

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
Instituto de Física e Matemática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática



Dissertação

**Soluções Analíticas da Equação de Black-Scholes via Transformada de Fourier:
Proposta de Modificação com Aplicação ao Mercado Brasileiro de Opções**

Iago Henrique Teixeira Marcolino

Pelotas, 2026

Iago Henrique Teixeira Marcolino

**Soluções Analíticas da Equação de Black-Scholes via Transformada de Fourier:
Proposta de Modificação com Aplicação ao Mercado Brasileiro de Opções**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática do Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Claudio Zen Petersen
Coorientador: Prof. Dr. Leslie Darien Perez Fernandez

Pelotas, 2026

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas
Catalogação da Publicação

M321s Marcolino, Iago Henrique Teixeira

Soluções analíticas da equação de Black-Scholes via Transformada de Fourier [recurso eletrônico] : proposta de modificação com aplicação ao mercado brasileiro de opções / Iago Henrique Teixeira Marcolino ; Claudio Zen Petersen, orientador ; Leslie Darien Pérez Fernández, coorientador. — Pelotas, 2026.
76 f. : il.

Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2026.

1. Equação de Black-Scholes. 2. Transformada de Fourier. 3. Precificação de opções. 4. Modelo difusão-advecção-reação. 5. Mercado brasileiro de opções. I. Petersen, Claudio Zen, orient. II. Fernández, Leslie Darien Pérez, coorient. III. Título.

CDD 515.723

Iago Henrique Teixeira Marcolino

**Soluções Analíticas da Equação de Black-Scholes via Transformada de Fourier:
Proposta de Modificação com Aplicação ao Mercado Brasileiro de Opções**

Dissertação aprovada, como requisito parcial, para obtenção do grau de Mestre em Modelagem Matemática, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas.

Data da Defesa: vinte de fevereiro de dois mil e vinte e seis

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Claudio Zen Petersen (orientador)

Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Prof. Dr. Leslie Darien Perez Fernandez (co-orientador)

Doutor em Ciências Matemáticas pelo Instituto de Cibernética, Matemática y Física.

Prof. Dr. Jorge Rodolfo Silva Zabadal

Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Prof. Dr. Julio Cesar Lombaldo Fernandes

Doutor em Matemática Aplicada pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Prof. Dr. Alexandre Molter

Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro concedido por meio da bolsa de mestrado, fundamental para o desenvolvimento desta pesquisa. Agradeço também ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática (PPGMMat) da Universidade Federal de Pelotas (UFPEl) pela estrutura acadêmica e pelo suporte oferecido durante a realização deste trabalho.

RESUMO

MARCOLINO, Iago Henrique Teixeira . **Soluções Analíticas da Equação de Black-Scholes via Transformada de Fourier: Proposta de Modificação com Aplicação ao Mercado Brasileiro de Opções.** Orientador: Claudio Zen Petersen. 2026. 78 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2026.

Este trabalho apresenta uma abordagem analítica para a solução da equação de Black-Scholes via transformada de Fourier. Inicialmente, a equação é convertida na equação do calor através de algumas mudanças de variáveis, que possibilita a aplicação da transformada de Fourier para obtenção de uma solução exata, respeitando a condição inicial e de contorno do problema. Essa solução tradicional aplicada ao mercado de opções brasileiro, com a comparação entre o preço teórico calculado e dados reais de opções da Petrobras S.A., considerando diferentes preços de exercício e datas de vencimento. Os resultados demonstraram boa precisão do modelo para opções dentro do dinheiro e com vencimentos mais distantes. No entanto, para opções fora do dinheiro e próximas do vencimento, a solução apresentou erros mais significativos. Este comportamento motivou a propor uma solução analítica alternativa da equação de Black-Scholes também via transformada de Fourier, considerando os termos difusivo-advectivo-reativo. A solução alternativa foi aplicada ao mercado brasileiro, nas opções da Vale S. A. e comparada com o método tradicional, mostrando maior precisão nas estimativas dos preços das opções.

Palavras-chave: equação de Black-Scholes; transformada de Fourier; precificação de opções; modelo difusão-advectação-reação; mercado brasileiro de opções.

ABSTRACT

MARCOLINO, Iago Henrique Teixeira . **Analytical Solutions of the Black-Scholes Equation via Fourier Transform: A Modification Proposal with Application to the Brazilian Options Market.** Advisor: Claudio Zen Petersen. 2026. 78 f. Dissertation (Masters in Mathematical Modeling) – Institute of Physics and Mathematics, Federal University of Pelotas, Pelotas, 2026.

This work presents an analytical approach to solving the Black-Scholes equation via the Fourier transform. Initially, the equation is converted into the heat equation through a series of variable transformations, which enables the application of the Fourier transform to obtain an exact solution, respecting the initial and boundary conditions of the problem. This traditional solution is applied to the Brazilian options market, comparing the calculated theoretical price with real data from Petrobras S.A. options, considering different strike prices and expiration dates. The results demonstrated good accuracy of the model for in-the-money options and those with longer maturities. However, for out-of-the-money options and those close to expiration, the solution presented more significant errors. This behavior motivated the proposal of an alternative analytical solution to the Black-Scholes equation, also via the Fourier transform, considering the diffusive-advective-reactive terms. The alternative solution was applied to the Brazilian market using Vale S.A. options and compared with the traditional method, indicating greater accuracy in estimating option prices.

Keywords: Black-Scholes Equation; Fourier Transform; Option Pricing; Diffusion-Advection-Reaction Model; Brazilian Options Market.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Comparação entre o preço real (VWAP Opção) e o preço teórico (Preço B-S) da opção PETRD381. Fonte: autoral.	35
Tabela 2	Comparação entre o preço real (VWAP Opção) e o preço teórico (Preço B-S) da opção PETRC39. Fonte: autoral.	36
Tabela 3	Comparativo entre o preço real da opção, o modelo Black-Scholes tradicional e o modelo modificado com seus respectivos erros relativos.	50
Tabela 4	Comparação entre preços observados e valores teóricos do modelo de Black-Scholes modificado, para diferentes valores do parâmetro p	52
Tabela 5	Erros relativos entre preços observados e valores teóricos do modelo de Black-Scholes modificado, para diferentes valores de p	53
Tabela 6	Valores observados e parâmetro ajustado p do modelo de Black-Scholes modificado para a opção VALEH56.	55
Tabela 7	Valores observados e parâmetro ajustado p do modelo de Black-Scholes modificado para a opção VALEI563.	57
Tabela 8	Valores observados e parâmetro ajustado p do modelo de Black-Scholes modificado para a opção VALEJ594.	59

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
BS	Modelo de Black-Scholes
CAPM	Modelo de Precificação de Ativos Financeiros (Capital Asset Pricing Model)
CBOE	Chicago Board Options Exchange
CME	Chicago Mercantile Exchange
DTM	Método de Transformada Diferencial (Differential Transform Method)
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial
FT	Transformada de Fourier
ICE	Intercontinental Exchange
ITÔ	Cálculo de Itô
LTCM	Long-Term Capital Management
ML	Aprendizado de Máquina (Machine Learning)
PDE	Partial Differential Equation (Equação Diferencial Parcial)
PETR4	Petrobras S.A. – Ação Ordinária
PINN	Rede Neural Informada pela Física (Physics-Informed Neural Network)
SPMD	Single Program Multiple Data (se ainda quiser manter de antes)
VWAP	Preço Médio Ponderado por Volume (Volume Weighted Average Price)

GLOSSÁRIO

Ação: Menor parcela (fração) do capital social de uma sociedade anônima.

Ativo Subjacente: Ativo financeiro (como ações, moedas ou commodities) que serve de base para o valor de um derivativo.

Black-Scholes (Modelo de): Modelo matemático para a precificação de opções europeias, formulado por Fisher Black, Myron Scholes e Robert Merton em 1973.

Crise Financeira Global (2007–2009): Período de instabilidade econômica global causado, em grande parte, pela má alocação de riscos e uso excessivo de derivativos hipotecários nos Estados Unidos.

Derivativo: Instrumento financeiro cujo valor depende do preço de outro ativo, o chamado ativo subjacente.

EDO (Equação Diferencial Ordinária): Equação matemática que envolve derivadas de uma função em relação a uma única variável independente.

EDP (Equação Diferencial Parcial): Equação que envolve derivadas parciais de uma função em relação a duas ou mais variáveis independentes.

Equação do Calor: Equação diferencial parcial parabólica utilizada como analogia matemática para resolver a equação de Black-Scholes.

Fronteira Livre: Em problemas com opções americanas, refere-se à condição dinâmica que determina o momento ótimo de exercício da opção.

Lema de Itô: Resultado fundamental do cálculo estocástico que permite calcular a diferencial de uma função que depende de um processo estocástico.

Machine Learning (Aprendizado de Máquina): Conjunto de técnicas computacionais que permite que algoritmos "aprendam" padrões a partir de dados.

Método dos Elementos Finitos: Técnica numérica para resolver equações diferenciais por meio da discretização do domínio do problema.

Método das Diferenças Finitas: Técnica numérica para resolver equações diferenciais aproximando derivadas por diferenças entre pontos discretos.

Modelo de Heston: Modelo de precificação de opções que considera a volatilidade como uma variável estocástica, formulado por Steven Heston em 1993.

Movimento Browniano: Movimento aleatório observado em partículas microscópicas, base para os modelos estocásticos utilizados em finanças.

Opção: Direito de compra ou venda de um ativo a um preço estabelecido.

Opção Europeia: Tipo de opção que só pode ser exercida na data de vencimento.

Portifólio: Coleção de ativos de investimentos feitos por um agente (pessoa, empresa ou fundo).

Precificação: Processo de determinar o valor justo de um ativo financeiro.

Processo Estocástico: Processo matemático que evolui com o tempo de maneira aleatória.

Strike: Preço estabelecido pelo qual o titular da opção pode comprar ou vender uma ação.

Spread: Diferença entre o preço de compra e venda de um ativo.

Transformada de Fourier: Ferramenta matemática usada para transformar uma função no domínio do tempo (ou espaço) para o domínio da frequência.

Transformada de Mellin: Técnica de integração utilizada para resolver certas equações diferenciais, especialmente em problemas de valor final.

Volatilidade: Medida da variação ou incerteza do preço de um ativo ao longo do tempo.

Volatilidade Estocástica: Modelo em que a volatilidade do ativo também é tratada como uma variável aleatória que muda com o tempo.

SUMÁRIO

GLOSSÁRIO	10
1 INTRODUÇÃO	14
1.1 Objetivos	17
1.1.1 Objetivo Geral	17
1.1.2 Objetivo Específico	17
1.2 Estrutura do Trabalho	17
2 EVOLUÇÃO HISTÓRICA DOS DERIVATIVOS E A FORMULAÇÃO DO MODELO DE BLACK-SCHOLES	19
2.1 Como surgiam os contratos futuros	19
2.2 Construção do Modelo	20
2.3 Conceitos de Finanças e Evolução dos Modelos de Precificação de Opções	20
2.3.1 Ação	20
2.3.2 Dividendo	21
2.3.3 Derivativos	21
2.3.4 Risco de Mercado	21
2.3.5 Volatilidade	21
2.3.6 Opções	21
2.4 Histórico de construção do modelo de Black-Scholes	22
2.4.1 Modelo Binomial de Jacob Bernoulli	22
2.4.2 Movimento Browniano	23
2.4.3 Modelo de Bachelier	23
2.4.4 Proposta de Paul Samuelson	24
2.5 Dedução de Black-Scholes	24
2.5.1 Movimento Browniano Geométrico	24
2.5.2 Lema de Itô	24
2.5.3 Construção do Portfólio	25
2.5.4 Igualdade ao Rendimento Livre de Risco	26
2.6 Desafios do Modelo	26
3 UMA ABORDAGEM ANALÍTICA PARA A EQUAÇÃO DE BLACK-SCHOLES	28
3.1 Solução Via Transformada de Fourier	30
3.2 Voltando para as variáveis originais	32
3.2.1 Voltando para a variável C	33
3.3 Aplicação da Solução da Equação de Black-Scholes	34

4	SOLUÇÃO MODIFICADA	37
4.1	Modificação na Solução da Equação de Black-Scholes	37
4.1.1	Solução Via Transformada de Fourier	39
4.1.2	Restringindo o intervalo de integração	40
4.1.3	Voltando para as variáveis originais	44
4.1.4	Analisando os limites de p	47
4.2	Aplicação da Solução Modificada	49
4.2.1	Compreendendo a Solução Modificada	50
4.2.2	Explorando o comportamento do parâmetro p	51
4.2.3	Calibração do parâmetro p	53
5	CONCLUSÃO	62
APÊNDICE A	DEDUÇÃO DETALHADA DA EQUAÇÃO (9)	66
APÊNDICE B	DEDUÇÃO DETALHADA DO α E β	68
APÊNDICE C	ALTERANDO O INTERVALO DE INTEGRAÇÃO	71
APÊNDICE D	DEDUÇÃO DETALHADA PARA ALTERAR O INTERVALO DE INTEGRAÇÃO	72
APÊNDICE E	APLICAÇÃO DETALHADA DA CONVOLUÇÃO	75
APÊNDICE F	SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE BLACK-SCHOLES MODIFICADA PARA $P = 1$	76
REFERÊNCIAS		77

1 INTRODUÇÃO

A precificação de derivativos é um tema amplamente discutido no mercado financeiro, devido à crescente demanda e à importância desses instrumentos para o funcionamento do mercado como um todo, já que são muito utilizados para mitigar riscos de mercado. Esse cenário leva os profissionais da área a buscarem formas cada vez mais sofisticadas de determinar o preço justo desses ativos financeiros, sendo a equação de Black-Scholes a mais conhecida entre elas.

As consequências de uma má precificação de derivativos podem ser catastróficas para uma economia, como evidenciado na Crise Financeira Global (2007–2009), em que um dos principais fatores foi o uso indiscriminado de derivativos baseados em hipotecas residenciais nos Estados Unidos (Hull; Treepongkaruna; Colwell; Heaney; Pitt, 2013).

Nesse sentido, a modelagem matemática desempenha um papel fundamental na compreensão do mundo real. Para descrever ou prever fenômenos mais complexos, muitos modelos acabam sendo formulados em termos de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) ou Equações Diferenciais Parciais (EDPs). As EDPs oferecem maior flexibilidade para lidar com sistemas que dependem de múltiplas variáveis e dimensões, sendo essenciais na análise de sistemas dinâmicos e distribuídos.

Mais especificamente, com relação ao mercado financeiro de opções, o modelo de Black-Scholes é uma EDP que busca determinar o preço de um ativo financeiro derivado, isto é, um instrumento cujo valor depende de outro ativo subjacente, conforme detalhado no Capítulo 2.

Esse modelo já foi aplicado em diversas áreas, como na avaliação de projetos de construção civil e de tecnologia da informação, conforme discutido em Saedi; Tularam (2018). Trata-se de uma equação em derivadas parciais que fornece uma estimativa teórica para o preço de opções do tipo europeu. Essa equação mostra que qualquer opção de compra ou venda possui um valor único, o qual não altera o risco nem o retorno esperado do ativo subjacente.

Os fundamentos do modelo remontam aos trabalhos de Jacob Bernoulli (Albani, 2019), no século XVII, com a introdução dos ensaios de Bernoulli e o desenvolvimento

da distribuição binomial — o que forneceu as bases para modelos probabilísticos discretos.

Em 1827, ao observar a dinâmica de partículas de pólen sobre a superfície da água, Robert Brown notou que elas apresentavam um movimento aleatório constante, fenômeno que posteriormente ficou conhecido como movimento browniano (Hong, 2024). Embora Brown não tenha formulado um modelo matemático, suas observações foram fundamentais para o desenvolvimento da teoria estocástica.

Em 1900, Louis Bachelier foi o primeiro a aplicar o conceito de movimento browniano à modelagem do preço de ativos financeiros (Albani, 2019). Em sua tese de doutorado, ele propôs um modelo baseado em uma equação diferencial estocástica com uma condição inicial correspondente ao preço do ativo. Esse trabalho pioneiro estabeleceu as bases para o uso de processos estocásticos em finanças.

Em 1944, Kiyoshi Itô desenvolveu as ferramentas matemáticas necessárias para manipular equações diferenciais estocásticas, introduzindo o que hoje conhecemos como cálculo de Itô e, em especial, o Lema de Itô, peça-chave na formulação moderna de modelos financeiros (Ito, 1978).

Utilizando o Lema de Itô para descrever a dinâmica do preço de uma opção, em 1973, Fisher Black e Myron Scholes apresentaram uma fórmula analítica para a precificação de opções europeias (Black; Scholes, 1973). Com a contribuição de Robert Merton, essa abordagem foi formalizada e difundida, resultando na famosa fórmula de Black-Scholes, um marco na história da matemática financeira.

Apesar de seu impacto e larga aplicação, o modelo de Black-Scholes apresenta diversas limitações quando confrontado com os dados reais dos mercados. Entre as principais restrições destacam-se a suposição de volatilidade constante, a ausência de custos de transação, a hipótese de mercados completos e a inaptidão para lidar com opções americanas ou com pagamento de dividendos. Esses fatores motivaram o desenvolvimento de diversos modelos alternativos, como os que incorporam volatilidade estocástica.

Os modelos com volatilidade estocástica trazem um grande diferencial na teoria da precificação de derivativos, pois elimina a suposição da volatilidade constante presente no modelo de Black-Scholes. Dessa forma o modelo traz aspectos mais realistas no comportamento do preço dos ativos aumentando a precisão do modelo, principalmente em momentos de tensão do mercado, que geram maior volatilidade.

O primeiro modelo que incorpora a volatilidade estocástica foi introduzido por Steven Heston, em 1993, chamado de modelo de Heston (Hong, 2024). Esse modelo é descrito por um sistema de equações diferenciais estocásticas. Trata-se de um processo duplo, sendo o preço do ativo subjacente e a volatilidade estocástica. Isso permite que a volatilidade varie ao longo do tempo, fornecendo maior precisão ao modelo.

Outro método que vem sendo bastante implementados nos modelos, são as técnicas de machine learning, como bem apontado por Hong (2024). Técnicas baseadas em redes neurais e aprendizado de máquina tendem a reconhecer as relações não lineares do modelo aplicado, gerenciar bem um grande conjunto de dados e utilizar o grande volume de dados históricos para se adaptar as novas condições do mercado.

Paralelo a isso, o Modelo de Black-Scholes já foi solucionado de diversas formas tanto analiticamente, quanto através de métodos numéricos.

Em 1994, Harper obteve uma solução exata reduzindo equações diferenciais parciais parabólicas a sua forma canônica, obtendo assim uma generalização da solução (Saedi; Tularam, 2018).

Pouco depois, em 1999, Forsyth aplicou o Método dos Elementos Finitos sob volatilidade estocástica, discretizando as equações de fronteira, com o objetivo de obter uma solução exata da equação de Black-Scholes (Saedi; Tularam, 2018).

Visando fornecer uma solução direta da equação de Black-Scholes Jódar; Sevilla; Cortés; Sala (2005) aplicou a Transformada de Mellin, considerando o problema de valor final, pois já era comum utilizar técnicas avançadas de engenharia financeira na época.

Outra maneira de se obter uma solução exata foi proposta por Rodrigo; Mamon (2006) inserindo o fator de variação temporal em diferentes aspectos das opções, o diferencial desse método é que ele foi baseado em opções sobre ações que pagam dividendos.

Bohner; Zheng (2009) aplicaram a técnica de decomposição aproximada de domain. Recentemente Edeki; Ugbemor; Owoloko (2015) utilizaram o método de Transformada Diferencial Projetada (PDTM), substituindo o então clássico Método de Transformada Diferencial (DTM). Todos os métodos citados até aqui buscam uma solução analítica.

As soluções numéricas mais relevantes começaram a ser implementadas a partir de 1999 quando Forsyth; Vetzal; Zvan (1999) utilizou o Método dos Elementos Finitos para precificar opções do tipo *lookback* discretas com a volatilidade variável.

Dremkova; Ehrhardt (2011) aplicaram a transformação de domínio para utilizar um esquema compacto de diferenças finitas afim de solucionar a equação de Black-Scholes para opções americanas com função de volatilidade não linear.

Utilizando software de cálculo simbólico através de uma solução numérica, Song; Wang (2013) utilizaram o Método das Diferenças Finitas implícito.

Pouco tempo depois Uddin; Siddiki; Hossain (2015) empregaram também o método das diferenças finitas e dos elementos finitos e geraram resultados de esquemas semi-discretos e totalmente discretos para opções europeias.

Outros métodos numéricos também foram aplicados recentemente, podendo ser vistos com mais detalhes no artigo de revisão de Saedi; Tularam (2018).

Embora o modelo de Black-Scholes tenha sido extensivamente estudado e aplicado desde sua formulação em 1973, revisitar sua estrutura matemática por meio de métodos analíticos, como a transformada de Fourier, continua sendo relevante, tanto do ponto de vista teórico, quanto didático. Tal abordagem permite não apenas uma compreensão mais aprofundada dos fundamentos da precificação de opções, como também fornece uma base sólida para generalizações posteriores, incluindo casos com volatilidade estocástica, saltos ou mudanças de regime.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Este trabalho tem como objetivos gerais desenvolver e analisar a solução analítica da equação de Black-Scholes via transformada de Fourier, bem como propor uma modificação na solução clássica que se ajuste melhor aos preços reais de mercado.

1.1.2 Objetivo Específico

- Deduzir a equação de Black-Scholes e sua formulação como uma Equação Diferencial Parcial do tipo parabólica associada à equação do calor;
- Obter uma solução analítica clássica da equação de Black-Scholes via transformada de Fourier, respeitando as condições iniciais e de contorno do problema;
- Aplicar a solução clássica analítica na precificação de opções no mercado brasileiro nas opções da Petrobras S. A. (PETR4);
- Propor uma solução analítica alternativa para a equação de Black-Scholes associado a equação da difusão-advectação-reação com a inclusão de um coeficiente difusivo p ;
- Comparar a solução modificada com a solução tradicional, nas opções da PETR4;
- Calibrar o parâmetro p com base em dados reais do mercado de opções da Vale S. A. (VALE3), bem como compreender seu comportamento.

1.2 Estrutura do Trabalho

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: no Capítulo 1, apresenta-se o contexto histórico e os fundamentos da teoria dos derivativos; o Capítulo 2 descreve a formulação do modelo de Black-Scholes, destacando suas hipóteses, interpretações e dedução matemática; o Capítulo 3 traz uma abordagem analítica para a solução tradicional da equação de Black-Scholes por meio da transformada de Fourier, junto com

uma aplicação prática ao mercado financeiro brasileiro, com análise dos resultados obtidos; o Capítulo 4 é proposto uma solução modificada via transformada de Fourier, junto com a aplicação da solução alternativa comparada à solução tradicional; o Capítulo 5 apresenta-se as conclusões, limitações e sugestões para a continuidade do trabalho.

2 EVOLUÇÃO HISTÓRICA DOS DERIVATIVOS E A FORMULAÇÃO DO MODELO DE BLACK-SCHOLES

Neste capítulo será mostrado como surgiu a teoria por trás da precificação dos derivativos e seus principais contribuintes até a formulação final, a Equação de Black-Scholes.

2.1 Como surgiam os contratos futuros

Os contratos futuros surgiram da necessidade de comerciantes e agricultores realizarem negócios com maior segurança, tanto em relação à entrega quanto ao pagamento das mercadorias. Com o objetivo de mitigar os riscos associados às negociações com prazos, foi desenvolvido o mercado de opções, que posteriormente foi formalizado nas bolsas de valores. Assim, negociantes e produtores passaram a contar com uma plataforma comum, como a Chicago Board of Trade, fundada em 1848. Devido ao crescente volume de negociações com opções, foi criada em 1973 a Chicago Board Options Exchange (CBOE) (Hull; Treepongkaruna; Colwell; Heaney; Pitt, 2013).

A partir desse contexto, a comunidade acadêmica passou a buscar métodos para a precificação de opções.

As opções sobre ações do tipo europeu possuem uma data fixa de vencimento, e seu exercício só pode ocorrer nessa data específica. Essa característica as tornava mais simples de modelar na época. Por esse motivo, o modelo de Black-Scholes foi inicialmente desenvolvido com base nesse tipo de opção. Até hoje, o modelo continua amplamente utilizado, devido aos sólidos fundamentos probabilísticos que o sustentam, os quais permitem estimar a probabilidade de exercício de uma opção europeia.

A importância do modelo foi amplamente reconhecida em 1997, quando Robert Merton e Myron Scholes receberam o Prêmio Nobel de Economia por suas contribuições. Infelizmente, Fisher Black, coautor do modelo, faleceu antes da premiação e, portanto, não pôde ser laureado (Saedi; Tularam, 2018).

2.2 Construção do Modelo

O Modelo de Precificação de Ativos Financeiros (CAPM – Capital Asset Pricing Model) (Saedi; Tularam, 2018) descreve a relação entre o risco de um ativo e seu retorno esperado, sendo uma ferramenta fundamental para avaliar se um ativo está subvalorizado ou supervalorizado com base no custo de capital próprio da empresa. A partir dele, estima-se o retorno exigido de uma ação ou outro ativo de risco.

Embora o CAPM tenha influenciado o desenvolvimento da teoria moderna das finanças, o modelo de precificação de opções proposto por Black e Scholes não foi uma aplicação direta do CAPM, mas sim inspirado em sua lógica de equilíbrio de mercado e ausência de arbitragem. A formulação original de Black e Scholes assume que é possível replicar o comportamento de uma opção por meio de um portfólio formado por ativos livres de risco e ações.

Posteriormente, Robert Merton propôs uma abordagem alternativa, baseada explicitamente em um portfólio livre de risco, assumindo que o retorno de tal portfólio, em um intervalo infinitesimal de tempo, deve ser igual à taxa livre de risco. Essa contribuição generalizou e formalizou o modelo, resultando no que hoje é conhecido como modelo de Black-Scholes-Merton.

Como bem descrito por Saedi; Tularam (2018), as principais hipóteses do modelo de Black-Scholes-Merton são:

- A ação subjacente não paga dividendos durante a vigência da opção.
- A taxa de juros livre de risco é constante e conhecida.
- Os agentes podem tomar emprestado ou aplicar a taxa livre de risco sem restrições.
- O preço da ação segue um movimento geométrico browniano, ou seja, apresenta distribuição log-normal com média e variância constantes.
- O número de ações em circulação permanece constante ao longo do tempo.

2.3 Conceitos de Finanças e Evolução dos Modelos de Precificação de Opções

Alguns conceitos de finanças serão introduzidos nessa seção para melhor compreensão dos termos usados durante o trabalho.

2.3.1 Ação

Segundo Neto (2023) ações constituem a menor parcela (fração) do capital social de uma sociedade anônima. São valores caracteristicamente negociáveis e distribuí-

dos aos subscritores (acionistas) de acordo com a participação monetária efetivada.

2.3.2 Dividendo

Conforme definido por Neto (2023), dividendo é uma parte dos resultados da empresa, determinada em cada exercício social e distribuída aos acionistas sob a forma de dinheiro. Todo acionista tem o direito de receber, no mínimo, o dividendo obrigatório fixado em lei.

2.3.3 Derivativos

Derivativos são instrumentos financeiros que se originam (dependem) do valor de outro ativo, tido como ativo de referência. Um contrato derivativo não representa valor próprio, derivando-se do valor de um bem básico como, por exemplo, *commodities*, ações e taxas de juros, dentre outros (Neto, 2023). Existem dois tipos de derivativos, o financeiro e o não financeiro. Os derivativos financeiros são originários de taxa de juros, moedas, ações e índices. Os derivativos não financeiros são originários de petróleo, café, ouro, soja, milho, açúcar, boi gordo, e de outros ativos da agropecuária, da energia e do clima. Uma observação importante é que os derivativos têm seus preços livremente estabelecidos pelo mercado.

2.3.4 Risco de Mercado

Conforme definido por Neto (2023), o risco de mercado está relacionado com o preço que o mercado estipula para ativos e passivos negociados pelos intermediários financeiros, ou seja, com o comportamento verificado no preço de um bem do dia a dia. Este risco está diretamente associado a quanto um ativo pode ser valorizado ou desvalorizado.

O risco de mercado geralmente considera a expectativa das mudanças nos índices de inflação, taxa de juros, taxa de câmbio, indicadores de bolsa de valores, preço de *commodities* e derivativos, dentre outros.

2.3.5 Volatilidade

Segundo Neto (2023), desvio padrão é uma medida estatística que quantifica a incerteza em relação ao comportamento de um ativo. O desvio padrão também está associado ao risco do ativo. Ao determinar o desvio padrão através de uma série temporal de retornos contínuos, obtém-se a volatilidade.

2.3.6 Opções

Uma opção concede ao titular (detentor da opção) o direito de comprar ou vender em uma data futura por um preço previamente estabelecido (Hull; Treepongkaruna; Colwell; Heaney; Pitt, 2013). A opção de compra permite o direito de comprar o ativo

a um preço estabelecido e a opção de venda fornece o direito de vender o ativo a um preço definido, ambos em uma data determinada. O preço determinado no contrato é chamado de preço de exercício ou preço de *strike*, e a data determinada é conhecida como data de vencimento. Com isso bem definido, na data de vencimento o titular da opção possui o direito, e não o dever, de realizar a transação, ou seja, o titular não é obrigado a exercer o direito (Hull; Treepongkaruna; Colwell; Heaney; Pitt, 2013).

Por exemplo, se o titular possui uma opção de compra com *strike* em R\$ 20,00 e no dia do vencimento o ativo subjacente (ação) está R\$ 25,00, é vantagem para o titular exercer seu direito de comprar por R\$ 20,00 uma ação que vale R\$25,00. Por outro lado, caso o titular possua a mesma opção de compra com *strike* a R\$ 20,00 e no dia do vencimento o preço da ação esteja R\$ 18,00, é melhor ele não exercer seu direito de compra, por que assim o titular estaria pagando R\$ 20,00 por algo que vale R\$ 18,00. Essas são as vantagens das opções, diferente dos contratos futuros, pelos quais o titular do contrato é obrigado a exercer a compra ou venda do ativo subjacente.

Outra coisa que diferencia os contratos futuros das opções é que, nas opções, o comprador do direito paga um preço inicial para ser titular, esse preço inicial (esse preço inicial é conhecido com prêmio da opção). Nos contratos futuros, inexistente um custo inicial, sendo necessário apenas que o tomador do contrato mantenha uma margem de garantia suficiente para cobrir as variações de preço do contrato.

2.4 Histórico de construção do modelo de Black-Scholes

2.4.1 Modelo Binomial de Jacob Bernoulli

Um modelo inicial muito usado para precificação de derivativos é o modelo Binomial de Jacob Bernoulli (Bernoulli, 1713). Esse modelo parte do passeio aleatório (random walk), onde, a cada passo o movimento pode ser +1 ou -1, cada um com probabilidade $\frac{1}{2}$.

$$X_i = \begin{cases} +1, & \text{com probabilidade } \frac{1}{2}, \\ -1, & \text{com probabilidade } \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (1)$$

Após n passos, a soma acumulada dos movimentos pode ser descrita como:

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n = 2Y_n - n, \quad (2)$$

onde S_n é a soma dos movimentos, Y_n é o número de saltos para cima (+1) até o tempo n , e $2Y_n - n$ representa o saldo final após n passos. O saldo do passeio aleatório é a diferença entre o número de saltos para cima e o número de saltos para baixo.

A distribuição do número de saltos Y_n segue uma distribuição binomial, onde a

probabilidade de ter exatamente k saltos para cima em n passos é dada por:

$$\Pr(Y_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad (3)$$

onde p^k é a probabilidade de ter k sucessos, e $(1-p)^{n-k}$ é a probabilidade de ter $n-k$ falhas (-1).

O modelo binomial é um processo discreto, já o preço de um ativo é um processo contínuo. O modelo Browniano vem para suprir essa disparidade.

2.4.2 Movimento Browniano

Considera-se o intervalo de tempo $[0, 1]$ e sua subdivisão em n partes iguais, de maneira que cada X_i representa o movimento do processo em cada subdivisão de tempo. Se os saltos assumem apenas os valores $+1$ e -1 com probabilidade $1/2$, o limite da soma pode não existir (ou seja, a série resultante pode não ser convergente), pois os incrementos permanecem grandes (crescem em módulo) à medida que n cresce.

Por exemplo, ao considerar $\frac{1}{n}$ o tamanho do salto, o movimento no instante t (soma normalizada)

$$\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \longrightarrow 0 \quad (4)$$

tende a zero, à medida que n cresce, devido à Lei dos Grandes Números.

Usando $\frac{1}{\sqrt{n}}$ como fator de normalização, o movimento Browniano no instante t (B_t)

$$B_t = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \longrightarrow N(0, 1) \quad (5)$$

converge para distribuição normal $N(0, 1)$ conforme descreve o Teorema Central do Limite. Isso é crucial na modelagem de processos estocásticos.

Esse modelo possui trajetórias contínuas, mas que não são diferenciáveis. Possui também incrementos independentes, pois são disjuntos em cada intervalo. A diferença entre o movimento Browniano no instante t (B_t) e o movimento Browniano no instante s (B_s) segue uma distribuição normal, com média zero e variância $t - s$:

$$B_t - B_s \sim N(0, t - s). \quad (6)$$

2.4.3 Modelo de Bachelier

Louis Bachelier foi o pioneiro a introduzir um modelo de precificação de opções em 1900. Bachelier usou o conceito do movimento Browniano para modelar flutuações

dos preços dos ativos. O preço de um ativo $S(t)$ é modelado como

$$S(t) = S(0) + \sigma B_t, \quad (7)$$

onde $S(0)$ é o preço inicial do ativo, σ é um parâmetro de volatilidade que determina a amplitude das flutuações dos preços e B_t é um movimento Browniano.

O modelo de Bachelier possui distribuição normal dos preços, ou seja, o preço $S(t)$ em qualquer tempo t segue uma distribuição normal com média $S(0)$ e variância $\sigma^2 t$. Isso significa que os preços podem, em teoria, ser negativos, o que é uma limitação do modelo. O processo $S(t)$ é um martingal, ou seja, dado o preço atual, o preço futuro esperado é igual ao preço atual. Também possui incremento independente, característica herdada do modelo anterior.

2.4.4 Proposta de Paul Samuelson

Para garantir que o processo permaneça positivo, Samuelson (1965) sugere que o preço dos ativos deve seguir um processo multiplicativo (um movimento Browniano Geométrico)

$$S(t) = S(0)e^{\mu t + \sigma B_t}, \quad (8)$$

onde $S(t)$ é o preço do ativo no tempo t , $S(0)$ é o preço inicial do ativo, μ é a taxa de retorno média esperada e σ é a volatilidade do ativo. Que leva a equação diferencial estocástica:

$$dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dB_t, \quad (9)$$

por consequência direta de seu modelo (Samuelson, 1965).

2.5 Dedução de Black-Scholes

2.5.1 Movimento Browniano Geométrico

O preço do ativo $S(t)$ segue o seguinte movimento:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dB_t, \quad (10)$$

onde μ é a taxa de retorno média esperada do ativo e σ é a volatilidade do ativo.

2.5.2 Lema de Itô

Segundo Hirs; Neftci (2013) O lema de Itô diz que: Seja $F(S_t, t)$ uma função duas vezes diferenciável em t e no processo aleatório S_t , cuja dinâmica é dada por:

$$dS_t = a_t dt + \sigma_t dB_t \quad (11)$$

com parâmetros de *drift* e difusão regulares (a_t, σ_t) . Então,

$$dF_t = \frac{\partial F}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} dt \quad (12)$$

ou, substituindo dS_t :

$$dF_t = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial S_t} a_t dt + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} dt + \frac{\partial F}{\partial S_t} \sigma_t dB_t \quad (13)$$

onde a igualdade vale em média quadrática.

Aplicando o Lema de Itô para uma função $V(S, t)$, onde V representa o preço da opção de venda no tempo t , tem-se que

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (dS)^2. \quad (14)$$

Calculando $(dS)^2$ a partir da Equação (10), tem-se que

$$\begin{aligned} (dS)^2 &= (\mu S dt + \sigma S dB_t)^2 \\ &= (\mu S dt)^2 + 2\mu S dt \cdot \sigma S dB_t + (\sigma S dB_t)^2 \\ &= \mu^2 S^2 (dt)^2 + 2\mu\sigma S^2 dt dB_t + \sigma^2 S^2 (dB_t)^2 \end{aligned} \quad (15)$$

Segundo as regras do cálculo estocástico de Itô, baseadas nas propriedades do processo de Wiener (movimento Browniano padrão), tem-se:

$$(dt)^2 = 0, \quad dt \cdot dB_t = 0, \quad (dB_t)^2 = dt. \quad (16)$$

Portanto:

$$(dS)^2 = \sigma^2 S^2 dt \quad (17)$$

Logo,

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} (\mu S dt + \sigma S dW) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dB_t. \end{aligned} \quad (18)$$

2.5.3 Construção do Portfólio

Dado o Portfólio (conjunto de ativos em carteira composto por opções e ações)

$$\Pi = V - XS, \quad (19)$$

onde V é o valor da opção, S é o preço do ativo e X é a quantidade de ações compradas ou vendidas, com $X = \frac{\partial V}{\partial S}$.

O diferencial é dado por

$$d\Pi = dV - X dS. \quad (20)$$

Substituindo a Equação (18) e a Equação (10) na Equação (20), tem-se

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dB_t \quad (21)$$

$$- \frac{\partial V}{\partial S} (\mu S dt + \sigma S dB_t). \quad (22)$$

O movimento estocástico do ativo, representado por dB_t é anulado, resultando em:

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt. \quad (23)$$

2.5.4 Igualdade ao Rendimento Livre de Risco

Como Π é livre de risco:

$$d\Pi = r\Pi dt, \quad (24)$$

onde r é a taxa de juros, assim,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt = r \left(V - S \frac{\partial V}{\partial S} \right) dt, \quad (25)$$

de onde, dado que $dt \neq 0$, tem-se a equação de Black-Scholes para a opção de venda $V(S, t)$:

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0}. \quad (26)$$

Concluimos a dedução formal da equação de Black-Scholes que vale também para opção de compra $C(S, t)$ da forma:

$$\boxed{\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC(S, t) = 0}. \quad (27)$$

2.6 Desafios do Modelo

Os principais desafios do modelo de Black-Scholes estão relacionados às suas hipóteses simplificadoras, que muitas vezes não condizem com a realidade do mercado financeiro. A primeira limitação é a suposição de volatilidade constante, que não reflete adequadamente a dinâmica dos preços, especialmente em períodos de incer-

teza, quando a volatilidade tende a variar bruscamente. Essa simplificação pode levar a erros significativos na precificação de opções em momentos de maior tensão no mercado. Nesse contexto, modelos que incorporam volatilidade estocástica oferecem uma representação mais realista do comportamento dos ativos.

Como destacado por Hong (2024), uma segunda hipótese questionável é a ausência de custos de transação. Embora esses custos possam ser desprezáveis em operações de pequeno porte, eles se tornam relevantes em operações de grande volume, afetando diretamente o desempenho da estratégia e o preço do ativo subjacente. Entre esses custos estão os *spreads* de compra e venda, as taxas de corretagem e o impacto do volume negociado sobre o mercado, todos com potencial de distorcer os resultados obtidos pelo modelo.

A terceira limitação refere-se à suposição de que a ação subjacente não paga dividendos. Embora algumas empresas adotem políticas de recompra de ações como forma de valorização, uma parte significativa do mercado ainda utiliza o pagamento de dividendos como estratégia de distribuição de lucros, o que influencia diretamente o valor teórico das opções.

Além disso, o modelo foi originalmente desenvolvido para opções do tipo europeu, que só podem ser exercidas na data de vencimento. Isso restringe sua aplicação às opções do tipo americano, que permitem exercício a qualquer momento antes do vencimento. Embora existam métodos que adaptam o modelo de Black-Scholes para opções americanas, essas abordagens envolvem maior complexidade e incerteza nos resultados (Hong, 2024).

Por fim, um aspecto frequentemente citado de forma crítica é a falência da empresa criada por Black e Scholes na década de 1990, o Long-Term Capital Management (LTCM). Apesar de não invalidar o modelo matemático em si, o episódio evidencia as limitações práticas da aplicação de modelos idealizados em mercados reais, reforçando a necessidade contínua de desenvolvimento de abordagens mais robustas e adaptadas à realidade do mercado financeiro.

3 UMA ABORDAGEM ANALÍTICA PARA A EQUAÇÃO DE BLACK-SCHOLES

Partindo do modelo de Black-Scholes, Equação (27), para uma opção europeia de compra, de uma ação que não paga dividendos, tem-se

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC(t, S) = 0, \quad (t, S) \in [0, T) \times \mathbb{R}_+^*, \quad (28)$$

onde $C(t, S)$ é o preço da opção no instante t para o preço S do ativo subjacente, σ é a volatilidade anual do ativo, e r é a taxa de juros livre de risco anual.

Ainda, sendo E o preço de exercício (ou *strike*) da opção, e T o seu tempo de vencimento, espera-se que

$$C(T, S) = \max\{S - E, 0\}, \quad (29)$$

ou seja, que no final do período o valor do ativo S seja maior que o *strike* E , de maneira que o titular da opção só exercerá o direito de compra se o preço do ativo for maior que o preço de exercício. Assim, se o preço do ativo for muito pequeno, então o preço da opção também será:

$$\lim_{S \rightarrow 0^+} C(t, S) = 0. \quad (30)$$

Por outro lado, se o preço do ativo for muito grande, tem-se

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} C(t, S) = Ee^{-r(T-t)}. \quad (31)$$

Verifica-se que a Equação (28) é do tipo parabólico, ou seja, $\Delta = B^2 - 4AC = 0$. O coeficiente A do termo de segunda ordem em S é

$$A = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2,$$

o coeficiente B do termo misto de segunda ordem é

$$B = 0,$$

e o coeficiente C do termo temporal de segunda ordem é

$$C = 0.$$

O Δ é dado por:

$$\Delta = 0^2 - 4 \left(\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \right) (0) = 0. \quad (32)$$

Como $\Delta = 0$, a equação é parabólica, ou seja, podemos modificá-la para a equação do calor.

Fazendo a mudança de variáveis

$$t = T - \frac{2}{\sigma^2} \tau, \quad S = E e^x \implies \tau = \frac{\sigma^2}{2} (T - t) \in \left[0, \frac{\sigma^2 T}{2} \right], \quad x = \ln \left(\frac{S}{E} \right) \in \mathbb{R}, \quad (33)$$

define-se uma nova incógnita $v(\tau, x)$ da forma

$$C(t, S) = E v(\tau, x). \quad (34)$$

De substituir Equação (34) na Equação (28) de Black-Scholes, aplicar a regra da cadeia, fazer as devidas simplificações e isolar a derivada $\partial v / \partial \tau$, como detalhado no Apêndice A, tem-se a seguinte equação de difusão-advecção-reação:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1 \right) \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2r}{\sigma^2} v, \quad (\tau, x) \in \left(0, \frac{\sigma^2 T}{2} \right] \times \mathbb{R}, \quad (35)$$

com a seguinte condição inicial ($\tau = 0 \Rightarrow t = T$):

$$v(0, x) = \max\{e^x - 1, 0\}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (36)$$

e as seguintes condições de contorno ($S \rightarrow 0^+ \Rightarrow x \rightarrow -\infty$, $S \rightarrow +\infty \Rightarrow x \rightarrow +\infty$):

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} v(\tau, x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - v(\tau, x)) = e^{-c\tau}, \quad c = \frac{2r}{\sigma^2}, \quad \tau \in \left[0, \frac{\sigma^2 T}{2} \right]. \quad (37)$$

Ainda, a Equação (35) de difusão-advecção-reação pode ser transformada em uma equação clássica do calor mediante uma mudança de variável do tipo

$$v(\tau, x) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(\tau, x), \quad (38)$$

para certos valores de α e β . Com efeito, de substituir a Equação (38) na Equação (35),

aplicar a regra da cadeia, e anular os coeficientes dos termos advectivo e reativo, como mostrado no Apêndice B tem-se que

$$\alpha = \frac{1-c}{2}, \quad \beta = -\frac{(1+c)^2}{4}. \quad (39)$$

Para que $u(0, x)$ não assuma valores negativos, toma-se a seguinte condição inicial:

$$u(0, x) = u_0(x) = \max \left\{ e^{\frac{c+1}{2}x} - e^{\frac{c-1}{2}x}, 0 \right\} = \begin{cases} e^{\frac{c+1}{2}x} - e^{\frac{c-1}{2}x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}. \quad (40)$$

Portanto, obtém-se o seguinte problema de valor inicial para a equação do calor em $u(\tau, x)$ associada à Equação (28) de Black-Scholes:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (\tau, x) \in \left(0, \frac{\sigma^2 T}{2} \right] \times \mathbb{R}, \quad (41)$$

$$u(0, x) = u_0(x).$$

O problema descrito na Equação (41) será solucionado pelo método da transformada de Fourier.

3.1 Solução Via Transformada de Fourier

Segundo Kreyszig (2011) a transformada de Fourier em x de uma função $u(\tau, x)$ é definida como

$$\bar{u}(\tau, \omega) = \mathcal{F}\{u(\tau, x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau, x) e^{-i\omega x} dx, \quad (42)$$

onde a frequência ω é a variável do domínio de Fourier, e $i = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária.

Aplicando a transformada de Fourier na Equação (41), obtém-se:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} = -\omega^2 \bar{u}(\tau, \omega), \quad (\tau, \omega) \in \left(0, \frac{\sigma^2 T}{2} \right] \times \mathbb{R}, \quad (43)$$

$$\bar{u}(0, \omega) = \bar{u}_0(\omega).$$

onde $\bar{u}_0(\omega) = \mathcal{F}\{u_0(x)\}$.

Nota-se que, considerando ω como um parâmetro, a Equação (43) é ordinária em variáveis separáveis, e sua solução é dada por

$$\bar{u}(\tau, \omega) = e^{-\omega^2 \tau} \bar{u}_0(\omega), \quad (44)$$

de maneira que a solução do problema na Equação (41) pode ser obtida aplicando a

transformada inversa de Fourier na Equação (44) da forma

$$u(\tau, x) = \mathcal{F}^{-1}\{\bar{u}(\tau, \omega)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} e^{-\omega^2 \tau} \bar{u}_0(\omega) d\omega. \quad (45)$$

Como

$$\mathcal{F}^{-1}\{e^{-\omega^2 \tau}\} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{x^2}{4\tau}}, \quad (46)$$

pelo teorema da convolução (Reamat, 2022), tem-se

$$u(\tau, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{x^2}{4\tau}} * u_0(x), \quad (47)$$

onde $*$ representa o operador de convolução. Logo, a solução do problema (Equação (41)) pode ser escrita da forma

$$u(\tau, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-z)^2}{4\tau}} u_0(z) dz. \quad (48)$$

Após analisar as condições iniciais na Equação (40), chega-se a conclusão de que é possível alterar o intervalo de integração, como pode ser observado no Apêndice C passando a ser:

$$u(\tau, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-z)^2}{4\tau}} u_0(z) dz. \quad (49)$$

Substituindo $u_0(z) = e^{\frac{c+1}{2}z} - e^{\frac{c-1}{2}z}$ na integral, tem-se:

$$u(\tau, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-z)^2}{4\tau}} \left(e^{\frac{c+1}{2}z} - e^{\frac{c-1}{2}z} \right) dz. \quad (50)$$

Separando em duas integrais, define-se

$$I_1(\tau, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-z)^2}{4\tau}} e^{\frac{c+1}{2}z} dz, \quad (51)$$

$$I_2(\tau, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-z)^2}{4\tau}} e^{\frac{c-1}{2}z} dz. \quad (52)$$

Dessa forma, a solução final pode ser escrita como:

$$u(\tau, x) = I_1(\tau, x) - I_2(\tau, x). \quad (53)$$

Para resolver essas integrais é feita a seguinte mudança de variável:

$$y = \frac{z-x}{\sqrt{2\tau}} \implies z = \sqrt{2\tau}y + x, \quad dz = \sqrt{2\tau}dy. \quad (54)$$

Então, com os detalhes mostrados no Apêndice D, as integrais resultantes são

resolvidas pelas seguintes substituições:

$$u_1 = y - \frac{1}{2}(c+1)\sqrt{2\tau}, \quad du_1 = dy, \quad (55)$$

$$u_2 = y - \frac{1}{2}(c-1)\sqrt{2\tau}, \quad du_2 = dy. \quad (56)$$

Logo, após corrigir os limites de integração, as integrais tomam a forma:

$$I_1(\tau, x) = e^{\frac{1}{2}(c+1)x} e^{+\frac{1}{4}(c+1)^2\tau} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-d_1}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u_1^2} du_1, \quad (57)$$

$$I_2(\tau, x) = e^{\frac{1}{2}(c-1)x} e^{+\frac{1}{4}(c-1)^2\tau} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-d_2}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u_2^2} du_2, \quad (58)$$

onde

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(c+1)\sqrt{2\tau}, \quad (59)$$

$$d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(c-1)\sqrt{2\tau}. \quad (60)$$

É do conhecimento que a distribuição normal acumulada é definida como

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{1}{2}u^2} du, \quad (61)$$

conforme apresentado em Devore; Berk (2012). Isso torna visível que as integrais da Equação (57) e Equação (58) são distribuições normais acumuladas e, portanto:

$$I_1(\tau, x) = e^{\frac{1}{2}(c+1)x} e^{+\frac{1}{4}(c+1)^2\tau} \frac{1}{\sqrt{2\tau}} N(d_1), \quad (62)$$

$$I_2(\tau, x) = e^{\frac{1}{2}(c-1)x} e^{+\frac{1}{4}(c-1)^2\tau} \frac{1}{\sqrt{2\tau}} N(d_2). \quad (63)$$

Logo, a solução do problema da Equação (41) é dada por

$$u(\tau, x) = e^{\frac{1}{2}(c+1)x + \frac{1}{4}(c+1)^2\tau} N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(c-1)x + \frac{1}{4}(c-1)^2\tau} N(d_2). \quad (64)$$

3.2 Voltando para as variáveis originais

Voltando para variável v da Equação (38), na qual

$$v(\tau, x) = e^{\alpha x + \beta\tau} u(\tau, x), \quad (65)$$

com $\alpha = \frac{1}{2}(1-c)$, $\beta = -\frac{1}{4}(c+1)^2$ e $c = \frac{2r}{\sigma^2}$.

Então

$$v(\tau, x) = e^{\frac{1}{2}(1-c)x - \frac{1}{4}(c+1)^2\tau} e^{\frac{1}{2}(c+1)x + \frac{1}{4}(c+1)^2\tau} N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(1-c)x - \frac{1}{4}(c+1)^2\tau} e^{\frac{1}{2}(c-1)x + \frac{1}{4}(c-1)^2\tau} N(d_2) \quad (66)$$

Simplificando os termos das exponenciais da Equação (66) fica-se com

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(1-c)x - \frac{1}{4}(c+1)^2\tau + \frac{1}{2}(c+1)x + \frac{1}{4}(c+1)^2\tau \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}cx + \frac{1}{2}cx + \frac{1}{2}x = x \end{aligned} \quad (67)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(1-c)x - \frac{1}{4}(c+1)^2\tau + \frac{1}{2}(c-1)x + \frac{1}{4}(c-1)^2\tau \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}cx + \frac{1}{2}cx - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}(c+1)^2\tau + \frac{1}{4}(c-1)^2\tau = -c\tau \end{aligned} \quad (68)$$

Substituindo os expoentes, fica-se com

$$v(\tau, x) = [e^x N(d_1) - e^{-c\tau} N(d_2)]. \quad (69)$$

3.2.1 Voltando para a variável C

Voltando para a variável $C(t, S)$ da Equação (34)

$$C(t, S) = E v(\tau, x), \quad (70)$$

então

$$C(t, S) = E e^x N(d_1) - E e^{-c\tau} N(d_2). \quad (71)$$

Como $\tau = -\frac{t\sigma^2}{2} + \frac{T\sigma^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2}(T-t)$, $S = E e^x$, $x = \ln\left(\frac{S}{E}\right)$ e $c = \frac{2r}{\sigma^2}$, então

$$C(t, S) = S N(d_1) - E e^{-\frac{2r}{\sigma^2}\left(\frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right)} N(d_2), \quad (72)$$

com

$$d_1 = \frac{\ln(S/E)}{\sqrt{\frac{2\sigma^2}{2}(T-t)}} + \frac{1}{2}(c+1)\sqrt{\frac{2\sigma^2}{2}(T-t)} \quad (73)$$

e

$$d_2 = \frac{\ln(S/E)}{\sqrt{\frac{2\sigma^2}{2}(T-t)}} + \frac{1}{2}(c-1)\sqrt{\frac{2\sigma^2}{2}(T-t)}. \quad (74)$$

Portanto, a solução da equação de Black-Scholes via transformada de Fourier é dada por:

$$C(t, S) = S N(d_1) - E e^{-r(T-t)} N(d_2), \quad (75)$$

onde

$$d_1 = \frac{\ln(S/E)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} + \frac{1}{2}(c+1)\sigma\sqrt{(T-t)} \quad (76)$$

e

$$d_2 = \frac{\ln(S/E)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} + \frac{1}{2}(c-1)\sigma\sqrt{(T-t)}. \quad (77)$$

3.3 Aplicação da Solução da Equação de Black-Scholes

As opções de ações negociadas no mercado brasileiro muitas vezes apresentam baixa liquidez. Por esse, motivo será utilizado o Preço Médio Ponderado pelo Volume (VWAP) da opção e do ativo subjacente. A VWAP observada terá o período diário e será comparada com o preço teórico via equação de Black-Scholes. Em todos os cálculos de precificação realizados nesta sessão foi utilizado a volatilidade histórica anual do ativo subjacente.

As Tabelas a seguir mostram a data, o valor da VWAP da opção, o Volume de opções negociadas (Vol. Negociado), a VWAP do ativo (VWAP Ação), o preço teórico calculado pela solução da Equação (75) de Black-Scholes (Preço B-S) e o erro relativo entre o preço teórico e o preço real.

Para o ativo subjacente Petrobrás S. A. (PETR4), será avaliado na Tabela 1 a opção de compra europeia PETRD381 com volatilidade anual de 22%, taxa de juros de 14,25%, *strike* em R\$ 34,41 e vencimento em 17/04/2025.

Tabela 1 – Comparação entre o preço real (VWAP Opção) e o preço teórico (Preço B-S) da opção PETRD381. Fonte: autoral.

Data	VWAP Ação	Vol. Negociado	VWAP Opção	Preço B-S	Erro Relativo
28/03/2025	37,36	176800	3,49	3,24	0,0716
27/03/2025	37,77	48000	3,66	3,66	0,0000
26/03/2025	37,45	18500	3,38	3,36	0,0059
25/03/2025	37,19	94400	3,16	3,13	0,0095
24/03/2025	36,74	88600	2,78	2,74	0,0144
21/03/2025	36,65	186100	2,61	2,71	0,0383
20/03/2025	36,10	269900	2,21	2,25	0,0181
19/03/2025	36,18	42900	2,34	2,34	0,0000
18/03/2025	36,16	133400	2,36	2,35	0,0042
17/03/2025	36,18	217100	2,36	2,38	0,0085
14/03/2025	35,22	624900	1,69	1,70	0,0059
13/03/2025	34,34	410600	1,14	1,14	0,0000
12/03/2025	34,15	918200	1,11	1,06	0,0450
11/03/2025	34,19	385500	1,17	1,10	0,0598
10/03/2025	34,31	725300	1,20	1,19	0,0083
07/03/2025	34,62	241100	1,43	1,44	0,0070
06/03/2025	34,34	1432000	1,43	1,28	0,1049
05/03/2025	34,77	118400	1,61	1,57	0,0248
28/02/2025	36,06	18400	2,58	2,61	0,0116
27/02/2025	36,26	214900	2,72	2,79	0,0257

Pode-se observar que nesse período para esse *strike* a precificação via Black-Scholes se mostrou bastante eficiente, pois o maior erro relativo observado foi de aproximadamente 10% no dia 06/03. O menor erro relativo foi no dia 27/03/2025, obtendo assim uma precificação exata em comparação com o preço real de mercado.

Agora para o ativo subjacente Petrobrás S. A. (PETR4), será avaliado a opção de compra europeia PETRC39 com volatilidade anual de 22,23%, taxa de juros de 14,25%, *strike* em R\$ 37,61 e vencimento em 21/03/2025 na Tabela 2.

Tabela 2 – Comparação entre o preço real (VWAP Opção) e o preço teórico (Preço B-S) da opção PETRC39. Fonte: autoral.

Data	VWAP Ação	Vol. Negociado	VWAP Opção	Preço B-S	Erro Relativo
21/03/2025	36,65	1496000	0,02	0	
20/03/2025	36,10	3744200	0,03	0,0022	0,9267
19/03/2025	36,18	7765900	0,06	0,0022	0,9633
18/03/2025	36,16	3438800	0,07	0,0189	0,7300
17/03/2025	36,18	6093900	0,12	0,0200	0,8333
14/03/2025	35,22	4442500	0,06	0,0084	0,8600
13/03/2025	34,34	1011800	0,03	0,0014	0,9533
12/03/2025	34,15	2521500	0,05	0,0015	0,9700
11/03/2025	34,19	1545300	0,05	0,0028	0,9440
10/03/2025	34,31	2571200	0,06	0,0056	0,9067
07/03/2025	34,62	3473000	0,10	0,0200	0,8000
06/03/2025	34,34	4382500	0,11	0,0100	0,9091
05/03/2025	34,77	4649500	0,15	0,0400	0,7333
28/02/2025	36,06	6657400	0,40	0,3100	0,2250
27/02/2025	36,26	16316300	0,47	0,3800	0,1915
26/02/2025	37,93	448400	1,52	1,2000	0,2105
25/02/2025	38,11	530100	1,65	1,3400	0,1879
24/02/2025	38,12	595500	1,65	1,3000	0,2121
21/02/2025	38,35	1038300	1,82	1,6100	0,1154
20/02/2025	38,41	889400	1,87	1,6700	0,1070

Para esse *strike* fora do dinheiro e com vencimento mais próximo, o modelo teve dificuldade em obter uma precificação mais assertiva, como no dia 19/03/2025 onde o erro relativo foi de aproximadamente 96%. O menor erro relativo registrado nesse caso foi de 10% no dia 20/02/2025, os outros dias registraram erros bastante elevados.

Acredita-se que isso pode estar relacionado ao fato de que, ao transformar a Equação (78) de Black-Scholes na Equação (41) do calor, o coeficiente de difusão foi tomado constante. Uma ideia futura seria modificar a volatilidade na equação de Black-Scholes, o que é equivalente a modificar o coeficiente de difusão na equação do calor. Ou seja, considerar um coeficiente de difusão variável seria uma forma natural de melhorar o modelo e torná-lo mais próximo da realidade dos mercados financeiros.

4 SOLUÇÃO MODIFICADA

Neste capítulo será proposta uma solução alternativa da equação de Black-Scholes via transformada de Fourier através da equação de difusão-advecção-reação. Para tornar o texto autocontido e evitar consultas ao Capítulo 3, algumas equações e etapas foram propositalmente repetidas, garantindo fluidez e independência na leitura.

4.1 Modificação na Solução da Equação de Black-Scholes

Partindo do modelo de Black-Scholes, para uma opção europeia de compra de uma ação que não paga dividendos, tem-se

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC(t, S) = 0, \quad (t, S) \in [0, T) \times \mathbb{R}_+^*, \quad (78)$$

onde $C(t, S)$ é o preço da opção no instante t para o preço S do ativo subjacente, σ é a volatilidade anual do ativo, e r é a taxa de juros livre de risco anual.

Ainda, sendo E o preço de exercício (ou *strike*) da opção, e T o seu tempo de vencimento, espera-se que

$$C(T, S) = \max\{S - E, 0\}, \quad (79)$$

ou seja, que no final do período o valor do ativo S seja maior que o E , de maneira que o titular da opção só exercerá o direito de compra se o preço do ativo for maior que o preço de exercício. Assim, se o preço do ativo for muito pequeno, então o preço da opção também será:

$$\lim_{S \rightarrow 0^+} C(t, S) = 0. \quad (80)$$

Por outro lado, se o preço do ativo for muito grande, tem-se

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} C(t, S) = Ee^{-r(T-t)}. \quad (81)$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$t = T - \frac{2}{\sigma^2}\tau, \quad S = Ee^x \implies \tau = \frac{\sigma^2}{2}(T - t) \in \left[0, \frac{\sigma^2 T}{2}\right], \quad x = \ln\left(\frac{S}{E}\right) \in \mathbb{R}, \quad (82)$$

define-se uma nova incógnita $v(\tau, x)$ da forma

$$C(t, S) = E v(\tau, x). \quad (83)$$

De substituir Equação (83) na Equação (78) de Black-Scholes, aplicar a regra da cadeia, fazer as devidas simplificações e isolar a derivada $\partial v/\partial\tau$, tem-se a seguinte equação de difusão-advecção-reação:

$$\frac{\partial v}{\partial\tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right) \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2r}{\sigma^2} v(\tau, x), \quad (\tau, x) \in \left(0, \frac{\sigma^2 T}{2}\right] \times \mathbb{R}, \quad (84)$$

com a seguinte condição inicial ($\tau = 0 \Rightarrow t = T$):

$$v(0, x) = \max\{e^x - 1, 0\}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (85)$$

e as seguintes condições de contorno ($S \rightarrow 0^+ \Rightarrow x \rightarrow -\infty$, $S \rightarrow +\infty \Rightarrow x \rightarrow +\infty$):

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} v(\tau, x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - v(\tau, x)) = e^{-c\tau}, \quad c = \frac{2r}{\sigma^2}, \quad \tau \in \left[0, \frac{\sigma^2 T}{2}\right]. \quad (86)$$

Toma-se agora um caminho diferente, ao invés de fazer outra mudança de variável para transformar a Equação (84) na equação do calor, solucionaremos ela dessa forma com todos os termos de difusão-advecção-reação.

Introduz-se $p > 0$ como um parâmetro livre no operador difusivo da Equação (84), originando uma família de equações diferenciais parciais parabólicas do tipo difusão–advecção–reação. O parâmetro p controla a taxa de espalhamento espacial da solução, isto é, do ponto de vista empírico, atua como um coeficiente de difusão efetiva ajustado para minimizar o erro entre os preços teóricos e os observados no mercado. O caso $p = 1$ corresponde à hipótese clássica da equação de Black–Scholes, a qual não capta efeitos de volatilidade variável, como o *smile*.

Chamando $c = \frac{2r}{\sigma^2}$ e $g = 1 - \frac{2r}{\sigma^2}$, então $g = 1 - c$, tem-se:

$$\frac{\partial v}{\partial\tau} = p \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - g \frac{\partial v}{\partial x} - cv(\tau, x). \quad (87)$$

Assim, o problema de valor Inicial toma a forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial\tau} = p \frac{\partial^2 v(\tau, x)}{\partial x^2} - g \frac{\partial v}{\partial x} - cv(\tau, x), \\ v(0, x) = v_0(x), \end{cases} \quad (\tau, x) \in \left(0, \frac{\sigma^2 T}{2}\right] \times \mathbb{R} \quad (88)$$

onde $v_0(x) = \max\{e^x - 1, 0\}$.

O problema descrito na Equação (88) será solucionado pelo método da transformada de Fourier.

4.1.1 Solução Via Transformada de Fourier

Segundo Kreyszig (2011) a transformada de Fourier em x de uma função $v(\tau, x)$ é definida como

$$\bar{v}(\tau, \omega) = \mathcal{F}\{v(\tau, x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau, x)e^{-i\omega x} dx, \quad (89)$$

onde a frequência ω é a variável do domínio de Fourier.

Aplicando a transformada de Fourier na Equação (88), obtém-se:

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = -\omega^2 \bar{v}(\omega, \tau), \quad (90)$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = i\omega \bar{v}(\omega, \tau) \quad (91)$$

e

$$\mathcal{F}(v) = \bar{v}(\omega, \tau). \quad (92)$$

Logo:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{v}(\omega, \tau)}{d\tau} = -p\omega^2 \bar{v}(\omega, \tau) - ig\omega \bar{v}(\omega, \tau) - c\bar{v}(\omega, \tau) \\ \bar{v}(\omega, 0) = \bar{v}_0(\omega), \end{cases} \quad (\tau, \omega) \in \left(0, \frac{\sigma^2 T}{2}\right] \times \mathbb{R} \quad (93)$$

A solução da Equação (93) é dada por

$$\bar{v}(\omega, \tau) = e^{-p\omega^2 \tau} e^{-ig\omega \tau} e^{-c\tau} \bar{v}_0(\omega). \quad (94)$$

E sua transformada inversa da é dada por

$$v(\tau, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} e^{-p\omega^2 \tau} e^{-ig\omega \tau} e^{-c\tau} \bar{v}_0(\omega) d\omega. \quad (95)$$

Reorganizando os termos, tem-se que

$$v(\tau, x) = e^{-c\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(x-g\tau)} e^{-p\omega^2 \tau} \bar{v}_0(\omega) d\omega. \quad (96)$$

Como

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-p\omega^2 \tau}\right) = \frac{1}{\sqrt{4\pi p\tau}} e^{-\frac{x^2}{4p\tau}}, \quad (97)$$

pelo Teorema da Convolução, tem-se:

$$v(\tau, x) = e^{-c\tau} \frac{1}{\sqrt{4\pi p\tau}} e^{-\frac{x^2}{4p\tau}} * v_0(x), \quad (98)$$

onde o símbolo $*$ representa o operador convolução.

Logo, a solução da Equação (88) é dada por:

$$v(\tau, x) = e^{-c\tau} \frac{1}{\sqrt{4\pi p\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-g\tau-z)^2}{4p\tau}} v_0(z) dz, \quad (99)$$

onde o núcleo da Gaussiana (convolução) é centrado em $x - g\tau$, e o argumento da função inicial v_0 é z , a variável de integração. Os detalhes desse passo pode ser observado no Apêndice E.

4.1.2 Restringindo o intervalo de integração

Para as opções europeias, as condições iniciais dadas pela Equação (85), são:

$$v(0, x) = \max \{e^x - 1, 0\}.$$

O termo e^x é sempre positivo por se tratar de uma exponencial. Essa diferença ($e^x - 1$) tem seu sinal dependente de x , uma vez que $e^x > 0$ para todo x .

- Se $x \geq 0$, então $e^x - 1 > 0$
- Se $x < 0$, então $e^x - 1 < 0$

Logo, basta considerar apenas a parte com $x \geq 0$, pois para $x < 0$ o valor de $v(0, x)$ é zero.

Portanto, $v_0(z) = \max \{e^z - 1, 0\}$.

Ou seja, $v_0(z) = 0$ para todo $z < 0$, logo é válido considerar $z \in [0, +\infty)$, alterando assim os limites de integração. Assim,

$$v(\tau, x) = e^{-c\tau} \frac{1}{\sqrt{4\pi p\tau}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-g\tau-z)^2}{4p\tau}} v_0(z) dz. \quad (100)$$

Substituindo $v_0(z) = e^z - 1$ na integral, obtém-se

$$v(\tau, x) = e^{-c\tau} \frac{1}{\sqrt{4\pi p\tau}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-g\tau-z)^2}{4p\tau}} (e^z - 1) dz, \quad (101)$$

que pode ser reescrita como

$$v(\tau, x) = e^{-c\tau} \frac{1}{\sqrt{4\pi p\tau}} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-g\tau-z)^2}{4p\tau}} e^z dz - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-g\tau-z)^2}{4p\tau}} dz \right). \quad (102)$$

Separando em duas integrais:

$$I_1 = e^{-c\tau} \frac{1}{\sqrt{4\pi p\tau}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-g\tau-z)^2}{4p\tau}} e^z dz \quad (103)$$

e

$$I_2 = e^{-c\tau} \frac{1}{\sqrt{4\pi p\tau}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-g\tau-z)^2}{4p\tau}} dz, \quad (104)$$

onde

$$v(\tau, x) = I_1 - I_2. \quad (105)$$

Para resolver essas integrais, é feita a seguinte mudança de variável:

$$u = \frac{z - (x - g\tau)}{\sqrt{2p\tau}}, \quad (106)$$

então

$$du = \frac{1}{\sqrt{2p\tau}} dz. \quad (107)$$

Logo,

$$z = u\sqrt{2p\tau} + x - g\tau \quad (108)$$

e

$$dz = \sqrt{2p\tau} du. \quad (109)$$

Quando $z = 0$, o limite inferior de integração se torna

$$u = \frac{-(x - g\tau)}{\sqrt{2p\tau}}. \quad (110)$$

Portanto, as integrais tomam a forma de

$$I_1 = e^{-c\tau} \frac{1}{\sqrt{4\pi p\tau}} \int_{\frac{-(x-g\tau)}{\sqrt{2p\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{u\sqrt{2p\tau}+x-g\tau} \sqrt{2p\tau} du \quad (111)$$

e

$$I_2 = e^{-c\tau} \frac{1}{\sqrt{4\pi p\tau}} \int_{\frac{-(x-g\tau)}{\sqrt{2p\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \sqrt{2p\tau} du. \quad (112)$$

Organizando os termos, tem-se

$$I_1 = e^{-c\tau} e^x e^{-g\tau} \sqrt{2p\tau} \frac{1}{\sqrt{4\pi p\tau}} \int_{\frac{-(x-g\tau)}{\sqrt{2p\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{u\sqrt{2p\tau}} du \quad (113)$$

e

$$I_2 = e^{-c\tau} \sqrt{2p\tau} \frac{1}{\sqrt{4\pi p\tau}} \int_{\frac{-(x-g\tau)}{\sqrt{2p\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du. \quad (114)$$

Simplificando, fica-se com

$$I_1 = e^{-c\tau} e^x e^{-g\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{(x-g\tau)}{\sqrt{2p\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{u\sqrt{2p\tau}} du \quad (115)$$

e

$$I_2 = e^{-c\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{(x-g\tau)}{\sqrt{2p\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du. \quad (116)$$

Reescrevendo os expoentes, pode-se reescrever as integrais como

$$I_1 = e^{-c\tau} e^x e^{-g\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{(x-g\tau)}{\sqrt{2p\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(u^2 - 2u\sqrt{2p\tau})} du \quad (117)$$

e

$$I_2 = e^{-c\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{(x-g\tau)}{\sqrt{2p\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du. \quad (118)$$

De completar quadrados no expoente do I_1 tem-se que

$$(u - \sqrt{2p\tau})^2 = (u - \sqrt{2p\tau})(u - \sqrt{2p\tau}) = u^2 - 2u\sqrt{2p\tau} + 2p\tau. \quad (119)$$

Assim,

$$I_1 = e^{-c\tau} e^x e^{-g\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{(x-g\tau)}{\sqrt{2p\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}((u-\sqrt{2p\tau})^2 - 2p\tau)} du \quad (120)$$

e

$$I_2 = e^{-c\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{(x-g\tau)}{\sqrt{2p\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du. \quad (121)$$

Passando o termo que não depende de u para fora da integral, tem-se

$$I_1 = e^{-c\tau} e^x e^{-g\tau} e^{p\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{(x-g\tau)}{\sqrt{2p\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(u^2 - \sqrt{2p\tau})^2} du \quad (122)$$

e

$$I_2 = e^{-c\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{(x-g\tau)}{\sqrt{2p\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du. \quad (123)$$

Para resolver as integrais nas Equações (122) e Equação (123), serão feitas as seguintes substituições:

$$u_1 = u - \sqrt{2p\tau}, \quad du_1 = du \quad (124)$$

e

$$u_2 = u, \quad du_2 = du. \quad (125)$$

Além disso, fica-se com

$$I_1 = e^{-c\tau} e^x e^{-g\tau} e^{p\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{(x-g\tau)}{\sqrt{2p\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(u_1)^2} du \quad (126)$$

e

$$I_2 = e^{-c\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{(x-g\tau)}{\sqrt{2p\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(u_2)^2} du. \quad (127)$$

Corrigindo os limites de integração de I_1 , ou seja, fazendo

$$u = \frac{z - (x - g\tau)}{\sqrt{2p\tau}}, \quad (128)$$

tem-se

$$u_1 = u - \sqrt{2p\tau}. \quad (129)$$

Então, o limite inferior é assumido quando $z = 0$, ou seja,

$$\text{limite inferior} = \frac{-(x - g\tau)}{\sqrt{2p\tau}} - \sqrt{2p\tau} = -d_1, \quad (130)$$

com

$$d_1 = \frac{(x - g\tau)}{\sqrt{2p\tau}} + \sqrt{2p\tau}, \quad (131)$$

que pode ser reescrito como

$$d_1 = \frac{(x - g\tau + 2p\tau)}{\sqrt{2p\tau}}. \quad (132)$$

Corrigindo os limites de integração de I_2 , ou seja, fazendo

$$u = \frac{z - (x - g\tau)}{\sqrt{2p\tau}}. \quad (133)$$

Então, o limite inferior é assumido quando $z = 0$, ou seja,

$$\text{limite inferior} = \frac{-(x - g\tau)}{\sqrt{2p\tau}} = -d_2, \quad (134)$$

com

$$d_2 = \frac{(x - g\tau)}{\sqrt{2p\tau}} \quad (135)$$

Logo, as integrais ficam da seguinte forma:

$$I_1 = e^{-c\tau} e^x e^{-g\tau} e^{p\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_1}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(u_1)^2} du \quad (136)$$

e

$$I_2 = e^{-c\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(u_2)^2} du. \quad (137)$$

Sabe-se que a distribuição normal acumulada é definida como

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{1}{2}u^2} du, \quad (138)$$

conforme apresentado em Devore; Berk (2012). Isso torna visível que as integrais I_1 e I_2 são distribuições normais acumuladas e, portanto,

$$I_1 = e^{\tau(p-c-g)} e^x N(d_1) \quad (139)$$

e

$$I_2 = e^{-c\tau} N(d_2). \quad (140)$$

Como

$$v(\tau, x) = I_1 - I_2, \quad (141)$$

então

$$v(\tau, x) = e^{\tau(p-c-g)} e^x N(d_1) - e^{-c\tau} N(d_2). \quad (142)$$

4.1.3 Voltando para as variáveis originais

Conforme foi feito anteriormente as mudanças de variáveis a fim de chegar na solução, faz-se agora a volta para as variáveis originais, onde $c = \frac{2r}{\sigma^2}$ e $g = 1 - \frac{2r}{\sigma^2}$, ou seja, $g = 1 - c$. Como

$$C(t, S) = Ev(\tau, x), \quad (143)$$

então

$$C(t, S) = E \left[e^{\tau(p-c-g)} e^x N(d_1) - e^{-c\tau} N(d_2) \right]. \quad (144)$$

Sabe-se que

$$t = T - \frac{2}{\sigma^2}\tau, \quad (145)$$

onde

$$\tau = -\frac{t\sigma^2}{2} + \frac{T\sigma^2}{2}. \quad (146)$$

Além disso,

$$S = Ee^x, \quad (147)$$

com

$$x = \ln \left(\frac{S}{E} \right), \quad (148)$$

então

$$C(t, S) = e^{p\tau} e^{-c\tau} e^{-g\tau} S N(d_1) - Ee^{-c\tau} N(d_2). \quad (149)$$

Substituindo $c = \frac{2r}{\sigma^2}$, $g = 1 + \frac{2r}{\sigma^2}$ e $\tau = -\frac{t\sigma^2}{2} + \frac{T\sigma^2}{2}$, tem-se que:

$$c\tau = \frac{2r}{\sigma^2} \left(-\frac{t\sigma^2}{2} + \frac{T\sigma^2}{2} \right) = r(-t + T), \quad (150)$$

então

$$-c\tau = -r(T - t) \quad (151)$$

e

$$\begin{aligned} g\tau &= \left(1 - \frac{2r}{\sigma^2} \right) \left(-\frac{t\sigma^2}{2} + \frac{T\sigma^2}{2} \right) = \left(-\frac{t\sigma^2}{2} + \frac{T\sigma^2}{2} \right) - \frac{2r}{\sigma^2} \left(-\frac{t\sigma^2}{2} + \frac{T\sigma^2}{2} \right) \\ &= \left(-\frac{t\sigma^2}{2} + \frac{T\sigma^2}{2} \right) - r(-t + T). \end{aligned} \quad (152)$$

Assim,

$$-g\tau = - \left(\frac{T\sigma^2}{2} - \frac{t\sigma^2}{2} \right) + r(T - r) \quad (153)$$

e

$$p\tau = p \left(-\frac{t\sigma^2}{2} + \frac{T\sigma^2}{2} \right). \quad (154)$$

Substituindo esses valores (Equações (151), (153) e (154)) na Equação (149), tem-se

$$C(t, S) = e^{p\left(\frac{T\sigma^2}{2} - \frac{t\sigma^2}{2}\right)} e^{-r(T-t)} e^{-\left[\left(\frac{T\sigma^2}{2} - \frac{t\sigma^2}{2}\right) - r(T-t)\right]} SN(d_1) - E e^{-r(T-t)} N(d_2), \quad (155)$$

reorganizando

$$C(t, S) = e^{p\left(\frac{T\sigma^2}{2} - \frac{t\sigma^2}{2}\right)} e^{-r(T-t)} e^{-\left(\frac{T\sigma^2}{2} - \frac{t\sigma^2}{2}\right) + r(T-t)} SN(d_1) - E e^{-r(T-t)} N(d_2). \quad (156)$$

Separando as exponenciais e reorganizando os termos, fica-se com

$$C(t, S) = e^{p\left(\frac{T\sigma^2}{2} - \frac{t\sigma^2}{2}\right)} e^{-r(T-t)} e^{r(T-t)} e^{-\left(\frac{T\sigma^2}{2} - \frac{t\sigma^2}{2}\right)} SN(d_1) - E e^{-r(T-t)} N(d_2). \quad (157)$$

Simplificando os termos, tem-se

$$C(t, S) = e^{p\left(\frac{T\sigma^2}{2} - \frac{t\sigma^2}{2}\right)} e^{-\left(\frac{T\sigma^2}{2} - \frac{t\sigma^2}{2}\right)} SN(d_1) - E e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (158)$$

ou

$$C(t, S) = e^{(p-1)\left(\frac{T\sigma^2}{2} - \frac{t\sigma^2}{2}\right)} SN(d_1) - E e^{-r(T-t)} N(d_2), \quad (159)$$

com

$$d_1 = \frac{x - g\tau + 2p\tau}{\sqrt{2p\tau}} \quad (160)$$

e

$$d_2 = \frac{x - g\tau}{\sqrt{2p\tau}}. \quad (161)$$

Substituindo os valores de $\tau = -\frac{t\sigma^2}{2} + \frac{T\sigma^2}{2}$ fica-se com

$$d_1 = \frac{x - \left(\frac{T\sigma^2}{2} - \frac{t\sigma^2}{2}\right) + r(T-t) + 2p\left(\frac{T\sigma^2}{2} - \frac{t\sigma^2}{2}\right)}{\sqrt{2p\left(\frac{T\sigma^2}{2} - \frac{t\sigma^2}{2}\right)}} \quad (162)$$

e

$$d_2 = \frac{x - \left(\frac{T\sigma^2}{2} - \frac{t\sigma^2}{2}\right) + r(T-t)}{\sqrt{2p\left(\frac{T\sigma^2}{2} - \frac{t\sigma^2}{2}\right)}}. \quad (163)$$

Simplificando os dois termos, tem-se

$$d_1 = \frac{x - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) + r(T-t) + 2p\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sqrt{2p\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}} \quad (164)$$

e

$$d_2 = \frac{x - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) + r(T-t)}{\sqrt{2p\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}}. \quad (165)$$

Após simplificação algébrica, chega-se a

$$d_1 = \frac{x - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) + r(T-t) + p\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{p(T-t)}} \quad (166)$$

e

$$d_2 = \frac{x - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) + r(T-t)}{\sigma\sqrt{p(T-t)}}. \quad (167)$$

Colocando em evidência, tem-se

$$d_1 = \frac{x + (T-t)\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 + r + p\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{p(T-t)}} \quad (168)$$

e

$$d_2 = \frac{x + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{p(T-t)}}. \quad (169)$$

Substituindo $x = \ln(S/E)$, tem-se

$$d_1 = \frac{\ln(S/E) + (T-t)\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 + r + p\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{p(T-t)}} \quad (170)$$

e

$$d_2 = \frac{\ln(S/E) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) + r(T-t)}{\sigma\sqrt{p(T-t)}} \quad (171)$$

Por fim, a solução final da equação de Black-Scholes é dada por:

$$C(t, S) = e^{p\left(\frac{T\sigma^2}{2} - \frac{t\sigma^2}{2}\right)} e^{-\left(\frac{T\sigma^2}{2} - \frac{t\sigma^2}{2}\right)} SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2), \quad (172)$$

com

$$d_1 = \frac{\ln(S/E) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) + r(T-t) + p\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{p(T-t)}}. \quad (173)$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/E) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) + r(T-t)}{\sigma\sqrt{p(T-t)}} \quad (174)$$

A estrutura da solução (172) é parecida com a solução tradicional, Equação (75), só que com alguns termos a mais. A solução tradicionalmente conhecida não considera um coeficiente de difusão qualquer, não considera também o movimento advectivo e um termo reativo, pois na solução tradicional o coeficiente de difusão é 1, os termos advectivos e reativos são zerados por um α e β numa mudança de variável.

Pode-se observar que na solução (172) se considerar o coeficiente (p) de difusão igual 1 ela se transforma na solução tradicional (75) via equação do calor, como pode ser observado no Apêndice F.

Tanto o d_1 (173) da solução modificada quanto o d_2 (174) se diferenciam do d_1 (76) e d_2 (77) da solução tradicional.

4.1.4 Analisando os limites de p

Analisemos agora os limites do parâmetro p , isto é, os regimes $p \rightarrow 0^+$ e $p \rightarrow +\infty$, com o intuito de compreender o comportamento do modelo em seus extremos.

No limite $p \rightarrow 0^+$, tem-se

$$C(t, S) = \lim_{p \rightarrow 0^+} \left[e^{\frac{p\sigma^2}{2}(T-t)} e^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2) \right]. \quad (175)$$

Como $e^{\frac{p\sigma^2}{2}(T-t)} \rightarrow 1$ quando $p \rightarrow 0^+$, obtém-se

$$C(t, S) = e^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2). \quad (176)$$

Os parâmetros d_1 e d_2 são dados por

$$d_1 = \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{\ln(S/E) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} + p\sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma\sqrt{p(T-t)}}, \quad (177)$$

$$d_2 = \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{\ln(S/E) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma \sqrt{p(T-t)}}. \quad (178)$$

Como o denominador $\sigma \sqrt{p(T-t)} \rightarrow 0^+$, os limites de d_1 e d_2 dependem do sinal do numerador. Definindo

$$A = \ln(S/E) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \quad (179)$$

podem ocorrer três casos distintos quando $p \rightarrow 0^+$, $A > 0$, $A < 0$ e $A = 0$.

Caso $A > 0$.

Sabendo que $N(+\infty) = 1$, tem-se

$$d_1 = \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{A + p\sigma^2(T-t)}{\sigma \sqrt{p(T-t)}} = +\infty, \quad (180)$$

pois $A > 0$ implica $A + p\sigma^2(T-t) \geq A > 0$ para $p > 0$, enquanto $\sigma \sqrt{p(T-t)} \rightarrow 0^+$.

De modo análogo,

$$d_2 = \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{A}{\sigma \sqrt{p(T-t)}} = +\infty. \quad (181)$$

Assim,

$$C(t, S) = e^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}S - Ee^{-r(T-t)}. \quad (182)$$

Caso $A < 0$.

Sabendo que $N(-\infty) = 0$, tem-se

$$d_1 = \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{A + p\sigma^2(T-t)}{\sigma \sqrt{p(T-t)}} = -\infty, \quad (183)$$

pois $p\sigma^2(T-t) \rightarrow 0$ e existe $p_0 > 0$ tal que, para $0 < p < p_0$, vale $A + p\sigma^2(T-t) < 0$.

Além disso,

$$d_2 = \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{A}{\sigma \sqrt{p(T-t)}} = -\infty. \quad (184)$$

Logo,

$$C(t, S) = 0. \quad (185)$$

Caso $A = 0$.

Sabendo que $N(0) = \frac{1}{2}$, obtém-se

$$d_1 = \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{p\sigma^2(T-t)}{\sigma \sqrt{p(T-t)}} = 0, \quad (186)$$

e

$$d_2 = \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{0}{\sigma \sqrt{p(T-t)}} = 0. \quad (187)$$

Portanto,

$$C(t, S) = \frac{1}{2} e^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} S - \frac{E}{2} e^{-r(T-t)}. \quad (188)$$

Conclui-se que, no limite $p \rightarrow 0^+$, o efeito probabilístico associado ao termo difusivo do modelo praticamente desaparece, fazendo com que os valores de d_1 e d_2 tendam a valores extremos, dependendo da relação entre o preço do ativo subjacente e o *strike*, conforme observado na Equação (182), Equação (185) e Equação (188).

Para o caso de $p \rightarrow +\infty$, sabendo que $N(0) = \frac{1}{2}$ e $N(+\infty) = 1$, tem-se

$$d_1 = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{A + p\sigma^2(T-t)}{\sigma \sqrt{p(T-t)}} = +\infty, \quad (189)$$

$$d_2 = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{A}{\sigma \sqrt{p(T-t)}} = 0. \quad (190)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} C(t, S) &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \left[e^{\frac{p\sigma^2}{2}(T-t)} e^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)} N(d_2) \right] \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \left[e^{\frac{p\sigma^2}{2}(T-t)} e^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} SN(+\infty) - Ee^{-r(T-t)} N(0) \right] = +\infty. \end{aligned} \quad (191)$$

Logo, quando $p \rightarrow +\infty$, o termo difusivo torna-se dominante, levando a um excesso de espalhamento da solução e à perda completa de sensibilidade em relação às variações do preço do ativo subjacente. Esses comportamentos extremos evidenciam que valores intermediários de p são os mais relevantes do ponto de vista financeiro.

Nessa proposta de modificação todas as hipóteses fundamentais da equação diferencial parcial do modelo de Black-Scholes foram preservadas, ou seja, propomos uma extensão paramétrica do termo difusivo que amplia a flexibilidade do modelo sem alterar a sua estrutura. Dessa forma a Equação (172) permite capturar efeitos empíricos associados principalmente à volatilidade, que não são captados pela Equação (75) tradicional.

4.2 Aplicação da Solução Modificada

Nesta seção faremos algumas aplicações da solução modificada com o objetivo de compreender o comportamento do parâmetro p .

4.2.1 Compreendendo a Solução Modificada

Pelo mesmo motivo citado na Seção 3.3 utilizaremos a VWAP como referência de preço dos ativo subjacentes e das opções.

As Tabelas a seguir mostram a data, o valor da VWAP da opção (VWAP opção), a VWAP do ativo (VWAP Ação), o preço teórico calculado pela solução de Black-Scholes (Pr. B-S), preço teórico calculado pela solução de Black-Scholes modificada (172) (Pr. B-S mod) com coeficiente de difusão $p = 1,5$, o erro relativo entre o preço (Pr. B-S) e o preço real e o erro lativo entre o preço (Pr. B-S mod) e o preço real.

Para o ativo subjacente Petrobrás S. A. (PETR4), será avaliado a opção de compra europeia PETRC39 com *strike* em R\$ 37,61 e vencimento em 21/03/2025 na Tabela 2.

Tabela 3 – Comparativo entre o preço real da opção, o modelo Black-Scholes tradicional e o modelo modificado com seus respectivos erros relativos.

Data	VWAP D da opção	VWAP D da ação	Preço B-S	Erro rel. B-S Trad	Pr B-S Mod	Erro rel. B-S Mod
21/03/2025	0,02	36,65				
20/03/2025	0,03	36,10	0,0015	0,9500	0,0060	0,8000
19/03/2025	0,06	36,18	0,0185	0,6917	0,0411	0,3150
18/03/2025	0,07	36,16	0,0401	0,4271	0,0770	0,1000
17/03/2025	0,12	36,18	0,0694	0,4217	0,1207	0,0058
14/03/2025	0,06	35,22	0,0258	0,5700	0,0619	0,0317
13/03/2025	0,03	34,34	0,0049	0,8367	0,0188	0,3733
12/03/2025	0,05	34,15	0,0049	0,9020	0,0192	0,6160
11/03/2025	0,05	34,19	0,0081	0,8380	0,0280	0,4400
10/03/2025	0,06	34,31	0,0146	0,7567	0,0434	0,2767
07/03/2025	0,10	34,62	0,0495	0,5050	0,1100	0,1000
06/03/2025	0,11	34,34	0,0386	0,6491	0,0923	0,1609
05/03/2025	0,15	34,77	0,0826	0,4493	0,1640	0,0933
28/02/2025	0,40	36,06	0,4614	0,1535	0,6356	0,5890
27/02/2025	0,47	36,26	0,5609	0,1934	0,7462	0,5877
26/02/2025	1,52	37,93	1,5381	0,4055	1,7230	0,1336
25/02/2025	1,65	38,11	1,6954	0,0275	1,8796	0,1392
24/02/2025	1,65	38,12	1,7276	0,0470	1,9162	0,1613
21/02/2025	1,82	38,35	0,9746	0,4645	2,1693	0,1919
20/02/2025	1,87	38,41	2,0445	0,0933	2,2415	0,1987

No dia 20/03/2025 como pode ser visto na Tabela 3, a solução modificada teve seu maior erro relativo registrado sendo de 80%, no qual ainda é menor do que o erro relativo da solução tradicional nesse mesmo dia que foi de 92%, como pode ser observado na Tabela 2.

A solução modificada que considera um coeficiente de difusão geral, nesse caso particular $p = 1,5$, apresentou erros relativos menores do que a solução tradicional na maioria dos casos.

4.2.2 Explorando o comportamento do parâmetro p

Com o objetivo de realizar uma análise paramétrica exploratória, sem pretensão de calibração formal, considera-se escolher de forma discreta diferentes intensidades de difusão p , afim de investigar como as variações desse parâmetro afetam a qualidade do preço teórico e em relação aos preços observados no mercado. Será utilizado o erro relativo apenas como métrica comparativa entre o preço teórico e os preços observados no mercado, visando avaliar a conduta da solução para diferentes faixas de valores de p .

A Tabela 4 a seguir mostra a data, o preço do ativo subjacente (VWAP Ação), o preço teórico calculado via Black-Scholes modificado para diferentes valores do parâmetro p , sendo eles $p = 0,5$; $p = 0,75$; $p = 1$; $p = 1,5$; $p = 2$; $p = 2,5$.

Para o ativo subjacente Vale S. A. (VALE3), será avaliada a opção de compra europeia VALEI563 com *strike* em R\$ 54,75 e vencimento em 19/09/2025 com uma volatilidade anual de 26,09% e uma taxa de juros de 15%.

Tabela 4 – Comparação entre preços observados e valores teóricos do modelo de Black–Scholes modificado, para diferentes valores do parâmetro p .

Data	VWAP Ação	VWAP Opção	Black–Scholes modificado					
			$p = 0,5$	$p = 0,75$	$p = 1$	$p = 1,5$	$p = 2$	$p = 2,5$
19/08/2025	53,26	0,88	0,7698	1,0300	1,2664	1,6634	2,0710	2,3164
18/08/2025	53,33	0,95	0,8228	1,0962	1,3323	1,7385	2,0899	2,4059
15/08/2025	53,24	0,94	0,8607	1,1471	1,3947	1,8209	2,1899	2,5220
14/08/2025	53,31	1,03	0,9141	1,2072	1,4601	1,8951	2,2714	2,6100
13/08/2025	54,26	1,56	1,3962	1,7067	1,9727	2,4277	2,8200	3,1724
12/08/2025	54,35	1,54	1,4727	1,7877	2,0578	2,5200	2,9188	3,2771
11/08/2025	53,90	1,37	1,2618	1,5790	1,8509	2,3163	2,7178	3,0787
08/08/2025	53,63	1,22	1,2058	1,5330	1,8140	2,2956	2,7119	3,0864
07/08/2025	52,66	0,88	0,8193	1,1273	1,3964	1,8631	2,2699	2,6376
06/08/2025	52,50	0,87	0,7825	1,0898	1,3592	1,8278	2,2371	2,6076
05/08/2025	52,85	1,12	0,9300	1,2588	1,5396	2,0249	2,4469	2,8277
04/08/2025	52,46	1,03	0,8094	1,1248	1,4012	1,8820	2,3019	2,6812
01/08/2025	52,60	1,18	0,9234	1,2573	1,5483	2,0527	2,4923	2,8900
31/07/2025	51,65	0,98	0,6231	0,9243	1,1946	1,6730	2,0961	2,4819
30/07/2025	52,42	1,36	0,8964	1,2333	1,5279	2,0398	2,4868	2,8917
29/07/2025	53,50	1,81	1,3828	1,7500	2,0657	2,6082	3,0781	3,5019
28/07/2025	53,39	1,74	1,3526	1,7222	2,0402	2,5869	3,0608	3,4883
25/07/2025	53,93	2,03	1,6987	2,0853	2,4176	2,9887	3,4837	3,9305
24/07/2025	54,99	2,67	2,3539	2,7388	3,0732	3,6520	4,1564	4,6130
23/07/2025	55,77	3,30	2,9104	3,2835	3,6131	4,1906	4,6982	5,1597
22/07/2025	55,82	3,35	2,9715	3,3469	3,6790	4,2616	4,7740	5,2402
21/07/2025	54,54	2,63	2,1458	2,5461	2,8919	3,4885	4,0073	4,4765
18/07/2025	52,96	1,65	1,3703	1,7710	2,1170	2,7138	3,2329	3,7025
17/07/2025	52,87	1,69	1,3501	1,7527	2,1007	2,7013	3,2239	3,6969
16/07/2025	52,70	1,66	1,2947	1,6972	2,0458	2,6482	3,1730	3,6483
15/07/2025	52,45	1,65	1,2073	1,6072	1,9546	2,5565	3,0818	3,5580
14/07/2025	53,71	2,24	1,8332	2,2581	2,6241	3,2843	3,8022	4,2978
11/07/2025	54,22	2,63	2,1800	2,6256	3,0021	3,6520	4,2181	4,7308

Fonte: Autores (2025)

A Tabela 5 mostra o erro relativo entre o preço teórico observado na Tabela 4 e o preço real de mercado (VWAP Opção).

Tabela 5 – Erros relativos entre preços observados e valores teóricos do modelo de Black–Scholes modificado, para diferentes valores de p .

Data	VWAP Ação	Erro relativo					
		$p = 0,5$	$p = 0,75$	$p = 1$	$p = 1,5$	$p = 2$	$p = 2,5$
19/08/2025	53,26	0,1252	0,1705	0,4391	0,8902	1,3534	1,6323
18/08/2025	53,33	0,1339	0,1539	0,4024	0,8300	1,1999	1,5325
15/08/2025	53,24	0,0844	0,2203	0,4837	0,9371	1,3297	1,6830
14/08/2025	53,31	0,1125	0,1720	0,4176	0,8399	1,2052	1,5340
13/08/2025	54,26	0,1050	0,0940	0,2646	0,5562	0,8077	1,0336
12/08/2025	54,35	0,0437	0,1608	0,3362	0,6364	0,8953	1,1280
11/08/2025	53,90	0,0790	0,1526	0,3510	0,6907	0,9838	1,2472
08/08/2025	53,63	0,0116	0,2566	0,4869	0,8816	1,2229	1,5298
07/08/2025	52,66	0,0690	0,2810	0,5868	1,1172	1,5794	1,9973
06/08/2025	52,50	0,1006	0,2526	0,5623	1,1009	1,5714	1,9972
05/08/2025	52,85	0,1696	0,1239	0,3746	0,8079	1,1847	1,5247
04/08/2025	52,46	0,2142	0,0920	0,3604	0,8272	1,2349	1,6031
01/08/2025	52,60	0,2175	0,0655	0,3121	0,7396	1,1121	1,4492
31/07/2025	51,65	0,3642	0,0568	0,2190	0,7071	1,1389	1,5326
30/07/2025	52,42	0,3409	0,0932	0,1235	0,4999	0,8285	1,1263
29/07/2025	53,50	0,2360	0,0331	0,1413	0,4410	0,7006	0,9348
28/07/2025	53,39	0,2226	0,0102	0,1725	0,4867	0,7591	1,0048
25/07/2025	53,93	0,1632	0,0272	0,1909	0,4723	0,7161	0,9362
24/07/2025	54,99	0,1184	0,0258	0,1510	0,3678	0,5567	0,7277
23/07/2025	55,77	0,1181	0,0050	0,0949	0,2699	0,4237	0,5635
22/07/2025	55,82	0,1130	0,0009	0,0982	0,2721	0,4251	0,5642
21/07/2025	54,54	0,1841	0,0319	0,0996	0,3264	0,5237	0,7021
18/07/2025	52,96	0,1695	0,0733	0,2830	0,6447	0,9593	1,2439
17/07/2025	52,87	0,2011	0,0371	0,2430	0,5984	0,9076	1,1875
16/07/2025	52,70	0,2201	0,0224	0,2324	0,5953	0,9114	1,1978
15/07/2025	52,45	0,2683	0,0259	0,1846	0,5494	0,8678	1,1564
14/07/2025	53,71	0,1816	0,0081	0,1715	0,4662	0,6974	0,9187
11/07/2025	54,22	0,1711	0,0017	0,1415	0,3886	0,6038	0,7988

Fonte: Autores (2025).

Pode-se observar que do dia 11/07/2025 até ao dia 05/08/2025 os menores erros relativos foram para $p = 0,75$, do dia 06/08/2025 até o dia 19/08/2025 os menores erros relativos foram em sua maioria para $p = 0,5$.

A solução modificada que considera um coeficiente de difusão ajustável, nesse caso particular $p = 0,5$ e $p = 0,75$, apresentaram erros relativos menores do que a solução tradicional ($p = 1$) na maioria dos casos.

4.2.3 Calibração do parâmetro p

Nesta etapa, serão realizadas aplicações da solução modificada para valores do parâmetro p que melhor se ajusta a precificação real de mercado, com o intuito de

observar se existe alguma relação entre o valor do parâmetro p e preço do ativo em relação ao *strike* da opção ou a distância do vencimento.

O método empregado para a calibração do p foi o método da bisseção, que se baseia na mudança de sinal da função em um intervalo previamente definido, descartando o intervalo médio que não possui raiz (mudança de sinal) em cada iteração. Nesse contexto, a raiz é o p que reproduz o preço observado no mercado.

A correlação de Pearson (Morettin; Bussab, 2017) que varia de -1 a 1 foi utilizada para quantificar a dependência linear entre p e preço do ativo (VWAP) e entre p e os dias restantes para o vencimento da opção ($T - t$). Quando o valor da correlação é 1 significa que as duas variáveis analisadas (por exemplo: X e Y) possuem relação linear positiva perfeita, ou seja, a medida que a variável Y cresce a outra variável X também cresce. Caso a correlação seja -1 significa que as duas variáveis possuem relação linear negativa perfeita, ou seja, a medida que a variável Y cresce a outra variável X decresce. Quando a correlação é zero, significa que ambas as variáveis analisadas não possuem relação linear.

As Tabelas desta subseção mostram para cada data analisada, o preço do ativo subjacente (VWAP Ação), o preço da opção do ativo (VWAP Opção) e o valor do parâmetro p ajustado (calibrado), obtido de maneira a refletir o preço de mercado. Nas figuras, esse mesmo valor é representado como *ptimo*, no qual corresponde ao valor que minimiza o erro entre a solução modificada e preço real de mercado.

A Tabela 6 mostra o comportamento do p calibrado para o ativo subjacente Vale S. A. (VALE3), será avaliado a opção de compra europeia VALEH56 com *strike* em R\$ 52,94 e vencimento em 15/08/2025 com uma volatilidade anual de 18,08% e uma taxa de juros de 15%.

Tabela 6 – Valores observados e parâmetro ajustado p do modelo de Black–Scholes modificado para a opção VALEH56.

Data	VWAP Ação	VWAP Opção	p	Data	VWAP Ação	VWAP Opção	p
29/07/2025	53,50	1,81	2,3412	08/07/2025	53,26	2,21	1,5910
28/07/2025	53,39	1,68	1,9750	07/07/2025	52,97	2,10	1,6624
25/07/2025	53,93	2,12	1,8225	04/07/2025	53,47	2,45	1,5413
24/07/2025	54,99	2,81	1,3470	03/07/2025	53,67	2,66	1,6225
23/07/2025	55,77	3,85	2,6407	02/07/2025	53,60	2,32	1,0712
22/07/2025	55,82	3,77	2,0175	01/07/2025	51,66	1,45	1,4580
21/07/2025	54,54	2,73	1,8385	30/06/2025	51,22	1,31	1,5255
18/07/2025	52,96	1,61	1,4378	27/06/2025	51,21	1,33	1,4332
17/07/2025	52,87	1,67	1,6069	26/06/2025	50,40	1,01	1,4217
16/07/2025	52,70	1,60	1,5902	25/06/2025	48,80	0,60	1,5612
15/07/2025	52,45	1,66	1,9537	24/06/2025	49,01	0,65	1,5108
14/07/2025	53,71	2,43	1,8839	23/06/2025	48,73	0,65	1,6308
11/07/2025	54,22	2,67	1,3972	20/06/2025	48,73	0,72	1,6606
10/07/2025	54,43	3,08	1,8825	18/06/2025	49,94	1,12	1,5953
09/07/2025	52,51	1,83	1,7916	17/06/2025	50,57	1,43	1,6468

Fonte: Autores (2025).

O gráfico exibido na Figura 3 mostra o comportamento dos valores de p calibrado em relação a quantidade de dias úteis faltantes para o vencimento da opção VALEH56.



Figura 1 – Parâmetro calibrado p em função dos dias até o vencimento para a opção VALEH56.

A Figura 2 a seguir mostra o comportamento do preço do ativo subjacente VALE3 dentro do intervalo de tempo 23/05/2025 a 23/07/2025

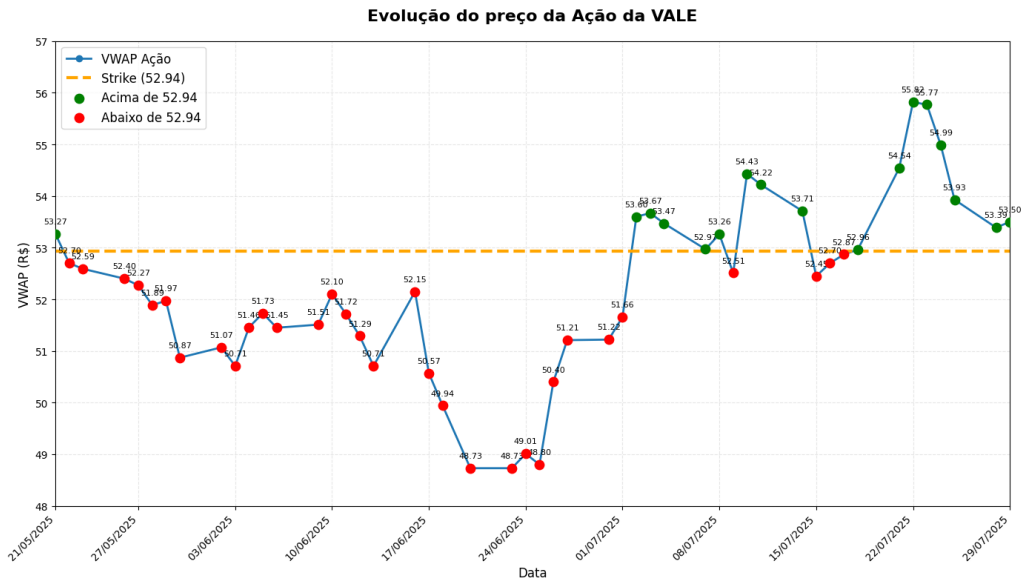


Figura 2 – Preço VALE3 de 23/05/2025 - 23/07/2025 em relação ao *strike* 52,94

A correlação de Pearson entre p e $(T - t)$ neste intervalo observado é de $-0,59$ demonstrando forte correlação negativa, ou seja, quando o tempo se aproxima do vencimento da opção o p aumenta. Para p e o preço nesse intervalo observado a correlação de Pearson não se mostrou tão forte, sendo de $0,3654$, isso mostra que preço também afeta no valor de p em menor escala.

Para o ativo subjacente Vale S. A. (VALE3), na Tabela 7 será exibido os valores de p calibrado da opção de compra europeia VALEI563 com *strike* em R\$ 54,75 e vencimento em 19/09/2025 com uma volatilidade anual de 26,09% e uma taxa de juros de 15%.

Tabela 7 – Valores observados e parâmetro ajustado p do modelo de Black–Scholes modificado para a opção VALEI563.

Data	VWAP Ação	VWAP Opção	p	Data	VWAP Ação	VWAP Opção	p
19/08/2025	53,26	0,88	0,6029	29/07/2025	53,50	1,81	0,8009
18/08/2025	53,33	0,95	0,6156	28/07/2025	53,39	1,74	0,7688
15/08/2025	53,24	0,94	0,5691	25/07/2025	53,93	2,03	0,7166
14/08/2025	53,31	1,03	0,5981	24/07/2025	54,99	2,67	0,7071
13/08/2025	54,26	1,56	0,6307	23/07/2025	55,77	3,30	0,7670
12/08/2025	54,35	1,54	0,5535	22/07/2025	55,82	3,35	0,7573
11/08/2025	53,90	1,37	0,5843	21/07/2025	54,54	2,63	0,8136
08/08/2025	53,63	1,22	0,5136	18/07/2025	52,96	1,65	0,6748
07/08/2025	52,66	0,88	0,5502	17/07/2025	52,87	1,69	0,7134
06/08/2025	52,50	0,87	0,5716	16/07/2025	52,70	1,66	0,7304
05/08/2025	52,85	1,12	0,6424	15/07/2025	52,45	1,65	0,7849
04/08/2025	52,46	1,03	0,6759	14/07/2025	53,71	2,24	0,7437
01/08/2025	52,60	1,18	0,6937	11/07/2025	54,22	2,63	0,7580
31/07/2025	51,65	0,98	0,8057	10/07/2025	54,43	3,10	0,9678
30/07/2025	52,42	1,36	0,8605				

Fonte: Autores (2025).

Em seguida na Figura 3 temos o comportamento dos valores do parâmetro p calibrado em relação a quantidade de dias faltantes para o vencimento da opção VALEI563.

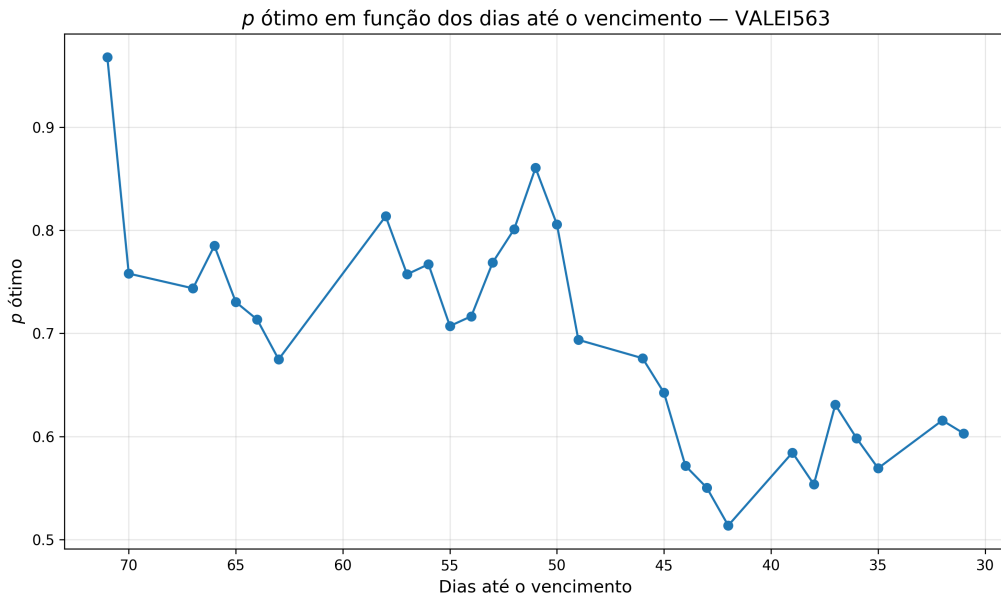


Figura 3 – Parâmetro ajustado p em função dos dias até o vencimento para a opção VALEI563.

A Figura 4 a seguir mostra o comportamento do preço do ativo subjacente VALE3 dentro do intervalo de tempo 10/07/2025 a 19/08/2025

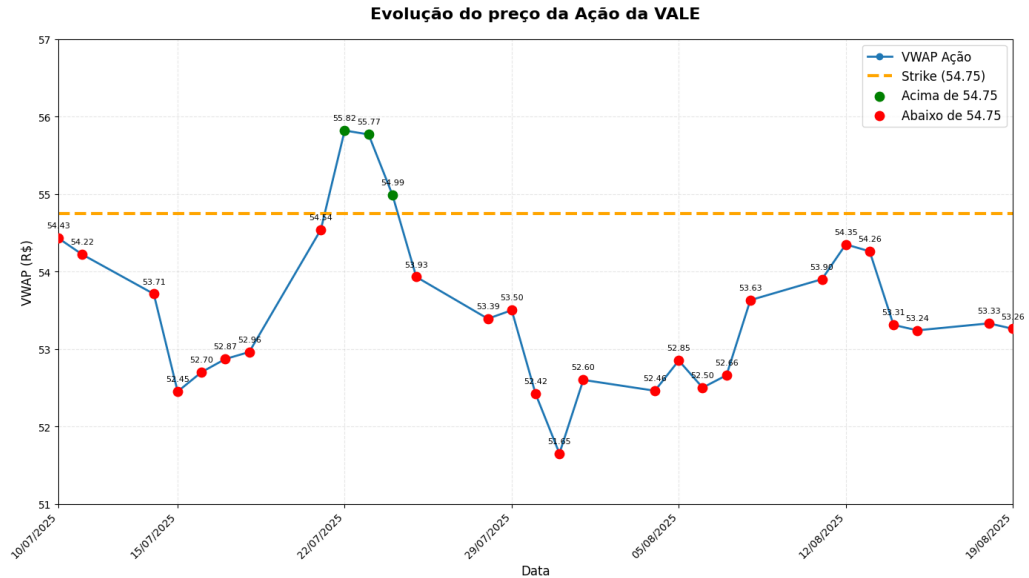


Figura 4 – Preço VALE3 de 10/07/2025 - 19/08/2025 em relação ao *strike* 54,75

Para esse intervalo a correlação de Pearson entre p e $(T - t)$ foi de 0,73 se mostrando bem forte e positiva, ao contrário da anterior que apresentou valor alto, porém negativo. Conforme o tempo de vencimento da opção diminui o p também está diminuindo. Também ao contrário do que ocorreu com o p da opção VALEH56, a correlação entre p e o preço do ativo, foi estimada em $-0,26$ continua baixo, mas com o sinal invertido, ou seja, conforme o preço do ativo sobe o p ajustado diminui.

A próxima Tabela 8 mostra o comportamento do p para o ativo subjacente Vale S. A. (VALE3), será avaliado a opção de compra europeia VALEJ594 com *strike* em R\$ 57,82 e vencimento em 17/10/2025 com uma volatilidade anual de 24,20% e uma taxa de juros de 15%.

Tabela 8 – Valores observados e parâmetro ajustado p do modelo de Black–Scholes modificado para a opção VALEJ594.

Data	VWAP Ação	VWAP Opção	p	Data	VWAP Ação	VWAP Opção	p
29/09/2025	57,43	1,08	0,7588	04/09/2025	55,79	0,94	0,5820
26/09/2025	57,03	0,90	0,6365	03/09/2025	55,54	0,91	0,6164
25/09/2025	58,29	1,63	0,6314	02/09/2025	55,32	0,86	0,6225
24/09/2025	57,89	1,43	0,6430	01/09/2025	55,25	0,83	0,5995
23/09/2025	57,98	1,62	0,7546	29/08/2025	55,64	1,04	0,5973
22/09/2025	58,14	1,73	0,7259	28/08/2025	55,73	1,15	0,6353
19/09/2025	57,89	1,52	0,5611	27/08/2025	55,32	0,99	0,6194
18/09/2025	57,70	1,44	0,5610	26/08/2025	55,18	0,95	0,6117
17/09/2025	57,68	1,53	0,6247	25/08/2025	55,07	0,93	0,6106
16/09/2025	57,64	1,50	0,6182	22/08/2025	54,56	0,82	0,6130
15/09/2025	57,38	1,44	0,6371	21/08/2025	53,27	0,52	0,6442
12/09/2025	57,12	1,38	0,6244	20/08/2025	53,05	0,53	0,6888
11/09/2025	57,01	1,37	0,6388	19/08/2025	53,26	0,62	0,7131
10/09/2025	56,61	1,15	0,5932	18/08/2025	53,33	0,62	0,6809
09/09/2025	56,76	1,37	0,6956	15/08/2025	53,24	0,61	0,6484
08/09/2025	56,44	1,11	0,5798	14/08/2025	53,31	0,66	0,6630
05/09/2025	56,31	0,91	0,4198	13/08/2025	54,26	2,47	2,0890

Fonte: Autores (2025).

Agora observe na Figura 5 o comportamento dos valores do parâmetro p ajustado em relação a quantidade de dias faltantes para o vencimento da opção VALEJ594.



Figura 5 – Parâmetro ajustado p em função dos dias até o vencimento para a opção VALEJ594.

A Figura 6 a seguir mostra o comportamento do preço do ativo subjacente VALE3 dentro do intervalo de tempo 13/08/2025 a 29/09/2025

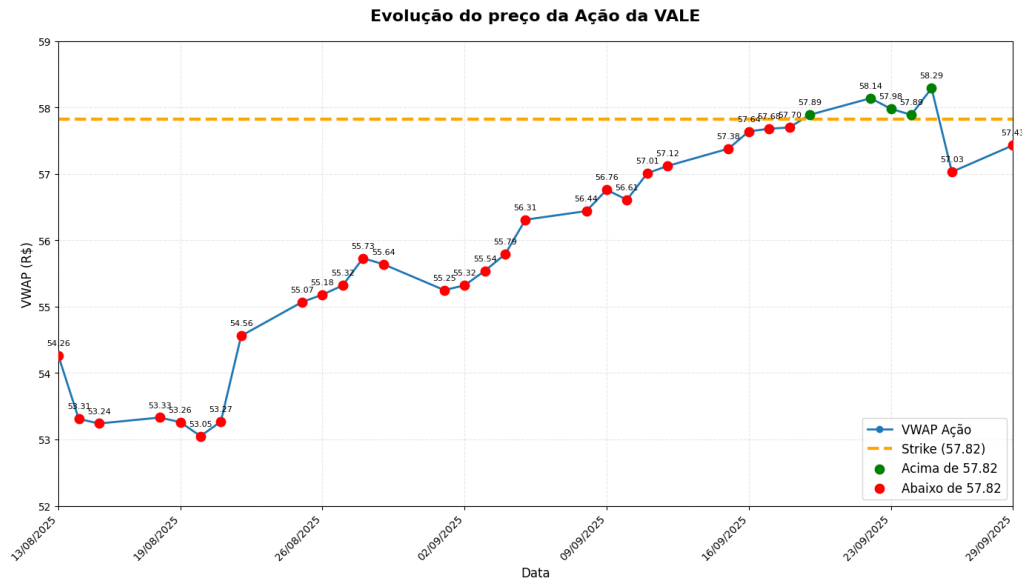


Figura 6 – Preço VALE3 de 13/08/2025 - 29/09/2025 em relação ao *strike* 57,82

Para esse intervalo da opção VALEJ594 a correlação de Pearson entre p e $(T-t)$ foi de $-0,19$ se mostrando fraca, ao contrário da anterior que apresentou forte correlação. A correlação entre p e o preço do ativo também se mostrou fraca, foi estimada em $0,36$. Neste intervalo tanto o tempo como o preço se mostraram pouco influentes no valor exato de p . Pode-se observar na Tabela 8 que p se mantém bastante estável entre $0,76$ e $0,5$. O preço também se comportou de forma bem suave ao longo do tempo conforme pode ser observado na Figura 6.

Através das Tabelas 6, 7 e 8 podemos observar que o parâmetro p calibrado varia ao longo do tempo e não permanece próximo de 1, além de parecer existir um leve acompanhamento do p em relação ao preço. Logo o mercado precifica uma difusão efetiva diferente da clássica.

O p parece estar capturando efeitos de soluções mais complexas com volatilidade *skew* (alta para PUTs, baixa para CALLs) ou *smile* (maior para *strikes* baixos e altos), porém aqui como um ajuste no coeficiente difusivo. Dessa forma ele se comporta com um parâmetro efetivo do mercado e não como um ajuste numérico simples nos casos observados, pois captura distintos regimes de volatilidade, microestrutura de preço em relação ao *strike*, assimetria temporal e reação do mercado próximo ao vencimento. Isso evidencia por que $p = 1$ funciona bem em cenários ideais e p diferente de 1 melhora sistematicamente o erro relativo.

O p parece depender simultaneamente de múltiplos fatores, como tempo até o vencimento, preço do ativo em relação ao *strike* e até mesmo da volatilidade, como no caso da opção VALEJ594 em que a correlação entre o p e preço ou vencimento foram baixas. Isso mostra ausência de dependência linear isolada, sugerindo então que p pode possuir dependência conjunta ou não linear entre as variáveis. Neste trabalho não foi possível afirmar se p é função exclusiva do tempo, do preço ou que exista

fórmula fechada $p = f(t, (S - K)/K)$ ou até mesmo dependente da volatilidade. Isso abre caminho para calibrações funcional, inferência bayesiana ou modelos híbridos.

Por se tratarem de soluções analíticas em forma fechada, tanto a solução tradicional quanto a solução modificada apresentam custo computacional equivalentes e de ordem constante, pois envolvem apenas a avaliação de funções elementares e da função de distribuição normal, podendo ser realizada de forma imediata e sem procedimentos iterativos.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi apresentada uma abordagem analítica para a equação de Black-Scholes por meio da aplicação da Transformada de Fourier, com o objetivo de explorar, tanto a solução clássica, quanto uma proposta modificada mais sensível às condições reais do mercado financeiro brasileiro. Inicialmente, realizou-se a dedução da solução tradicional a partir da transformação da equação de Black-Scholes na equação do calor, permitindo uma solução fechada que respeita as condições de contorno e iniciais estabelecidas.

A aplicação dessa solução ao mercado de opções da Petrobras S.A. mostrou que, embora o modelo clássico seja eficaz para opções dentro do dinheiro e com vencimentos mais longos, apresenta limitações significativas na precificação de opções fora do dinheiro ou com vencimento iminente. Esses resultados evidenciam a sensibilidade da solução clássica às suposições simplificadoras do modelo, especialmente à hipótese de volatilidade constante e à ausência de mecanismos de difusão, reação ou advecção no comportamento dos preços.

A partir dessas observações, propôs-se uma nova solução analítica baseada na mesma ferramenta matemática — a Transformada de Fourier —, porém sem a necessidade de reduzir a equação de Black-Scholes à forma da equação do calor. A nova formulação considera explicitamente o termo difusivo, advectivo e reativo, onde introduz-se um $p > 0$ como um parâmetro livre no operador difusivo gerando uma família de equações diferenciais parciais parabólicas. Portanto, todas as hipóteses fundamentais da equação diferencial parcial do modelo de Black-Scholes foram preservadas, ou seja, propomos uma extensão paramétrica do termo difusivo que amplia a flexibilidade do modelo sem alterar a sua estrutura.

Do ponto de vista empírico, este parâmetro p atua como um coeficiente de difusão efetiva, ou seja, controla a taxa de espalhamento espacial da solução. O caso particular $p = 1$ corresponde a hipótese clássica da Equação de Black-Scholes. Dessa forma, a solução modificada corresponde em uma solução analítica mais abrangente e teoricamente mais alinhada às dinâmicas reais de precificação do mercado. Embora o termo advectivo e reativo não contribuíssem para solução final, ele pode auxiliar na

solução de problemas de natureza difusiva-advectiva-reativa.

Os primeiros resultados obtidos de forma exploratória com a solução modificada nas opções da VALE S.A. revelaram um desempenho superior na aproximação dos preços reais observados para algumas faixas de intensidade de difusão p , especialmente em cenários críticos como opções fora do dinheiro ou com vencimento próximo. Isso pode ser observado na Tabela 5, na qual do dia 11/07/2025 até o dia 05/08/2025 os menores erros relativos foram para $p = 0,75$, do dia 06/08/2025 até o dia 19/08/2025 os menores erros relativos foram em sua maioria para $p = 0,5$, observou-se que no dia 19/08/2025 a solução tradicional ($p = 1$) apresentou erro relativo de 43,91%, enquanto a solução modificada apresentou erro relativo de 12,26%.

Uma segunda abordagem foi realizada para calibração do parâmetro de difusão $p > 0$, afim de investigar qual o valor calibrado de p e se existe alguma relação desse valor com a variação do preço em relação ao *strike* ou com o tempo de vencimento da opção. Embora os valores de ajuste de p tenham ficado entre 0,5 e 1 em dois dos casos observados e entre 1 e 2 em um dos casos, em sua maioria ficaram distantes de 1. Isso mostra que a introdução de uma estrutura analítica mais rica, ainda que derivada do mesmo princípio teórico, é capaz de mitigar algumas das deficiências do modelo clássico.

O p apresentou maior correlação linear com o tempo até o vencimento do que com o preço em relação ao *strike* em dois dos casos observados, embora ambas variáveis tenham mostrado forte influência. No caso específico da opção VALEJ594, a correlação linear entre o p e preço ou vencimento foram reduzidas. Nesse período o preço do ativo teve comportamento suave, sugerindo possível dependência conjunta também da volatilidade. Não podemos afirmar se p é função exclusiva do tempo, do preço, da volatilidade ou de alguma combinação conjunta entre essas variáveis.

O comportamento do parâmetro p da solução modificada parece capturar efeitos de soluções mais complexas como a volatilidade *skew* ou *smile*, neste caso como um ajuste no coeficiente difusivo. Isso evidencia por que $p = 1$ funciona bem em cenários ideais e $p \neq 1$ melhora a precisão do modelo.

Dessa forma, a principal contribuição desta dissertação reside na proposição de uma solução analítica alternativa para a equação de Black-Scholes, viável do ponto de vista matemático e mais eficiente na prática de precificação. Este trabalho reforça o potencial de abordagens analíticas refinadas, como a Transformada de Fourier, para a resolução de modelos financeiros complexos, e abre caminho para futuras investigações que combinem soluções exatas com técnicas híbridas de calibração, como otimização ou inferência bayesiana.

Como continuidade, recomenda-se a ampliação da análise empírica com outros ativos e diferentes contextos de mercado, bem como a exploração da solução modificada em ambientes de volatilidade implícita variável ou com parâmetros calibrados

a partir de dados históricos. Além disso, a integração com abordagens computacionais pode ampliar ainda mais o potencial preditivo da formulação aqui desenvolvida, tornando-a uma ferramenta promissora para aplicações quantitativas em finanças.

Apêndices

APÊNDICE A – Dedução detalhada da equação (9)

Aplicando as respectivas derivadas, em relação a S , pela regra da cadeia tem-se

$$\frac{\partial C}{\partial S} = E \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial S} = E \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} = E \frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{S}. \quad (192)$$

Derivando novamente em relação a S , pela regra do produto, chega-se a

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S} \left(E \frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{S} \right) = -\frac{E}{S^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{E}{S^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (193)$$

Derivando em relação a t , pela regra da cadeia, tem-se

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(E v(\tau, x) \right) = E \frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = E \frac{\partial v}{\partial \tau} \left(-\frac{\sigma^2}{2} \right) = -E \frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\sigma^2}{2}. \quad (194)$$

Substituindo as derivadas (Equação (192), Equação (193) e Equação (194)) na Equação(78), tem-se

$$\frac{\partial C(t, S)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C(t, S)}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C(t, S)}{\partial S} - rC(t, S) = 0. \quad (195)$$

Ou, após a substituição da Equação (193) na Equação (195)

$$-E \frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \left(-\frac{E}{S^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{E}{S^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + rS \left(E \frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{S} \right) - rE v(\tau, x) = 0. \quad (196)$$

Simplificando:

$$-E \frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{2} \sigma^2 \left(-E \frac{\partial v}{\partial x} + E \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + rE \frac{\partial v}{\partial x} - rE v(\tau, x) = 0. \quad (197)$$

Dividindo ambos os lados por E , fica-se com

$$-\frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\sigma^2}{2} - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + r \frac{\partial v}{\partial x} - rv(\tau, x) = 0, \quad (198)$$

que pode ser reescrita como

$$-\frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\sigma^2}{2} - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial v}{\partial x} + r \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - rv(\tau, x) = 0. \quad (199)$$

Multiplicando ambos os lados por $\frac{2}{\sigma^2}$, tem-se

$$-\frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{2r}{\sigma^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{2r}{\sigma^2} v(\tau, x) = 0. \quad (200)$$

Aplicando as devidas simplificações e isolando o termo $\frac{\partial v}{\partial \tau}$, chega-se a

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = -\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{2r}{\sigma^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{2r}{\sigma^2} v(\tau, x). \quad (201)$$

APÊNDICE B – Dedução detalhada do α e β

Os parâmetros α e β são escolhidos para anular os termos não correspondentes à Equação (41).

Encontrando as derivadas obtidas por substituir a Equação (38) na Equação (35), fica-se com

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\alpha x + \beta \tau} u(\tau, x) \right) = e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (202)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) = e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (203)$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(e^{\alpha x + \beta \tau} u(\tau, x) \right) = e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} \right). \quad (204)$$

Substituindo essas derivadas na Equação (35), tem-se

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{2r}{\sigma^2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{2r}{\sigma^2} v(\tau, x). \quad (205)$$

Substituindo as derivadas obtidas da transformação $v(\tau, x) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(\tau, x)$, obtém-se

$$\begin{aligned} e^{\alpha x - \beta \tau} \beta u + e^{\alpha x - \beta \tau} \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{2r}{\sigma^2} \left[e^{\alpha x - \beta \tau} \left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] \\ &\quad - e^{\alpha x - \beta \tau} \left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &\quad + e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \\ &\quad - \frac{2r}{\sigma^2} e^{\alpha x - \beta \tau} u. \end{aligned} \quad (206)$$

Dividindo ambos os lados por $e^{\alpha x - \beta \tau}$, tem-se

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{2r}{\sigma^2} \left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(\alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \frac{2r}{\sigma^2} u. \quad (207)$$

Reagrupando os termos, obtém-se:

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{2r\alpha}{\sigma^2} u + \frac{2r}{\sigma^2} \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha u - \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{2r}{\sigma^2} u. \quad (208)$$

Ou, de forma equivalente,

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2r}{\sigma^2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha^2 u - \alpha u - \frac{2r}{\sigma^2} u + \frac{2r\alpha}{\sigma^2} u. \quad (209)$$

Chamando

$$c = \frac{2r}{\sigma^2}, \quad (210)$$

obtem-se

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha^2 u - \alpha u - c u + c\alpha u - \beta u. \quad (211)$$

Colocando os termos em evidência, a equação torna-se

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} (2\alpha + c - 1) + u (\alpha^2 + c\alpha - \alpha - c - \beta). \quad (212)$$

Para ficar semelhante à equação do calor, é necessário eliminar os termos que multiplicam $\frac{\partial u}{\partial x}$ e u .

Para zerar o termo que multiplica $\frac{\partial u}{\partial x}$, precisa-se que

$$2\alpha + c - 1 = 0, \quad (213)$$

de onde se obtém

$$\alpha = \frac{1 - c}{2}. \quad (214)$$

Para zerar o termo que multiplica u , necessita-se que

$$\alpha^2 + c\alpha - \alpha - c - \beta = 0, \quad (215)$$

o que implica

$$\beta = \alpha^2 + c\alpha - \alpha - c. \quad (216)$$

Substituindo o valor de α , chega-se a

$$\beta = \left(\frac{1 - c}{2}\right)^2 + c\left(\frac{1 - c}{2}\right) - \frac{1 - c}{2} - c. \quad (217)$$

Simplificando, tem-se

$$\begin{aligned}
 \beta &= \frac{(1-c)^2}{4} + \frac{c(1-c)}{2} - \frac{1-c}{2} - c \\
 &= \frac{1-2c+c^2}{4} + \frac{c-c^2}{2} - \frac{1-c}{2} - c \\
 &= \frac{1-2c+c^2}{4} + \frac{2c-2c^2}{4} - \frac{2-2c}{4} - \frac{4c}{4} \\
 &= \frac{1-2c+c^2+2c-2c^2-2+2c-4c}{4} \\
 &= \frac{-1-2c-c^2}{4} \\
 &= -\frac{(1+c)^2}{4}.
 \end{aligned} \tag{218}$$

Logo, tem-se definidos o α (214) e β (218), com $c = \frac{2r}{\sigma^2}$.

APÊNDICE C – Alterando o Intervalo de Integração

Para as opções europeias, as condições iniciais são

$$u(0, x) = \max \left\{ e^{\frac{c+1}{2}x} - e^{\frac{c-1}{2}x}, 0 \right\}, \quad (219)$$

na qual os termos exponenciais podem ser reescritos como

$$e^{\frac{c+1}{2}x} - e^{\frac{c-1}{2}x} = e^{\frac{cx}{2}} \left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} \right). \quad (220)$$

O termo $e^{\frac{cx}{2}}$ é sempre positivo, por se tratar de uma exponencial. Já a diferença $e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}$ depende de x , uma vez que $e^{\frac{x}{2}} > e^{-\frac{x}{2}}$:

- Se $x \geq 0$, então $e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} > 0$.
- Se $x < 0$, então $e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} < 0$.

Como

$$u(0, x) = \max \left\{ e^{\frac{c+1}{2}x} - e^{\frac{c-1}{2}x}, 0 \right\},$$

basta considerar apenas a parte com $x \geq 0$, pois para $x < 0$ o valor é zero. Portanto, define-se

$$u_0(z) = \max \left\{ e^{\frac{c+1}{2}z} - e^{\frac{c-1}{2}z}, 0 \right\},$$

ou seja, $u_0(z) = 0$ para todo $z < 0$. Logo, é válido considerar $z \in [0, +\infty)$, sendo possível assim alterar o intervalo de integração.

APÊNDICE D – Dedução detalhada para alterar o intervalo de integração

Após mudança de variável

$$\omega = \frac{z - x}{\sqrt{2\tau}} \Rightarrow dz = d\omega, \quad z = \omega\sqrt{2\tau} + x, \quad (221)$$

implica que

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{\omega = \frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} \left(e^{-\frac{1}{2}\omega^2} e^{\frac{c+1}{2}(\omega\sqrt{2\tau}+x)} \right) d\omega, \quad (222)$$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{\omega = \frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} \left(e^{-\frac{1}{2}\omega^2} e^{\frac{c-1}{2}(\omega\sqrt{2\tau}+x)} \right) d\omega. \quad (223)$$

Após reorganizar os expoentes, tem-se

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{\omega = \frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} \left(e^{-\frac{1}{2}\omega^2} e^{\frac{c+1}{2}\omega\sqrt{2\tau}} e^{\frac{c+1}{2}x} \right) d\omega, \quad (224)$$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{\omega = \frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} \left(e^{-\frac{1}{2}\omega^2} e^{\frac{c-1}{2}\omega\sqrt{2\tau}} e^{\frac{c-1}{2}x} \right) d\omega. \quad (225)$$

Retirando os termos que não dependem de ω , obtém-se

$$I_1 = e^{\frac{c+1}{2}x} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{\omega = \frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\omega^2} e^{\frac{c+1}{2}\omega\sqrt{2\tau}} d\omega, \quad (226)$$

$$I_2 = e^{\frac{c-1}{2}x} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{\omega = \frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\omega^2} e^{\frac{c-1}{2}\omega\sqrt{2\tau}} d\omega. \quad (227)$$

Reescrevendo os expoentes, tem-se

$$I_1 = e^{\frac{1}{2}(c+1)x} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{\omega = \frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\omega^2 - (c+1)\omega\sqrt{2\tau}\right)} d\omega, \quad (228)$$

$$I_2 = e^{\frac{1}{2}(c-1)x} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{\omega = \frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\omega^2 - (c-1)\omega\sqrt{2\tau}\right)} d\omega. \quad (229)$$

De completar quadrados, obtém-se:

$$I_1 = e^{\frac{1}{2}(c+1)x} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{\omega=-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\omega-\frac{1}{2}(c+1)\sqrt{2\tau})^2} d\omega, \quad (230)$$

$$I_2 = e^{\frac{1}{2}(c-1)x} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{\omega=-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\omega-\frac{1}{2}(c-1)\sqrt{2\tau})^2} d\omega. \quad (231)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\omega - \frac{1}{2}(c+1)\sqrt{2\tau} \right)^2 &= -\frac{1}{2} \left[\omega^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}(c+1)\sqrt{2\tau} + \left(\frac{1}{2}(c+1)\sqrt{2\tau} \right)^2 \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[\omega^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}(c+1)\sqrt{2\tau} + \frac{1}{4}(c+1)^2 \cdot 2\tau \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[\omega^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}(c+1)\sqrt{2\tau} \right] - \frac{1}{4}(c+1)^2\tau. \end{aligned} \quad (232)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\omega - \frac{1}{2}(c-1)\sqrt{2\tau} \right)^2 &= -\frac{1}{2} \left[\omega^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}(c-1)\sqrt{2\tau} + \left(\frac{1}{2}(c-1)\sqrt{2\tau} \right)^2 \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[\omega^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}(c-1)\sqrt{2\tau} + \frac{1}{4}(c-1)^2 \cdot 2\tau \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[\omega^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}(c-1)\sqrt{2\tau} \right] - \frac{1}{4}(c-1)^2\tau. \end{aligned} \quad (233)$$

Dessa forma soma-se o termo excedente no expoente para obter

$$I_1 = e^{\frac{1}{2}(c+1)x} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{\omega=-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} \left(e^{-\frac{1}{2}(\omega-\frac{1}{2}(c+1)\sqrt{2\tau})^2} e^{+\frac{1}{4}(c+1)^2\tau} \right) d\omega, \quad (234)$$

$$I_2 = e^{\frac{1}{2}(c-1)x} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{\omega=-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} \left(e^{-\frac{1}{2}(\omega-\frac{1}{2}(c-1)\sqrt{2\tau})^2} e^{+\frac{1}{4}(c-1)^2\tau} \right) d\omega. \quad (235)$$

Passando para fora da integral os termos que não dependem de ω , tem-se

$$I_1 = e^{\frac{1}{2}(c+1)x} e^{+\frac{1}{4}(c+1)^2\tau} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{\omega=-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} \left(e^{-\frac{1}{2}(\omega-\frac{1}{2}(c+1)\sqrt{2\tau})^2} \right) d\omega, \quad (236)$$

$$I_2 = e^{\frac{1}{2}(c-1)x} e^{+\frac{1}{4}(c-1)^2\tau} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{\omega=-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} \left(e^{-\frac{1}{2}(\omega-\frac{1}{2}(c-1)\sqrt{2\tau})^2} \right) d\omega. \quad (237)$$

Resolvendo essa integral por substituição, chega-se a

$$u_1 = \omega - \frac{1}{2}(c+1)\sqrt{2\tau}, \quad du = d\omega, \quad (238)$$

$$u_2 = \omega - \frac{1}{2}(c-1)\sqrt{2\tau}, \quad du = d\omega. \quad (239)$$

Assim,

$$I_1 = e^{\frac{1}{2}(c+1)x} e^{\frac{1}{4}(c+1)^2\tau} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{u_1=-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} \left(e^{-\frac{1}{2}u_1^2} \right) du, \quad (240)$$

$$I_2 = e^{\frac{1}{2}(c-1)x} e^{\frac{1}{4}(c-1)^2\tau} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{u_2=-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} \left(e^{-\frac{1}{2}u_2^2} \right) du. \quad (241)$$

Corrigindo os limites de integração I_1 da forma

$$\omega = \frac{z-x}{\sqrt{2\tau}}, \quad (242)$$

tem-se que

$$u_1 = \omega - \frac{1}{2}(c+1)\sqrt{2\tau} \quad (243)$$

Então o limite inferior é assumido quando $z = 0$, ou seja,

$$\lim_{\text{inferior}} = \frac{-x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{2}(c+1)\sqrt{2\tau} = -d_1. \quad (244)$$

Corrigindo os limites de integração I_2 , da forma

$$\omega = \frac{z-x}{\sqrt{2\tau}}, \quad (245)$$

tem-se que

$$u_2 = \omega - \frac{1}{2}(c-1)\sqrt{2\tau}. \quad (246)$$

Assim, o limite inferior é assumido quando $z = 0$, ou seja,

$$\lim_{\text{inferior}} = \frac{-x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{2}(c-1)\sqrt{2\tau} = -d_2. \quad (247)$$

APÊNDICE E – Aplicação detalhada da Convolução

Segundo Reamat (2022), o teorema da convolução afirma que o produto de duas funções no espaço de Fourier é equivalente à convolução de suas inversas no espaço original. Assim, pelo teorema da convolução, tem-se

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{-p\omega^2\tau} \bar{v}_0(\omega) \right\} = H(x, \tau) * v_0(x). \quad (248)$$

Sabe-se que $G(x, \tau)$, a inversa da transformada de Fourier de $e^{-p\omega^2\tau}$, é o núcleo gaussiano da forma

$$H(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi p\tau}} e^{-x^2/4p\tau}. \quad (249)$$

Além disso, o termo $e^{ig\omega\tau}$ no espaço de Fourier representa o deslocamento da função no domínio x . Pela propriedade

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{i\omega a} F(\omega) \right\} = f(x - a), \quad (250)$$

tem-se que

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{ig\omega\tau} F(\omega) \right\} = f(x - g\tau). \quad (251)$$

Portanto, a Equação (96) pode ser reescrita como:

$$v(\tau, x) = e^{-c\tau} (H(x - g\tau, \tau) * v_0(x)), \quad (252)$$

ou seja,

$$v(\tau, x) = e^{-c\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} H(x - g\tau - z, \tau) v_0(z) dz. \quad (253)$$

Substituindo

$$H(x - g\tau - z, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi p\tau}} e^{-(x-g\tau-z)^2/4p\tau}, \quad (254)$$

obté-se a solução final da Equação (88):

$$v(\tau, x) = \frac{e^{-c\tau}}{\sqrt{4\pi p\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-g\tau-z)^2/4p\tau} v_0(z) dz. \quad (255)$$

APÊNDICE F – Solução da Equação de Black-Scholes modificada para $p = 1$

Aplicando o limite quando $p \rightarrow 1$ na Equação (172), obtém-se:

$$C(t, S) = \lim_{p \rightarrow 1} \left[e^{\frac{p\sigma^2}{2}(T-t)} e^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)} N(d_2) \right]. \quad (256)$$

Como $e^{\frac{p\sigma^2}{2}(T-t)} \rightarrow e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}$ quando $p \rightarrow 1$, segue que

$$C(t, S) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)} N(d_2). \quad (257)$$

$$\begin{aligned} d_1 &= \lim_{p \rightarrow 1} \frac{\ln(S/E) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} + p\sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{p(T-t)}} \\ &= \frac{\ln(S/E) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{(T-t)}}. \end{aligned} \quad (258)$$

De forma análoga, para d_2 tem-se

$$\begin{aligned} d_2 &= \lim_{p \rightarrow 1} \frac{\ln(S/E) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{p(T-t)}} \\ &= \frac{\ln(S/E) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{(T-t)}}. \end{aligned} \quad (259)$$

Portanto, a solução modificada reduz-se exatamente à solução clássica da equação de Black-Scholes (75).

Referências

- ALBANI, V. **Apostila ERMAC 2019**. Disponível em: <http://mtm.ufsc.br/~v.albani/ApostilaERMAC2019.pdf>. Acesso em: 3 jun. 2025.
- BERNOULLI, J. **Ars Conjectandi**: opus posthumum. Basileae: Impensis Thurnisiorum, Fratrum, 1713.
- BLACK, F.; SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. **Journal of Political Economy**, v.81, n.3, p.637–654, 1973.
- BOHNER, M.; ZHENG, Y. On Analytical Solutions of the Black-Scholes Equation. **Applied Mathematics Letters**, v.22, n.2, p.309–313, 2009.
- DEVORE, J. L.; BERK, K. N. **Modern Mathematical Statistics with Applications**. 2.ed. New York: Springer, 2012.
- DREMKOVA, E.; EHRHARDT, M. A High-Order Compact Method for Nonlinear Black-Scholes Option Pricing Equations of American Options. **International Journal of Computer Mathematics**, v.88, n.15, p.2782–2797, 2011.
- EDEKI, S.; UGBEBOR, O.; OWOLOKO, E. Analytical Solutions of the Black-Scholes Pricing Model for European Option Valuation via a Projected Differential Transformation Method. **Entropy**, v.17, n.11, p.7510–7521, 2015.
- FORSYTH, P.; VETZAL, K.; ZVAN, R. A Finite Element Approach to the Pricing of Discrete Lookbacks with Stochastic Volatility. **Applied Mathematical Finance**, v.6, n.2, p.87–106, 1999.
- HIRSA, A.; NEFTCI, S. N. **An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives**. 3.ed. Boston: Academic Press, 2013.
- HONG, X. Evolution of Option Pricing Models: From Black-Scholes to Heston and Beyond. **Theoretical and Natural Science**, v.3, n.2, p.20–28, 2024.
- HULL, J.; TREEPONGKARUNA, S.; COLWELL, D.; HEANEY, R.; PITT, D. **Fundamentals of Futures and Options Markets**. Melbourne: Pearson Higher Education, 2013.
- ITO, K. On stochastic differential equations. **Memoirs of the American Mathematical Society**, v.4, p.1051, 1978.

JÓDAR, L.; SEVILLA, P.; CORTÉS, J.; SALA, R. A New Direct Method for Solving the Black-Scholes Equation. **Applied Mathematics Letters**, v.18, n.1, p.29–32, 2005.

KREYSZIG, E. **Advanced Engineering Mathematics**. 10.ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2011.

MORETTIN, P. A.; BUSSAB, W. d. O. **Estatística Básica**. 9.ed. São Paulo: Saraiva Educação, 2017.

NETO, A. A. **Mercado Financeiro**. 19.ed. São Paulo: Atlas, 2023.

REAMAT, P. **Transformadas Integrais: Uma Introdução às Transformadas de Fourier e de Laplace**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2022. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/reamat/TransformadasIntegrais/livro-af/livro.pdf>. Acesso em: jul. 2025.

RODRIGO, M.; MAMON, R. An Alternative Approach to Solving the Black-Scholes Equation with Time-Varying Parameters. **Applied Mathematics Letters**, v.19, n.4, p.398–402, 2006.

SAEDI, Y. H. A.; TULARAM, G. A. A Review of the Recent Advances Made in the Black-Scholes Models and Respective Solutions Methods. **Journal of Mathematics and Statistics**, v.14, p.29–39, 2018.

SAMUELSON, P. A. Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly. **Industrial Management Review**, v.6, n.2, p.41–49, 1965.

SONG, L.; WANG, W. Solution of the Fractional Black-Scholes Option Pricing Model by Finite Difference Method. **Abstract and Applied Analysis**, v.2013, p.1–11, 2013.

UDDIN, M. K. S.; SIDDIKI, M. N.-A.-A.; HOSSAIN, M. A. Numerical Solution of a Linear Black-Scholes Models: A Comparative Overview. **IOSR Journal of Engineering**, v.5, n.8, p.45–51, 2015.