

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS**  
Instituto de Física e Matemática  
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática



Dissertação

**Transferência de calor em um silo armazenador de arroz: uma abordagem pelo método explícito das diferenças finitas para dois modelos transientes unidimensional e bidimensional**

**Pétra Thalía De Toni**

Pelotas, 2022

**Pétra Thalía De Toni**

**Transferência de calor em um silo armazenador de arroz: uma abordagem pelo método explícito das diferenças finitas para dois modelos transientes unidimensional e bidimensional**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática

Orientador: Prof. Dr. Guilherme Jahnecke Weymar  
Coorientador: Prof. Dr. Igor da Cunha Furtado

Pelotas, 2022

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas  
Catalogação na Publicação

T663t Toni, Pétra Thalía De

Transferência de calor em um silo armazenador de arroz : uma abordagem pelo método explícito das diferenças finitas para dois modelos transientes unidimensional e bidimensional / Pétra Thalía De Toni ; Guilherme Jahnecke Weymar, orientadora ; Igor da Cunha Furtado, coorientador. — Pelotas, 2022.

110 f. : il.

Dissertação (Mestrado) — Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2022.

1. Modelagem matemática. 2. Armazenamento. 3. Grãos. I. Weymar, Guilherme Jahnecke, orient. II. Furtado, Igor da Cunha, coorient. III. Título.

CDD : 631.56

**TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM UM SILO ARMAZENADOR DE ARROZ: UMA  
ABORDAGEM PELO MÉTODO EXPLÍCITO DAS DIFERENÇAS FINITAS PARA  
DOIS MODELOS TRANSIENTES UNIDIMENSIONAL E BIDIMENSIONAL**

por

**Pétra Thalía De Toni**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, PPGMMat, do Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

**Mestre em Modelagem Matemática**

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Guilherme Jahnecke Weymar – Orientador (UFPel)

Prof. Dr. Igor da Cunha Furtado – Co-Orientador (IFSul)

Prof. Dr. Cássio Baissvenger Pazinato (IFSul)

Prof. Dr. Ricardo Scherer Pohndorf (UFPel)

Prof. Dr. Regis Sperotto de Quadros (UFPel)

Pelotas, 13 de dezembro de 2022

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente à Deus, por me dar a dádiva da vida, guiar meus pensamentos e me fortalecer espiritualmente.

Agradeço à minha família, principalmente aos meus pais, Sérgio De Toni e Marilene Tomasin De Toni, por todos esforços, ensinamentos, apoio e incentivo em todos momentos da minha vida.

Ao meu namorado, Ramon Wagner, por todo apoio, carinho, compreensão e companheirismo. Agradeço também a Geisy por toda escuta e palavras que me motivaram a continuar na graduação.

Às amizades construídas no decorrer do mestrado, em especial, à Tatiane, Lisandra e Patrick pelo companheirismo, mesmo que virtual, ao longo destes três anos.

Agradeço principalmente ao André Rickes, pessoa inteligentíssima, iluminada e amiga que sempre me ajudou em todo processo de pesquisa. À você meu muito obrigada!

Agradeço aos professores do Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática, por todo conhecimento transmitido, sobretudo ao meu orientador, Guilherme Jahnecke Weymar, e ao meu coorientador, Igor da Cunha Furtado. À vocês dois meu muito obrigada pelas contribuições, apoio e ensinamentos.

Agradeço à banca que aceitaram o convite que lhes foi feito e, dessa forma, colaboraram para a conclusão deste trabalho.

E, também, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

## RESUMO

DE TONI, Pétra Thalía. **Transferência de calor em um silo armazenador de arroz: uma abordagem pelo método explícito das diferenças finitas para dois modelos transientes unidimensional e bidimensional**. 2022. 109 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2022.

O arroz é um dos cereais mais consumidos no mundo, sendo uma das culturas mais importantes no Sul do Brasil, porém, é um grão suscetível ao dano térmico, mecânico e, principalmente, ao ataque de pragas e fungos quando submetido a condições inadequadas de temperatura e umidade. Devido a isso, necessita de muitos cuidados em seus processos de colheita e pós-colheita, para que chegue em bom estado ao consumidor. Dentre esses cuidados, está a necessidade de um armazenamento cuidadoso em seu silo, pois uma má estocagem pode acarretar em prejuízos irreparáveis aos produtores, como perda total ou parcial dos grãos e, por consequência, prejuízo monetário. Nesse sentido, a modelagem matemática permite avaliar e prever dentro de certos parâmetros, não livre de erros, a temperatura interna de um silo e, assim, analisar a melhor ferramenta preventiva para que o grão mantenha suas propriedades físicas e nutricionais ideais. Nesse sentido, através das relações de modelos matemáticos, visa-se reduzir os danos provenientes das más conduções do processo relacionado a armazenagem do grão. Assim, o principal objetivo do presente trabalho é modelar o processo de transferência de calor pelo método explícito das diferenças finitas, aplicado a um protótipo de silo contendo grãos de arroz em casca, e comparar os dados simulados com os experimentais existentes na literatura. Buscando realizar essa comparação, apresentar-se-á dois modelos matemáticos transientes, sendo eles: unidimensional e bidimensional. Nos dois modelos, serão analisados a difusividade térmica dos grãos com valor médio e variável (com a umidade e a temperatura do grão). As simulações numéricas foram obtidas através da plataforma *Google Colaboratory* e, por meio destas, foram analisados os gráficos entre as aproximações de ordem dois e quatro para o modelo unidimensional com difusividade térmica com valor médio e, para aproximação de ordem dois os modelos unidimensional com difusividade térmica variável e bidimensional com valor médio e variável. Além disso, foram analisados os índices estatísticos, os coeficientes de correlação e determinação entre as temperaturas observadas e a predita. A metodologia escolhida mostrou-se satisfatória, pois os dados obtidos aproximam-se dos dados da literatura, se adequando ao processo físico do sistema. Nesse sentido, a metodologia é de suma importância para problemas mais complexos, como no caso

da difusividade térmica variável, uma vez que para equações diferenciais parciais não lineares não é viável tal resolução de forma analítica, sendo esse o diferencial da pesquisa. Ademais, os índices estatísticos são próximos aos valores ideais, tendo correlação positiva muito forte para ambos os casos dos modelos unidimensional e bidimensional (valor médio e variável).

**Palavras-chave:** Modelagem matemática. Armazenamento. Grãos.

## ABSTRACT

DE TONI, Pétra Thalía. **Heat transfer in a rice storage silo: an explicit finite difference method approach for two-dimensional and two-dimensional transient models**. 2022. 109 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2022.

Rice is one of the most consumed cereals in the world, being one of the most important crops in southern Brazil, however, it is a grain susceptible to thermal and mechanical damage and, mainly, to the attack of pests and fungi when subjected to inadequate temperature conditions and humidity. Because of this, it needs a lot of care in its harvesting and post-harvesting processes, so that it reaches the consumer in good condition. Among these precautions is the need for careful storage in your silo, as poor storage can lead to irreparable damage to producers, such as total or partial loss of grain and, consequently, monetary loss. In this sense, mathematical modeling makes it possible to evaluate and predict within certain parameters, not free of errors, the internal temperature of a silo and, thus, to analyze the best preventive tool for the grain to maintain its ideal physical and nutritional properties. In this sense, through the relations of mathematical models, it is aimed to reduce the damages resulting from the bad conducts of the process related to the storage of the grain. Thus, the main objective of the present work is to model the heat transfer process by the explicit method of finite differences, applied to a prototype of a silo containing grains of paddy rice, and to compare the simulated data with the experimental ones in the literature. Seeking to carry out this comparison, two transient mathematical models will be presented, namely: one-dimensional and two-dimensional. In both models, the thermal diffusivity of the grains will be analyzed with mean and variable value (with grain moisture and temperature). The numerical simulations were obtained through the *Google Collaboratory* platform and, through these, the graphs between the approximations of order two and four were analyzed for the unidimensional model with thermal diffusivity with average value and, for approximation of order two the one-dimensional models with variable thermal diffusivity and two-dimensional models with mean and variable values. In addition, statistical indices, correlation coefficients and determination between observed and predicted temperatures were analyzed. The chosen methodology proved to be satisfactory, as the data obtained are close to literature data, adapting to the physical process of the system. In this sense, the methodology is of paramount importance for more complex problems, as in the case of variable thermal diffusivity, since for non-linear partial differential equations such resolution is not feasible analytically, which is the differential of the research.



Furthermore, the statistical indices are close to the ideal values, with a very strong positive correlation for both cables of the one-dimensional and two-dimensional models (average and variable value).

**Keywords:** Mathematical modeling. Storage. Grains.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Área total de arroz irrigado, por regiões e estado do RS . . . . .	22
Figura 2	Produtividade total de arroz irrigado, por regiões e estado do RS . .	22
Figura 3	Produção total de arroz irrigado, por regiões e estado do RS . . . .	23
Figura 4	Quadro de suprimento nacional (base arroz em casca) entre 2017 e 2023 . . . . .	23
Figura 5	Classificação dos métodos de secagem de arroz . . . . .	28
Figura 6	Transferência de calor no interior do silo . . . . .	32
Figura 7	Correntes de ar de convecção com grãos quentes na caixa com ar mais frio ao redor . . . . .	33
Figura 8	Correntes de ar de convecção com grãos frios no silo com ar circundante mais quente . . . . .	34
Figura 9	Diagrama indicativo de aeração . . . . .	36
Figura 10	Diagrama de conservação de grãos . . . . .	37
Figura 11	Silo experimental . . . . .	45
Figura 12	Disposição dos cabos e sensores ao longo da altura do silo . . . . .	45
Figura 13	Gráficos da função perfil da temperatura inicial dos grãos de arroz em função da altura do silo no a) Cabo 1, b) Cabo 2 e c) Cabo 3 . .	48
Figura 14	Gráfico da difusividade térmica (com valor médio e variável) . . . .	49
Figura 15	Volume de controle diferencial para derivação da equação de calor em coordenadas cartesianas . . . . .	51
Figura 16	Volume de controle diferencial para derivação da equação de calor em coordenadas cilíndricas . . . . .	55
Figura 17	Aproximações para $u'(x_0)$ interpretadas como a inclinação de linhas secantes . . . . .	61
Figura 18	Discretização do domínio do problema unidimensional $T(z,t)$ . . . .	69
Figura 19	Discretização do domínio do problema bidimensional $T(r,z,t)$ . . . .	72
Figura 20	Comparação entre as aproximações de segunda e quarta ordem para o modelo unidimensional com difusividade térmica com valor médio: Cabo 1 . . . . .	78
Figura 21	Comparação entre as aproximações de segunda e quarta ordem para o modelo unidimensional com difusividade térmica com valor médio: Cabo 2 . . . . .	78
Figura 22	Comparação entre as aproximações de segunda e quarta ordem para o modelo unidimensional com difusividade térmica com valor médio: Cabo 3 . . . . .	79
Figura 23	Modelo unidimensional com difusividade térmica variável: Cabo 1 .	80

Figura 24	Modelo unidimensional com difusividade térmica variável: Cabo 2 . . . . .	80
Figura 25	Modelo unidimensional com difusividade térmica variável: Cabo 3 . . . . .	81
Figura 26	Diagrama de dispersão: sensor 1 do cabo 1 . . . . .	83
Figura 27	Modelo bidimensional com difusividade térmica com valor médio: Cabo 1 . . . . .	88
Figura 28	Modelo bidimensional com difusividade térmica com valor médio: Cabo 2 . . . . .	88
Figura 29	Modelo bidimensional com difusividade térmica com valor médio: Cabo 3 . . . . .	89
Figura 30	Modelo bidimensional com difusividade térmica variável: Cabo 1 . . . . .	90
Figura 31	Modelo bidimensional com difusividade térmica variável: Cabo 2 . . . . .	90
Figura 32	Modelo bidimensional com difusividade térmica variável: Cabo 3 . . . . .	91
Figura 33	Comparação dos modelos unidimensional e bidimensional com di- fusividade térmica A) médio e B) variável no sensor 1: Cabo 1 . . . . .	94
Figura 34	Comparação dos modelos unidimensional e bidimensional com di- fusividade térmica A) médio e B) variável no sensor 1: Cabo 2 . . . . .	95
Figura 35	Comparação dos modelos unidimensional e bidimensional com di- fusividade térmica A) médio e B) variável no sensor 1: Cabo 3 . . . . .	95
Figura 36	Comparação dos modelos unidimensional e bidimensional com di- fusividade térmica A) médio e B) variável no sensor 2: Cabo 1 . . . . .	96
Figura 37	Comparação dos modelos unidimensional e bidimensional com di- fusividade térmica A) médio e B) variável no sensor 2: Cabo 2 . . . . .	96
Figura 38	Comparação dos modelos unidimensional e bidimensional com di- fusividade térmica A) médio e B) variável no sensor 2: Cabo 3 . . . . .	96
Figura 39	Comparação dos modelos unidimensional e bidimensional com di- fusividade térmica A) médio e B) variável no sensor 3: Cabo 1 . . . . .	97
Figura 40	Comparação dos modelos unidimensional e bidimensional com di- fusividade térmica A) médio e B) variável no sensor 3: Cabo 2 . . . . .	97
Figura 41	Comparação dos modelos unidimensional e bidimensional com di- fusividade térmica A) médio e B) variável no sensor 3: Cabo 3 . . . . .	98

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Composição nutricional para duas diferentes classificações do mesmo subgrupo de arroz beneficiado (em 100g) . . . . .	21
Tabela 2	Posição dos sensores em cada cabo do silo . . . . .	46
Tabela 3	Temperatura inicial em cada sensor e cabo . . . . .	47
Tabela 4	Constantes da função perfil $F(z)$ em cada cabo . . . . .	48
Tabela 5	Cenários para valores diferentes de $m$ e erro relativo percentual no cabo 1 . . . . .	77
Tabela 6	Parâmetros $\beta_0$ e $\beta_1$ da regressão linear simples, coeficiente de correlação e coeficiente de determinação para o modelo unidimensional . . . . .	83
Tabela 7	Resultados dos índices estatísticos - unidimensional (cabo 1) . . . .	84
Tabela 8	Resultados dos índices estatísticos - unidimensional (cabo 2) . . . .	85
Tabela 9	Resultados dos índices estatísticos - unidimensional (cabo 3) . . . .	86
Tabela 10	Parâmetros $\beta_0$ e $\beta_1$ da regressão linear simples, coeficiente de correlação e coeficiente de determinação para o modelo bidimensional . . . . .	92
Tabela 11	Resultados dos índices estatísticos - bidimensional (cabo 1) . . . .	92
Tabela 12	Resultados dos índices estatísticos - bidimensional (cabo 2) . . . .	93
Tabela 13	Resultados dos índices estatísticos - bidimensional (cabo 3) . . . .	93

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

CONAB Companhia Nacional de Abastecimento

IRGA Instituto Rio Grandense do Arroz

MAPA Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento

MDF Método das Diferenças Finitas

SENAR Serviço Nacional de Aprendizagem Rural

UFPeI Universidade Federal de Pelotas

## LISTA DE SÍMBOLOS

$H_s$	Altura máxima da massa de grãos ( $m$ );
$A_x$	Área total da seção transversal na direção $x$ ( $m^2$ );
$A_y$	Área total da seção transversal na direção $y$ ( $m^2$ );
$A_z$	Área total da seção transversal na direção $z$ ( $m^2$ );
$b.u.$	Base úmida (%);
$b.s.$	Base seca (%);
$c_v$	Calor específico do volume ( $J/(kg.^{\circ}C)$ );
$c_i$	Coefficientes utilizados para a parametrização do perfil de temperatura inicial da massa de grãos ( $i = 0,1,2,3$ );
$k$	Coefficiente de condutividade térmica do material ( $W/(m.^{\circ}C)$ );
$\alpha$	Coefficiente de difusividade térmica do grão ( $m^2s^{-1}$ );
$\beta_0$	Constante de regressão;
$z_i, t_j$	Coordenadas da malha cartesiana ( $m, s$ );
$r_i, z_j, t_k$	Coordenadas da malha cilíndrica ( $m, m, s$ );
$\sigma_o$	Desvio padrão das temperaturas observadas;
$\sigma_p$	Desvio padrão das temperaturas previstas;
$u$	Energia interna ( $J/kg$ );
$q''(\vec{r}, t)$	Fluxo de calor por unidade de tempo e de área ( $W/m^2$ );
$q''_x$	Fluxo térmico na direção $x$ ( $W/m^2$ );
$q''_y$	Fluxo térmico na direção $y$ ( $W/m^2$ );
$q''_z$	Fluxo térmico na direção $z$ ( $W/m^2$ );
$\beta_1$	Inclinação da reta;
$\rho$	Massa específica aparente ( $kg/m^3$ );
$z$	Posição na coluna de grãos ( $m$ );
$r$	Posição do grão ao longo do raio ( $r$ );
$R_s$	Raio do silo ( $m$ );

$m, n$	Subintervalos de mesma medida ( $m$ );
$q$	Taxa de transferência de calor ( $W$ );
$q_x$	Taxa de calor que entra na direção $x$ ( $W$ );
$q_{x+dx}$	Taxa de calor que sai na direção $x$ ( $W$ );
$q_y$	Taxa de calor que entra na direção $y$ ( $W$ );
$q_{y+dy}$	Taxa de calor que sai na direção $y$ ( $W$ );
$q_z$	Taxa de calor que entra na direção $z$ ( $W$ );
$q_{z+dz}$	Taxa de calor que sai na direção $z$ ( $W$ );
$\delta \dot{E}_g$	Taxa de energia ( $W$ );
$\delta \dot{m}_{ent}$	Taxa de fluxo de massa que entra no volume de controle ( $kg/s$ );
$\delta \dot{m}_{sai}$	Taxa de fluxo de massa que sai no volume de controle ( $kg/s$ );
$\dot{g}$	Taxa de geração de energia ( $W$ );
$\delta \dot{Q}$	Taxa líquida de transferência de calor ( $W$ );
$dE_{vc}/dt$	Taxa de variação de energia ( $W$ );
$T_{amb}$	Temperatura ambiente ( $^{\circ}C$ );
$T$	Temperatura interna da massa de grãos ( $^{\circ}C$ );
$T_o$	Temperatura observada ( $^{\circ}C$ );
$T_p$	Temperatura predita ( $^{\circ}C$ );
$t$	Tempo ( $s$ );
$X$	Teor de umidade (%);
$\Delta z$	Varição espacial ( $m$ );
$\Delta t$	Varição temporal ( $s$ );
$y$	Variável dependente;
$x$	Variável independente;
$\nabla T(\vec{r}, t)$	Vetor normal a superfície isotérmica ( $^{\circ}C/m$ );
$v$	Volume total da massa de grãos ( $m^3$ );

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	17
<b>1.1</b>	<b>Objetivos da dissertação</b>	18
1.1.1	Objetivo geral	18
1.1.2	Objetivos específicos	19
<b>1.2</b>	<b>Estrutura da dissertação</b>	19
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	20
<b>2.1</b>	<b>A cultura do arroz</b>	20
2.1.1	Propriedades físicas do arroz	24
<b>2.2</b>	<b>Pré-limpeza e secagem de grãos</b>	25
<b>2.3</b>	<b>Armazenamento</b>	29
2.3.1	Transferência de calor	30
2.3.2	Mudanças de temperatura e umidade durante o armazenamento	32
2.3.3	Aeração	34
<b>2.4</b>	<b>Método numérico aplicado a transferência de calor</b>	37
2.4.1	Método das diferenças finitas	38
<b>3</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	40
<b>4</b>	<b>METODOLOGIA</b>	44
<b>4.1</b>	<b>Problema analisado</b>	44
4.1.1	Condições do problema e do modelo: unidimensional e bidimensional	46
4.1.2	Condições do problema: coeficiente de difusividade térmica	48
<b>4.2</b>	<b>Modelo Matemático</b>	49
4.2.1	Equação diferencial de condução de calor: coordenadas cartesianas	50
4.2.2	Equação diferencial de condução de calor: coordenadas cilíndricas	54
<b>4.3</b>	<b>Método das Diferenças Finitas</b>	59
4.3.1	Derivação das fórmulas	62
4.3.2	Modelo unidimensional com coeficiente de difusividade térmica médio: aproximação de segunda ordem	65
4.3.3	Modelo unidimensional com coeficiente de difusividade térmica médio: aproximação de quarta ordem	67
4.3.4	Modelo unidimensional com coeficiente de difusividade térmica variável: aproximação de segunda ordem	68
4.3.5	Modelo bidimensional com coeficiente de difusividade térmica variável: aproximação de segunda ordem	70
<b>4.4</b>	<b>Complementos matemáticos</b>	74
4.4.1	Consistência, convergência e estabilidade	74



4.4.2	Índices estatísticos . . . . .	74
<b>5</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES . . . . .</b>	<b>76</b>
5.1	Consistência, convergência e estabilidade das soluções numéricas .	76
5.2	Modelo unidimensional com difusividade térmica médio e variável .	77
5.3	Modelo bidimensional com difusividade térmica médio e variável . .	87
5.4	Comparação dos gráficos dos modelos unidimensional e bidimensi- onal com difusividade térmica médio e variável . . . . .	94
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>99</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>101</b>
	<b>ANEXO A TRABALHOS ELABORADOS . . . . .</b>	<b>108</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Ao longo dos anos a agricultura vem se desenvolvendo tanto pela melhoria em maquinários quanto pelos processos de plantio, colheita e/ou pós-colheita (SEIDLER; FILHO, 2016). Esta transformação surge devido as perdas oriundas de grãos armazenados incorretamente, seja por impurezas, teor de umidade não seguro e até mesmo pela secagem do mesmo.

O cultivo de arroz no estado do Rio Grande do Sul (RS) confere a marca de 70% do cultivo nacional (RURAL, 2021), sendo a quarta maior produção das últimas onze safras, conforme Instituto Rio Grandense do Arroz (IRGA, 2021). A produção agrícola de arroz é cultivada de forma sazonal e, na região sul do Brasil, possui o predomínio do sistema irrigado. Devido a elevada produção de arroz, uma forma de armazená-los a granel é utilizar silos, permitindo conservar e redistribuir os grãos nos meses seguintes. Uma das consequências do cultivo sazonal é a precificação do grão (ZILLI; BARCELLOS, 2006), uma vez que, no caso do arroz, geralmente, durante a safra os preços são mais baixos e na entressafra os preços são mais elevados. Nesse sentido, os aspectos sazonais atuam como força motriz para as necessidades de conservação e adequado manejo do grão. Por isso a necessidade de preservar as propriedades físicas e biológicas do alimento.

O armazenamento é um dos fatores primordiais para a preservação da qualidade de grãos, no entanto os grãos não estão imunes as perdas durante a colheita e pós-colheita. Para que a perda durante o armazenamento diminua, busca-se manter a qualidade da massa de grãos para que este não seja um ambiente propício a proliferação de insetos, microrganismos e/ou roedores quando estocado a curto ou longo prazo, em outras palavras, busca-se por meio do armazenamento manter o equilíbrio entre a temperatura e a umidade do grão, sendo esta uma característica do processo de secagem (SENAR, 2018).

Nesse contexto, averiguar e controlar a massa de grãos auxilia a reduzir perdas causadas pela migração de temperatura e umidade. Estas migrações ocorrem devido aos gradientes de temperatura na massa de grãos, acentuadas pela transferência de calor nas paredes dos silos, juntamente com a desuniformidade de umidade da

massa de grãos. Em outras palavras, a consequência da migração de umidade dentro do silo é que torna o teor de umidade, até então seguro, em inseguro e, também, a distribuição não homogênea da temperatura na massa de grãos (oriunda do processo de respiração) desencadeia a redistribuição da umidade, dentro do silo armazenador.

Segundo Özişik (2012) o processo de condução de calor é aquele a qual a partícula mais energizada se choca com a menos energizada, ou seja, a interação entre as moléculas vizinhas ocorre da maior para a menor temperatura. Diante dos fatos citados acima, uma das maneiras de amenizar tanto a temperatura na massa de grãos como a migração de umidade é utilizar a técnica de aeração. A compreensão da transferência de calor interna na massa de grãos armazenada, pode auxiliar na tomada de decisão sobre quando aerar e a previsão do tempo de aeração, uma vez que esta é uma operação com custo energético elevado na indústria. Nesse sentido, o método de aeração consiste em uniformizar a temperatura da massa de grãos, por meio da inserção de um fluxo de ar forçado com temperatura do ar inferior a temperatura dos grãos, reduzindo assim possíveis riscos de perda por deterioração física e biológica e, assim, evitar a migração da umidade.

À vista disso, a modelagem matemática vem a contribuir no processo de armazenamento de grãos, pois permite analisar as condições operacionais do processo, bem como, estimar a temperatura interna no silo em função do tempo e espaço e, a partir disso, traçar escolhas que levem o agricultor a evitar perdas durante a execução.

Nesse sentido, modelos matemáticos vêm sendo estudados e desenvolvidos para esse propósito, como por exemplo, método das diferenças finitas e o método dos elementos finitos. Nessa perspectiva, o presente trabalho abordará em sua metodologia o método das diferenças finitas, pois, para problemas mais complexos que envolvem equações diferenciais parciais não lineares, não é viável a resolução analítica, como é o caso da difusividade térmica variável com a temperatura e umidade. Desse modo, o objetivo do presente trabalho assim como sua estruturação encontram-se nas seções seguintes.

## **1.1 Objetivos da dissertação**

Os objetivos estão divididos em objetivos geral e específicos.

### **1.1.1 Objetivo geral**

O objetivo deste trabalho é modelar o processo de transferência de calor em um protótipo de silo contendo grãos de arroz em casca, ao longo do tempo.

### 1.1.2 Objetivos específicos

- Averiguar a variação de temperatura da massa de grãos de arroz, armazenados em um silo, por uma abordagem pelo método explícito das diferenças finitas para os modelos unidimensional e bidimensional;
- Analisar a influência da difusividade térmica no transporte de transferência de calor, considerando este parâmetro com valor médio e variável;
- Comparar os dados simulados com os experimentais existentes na literatura;
- Fazer uma análise estatística com o objetivo de verificar a concordância e o desempenho entre os dados simulados e os experimentais.

## 1.2 Estrutura da dissertação

Este trabalho está organizado em sete capítulos, sendo este o primeiro capítulo apresentado.

No segundo capítulo será apresentado a fundamentação teórica a respeito da cultura do arroz e sobre os processos matemáticos que serão trabalhados. Sobre a cultura do arroz, serão abordadas as propriedades físicas do grão, os processos de pós colheita, secagem, armazenamento e aeração. Nos processos matemáticos aborda-se a forma pela qual a transferência de calor ocorre em um material, as mudanças de temperatura e umidade durante o processo de armazenamento e a importância de métodos numéricos para a resolução de problemas de equações diferenciais parciais.

No terceiro capítulo encontra-se a revisão bibliográfica a qual é apresentado os trabalhos publicados na área seja sobre fenômeno de fluxo de calor em silos, seja por abordarem o método das diferenças finitas.

No quarto capítulo situa-se a metodologia abordada no problema transiente unidimensional e bidimensional pelo método explícito das diferenças finitas, considerando aqui o coeficiente de difusividade térmica variável.

No penúltimo capítulo é exibido os resultados dos modelos, além de apresentar os dados obtidos para os problemas unidimensional e bidimensional para o coeficiente de difusividade térmica variável, também encontra-se os resultados para o coeficiente de difusividade térmica com valor médio. Nesta seção compara-se as soluções simuladas com os dados experimentais da literatura e, também, apresenta-se os índices estatísticos dos modelos.

Por fim, no último capítulo do trabalho, constam as conclusões.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesse capítulo aborda-se a cultura do arroz e as principais propriedades físicas desse grão. Serão explanados os principais processos de pós colheita de arroz em casca, em especial, a secagem e o armazenamento dos grãos. Além disso, encontram-se nessa seção os três meios de transferência de calor e as possíveis consequências das mudanças de temperatura e umidade no processo de armazenamento. Por fim, destaca-se a importância do método numérico para a modelagem matemática juntamente de uma breve explicação teórica sobre o método das diferenças finitas.

### 2.1 A cultura do arroz

Das diferentes espécies de arroz conhecidas, a que possui maior destaque, devido ao seu cultivo e consumo, é a espécie *Oryza sativa* L., sendo esta, oriunda do sudeste asiático (BASSINELLO; CASTRO, 2004). O solo brasileiro teve seu primeiro contato com o cereal por volta de 1540, sendo transportado de Portugal para a Capitania de São Vicente e, assim, disseminado para as demais regiões do país (Ibid).

A *Oryza sativa* L. possui grande valor nutricional, uma vez que constitui alta fonte energética devido a grande concentração de amido, sendo rico em proteínas, sais minerais, vitaminas e possui baixo teor de lipídios (WALTER; MARCHEZAN; AVILA, 2008). No entanto, os autores afirmam que sua composição nutricional varia à medida que as camadas mais externas do arroz contém maior concentração de proteínas, lipídios, fibras, sais minerais (fosfato, ferro e cálcio) e vitaminas do complexo B, enquanto o endosperma (centro) possui maior concentração de amido. Isso significa que quanto menor for o processo de desgaste ao qual o cereal for submetido, maior será o seu valor nutricional.

De maneira decrescente, o melhor, nutricionalmente falando, é o arroz integral (macrobiótico ou esbramado), parboilizado integral, parboilizado polido e polido (arroz branco). Esses quatro formam o subgrupo do arroz beneficiado segundo o Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento (MAPA, 2009). A Tabela 1 mostra a

composição nutricional do cereal para duas diferentes classificações do mesmo sub-grupo de arroz beneficiado.

<b>Composição</b>	<b>Arroz Branco (cozido)</b>	<b>Arroz Branco (cru)</b>	<b>Arroz integral (cozido)</b>	<b>Arroz integral (cru)</b>
<b>Umidade (%)</b>	70,11	11,6	81,95	10,4
<b>Carboidratos (g)</b>	25,47	80	14,56	77,2
<b>Proteína (g)</b>	2,32	7,14	1,5	7,95
<b>Gordura total (g)</b>	1,18	0,66	1,34	2,93
<b>Fibra total (g)</b>	0,49	1,3	0,66	3,5
<b>Fibra solúvel (g)</b>	0,13	0,32	0,07	0,35
<b>Fibra insolúvel (g)</b>	0,34	0,98	0,59	3,15

Tabela 1: Composição nutricional para duas diferentes classificações do mesmo sub-grupo de arroz beneficiado (em 100g)

Fonte: Adaptado de Philippi (2021, p. 6)

Além disso, a versatilidade alimentícia que o arroz possui expande seu consumo, haja visto que este possui propriedades hipoalergênicas e ausência de glúten. Possui como derivados a farinha, farelo e óleo de arroz. A farinha e o farelo são utilizados na dieta de pessoas celíacas e, também, na alimentação infantil (HOELTZ, 2005).

Por conta dessa variabilidade, o arroz é um dos cereais mais consumidos e cultivados no mundo. Dentre os inúmeros países produtores, o Brasil é considerado o maior produtor não asiático, sendo o décimo produtor e consumidor e o nono exportador mundial de arroz (COÊLHO, 2021) e o estado do Rio Grande do Sul é o maior produtor nacional, tendo maior destaque no cultivo irrigado por inundação. O autor supracitado menciona relata que a média de produção de arroz irrigado no Brasil é de 90%. No Brasil, a comercialização de arroz irrigado por inundação data de 1904, sendo implantada no Município de Pelotas – RS (CONAB, 2015). O método de irrigação por inundação consiste em distribuir a água por toda superfície do solo, ou seja, cobre-se totalmente a área plantada com água (TESTEZLAF, 2017).

A colheita do cereal acontece de forma sazonal, uma vez que o plantio deste grão ocorre em épocas específicas do ano (BENTO; TELES, 2013). Este fator deve ser considerado haja visto que para o cereal manter suas propriedades biológicas e físicas faz-se necessário bom manejo, secagem e estocagem do mesmo.

De acordo com a Companhia Nacional de Abastecimento - CONAB, o Sul do país concentra 86% da área total de arroz irrigado e o estado do Rio Grande do Sul, 73% (Figura 1), tendo um deficit nacional de 4,4% em relação a safra de 2021/22 e 2022/23. Quanto a produtividade agrícola de arroz em cultivo irrigado (Figura 2), houve aumentos nas regiões centro-oeste, sudeste e sul, apesar disso, o Brasil aumentou sua capacidade de produtividade. A produtividade total dos fatores (PTF) é considerada um bom indicador quanto a mudanças tecnológicas, pois “mede a eficiência com que

todos os insumos (terra, trabalho, capital, materiais) são combinados para gerar o produto total das lavouras e da pecuária” (GASQUES et al., 2014, p. 89).

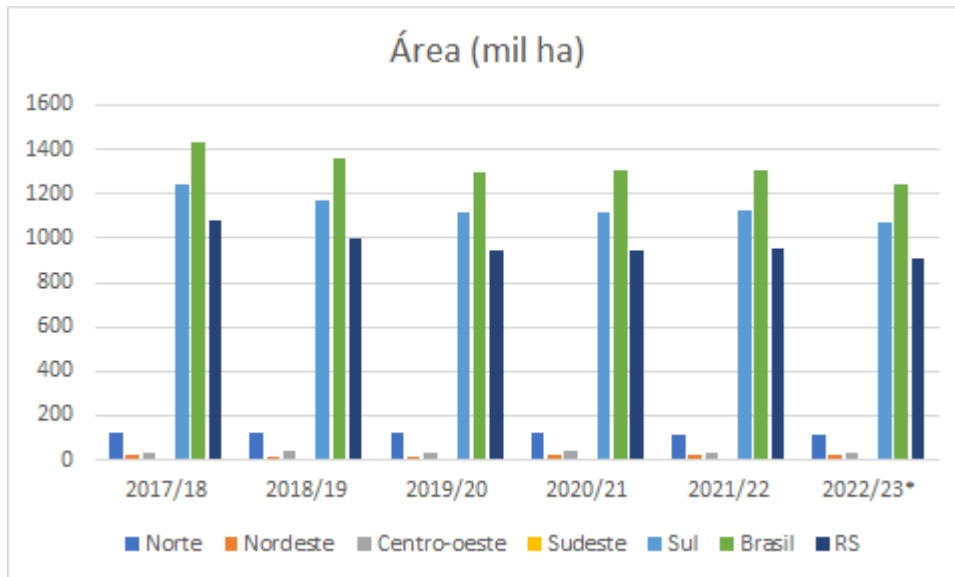


Figura 1: Área total de arroz irrigado, por regiões e estado do RS  
Fonte: CONAB (2021a)

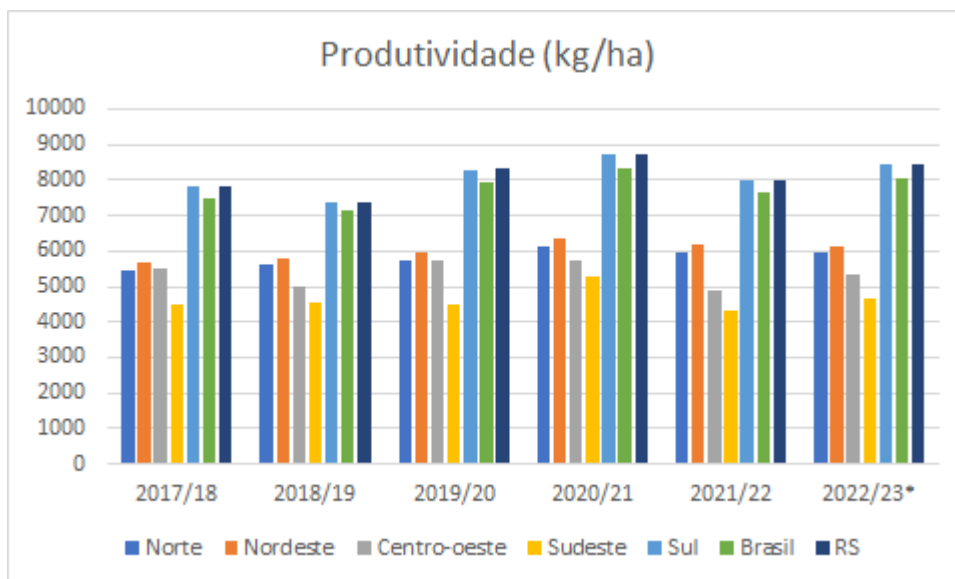


Figura 2: Produtividade total de arroz irrigado, por regiões e estado do RS  
Fonte: CONAB (2021a)

Na Figura 3 podemos analisar a produção total de grãos de arroz irrigado nas cinco regiões do país, no Brasil como um todo e especificamente no estado do Rio Grande do Sul (RS). A partir disso é possível averiguar que houve uma queda de 8,4% no estado do RS, entre as safras de 2020/21 e 2021/22, havendo significativa queda na produção nacional. No entanto a estimativa para o próximo ano, segundo a CONAB

(2021a), é de um saldo de 0,5% no âmbito nacional. Além disso, a região sul do país produz 90% e, o estado do Rio Grande do Sul (RS) 76% do cultivo nacional.

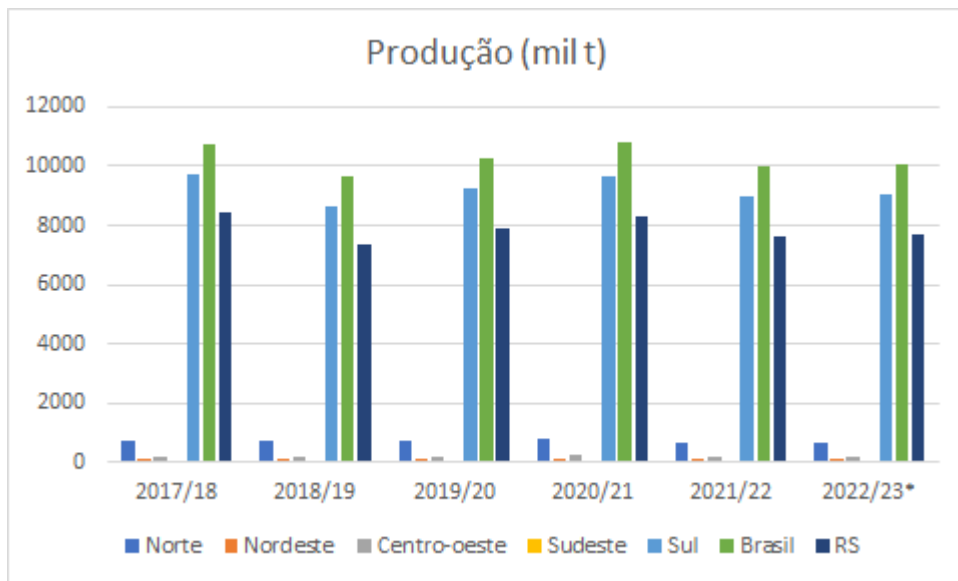


Figura 3: Produção total de arroz irrigado, por regiões e estado do RS  
 Fonte: CONAB (2021a)

Ademais, a CONAB disponibiliza um quadro de oferta e demanda nacional referente a grãos de arroz em casca, como pode ser observado na Figura 4.

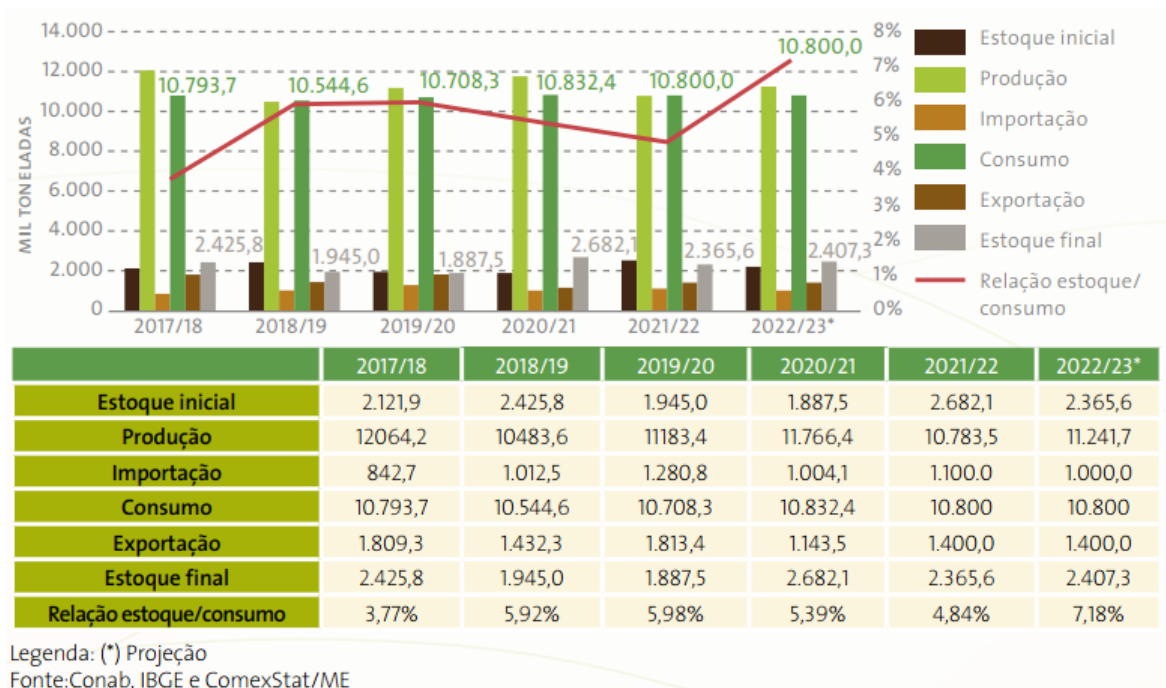


Figura 4: Quadro de suprimento nacional (base arroz em casca) entre 2017 e 2023  
 Fonte: CONAB (2021b, p. 44)

Apesar de existir um aumento na produção, deve-se analisar a capacidade de ar-



mazenamento, sendo que uma maneira de amenizar esta diferença é aumentando a capacidade estática. A capacidade estática refere-se a capacidade de armazenamento de um armazém de uma única vez (AZEVEDO et al., 2008). Para expandi-la é necessário investimento em estruturas armazenadoras para que suas propriedades naturais como, o tamanho e componentes nutricionais se mantenham e, como consequência, estes grãos não sejam desperdiçados. Segundo pesquisas da CONAB (2021a), a gestão do Cadastro Nacional de Unidades Armazenadoras auxilia-os no planejamento e administração de produtos agrícolas armazenados e, segundo suas pesquisas, o estado do Rio Grande do Sul vem apresentando uma pequena evolução quanto a capacidade.

No entanto, para que essas propriedades dos grãos sejam asseguradas é preciso conhecer as características do grão a ser manuseado e quais são suas condições ideais (ELIAS; OLIVEIRA; VANIER, 2018).

### **2.1.1 Propriedades físicas do arroz**

Os grãos possuem não somente valores nutricionais diferenciados entre si, mas também propriedades físicas que estão diretamente interligadas com a qualidade dos mesmos. Conhecer as propriedades físicas e mecânicas do produto agrícola faz-se necessário para otimização dos processos de armazenamento e pós-colheita desse produto como secagem, aeração e resfriamento (CORRÊA et al., 2007). Conhecer e aprimorar suas propriedades, contribui para o desenvolvimento de equipamentos que são utilizados na pós-colheita e, também, tais propriedades interferem na acomodação dos grãos no silo, bem como no processo de transferência de calor que ocorre entre eles. Algumas das propriedades físicas importantes do grão durante o armazenamento são: capacidade de absorção de umidade, respiração, massa específica aparente, porosidade, difusividade térmica e condutividade térmica.

No caso do arroz, sua capacidade de respiração acelera proporcionalmente ao aumento da umidade e temperatura, isso significa que o ato de respirar gera calor e por consequentemente aumenta a temperatura interna da massa de grãos. No entanto, quanto maior for a temperatura gerada, mais frequente será a respiração e, com isso, gera-se o risco de deterioração dos grãos (MADRUGA, 2010). Vale ressaltar que essa característica não é apenas observada em grãos armazenados, mas também em organismos vivos.

Além desse, a porosidade é a relação entre o volume de ar existente na massa de grãos e o volume total que esta massa ocupa. Essa propriedade delimita a resistência que o grão ou semente terá na passagem do ar no processo de secagem e aeração (MATA; DUARTE, 2002). Em contra ponto, a massa específica aparente é a razão entre a massa e o volume do grão e seu crescimento está interligado com a porcentagem de grãos danificados, teor de umidade inicial e final e temperatura alcançada durante

o processo de secagem (SOBREIRA, 2017).

A difusividade térmica de um material refere-se à capacidade do material em conduzir energia térmica (calor) em relação à sua capacidade de armazenar (SILVA, 2021), onde a transferência de calor ocorre em regime transiente (DOTTO; PINTO; MOREIRA, 2016). Além disso, essa propriedade indica a velocidade de penetração de calor no interior do alimento (MOURA et al., 2010). Fisicamente falando, esse coeficiente indica como a temperatura desse material varia quando é aquecido ou resfriado. Quanto ao arroz, os estudos de Dotto (Ibid, p. 892) mostram que o coeficiente de difusividade térmica varia de  $0,91 \times 10^{-7}$  a  $3,23 \times 10^{-7} m^2 s^{-1}$ .

Já a condutividade térmica refere-se à capacidade que o material tem em conduzir calor, ou seja, resistência do material durante a troca de calor de uma extremidade mais quente a mais fria (BORDIGNON, 2009). Esse parâmetro está associado ao quão bom condutor é o material e por ser uma característica específica de cada material, depende tanto de sua pureza como da temperatura a qual o material se encontra (STARK, 2018). No caso do arroz em casca, uma estimativa para a condutividade é  $0,122 W/m^{\circ}C$  (PARK; ALONSO; NUNES, 1999).

Ainda nesse quesito, segundo Bala (2017), quanto maior for o coeficiente de condutividade, maior e mais rápida será a condução de calor. O conhecimento acerca dessa propriedade torna-se importante para prever a temperatura do grão durante o armazenamento, uma vez que a temperatura do cereal varia quando estocado devido as variações climáticas, e com isso, pode ser controlado a taxa de deterioração. Além disso, a condução de energia térmica auxilia no processo de secagem, resfriamento e aeração como a difusividade térmica.

Em síntese, a difusividade térmica é a taxa de propagação da temperatura através do material (alta difusividade significa rápida transferência de calor, relaciona-se com a velocidade em que se atinge o equilíbrio térmico). Já a condutividade térmica é a capacidade que o material tem de transferir ou conduzir calor (quanto maior a temperatura do material, mais rapidamente as moléculas se moverão, de forma que o calor seja transferido mais rapidamente).

## 2.2 Pré-limpeza e secagem de grãos

Após a colheita, antes mesmo da safra ser destinada aos seus armazéns e ao equipamento de secagem, deve-se passar pelo processo de pré-limpeza pois, normalmente, os grãos apresentam grande presença de materiais estranhos e impurezas. São considerados impurezas materiais oriundos da própria planta, por exemplo, casca, palha, folhas e pedaços de caules. Já os materiais estranhos são os grãos ou sementes oriundas de outras espécies, detritos vegetais e corpos estranhos não presente na massa de grãos, que são pedras, areia e estilhaços (SILVA, 2008).

Esses materiais estranhos e impurezas encontradas durante a etapa de limpeza são dependentes da espécie, do tipo de tecnologia escolhida durante a colheita e de maturidade do grão quando retirado. Ademais, a realização de pré-limpeza reduz possíveis riscos de incêndios e facilita a uniformização da passagem de ar e dos grãos (BOTELHO; BOTELHO; SOBREIRA, 2019). E, deve-se levar em conta que após a limpeza e a secagem, o lote deve apresentar no máximo 2% de matérias estanhas e impurezas para o arroz em casca (MAPA, 2009).

A secagem é considerada uma das etapas do pré-processamento e é um dos processos que auxiliam na conservação do produto agrícola, uma vez que o teor de umidade mantido a baixo nível ameniza o desenvolvimento de microrganismos e insetos durante o armazenamento. Além da vantagem citada acima, outras vantagens acerca da secagem é a possibilidade a colheita antecipada (minimiza danos devido as condições climáticas e ataques de fungos e/ou insetos), manter o poder germinativo das sementes e o armazenamento a longo prazo, sem o risco de deterioração e redução da qualidade dos grãos (AQUERRETA et al., 2007).

Esta etapa é caracterizada pelo processo de transferência de calor e massa simultânea entre o grão e o ar de secagem até que se chegue a um teor de umidade considerado seguro ou necessário (equilíbrio higroscópico), a qual varia de acordo com o produto agrícola escolhido (REGINATO et al., 2014). E, segundo Simioni et al. (2008), o excesso de umidade nos grãos além de aumentar o gasto de energia na secagem, também, causa a perda da qualidade dos grãos. No entanto, colhe-los com nível baixo de umidade resulta em grãos com maior vulnerabilidade à quebras e defeitos metabólicos.

Os grãos de arroz além de serem suscetíveis ao dano mecânico e a ataque de pragas e fungos, também, é vulnerável a danos térmicos quando submetidos a condições inadequadas de temperatura e umidade. E, segundo Schiavon (2010, p. 26):

Quando o aquecimento acontece no grão, também aumentam a evaporação e as pressões internas. Enquanto o grão perde água, ele tem seu tamanho reduzido, graças à compressão externa, proveniente da pressão atmosférica e que aumenta à medida que vai secando. Se aquecido, enquanto seca, contrariamente, sua pressão interna aumenta e as camadas mais centrais do grão tendem à expansão. A superfície do arroz não tem plasticidade ou capacidade elástica para suportar tensões mecânicas muito elevadas, podendo nesses casos sofrer fissuras na superfície, trincamento ou até mesmo quebra (ruptura do grão). Quanto mais desequilibrados forem os fenômenos de evaporação e de difusão, maiores serão os danos.

Ademais, a capacidade de secagem depende de inúmeros fatores, como a configuração do equipamento de secagem (temperatura do ar, velocidade e umidade relativa do ar de secagem) e propriedades do produto (teor de umidade, tipo e ma-

turidade do grão, temperatura, massa específica e porosidade intergranular) (SMANLOTTO, 2016). Nesse sentido, o método de secagem pode ocorrer de duas formas: natural ou artificial. A secagem natural ocorre no campo, na própria planta. Esse método de secagem possui dependência das condições climáticas, sendo usado em regiões tropicais, e, por ser um processo mais lento, fica sujeito ao ataque de pragas. Mesmo com a vantagem de gerar menores gastos e possuir menores chances de trincamento e/ou grãos quebrados, esse método é pouco utilizado.

Já o método por secagem artificial é caracterizado pela utilização de estruturas específicas tanto para manejo quanto para a passagem de ar entre a massa de grãos. Esse método possibilita que grandes quantidades de grãos sejam secas em curto espaço de tempo, não sendo dependente das condições climáticas e geralmente, quando o ar de secagem é forçado o movimento ocorre com o auxílio de ventiladores. A grande vantagem dessa modalidade é o controle da temperatura, do fluxo de ar de secagem e o tempo, porém é necessário conhecimentos técnicos sobre as condições operacionais para que não ocorra supersecagem e conseqüentemente perda por deterioração do grão (AOSANI, 2007; SILVA, 2008). Logo, quando a secagem via ar aquecido não é controlada, ou seja, se houver secagem excessiva do sólido, no caso do arroz, acarretará em danos físicos e químicos ao grão. Ao passo que aumenta a vida útil durante o armazenamento, aumenta-se também as chances de quebra durante a moagem, conseqüentemente, diminui a qualidade e quantidade de arroz inteiro (BALA, 2017).

Apesar do processo de moagem consistir em moer os grãos até que se torne farinha ou farelo, sendo esse um processo físico que preserva as características nutricionais do arroz, é necessário “uma elevada integridade física dos grãos para não comprometer sua conservabilidade e sua utilização no consumo animal e humano” (ELIAS; OLIVEIRA; VANIER, 2018, p. 57).

Em síntese, Silva (2008) dispõe em sua obra, capítulo 5, um quadro com as classificações dos métodos de secagem, como consta na Figura 5 a seguir:

Sistemas de secagem	Natural – no campo, na própria planta				
	Artificial	Ventilação Natural	Terreiros e paióis		
			Secagem Solar		
			Outros		
		Ventilação Forçada	Ar Natural		
			Altas Temperaturas	Quanto aos fluxos	Camada fixa
					Cruzados
					Concorrentes
					Contracorrentes
					Cascata
					Rotativo
					Fluidizado
			Baixas Temperaturas	Quanto à operações	Solar híbrido
Intermitentes					
Contínuos					
Sistemas Combinados					
Seca-aeração					
Convecção					

Figura 5: Classificação dos métodos de secagem de arroz  
 Fonte: Quadro retirado de Silva (2008, p. 113)

Segundo Silva (2008), não é recomendado para o grão de arroz que ele seja seco naturalmente em sua própria planta, pois quanto maior for a sua exposição a ações climáticas e ao ataque de quaisquer animais (roedores, insetos e pássaros), maior será a chance de degradação e perdas qualitativas e quantitativas. Isso se deve ao fato de que o arroz demora dias até que se atinja o teor de umidade para sua conservação, 13% b.u. (base úmida) ou então, 15% b.s. (base seca) <sup>1</sup>. Sendo assim, o método com maior eficiência é a secagem artificial.

Apesar de sua relevância, a secagem artificial apresenta riscos que, como mensurado acima, podem acarretar significativos danos se realizada sem conhecimento e cuidados necessários (GARCIA et al., 2004). Diante desse fato, deve-se respeitar a temperatura máxima de secagem que varia de acordo com o método de secagem, pois altas temperaturas ocasionam danos do tipo trincas, alterações na cor, morte do grão entre outros que desvalorizam sua comercialização. Uma maneira de solucionar tais adversidades é passar várias vezes o lote na câmara de secagem (secagem em lotes ou intermitente), respeitando o índice de remoção de umidade e que este lote tenha períodos de repouso para só assim repetir o processo (SILVA, 2008).

Segundo Garcia et al. (2004) na secagem intermitente, as sementes tem menor

<sup>1</sup>O teor de umidade em base úmida é mensurado pela relação entre o peso da água presente e o peso total do grão, em contrapartida, no teor em base seca é comparado o peso da umidade presente com o peso da matéria seca no grão.

contato com o ar aquecido, sendo intercalado com períodos sem exposição ao ar aquecido, possibilitando a redistribuição da umidade no interior da semente. Aquerreta et al. (2007) discorre que a secagem intermitente reduz o número de grãos fissurados, pois os gradientes de umidade que os grãos de arroz desenvolvem durante o processo de secagem, causam menos estresse no interior do grão.

## 2.3 Armazenamento

Desde o início da civilização humana, o armazenamento de grãos, gradativamente, vem se aperfeiçoando na forma de cultivar e de armazená-los, seja ela armazenada em partes ou em sua totalidade desde grandes plantações a cultivo local. Nossos ancestrais aprenderam a conservar seus alimentos como forma de sobrevivência, para que em tempos de escassez não ficassem à mercê da sorte, com isso desenvolveram técnicas para aumentar a vida útil dos alimentos (SILVA, 2018).

Atualmente, a preocupação gira em torno de melhorias e soluções pós-colheita uma vez que os produtos agrícolas são produzidos em larga escala devido a sazonalidade dos cultivos. A crescente produção traz preocupações quanto ao armazenamento e a conservação do produto. Nesse sentido, o objetivo do armazenamento é manter as qualidades físicas e nutricionais do grão, preservando suas características após sua colheita uma vez que não é possível melhorá-las durante o processo de armazenamento. Todavia, a deterioração dos grãos é o resultado de inter-relações físicas, químicas e biológicas, uma vez que os grãos armazenados a granel são considerados um ecossistema criado pelo homem onde os organismos vivos interagem com o meio ambiente (BALA, 2017). Nessa perspectiva, o autor destaca que:

O ambiente abiótico do grão inclui variáveis físicas como temperatura, variáveis químicas inorgânicas como dióxido de carbono e oxigênio e variáveis físico-químicas como umidade e matriz de compostos orgânicos que são subprodutos da atividade biológica. As principais variáveis bióticas além do grão em um volume de grão incluem microorganismos como fungos, actinomicetos e bactérias; artrópodes, como insetos e ácaros; e vertebrados, como roedores e pássaros (Ibid. p. 218).

As variáveis citadas por Bala (2017) possuem intensidades e velocidades dependentes da qualidade do grão quando armazenado, bem como, do sistema de armazenamento. A degeneração do grão pode, inicialmente, ser lenta e não visível, no entanto, a junção de mais de uma variável pode causar a perda total do grão, acarretando prejuízo ao agricultor. As perdas podem ser de natureza qualitativa e/ou quantitativa. A quantitativa é aquela na qual ocorre dependência do metabolismo dos grãos e de microorganismos como pragas e vertebrados. Neste caso, a perda é de fácil observação pois há uma redução da matéria seca. Em contraponto, as perdas quali-

tativas referem-se as reações químicas dos grãos, presença de materiais estranhos e impurezas e, também, ao ataque microbiano e de artrópodes. Neste caso, as perdas não são visíveis, implicam tanto nas mudanças físicas (coloração), como nutricional do grão e, no pior dos casos, esses fungos podem além de produzir substâncias tóxicas que, se consumidas, são prejudiciais ao ser humano, como também exalar odores desagradáveis (FONSECA, 2009; MORÁS, 2012).

Após destacar o objetivo do armazenamento e as perdas que ocorrem durante esse processo, é necessário compreender as formas de armazenagem. O sistema de armazenagem para grandes quantidades de grãos é feito, geralmente, a granel no qual utiliza-se de silos. Já, em pequena quantidade, utiliza-se, normalmente o sistema de tonéis, bombonas plásticas, caixas e sacarias (HOELTZ, 2005). No Brasil predomina-se os silos, seguidos dos armazéns graneleiros e granelizados a qual armazenam grãos a granel (AGRÍCOLAS, 2022).

Um fator importante no armazenamento, em silos, é a forma como a temperatura e umidade relativa distribuem-se em seu interior e como a combinação desta determina a atividade de todos os componentes bióticos do sistema, podendo torná-lo seguro ou não e, conseqüentemente, determinando as perdas que, por ventura, podem ocorrer. Ressaltasse que cada cultura possui valores específicos para que esta combinação de fatores não acarrete em perdas. Portanto, para que os grãos não percam suas características durante o armazenamento é de suma importância que a respiração seja mantida a níveis baixos e para isso ser possível é necessário o controle da umidade e temperatura.

Os grãos são considerados maus condutores de calor e o efeito que a temperatura tem em diferentes volumes de grãos armazenados varia (ANDRADE, 2001; ELIAS; OLIVEIRA; VANIER, 2018). Se o teor de umidade do grão for baixo, em volumes elevados de grãos armazenados, a condução de calor será menor. Em contrapartida, em baixos volumes de grãos armazenados, a umidade terá maior influência na condução de calor e ocorrerá com maior rapidez (ATHIÉ et al., 1998 apud HOELTZ, p. 22, 2005). Sendo assim, é importante compreender como se dá a transferência de calor dentro e fora do silo para que seja possível estipular e controlar a temperatura interna durante o período de estocagem.

Nesse sentido, as seções subsequentes abordarão tópicos sobre transferência de calor, mudanças de temperatura e umidade durante o armazenamento e aeração.

### **2.3.1 Transferência de calor**

A transferência de calor, ou fluxo de calor, é o fenômeno pelo qual a energia é transportada de um corpo para outro devido a diferença de temperatura entre esses dois corpos. Assim, o calor flui do meio de maior temperatura para o meio com menor temperatura até que entre em equilíbrio térmico (ÇENGEL; GHAJAR, 2012). Ademais,

o fluxo de calor pode ser constante ou variar no tempo. Quando o fluxo é constante chamamos de regime permanente ou estacionário já quando o fluxo varia, nos referimos a regime transiente ou transitório. Essa transferência de calor pode ocorrer de três formas, sendo elas: condução, convecção e radiação (ou irradiação).

Para Özişik (2012) a transferência de calor é uma junção das três formas citadas e que na vida real não é possível isolar somente uma. No entanto, o autor destaca que para simplificar a análise podemos isolar uma delas caso as outras duas forem desprezíveis para o problema. Os autores Elias, Oliveira e Vanier (2018) descrevem-nas como:

**Condução:** o calor se propaga de corpo a corpo ou molécula a molécula. O contato entre moléculas vizinhas é transmitido pelo movimento vibratório, sendo uma característica de sólidos ou fluidos quiescentes (ou seja, nenhum movimento convectivo resultante de deslocamento macroscópico do meio) e propagar-se lentamente.

**Convecção:** o calor é propagado pela movimentação molecular. Ocorre por correntes convectivas ou ondas devido a diferença de densidades entre líquidos ou gases (quente e frio). É uma característica dos fluidos e possui rápida propagação.

**Irradiação:** diferentemente das duas formas acima descritas, essa não necessita de um meio físico tão pouco de diferença de temperatura para se locomover, como por exemplo, o sol, micro-ondas ou outros materiais que emitam ondas eletromagnéticas.

No armazenamento de grãos, no interior do silo, a transferência de calor ocorre da seguinte maneira: as ondas eletromagnéticas que o sol emite aquece a parede do silo. Com a parede do silo aquecida, as moléculas dos grãos mais próximos a parede passam a vibrar mais e, assim, o calor se propaga de uma molécula para a outra e como consequência, de um grão para o outro. Porém, o silo não contém somente os grãos que o preenchem, existem outras variáveis, como as bióticas. Dentre as bióticas, encontram-se por exemplo os fungos, bactérias e microorganismos que necessitam de reações que envolvem oxigênio, dessa forma, eles emitem gases no interior do silo, além de uma pequena quantidade de ar que já existente no silo. Esses gases afetam a relação de temperatura interna, funcionando como meio para que ocorram alterações de correntes convectivas, como consta na Figura 6 a seguir:



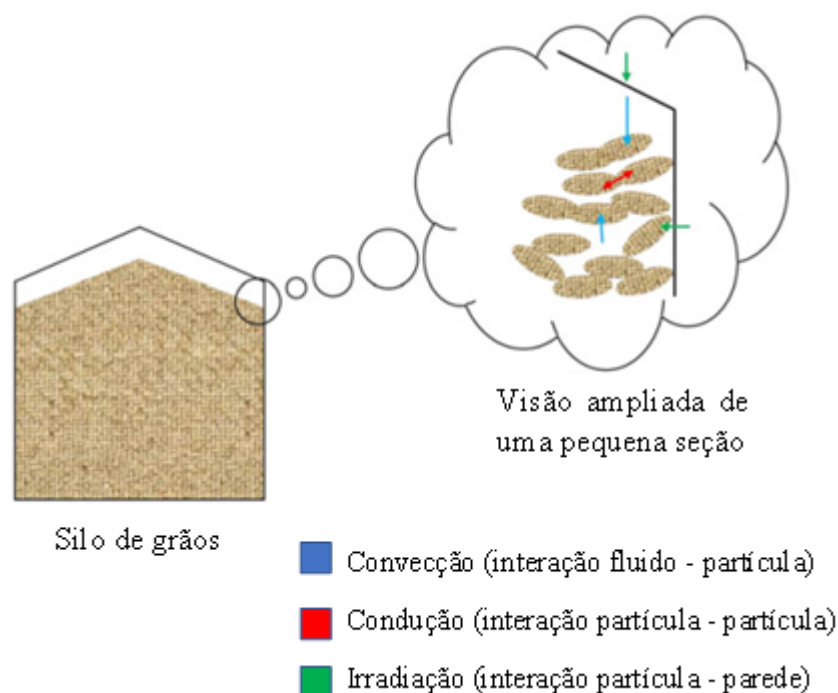


Figura 6: Transferência de calor no interior do silo  
 Fonte: Traduzido de Panigrahi et. al (2019, p. 12)

A fim de evitar a migração da umidade por correntes convectivas e, também, fluxo de ar intergranular (quando a temperatura externa ao silo é maior ou menor que a interna) faz-se necessário o uso de aeração.

Os fenômenos de convecção e aeração, no silo, serão detalhados nas subseções seguintes.

### 2.3.2 Mudanças de temperatura e umidade durante o armazenamento

Quando nos referimos a deterioração do grão, durante o processo de armazenamento, tem-se duas variáveis físicas importantes: temperatura e teor de umidade. Por mais que os grãos de cereais sejam secos e posteriormente armazenados com o teor de umidade considerado seguro, normalmente entre 12 – 14%, as condições climáticas estão diretamente interligadas com a mudança do padrão da temperatura e do teor de umidade, pois nesse sistema, esses fatores dependem do tempo transcorrido e da região analisada dentro do silo (BALA, 2017).

As duas variáveis possuem relação entre si, uma vez que haja um gradiente de temperatura ao longo do depósito, o que permitirá que a umidade se mova uniformemente. Na medida que a temperatura aumenta, cria-se uma maior concentração de umidade entorno dos grãos, estando diretamente relacionado com o aumento da pressão e concentração do vapor de água no ar e, por conta disso, faz com que a umidade vá se difundindo de altas para baixas temperaturas. Essas diferenças de pressão criam correntes de convecção, que tendem a acumular a umidade na extremidade su-

perior ou inferior do silo que, ao condensar, eleva a umidade no ponto em questão. Isso permite compreender como as variáveis de temperatura e umidade estão ligadas nesse processo.

À medida que a temperatura cria vapor de água no interior do silo, o gradiente de temperatura faz com que existam pontos de maior e menor temperatura, que devido a uma diferença na densidade do ar no interior do silo, fazem com que haja uma corrente de convecção, que faz com que a umidade se concentre em algum ponto do silo. Em síntese, a migração de umidade dentro do silo pode tornar o teor de umidade, até então seguro, em inseguro e, também, a distribuição não homogênea da temperatura na massa de grãos desencadeia a redistribuição da umidade, dentro do armazenador (BALA, 2017).

Outro fator a se considerar são as estações do ano a qual relaciona o fator acima de forma que, por exemplo, no inverno (Figura 7) a parede fria do silo faz com que os grãos da superfície em contato diminuam sua temperatura, o ar frio fica levemente mais denso e tende a ir para a parte inferior do silo, usando como trajetória as laterais do silo. Como as extremidades em contato com a parede diminuem de temperatura, o centro acaba ficando com uma temperatura um pouco mais elevada, acumulando umidade na parte superior do silo. No caso do verão (Figura 8), a temperatura do ar externo se eleva, fazendo com que o ar se mova do centro para baixo, e o ar frio condensa, mas dessa vez na parte inferior do silo. Essa migração da umidade pode ser resolvida ao controlarmos a diferença de temperatura da superfície e interior dos grãos no silo.



Figura 7: Correntes de ar de convecção com grãos quentes na caixa com ar mais frio ao redor

Fonte: Traduzido de Bala (2017, p. 224)

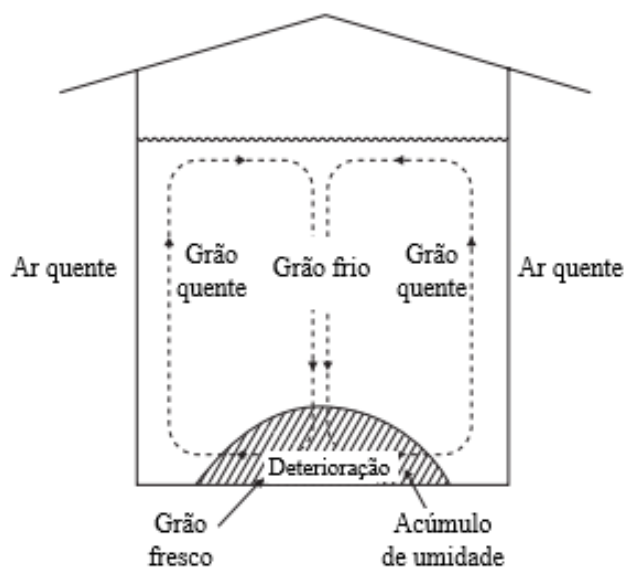


Figura 8: Correntes de ar de convecção com grãos frios no silo com ar circundante mais quente

Fonte: Traduzido de Bala (2017, p. 224)

As mudanças de temperatura são consideradas importantes para a delimitação de insetos, ácaros e fungos que causam contaminação do cereal e os deterioram. Estimar a temperatura local auxilia a identificar qual a área com maior vulnerabilidade a infestações de pragas e, assim, buscar ferramentas para amenizar possíveis traumas aos grãos.

Além desses citados acima, outro aspecto a considerar-se é o tamanho do silo. Quando temos um depósito grande, os grãos armazenados, durante o inverno, permanecem com temperaturas elevadas e, devido à alta temperatura, insetos podem vir a se acumular e sobreviver e nos meses de verão os grandes silos mantêm temperatura média (BALA, 2017).

Em armazéns pequenos, as temperaturas externas tem maior influência nos grãos armazenados. Da mesma forma que no verão a temperatura interna aumenta com maior rapidez, no inverno esta decai. Em contraponto ao verão, onde há um maior acúmulo (ciclos reprodutivos) de pragas, no inverno, as baixas temperaturas podem eliminar estes invasores. Uma forma de retardar a transferência ou troca de calor, tanto para silos de grande e pequeno porte, é a utilização de um isolante térmico. Para que esta alternativa seja validada, é necessário que o material seja resistente a troca de calor tanto para temperaturas externas altas como para a radiação solar e, também, deve permitir que os grãos possam resfriar no período da noite e inverno.

### 2.3.3 Aeração

A aeração consiste no resfriamento dos grãos através da circulação forçada do ar ambiente ou condicionado pela sua própria massa, com o intuito de uniformizar a

temperatura da massa dos grãos armazenados. Isso tem por finalidade reduzir atividades metabólicas, tanto dos grãos como de organismos associados, para que os grãos possam ser armazenados por longos períodos sem que a sua qualidade e quantidade venha ser prejudicada. Apesar de ser um processo que visa boa conservação, caso ocorra de maneira errônea pode afetar a qualidade do grão (RECH, 2018). Ainda a respeito disso, Silva (2008, p. 270) diz:

Sabe-se que grãos armazenados em temperaturas elevadas, 25 a 40°C, como ocorre em muitas regiões brasileiras, têm a atividade respiratória intensificada, o que propicia incremento na perda de matéria seca, aumenta a umidade relativa do ar intergranular e produz calor.

Propriedades térmicas como porosidade, higroscopicidade e condutibilidade térmica são características importantes na aeração, sendo que a porosidade apresentada nos grãos possibilita a passagem de ar entre eles (ELIAS; OLIVEIRA; VANIER, 2018). Higroscopicidade é a capacidade do grão em ceder (dessorção - ocorre durante a secagem) ou absorver (sorção - ocorre durante o reumedecimento do grão) umidade do ar, buscando atingir equilíbrio higroscópico, onde a pressão parcial de vapor de água no grão se iguala as condições do ar ambiente que o envolve (Ibid, 2018; CORRÊA et al., 2014).

Sendo assim, os grãos armazenados devem ter teor de umidade adequado a sua espécie e ter o mínimo de impurezas para que não tenha um microclima desfavorável e como resultado, o desenvolvimento de fungos e insetos. Segundo Elias, Oliveira e Vanier (Ibid. 2018) existe cinco tipos mais comuns de aeração, com objetivos diferentes que são: de resfriamento ou manutenção, provisória, corretiva, secante e transilagem.

**Aeração de resfriamento:** é utilizado mesmo que os grãos armazenados apresentem condições ideais. A ventilação é aplicada para corrigir início de aquecimento dos grãos ou resfriá-los e tem por finalidade uniformizar a temperatura para evitar a formação de correntes convectivas visto que pode haver diferenciação entre as camadas.

**Aeração provisória:** utilizada para grãos recém-colhidos e que chegam com teor de umidade superior à recomendada pela espécie. Além disso, é utilizado como meio de conservação temporário enquanto os grãos aguardam a secagem e assim, minimizam danos por fungos e outros tipos de contaminação que ocorrem durante o armazenamento.

**Aeração corretiva:** pode ser utilizado quando os grãos apresentam odores ou quando os grãos são estocados com umidade menor que o valor comercializado. Neste caso, a aeração ocorre antes da expedição, com ar úmido, sem que se afete a qualidade do produto.

**Aeração secante:** o intuito desse tipo de aeração é manter os grãos em uma

temperatura baixa até que haja dessecação do grão, no próprio silo, sendo este um processo lento.

**Aeração transilagem:** é o processo pelo qual os grãos passam pela massa de ar, sendo transferido de um silo para outro, com o intuito de reduzir e homogeneizar a temperatura dos grãos. No entanto, se o silo não tiver um sistema de ventilação eficiente, esse tipo de aeração deve ser realizado se for constatado elevação da temperatura dos grãos. Além disso, pode ser classificado como aeração de resfriamento.

No entanto, deve-se avaliar as condições climáticas, por exemplo, evitar dias úmidos e chuvosos e, após, analisar o diagrama de conservação de grãos na qual relaciona temperatura e umidade (Figura 9) para averiguar se o produto corre riscos durante a operação de aeração (SILVA, 2008).

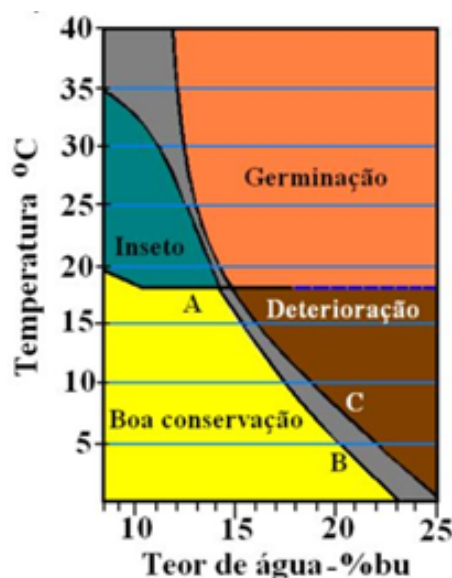


Figura 9: Diagrama indicativo de aeração  
Fonte: Silva (2008, p. 284)

Nota-se pelo diagrama que a melhor condição para armazenar os grãos se encontra na região amarela, na qual se encontra temperatura e umidade com valores baixos. Na região verde refere-se ao aumento da temperatura devido a proliferação de insetos. Já a região alaranjada diz respeito a condição do grão de germinar (processo pelo qual o grão perde nutrientes). E a região em marrom faz referência ao pior cenário possível que é a deterioração do grão. O autor apresenta também um diagrama a qual é possível verificar se o local precisará de aeração ou não, conforme Figura 10.

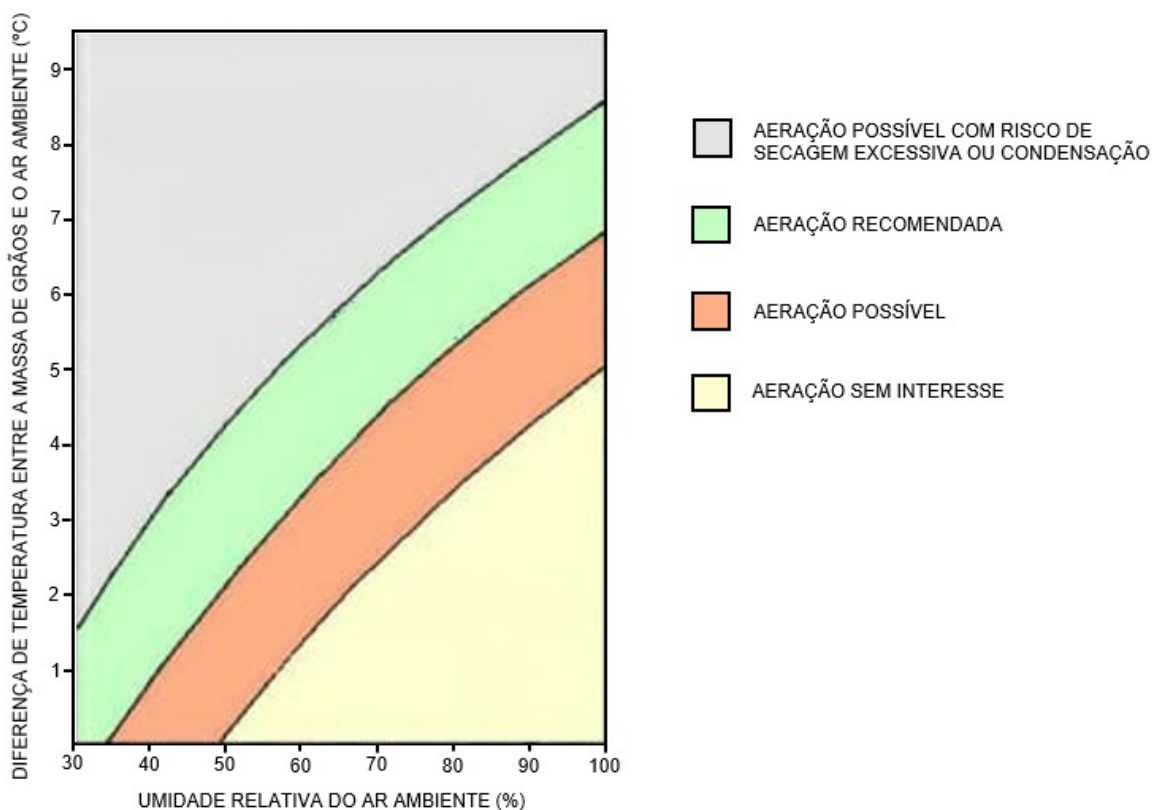


Figura 10: Diagrama de conservação de grãos

Fonte: Adaptado de Silva (2008, p. 285)

Por meio desta é possível analisar que quanto maior a umidade relativa menor a necessidade de diferença de temperatura entre ar e grão; quanto maior a diferença de temperatura, com baixa umidade relativa, maior é o risco de condensação e que quanto menor for a umidade e maior a diferença de temperatura maior a necessidade de utilizar aeração no silo.

Ressalta-se que quanto menor for o grão, mais difícil é a aeração e maior é a tendência de formar bolsas de calor. Além disso, as regiões mais próximas as paredes e bases do silo são mais sucessíveis a variações de temperatura (SILVA, 2008).

## 2.4 Método numérico aplicado a transferência de calor

As descobertas da comunidade científica partiam do estudo das leis da natureza, utilizando métodos práticos ou teóricos. Os métodos práticos referem-se a observações e experimentos e os métodos teóricos se baseiam em leis e teorias físicas. Com o passar do tempo, o desenvolvimento científico vem se aprimorando e buscando unir os métodos práticos e teóricos e, como consequência, criam-se os métodos numéricos (OISHI, 2004). Nesse sentido, pode-se estabelecer uma relação entre o método de análise teórico e o método analítico.

Dentre infinidades de métodos que auxiliam na resolução de problemas, na litera-

tura, os mais utilizados são os métodos mencionados acima (analíticos e numéricos). A diferença entre o método analítico e o método numérico é que o primeiro é eficiente no dimensionamento inicial, utilizado simplificações para as soluções (FERREIRA, 2014) e, o segundo método consiste na implementação de algoritmos, menos complexos, para resolver problemas que precisem de análises mais detalhadas do problema (TSUKAMOTO, 2010). Ainda sobre os métodos citados, é possível dizer que eles:

Precisam “fazer muitos ajustes na realidade” para que esta se encaixe em algum padrão pré-concebido que a teoria analítica seja capaz de tratar, enquanto a simulação é capaz de representar muito bem quase qualquer peculiaridade de uma operação ou situação complexa (BOUZADA, 2013, p. 85).

À vista disso, muitos problemas físicos podem ser modelados matematicamente de forma analítica, no entanto, para resolvê-los faz-se necessário simplificações de alguns fenômenos naturais, respeitando aspectos relevantes do comportamento do problema analisado, por exemplo, problemas que envolvam transferência de calor, tendem a ter limitações importantes quando trabalha-se pelo método analítico. Nessa perspectiva, Bala (2017, p. 225) discorre que “os métodos analíticos requerem que a temperatura externa possa ser descrita por uma função periódica do tempo, mas um método numérico pode ser aplicado para mudanças nas condições climáticas”.

Apesar de ambos os métodos serem ferramentas importantes para prever as oscilações de temperatura dentro de um silo com grãos, para problemas mais complexos, acaba-se por recorrer aos métodos numéricos. Salienta-se que problemas de transferência de calor são modelados por equações diferenciais parciais (EDPs) e, entre os métodos numéricos que lidam com equações diferenciais, destaca-se o método dos elementos finitos (FEM), método dos volumes finitos (FVM) e o método das diferenças finitas (MDF), a qual o último método esta pesquisa será direcionada.

#### **2.4.1 Método das diferenças finitas**

Nesta seção, será introduzido o método das diferenças finitas (MDF), de forma sucinta. Na metodologia deste trabalho, encontra-se a dedução matemática desta técnica para os casos analisados.

De modo geral, o método das diferenças finitas consiste na discretização do domínio para resolver um conjunto de pontos discretos no espaço e tempo. Essas equações transformam-se em equações algébricas por meio de aproximações em cada ponto. O conjunto de pontos são chamados de malha a qual representam geometricamente o domínio e, por meio desta, obtém-se o resultado do problema. Isso significa que este método converte o problema de valor de contorno (PVC) em sistemas de equações algébricas (BURDEN; FAIRES; BURDEN, 2015).

Dessa forma, o domínio contínuo passa a ser substituído por uma série de pontos

discretos, também chamados de nós, que situam-se na área de interesse, e, somente nesses pontos, é que poderá ser obtidas as aproximações da solução do problema. Essa substituição de contínuo a discreto chama-se discretização.

O conjunto finito de pontos são chamados de malha, a qual possuem espaçamentos uniformes ou irregulares (para este trabalho utiliza-se espaçamentos uniformes), e cada nó da grade refere-se a um valor numérico. Nesse sentido, uma vez discretizado o domínio do problema, aplica-se o MDF para a determinação das incógnitas. Como dito acima, por meio de aproximações das derivadas parciais (que aparecem em cada ponto da malha) obtém-se uma equação algébrica e, por meio desta, obtemos um sistema de equações que serão resolvidas paralelamente.

Pode-se dizer então que a escolha dos pontos define a discretização do domínio, e o conjunto desses pontos definem a malha (OISHI, 2004), bem como, a aproximação da solução esta diretamente interligada com as dimensões dos passos escolhidos tanto para o espaço, como para o tempo, ou seja, a solução é dependente do passo (NASCIMENTO; SILVA, 2013, p. 15).



### 3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Atualmente, há uma vasta gama de trabalhos publicados sobre o fenômeno de transferência de calor, alguns dos quais serão discutidos na sequência. Esse capítulo englobará autores que tiverem relação com a pesquisa em questão, seja pelo fato de abordarem transferência de calor em silos ou o método das diferenças finitas.

Smith e Sokhansanj (1990) propuseram uma análise teórica a cerca do efeito da condução e convecção natural de calor. Em suas simulações numéricas obtiveram como resultado que para grãos pequenos, como o trigo, há pouca influência da convecção, pois o tamanho dos poros dificulta a movimentação do ar e, por consequência, a condução domina o processo de transferência de calor. Já para materiais maiores, como batata e milho descascado, o efeito da convecção será mais perceptível, tendo menor instabilidade no método numérico escolhido. Além disso, em suas considerações, a temperatura média do material poroso não é afetada pela respiração lenta ou a baixa taxa de umidade, no entanto, se o processo dominante for condução, ocorre maiores gradientes de temperatura e a temperatura local é afetada pela umidade. Em contra partida, se o processo dominante é a convecção, a temperatura ao longo do silo não será afetada pela respiração ou pela lenta taxa de secagem pois a densidade de energia torna-se mais uniforme.

Andrade (2001) buscou em sua tese simular variações de temperatura no interior de um silo, determinar os parâmetros do modelo experimental e investigar as variações temporais externas como temperatura do ar, radiação solar e velocidade do vento na qualidade da massa de grãos de milho armazenados. Para obter tal êxito, sua pesquisa utilizou um modelo de transferência de calor tridimensional, via método de elementos finitos. Além disso, considerou em sua obra um regime transiente, com geração interna de calor afim de simular o desenvolvimento de fungos e insetos. O autor concluiu que a técnica abordada não obteve resultados satisfatórios, uma vez que as temperaturas simuladas na massa de grãos de milho obtiveram valores maior que do experimento analisado e que a qualidade fisiológica do grão, localizados na parte superior do silo, fora afetada. Uma possível solução destacada é introduzir a transferência de calor por convecção natural no modelo.

No trabalho desenvolvido por Devilla et al. (2004), os autores analisaram a variação de temperatura e umidade da massa de grãos de milho durante a aeração, com auxílio de sensores localizados radialmente em diferentes pontos axiais do silo. Objetivavam obter uma diferença de  $3^{\circ}C$  entre a massa dos grãos e o ambiente externo do silo. Durante o experimento, constataram que a redução da temperatura na massa de grãos dependia da localização dos grãos, tornando-se menor à medida que se aproximava do centro do silo metálico. Destacaram em sua obra que as mudanças climáticas contribuem para variação de temperatura interna e, por consequência, forma-se gradientes de temperatura nos grãos armazenados a qual potencializa a deterioração do produto devido ao desenvolvimento de insetos, fungos e microrganismos e, controlar a variação térmica interna no silo, por meio da aeração, inibe-as.

Em 2006, Abalone et al. propuseram um estudo acerca da distribuição de temperatura e umidade de grãos armazenados em um silo em um período de 200 dias para a soja (armazenada de maio a dezembro, período de outubro-primavera) e 250 dias para o trigo (armazenado de dezembro a junho, período de verão-inverno) em Rosário, região central da Argentina. Durante o período de estudo, os autores utilizaram valores médios de temperatura ambiente, radiação solar e velocidade do vento para analisar os gradientes térmicos causados pelas mudanças climáticas. O modelo proposto foi resolvido via método dos elementos finitos e constataram que a temperatura ambiente influencia, principalmente, nas áreas próximas às paredes do armazém e nas camadas superficiais de grãos e no centro do silo, a temperatura interna sofre pouca alteração da temperatura externa. Além disso, as áreas que apresentaram aumento de temperatura, tornaram-se favoráveis ao desenvolvimento de pragas, sendo necessário arejar para controlar a possível proliferação de fungos e insetos que, por ventura, poderiam vir a deteriorar os grãos. Ademais, ao término do experimento fora possível verificar que houve uma maior migração nos grãos de trigo em relação aos grãos de soja.

No trabalho desenvolvido por Carrera-Rodríguez et al. (2009), os autores propuseram um estudo numérico do efeito da temperatura ambiente na convecção natural dos grãos durante seu armazenamento. O silo, contendo sorgo, apresentava tamanho comercial. Para isso, analisaram o efeito do calor respiratório e, também, o efeito de três condições de contorno (primeiro e segundo caso constantes e o terceiro caso dependente do tempo) sobre padrões de vazão, isoterms e transferência de calor para o ambiente, considerando as propriedades do sorgo. Na primeira condição, consideraram a parede superior em temperatura adimensional unitária, na segunda condição admitiram que a parede superior em temperatura adimensional zero e, por fim, na última condição que a parede superior e lateral tivesse condições de contorno em função do tempo.

Continuando a discussão anterior, os autores supracitados resolveram as

equações encontradas por discretização espacial de diferenças finitas de segunda ordem e integração implícita para o tempo. Constataram que no centro do silo é menos sensível às mudanças climáticas, porém com maior temperatura, sendo necessário recorrer a aeração para evitar a deterioração dos grãos. Por fim, concluíram que a partir do modelo analisado é possível analisar e determinar condições ideais para um armazenamento seguro.

Em 2011, Melo utilizou como base o método das diferenças finitas explícito com o propósito de analisar o fluxo de calor em uma barra ao decorrer do tempo, em dois diferentes problemas unidimensionais, e comparar a solução exata (método analítico) com a solução numérica encontrada para verificar a eficácia do método escolhido (primeiro problema) e, analisar o comportamento da temperatura no passar do tempo (segundo problema). Para esta autora, as soluções obtidas via método das diferenças finitas apresentaram resultados confiáveis em comparação as soluções obtidas via métodos analíticos.

No trabalho desenvolvido por Moreira, Corrêa e Freire (2015) buscaram desenvolver e validar um modelo matemático bidimensional que fosse capaz de estimar a temperatura e umidade na massa de grãos de soja, armazenados em um silo, a qual tivesse incluso em seu modelo a influência da radiação solar, bem como, a movimentação solar. Para validar, utilizaram o método das diferenças finitas e o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Os valores calculados mostraram-se próximos aos obtidos experimentalmente e, também, as diferenças de temperatura entre a massa de grãos central e a ambiente foram maiores no período da noite (temperatura mínima ambiente) e menores ao meio dia (temperatura máxima ambiente). Obtiveram um erro médio entre as temperaturas experimentais e calculadas menor que 6,3% e, além disso, as previsões quanto a umidade mostraram-se de acordo com a literatura estudada pelos autores.

No mesmo ano (2015), Andrade e Loeffler compararam os resultados analíticos e numéricos para um problema de transferência de calor, em regime permanente, com condições de Neumann. Para os autores, uma das maneiras de se validar os resultados numéricos é comparar a solução numérica com a solução da equação diferencial correspondente analiticamente. Para isso, utilizaram o método de separação de variáveis (modelo analítico) e o método dos elementos de contorno com interpolação direta (modelo numérico). Os resultados foram comparados em 15 diferentes pontos internos no domínio e tiveram como resultado 0,24% de erro para o modelo numérico, sendo esse resultado considerado satisfatório para os autores.

Rech (2018) utilizou como modelos matemáticos os método dos elementos finitos e o método das diferenças finitas. O intuito do trabalho era modelar o processo de transferência de calor em um silo com aeração. Ademais, o autor buscava, por meio dos resultados obtidos, aperfeiçoamento do processo de aeração para que houvesse

melhor qualidade do grão, menor consumo de energia e, conseqüentemente, menor custo de estocagem. Nesse sentido, a validação ocorreu por meio de dados experimentais que fora obtido em um sistema real de aeração em armazenadores de soja, tendo êxito na evolução da temperatura tanto durante o processo de aeração como por meio das condições ambientais.

No trabalho de Stark (2018) foi utilizado métodos analíticos e semi-analíticos como transformada de Laplace, separação de variáveis e quadratura Gaussiana para o modelo de transferência de calor por condução em um silo. O modelo analisado era unidimensional transiente e o objetivo do autor fora descrever a variação de temperatura da massa de grãos em função da altura do silo e o tempo. A partir da solução encontrada, foi realizado uma comparação entre os dados obtidos com os dados observados em seu experimento. A solução apresentada fora considerada satisfatória uma vez que os valores obtidos aproximaram-se dos valores observados.

Santos (2020) deu continuidade a pesquisa de Stark (2018) e propôs-se a analisar diferentes modelos como separação de variáveis, transformada de Laplace e GILTT, considerando o tipo de grão e as dimensões do silo e, tem por objetivo prever a distribuição de temperatura interna em um silo. Por meio desta previsão, o agricultor será capaz de determinar o melhor momento para fazer uso de ventiladores para a aeração dos grãos. A solução unidimensional e bidimensional encontradas mostraram-se equivalentes ao modelo esperado. Então, de maneira geral, as soluções encontradas são satisfatórias para o monitoramento da distribuição de temperatura no interior do silo, ao longo do tempo.

## 4 METODOLOGIA

O objetivo deste trabalho é averiguar a variação de temperatura da massa de grãos de arroz, armazenadas em um silo, de forma unidimensional e bidimensional via método explícito das diferenças finitas e, por meio dos resultados obtidos, comparar com os dados experimentais da literatura. O diferencial desta pesquisa é analisar a transferência de calor bidimensionalmente, averiguar a influência da difusividade térmica, até então constante (valor médio) com valores que variam em função da temperatura e umidade do grão de arroz e, também, analisar estatisticamente os dados encontrados com os experimentais de Stark. Os índices estatísticos (análise estatística) ancoram-se em Hanna (1989). A implementação computacional dar-se-á através da plataforma *Google Colaboratory (Google Colab)* que possibilita a execução de código fonte escrito na linguagem Python. O experimento analisado foi realizado por Stark (2018) na Universidade Federal de Pelotas (UFPel).

### 4.1 Problema analisado

Stark (2018) usou como protótipo de sua pesquisa um silo de chapa metálica galvanizada a qual fora preenchido com aproximadamente 300 kg de grãos de arroz em casca. O silo possui diâmetro de 1 metro, altura cilíndrica de 0,7 metros e cobertura de 0,29 metros, conforme Figura 11. Além disso, a temperatura ambiente era de  $22,5^{\circ}\text{C}$  (ambiente climatizado), umidade média de 13,7%, sendo preenchido 0,65 metros da altura total ( $H_s$ ), resultando em um volume total de  $0,51\text{m}^3$ .



	Sensor 1 (m)	Sensor 2 (m)	Sensor 3 (m)
Cabo 1	0,01	0,23	0,56
Cabo 2	0,01	0,29	0,56
Cabo 3	0,01	0,29	0,58

Tabela 2: Posição dos sensores em cada cabo do silo  
Fonte: Stark (2018, p. 22)

Como citado no Capítulo 3, o objetivo do trabalho de Stark (2018) foi apresentar um modelo de transferência de calor, via condução. Para tal, utilizou-se a aeração forçada e um aquecedor na entrada de ar fazendo com que os grãos de arroz fossem aquecidos num intervalo de 50 minutos. E, passado esse intervalo de tempo, além dos equipamentos serem desligados, também vedaram a entrada e a saída de ar do silo com o intuito de não ocorrer troca de calor por convecção dos grãos com o ambiente externo. Diante disso, as condições de contorno foram consideradas nulas ( $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$ ).

Como primeiros resultados para a análise desta pesquisa, Stark considerou apenas os três sensores situados no Cabo 1 do experimento. O sensor 1 localiza-se a  $0,01m$ , o sensor 2 a  $0,23m$  e o sensor 3 a  $0,56m$  da base do silo.

#### 4.1.1 Condições do problema e do modelo: unidimensional e bidimensional

Neste trabalho, tem-se o intuito de investigar a variação de temperatura da massa de grãos de arroz, armazenados em um silo, utilizando os modelos unidimensional e bidimensional, representados pelas equações:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (1)$$

e

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \alpha r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \alpha \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (2)$$

sendo a Equação (1), o modelo unidimensional  $T(z,t)$  a qual relaciona a temperatura interna do silo com a altura da massa de grãos e, a Equação (2) refere-se ao modelo bidimensional  $T(r,z,t)$  que relaciona a temperatura interna do silo com os fluxos de calor radial e axial.

As condições de contorno para os modelos unidimensional e bidimensional, considera-se que o topo ( $z = H_s$ ) e a base do silo ( $z = 0$ ) sejam isotérmicos, em outras palavras, não há fluxo de calor:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=H_s} = 0. \quad (3)$$

No entanto, para o modelo bidimensional, na direção radial, admite-se que a temperatura interna do silo seja limitada e que a temperatura nas laterais do armazém

seja constante e igual à temperatura ambiente, assim, temos:

$$T(r \rightarrow 0, z, t) \leq M, \quad M \in \mathbb{R} \quad (4)$$

e

$$T(R_s, z, t) = T_{amb}, \quad (5)$$

A condição inicial do modelo unidimensional e bidimensional são dadas, respectivamente, por:

$$T(z, 0) = F(z) = c_0 e^{c_1 z + c_2} + c_3; \quad (6)$$

$$T(r, z, 0) = F(z) = c_0 e^{c_1 z + c_2} + c_3. \quad (7)$$

Na condição inicial, tanto do modelo unidimensional, Equação (6), como do modelo bidimensional, Equação (7), a expressão  $F(z)$  representa uma função perfil em  $z$ . Para obter os coeficientes dessa função perfil, Stark (2018) utilizou as temperaturas iniciais obtidas após o aquecimento do ar e captada por meio de cada sensor distribuídos em três cabos e, realizou um ajuste de curva exponencial via método dos mínimos quadrados.

Na Tabela 3 encontra-se a temperatura inicial dos grãos, após a temperatura de entrada, medidas em cada um dos sensores que foram encontrados por Stark (2018) para os coeficientes do modelo.

	Temperatura ( $^{\circ}C$ )		
	Sensor 1	Sensor 2	Sensor 3
Cabo 1	31,3	24,2	22,8
Cabo 2	30,0	24,3	23,3
Cabo 3	31,1	23,7	23,8

Tabela 3: Temperatura inicial em cada sensor e cabo

Fonte: Stark (2018)

A partir dos valores encontrados na tabela acima, é possível analisar que a temperatura na base do silo são maiores que a temperatura do topo. Também, nota-se que a temperatura no sensor 3 do cabo 3 é maior que a do sensor 2 e que a temperatura no sensor 1 do cabo 1 é menor que as demais temperaturas do mesmo sensor, indicando possível erro de leitura.

Ademais, na Figura 13 são apresentados os gráficos referentes a temperatura inicial nos cabos 1, 2 e 3 em função da altura do silo, onde os pontos em azul representa a temperatura inicial em seus respectivos sensores e a linha em vermelho representa a temperatura obtida por Stark (2018). Os valores ideais encontrados, via método dos mínimos quadrados, para as constantes da função  $F(z)$  são apresentados na Tabela 4.



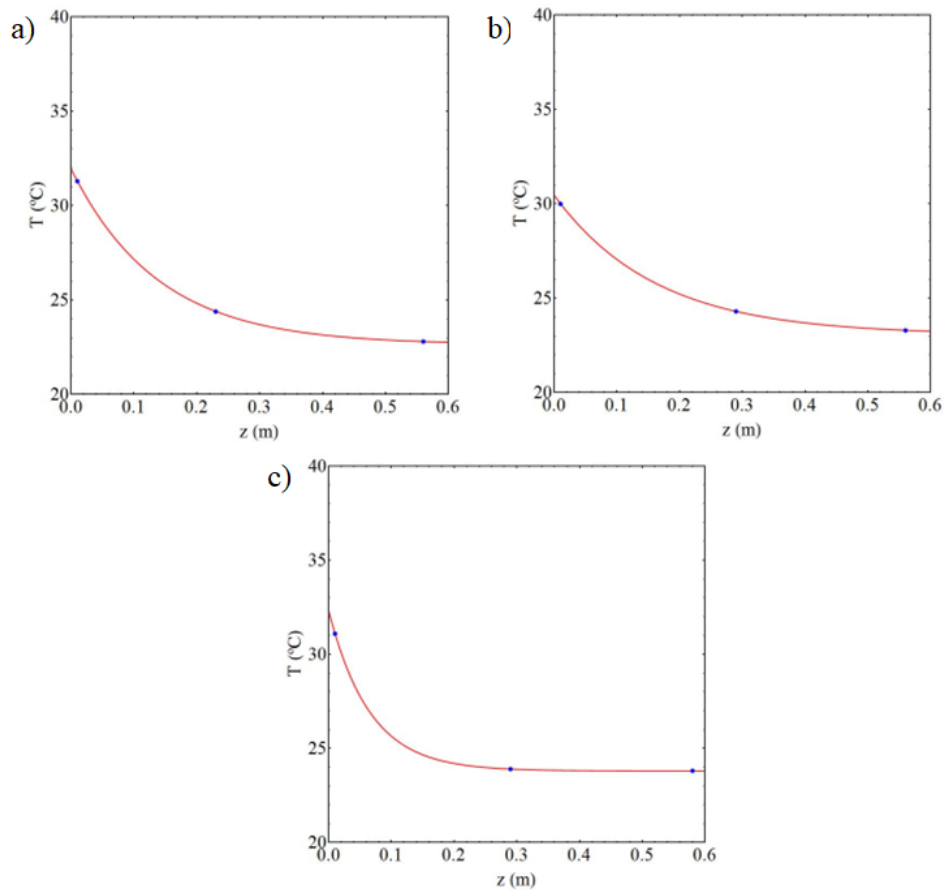


Figura 13: Gráficos da função perfil da temperatura inicial dos grãos de arroz em função da altura do silo no a) Cabo 1, b) Cabo 2 e c) Cabo 3

Fonte: Stark (2018)

	$C_0$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
Cabo 1	9,31188	-7,23951	0	22,6384
Cabo 2	30	-6,16646	-1,40319	23,0666
Cabo 3	10	-15,2809	-0,161737	23,7988

Tabela 4: Constantes da função perfil  $F(z)$  em cada cabo

Fonte: Stark (2018)

#### 4.1.2 Condições do problema: coeficiente de difusividade térmica

Nas simulações apresentadas neste trabalho, foram utilizados uma difusividade térmica com valor médio e variável para o grão de arroz. A difusividade térmica variável é representada pela expressão, disponibilizado em Dotto et al. (2016):

$$\alpha(T, X) = (0,63 + 5,63 \cdot 10^{-2}X + 1,51 \cdot 10^{-2}T + 1,17 \cdot 10^{-4}XT) \cdot 10^{-7}, \quad (8)$$

onde  $X$  é a umidade do grão de arroz (em %),  $T$  é a temperatura (em °C) e  $XT$  é a iteração entre a umidade e a temperatura do grão. Para os dados da literatura

utilizados (STARK, 2018) podemos considerar  $X \approx 13,7\%$ .

Já para a difusividade térmica com valor médio, utilizou-se o valor médio da função (8), calculado pela seguinte expressão:

$$\alpha_m = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \alpha(X, T) dT, \quad (9)$$

onde  $[T_1, T_2]$  é o intervalo de temperatura em que os dados foram observados, de acordo com o experimento da literatura. Para o estudo  $\alpha_m = 1,85229 \times 10^{-7} m/s^2$ .

Na Figura 14, observa-se o gráfico das difusividades térmicas (com valor médio e variável) em função da temperatura.

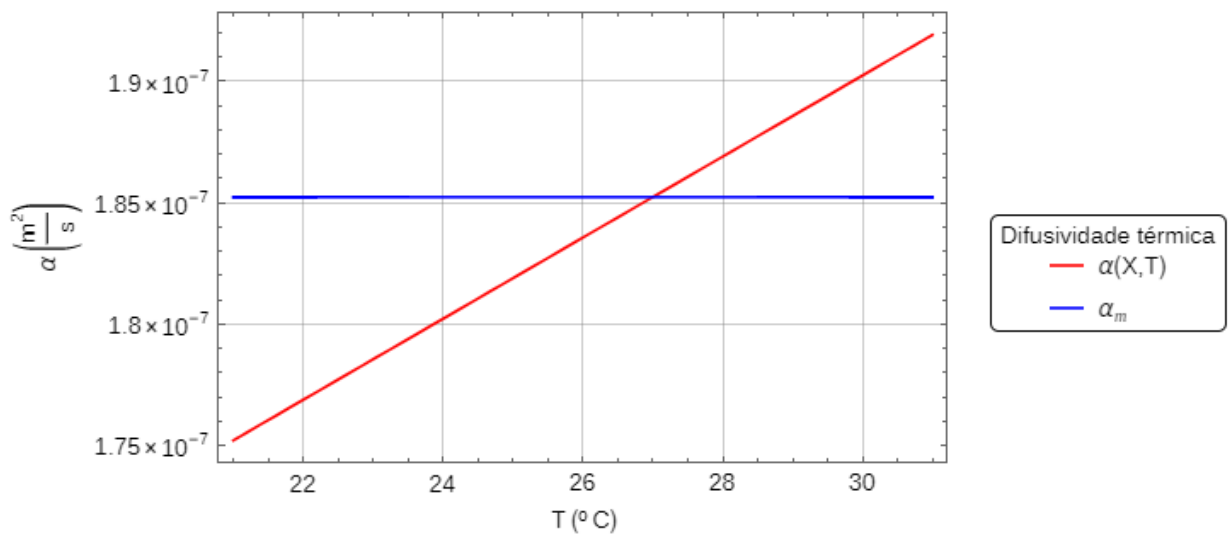


Figura 14: Gráfico da difusividade térmica (com valor médio e variável)  
Fonte: Do autor

## 4.2 Modelo Matemático

O modelo matemático apresentado neste trabalho tem por objetivo descrever a variação de temperatura da massa de grãos de arroz, dentro de um silo. A transferência de calor, no experimento analisado, ocorre via condução (descrita na subseção 2.3.1). Além disso, esta seção baseia-se no primeiro capítulo do livro *Heat conduction* de Özışık (2012).

Uma vez conhecida a forma de distribuição de temperatura no meio, em função do espaço e tempo, o fluxo de calor é então prescrito a partir das leis de transferência de calor que o governa. Para resolver a transferência de calor, considera-se a lei particular que governa a relação entre fluxo de calor e campo de temperatura, descritas pelo matemático Jean Baptiste Joseph Fourier ou, simplesmente, Fourier.

Para um sólido homogêneo e isotrópico (isto é, material a qual a condutividade térmica independe da direção), a lei de Fourier é dada por:

$$\vec{q}''(\vec{r},t) = -k\nabla T(\vec{r},t), \quad (10)$$

onde o gradiente  $\nabla T(\vec{r},t)$  é um vetor normal a superfície isotérmica ( $K/m$ ),  $\vec{q}''(\vec{r},t)$  representa o fluxo de calor por unidade de tempo, por unidade de área da superfície isotérmica na direção do gradiente de temperatura decrescente ( $W/m^2$ ) e  $k$  é o parâmetro de condutividade térmica do material ( $W/(m.K)$ ).

A equação (10), no sistema de coordenadas cartesiano é descrita como:

$$\vec{q}''(x,y,z,t) = -k\left(\vec{i}\frac{\partial T}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial T}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial T}{\partial z}\right). \quad (11)$$

Podemos decompor o vetor fluxo térmico local em componentes, do tipo:

$$\vec{q}'' = \vec{i}q_x'' + \vec{j}q_y'' + \vec{k}q_z''. \quad (12)$$

Assim, o fluxo térmico pode ser expresso em termos das componentes:

$$q_x'' = -k\frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y'' = -k\frac{\partial T}{\partial y} \quad \text{e} \quad q_z'' = -k\frac{\partial T}{\partial z}. \quad (13)$$

O fluxo de calor para um determinado gradiente de temperatura é diretamente proporcional à condutividade térmica do material e, o sinal negativo na lei de Fourier é devido a direção do gradiente de temperatura onde o calor flui da região de maior temperatura para a menor temperatura.

#### 4.2.1 Equação diferencial de condução de calor: coordenadas cartesianas

Nesta seção será deduzida a equação de condução de calor, ou ainda, equação de calor. Considerando a abordagem por volume de controle diferencial que é definida por meio da Figura 15 a seguir:

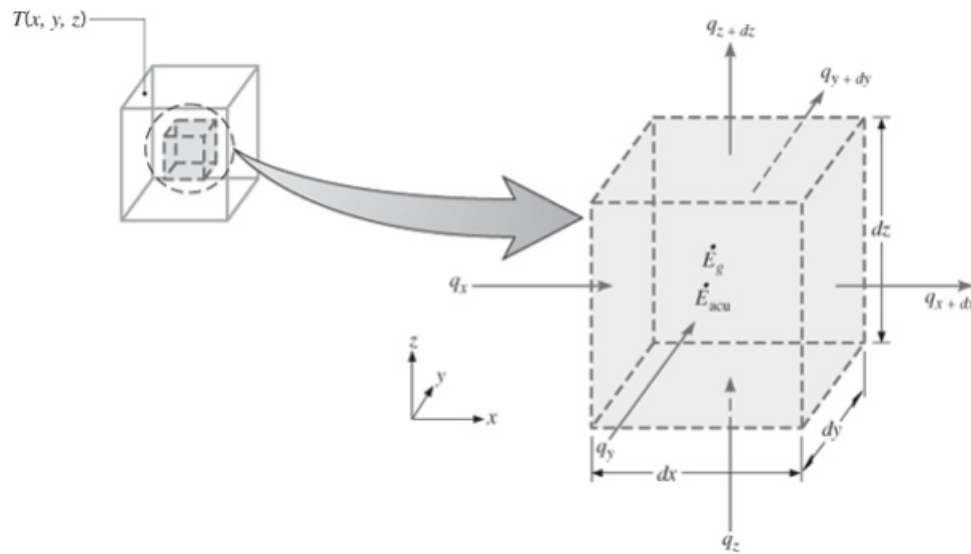


Figura 15: Volume de controle diferencial para derivação da equação de calor em coordenadas cartesianas

Fonte: Incropera et al., (2014, p. 165)

Nota-se pela figura acima que a taxa de calor que entra é representada por  $q_x$ ,  $q_y$  e  $q_z$  e a taxa de calor que sai do material é indicado pelos termos  $q_{x+dx}$ ,  $q_{y+dy}$  e  $q_{z+dz}$ .

O volume e a massa correspondentes do volume de controle diferencial são definidos, respectivamente, como:

$$dv = dx dy dz, \quad (14)$$

e

$$dm = \rho dx dy dz, \quad (15)$$

onde  $\rho$  é a densidade de massa ( $kg/m^3$ ) do volume de controle.

Considerando uma abordagem na qual as propriedades não variem microscopicamente e que para um problema cartesiano unidimensional, como é o caso, o comprimento característico por ser considerado pela espessura da parede, podemos começar com uma declaração geral de conservação de energia baseada na primeira lei da Termodinâmica, descrita como:

$$\left( h + \frac{1}{2} \bar{V}^2 + \dot{g}z \right)_{ent} \delta \dot{m}_{ent} - \left( h + \frac{1}{2} \bar{V}^2 + \dot{g}z \right)_{sai} \delta \dot{m}_{sai} + \delta \dot{Q} + \delta \dot{E}_g - \delta \dot{W} = \frac{dE_{vc}}{dt}, \quad (16)$$

onde  $\delta \dot{m}_{ent}$  é a taxa de fluxo de massa que entra,  $\delta \dot{m}_{sai}$  é a taxa de fluxo de massa que sai,  $\delta \dot{W}$  é a taxa de trabalho,  $dE_{vc}/dt$  é a taxa de variação de energia,  $\delta \dot{E}_g$  é a taxa na qual a energia é gerada dentro do volume de controle devido à geração interna de energia e  $\delta \dot{Q}$  é a taxa líquida de transferência de calor para o volume de controle.

Como estamos derivando a equação de calor para um meio quiescente (longe do

meio aquecido a velocidade é zero, a menos que ocorra perto do meio a qual esta em repouso (INCROPERA et al., 2014, p. 1103)), as taxas de variação de energia cinética e potencial no volume de controle são desprezadas, ou seja,  $(\delta\dot{m}_{ent} \approx 0)$  e  $(\delta\dot{m}_{sai} \approx 0)$ . E supondo que a taxa de trabalho feito pelo volume de controle seja zero  $(\delta\dot{W} \approx 0)$ , ficamos com:

$$\delta\dot{Q} + \delta\dot{E}_g = \frac{dE_{vc}}{dt}. \quad (17)$$

Podemos expandir a taxa de variação de energia no volume de controle diferencial como:

$$\frac{dE_{cv}}{dt} = \frac{d\left[\left(u + \frac{1}{2}\bar{V}^2 + \dot{g}z\right) dm\right]_{vc}}{dt}, \quad (18)$$

onde  $u$  é a energia interna ( $J/kg$ ), sendo esta uma propriedade escalar intensiva (não sendo dependente da massa da amostra) associada ao estado termodinâmico do sistema.

Desprezando qualquer mudança de energia cinética e potencial no volume de controle, obtemos:

$$\frac{dE_{cv}}{dt} = \frac{d[u dm]}{dt}. \quad (19)$$

Substituindo a taxa de variação de energia, obtemos a seguinte equação:

$$\delta\dot{Q} + \delta\dot{E}_g = \frac{d[u dm]}{dt}. \quad (20)$$

Nesse sentido, observando a Figura 15 (localizada na página anterior), a taxa líquida de transferência de calor é:

$$\delta\dot{Q} = (q_x - q_{x+dx}) + (q_y - q_{y+dy}) + (q_z - q_{z+dz}). \quad (21)$$

A taxa de calor, via lei de Fourier, é calculada multiplicando o fluxo de calor pela área total da seção transversal através da qual o fluxo de calor flui. A taxa de calor na direção  $x$ , por exemplo, é dada por:

$$q_x = -kA_x \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (22)$$

onde  $A_x$  é a área total da seção transversal ( $m^2$ ), na direção  $x$ , sendo igual a  $dydz$ ,  $k$  é o parâmetro de condutividade térmica do material ( $W/(m.K)$ ) e  $\partial T/\partial x$  é o gradiente da temperatura  $T$  na direção  $x$  ( $K/m$ ).

Nessa perspectiva, a taxa de calor nas direções  $y$  e  $z$ , são escritas da seguinte forma, respectivamente

$$q_y = -kA_y \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (23)$$

e

$$q_z = -kA_z \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (24)$$

onde a área total da seção transversal na direção  $y$  e  $z$ , respectivamente, são  $A_y = dx dz$  e  $A_z = dx dy$ .

Podemos expressar por meio da expansão da série de Taylor (O'NEIL, 2011), as taxas de transferência de calor de saída:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 q_x}{\partial x^2} (dx)^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 q_x}{\partial x^3} (dx)^3 + \dots, \quad (25)$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 q_y}{\partial y^2} (dy)^2 + \dots, \quad (26)$$

e

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 q_z}{\partial z^2} (dz)^2 + \dots \quad (27)$$

Desprezando os termos de ordens superiores, tem-se:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx, \quad (28)$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy, \quad (29)$$

e

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz. \quad (30)$$

Substituindo as taxas de calor de entrada, dadas pelas equações (22)-(24) nas equações (28)-(30), ficamos, respectivamente, com:

$$q_{x+dx} \approx -kA_x \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( -kA_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx, \quad (31)$$

$$q_{y+dy} \approx -kA_y \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left( -kA_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy, \quad (32)$$

e

$$q_{z+dz} \approx -kA_z \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left( -kA_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) dz. \quad (33)$$

Simplificando os termos, tem-se:

$$q_x - q_{x+dx} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy dz, \quad (34)$$

$$q_y - q_{y+dy} = \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy dz, \quad (35)$$

e

$$q_z - q_{z+dz} = \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (36)$$

A taxa de geração de energia interna pode ser calculada diretamente a partir da taxa volumétrica de geração de energia interna  $g(W/M^3)$ , a qual a taxa volumétrica de geração de energia é dada por  $\dot{g} = \dot{g}(x,y,z,t)$ . Assim sendo, o termo de geração é denotado por:

$$\delta \dot{E}_g = \dot{g} dx dy dz. \quad (37)$$

Por fim, temos que a taxa de variação de energia dentro do volume de controle pode ser definida introduzindo a constante de calor específico do volume  $c_v(J/kg.K)$ , conforme Özişik (2012):

$$c_v \equiv \left. \frac{\partial u}{\partial T} \right|_v \rightarrow u = c_v T + u_{ref}. \quad (38)$$

Para um sólido ou fluido incompressível,  $c_v = c_p = c$ , definido como calor específico a pressão constante, tem-se:

$$\frac{d[u \cdot dm]}{dt} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz. \quad (39)$$

A partir destas obtemos a equação de calor em coordenadas cartesianas porém, faz-se necessário fazer algumas substituições. Inicialmente substituímos as equações (34)-(36) na equação (21), ficamos com:

$$\delta \dot{Q} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy dz + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy dz + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (40)$$

Agora, podemos substituir as equações (40), (37) e (39), respectivamente, na equação (20), que obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy dz + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy dz + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) dx dy dz \\ + \dot{g} dx dy dz = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz, \end{aligned} \quad (41)$$

simplificando os termos,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{g} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (42)$$

A qual é denominada como equação de calor em coordenadas cartesianas.

#### 4.2.2 Equação diferencial de condução de calor: coordenadas cilíndricas

A equação do calor pode ser escrita em coordenadas cilíndricas e para tal parte-se do princípio da Equação (42), para simplificação nos cálculos foi considerado  $k$  constante.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (43)$$

onde  $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$  é a difusividade térmica ( $m^2/s$ ).

Para determinar a equação de calor em coordenadas cilíndricas é necessário mudar as direções cartesianas para radiais, ou seja,  $(x, y, z)$  passam a ser  $(r, \phi, z)$ , como é demonstrado na Figura 16.

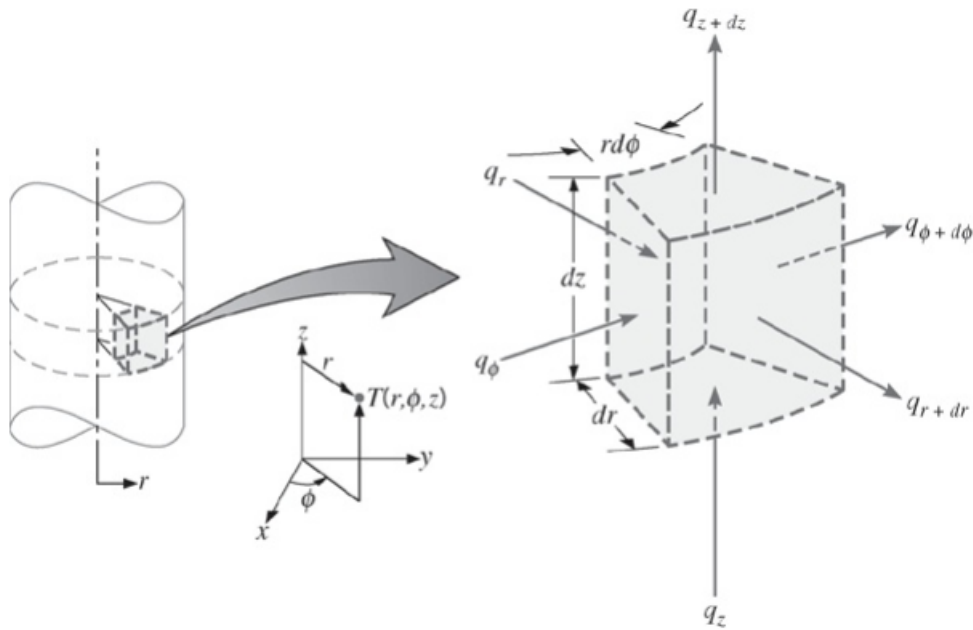


Figura 16: Volume de controle diferencial para derivação da equação de calor em coordenadas cilíndricas

Fonte: Incropera et al., (2014, p. 168)

Faz-se necessário lembrar das relações entre as variáveis, bem como, das propriedades fundamentais da trigonometria:

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi \quad \text{e} \quad z = z; \quad (44)$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{e} \quad \tan \phi = \frac{y}{x}. \quad (45)$$

Por meio das propriedades fundamentais da trigonometria, dadas por (45), derivamo-as em relação a  $x$  e  $y$ , assim, obtemos:

- Derivando em relação à  $x$ :

$$\tan \phi = \frac{y}{x} \quad \rightarrow \quad \sec^2 \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\cos^2 \phi \frac{y}{x^2}} \quad (46)$$



$$x^2 + y^2 = r^2 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}[x^2 + y^2] = \frac{\partial[r^2]}{\partial x} \rightarrow 2x = 2r \frac{\partial r}{\partial x} \rightarrow \boxed{\frac{x}{r} = \frac{\partial r}{\partial x}} \quad (47)$$

• Derivando em relação à  $y$ :

$$\tan \phi = \frac{y}{x} \rightarrow \sec^2 \phi \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{x} \rightarrow \boxed{\frac{\partial \phi}{\partial y} = \cos^2 \phi \frac{1}{x}} \quad (48)$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \rightarrow \frac{\partial}{\partial y}[x^2 + y^2] = \frac{\partial[r^2]}{\partial y} \rightarrow 2y = 2r \frac{\partial r}{\partial y} \rightarrow \boxed{\frac{y}{r} = \frac{\partial r}{\partial y}} \quad (49)$$

Substituindo as relações listadas em (44) nos resultados destacados das derivadas (46)-(49), temos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\cos^2 \phi \frac{y}{x^2} = -\frac{1}{r} \sin \phi, \quad (50)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \phi, \quad (51)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \cos^2 \phi \frac{1}{x} = \frac{1}{r} \cos \phi, \quad (52)$$

e

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \phi. \quad (53)$$

Pela regra da cadeia, temos:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (54)$$

e

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (55)$$

A partir destas, (54) e (55), podemos substituir pelos resultados destacados em (46)-(49), assim,

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial r} \left[ \frac{x}{r} \right] + \frac{\partial T}{\partial \phi} \left[ -\cos^2 \phi \frac{y}{x^2} \right], \quad (56)$$

e

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial r} \left[ \frac{y}{r} \right] + \frac{\partial T}{\partial \phi} \left[ \cos^2 \phi \frac{1}{x} \right]. \quad (57)$$

Derivando a equação (56) em relação à  $x$ , obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \right] = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial T}{\partial r} \left( \frac{r \cos \phi}{r} \right) \right] + \frac{\partial T}{\partial \phi} \left( -\cos^2 \phi \frac{r \sin \phi}{r^2 \cos^2 \phi} \right)$$

$$+ \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{\partial T}{\partial r} \left( \frac{r \cos \phi}{r} \right) + \frac{\partial T}{\partial \phi} \left( -\cos^2 \phi \frac{r \sin \phi}{r^2 \cos^2 \phi} \right) \right] \quad (58)$$

e, derivando a equação (57) em relação à  $y$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial T}{\partial y} \right] &= \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial T}{\partial r} \left( \frac{r \sin \phi}{r} \right) + \frac{\partial T}{\partial \phi} \left( \cos^2 \phi \frac{1}{r \cos \phi} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{\partial T}{\partial r} \left( \frac{r \sin \phi}{r} \right) + \frac{\partial T}{\partial \phi} \left( \cos^2 \phi \frac{1}{r \cos \phi} \right) \right]. \end{aligned} \quad (59)$$

Podemos agora fazer as substituições na primeira e segunda derivada em relação à  $x$  a qual utilizamos os resultados encontrados em (50) e (51) na equação (58), resultando em:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \right] &= \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial T}{\partial r} \cos \phi + \frac{\partial T}{\partial \phi} \left( -\frac{\sin \phi}{r} \right) \right] \\ &- \frac{1}{r} \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{\partial T}{\partial r} \cos \phi + \frac{\partial T}{\partial \phi} \left( -\frac{\sin \phi}{r} \right) \right]. \end{aligned} \quad (60)$$

Fazendo a distributividade da equação (60):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \cos \phi \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \cos \phi + \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \phi} \left( -\frac{\sin \phi}{r} \right) + \frac{\partial T}{\partial \phi} \left( \frac{\sin \phi}{r^2} \right) \right] \\ &- \frac{1}{r} \sin \phi \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial \phi \partial r} \cos \phi - \frac{\partial T}{\partial r} \sin \phi + \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \left( -\frac{\sin \phi}{r} \right) + \frac{\partial T}{\partial \phi} \left( -\frac{\cos \phi}{r} \right) \right], \end{aligned} \quad (61)$$

e, na mesma perspectiva, fazendo a distributividade da equação (61):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \cos^2 \phi \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} - \frac{\cos \phi \sin \phi}{r} \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \phi} + \frac{\cos \phi \sin \phi}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \cos \phi \sin \phi \frac{\partial^2 T}{\partial \phi \partial r} \\ &+ \frac{1}{r} \sin^2 \phi \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \sin^2 \phi \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2} \cos \phi \sin \phi \frac{\partial T}{\partial \phi}. \end{aligned} \quad (62)$$

Agora em relação à  $y$  a qual utilizamos os resultados encontrados em (52) e (53) na equação (59), resultando em:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial T}{\partial y} \right] &= \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial T}{\partial r} \left( \frac{y}{r} \right) + \frac{\partial T}{\partial \phi} \left( \cos^2 \phi \frac{1}{x} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{\partial T}{\partial r} \left( \frac{y}{r} \right) + \frac{\partial T}{\partial \phi} \left( \cos^2 \phi \frac{1}{x} \right) \right]. \end{aligned} \quad (63)$$

Aplicando a distributividade na equação (63), temos:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial T}{\partial r} \sin \phi + \frac{\partial T}{\partial \phi} \left( \frac{1}{r} \cos \phi \right) \right] + \frac{1}{r} \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{\partial T}{\partial r} \sin \phi + \frac{\partial T}{\partial \phi} \left( \frac{1}{r} \cos \phi \right) \right], \quad (64)$$

e, de maneira análoga, aplicando a distributividade na equação (64):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \sin^2 \phi \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \phi} \left[ \frac{1}{r} \cos \phi \sin \phi \right] + \frac{\partial T}{\partial \phi} \left[ -\frac{1}{r^2} \cos \phi \sin \phi \right] \\ &+ \frac{1}{r} \cos \phi \sin \phi \frac{\partial^2 T}{\partial \phi \partial r} + \frac{1}{r} \cos^2 \phi \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \left[ \frac{1}{r^2} \cos^2 \phi \right] - \frac{1}{r^2} \cos \phi \sin \phi \frac{\partial T}{\partial \phi}. \end{aligned} \quad (65)$$

Substituindo na equação (43) os termos  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$  e  $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$  estabelecidos em (62) e (65), respectivamente, ficamos com:

$$\begin{aligned} \cos^2 \phi \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} - \frac{\cos \phi \sin \phi}{r} \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \phi} + \frac{\cos \phi \sin \phi}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \cos \phi \sin \phi \frac{\partial^2 T}{\partial \phi \partial r} + \frac{1}{r} \sin^2 \phi \frac{\partial T}{\partial r} \\ + \frac{1}{r^2} \sin^2 \phi \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2} \cos \phi \sin \phi \frac{\partial T}{\partial \phi} + \sin^2 \phi \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \phi} \left[ \frac{1}{r} \cos \phi \sin \phi \right] \\ + \frac{\partial T}{\partial \phi} \left[ -\frac{1}{r^2} \cos \phi \sin \phi \right] + \frac{1}{r} \cos \phi \sin \phi \frac{\partial^2 T}{\partial \phi \partial r} + \frac{1}{r} \cos^2 \phi \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \left[ \frac{1}{r^2} \cos^2 \phi \right] \\ - \frac{1}{r^2} \cos \phi \sin \phi \frac{\partial T}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{g}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}. \end{aligned} \quad (66)$$

Agora, simplificando os termos semelhantes:

$$\begin{aligned} \cos^2 \phi \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \sin^2 \phi \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \sin^2 \phi \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \sin^2 \phi \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cos^2 \phi \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \left[ \frac{1}{r^2} \cos^2 \phi \right] \\ + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{g}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}. \end{aligned} \quad (67)$$

Agrupando os termos  $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial r}$  e  $\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}$ , na equação (67):

$$[\cos^2 \phi + \sin^2 \phi] \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} [\cos^2 \phi + \sin^2 \phi] \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} [\cos^2 \phi + \sin^2 \phi] \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{g}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (68)$$

Sabendo que pela identidade trigonométrica  $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$ , a equação (68) fica:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{g}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (69)$$

Podemos reescrever os dois primeiros termos da equação (69) como:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial T}{\partial r} \right]. \quad (70)$$

Desta forma, obtemos a equação de calor em coordenadas cilíndricas, descrita

como:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{g}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (71)$$

onde  $T$  é a temperatura média (em °C),  $r$  é a posição ao longo do raio ( $m$ ),  $z$  é a altura da coluna de grãos ( $m$ ),  $\phi$  é o ângulo vertical (em radianos) e  $t$  é o tempo percorrido (em segundos).

No caso em que a condutividade térmica  $k$  é uma constante independente de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , a equação (71) é válida. No entanto, caso o  $\alpha$  fosse variável com a temperatura, a equação (71) seria:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \alpha \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \alpha \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \alpha \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\dot{g}}{\rho c} = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (72)$$

onde  $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$  é a difusividade térmica ( $m^2/s$ ).

Para se chegar a equação (72) multiplica-se ambos os lados da igualdade por  $\alpha$  e, no último termo a esquerda da igualdade, tem-se:

$$\alpha \frac{\dot{g}}{k} = \frac{k}{\rho c_p} \frac{\dot{g}}{k} = \frac{\dot{g}}{\rho c}.$$

Evidencia-se aqui que ambas equações (69) e (71) representam a equação de calor em coordenadas cilíndricas considerando o coeficiente de difusividade térmica com valor médio e, a equação (72) quando a difusividade térmica varia em função da temperatura e da umidade do grão.

### 4.3 Método das Diferenças Finitas

Esta seção baseia-se no primeiro capítulo do livro *Finite Difference Methods for Differential Equations* de LeVeque (2005), no quinto capítulo do livro *Advanced Engineering Mathematics* de O'Neil (2011) e, também, no décimo primeiro capítulo do livro *Análise Numérica* de Burden, Faires e Burden (2015).

Se tivermos uma função de uma variável  $u = u(x)$  e ela for considerada suave, a diferenciação poderá ser feita inúmeras vezes em qualquer um de seus pontos, inclusive o ponto de interesse  $x_0$ .

Nesse sentido, uma maneira de analisar a aproximação das derivadas presentes na equação de diferenças finitas é através da expansão da função  $u(x)$  em série de Taylor sobre o ponto  $(x_0)$ , podemos escrever da seguinte maneira:

$$u(x_0 + h) = u(x_0) + hu'(x_0) + \frac{1}{2!}h^2u''(x_0) + \frac{1}{3!}h^3u'''(x_0) + \dots \quad (73)$$

$$u(x_0 - h) = u(x_0) - hu'(x_0) + \frac{1}{2!}h^2u''(x_0) - \frac{1}{3!}h^3u'''(x_0) + \dots \quad (74)$$

No entanto, as expansões (73) e (74) são válidas apenas se  $u(x)$  for suficientemente suave. Nesse sentido, a partir da expansão (73) pode-se calcular a aproximação adiantada (também conhecida como avançada ou para frente), ou seja, em  $D_+u(x_0)$  que é dado por:

$$\begin{aligned} D_+u(x_0) &\equiv \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} = \frac{[u(x_0) + hu'(x_0) + \frac{1}{2!}h^2u''(x_0) + \frac{1}{3!}h^3u'''(x_0) + \dots] - u(x_0)}{h} \\ &= u'(x_0) + \frac{1}{2!}hu''(x_0) + \frac{1}{3!}h^2u'''(x_0) + \dots \end{aligned} \quad (75)$$

onde  $x_0$  é um ponto fixo de modo que  $u''(x_0)$  e demais derivadas sejam além de dependentes de  $u(x_0)$ , constantes fixas independentes de  $h$ . Considerando que  $h$  seja suficientemente pequeno, os termos de ordem proporcionais a  $h^2$ ,  $h^3$ ,... podem ser desprezados, assim, o erro de truncamento local para a aproximação avançada é de ordem  $O(h^2)$  a qual o operador  $O$  representa a ordem de grandeza.

Como apresentado na subseção 2.4.1, no método das diferenças finitas discretiza-se o domínio em  $N$  pontos e, este erro na aproximação acumula-se  $N$  vezes. No caso da aproximação para frente considera-se um método de primeira ordem uma vez que o erro associado será de ordem  $O(h)$ . Em contrapartida, o erro de truncamento global por variar em função do espaçamento utilizado será proporcional a  $O(h^p)$ , onde  $p$  representa a ordem do método, assim,  $O(h^2)$ .

De maneira semelhante, para calcular a aproximação atrasada (ou para trás,  $D_-u(x_0)$ ) e centrada (ou central,  $D_0u(x_0)$ ), temos, respectivamente:

$$\begin{aligned} D_-u(x_0) &\equiv \frac{u(x_0) - u(x_0 - h)}{h} = \frac{u(x_0) - [u(x_0) - hu'(x_0) + \frac{1}{2!}h^2u''(x_0) - \frac{1}{3!}h^3u'''(x_0) + \dots]}{h} \\ &= u'(x_0) - \frac{1}{2!}hu''(x_0) + \frac{1}{3!}h^2u'''(x_0) + \dots, \end{aligned} \quad (76)$$

e

$$D_0u(x_0) \equiv \frac{u(x_0 + h) - u(x_0 - h)}{2h} = u'(x_0) + \frac{1}{3!}h^2u'''(x_0) + \dots \quad (77)$$

Percebe-se pela aproximação (77) que esta representa a média das duas aproximações unilaterais e que temos apenas termos de ordem par na expansão em Série de Taylor e, por consequência, as aproximações centradas possuam aproximação de ordem superior. Ainda sobre a aproximação central, o erro de truncamento local é de ordem  $O(h^3)$  e o erro global é de  $O(h^2)$ , sendo considerada uma aproximação de segunda ordem.

Ademais, existe uma restrição nas extremidades do domínio uma vez que no ponto inicial ( $x_0$ ) não existe um ponto anterior a este e, por isso não é possível utilizar a aproximação pelo método atrasado. Em contrapartida, no último ponto da malha ( $x_N$ ) não há um ponto sucessor, impossibilitando o uso do método avançado. Nesses casos, utiliza-se o método avançado para o ponto  $x_0$ , o método atrasado para o ponto  $x_N$  e o método central para os pontos internos da malha.

Para que possamos aproximá-la por diferenças finitas, podemos imaginar a aproximação  $u'(x_0)$  em um número finito de pontos próximos. Nesse sentido, a escolha acerca da aproximação será:

$$D_+u(x_0) \equiv \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h}. \quad (78)$$

Para algum  $h$  com valor pequeno. Esta aproximação parte da definição de derivada, uma vez que  $h \rightarrow 0$  na expressão (78):

$$u'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h}. \quad (79)$$

Nesse sentido, por meio da Figura 17 é possível averiguar as diferentes formas de aproximação para  $u'(x_0)$ .

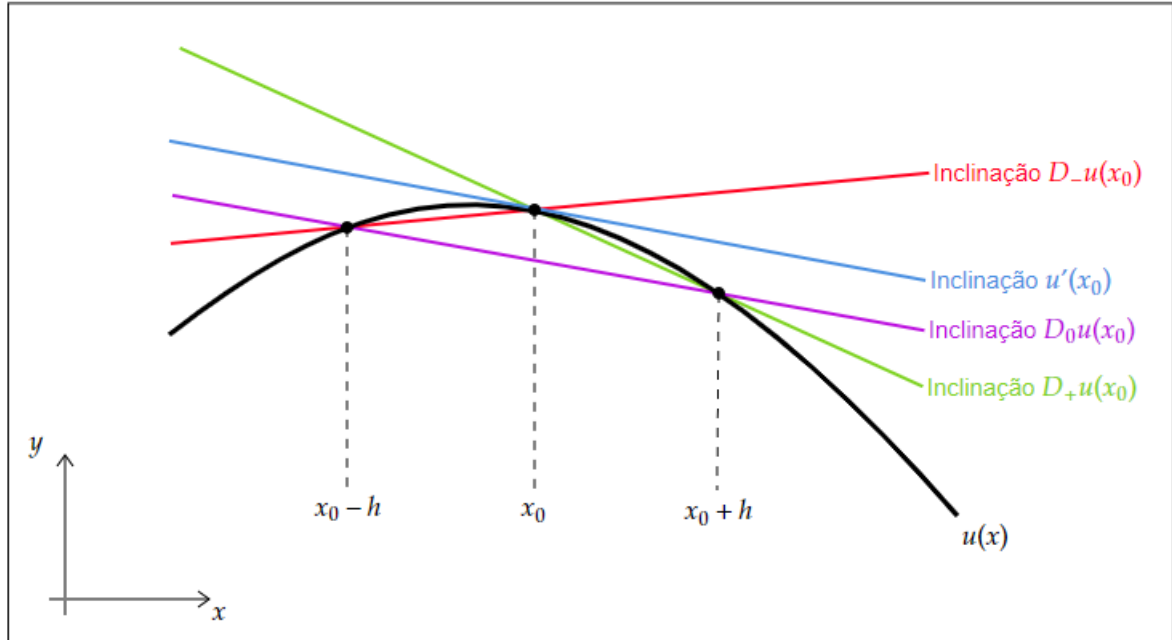


Figura 17: Aproximações para  $u'(x_0)$  interpretadas como a inclinação de linhas secantes

Fonte: Adaptado de LeVeque, (2005, p. 12)

### 4.3.1 Derivação das fórmulas

Para se obter uma melhor aproximação deve-se considerar o grau da derivada, ou seja, primeira e segunda derivada e, também, a ordem do erro (ordem de erro 2, 4, etc.). Quanto maior for a ordem do erro, melhor serão os resultados. Nesse sentido, abaixo encontram-se a derivação para aproximação centrada de primeira derivada e ordem de erro 2; e para a segunda derivada ordem de erro 2 e 4.

- Aproximação centrada padrão de segunda ordem para primeira derivada:

Considerando uma aproximação unilateral de  $u'(x)$  baseado em  $u(x_0 - h)$  e  $u(x_0 + h)$ , esta pode ser descrita como:

$$D_0(x_0) = a \cdot u(x_0 - h) + b \cdot u(x_0 + h). \quad (80)$$

Para determinar os coeficientes  $a$  e  $b$ , expandimos em série de Taylor a equação (80), resultando em:

$$\begin{aligned} D_0(x_0) = a \cdot & \left[ u(x_0) - hu'(x_0) + \frac{1}{2!}h^2u''(x_0) - \frac{1}{3!}h^3u'''(x_0) + \dots \right] \\ & + b \cdot \left[ u(x_0) + hu'(x_0) + \frac{1}{2!}h^2u''(x_0) + \frac{1}{3!}h^3u'''(x_0) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (81)$$

Agrupando os termos semelhantes da equação (81):

$$D_0(x_0) = (a+b)u(x_0) + (-a+b)hu'(x_0) + (a+b)\frac{1}{2!}h^2u''(x_0) + (-a+b)\frac{1}{3!}h^3u'''(x_0) + \dots \quad (82)$$

Desprezando os termos de ordem superior à  $h$ , por serem suficientemente pequenos, obtemos a seguinte relação:

$$D_0(x_0) = (a + b)u(x_0) + (-a + b)hu'(x_0). \quad (83)$$

Para encontrar os coeficientes, considera-se que os termos  $D_0(x_0) \approx u'(x_0)$  assim,

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ (-a + b)h = 1 \end{cases} \quad (84)$$

Resolvendo o sistema (84), os coeficientes obtidos são:

$$a = -\frac{1}{2h} \quad \text{e} \quad b = \frac{1}{2h}. \quad (85)$$

Com os valores encontrados em (85), substitui-se na expressão (83). Logo,

$$D_0(x_0) = \left(-\frac{1}{2h}\right) \cdot u(x_0 - h) + \left(\frac{1}{2h}\right) \cdot u(x_0 + h) = \frac{u(x_0 + h) - u(x_0 - h)}{2h}. \quad (86)$$

• Aproximação centrada padrão de segunda ordem para segunda derivada:  
Agora, considerando uma aproximação unilateral de  $u''(x)$  baseado em  $u(x_0 - h)$ ,  $u(x_0)$  e  $u(x_0 + h)$ , esta pode ser descrita da seguinte forma:

$$D^2(x_0) = a \cdot u(x_0 - h) + b \cdot u(x_0) + c \cdot u(x_0 + h). \quad (87)$$

De maneira semelhante a aproximação de segunda ordem para primeira derivada, para determinar os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$ , expandimos em série de Taylor a equação (87), tem-se:

$$\begin{aligned} D^2(x_0) = a \cdot \left[ u(x_0) - hu'(x_0) + \frac{1}{2!}h^2u''(x_0) - \frac{1}{3!}h^3u'''(x_0) + \dots \right] + b \cdot u(x_0) \\ + c \cdot \left[ u(x_0) + hu'(x_0) + \frac{1}{2!}h^2u''(x_0) + \frac{1}{3!}h^3u'''(x_0) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (88)$$

Agrupando os termos semelhantes (em  $u$ ,  $u'$ ,  $u''$ , etc.) da equação (88):

$$D^2(x_0) = (a + b + c)u(x_0) + (-a + c)hu'(x_0) + (a + c)\frac{1}{2!}h^2u''(x_0) + (-a + c)\frac{1}{3!}h^3u'''(x_0) + \dots \quad (89)$$

Desprezando os termos de ordem superior à  $h^3$ , por serem suficientemente pequenos:

$$D^2(x_0) = (a + b + c)u(x_0) + (-a + c)hu'(x_0) + (a + c)\frac{1}{2}h^2u''(x_0). \quad (90)$$

Para encontrar os coeficientes, considera-se que os termos  $D^2(x_0) \approx u''(x_0)$  assim,

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ (-a + c)h = 0 \\ \frac{1}{2}(a + c)h^2 = 1 \end{cases} \quad (91)$$

Resolvendo o sistema (91), os coeficientes valem:

$$a = \frac{1}{h^2}, \quad b = -\frac{2}{h^2} \quad \text{e} \quad c = \frac{1}{h^2}. \quad (92)$$

Com os valores encontrados em (92), substitui-se na expressão (90). Logo,

$$D^2(x_0) = \left(\frac{1}{h^2}\right) \cdot u(x_0 - h) + \left(-\frac{2}{h^2}\right) \cdot u(x_0) + \left(\frac{1}{h^2}\right) \cdot u(x_0 + h). \quad (93)$$

Agrupando os termos em uma única fração temos:

$$D^2(x_0) = \frac{u(x_0 + h) - 2u(x_0) + u(x_0 - h)}{h^2}. \quad (94)$$

• Aproximação centrada padrão de quarta ordem para segunda derivada:



Considerando uma aproximação unilateral de  $u''(x)$  baseado em  $u(x_0 - 2h)$ ,  $u(x_0 - h)$ ,  $u(x_0)$ ,  $u(x_0 + h)$  e  $u(x_0 + 2h)$  da forma:

$$D^2(x_0) = a \cdot u(x_0 - 2h) + b \cdot u(x_0 - h) + c \cdot u(x_0) + d \cdot u(x_0 + h) + e \cdot u(x_0 + 2h). \quad (95)$$

De maneira semelhante a aproximação de segunda ordem para segunda derivada, para determinar os coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  e  $e$  expandimos em série de Taylor a equação (95), resultando em:

$$\begin{aligned} D^2(x_0) = & a \cdot \left[ u(x_0) - (2h)u'(x_0) + \frac{1}{2!}(2h)^2u''(x_0) - \frac{1}{3!}(2h)^3u'''(x_0) + \dots \right] \\ & + b \cdot \left[ u(x_0) - hu'(x_0) + \frac{1}{2!}h^2u''(x_0) - \frac{1}{3!}h^3u'''(x_0) + \dots \right] + c \cdot u(x_0) \\ & + d \cdot \left[ u(x_0) + hu'(x_0) + \frac{1}{2!}h^2u''(x_0) + \frac{1}{3!}h^3u'''(x_0) + \dots \right] \\ & + e \cdot \left[ u(x_0) + (2h)u'(x_0) + \frac{1}{2!}(2h)^2u''(x_0) + \frac{1}{3!}(2h)^3u'''(x_0) + \dots \right]. \quad (96) \end{aligned}$$

Agrupando os termos semelhantes da equação (96) e desprezando os termos de ordem superior à  $h^5$ , por serem suficientemente pequenos, ficamos com:

$$\begin{aligned} D^2(x_0) = & (a + b + c + d + e)u(x_0) + (-2a - b + d + 2e)hu'(x_0) + (4a + b + d + 4e)\frac{1}{2}h^2u''(x_0) \\ & + (-8a - b + d + 8e)\frac{1}{6}h^3u'''(x_0) + (16a + b + d + 16e)\frac{1}{24}h^4u^{(4)}(x_0). \quad (97) \end{aligned}$$

Para encontrar os coeficientes, considera-se que os termos  $D^2(x_0) \approx u''(x_0)$  assim,

$$\begin{cases} a + b + c + d + e = 0 \\ (-2a - b + d + 2e)h = 0 \\ (4a + b + d + 4e)\frac{h^2}{2} = 1 \\ (-8a - b + d + 8e)\frac{h^3}{6} = 0 \\ (16a + b + d + 16e)\frac{h^4}{24} = 0 \end{cases} \quad (98)$$

Resolvendo o sistema (98), os coeficientes valem:

$$a = -\frac{1}{12h^2}, \quad b = \frac{4}{3h^2} \quad c = -\frac{5}{2h^2} \quad d = \frac{4}{3h^2} \quad e = -\frac{1}{12h^2}. \quad (99)$$

Com os valores encontrados em (99), substitui-se na expressão (97). Logo,

$$D^2(x_0) = \left( -\frac{1}{12h^2} \right) \cdot u(x_0 - 2h) + \left( \frac{4}{3h^2} \right) \cdot u(x_0 - h) + \left( -\frac{5}{2h^2} \right) \cdot u(x_0)$$

$$+ \left( \frac{4}{3h^2} \right) \cdot u(x_0 + h) + \left( -\frac{1}{12h^2} \right) \cdot u(x_0 + 2h). \quad (100)$$

Agrupando os termos em uma única fração temos:

$$D^2(x_0) = \frac{-u(x_0 - 2h) + 16u(x_0 - h) - 30u(x_0) + 16u(x_0 + h) - u(x_0 + 2h)}{12h^2}. \quad (101)$$

#### 4.3.2 Modelo unidimensional com coeficiente de difusividade térmica médio: aproximação de segunda ordem

A equação diferencial parcial que descreve o modelo em coordenadas cilíndricas, com o coeficiente de difusividade térmica do grão com valor médio, é dada pela Equação (71). No entanto, considera-se que não haja geração de energia no modelo matemático analisado ( $\dot{g} = 0$ ). E, além dessa consideração, por analisarmos somente a variação de altura ( $z$ ), não haverá variação nos ângulos e distância do raio referente ao centro do silo, de forma que seus valores serão zero. Sendo assim, as parcelas nulas podem ser desconsideradas quando destacada somente a variação na altura. Logo, a equação que descreve o modelo unidimensional, na direção vertical e transiente, é dada por:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad 0 < z < H_s, \quad t > 0. \quad (102)$$

As condições do problema são dadas por:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=H_s} = 0, \quad (103)$$

$$T(z,0) = F(z) = c_0 e^{c_1 z + c_2} + c_3, \quad (104)$$

onde  $T = T(z,t)$  é a temperatura dependente da altura do grão e do instante de tempo,  $H_s$  é a altura máxima dos grãos em metros e os coeficientes  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  dependem do experimento analisado por Stark (2018).

Para a solução do modelo apresentado, será utilizado o método explícito de diferenças finitas a qual utiliza derivada avançada no tempo e centrada no espaço. O método de diferenças finitas consiste na discretização do domínio em um número finito de pontos e de aproximações de derivadas parciais por quocientes de diferenças finitas.

Define-se as coordenadas  $z_i$  e  $t_j$ , para os índices  $i = 0, 1, \dots, n$  e  $j = 0, 1, \dots$ . Divide-se o intervalo  $[0, H_s]$  na direção vertical em  $n$  subintervalos de mesma medida ( $\Delta z = \frac{H_s}{n}$ ) e define-se a variação temporal dada por  $\Delta t > 0$ , suficientemente pequena.

Em cada ponto da malha são aproximadas por diferença finita centrada a derivada espacial e diferença finita adiantada a derivada temporal, que são dadas por:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z_i, t_j) \approx \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta z^2}, \quad (105)$$

e

$$\frac{\partial T}{\partial t}(z_i, t_j) \approx \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta t}, \quad (106)$$

onde foi utilizada a notação  $T_{i,j} = T(z_i, t_j)$ .

Substituindo as aproximações por diferenças finitas dadas pelas equações (105) e (106) na equação (102), ficamos com:

$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta t}. \quad (107)$$

Rearranjando os termos da equação (107), obtém-se:

$$T_{i,j+1} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta z^2} [T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}] + T_{i,j}, \quad (108)$$

ou simplesmente,

$$T_{i,j+1} = \lambda T_{i+1,j} + (1 - 2\lambda)T_{i,j} + \lambda T_{i-1,j}, \quad (109)$$

onde  $\lambda = \alpha(\Delta t / \Delta z^2)$ .

Transformando as condições de contorno dadas em (103) pelo método das diferenças finitas, temos:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{T_{0,j} - T_{-1,j}}{\Delta z} = 0 \quad \rightarrow \quad T_{0,j} = T_{-1,j}, \quad (110)$$

e

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=H_s} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{T_{n+1,j} - T_{n,j}}{\Delta z} = 0 \quad \rightarrow \quad T_{n+1,j} = T_{n,j}. \quad (111)$$

A partir das condições de contornos dadas em (110) e (111), podemos escrever um sistema de equações lineares que pode ser escrito na forma matricial:

$$T_{i,j+1} = A \cdot T_{i,j}, \quad (112)$$

onde

$$T_{i,j} = [T_{0,j} \quad T_{1,j} \quad \dots \quad T_{n,j}]^T, \quad (113)$$

e

$$A = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & 1 - 2\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 - 2\lambda & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & \lambda & 1 - \lambda \end{bmatrix}. \quad (114)$$

Através da condição inicial (104) obtemos:

$$T_{i,0} = \begin{bmatrix} c_0 e^{c_1 0 + c_2} + c_3 \\ c_0 e^{c_1 z + c_2} + c_3 \\ \vdots \\ c_0 e^{c_1 (n-1)z + c_2} + c_3 \\ c_0 e^{c_1 H_s + c_2} + c_3 \end{bmatrix}. \quad (115)$$

Assim, para obtermos as temperaturas em cada ponto de malha num instante  $t = (j + 1)\Delta t$ , devemos utilizar o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} T_{1,j+1} \\ T_{2,j+1} \\ \vdots \\ T_{n-1,j+1} \\ T_{n,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & 1 - 2\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 - 2\lambda & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & \lambda & 1 - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{1,j} \\ T_{2,j} \\ \vdots \\ T_{n-1,j} \\ T_{n,j} \end{bmatrix}. \quad (116)$$

#### 4.3.3 Modelo unidimensional com coeficiente de difusividade térmica médio: aproximação de quarta ordem

Na mesma perspectiva da abordagem por aproximação da derivada segunda, podemos melhorar a aproximação de segunda derivada (grau), utilizando uma aproximação com erro de ordem 4, ou seja,  $O(h^4)$ . Nesse sentido, utiliza-se a aproximação por diferenças finita centrada a derivada espacial e diferença finita adi-antada na derivada temporal, que são dadas por:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z_i, t_j) \approx \frac{-T_{i-2,j} + 16T_{i-1,j} - 30T_{i,j} + 16T_{i+1,j} - T_{i+2,j}}{12\Delta z^2}, \quad (117)$$

e

$$\frac{\partial T}{\partial t}(z_i, t_j) \approx \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta t}, \quad (118)$$

onde foi utilizada a notação  $T_{i,j} = T(z_i, t_j)$ .

Substituindo as aproximações por diferenças finitas dadas pelas equações (117) e (118) na equação (102), ficamos com:

$$\frac{-T_{i-2,j} + 16T_{i-1,j} - 30T_{i,j} + 16T_{i+1,j} - T_{i+2,j}}{12\Delta z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta t}. \quad (119)$$

Rearranjando os termos da equação (119), obtemos:

$$T_{i,j+1} = \frac{\alpha \Delta t}{12\Delta z^2} [-T_{i-2,j} + 16T_{i-1,j} - 30T_{i,j} + 16T_{i+1,j} - T_{i+2,j}] + T_{i,j}, \quad (120)$$

ou simplesmente,

$$T_{i,j+1} = -\lambda T_{i-2,j} + 16\lambda T_{i-1,j} + (1 - 30\lambda)T_{i,j} + 16\lambda T_{i+1,j} - \lambda T_{i+2,j}, \quad (121)$$

onde  $\lambda = \alpha(\Delta t/12\Delta z^2)$ .

A partir das condições de contornos dadas em (110) e (111), podemos escrever um sistema de equações lineares que pode ser escrito na forma matricial:

$$T_{i,j+1} = A \cdot T_{i,j}, \quad (122)$$

o qual resulta em:

$$\begin{bmatrix} T_{1,j+1} \\ T_{2,j+1} \\ \vdots \\ T_{n-1,j+1} \\ T_{n,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 15\lambda & 16\lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 15\lambda & 1 - 30\lambda & 16\lambda & -\lambda & \dots & 0 \\ -\lambda & 16\lambda & 1 - 30\lambda & 16\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & 15\lambda \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda & 16\lambda & 1 - 15\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{1,j} \\ T_{2,j} \\ \vdots \\ T_{n-1,j} \\ T_{n,j} \end{bmatrix}. \quad (123)$$

#### 4.3.4 Modelo unidimensional com coeficiente de difusividade térmica variável: aproximação de segunda ordem

A equação diferencial parcial que descreve o modelo é dada pela Equação (72). No entanto, considera-se que não haja geração de energia no modelo matemático analisado ( $\dot{g} = 0$ ). Logo ficamos com:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r\alpha \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \alpha \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \alpha \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (124)$$

É importante destacar que para um modelo unidimensional, na direção vertical, e dependente do tempo a equação diferencial parcial é dada por

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \alpha \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad 0 < z < H_s, \quad t > 0. \quad (125)$$

As condições de contorno na direção vertical ( $z$ ) são dadas em (103) a qual considera que o topo e a base do silo são isotérmicos, ou seja, não há fluxo de calor nas extremidades. Já a condição inicial do problema é dada por (104).

Considerando o coeficiente de difusividade térmica do grão ( $\alpha$ ) seja variável, dado em (8), desconsidera-se o termo de interação entre a umidade e a temperatura do grão (pelo fato do termo resultar em  $1,17 \cdot 10^{-11}XT$ , suficientemente pequeno, e, também, ter pouca influência nos dados utilizados para a simulação do trabalho), ficamos com:

$$\alpha(T,X) = (0,63 + 5,63 \cdot 10^{-2}X + 1,51 \cdot 10^{-2}T) \cdot 10^{-7}. \quad (126)$$

Além disso, a derivada parcial na direção vertical é dada por:

$$\frac{\partial \alpha(T, X)}{\partial z} = 1,51 \cdot 10^{-9} \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (127)$$

Expandindo a derivada do lado esquerdo da equação (125), ficamos com:

$$\frac{\partial \alpha(T, X)}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} + \alpha(T, X) \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (128)$$

no dado experimental o teor de umidade ( $X$ ) se manteve aproximadamente 13,7% b.u. (STARK, 2018).

Para a solução do modelo apresentado, será utilizado o método explícito de diferenças finitas. Para tal, o intervalo  $[0, H_s]$  é dividido na direção vertical em  $n$  subintervalos de mesma medida ( $\Delta z = \frac{H_s}{n}$ ). Definido o tamanho do passo temporal  $\Delta t > 0$ , os pontos  $(z_i, t_j)$  da malha de discretização do domínio do problema são definidos por

$$z_i = i\Delta z \quad \text{e} \quad t_j = j\Delta t, \quad (129)$$

para cada  $i = 0, 1, \dots, n$  e  $j = 0, 1, \dots$ , como ilustrado na Figura 18.

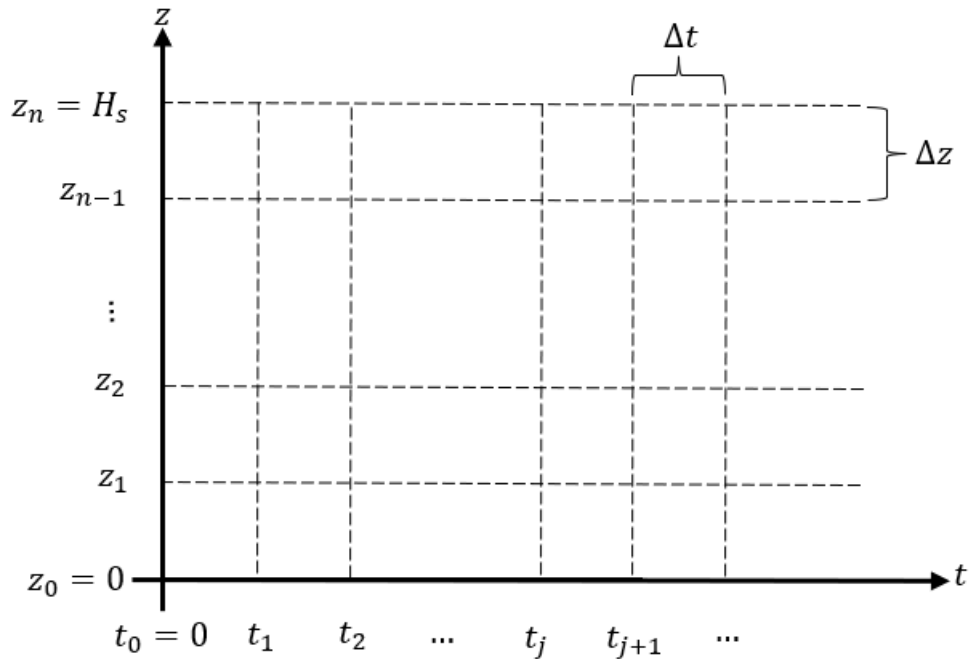


Figura 18: Discretização do domínio do problema unidimensional  $T(z, t)$

Fonte: Do autor

Em cada ponto da malha são aproximadas por diferença centrada para as derivadas espaciais e diferença adiantada para derivada temporal, que são dadas por:

$$\frac{\partial T}{\partial z}(z_i, t_j) \approx \frac{T_{i+1, j} - T_{i-1, j}}{2\Delta z}, \quad (130)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z_i, t_j) \approx \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta z^2}, \quad (131)$$

e

$$\frac{\partial T}{\partial t}(z_i, t_j) \approx \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta t}. \quad (132)$$

A partir das aproximações por diferenças finitas, dadas pelas equações (130), (131) e (132), a equação diferencial parcial dada em (128) no ponto  $(z_i, t_j)$  ficamos com

$$\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta t} = 1,51 \cdot 10^{-9} \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2\Delta z} \cdot \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2\Delta z} + \alpha(T_{i,j}, X) \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta z^2}. \quad (133)$$

Rearranjando os termos da equação (133), obtém-se

$$T_{i,j+1} = \frac{\Delta t}{\Delta z^2} \left[ \frac{1,51 \cdot 10^{-9}}{4} (T_{i+1,j} - T_{i-1,j})^2 + \alpha(T_{i,j}, X) (T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}) \right] + T_{i,j}. \quad (134)$$

Transformando as condições de contorno dadas em (103) pelo método das diferenças finitas, para cada  $j = 0, 1, \dots$ , ficamos com

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{T_{0+1,j} - T_{0-1,j}}{2\Delta z} = 0 \quad \rightarrow \quad T_{-1,j} = T_{1,j}, \quad (135)$$

e

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=H_s} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{T_{n+1,j} - T_{n-1,j}}{2\Delta z} = 0 \quad \rightarrow \quad T_{n+1,j} = T_{n-1,j}. \quad (136)$$

De forma semelhante, a condição inicial dada em (104) é:

$$T(z, 0) = F(z) \quad \rightarrow \quad T_{i,0} = F(z_i), \quad \rightarrow \quad (i = 0, 1, \dots, m). \quad (137)$$

As equações que definem o método das diferenças finitas explícito são: (134)-(136). Isso significa que os termos  $T_{i,j+1}$  são determinados por tais equações, para cada  $j = 0, 1, \dots$ , a qual as temperaturas  $T_{i,j}$  são conhecidas de interações anteriores.

#### 4.3.5 Modelo bidimensional com coeficiente de difusividade térmica variável: aproximação de segunda ordem

O modelo bidimensional, na direção radial e vertical, e dependente do tempo parte da equação diferencial parcial é dado por

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \alpha r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \alpha \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad 0 < r < R_s, \quad 0 < z < H_s, \quad t > 0, \quad (138)$$

onde  $T = T(r, z, t)$  é a temperatura dependente da coordenada radial ( $r$ ) e vertical ( $z$ ) no instante  $t$ .

As condições de contorno na direção vertical ( $z$ ) são dadas em (103) a qual considera que o topo e a base do silo são isotérmicos, ou seja, iguais a zero. No entanto, na direção radial, se admite que a temperatura interna seja limitada e que a temperatura nas laterais do silo seja constante e igual à temperatura ambiente ( $T_{amb}$  em  $^{\circ}C$ ). Algebricamente, as condições na direção radial são

$$T(r \rightarrow 0, z, t) \leq M, \quad M \in \mathbb{R}, \quad (139)$$

e

$$T(R_s, z, t) = T_{amb}. \quad (140)$$

De forma semelhante, a condição inicial dada em (104) é:

$$T(r, z, 0) = F(z) = c_0 e^{c_1 z + c_2} + c_3. \quad (141)$$

Expandindo as derivadas parciais espaciais da equação (138) por meio da regra do produto, obtemos:

$$\left( \frac{1}{r} \alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right) \frac{\partial T}{\partial r} + \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} + \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (142)$$

cuja derivada parcial na direção vertical é dada pela equação (127) e a derivada parcial na direção radial é dada por:

$$\frac{\partial \alpha(T, X)}{\partial r} = 1,51 \cdot 10^{-9} \frac{\partial T}{\partial r}. \quad (143)$$

Para a solução do modelo bidimensional apresentado, será utilizado o método explícito de diferenças finitas. De modo semelhante ao modelo unidimensional, no modelo bidimensional divide-se o intervalo radial  $[0, R_s]$  em  $m$  subintervalos de mesma medida ( $\Delta r = \frac{R_s}{m}$ ) e no intervalo vertical  $[0, H_s]$  em  $n$  subintervalos de mesma medida ( $\Delta z = \frac{H_s}{n}$ ). Define-se o tamanho do passo temporal  $\Delta t > 0$ , a qual os pontos  $(r_i, z_j)$  da malha e o instante  $t_k$  são definidos como:

$$r_i = i \Delta r, \quad z_j = j \Delta z \quad \text{e} \quad t_k = k \Delta t, \quad (144)$$

para cada  $i = 0, 1, \dots, m$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$  e  $k = 0, 1, \dots$ , como é ilustrada na Figura 19.



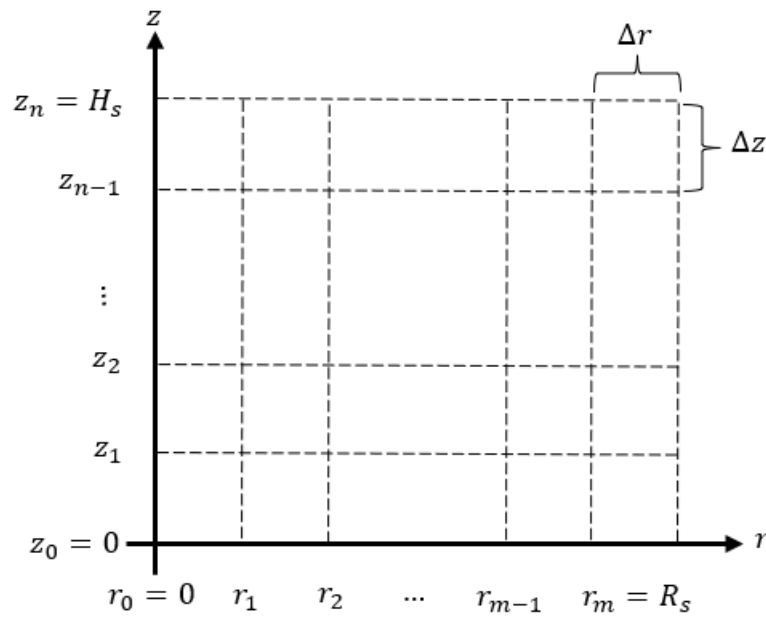


Figura 19: Discretização do domínio do problema bidimensional  $T(r,z,t)$   
Fonte: Do autor

A Figura 19 representa a discretização do domínio do problema bidimensional, nas direções radial e vertical, para cada instante  $t_k$  fixo.

Em cada ponto da malha  $(r_i, z_j)$  e para cada instante  $t_k$ , estima-se por diferença centrada para as derivadas espaciais e radial e por diferença adiantada para a derivada temporal que são dadas por:

$$\frac{\partial T}{\partial r}(r_i, z_j, t_k) \approx \frac{T_{i+1,j,k} - T_{i-1,j,k}}{2\Delta r}, \quad (145)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}(r_i, z_j, t_k) \approx \frac{T_{i+1,j,k} - 2T_{i,j,k} + T_{i-1,j,k}}{\Delta r^2}, \quad (146)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}(r_i, z_j, t_k) \approx \frac{T_{i,j+1,k} - T_{i,j-1,k}}{2\Delta z}, \quad (147)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(r_i, z_j, t_k) \approx \frac{T_{i,j+1,k} - 2T_{i,j,k} + T_{i,j-1,k}}{\Delta z^2}, \quad (148)$$

e

$$\frac{\partial T}{\partial t}(r_i, z_j, t_k) \approx \frac{T_{i,j,k+1} - T_{i,j,k}}{\Delta t}. \quad (149)$$

A partir das aproximações por diferenças finitas dadas pelas equações (145)-(149), a equação diferencial parcial dada em (142) no ponto  $(r_i, z_j, t_k)$ , agrupando os termos semelhantes, torna-se:

$$T_{i,j,k+1} = \frac{\Delta t}{\Delta r^2} \left( \frac{\Delta r}{2r_i} \alpha(T_{i,j,k}, X) + 1,51 \cdot 10^{-9} \frac{T_{i+1,j,k} - T_{i-1,j,k}}{4} \right) (T_{i+1,j,k} - T_{i-1,j,k})$$

$$+ \frac{\Delta t}{\Delta r^2} \alpha(T_{i,j,k}, X) (T_{i+1,j,k} - 2T_{i,j,k} + T_{i-1,j,k}) + 1,51 \cdot 10^{-9} \frac{\Delta t}{4\Delta z^2} (T_{i,j+1,k} - T_{i,j-1,k})^2$$

$$+ \frac{\Delta t}{\Delta z^2} \alpha(T_{i,j,k}, X)(T_{i,j+1,k} - 2T_{i,j,k} + T_{i,j-1,k}) + T_{i,j,k}. \quad (150)$$

Transformando as condições de contorno vertical, para cada  $i = 0, 1, \dots, m$  e  $k = 0, 1, \dots$ , e radial, para cada  $j = 0, 1, \dots, n$  e  $k = 0, 1, \dots$ , pelo método das diferenças finitas, ficamos com:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \rightarrow \frac{T_{i,0+1,k} - T_{i,0-1,k}}{\Delta z} = 0 \rightarrow T_{i,-1,k} = T_{i,1,k}, \quad (151)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=H_s} = 0 \rightarrow \frac{T_{i,n+1,k} - T_{i,n-1,k}}{\Delta z} = 0 \rightarrow T_{i,n+1,k} = T_{i,n-1,k}, \quad (152)$$

e

$$T(R_s, z, t) = T_{amb} \rightarrow T_{m,j,k} = T_{amb}. \quad (153)$$

Contudo, a Equação (142) é inválida quando considera-se o centro do silo ( $r = 0$ ). Nota-se também que pela condição de simetria do sistema de coordenadas faz-se necessário que a temperatura atinja um valor crítico quando  $r \rightarrow 0$  e, por consequência,  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial T}{\partial r} = 0$ , ou simplesmente, pela aproximação de diferenças centrada:

$$\frac{T_{0+1,j,k} - T_{0-1,j,k}}{2\Delta r} = 0 \rightarrow T_{-1,j,k} = T_{1,j,k}. \quad (154)$$

Pela regra de L'Hôpital, temos:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}. \quad (155)$$

Logo, quando  $r \rightarrow 0$  a equação diferencial parcial (142) passa a ser:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} + 2\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} + \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (156)$$

Substituindo na equação (156) as aproximações dadas em (146)-(149) e (154), temos:

$$T_{0,j,k+1} = 2 \frac{\Delta t}{\Delta r^2} \alpha(T_{0,j,k})(T_{1,j,k} - T_{0,j,k}) + 1,51 \cdot 10^{-9} \frac{\Delta t}{4\Delta z^2} (T_{0,j+1,k} - T_{0,j-1,k})^2 + \frac{\Delta t}{\Delta z^2} \alpha(T_{0,j,k}, X)(T_{0,j+1,k} - 2T_{0,j,k} + T_{0,j-1,k}) + T_{0,j,k}. \quad (157)$$

De forma semelhante, a condição inicial dada em (141) é:

$$T(r, z, 0) = F(z) \rightarrow T_{i,j,0} = F(z_i), \rightarrow (i = 0, 1, \dots, m, \quad j = 0, 1, \dots, n). \quad (158)$$

Para cada  $k = 0, 1, \dots$  os termos  $T_{i,j,k+1}$  são determinados por operações algébricas, a qual as temperaturas  $T_{i,j,k}$  são conhecidas de interações anteriores. Quando  $i \neq 0$  a iteração anterior parte de (150) e se  $i = 0$  a iteração parte de (157).

## 4.4 Complementos matemáticos

### 4.4.1 Consistência, convergência e estabilidade

A partir das soluções numéricas encontradas, nas últimas seções deste capítulo, faz-se necessário analisar as propriedades do tipo consistência, convergência e estabilidade do método, pois essas propriedades possuem relação entre a solução numérica e as funções dos erros envolvidos. Nesse sentido, segundo Nascimento (2013):

- **Consistência:**

Uma equação de diferenças finitas é dita consistente quando a diferença entre as duas equações diferenciais (erro de truncamento) tende a zero quando o tamanho do maior elemento da malha de discretização tende a zero, ou seja,  $\Delta z \rightarrow 0$ ,  $\Delta r \rightarrow 0$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$ . Em outras palavras, é quando as aproximações por diferenças finitas tornam-se equivalentes às equações diferenciais originais.

- **Estabilidade:**

Diz-se que uma solução numérica é estável se os erros ou perturbações produzidas na solução não provocam um aumento ou diminuição dos erros à medida que os cálculos avançam. Além disso, pode-se evitar o acúmulo de erros se houver uma restrição quanto ao tamanho da malha utilizada na discretização, sendo este intervalo de tamanho chamado de região de estabilidade.

- **Convergência:**

É dito convergente o método pelo qual a solução das equações discretizadas se aproximam da solução exata da equação diferencial quando a distância entre os pontos da malha tende a zero. Nessa perspectiva, quando se tem um problema linear de valor inicial bem posto, se a aproximação é consistente, a estabilidade do método numérico é considerada uma condição necessária e suficiente para a convergência. Logo,

Consistência + Estabilidade  $\rightarrow$  Convergência

### 4.4.2 Índices estatísticos

A fim de validar e comparar os dados preditos ( $T_p$ ) e os dados observados ( $T_o$ ) (dados da literatura) faz-se necessário uma análise estatística desenvolvido por Hanna (1989). Nesse sentido, os índices estatísticos são definidos por:

- **Erro quadrático médio normalizado (NMSE):**

É dado por:

$$NMSE = \frac{\overline{(T_o - T_p)^2}}{\overline{T_o T_p}} \quad (159)$$

Este índice informa sobre todos os desvios entre temperatura observada no experimento e as temperaturas obtidas pelo método (temperatura predita). É uma medida

adimensional e seu valor deve ser o menor possível para ser considerado um bom modelo.

- Coeficiente de correlação (COR):

É dado por:

$$COR = \frac{(\overline{T_o} - \overline{T_p})(\overline{T_p} - \overline{T_o})}{\sigma_o \sigma_p} \quad (160)$$

Este descreve o grau de associação ou concordância entre as variáveis. Para ser considerado com boa performance seu valor deve ser 1.

- Fração de inclinação (FB):

É dado por:

$$FB = \frac{\overline{T_o} - \overline{T_p}}{0,5(\overline{T_o} + \overline{T_p})} \quad (161)$$

Este indica a tendência do modelo de superestimar ou subestimar as temperaturas observadas. O valor ótimo é zero.

- Desvio fracional padrão (FS):

É dado por:

$$FS = 2 \frac{\sigma_o - \sigma_p}{\sigma_o + \sigma_p} \quad (162)$$

Este índice indica a dispersão dos dados observados. O valor pelo qual é considerado ótimo é zero.

- Fator de cinco (FA5):

É dado por:

$$FA5 = 0,2 \leq \frac{T_p}{T_o} \leq 5 \quad (163)$$

Este é uma fração dos dados a qual encontra-se entre 0,2 e 5. O valor considerado ótimo deve ser próximo a 1.

A qual os símbolos  $T$  e  $\sigma$  representam, respectivamente, temperatura e desvio padrão das temperaturas e, os índices  $p$  e  $o$  representam, respectivamente, predito (valor dado pelo modelo de diferenças finitas) e observado (valor encontrado no modelo da literatura).

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo encontram-se os índices estatísticos, os dados observados por Stark (2018), os resultados analíticos fornecidos por Santos (2020) e os resultados numéricos obtidos a partir das soluções dos modelos unidimensional e bidimensional, considerando o coeficiente de difusividade térmica médio e variável, e, além disso, encontra-se a comparação entre os modelos unidimensionais a qual considera a aproximação de ordem de erro 2 e 4.

A implementação computacional, de ambas soluções encontradas, foram realizadas através da plataforma *Google Colab* que possui como código fonte a linguagem python.

### 5.1 Consistência, convergência e estabilidade das soluções numéricas

Segundo Chapra e Canale (2011) o método explícito das diferenças finitas será tanto convergente quanto estável, para o modelo unidimensional, se  $\lambda \leq 1/2$ . Relatam ainda que quando  $\lambda \leq 1/2$  a solução resultará em erros que não crescem, mas oscilam, se  $\lambda \leq 1/4$  a garantia que a solução não oscilará e, em contrapartida, se tomar  $\lambda = 1/6$ , a solução tenderá a minimizar o erro de truncamento.

Os autores supracitados estabelecem que se  $\lambda \leq 1/4$  a malha será uniforme quando considera-se o modelo bidimensional. Considera-se para uma dimensão,  $\lambda = \alpha\Delta t/(\Delta z)^2$  e, para duas dimensões,  $\lambda = \alpha\Delta t/[(\Delta z)^2 + (\Delta r)^2]$  onde  $\Delta z = \Delta r$ .

Nesse sentido, na Tabela 5 encontram-se alguns cenários para os valores de  $\lambda$  (próximos a 1/6, 1/4 e 1/2), para o modelo unidimensional com difusividade térmica médio, para os três sensores do cabo 1, considerando 650 subdivisões para  $n$ . Encontra-se também na tabela o valor da temperatura predita (pelo MDF) e a temperatura observada, além do erro relativo percentual. Nota-se que para o  $\lambda \approx 1/6$  a solução está muito próxima da observada e com erros pequenos.

Cenário	Lambda*	$m$	Posição dos sensores	$T_p(^{\circ}C)$	$T_o(^{\circ}C)$	Erro relativo percentual
A	0,16846	95000	0,01m	30,648074	30,627413	0,0675%
B	0,23535	68000	0,01m	30,648242	30,627413	0,0680%
C	0,48496	33000	0,01m	30,648274	30,627413	0,0681%
A	0,16846	95000	0,23m	24,431016	24,431019	-1,08e-05%
B	0,23535	68000	0,23m	24,431004	24,431019	-6,06e-05%
C	0,48496	33000	0,23m	24,430996	24,431019	-9,43e-05%
A	0,16846	95000	0,56m	22,802816	22,802816	-3,43e-07%
B	0,23535	68000	0,56m	22,802815	22,802816	-5,29e-06%
C	0,48496	33000	0,56m	22,802814	22,802816	-8,77e-06%

\* Valor aproximado; A - Menor erro de truncamento; B - Estável e convergente, sem oscilação; C - Estável e convergente, erros não crescem, mas oscilam.

Tabela 5: Cenários para valores diferentes de  $m$  e erro relativo percentual no cabo 1  
Fonte: Do autor

## 5.2 Modelo unidimensional com difusividade térmica médio e variável

Para a implementação computacional das soluções dos modelos unidimensionais, utilizamos os valores de  $n = 650$  (direção vertical),  $m = 95000$  (direção temporal),  $\Delta z = H_s/n = 0,001$  metros e  $\Delta t = 24h/m = 0,015$  minutos. Temos, para o modelo unidimensional com difusividade térmica médio com erro de ordem 2,  $\lambda \simeq 0,16846$ , já para erro de ordem 4 (valor médio)  $\lambda \simeq 0,01404$  e, para a difusividade térmica variável,  $\lambda \simeq 0,17276$ . Tais valores implicam que os modelos unidimensionais são convergentes e estáveis, com tendência a minimizar o erro de truncamento.

As Figuras 20, 21 e 22 apresentam a comparação entre a aproximação de ordem 2 e ordem 4, considerando o coeficiente de difusividade térmico médio, nos cabos 1, 2 e 3, respectivamente. Além disso, nas Figuras mencionadas, encontram-se a distribuição da temperatura ao longo do tempo para a temperatura predita com aproximação de segunda ordem: linha em ciano, temperatura predita com aproximação de quarta ordem: traço e ponto preto, temperatura obtida por um modelo analítico (SANTOS, 2020): tracejado magenta, e temperatura observada: pontos verdes.

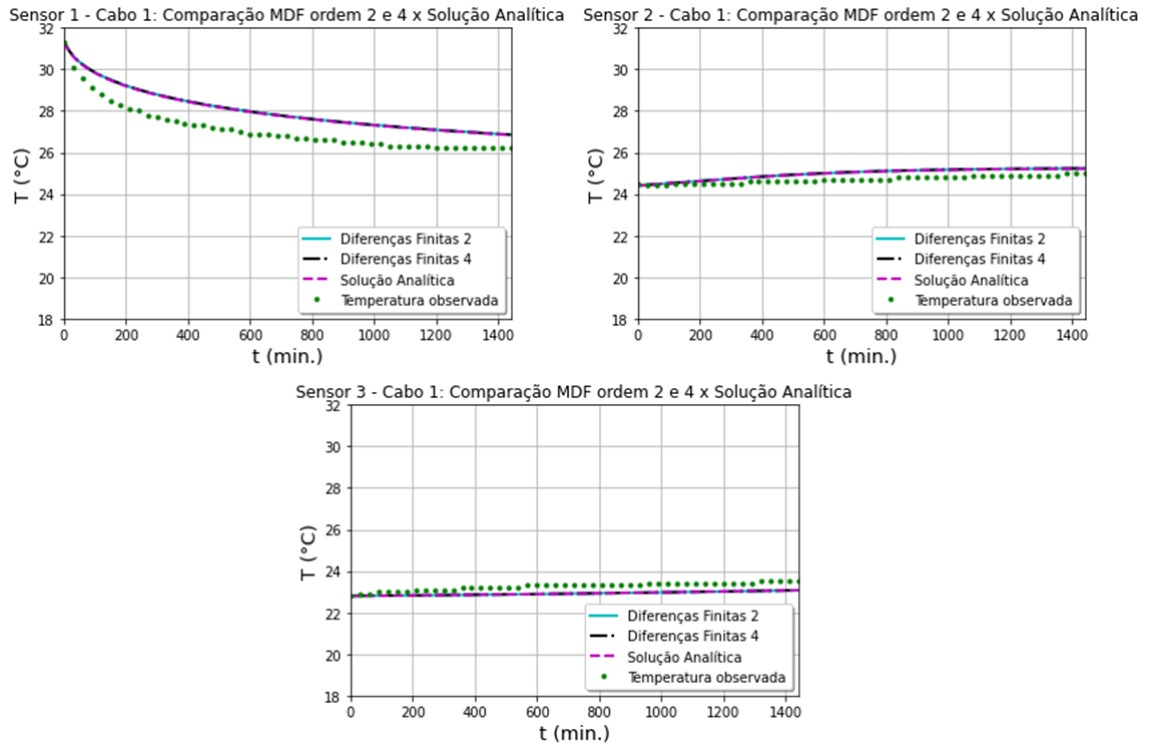


Figura 20: Comparação entre as aproximações de segunda e quarta ordem para o modelo unidimensional com difusividade térmica com valor médio: Cabo 1

Fonte: Do autor

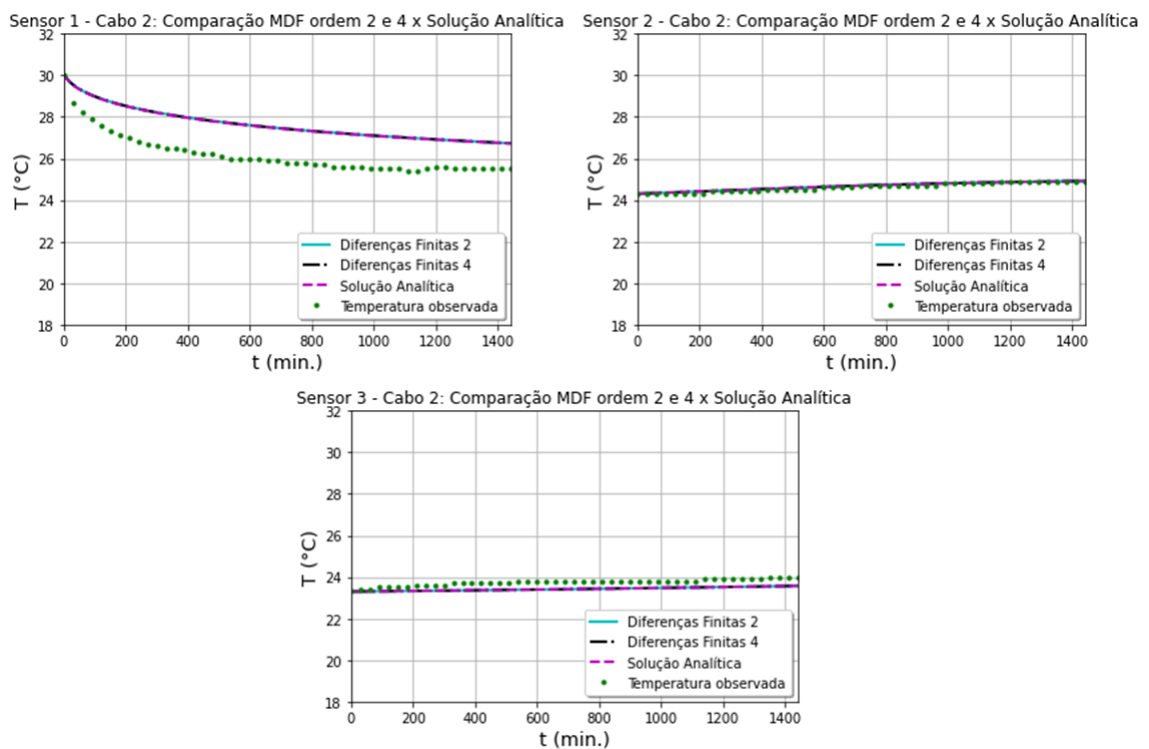


Figura 21: Comparação entre as aproximações de segunda e quarta ordem para o modelo unidimensional com difusividade térmica com valor médio: Cabo 2

Fonte: Do autor

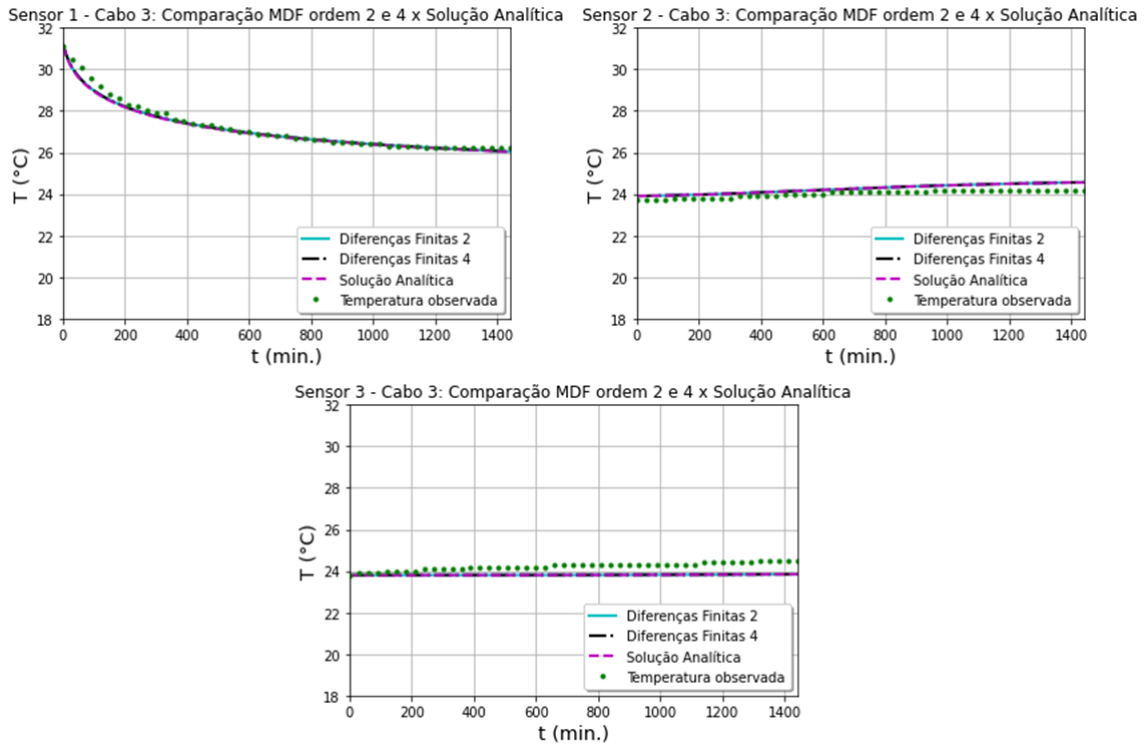


Figura 22: Comparação entre as aproximações de segunda e quarta ordem para o modelo unidimensional com difusividade térmica com valor médio: Cabo 3

Fonte: Do autor

Nota-se por meio dos gráficos que para os sensores 2 e 3, nos cabos 1, 2 e 3, as temperaturas previstas e analítica são bastante semelhantes entre si e, também, não há diferenças significativas com a temperatura observada. O mesmo ocorre no sensor 1, no cabo 3. No entanto, apesar das temperaturas previstas e analíticas serem semelhantes, no sensor 1 dos cabos 1 e 2 há uma maior discrepância com a temperatura observada. Além disso, é nítido que, para o modelo unidimensional com difusividade térmica com valor médio, a ordem do erro não apresenta mudanças consideráveis e, diante disso, será considerado apenas aproximação de segunda ordem para as próximas simulações.

Nas Figuras 23, 24 e 25 apresentam a comparação entre a temperatura prevista com a difusividade térmica variável: linha em ciano, temperatura analítica: tracejado magenta, e temperatura observada: pontos verdes nos três sensores dos cabos 1, 2 e 3, respectivamente. Cabe ressaltar que, quando considera-se difusividade térmica variável com temperatura e umidade, não é possível analisar a solução analítica e, para fins comparativos será considerado os valores encontrados para o valor médio.



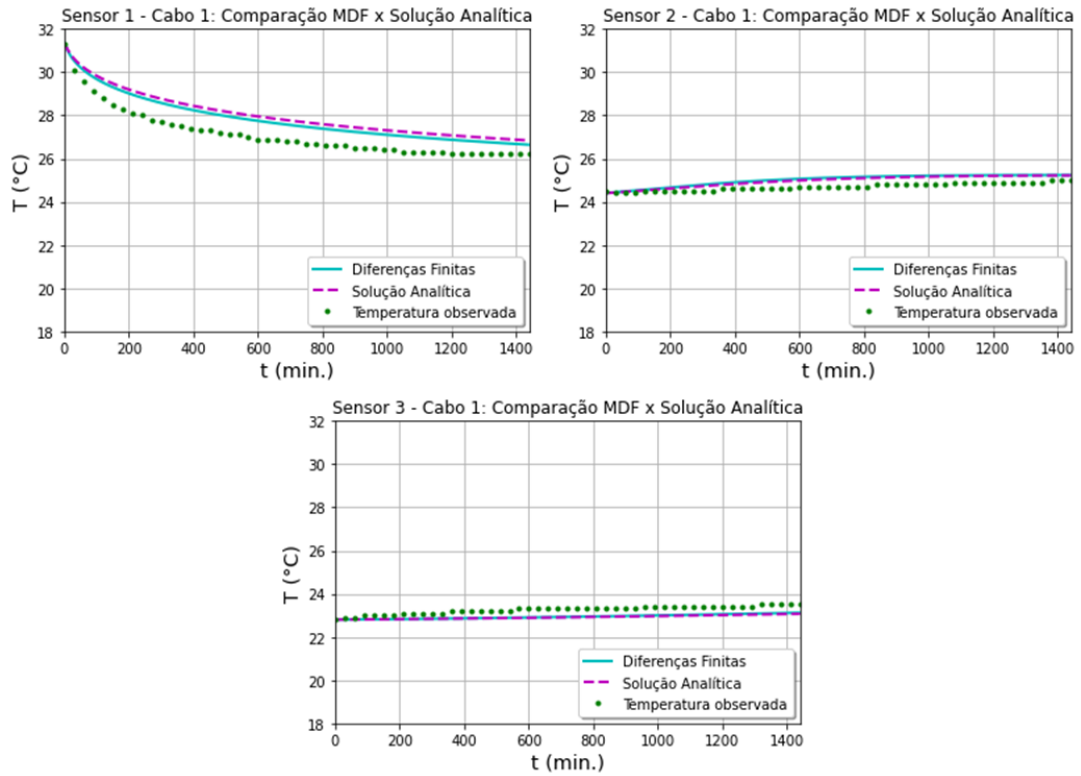


Figura 23: Modelo unidimensional com difusividade térmica variável: Cabo 1

Fonte: Do autor

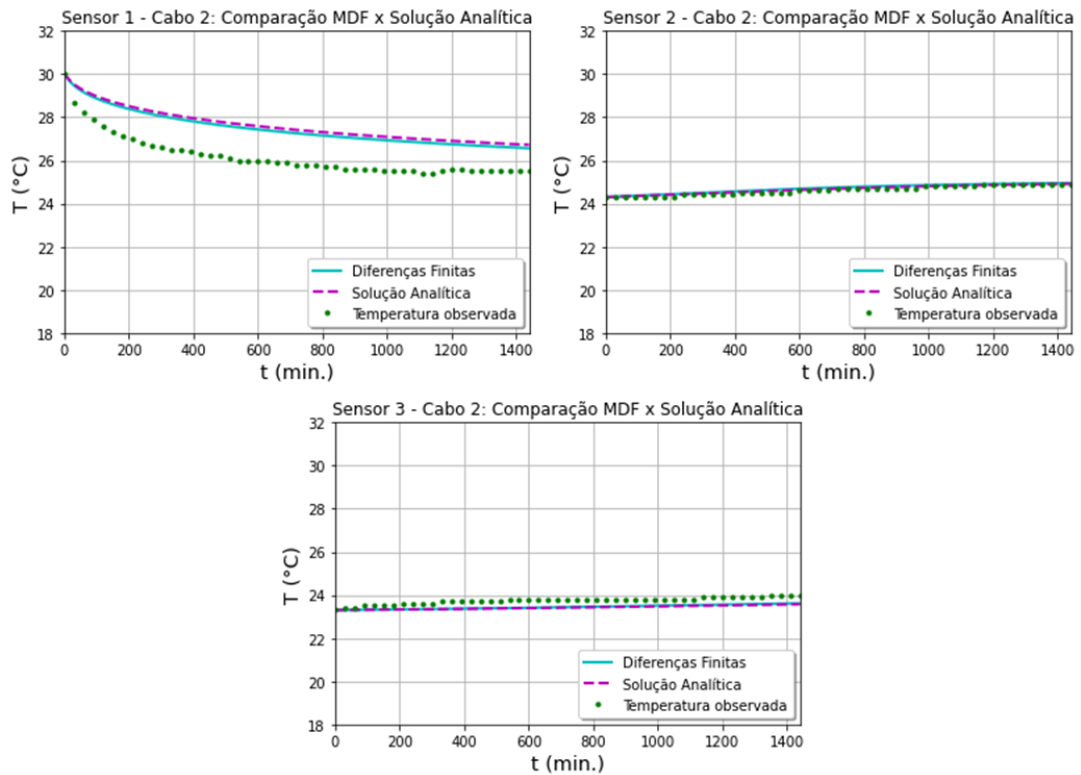


Figura 24: Modelo unidimensional com difusividade térmica variável: Cabo 2

Fonte: Do autor

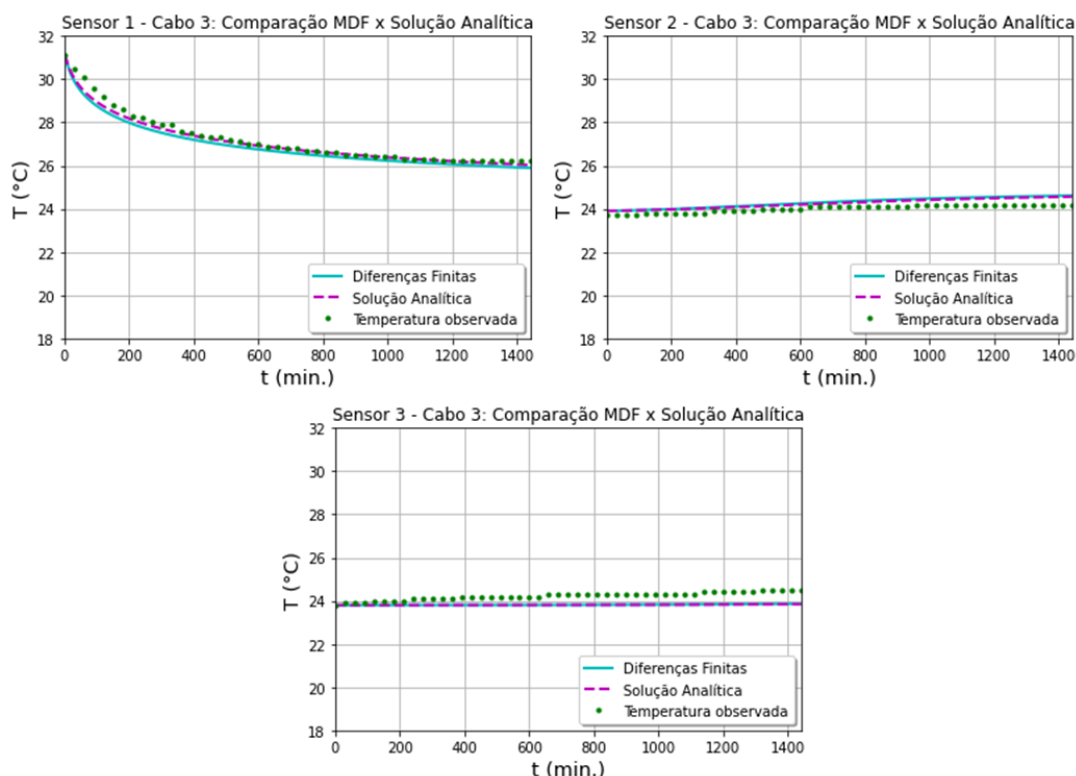


Figura 25: Modelo unidimensional com difusividade térmica variável: Cabo 3  
Fonte: Do autor

Nota-se por meio dos gráficos que para os sensores 2 e 3 de ambos os cabos, as temperaturas preditas e analítica são bastante semelhantes entre si e, também, não há diferenças expressivas com a temperatura observada. No sensor 1 dos cabos 1 e 2 há uma pequena melhora quando considera-se o modelo variável (em relação ao modelo com difusividade térmica média) e, apesar de haver uma melhora no método abordado, ainda há uma discrepância da temperatura predita com a temperatura observada.

De modo geral, as soluções numéricas encontradas descrevem o processo físico de transferência de calor que ocorre no interior do silo uma vez que, fisicamente falando, a camada com maior temperatura (sensor 1) cede calor as camadas com menor temperatura (sensor 2 e 3) com o passar do tempo, entrando em equilíbrio térmico em todo sistema. Isso ocorre devido as correntes de convecção criadas pela diferença de temperatura que tendem a estabilizar o sistema pois, como mencionado na seção 4.1, os grãos foram submetidos ao processo de aeração para então vedarem suas passagens de ar. Ademais, o modelo variável possui melhor aproximação com a temperatura observada devido ao fato de abordarmos a difusividade térmica do grão variável com a temperatura e umidade.

Outro ponto a se analisar é a relação entre os dados observados e as temperaturas preditas. A partir do diagrama de dispersão, podemos verificar a relação entre as duas

grandezas (MONTGOMERY; RUNGER, 2009). A equação que relaciona tais dados, é dada pela reta de regressão:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x \quad (164)$$

onde  $y$  representa a variável dependente,  $x$  a variável independente,  $\beta_0$  é a constante de regressão e  $\beta_1$  é a inclinação da reta.

Além disso, por meio do diagrama de dispersão podemos aferir a correlação entre os dados, em outras palavras, medimos o grau de associação ou anti-associação entre as duas variáveis, variando de -1 a 1, na qual o sinal positivo corresponde a uma reta de inclinação descendente, e o sinal negativo indica uma reta de inclinação ascendente (CORREA, 2003). Quanto mais próximo a 1 ou -1 mais forte será a correlação entre os dados observados e os preditos. Nesse sentido, o coeficiente de correlação é dado por:

$$R = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{\sqrt{[n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2] \cdot [n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2]}} \quad (165)$$

Outro ponto a ser analisado é o coeficiente de determinação ( $R^2$ ). Este é um ajuste do modelo de correlação a qual reflete o quanto uma variável explica outra, variando entre 0 e 1. Valor próximo ou igual a 1 significa que os resultados são completamente explicados pelo modelo.

Nesse sentido, a Tabela 6 consta os parâmetros  $\beta_0$  e  $\beta_1$  da regressão linear simples com polinômio de primeiro grau, bem como os coeficientes de correlação e determinação entre as temperaturas observada e preditas para o modelo unidimensional. Salienta-se que a última casa decimal apresentada possui arredondamento.

Difusividade térmica médio: Erro de ordem 2				
Cabos	$\beta_0$	$\beta_1$	Coef. de correlação	Coef. de determinação
1	1,03663	-1,9364	0,986	0,973
2	1,38728	-11,209	0,983	0,966
3	1,00159	-0,0254	0,999	0,998
Difusividade térmica médio: Erro de ordem 4				
Cabos	$\beta_0$	$\beta_1$	Coef. de correlação	Coef. de determinação
1	1,03682	-1,9386	0,987	0,973
2	1,38747	-11,212	0,983	0,966
3	1,00201	-0,0331	0,999	0,998
Difusividade térmica variável: Erro de ordem 2				
Cabos	$\beta_0$	$\beta_1$	Coef. de correlação	Coef. de determinação
1	1,01606	-1,1505	0,990	0,980
2	1,13506	-5,0173	0,971	0,943
3	1,08577	-2,0367	0,994	0,988

Tabela 6: Parâmetros  $\beta_0$  e  $\beta_1$  da regressão linear simples, coeficiente de correlação e coeficiente de determinação para o modelo unidimensional

Fonte: Do autor

A partir dos resultados encontrados, Tabela 6, pode-se concluir que as grandezas são proporcionalmente relacionadas, ou seja, a medida que uma cresce a outra também cresce. E, além disso, há uma correlação positiva muito forte em ambos cabos para o modelo unidimensional.

Os parâmetros  $\beta_0$  e  $\beta_1$  (Tabela 6) para o erro de ordem 2 no sensor 1 do cabo 1, foram encontrados conforme Figura 26 abaixo:

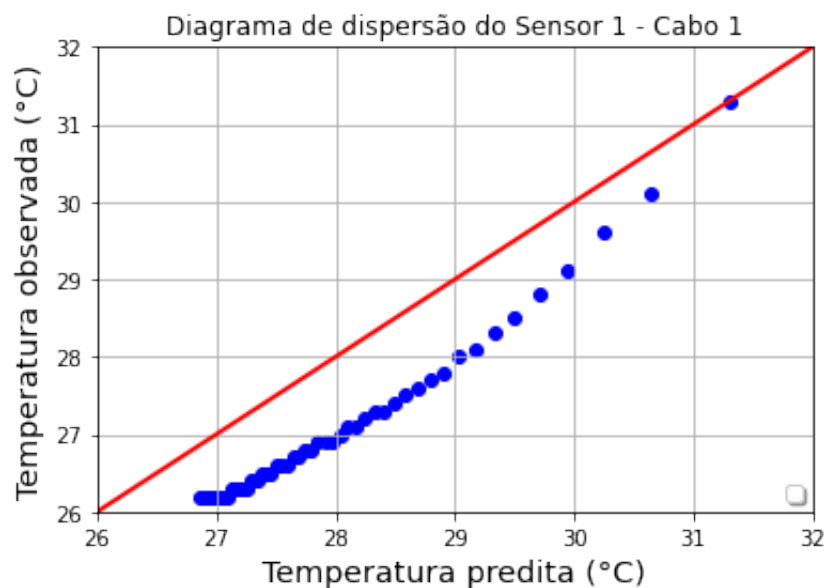


Figura 26: Diagrama de dispersão: sensor 1 do cabo 1

Fonte: Do autor

Nas Tabelas 7, 8 e 9 são apresentados os índices estatísticos para ambas ordens de erro (valor médio) e, também, para o modelo com coeficiente variável, nos três sensores, em seus respectivos cabos.

Difusividade térmica médio: Erro de ordem 2			
	Sensor 1	Sensor 2	Sensor 3
NMSE	0,00112853	0,00013188	0,00023599
COR	0,96634037	0,91482	0,90643665
FB	-0,03293267	-0,01057598	0,01472848
FS	0,04958884	-0,38032851	0,71080535
FA5	1,03348403	1,01063221	0,98537919
Difusividade térmica médio: Erro de ordem 4			
	Sensor 1	Sensor 2	Sensor 3
NMSE	0,00112198	0,00013161	0,00023593
COR	0,96640327	0,91471533	0,90644927
FB	-0,03283576	-0,01056541	0,01472664
FS	0,04970297	-0,37958827	0,71053967
FA5	1,03338385	1,01062152	0,985381
Difusividade térmica variável: Erro de ordem 2			
	Sensor 1	Sensor 2	Sensor 3
NMSE	0,00068733	0,00016897	0,00020717
COR	0,96953074	0,88847279	0,90410288
FB	-0,02558595	-0,01205482	0,01385071
FS	0,02625253	-0,37836721	0,56096413
FA5	1,02591751	1,01212792	0,98624455

Tabela 7: Resultados dos índices estatísticos - unidimensional (cabo 1)

Fonte: Do autor

Difusividade térmica médio: Erro de ordem 2			
	Sensor 1	Sensor 2	Sensor 3
NMSE	5,16295055e-04	6,61750724e-06	6,73831532e-05
COR	0,96287957	0,95364117	0,91374561
FB	-0,01838299	0,00182636	-0,00700673
FS	0,34118242	-0,09107527	0,71178977
FA5	1,01855352	0,9981753	1,00703137
Difusividade térmica médio: Erro de ordem 4			
	Sensor 1	Sensor 2	Sensor 3
NMSE	5,13599572e-04	6,62694628e-06	6,74041585e-05
COR	0,96294489	0,95361875	0,91376061
FB	-0,01831208	0,00182965	-0,00700886
FS	0,34125271	-0,09068943	0,71149121
FA5	1,0184813	0,99817202	1,00703351
Difusividade térmica variável: Erro de ordem 2			
	Sensor 1	Sensor 2	Sensor 3
NMSE	2,44874056e-03	1,31005053e-05	1,81556074e-04
COR	0,95140463	0,95995817	0,88427412
FB	-0,04860841	-0,00316065	0,01298245
FS	0,15556425	0,06474789	0,51116531
FA5	1,04981922	1,00316566	0,98710128

Tabela 8: Resultados dos índices estatísticos - unidimensional (cabo 2)

Fonte: Do autor

Difusividade térmica médio: Erro de ordem 2			
	Sensor 1	Sensor 2	Sensor 3
NMSE	4,60579936e-06	3,46343749e-04	5,99224858e-04
COR	0,97836887	0,96069427	0,80733665
FB	0,00066275	0,01846121	-0,0234975
FS	0,00284673	-0,22269395	1,73278171
FA5	0,99933747	0,98170764	1,02377685
Difusividade térmica médio: Erro de ordem 4			
	Sensor 1	Sensor 2	Sensor 3
NMSE	4,71945510e-06	3,46575275e-04	5,99228054e-04
COR	0,97839148	0,96068347	0,80735024
FB	0,00079189	0,01846807	-0,02349758
FS	0,00323816	-0,22200658	1,73275092
FA5	0,99920842	0,98170091	1,02377693
Difusividade térmica variável: Erro de ordem 2			
	Sensor 1	Sensor 2	Sensor 3
NMSE	0,0001374	0,00012995	0,00034482
COR	0,97390214	0,9565079	0,825702
FB	0,01011841	-0,01098598	0,01738817
FS	0,08805677	-0,29580444	1,63113242
FA5	0,98993253	1,01104666	0,9827617

Tabela 9: Resultados dos índices estatísticos - unidimensional (cabo 3)

Fonte: Do autor

Através dos resultados apresentados (Tabelas 7, 8 e 9), observa-se que os índices estatísticos NMSE, COR, FB e FA5 possuem valores próximos aos ideais, indicando bom desempenho que os modelos têm ao representar problemas desse tipo. No entanto, para ambos os cabos, o índice FS apresenta valores diferentes dos ideais, ressalta-se que o FS indica se a distribuição da temperatura simulada em torno da temperatura média é superestimada ou subestimada. Nesse sentido, no sensor 1 do cabo 2 e, também, nos sensores 3 (ambos cabos) tem-se  $\sigma_p < \sigma_o$ , ou seja, a temperatura observada está mais distribuída que a simulada, já nos sensores 2, dos cabos 1 e 3, tem-se o contrário,  $\sigma_p > \sigma_o$ , implicando na temperatura simulada mais distribuída que a observada.

De modo geral, os valores encontrados para o modelo matemático analisado com aproximações de ordem 2 e ordem 4 denotam semelhanças, variando a partir da segunda casa decimal. Isso permite concluir que, para a malha utilizada nestas simulações, apesar do erro de ordem 4 apresentar maiores informações no cálculo da derivada de segunda ordem, os resultados dos índices estatísticos não possuem diferenças significativas quando comparado com a aproximação de ordem 2. Além de apresentar vantagem computacional (devido ao número de operações matemáticas serem menores), a aproximação de ordem 2 possui precisão semelhante, neste caso, às demais ordens, sendo satisfatório para o propósito do trabalho.

### 5.3 Modelo bidimensional com difusividade térmica médio e variável

Para a implementação computacional das soluções dos modelos bidimensionais, utilizamos os valores de  $n = 65$  (direção vertical),  $m = 65$  (direção radial),  $p = 1500$  (direção temporal),  $\Delta z = H_s/n = 0,01$  metros,  $\Delta r = R_s/m = 0,00769$  metros e  $\Delta t = 24h/m = 0,96$  minutos. Além disso, temos para o modelo bidimensional com difusividade térmica médio,  $\lambda \simeq 0,0067$  e, para a difusividade térmica variável  $\lambda \simeq 0,00687$ . Tais valores implicam em modelos com grade uniforme.

Nas Figuras 27, 28 e 29 encontram-se a distribuição da temperatura ao longo do tempo para a temperatura predita: linha em ciano, temperatura analítica: tracejado magenta, e temperatura observada: pontos verdes nos três sensores dos cabos 1, 2 e 3, respectivamente.



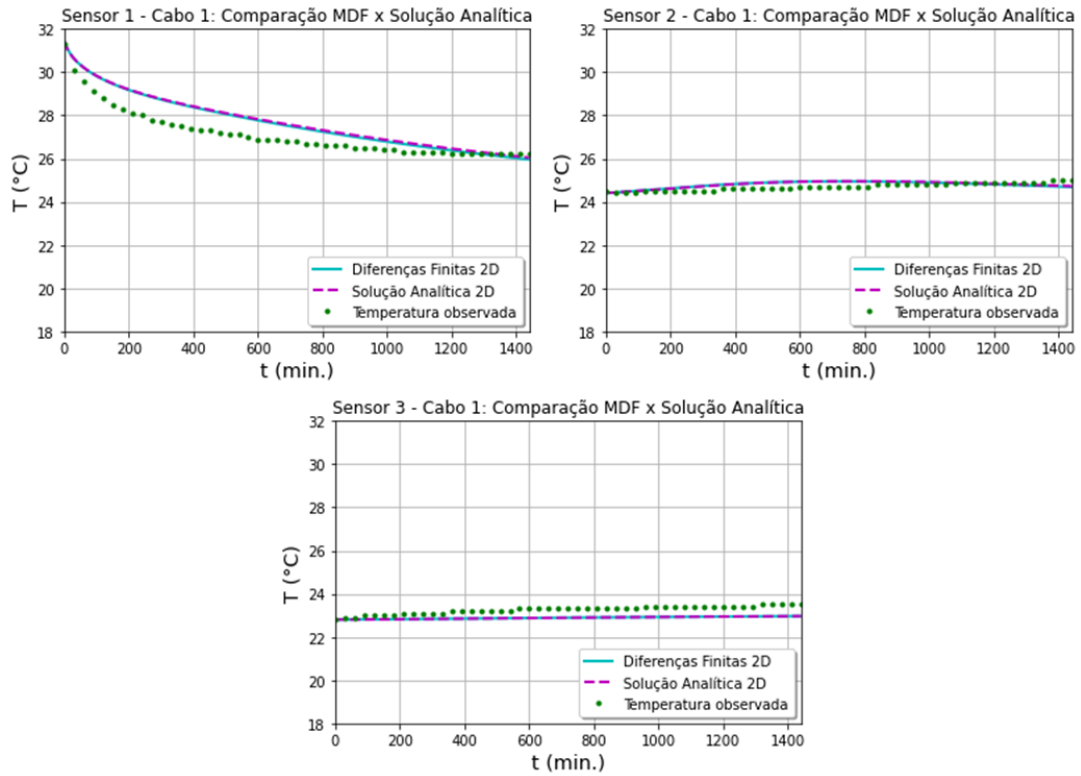


Figura 27: Modelo bidimensional com difusividade térmica com valor médio: Cabo 1  
Fonte: Do autor

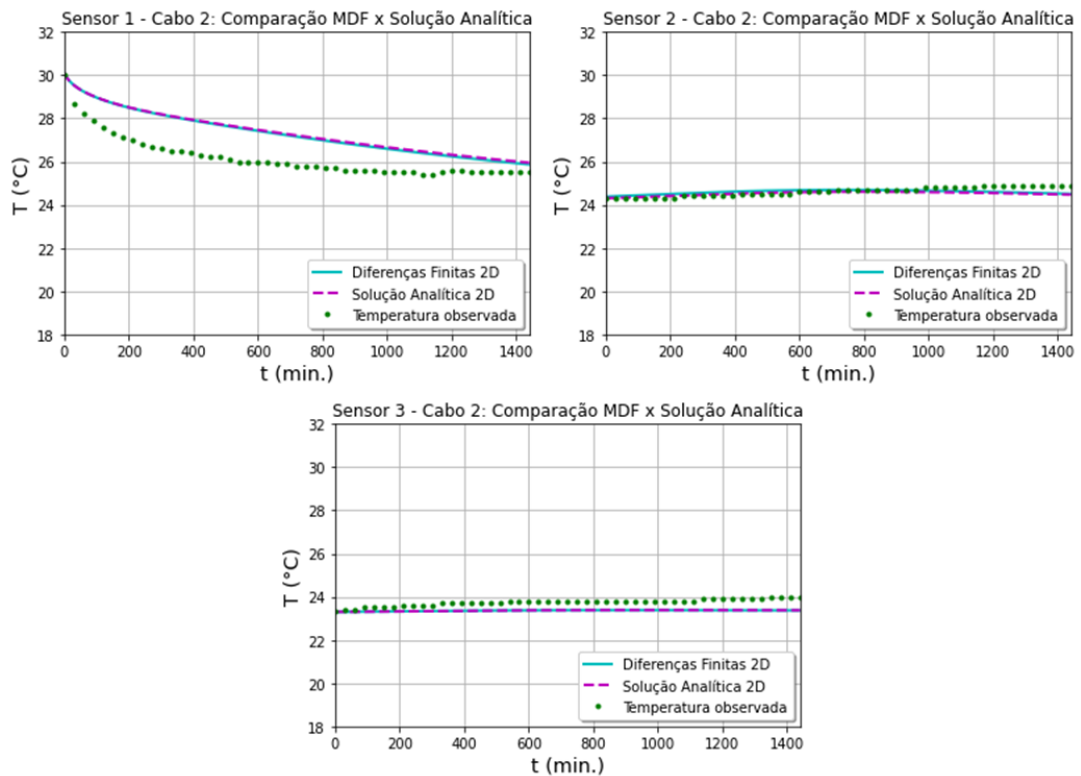


Figura 28: Modelo bidimensional com difusividade térmica com valor médio: Cabo 2  
Fonte: Do autor

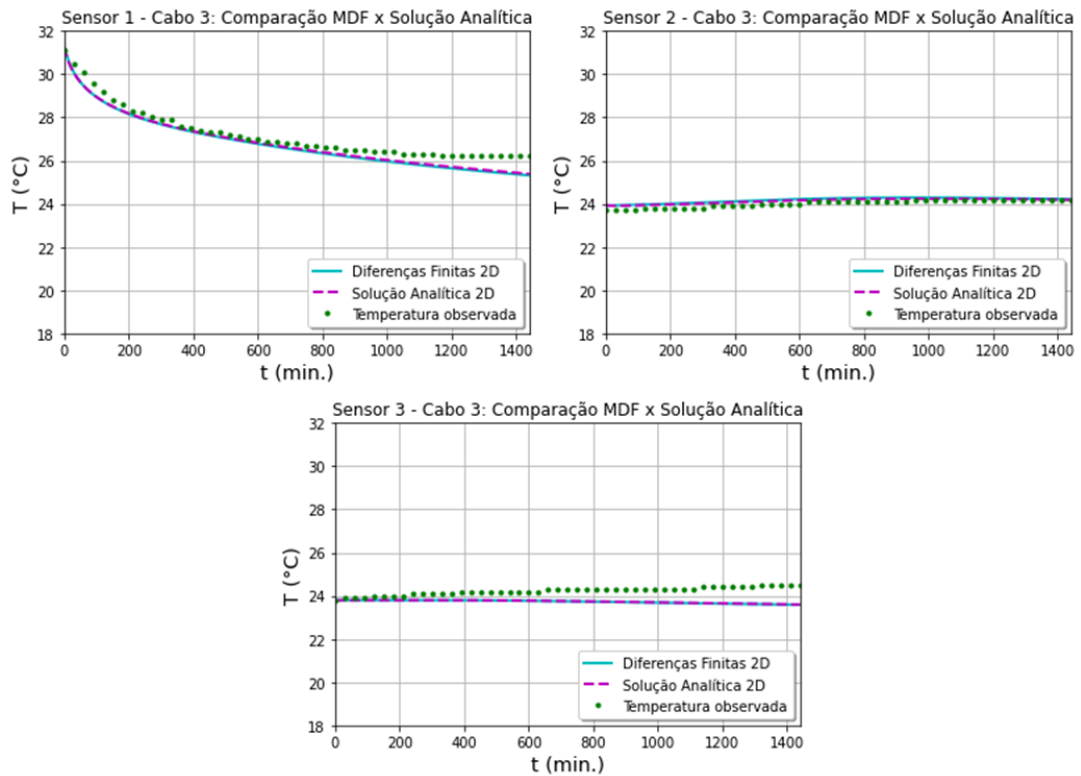


Figura 29: Modelo bidimensional com difusividade térmica com valor médio: Cabo 3  
 Fonte: Do autor

Através dos gráficos nota-se que nos sensores 2 e 3 de ambos os cabos, além das temperaturas predita e analítica serem bastante semelhantes entre si, as mesmas não apresentam diferenças significativas com a temperatura observada. O mesmo ocorre no sensor 1 do cabo 3. Em contrapartida, apesar das temperaturas preditas e analíticas serem semelhantes, no sensor 1 dos cabos 1 e 2 há uma maior discrepância com a temperatura observada.

Agora, analisando o coeficiente de difusividade térmica do grão variável com a temperatura e umidade, as Figuras 30, 31 e 32 apresentam a distribuição da temperatura predita: linha em ciano, temperatura analítica: tracejado magenta, e temperatura observada: pontos verdes nos três sensores dos cabos 1, 2 e 3, respectivamente. Ressalta-se que quando se considera a difusividade térmica variável, não é possível analisar a solução analítica e, para fins comparativos será considerado os valores encontrados para o valor médio.

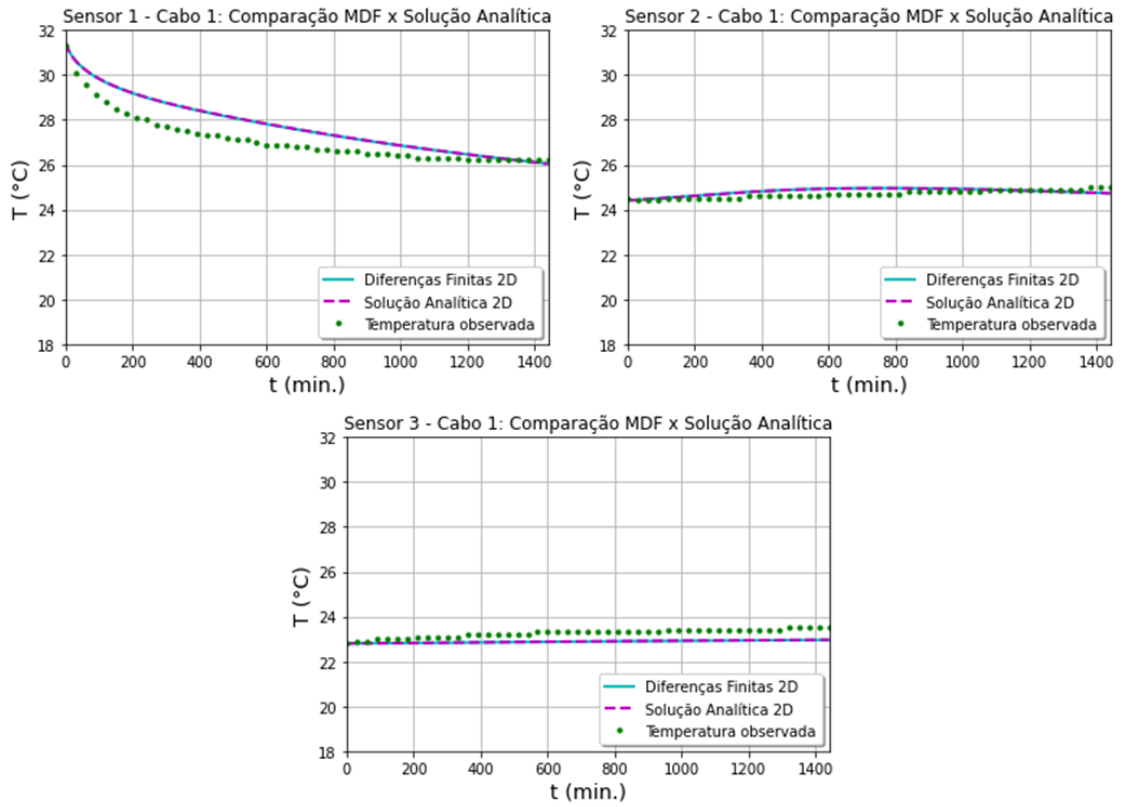


Figura 30: Modelo bidimensional com difusividade térmica variável: Cabo 1  
 Fonte: Do autor

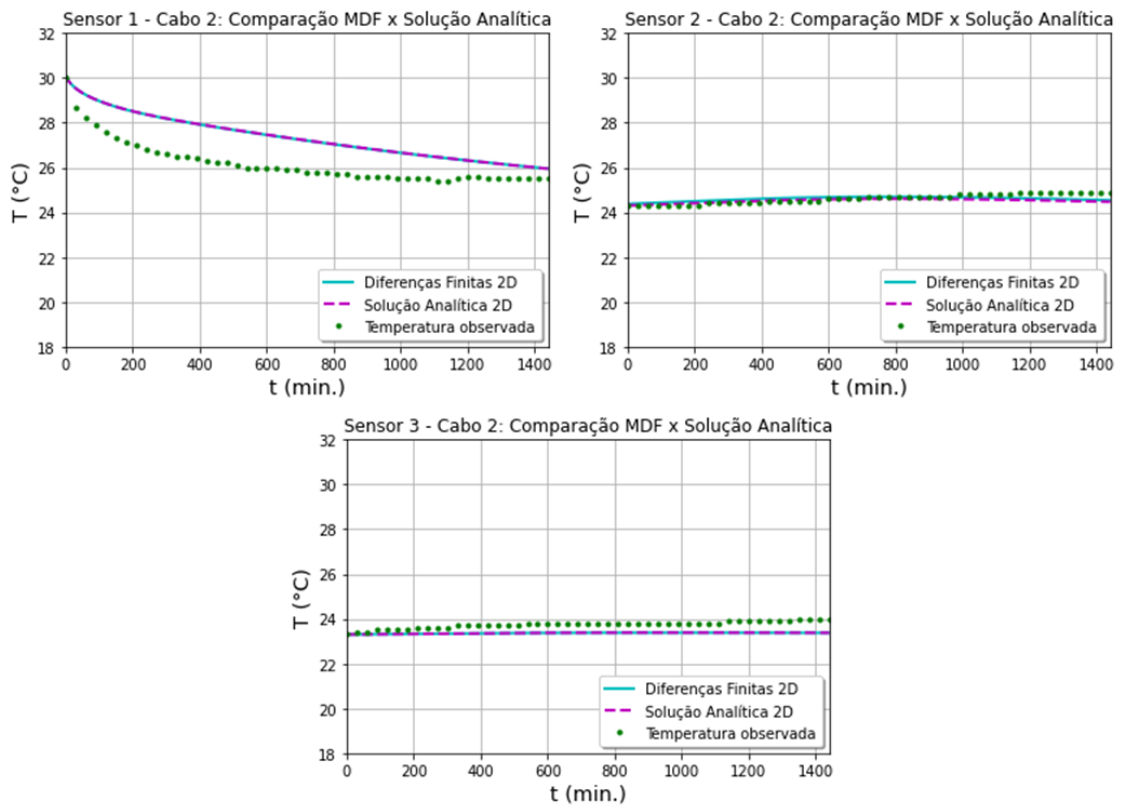


Figura 31: Modelo bidimensional com difusividade térmica variável: Cabo 2  
 Fonte: Do autor

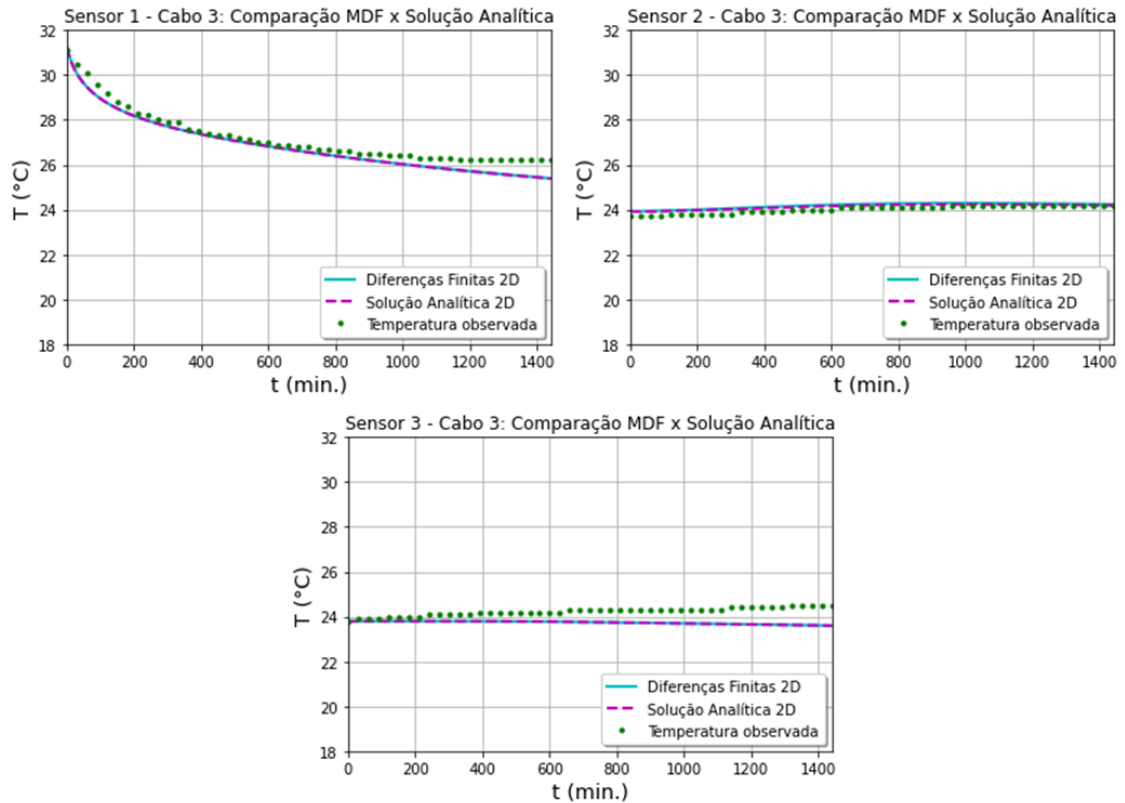


Figura 32: Modelo bidimensional com difusividade térmica variável: Cabo 3  
Fonte: Do autor

Observa-se por meio dos gráficos que, para ambos os cabos, os sensores 2 e 3 apresentam temperatura predita e analítica bastante similares entre si e, ademais, não há diferença expressiva com a temperatura observada. O mesmo ocorre no sensor 1 do cabo 3.

A Tabela 10 consta os parâmetros  $\beta_0$  e  $\beta_1$  da regressão linear simples com polinômio de primeiro grau, bem como os coeficientes de correlação e determinação entre as temperaturas observada e previstas para o modelo bidimensional. Salienta-se que a última casa decimal apresentada possui arredondamento.

Difusividade térmica médio: Erro de ordem 2				
Cabos	$\beta_0$	$\beta_1$	Coef. de correlação	Coef. de determinação
1	0,81554	4,55287	0,963	0,927
2	1,01829	-0,6738	0,949	0,902
3	0,84771	4,39630	0,989	0,978
Difusividade térmica variável: Erro de ordem 2				
Cabos	$\beta_0$	$\beta_1$	Coef. de correlação	Coef. de determinação
1	0,83429	3,99487	0,964	0,929
2	1,04513	-1,4511	0,951	0,905
3	0,86205	3,97132	0,989	0,979

Tabela 10: Parâmetros  $\beta_0$  e  $\beta_1$  da regressão linear simples, coeficiente de correlação e coeficiente de determinação para o modelo bidimensional

Fonte: Do autor

A partir dos resultados encontrados na Tabela 10, pode-se concluir que as grandezas são proporcionalmente relacionadas e, também, que há uma correlação positiva muito forte em ambos cabos para o modelo bidimensional.

Nas Tabela 11, 12 e 13 encontram-se os valores dos índices estatísticos para o modelo bidimensional com coeficiente de difusividade térmica do grão médio e variável, em seus respectivos cabos.

Difusividade térmica médio: Erro de ordem 2			
	Sensor 1	Sensor 2	Sensor 3
NMSE	6,07649334e-04	5,96286291e-05	2,84730820e-04
COR	0,94297953	0,45158936	0,94317262
FB	-0,02027612	-0,00366405	0,01600444
FS	-0,16542904	0,14521915	1,08762168
FA5	1,02048379	1,00367077	0,98412262
Difusividade térmica variável: Erro de ordem 2			
	Sensor 1	Sensor 2	Sensor 3
NMSE	6,55846908e-04	5,73861541e-05	2,91141832e-04
COR	0,94433271	0,53591318	0,94155428
FB	-0,02194533	-0,00418981	0,01617934
FS	-0,14425699	0,11403258	1,11107368
FA5	1,0221888	1,00419861	0,98395049

Tabela 11: Resultados dos índices estatísticos - bidimensional (cabo 1)

Fonte: Do autor

Difusividade térmica médio: Erro de ordem 2			
	Sensor 1	Sensor 2	Sensor 3
NMSE	2,03978328e-04	6,17877276e-05	6,03130875e-05
COR	0,93027137	0,39035582	0,87409263
FB	-0,00639608	0,00447701	-0,00432636
FS	0,06975803	0,66512545	1,50911249
FA5	1,0064166	0,99553299	1,00433574
Difusividade térmica variável: Erro de ordem 2			
	Sensor 1	Sensor 2	Sensor 3
NMSE	2,23109614e-04	5,24870437e-05	5,95248064e-05
COR	0,93188089	0,51060824	0,8999399
FB	-0,00794833	0,00409901	-0,00433711
FS	0,0939997	0,64121984	1,49149886
FA5	1,00798004	0,99590937	1,00434653

Tabela 12: Resultados dos índices estatísticos - bidimensional (cabos 2)

Fonte: Do autor

Difusividade térmica médio: Erro de ordem 2			
	Sensor 1	Sensor 2	Sensor 3
NMSE	0,00022253	0,00048367	0,00049733
COR	0,96865352	0,81421683	-0,83653264
FB	0,01149463	0,02161411	-0,01991239
FS	-0,1536875	0,37183042	0,81614416
FA5	0,98857106	0,97861697	1,02011263
Difusividade térmica variável: Erro de ordem 2			
	Sensor 1	Sensor 2	Sensor 3
NMSE	0,00017287	0,00047783	0,00050553
COR	0,96918819	0,84829525	-0,82971127
FB	0,00976226	0,02154414	-0,02024643
FS	-0,1375452	0,33582964	0,89086145
FA5	0,99028516	0,97868547	1,02045349

Tabela 13: Resultados dos índices estatísticos - bidimensional (cabos 3)

Fonte: Do autor

Observa-se por meio dos resultados apresentados nas Tabelas (11, 12 e 13), que os índices estatísticos NMSE, FB e FA5 possuem valores próximos aos ideais, indicando bom desempenho que os modelos têm ao representar problemas desse tipo. No entanto, para ambos os cabos, o índice FS apresenta valores diferentes dos ideais e, também, COR apresenta valor diferente no sensor 2 dos cabos 1 e 2. Em relação ao índice FS, nos sensores 2 e 3 (ambos cabos) tem-se  $\sigma_p < \sigma_o$ , ou seja, a temperatura observada está mais distribuída que a simulada. Em relação ao índice COR, a con-

cordância entre a temperatura observada com a predita indica uma piora ao analisar a temperatura interna, ou seja, apesar do modelo bidimensional prever, inicialmente, a temperatura no interior do silo com maior precisão que os demais modelos analisados, ao término do experimento, o modelo bidimensional tende a apresentar maiores erros, indicando que para longos períodos de armazenamento, o modelo em questão, não é o indicado.

Além disso, os resultados para o modelo bidimensional considerando a difusividade térmica médio e variável não apresentam grandes diferenças nos resultados obtidos.

#### 5.4 Comparação dos gráficos dos modelos unidimensional e bidimensional com difusividade térmica médio e variável

Esta seção tem o intuito de facilitar a visualização da distribuição da temperatura interna ao longo do tempo em ambos modelos unidimensional e bidimensional com difusividade térmica médio e variável, aqui apresentados.

Nas Figuras 33, 34 e 35 apresentam a comparação da distribuição da temperatura unidimensional predita: linha em ciano, temperatura bidimensional predita: linha preta, temperatura unidimensional analítica: tracejado vermelho, temperatura bidimensional analítica: tracejado magenta e temperatura observada: pontos verdes nos cabos 1, 2 e 3 do sensor 1, respectivamente.

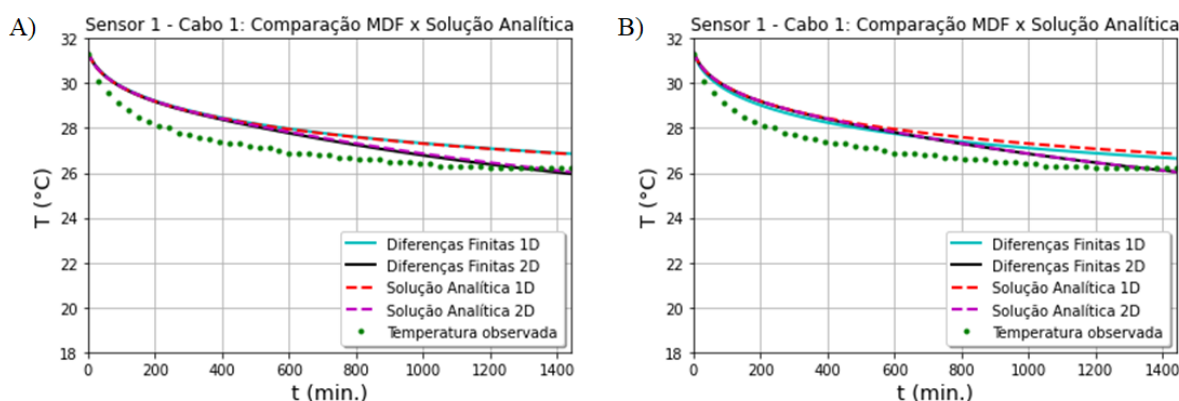


Figura 33: Comparação dos modelos unidimensional e bidimensional com difusividade térmica A) médio e B) variável no sensor 1: Cabo 1

Fonte: Do autor

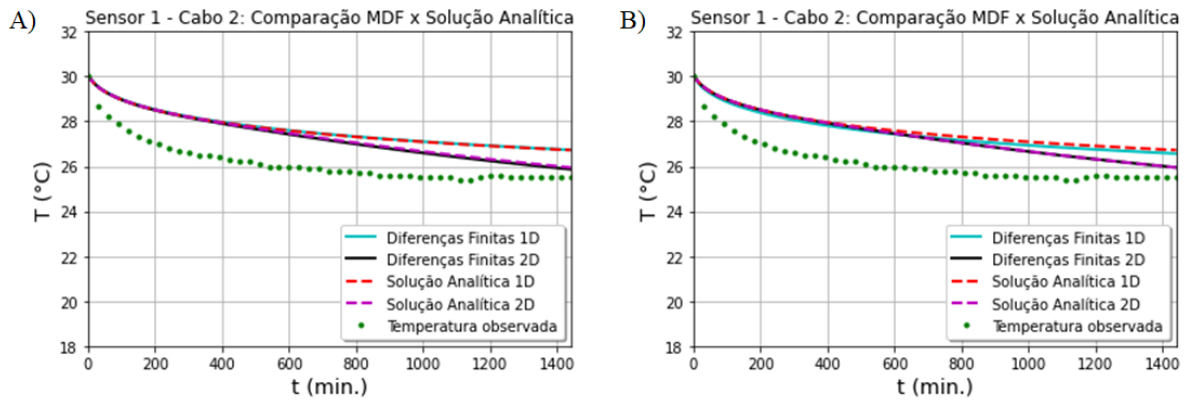


Figura 34: Comparação dos modelos unidimensional e bidimensional com difusividade térmica A) médio e B) variável no sensor 1: Cabo 2

Fonte: Do autor

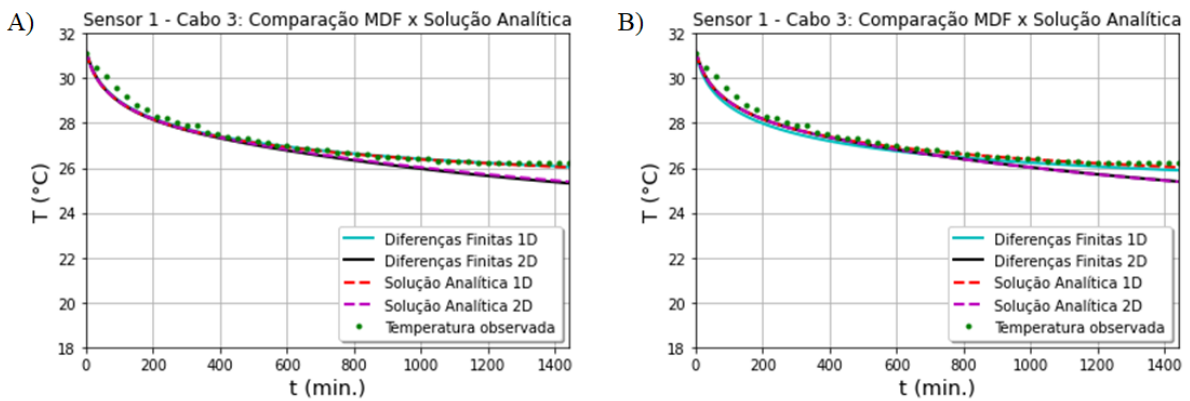


Figura 35: Comparação dos modelos unidimensional e bidimensional com difusividade térmica A) médio e B) variável no sensor 1: Cabo 3

Fonte: Do autor

Na mesma perspectiva, mas agora comparando os modelos unidimensional e bidimensional com valor médio e variável para os sensores 2 dos cabos 1, 2 e 3, tem-se as respectivas Figuras: 36, 37 e 38.



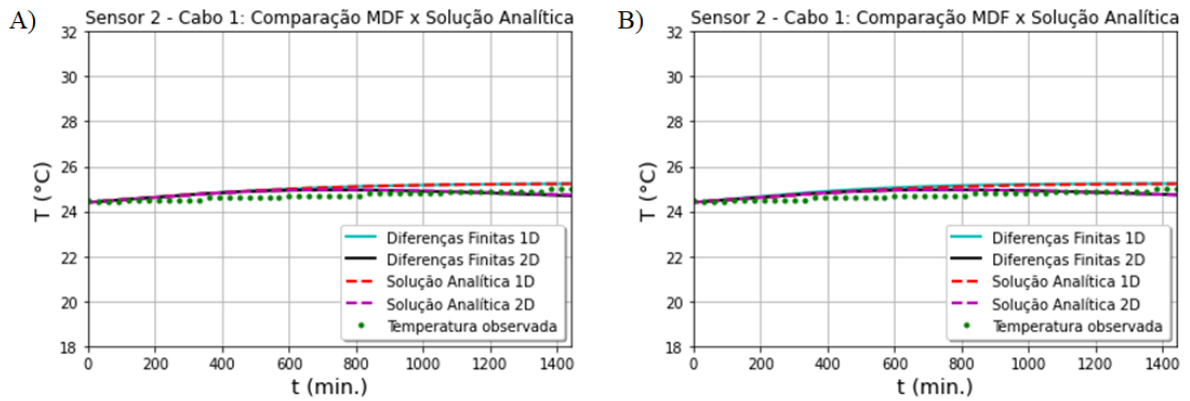


Figura 36: Comparação dos modelos unidimensional e bidimensional com difusividade térmica A) médio e B) variável no sensor 2: Cabo 1

Fonte: Do autor

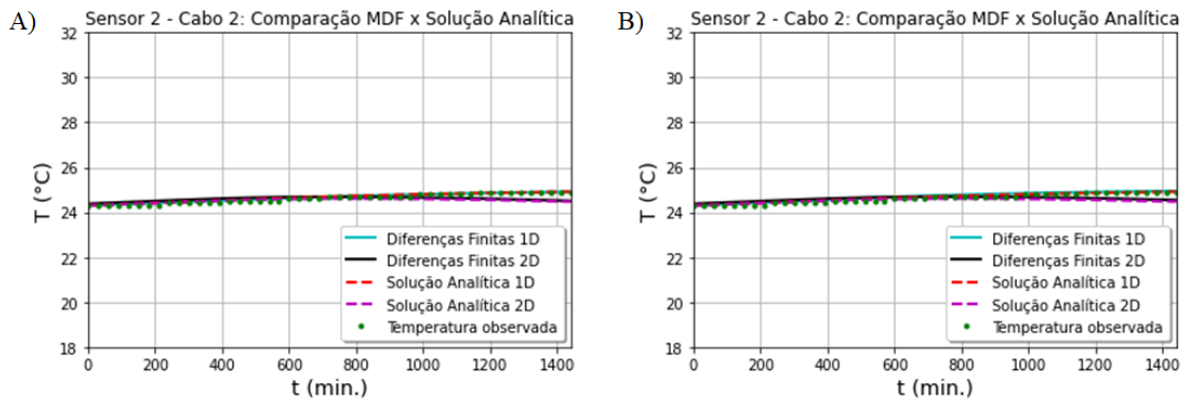


Figura 37: Comparação dos modelos unidimensional e bidimensional com difusividade térmica A) médio e B) variável no sensor 2: Cabo 2

Fonte: Do autor

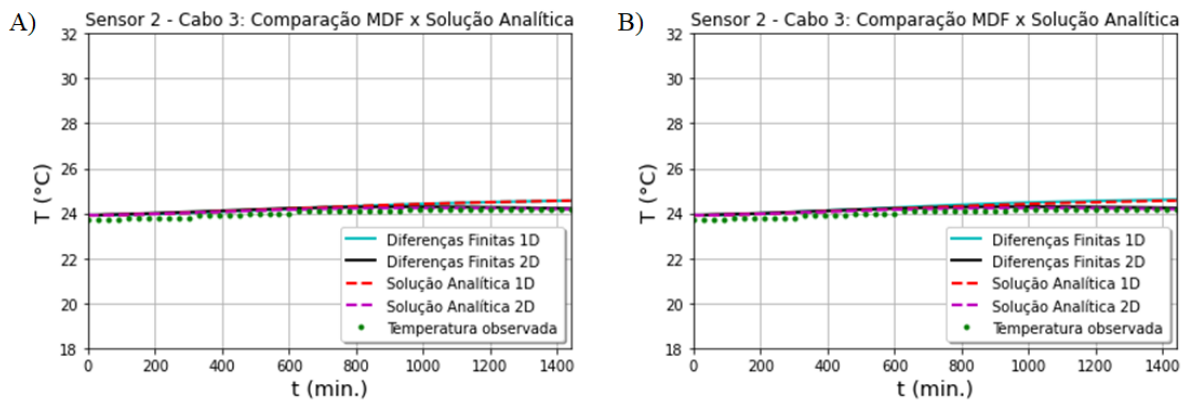


Figura 38: Comparação dos modelos unidimensional e bidimensional com difusividade térmica A) médio e B) variável no sensor 2: Cabo 3

Fonte: Do autor

Por fim, com as respectivas legendas posteriores, mas comparando agora os modelos unidimensional e bidimensional com valor médio e variável para os sensores 3 dos cabos 1, 2 e 3, tem-se as respectivas Figuras: 39, 40 e 41.

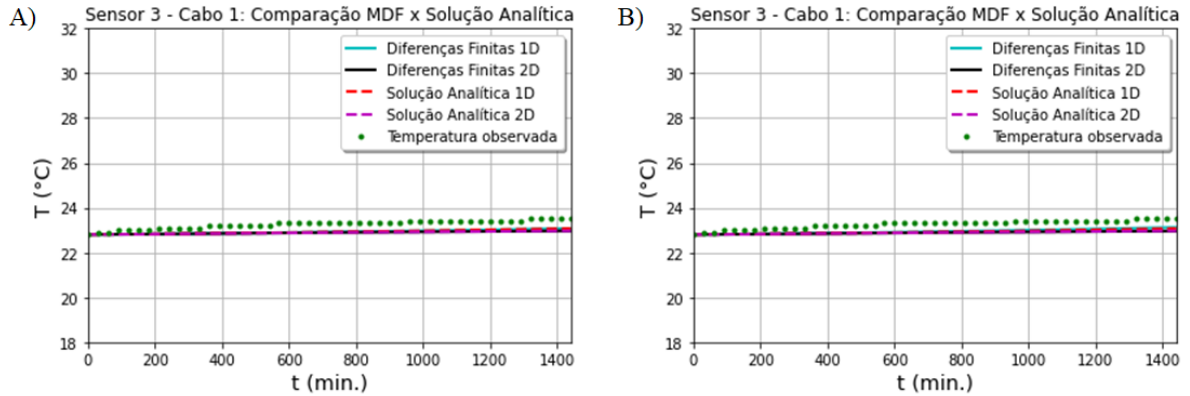


Figura 39: Comparação dos modelos unidimensional e bidimensional com difusividade térmica A) médio e B) variável no sensor 3: Cabo 1

Fonte: Do autor

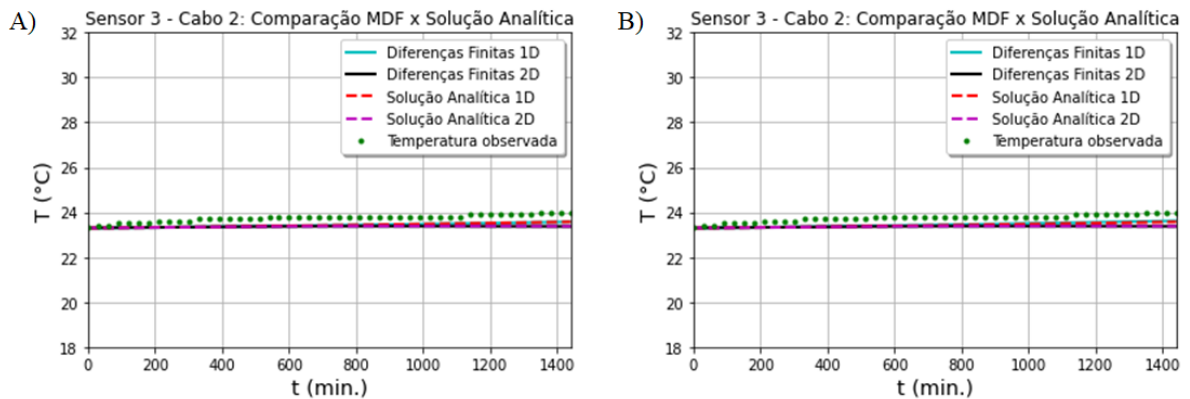


Figura 40: Comparação dos modelos unidimensional e bidimensional com difusividade térmica A) médio e B) variável no sensor 3: Cabo 2

Fonte: Do autor

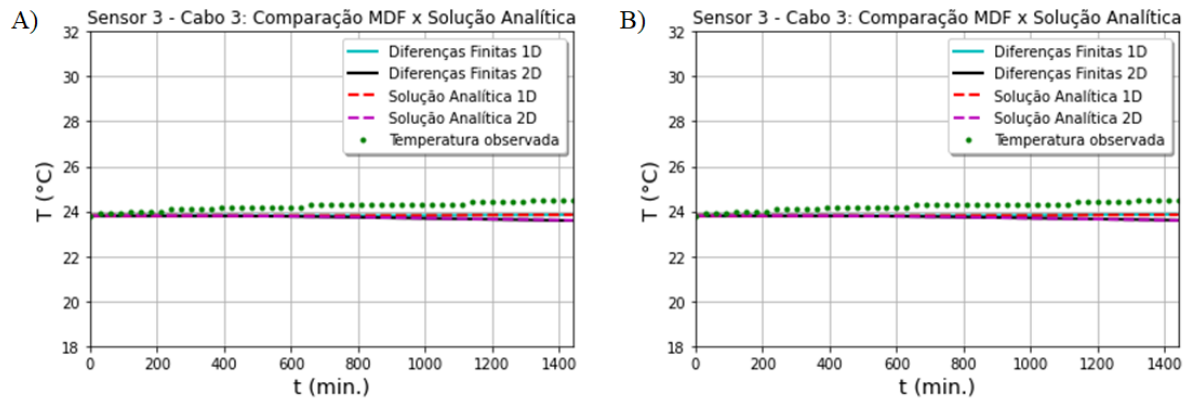


Figura 41: Comparação dos modelos unidimensional e bidimensional com difusividade térmica A) médio e B) variável no sensor 3: Cabo 3

Fonte: Do autor

Quando compara-se os modelos unidimensionais e bidimensionais, Figuras 33 a 41, nota-se que o modelo bidimensional apresenta, inicialmente no sensor 1, melhor aproximação com a temperatura observada e afasta-se ao término do experimento e, com isso, pode-se concluir que o modelo bidimensional possui maior precisão em um período de aproximadamente 1200 minutos (20 horas) e perde sua eficácia com o passar do tempo. Em relação as temperaturas preditas nos sensores 2 e 3 o modelo bidimensional não apresenta diferença entre os métodos de resolução. Apesar disso, em um contexto geral, as soluções numéricas encontradas descrevem o processo físico do modelo.

## 6 CONCLUSÕES

O presente trabalho, objetivou analisar a relação entre a temperatura interna da massa de grãos de arroz e o tempo decorrido. Para isso, optou-se pela abordagem do método explícito das diferenças finitas para os modelos unidimensional e bidimensional, considerando o coeficiente de difusividade térmica do grão de arroz com valor médio e variável.

Por meio desta, conclui-se que a metodologia escolhida mostrou-se satisfatória uma vez que as soluções encontradas permitem observar as mudanças de características no silo em questão. Pode-se observar que nos sensores 1, que ficam mais próximo a base do silo, apresentou-se uma queda mais acentuada de temperatura ao longo do tempo decorrido no experimento, mostrando o que ocorre fisicamente no interior do sistema. O sistema, de forma geral, tende a buscar um equilíbrio de temperatura, o que é perceptível ao observarmos a tendência na temperatura final apresentada em cada um dos sensores.

Outro ponto a se destacar é que a solução analítica e a solução numérica mostraram-se muito próximas entre si e apresentam compatibilidade com a tendência dos dados observados no experimento. Além disso, a solução numérica apresentada tem a vantagem de trabalhar com parâmetros do problema variáveis com a temperatura e umidade, sendo assim, de suma importância para problemas mais complexos, uma vez que para equações diferenciais parciais não lineares não é viável tal resolução de forma analítica.

Ao compararmos os resultados da segunda e quarta ordem do modelo unidimensional com difusividade térmica médio, é nítido que ambas soluções apresentam grandes semelhanças não só graficamente, mas também, nos resultados dos índices estatísticos ao passo de variar a partir da segunda casa decimal. Em relação as soluções dos modelos unidimensional e bidimensional, médio e variável, pode-se concluir que o modelo bidimensional apresenta melhores valores, inicialmente, e ao término do experimento tende a apresentar maiores erros.

Devido a grande importância da cultura do arroz para o Rio Grande do Sul e grande capacidade produtiva do estado, mostra-se de grande interesse o estudo relacionado

ao tema, que permite verificar as melhores condições e relações de variáveis que beneficiem a longevidade da estocagem do grão. De modo geral, pode-se dizer que o modelo cumpriu seu objetivo de prever e comparar as relações de temperatura ao longo do tempo, quando comparados aos dados observados, sendo uma boa alternativa para estimar a temperatura em qualquer instante e ponto ao longo da coluna dos grãos armazenados.

Como evidenciado no início do estudo, um fator essencial para conservar os grãos é a relação de estocagem e armazenamento do mesmo, de forma que seja possível tê-lo ao longo do período do ano todo. O estudo matemático feito e as previsões utilizando as variáveis de tempo e temperatura permitem que possa ser identificada a melhor relação entre as variáveis para que o período de estocagem dos grãos seja prolongado, de forma a prejudicar o mínimo possível as propriedades do grão.

Além disso, um estudo que expandisse as relações de variáveis poderia relacionar a adequação do local de estocagem com as possíveis condições da região onde a produção ocorre, de forma a proporcionar ou adequar as condições para que fiquem mais apropriadas aos sistemas específicos analisados. Durante o desenvolvimento da dissertação, mais especificamente o capítulo 2, a discussão relacionada aos fatores que interferem na conservação e armazenamento do arroz foi discutida, de forma que a previsão dos possíveis resultados ou tendência do sistema possa ser comparado com os dados reais e os resultados obtidos nessa situação. O equilíbrio entre os diversos fatores como: umidade, temperatura, variáveis específicas do grão de arroz, dentre outras, poderia ser alvo de investigações futuras, buscando verificar a correspondência entre as variáveis e as condições ideais interpostas em variados sistemas.

Outra proposta para investigações futuras, são as análises das correntes convectivas, bem como, a termometria dos silos reais ao longo do ano ou por épocas, tal ação ajudaria a estimar o tempo de aeração da massa de grãos de arroz. Por fim, faz-se necessário refazer o experimento afim de investigar as diferenças de temperaturas observadas no sensor 1 e, assim, chegar mais próximo as temperaturas experimentais, pois foi observada uma correlação mais baixa nos sensores 2 e 3 comparado ao sensor 1, uma vez que, pela análise gráfica, a menor correlação deveria ser encontrada no sensor 1. Em síntese, o trabalho mostrou a importância de levarmos em conta as condições operacionais na armazenagem do grão, permitindo assim reduzir a perda que ocorre em seus diversos processos e manuseios.

## REFERÊNCIAS

ABALONE, R.; GASTÓN, A.; CASSINERAD, A.; LARA, M. A. Modelización de la distribución de temperatura y humedad de granos almacenados en silos. **Asociación Argentina de Mecánica Computacional**, Argentina, v.25, p.233–247, 2006.

AGRÍCOLAS, N. **Capacidade de armazenagem agrícola cresce 1,5% e chega a 183,3 milhões de toneladas no 2º semestre de 2021**. Disponível em: <https://www.noticiasagricolas.com.br/noticias/agronegocio/319103-capacidade-de-armazenagem-agricola-cresce-1-5-e-chega-a-183-3-milhoes-de-toneladas-no-2-semester-de-2021.html>. Acesso em: 17 junho 2022.

ANDRADE, A. J. C.; LOEFFLER, C. F. Comparação entre Resultados Analíticos e do Método dos Elementos de Contorno para o Problema de Transferência de Calor Bidimensional. **Anais do VI Encontro Científico de Física Aplicada [Blucher Physics Proceedings]**, São Paulo: Blucher, v.2, n.1, p.23–26, 2015.

ANDRADE, E. T. d. **Simulação da variação de temperatura em milho armazenado em silo metálico**. 2001. 147p. Tese (Doutorado em Engenharia Agrícola) — Universidade Federal de Viçosa, Viçosa.

AOSANI, E. **Temperatura de secagem estacionária e de armazenamento na qualidade de grãos de soja [Glycine max (L.) Merrill]**. 2007. 75p. Dissertação (Mestrado em Ciências) — Universidade Federal de Pelotas, Pelotas.

AQUERRETA, J.; IGUAZ, A.; ARROQUI, C.; VÍRSEDA, P. Effect of high temperature intermittent drying and tempering on rough rice quality. **Journal of Food Engineering**, v.80, p.611–618, 2007.

AZEVEDO, L. F.; OLIVEIRA, T. P. de; PORTO, A. G.; SILVA, F. S. da. A capacidade estática de armazenamento de grãos no Brasil. **XXVIII Encontro Nacional de Engenharia de Produção**, Rio de Janeiro, p.1–14, 2008.

BALA, B. K. **Drying and storage of cereal grains**. 2.ed. Pondicherry, India: John Wiley Sons Ltd, 2017. 354p.

BASSINELLO, P. Z.; CASTRO, E. d. M. Arroz como alimento. **Embrapa Arroz e Feijão-Artigo em periódico indexado (ALICE)**, Belo Horizonte, v.25, n.222, p.101–108, 2004.

BENTO, D. G. C.; TELES, F. L. A sazonalidade da produção agrícola e seus impactos na comercialização de insumos. **Revista Científica do Centro de Ensino Superior Almeida Rodrigues**, v.1, n.1, p.15–19, 2013.

BORDIGNON, B. C. S. **Relação das condições de armazenamento com a qualidade fisiológica de sementes e composição do óleo extraído de cultivares de soja**. 2009. 90p. Dissertação (Mestrado em Agronomia) — Centro de Ciências Rurais, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria.

BOTELHO, F. M.; BOTELHO, S. C. C.; SOBREIRA, M. C. A. Influência do teor de impurezas nas propriedades físicas de milho, soja e arroz em casca. **Scientific Electronic Archives**, v.12(1), p.52–58, 2019.

BOUZADA, M. A. C. Simulação versus métodos analíticos: uma ferramenta didática na forma de discussão teórica. **Revista eletrônica de Administração**, v.12, n.1, p.84–95, 2013.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D.; BURDEN, A. M. **Análise Numérica**. 3.ed. São Paulo: Cengage Learning Brasil, 2015. 890p.

CARRERA–RODRÍGUEZ, M.; MARTÍNEZ–GONZÁLEZ, G. M.; NAVARRETE–BOLAÑOS, J.; BOTELLO–ÁLVAREZ, J.; RICO–MARTÍNEZ, R.; JIMÉNEZ–ISLAS, H. Estudio numérico del efecto de la temperatura ambiental en la convección natural bidimensional en el almacenamiento de granos en silos cilíndricos. **Revista mexicana de ingeniería química**, Ciudad de México, v.8, n.1, p.77–91, 2009.

CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. **Métodos Numéricos para Engenharia**. 5.ed. Porto Alegre: AMGH, 2011.

CONAB. **A cultura do arroz**. Brasília: Conab, 2015. 180p.

CONAB. **Série histórica das safras**. Disponível em: <https://www.conab.gov.br/info-agro/safras/serie-historica-das-safras>. Acesso em: 13 outubro 2022.

CONAB. **Perspectivas para a Agropecuária**. Disponível em: <https://www.conab.gov.br/perspectivas-para-a-agropecuaria>. Acesso em: 13 outubro 2022.

CORRÊA, P. C.; BOTELHO, F. M.; C. C. BOTELHO, S. de; GONELI, A. L. D. Isotermas de sorção de água de frutos de *Coffea canephora*. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, v.18, n.10, p.1047–1052, 2014.

CORRÊA, P. C.; DA SILVA, F. S.; JAREN, C.; AFONSO JUNIOR, P. C.; ARANA, I. Physical and mechanical properties in rice processing. **Journal of Food Engineering**, v.79, n.1, p.137–142, 2007.

CORREA, S. M. B. B. **Probabilidade e Estatística**. 2.ed. 2003. 116p.

COÊLHO, J. D. Arroz: produção e mercado. **Fortaleza: Banco do Nordeste**, n.156, 2021. Ano 6, (Caderno Setorial ETENE, n.156).

DEVILLA, I. A.; COUTO, S. M.; ZOLNIER, S.; SILVA, J. S. Variação da temperatura e umidade de grãos armazenados em silos com aeração. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, Campina Grande, v.8, n.2/3, p.284–291, 2004.

DOTTO, G. L.; PINTO, L. A. A.; MOREIRA, M. F. P. Determination of the effective thermal diffusivity in a porous bed containing rice grains. **Heat and Mass Transfer**, v.52(4), p.887–896, 2016.

ELIAS, M.; OLIVEIRA, M.; VANIER, N. **Tecnologias de Pré-Armazenamento, Armazenamento e Conservação de Grãos**, Pelotas: UFPel, 2018.

FERREIRA, G. J. D. L. G. **Comparação de métodos numéricos e analíticos no escoamento em meios porosos**. 2014. 168p. Dissertação (Mestre em Engenharia Civil - especialização em Geotecnia) — Faculdade de engenharia da Universidade do Porto (FEUP), Portugal.

FONSECA, F. A. **Condições de encharcamento sobre a qualidade de arroz parboilizado cultivado em terras altas**. 2009. 231p. Dissertação (Mestrado em Tecnologia de Alimentos) — Universidade Federal de Goiás, Goiânia.

GARCIA, D. C.; BARROS, A. C. S. A.; PESKE, S. T.; MENEZES, N. L. de. A secagem de sementes. **Ciência Rural**, Santa Maria, v.34, n.2, p.603–608, 2004.

GASQUES, J. G.; BASTOS, E. T.; VALDES, C.; BACCHI, M. R. P. Produtividade da agricultura: resultados para o Brasil e estados selecionados. **Revista de Política Agrícola**, n.3, p.87–98, 2014. Ano XXIII.

HAHN, D. W.; ÖZİŞİK, M. N. **Heat Conduction**. 3.ed. New Jersey: John Wiley Sons, 2012. 734p.



HANNA, S. R. Confidence limits for air quality model evaluations, as estimated by bootstrap and jackknife resampling methods. **Atmospheric Environment**, v.23, n.6, p.1385–1395, 1989.

HOELTZ, M. **Estudo da influência de manejos pós-colheita na incidência de fungos e micotoxinas no arroz (*Oryza sativa* L.)**. 2005. 88p. Dissertação (Mestrado em Microbiologia Agrícola e do Ambiente) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

INCROPERA, F. P.; BERGMAN, T. L.; LAVINE, A. S.; DEWITT, D. P. **Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa**. 7.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014. 1699p. Tradução Eduardo Mael Queiroz, Fernando Luiz Pellegrini Pessoa.

IRGA. **Boletim de resultados da safra 2020/21 em terras baixas**: arroz irrigado e soja. Disponível em: <https://irga.rs.gov.br/upload/arquivos/202109/27151231-boletim-de-resultados-da-safra-2020-2021-compressed.pdf>. Acesso em: 04 dezembro 2021.

LEVEQUE, R. J. **Finite Difference Methods for Differential Equations**. University of Washington: DRAFT, 2005. 261p.

MADRUGA, P. M. **Atividade respiratória e bioquímica de sementes de arroz submetidas a diferentes temperaturas**. 2010. 49p. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Fisiologia Vegetal — Universidade Federal de Pelotas, Pelotas - RS.

MAPA. **Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento**. Instrução Normativa nº 6, de 16 de fevereiro de 2009. Disponível em: <https://sistemasweb.agricultura.gov.br>. Acesso em: 23 junho 2022.

MATA, M. E. R. M. C.; DUARTE, M. E. M. Porosidade intergranular de produtos agrícolas. **Revista Brasileira de Produtos Agroindustriais**, Campina Grande, v.4, n.1, p.79–93, 2002.

MELO, K. J. M. **Aplicação do método das diferenças finitas explícito na solução da equação do calor para o caso transiente e unidimensional**. 2011. 46p. Monografia (Bacharel em Ciência e Tecnologia) — Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Angicos.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros**. 4.ed. 2009.

MORÁS, A. **Qualidade industrial de grãos de arroz (*Oryza sativa* L.) após tratamento com gás fosfina usado para controle de pragas no armazenamento**. 2012. 86p. Tese (Doutorado em Ciência e Tecnologia de Alimentos) — Universidade Federal de Pelotas, Pelotas.

MOREIRA, M. F. P.; CORRÊA, R. G.; FREIRE, J. T. Modelo matemático para previsão da temperatura da soja armazenada em silos. **Engevista**, v.17, n.2, p.240–253, 2015.

MOURA, L. S. d.; TEIXEIRA, A. C.; CARDOSO, N. G.; COSTA, O. S.; SILVA, V. H. C.; SALES, J. S.; OLIVEIRA, H. C. B. Um Procedimento Teórico-Experimental para a Estimativa da Difusividade e Condutividade Térmica de Alimentos em Pastas. **Revista Processos Químicos**, v.4(7), p.33–38, 2010.

NASCIMENTO, J. S. M.; SILVA, T. **Método de diferenças finitas**: Aplicação na equação do calor. 2013. 55p. Monografia (Licenciatura em Matemática) — Universidade Federal do Amapá, Macapá.

OISHI, C. M. **Análise e implementação de métodos implícitos no sistema FreeFlow2D**. 2004. 162p. Dissertação (Mestrado em Ciências da Computação e Matemática Computacional) — Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, São Carlos.

O'NEIL, P. V. **Advanced Engineering Mathematics**. 7.ed. 2011. 893p.

PANIGRAHI, S. S.; SINGH, C. B.; FIELKE, J.; ZARE, D. Modeling of heat and mass transfer within the grain storage ecosystem using numerical methods: A review. **Drying Technology**, 2019.

PARK, K. J.; ALONSO, L. F. T.; NUNES, A. S. Determinação experimental da condutividade e difusividade térmica de grãos em regime permanente. **Ciência Rural**, v.19(2), p.264–269, 1999.

PHILIPPI, S. T. **Tabela de Composição de Alimentos**: suporte para decisão nutricional. 7.ed. Barueri, SP: Manole, 2021.

RECH, F. L. A. **Modelagem matemática da transferência de calor em silos de soja**. 2018. 66p. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) — Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí.

REGINATO, M. P.; ENSINAS, S. C.; RIZZATO, M. C. O.; SANTOS, M. K. K.; PRADO, E. A. d. Boas práticas de armazenamento de grãos. **Encontro de ensino, pesquisa e extensão**, Mato Grosso do Sul, 2014. Anais do ENIC, (6).

RURAL, R. G. **Maior produtor de arroz do Brasil, Rio Grande do Sul abre oficialmente a colheita**. São Paulo: Editora Globo, 2021. Disponível em: <https://revistagloborural.globo.com/Noticias/Agricultura/Arroz/noticia/2021/02/maior-produtor-de-arroz-do-brasil-rio-grande-do-sul-abre-oficialmente-colheita.html>. Acesso em: 20 setembro 2021.

SANTOS, M. V. H. d. **Modelagem da transferência de calor entre as massas de grãos de arroz em um silo armazenador**. 2020. 97p. Dissertação (Mestrado em Ciências Ambientais) — Universidade Federal de Pelotas, Pelotas.

SCHIAVON, R. A. **Efeitos do método de secagem sobre a qualidade e o desempenho industrial de grãos de arroz armazenados em ambiente controlado com temperatura reduzida**. 2010. 72p. Dissertação (Mestrado em Ciência e Tecnologia Agroindustrial) — Universidade Federal de Pelotas, Pelotas.

SEIDLER, E. P.; FILHO, L. F. F. A evolução da agricultura e o impacto gerado pelos processos de inovação: um estudo de caso no município de Coxilha - RS. **Economia e Desenvolvimento**, Santa Maria, v.28, n.1, p.388 – 409, 2016.

SENAR. **Grãos: armazenamento de milho, soja, feijão e café**. Brasília: Senar, 2018. (Coleção SENAR 2016).

SILVA, A. P. da. **Determinação da difusividade térmica (e sua incerteza) para produtos acondicionados em recipientes cilíndricos durante seu aquecimento: Experimentação, Otimização e Simulação**. 2021. 142p. Dissertação (Mestrado em Física) — Universidade Federal de Campina Grande, Paraíba.

SILVA, J. D. C. **Análise Histórica sobre os métodos de conservação dos alimentos**. 2018. 35p. Monografia (Técnico em Alimentos) — Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - *Campus* Barretos, Barretos.

SILVA, J. S. **Secagem e Armazenagem de produtos agrícolas**. 2.ed. Viçosa: Aprenda Fácil, 2008. 560p.

SIMIONI, D.; OLIVEIRA, M. de; PAGNUSSATT, F. A.; DEUNER, C. C.; GUTKOSKI, L. C.; ELIAS, M. C. Parâmetros operacionais na secagem intermitente de grãos de aveia branca cultivar UPFA 20 teixeirinha. **Ciência e Agrotecnologia**, Lavras, v.32, n.2, p.497–502, 2008.

SMANIOTTO, T. A. S. **Secagem e armazenamento de grãos de girassol**. 2016. 93p. Tese (Doutorado em Ciências Agrárias – Agronomia) — Instituto Federal Goiano, Rio Verde.

SMITH, E. A.; SOKHANSANJ, S. Natural convection and the temperature of stored produce - a theoretical analysis. **Canadian Agricultural Engineering**, v.32, p.91–97, 1990.

SOBREIRA, M. C. A. **Influência do teor de impurezas nas propriedades físicas de milho, soja e arroz em casca**. 2017. 35p. Monografia (Graduação em Engenharia

Agrícola e Ambiental) — Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Agrárias e Ambientais, Sinop, Mato Grosso.

STARK, F. **Avaliação estudo do comportamento da temperatura de grãos armazenados em um silo através de um modelo matemático**. 2018. 51p. Monografia (Graduação em Engenharia Agrícola) — Universidade Federal de Pelotas, Pelotas.

TESTEZLAF, R. **Irrigação: métodos, sistemas e aplicações**. Campinas: Faculdade de Engenharia Agrícola da Unicamp, 2017.

TSUKAMOTO, M. M. **Modelagem analítica e simulação numérica de um sistema móvel de supressão de sloshing**. 2010. 109p. Tese (Doutorado em Engenharia) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo.

WALTER, M.; MARCHEZAN, E.; AVILA, L. A. d. Arroz: composição e características nutricionais. **Ciência Rural**, Santa Maria, v.38, n.4, p.1184–1192, 2008.

ZILLI, J. B.; BARCELLOS, G. M. Padrão de variação estacional dos preços do arroz no estado do Rio Grande do Sul. **Informações Econômicas**, São Paulo, v.36, n.3, p.7–17, 2006.

ÇENGEL, Y. A.; GHAJAR, A. J. **Transferência de calor e Massa: Uma abordagem prática**. 4.ed. Porto Alegre: Mc Grall-hill, 2012.

## **ANEXO A TRABALHOS ELABORADOS**

TONI, P. T. ; RICKES, A. ; FURTADO, I. C. ; WEYMAR, G. J. . MODELO UNIDIMENSIONAL E TRANSIENTE PARA A TRANSFÊRENCIA DE CALOR EM UM SILO COM ARROZ: UMA ABORDAGEM PELO MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS. In: 7ª SII-EPE - Semana integrada da UFPEL, 2021, Pelotas. XXIII Encontro de Pós-Graduação - ENPÓS, 2021. p. 1-4.

RICKES, A. ; TONI, P. T. ; FURTADO, I. C. ; WEYMAR, G. J. . TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM SILOS CONTENDO ARROZ: SOLUÇÃO DE MODELOS TRANSIENTES UNIDIMENSIONAL E BIDIMENSIONAL COM DIFUSIDADE TÉRMICA VARIÁVEL. In: XXIV Encontro Nacional de Modelagem Computacional - ENMC, 2021, Formato Online. Encontro Nacional de Modelagem Computacional e Encontro de Ciência e Tecnologia de Materiais, 2021. p. 1-10.

**Transferência de calor em um silo armazenador de arroz: uma abordagem pelo método explícito das diferenças finitas para dois modelos transientes unidimensional e bidimensional – Pétra Thalía De Toni**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS**

Instituto de Física e Matemática

Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática



Dissertação

**Transferência de calor em um silo armazenador de arroz:  
uma abordagem pelo método explícito das diferenças  
finitas para dois modelos transientes unidimensional e  
bidimensional**

**PÉTRA THALÍA DE TONI**

Pelotas, 2022