. Acesso em: 17 de jul. 2024, Disponível em: <https://www.estado.rs.gov.br/cavalo-crioulo-e-o-novo-simbolo-do-rio-grande-do-sul>.

GUIDI, L. **Capítulo 5: Ajuste de mínimos quadrados**. Porto Alegre, RS, Brasil, 2026. Disponível em: http://www.mat.ufrgs.br/~guidi/grad/MAT01032/calculo_numerico.cap5.pdf, acessado em 18 mar. 2026, Notas de aula da disciplina de Cálculo Numérico.

HARTWIG, F. P.; ANTUNEZ, L.; DOS SANTOS, R. S.; LISBOA, F. P.; PFEIFER, L. F. M.; NOGUEIRA, C. E. W.; CURCIO, B. R. Determining the gestational age of Crioulo mares based on a fetal ocular measure. **Journal of Equine Veterinary Science**, Amsterdam, v.33, n.7, p.557–560, 2013.

HENDRIKS, W. K.; COLENBRANDER, B.; VAN DER WEIJDEN, G. C.; STOUT, T. A. E. Maternal age and parity influence ultrasonographic measurements of fetal growth in Dutch Warmblood mares. **Animal Reproduction Science**, Amsterdam, v.115, p.110–123, 2009.

JUSTO, D.; SAUTER, E.; AZEVEDO, F.; GUIDI, L.; KONZEN, P. **Cálculo Numérico: um livro colaborativo—versão Scilab**. Porto Alegre, RS: UFRGS, 2018.

LAU, L. C.; LISBOA, F. P.; DOS SANTOS, R. S.; HARTWIG, F. P.; CURCIO, B. R. Relação da Medida Órbita Ocular Fetal e Tempo de Gestação em Éguas da Raça Crioula. **XIX CIC, XXII ENPOS, II Mostra Científica**, Pelotas, 2010.

LIMA, G. W. **Ajuste ótimo por Levenberg-Marquardt de métodos de previsão para iniciação de trinca**. 2022. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — PUC, Rio de Janeiro.

MATTA, M. P. **Avaliação dos parâmetros de gestação de éguas da raça Mangalarga Marchador**. 2013. Dissertação (Mestrado em Zootecnia) — Universidade Federal de Viçosa, Minas Gerais.

MÁXIMO, K. A. M. Compreendendo o Modelo de Gompertz e suas aplicações. **Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação**, São Paulo, v.9, n.3, p.2134–2141, 2023.

MAZZINI, A. R. A. **Análise da curva de crescimento de machos Hereford considerando heterogeneidade de variâncias e autocorrelação dos erros**. 2001. Dissertação (Mestrado em Agronomia) — Universidade Federal de Lavras, Minas Gerais.

MCMURRAY, A.; PEARSON, T.; CASARIM, F. **Guía para aplicar el enfoque Monte Carlo al análisis de incertidumbre en la contabilidad forestal y de gases de efecto invernadero**. Little Rock, AR, USA: Winrock Internacional, 2017.

METROPOLIS, N.; ULAM, S. The Monte Carlo Method. **Journal of the American Statistical Association**, Alexandria, VA, USA, v.44, n.247, p.335–341, 1949.

MISCHAN, M. M.; PINHO, S. Z. **Modelos não lineares**: funções assintóticas de crescimento. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2014.

MONTGOMERY, D. C.; PECK, E. A.; VINING, G. G. **Introduction to linear regression analysis**. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2021.

MORENO, L. Z.; MORCILLO, A. M. Comparação de três ou mais grupos independentes: Teste de Kruskal–Wallis. , Campinas, São Paulo, 2019.

MOTULSKY, H.; CHRISTOPOULOS, A. **Fitting models to biological data using linear and nonlinear regression**: a practical guide to curve fitting. Oxford University Press, 2004.

MURRAY, J. D. **Mathematical Biology**: I. An Introduction. 3.ed. New York: Springer, 2002.

NETO, J. F. C.; MOURA, H. J. de; FORTE, S. H. A. C. Modelo prático de previsão de fluxo de caixa operacional para empresas comerciais considerando os efeitos do risco, através do método de Monte Carlo. **REAd: Revista Eletrônica de Administração**, Porto Alegre, v.8, n.3, 2002.

PINHEIRO, J.; BATES, D. **Mixed-effects models in S and S-PLUS**. New York: Springer Science & Business Media, 2000.

PONTES, A. C. F.; CORRENTE, J. E. Comparações múltiplas não-paramétricas para o delineamento com um fator de classificação simples. **Revista de Matemática e Estatística**, São Paulo, v.19, p.179–197, 2001.

Portal dos Festivais. **Guia 7º Levante da Canção Gaúcha**. Acesso em: 13 fev. 2026, Disponível em: <http://www.portaldosfestivais.com.br/2017/05/guia-7-levante-da-cancao-gaucha.html>.

POZOR, M. A. **Equine placenta – A clinician’s perspective. Part 1**: Normal placenta – Physiology and evaluation. Wiley Online Library, 2016. 327–334p. v.28, n.6.

PUIATTI, G. A. **Regressão quantílica não linear para descrição de diferentes níveis de acúmulo de matéria seca em plantas de alho**. 2018. Tese (Doutorado em Estatística Aplicada e Biometria) — Universidade Federal de Viçosa, Minas Gerais.

QUEIROZ, C. E. B.; JÚNIOR, W. G.; JAHN, T. R.; HAHN, T. T.; FONTANA, T. S.; BOLZAN, V. Validação de um programa para a estimativa da incerteza de medição pelo método de Monte Carlo na medição do CTDI_w em CT. In: **IX Latin American IRPA Regional Congress on Radiation Protection and Safety**, Rio de Janeiro, 2013.

QUININO, R. C.; REIS, E. A.; BESSEGATO, L. F. O coeficiente de determinação R^2 como instrumento didático para avaliar a utilidade de um modelo de regressão linear múltipla. **Universidade Federal de Minas Gerais**, Belo Horizonte, 1991.

RATKOWSKY, D. A. **Handbook of nonlinear regression models**. New York: Marcel Dekker, 1990.

RAZALI, N. M.; WAH, Y. B. Power comparisons of shapiro-wilk, kolmogorov-smirnov, lilliefors and anderson-darling tests. **Journal of statistical modeling and analytics**, Malaysia, v.2, n.1, p.21–33, 2011.

REIS, R. M.; CECON, P. R.; PUIATTI, M.; FINGER, F. L.; NASCIMENTO, M.; SILVA, F. F.; CARNEIRO, A. P. S.; SILVA, A. R. Modelos de regressão não linear aplicados a grupos de acessos de alho. **Horticultura Brasileira**, Brasília, v.32, n.2, p.178–183, 2014.

RENAUDIN, C. Evaluation and monitoring of the pregnant mare. In: **Manual of clinical procedures in the horse**. Hoboken, New Jersey, USA: Wiley, 2017. p.370–383.

RIBEIRO, R.; SOUZA, F.; MUNIZ, J.; FERNANDES, T.; MOURA, R. Curva de crescimento em altura na cernelha de equinos da raça Mangalarga Marchador considerando-se heterocedasticidade. **Arquivo Brasileiro de Medicina Veterinária e Zootecnia**, Belo Horizonte, v.70, n.1, p.272–278, 2018.

SANTOS, I. P. O. d.; CURCIO, B. R.; DALLO, B. d. F.; THIER, G. H. d. S.; DALLMANN, P. B. J.; NOGUEIRA, C. E. W. Avaliação Ultrassonográfica Transretal e Transabdominal Placentária, Fetal e dos Fluidos Fetais no Terço Final da Gestação. **Revista Brasileira de Medicina Equina**, Belo Horizonte, MG, Brasil, v.1, n.1, p.1–12, 2024.

SARMENTO, J. L. R.; REGAZZI, A. J.; SOUSA, W. H. d.; TORRES, R. d. A.; BREDA, F. C.; MENEZES, G. R. d. O. Estudo da curva de crescimento de ovinos Santa Inês. **Revista Brasileira de Zootecnia**, Viçosa, MG, Brasil, v.35, n.2, p.435–442, 2006.

SCAPIM, J. **Modelo de Von Bertalanffy generalizado aplicado a curvas de crescimento animal**. 2008. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) — Universidade Estadual de Campinas, São Paulo.

SHAPIRO, S. S.; WILK, M. B. An analysis of variance test for normality (complete samples). **Biometrika**, Oxford, UK, v.52, n.3-4, p.591–611, 1965.

SILVA, P. V. **Modelo não linear Chanter**: uma aplicação aos dados de crescimento de frutos do cacauzeiro. 2018. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agronomica) — Universidade de São Paulo.

SILVA, P. V. **Uso da regressão não linear quantílica na descrição de dados de crescimento**. 2022. Tese (Doutorado em Estatística e Experimentação Agronomica) — Universidade de São Paulo.

SILVA, V. M.; MATTOS, V. L. D. O método dos mínimos quadrados no ajuste de um modelo polinomial. **Scientia Plena**, São Cristóvão, SE, Brasil, v.13, n.4, 2017.

TEIXEIRA N., M. R.; CRUZ, J. F. da; FARIA, H. H. N.; SOUZA, E. S.; CARNEIRO, P. L. S.; MALHADO, C. H. M. Descrição do crescimento de ovinos Santa Inês utilizando modelos não-lineares selecionados por análise multivariada. **Revista Brasileira de Saúde e Produção Animal**, Salvador, BA, Brasil, v.17, n.1, p.26–36, 2016.

TROEDSSON, M. H. T.; SAGE, A. P. Fetal placental evaluation in the mare. , St. Paul, MN, USA, 2001. Department of Clinical and Population Sciences, College of Veterinary Medicine, University of Minnesota.

TURNER, R. M.; MCDONNELL, S. M.; FEIT, E. M.; GROGAN, E. H.; FOGLIA, R. How to determine gestational age of an equine pregnancy in the field using transrectal ultrasonographic measurement of the fetal eye. **Proceedings American Association of Equine Practitioners**, San Antonio, Texas, v.52, p.250–255, 2006. How-to Session: Reproduction.

VIANA, J. C.; LEVINO, N. A.; MOTA, C. M. M. **Simulação de Monte Carlo auxiliando a análise de viabilidade econômica de projetos**. Niterói, RJ: IV Congresso Nacional de Excelência em Gestão, 2008.

WENZEN, D. P. **Desenvolvimento embrionário na égua**. 2019. Trabalho de Conclusão de Curso — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.