

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS**  
Instituto de Física e Matemática  
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática



Dissertação

**Análises paramétricas de trocadores de calor solo-ar acoplados a estruturas galvanizadas**

**Marcos Rafael Burlón Olivera**

Pelotas, 2022

**Marcos Rafael Burlón Olivera**

**Análises paramétricas de trocadores de calor solo-ar acoplados a estruturas galvanizadas**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática

Orientador: Prof. Dr. Jairo Valões de Alencar Ramalho  
Coorientador: Prof. Dr. Honório Joaquim Fernando

Pelotas, 2022

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas  
Catalogação na Publicação

O48a Olivera, Marcos Rafael Burlón

Análises paramétricas de trocadores de calor solo-ar acoplados a estruturas galvanizada / Marcos Rafael Burlón Olivera ; Jairo Ramalho, orientador ; Honório Joaquim Fernando, coorientador. — Pelotas, 2022.

109 f.

Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2022.

1. Trocadores de calor solo-ar. 2. Dutos aletados. 3. Potencial térmico. 4. Eficiência térmica. 5. Modelagem e simulação numérica. I. Ramalho, Jairo, orient. II. Fernando, Honório Joaquim, coorient. III. Título.

CDD : 536.2012

**ANÁLISES PARAMÉTRICAS DE TROCADORES DE CALOR SOLO-AR  
ACOPLADOS A ESTRUTURAS GALVANIZADAS**

por

**Marcos Rafael Burlón Olivera**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, PPGMMat, do Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

**Mestre em Modelagem Matemática**

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Jairo Valões de Alencar Ramalho – Orientador (UFPel)

Prof. Dr. Honório Joaquim Fernando – Co-Orientador (UFF)

Prof. Dr. Elizaldo Domingues dos Santos (FURG)

Prof. Dra. Daniela Buske (UFPel)

Profa. Dr. Guilherme Jahnecke Weymar (UFPel)

## AGRADECIMENTOS

Agradecer, muitas vezes, torna-se um ato de injustiça, pois é muito difícil abranger todas as pessoas que me ajudaram a concluir este mestrado. No entanto, assumindo o risco de ser um pouco injusto, não quero deixar de usar este espaço para agradecer especialmente:

Ao Engenheiro Dr. Martín Pomar, que foi o promotor para que eu continuasse meus estudos com foco em modelagem matemática. Com ele discutimos a orientação do mestrado, o lugar onde poderia realizá-la e até organizamos as primeiras reuniões com os integrantes do PPGMMat da UFPEL até ao final de 2018. Infelizmente, ele não poderá estar fisicamente nesta culminação, mas eu sei que de onde Deus disponha seu espírito, ele estará me observando.

À minha parceira de todas as batalhas, Nibia Navarro, que não hesitou em iniciar este caminho desde que a convidei a participar, com quem compartilhamos muitas horas de trabalho e estudo, de diálogo sempre construtivo, de alegrias e tristezas. Formamos uma equipe muito autocrítica e reflexiva, com um olhar sempre à frente, para avançar, para melhorar. Passamos por momentos muito difíceis nesses anos, mas sem sua ajuda, sem seu apoio e seu forte compromisso, teria sido ainda mais difícil para mim. Também a dois importantes colegas neste caminho, Leonardo Alves e Ana Maria Bersch Domingues, que sempre estiveram dispostos a colaborar e ajudar-me.

À minha mulher Tatiana Da Silva, que sempre me apoiou a continuar com a tarefa, sacrificando-se muitas vezes em diversas atividades para que eu pudesse estudar, assistir e render em meus estudos. Com seu amor e contínuo alento, ela sempre foi, como em tudo, um motor de otimismo e uma injeção de “você pode”.

Ao Dr. Jairo Valões de Alencar Ramalho, meu professor de várias disciplinas e meu tutor, excelente profissional e pessoa, sempre atento e disposto a colaborar, ajudar, explicar. Ele me ensinou pelo exemplo, a paciência e o senso de autocrítica que um bom professor deve ter. Por outro lado, foi ele quem me emprestou seu conhecimento para me aventurar na pesquisa e simulação; ao “mundo” da publicação de artigos e apresentação de trabalhos em congressos.

Ao Dr. Honório Joaquim Fernando, um profissional excelente e melhor pessoa, que não hesitou em me ajudar em nenhum momento. Sempre com humor e com as palavras certas, despertou minha curiosidade e o desejo de compreender e aprofundar matematicamente os fenômenos físicos envolvidos neste trabalho. Com profundo senso crítico, sempre forneceu as palavras certas e as correções para que o trabalho fosse direcionado.

Aos meus pais, que desde criança incutiram em mim o amor pela sabedoria, pela leitura, pelo conhecimento e pelo estudo; que com seus exemplos sempre foram meu

caminho, meu guia.

Aos professores do PPGMMat que tive o prazer de conhecer e com quem aprendi muito nas disciplinas que eles lecionaram: Daniela Buske, Glênio Aguiar Gonçalves, Guilherme Janecke Weymar, Régis Sperotto de Quadros, Gustavo Maia e Ruth da Silva Brum. Aproveito para estender meus sinceros agradecimentos a todos os membros da banca pelas valiosas sugestões e revisões do trabalho.

Por último, e não menos importante, à UTEC, que me deu a oportunidade de me profissionalizar em meu trabalho como Professor de Matemática em Engenharia no Instituto Regional del Norte, Rivera, Uruguai; a meus colegas de trabalho, e mais especificamente, meu coordenador Luís García, o diretor Felipe Fajardo e o coordenador pedagógico Marcelo Ubal, três pessoas que sempre me deram todo o apoio para que este mestrado fosse possível.

**Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas na solução de cada problema há uma certa descoberta. O problema que se coloca pode ser modesto: mas, se põe à prova a curiosidade, induz a pôr em jogo as faculdades inventivas.**

**GEORGE PÓLYA**

## RESUMO

BURLÓN OLIVERA, Marcos Rafael. **Análises paramétricas de trocadores de calor solo-ar acoplados a estruturas galvanizadas**. 2022. 108 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2022.

Trocadores de calor solo-ar (TCSA) conectam o sistema de ventilação de um edifício a dutos enterrados, visando aproveitar a inércia térmica do solo para resfriar ou aquecer edificações. As capacidades de aquecimento e resfriamento de TCSA dependem de muitos fatores, como clima local, propriedades do solo e projeto da instalação. Este estudo busca avaliar o desempenho térmico de TCSA acoplando os dutos a aletas galvanizadas (com alta condutividade térmica) visando melhorar as trocas térmicas com o solo circundante. Em particular, este trabalho adota as condições do solo e clima (subtropical) da cidade gaúcha de Viamão, cujos dados associados foram obtidos da literatura referente a uma instalação experimental feita naquela localidade. As simulações utilizam um modelo analítico validado, conhecido pela sigla GAEA, o qual depende de estimativas das temperaturas do solo sem os dutos. Nessa dissertação, tais temperaturas são calculadas via resolução numérica da equação de conservação de energia, em regime transiente e em domínios bidimensionais, através de uma combinação dos métodos de elementos finitos e de diferenças finitas. A pesquisa começa avaliando diferentes configurações de aletas sugeridas pela literatura recente. Em cada caso, foram calculadas estimativas para o valor eficaz anual (RMS) do potencial térmico do solo. Assim, considerou-se como melhor resultado o que produziu maior valor RMS com menor custo de material. Em geral, observou-se também um aumento expressivo (de mais de 90%) na eficiência anual dos TCSA com a adoção das aletas. Logo, o trabalho prosseguiu com um estudo paramétrico, verificando as possibilidades de redução do tamanho do duto, mantendo taxas de eficiência superiores a 70%. Assim, os resultados mostram que se pode reduzir em quase metade o tamanho da instalação. Por fim, para melhorar a compreensão da fenomenologia, analisou-se o enriquecimento da condutividade térmica do solo ao redor dos dutos e como isso afeta o potencial térmico dos TCSA. Verificou-se que um aumento indiscriminado da condutividade térmica do solo pode não ser benéfica para os TCSA. Portanto, esse tema demanda mais estudos como os feitos aqui.

**Palavras-chave:** Trocadores de calor solo-ar, Dutos aletados, Potencial térmico, Eficiência térmica, Modelagem e simulação numérica.



## ABSTRACT

BURLÓN OLIVERA, Marcos Rafael. . 2022. 108 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2022.

Earth-air heat exchangers (EAHE) connect buried ducts to the ventilation system of a building. They aim to take advantage of the ground thermal inertia, which makes it hotter or colder than ambient air at different times. Studying this technology is valuable because EAHE use a renewable thermal energy source and consume little electricity. The heating and cooling capabilities of EAHE depend on many factors such as local climate, soil properties, and facility design. This research seeks to evaluate the thermal performance of EAHE, considering the ducts coupled to galvanized fins (with high thermal conductivity) to improve thermal exchanges with the surrounding soil. In particular, this work adopts the soil and climate conditions (subtropical) from the south Brazilian city of Viamão. The data comes from the literature about an experimental installation built in that location. The simulations use a validated analytical model, known by the acronym GAEA, which depends on estimates of soil temperatures without the ducts. In this dissertation, such temperatures are calculated numerically by solving the energy conservation equation, in the transient regime and two-dimensional domains, through a combination of finite element and finite difference methods. The research started by assessing recent literature suggestions for fin configurations; in each case, estimating the annual root mean square value (RMS) of the soil thermal potential. Thus, the best result was considered the one that produced the highest RMS value and needed less galvanized material. In general, adopting fins caused a significant increase (over 90%) in the annual efficiency of EAHE. Hence, the second part of the work took a parametric study to verify the possibilities of minimizing the duct size, keeping efficiency rates above 70%. In this sense, the results show that the installation size can be reduced by almost half. Finally, to better understand the phenomenology, this work analyzes the soil thermal conductivity enrichment around the duct and how it affects the EAHE thermal potential. The study shows that an indiscriminate increase in soil thermal conductivity may not be beneficial to EAHE performance. Therefore, this topic demands further investigations such as those taken in this manuscript.

**Keywords:** Earth-air heat exchangers (EAHE), Finned ducts, Thermal potential, Thermal efficiency, Computer modeling and simulations.

## LISTA DE FIGURAS

1	Esquema TCSA típico. . . . .	15
2	Tipos de Pesquisa. Fonte: (Jung, 2003). . . . .	22
3	Domínio Computacional 2D . . . . .	25
4	Domínio Computacional 3D . . . . .	25
5	Esquema de processos de transferência de calor em um TCSA . . . . .	27
6	Ilustração do domínio $\Omega$ e seu contorno $\Gamma$ . . . . .	54
7	Configuração geométrica (seção transversal) . . . . .	56
8	Variação de parâmetros e geração de malha em GMSH . . . . .	57
9	Vista da malha selecionada no programa GMSH . . . . .	58
10	Comparação dos resultados do modelo atual com outros pesquisas de referência. . . . .	60
11	Campos de temperatura média diária do solo nas quatro estações usando o modelo atual . . . . .	61
12	Diferentes configurações de duto, bloco e aletas . . . . .	62
13	Definições do domínio computacional. . . . .	63
14	Campos de temperatura em dois casos (10% e 90%) . . . . .	65
15	Diferença entre as temperaturas na proporção de 10% (esquerda) e 90% (direita). . . . .	65
16	Comparativo das temperaturas de saída ao longo do ano: sem (esquerda) e com (direita) partes galvanizadas . . . . .	66
17	Gráfico das temperaturas utilizando diferentes comprimentos de duto . . . . .	67

## LISTA DE TABELAS

1	Propriedades Termofísicas . . . . .	24
2	Dados de teste de independência de malha . . . . .	58
3	Valores RMS anuais para o potencial térmico do solo nos diferentes casos . . . . .	62
4	Resultados obtidos nos nove casos. . . . .	66
5	Comparação entre o comprimento do duto ( $L_0$ ) e a eficiência térmica anual ( $\theta$ ). . . . .	67

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

### Abreviaturas

TCSA	Trocador de calor solo-ar
GMSH	Gerador de malha tridimensional de elementos finitos
GAEA	<i>Graphische Auslegung von Erdwärme Austauschern</i>
EAHE	<i>Earth-air heat exchangers</i>
INESCO	Instituto de Pesquisas Energéticas Não Convencionais
HVAC	<i>Heating, ventilating, and air conditioning</i>
RMS	Diferenças quadradas médias
MEF	Método de elementos finitos
PVIC	Problema de valor inicial e de contorno
ECMWF	<i>European Centre for Medium-Range Weather Forecasts</i>

### Nomenclatura

$A$	Área ( $m^2$ )
$C_p$	Calor específico ( $J/kg\ K$ )
div	Operador divergência
$D_0$	Diâmetro do duto (m ou cm)
$f_{RMS}$	RMS para uma determinada função modelo
$h$	Coefficiente de convecção ( $W/m^2K$ )
$J$	Determinante Jacobiano
$L_0$	Comprimento do duto (m)
$Nu_D$	Número de Nusselt (adimensional)
$Pr$	Número de Prandtl (adimensional)
$P_s$	Potencial térmico do solo
$P_{TCSA}$	Potencial térmico dos TCSA
$\dot{Q}$	Taxa de transferência de calor (W)

$Re_D$	Número de Reynolds (adimensional)
$t$	Tempo (s ou dias)
$T$	Temperatura ( $^{\circ}\text{C}$ ou K)
$U_L$	Coeficiente de transferência de calor por comprimento (W/m K)
$U^*$	Relação de condutâncias (adimensional)
$x$	Coordenada espacial cartesiana (m)
$x_0$	Abscissa do centro do duto (m)
$y$	Coordenada espacial cartesiana (m)
$z$	Coordenada espacial cartesiana (m)
$z_0$	Profundidade do duto (m)

#### Letras gregas

$\beta$	Propriedade física arbitrária
$\lambda$	Condutividade térmica (W/m K)
$\mu$	Viscosidade dinâmica (kg/ms)
$\rho$	Massa específica (kg/m <sup>3</sup> )
$\theta$	Eficiência dos TCSA
$\theta_a$	Eficiência anual dos TCSA
$\Omega$	Domínio espacial

#### Subscritos ou Sobrescritos

$a$	Ar na entrada do duto
$s$	Saída do duto
$w$	Parede do duto

#### Demais Símbolos

$\Delta_x$	Tamanho de segmento
$\nabla$	Operador gradiente
$\nabla^2$	Operador laplaciano

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	14
1.1	Motivação e contexto da pesquisa	14
1.2	Um pouco de história	16
1.3	Estado da arte	16
1.4	Problema da pesquisa	19
1.5	Objetivos do estudo	20
1.5.1	Objetivo geral	20
1.5.2	Objetivos específicos	20
1.6	Organização do trabalho	21
<b>2</b>	<b>METODOLOGIA</b>	22
2.1	Classificação da pesquisa	22
2.2	Definições importantes	23
2.3	Apresentação geral	24
2.4	Transferência de calor no solo	26
2.5	Modelagem matemática da condução de calor	26
2.5.1	Introdução	26
2.5.2	Movimento e sua observação (cinemática)	29
2.5.3	Descrição do movimento	30
2.5.4	Equação geral de balanço	35
2.5.5	Forma local do Princípio da Conservação da Energia	38
2.5.6	Relações constitutivas	47
2.6	Modelo GAEA	50
2.7	Metodologia numérica	51
2.8	Malhas	55
2.8.1	Geração de malhas	55
2.8.2	Testes de malhas	57
<b>3</b>	<b>RESULTADOS</b>	59
3.1	Verificação e validação do modelo computacional	59
3.2	Projetos com materiais galvanizados ao redor do duto	60
3.3	Uma análise do enriquecimento da condutividade térmica do solo	62
3.4	Eficiência térmica e comprimento do duto	66
<b>4</b>	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS</b>	68
	REFERÊNCIAS	69
	ANEXO A ARTIGOS APRESENTADOS EM CONGRESSOS	73

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Motivação e contexto da pesquisa

Estima-se que a demanda de eletricidade deverá aumentar cerca de 80 % nos próximos 30 anos; seja no transporte, aquecimento ou indústria (PETROLEUM, 2020). Em paralelo, fenômenos como o efeito estufa, considerado uma causa das mudanças climáticas, força a busca por fontes de energia não poluentes. Nesse cenário, há poucos benefícios se a energia usada para gerar essa eletricidade não for descarbonizada, sendo relevante o crescimento da utilização de fontes renováveis de energia. Mais ainda, convém aumentar a eficiência energética das tecnologias e dispositivos baseados em fontes renováveis.

Nos últimos anos, o gasto de energia com sistemas de ar condicionado tradicionais cresceu significativamente (RODRIGUES AND GILLOTT, 2015), portanto, o conforto térmico de edificações é um tema preocupante, pois os sistemas de ar condicionado usuais consomem grandes quantidades de energia elétrica (BRUM ET AL., 2012; BRUM, 2016).

Nos próximos 20 anos, espera-se uma maior diversidade na matriz energética global (PETROLEUM, 2020). Isso significa que a combinação energética será impulsionada também pela escolha do cliente e não apenas pela disponibilidade de combustível, como é o caso dominante atualmente. Assim, mudanças globais na matriz energética (maior uso de fontes renováveis de energia e não poluentes) podem ocorrer se forem reforçadas por alterações significativas nas preferências e comportamentos sociais, que são impulsionados por políticas públicas e educação da população.

O sol é uma fonte de energia impressionante e é origem de quase todas as outras fontes de energia (VAZ, 2011), pode-se explorá-lo de várias maneiras, por exemplo, aproveitando a energia solar que atinge a superfície terrestre e é armazenada pelo solo como energia térmica. O fluxo de calor, que surge da interação entre as moléculas do solo, muda de direção nos ciclos diários e anuais. Flui para o solo durante o dia e para a superfície à noite; um processo semelhante ocorre durante o verão e o inverno. Assim, os TCSA aproveitam esse fenômeno empregando um ou mais dutos

enterrados horizontalmente ou verticalmente que são conectados ao sistema de ventilação de uma edificação. O ar é transportado dentro dos dutos, troca calor com o solo e entra no ambiente do edifício em temperaturas mais amenas, próximas da média de temperatura anual de uma região (BRUM ET AL., 2012; RAMALHO ET AL., 2018; PAKOSTAS ET AL., 2019). A Figura 1 mostra um esquema TCSA típico. Se necessário, eles podem ser acoplados também a um sistema de ar condicionado, reduzindo seu consumo de energia elétrica

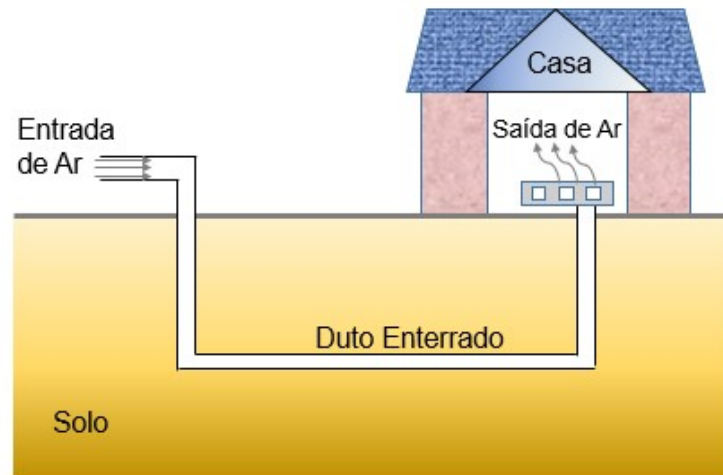


Figura 1: Esquema TCSA típico.

Parte desta pesquisa de TCSA concentra-se na modelagem do fenômeno da transferência de calor, com o objetivo de aumentar seu potencial e eficiência térmica. Domingues et al. (2021) apresentam um balanço recente dos estudos brasileiros de TCSA, enquanto os artigos de Bordoloi et al. (2018), Agrawal et al. (2019) e Liu et al. (2021) cobrem longas revisões da literatura mundial do assunto. Alguns dos principais tópicos da modelagem dizem respeito: (1) a localização física da instalação, temperatura do ar, umidade, composição do solo, compactação, radiação solar; (2) parâmetros operacionais, velocidade do ar, profundidade de instalação, formato do duto e materiais. Muitos trabalhos também investigam sistemas híbridos, combinando TCSA a outras tecnologias que podem ou não usar energia renovável (AGRAWAL ET AL., 2019).

Uma variedade de trabalhos (BRUM ET AL., 2012, 2013; BRUM, 2016; RAMALHO ET AL., 2018; HERMES ET AL., 2020; NÓBREGA ET AL., 2020; DOMINGUES ET AL., 2021) mostram que os potenciais térmicos dos TCSA (isto é, a diferença entre as temperaturas do ar na entrada e na saída dos dutos) podem ser consideráveis no estado brasileiro do Rio Grande do Sul, permitindo reduzir significativamente a carga térmica das construções locais. Assim, como se vê adiante, os resultados da presente dissertação consideram o cenário particular da cidade de Viamão no estado do Rio Grande do Sul.



## 1.2 Um pouco de história

Ao longo da história, a humanidade desenvolveu múltiplos sistemas que usaram a energia armazenada no solo e a proveniente do sol para atingir uma temperatura mais agradável no interior das edificações. Desde a pré-história, o homem já sabia que as cavernas naturais eram frescas no verão e quentes no inverno (CABEZAS, 2012).

Há cerca de 3000 a.C., os arquitetos iranianos já usavam torres de vento e túneis subterrâneos para resfriamento passivo de edificações (OZGENER, 2011). De dois a três séculos a.C., pode-se mencionar também as cavernas da Capadócia, na Turquia. Eram cavernas de casas escavadas artificialmente. Há evidências da construção de 36 cidades subterrâneas ao longo dos séculos nas quais foram encontrados todos os recursos necessários para a vida, poços de água, dutos de ventilação, etc (CABEZAS, 2012).

Os Vikings, oriundos da Escandinávia, que se expandiram pela Europa no final da Antiguidade e início da Idade Média, construíram suas casas parcial ou totalmente enterradas para manter um ambiente interno mais quente, aproveitando assim a energia da radiação solar que se acumula na superfície terrestre. O mesmo modelo de casa-caverna também foi encontrado em Guadix, na Espanha. Muitas delas ainda são habitadas por manterem temperaturas estáveis entre 18 e 20 °C (DÍAZ, 2018).

Também na Itália há outro exemplo de aproveitamento térmico do solo, neste caso em Villas Costozza. Essas construções italianas de meados do século XVI d.C. situam-se numa encosta acima de grandes grutas naturais que se ligavam às casas por chaminés verticais. Dessa forma, são gerados túneis de vento naturais que condicionam o ar interno ao longo do ano. Encontramos esse mesmo princípio nos chamados poços canadenses que são usados até hoje, podendo ser considerados exemplos rústicos de TCSA (CABEZAS, 2012).

Por fim, cabe ressaltar que o uso dos modernos tipos de TCSA já era algo bem difundido na Alemanha desde os anos 70 (KALZ ET AL., 2011). Em geral, essa tecnologia é bastante utilizada em países desenvolvidos há muitos anos (OZGENER, 2011), porém, ainda há poucas instalações de TCSA no Brasil (DOMINGUES ET AL., 2021). Logo, trabalhos como os desta dissertação também contribuem para a divulgação educacional dos TCSA no país.

## 1.3 Estado da arte

Embora o conhecimento do princípio de funcionamento dos TCSA não seja recente, seu estudo e pesquisa se intensificam a partir dos anos 90, quando aumentaram as preocupações globais com temas como: necessidade de explorar dispositivos baseados em fontes renováveis de energia, diminuição do consumo energético com resfriamento/aquecimento de edificações, redução da emissão de poluentes (BRUM,

2016). Por exemplo, naquela década, Mihalakakou et al. (1995) apresentaram um dos primeiros modelos numéricos completos para estudar TCSA usando dados obtidos com medições realizadas de 1917 a 1990 no Observatório Nacional de Atenas (Grécia). Os autores sistematizaram um banco de dados de temperaturas do solo em diferentes profundidades. Seus resultados foram validados através de comparações com dados experimentais analisando a variação da temperatura nos dutos, bem como a umidade do solo e do ar nos dutos.

Na Faculdade de Agronomia da Universidade Nacional de La Pampa (Argentina), Flores and Lesino (2000) realizaram uma investigação para o INESCO (Instituto de Pesquisas Energéticas Não Convencionais) onde se utilizavam TCSA para testar o condicionamento térmico de escritórios. Seu trabalho validou um modelo de distribuição das temperaturas no solo através da expansão da série de Fourier em quatro termos principais. Para a pesquisa, foi utilizado um modelo unidimensional.

Pfafferott (2003) apresentou diferentes questões para a avaliação de desempenho dos TCSA. Dado que o escoamento de ar e o local da construção são conhecidos, o autor pergunta: "é mais importante alcançar uma performance energética específica baseada na área superficial dos TCSA, na diferença entre as temperaturas do solo e do ar, ou na minimização de quedas de pressão?". Assim, ele introduziu uma metodologia de comparação de desempenho para TCSA considerando três instalações europeias.

Considerando TCSA para três cidades italianas com climas distintos (Nápoles, Roma e Milão), Ascione et al. (2011) realizaram uma investigação para avaliar o desempenho energético desses dispositivos com base nos principais parâmetros e condições de contorno. Os autores utilizaram uma versão do modelo analítico GAEA, introduzido por Benkert et al. (1997), que é adotado no presente trabalho e encontra-se detalhado na Seção 2.6. Segundo os resultados dos autores: a influência do material do duto não afeta significativamente o desempenho térmico dos TCSA; solos úmidos e climas frios são mais propícios aos TCSA; os melhores desempenhos foram alcançados usando dutos com comprimento de 10 a 50 m; uma boa relação custo-energia é obtida com dutos enterrados em profundidades de 2 a 3 m. Mais recentemente, Papakostas et al. (2019) realizaram diferentes validações e comparações de modelos de simulação unidimensionais com dados teóricos e experimentais de outros artigos. A escolha desses modelos se deu por sua simplicidade e eficácia, quando comparados a modelos bi ou tridimensionais que requerem muito esforço computacional. O estudo também avaliou uma variação do já citado modelo GAEA.

No Brasil, estudos experimentais pioneiros sobre TCSA foram feitos por Vaz (2011) na cidade gaúcha de Viamão. O seu trabalho desenvolveu e validou também um modelo numérico tridimensional, baseado nas equações de conservação de massa, energia e balanço da quantidade de movimento para o ar nos dutos (assumindo ainda

escoamento transiente e turbulento) e de conservação de energia no solo. As simulações foram feitas usando os softwares FLUENT (que se baseia em métodos de volumes finitos) e GAMBIT (para geração de malhas). Na construção, foi instalado um duto horizontal de 25,77 m de comprimento e 0,11 m de diâmetro, enterrado a 1,6 m de profundidade. As medidas experimentais estabeleceram as condições de contorno e propriedades termofísicas que foram utilizadas na simulação numérica.

A pesquisa de Vaz (2011) vem servindo como referência para vários outros trabalhos (BRUM ET AL., 2013; BRUM, 2016; BRUM ET AL., 2019; RAMALHO ET AL., 2018; NÓBREGA ET AL., 2020; DOMINGUES ET AL., 2021), incluindo os estudos dessa dissertação. Esse também é o caso do trabalho de Brum et al. (2012), onde foi feita uma investigação numérica da influência da profundidade dos dutos no potencial térmico dos TCSA, referentes à cidade de Viamão. Os resultados apontaram que 3 m seria uma profundidade de referência para o local.

Em sua tese, Brum (2016) realiza uma pesquisa sobre TCSA com modelos numéricos tridimensionais, validados através dos dados experimentais de Vaz (2011). Adotando o método Design Construtal (BEJAN AND LORENTE, 2008), o desempenho térmico dos TCSA foi avaliado com base em diferentes configurações/disposições geométricas de suas estruturas. Utilizando o conceito de potencial térmico instantâneo, a autora apresentou os resultados modelados na forma de funções periódicas, simplificando o trabalho de análise. Destaca-se que o trabalho apontou várias possibilidades de otimizar o espaçamento de instalações com múltiplos dutos, visando maximizar o seu desempenho térmico. Dentro da mesma linha de pesquisa, aplicando o Design Construtal, os artigos de Rodrigues et al. (2015) e Ramalho et al. (2018), também avaliaram instalações com múltiplos dutos. Os resultados apresentaram estimativas para potenciais térmicos, quantidades de calor trocadas e eficiências energéticas dos TCSA, considerando o cenário da cidade de Viamão.

Ainda na pesquisa referente a TCSA no Rio Grande do Sul, a sequência de trabalhos feitos por Rodrigues et al. (2018), Hermes et al. (2020) e Domingues et al. (2021) consideraram instalações para três locais da cidade de Rio Grande. Os artigos utilizaram dados climáticos de reanálise, fornecidos por um banco de dados europeu (ECMWF). Eles também obtiveram estimativas do tipo de solo local via testes de sondagem a percussão (SPT). Os trabalhos propuseram diferentes estratégias de modelagem considerando camadas de solo não homogêneas e, em particular, a presença de lençóis freáticos próximos a superfície. Os dois primeiros trabalhos adotaram modelos tridimensionais e o último adotou uma modelagem unidimensional baseada no GAEA. Em todos os casos, os autores validaram os modelos a partir dos dados de Vaz (2011). Uma pesquisa correlata, considerando a realidade da cidade gaúcha de Pelotas foi feita por Nóbrega et al. (2020). Este último adotou e validou o modelo 1D apresentado em Bisoniya (2015) e Paepe and Janssens (2003). Esses trabalhos veri-

ficaram que em Rio Grande e Pelotas não há vantagens significativas em instalações com profundidades superiores a 2 m.

Nesse ponto, cabe direcionar o leitor para os trabalhos de Bordoloi et al. (2018), Agrawal et al. (2019) e Liu et al. (2021), pois esses fizeram revisões recentes e exaustivas da literatura mundial sobre TCSA. Seus trabalhos abordam investigações analíticas, numéricas e/ou experimentais para diferentes combinações de TCSA. Em várias situações, os sistemas de ventilação baseados unicamente em TCSA não atendem totalmente os requisitos térmicos de um ambiente e, portanto, é preciso analisar o funcionamento e alguns parâmetros de estruturas híbridas. Nesse caso, os TCSA são acoplados com outros dispositivos ativos/passivos (por exemplo, chaminé solar, resfriador evaporativo, HVAC, coletor de vento e aquecedor solar de ar) visando aprimorar o sistema completo de aquecimento/resfriamento de uma edificação.

Dentre os vários resultados resumidos nas três últimas referências de revisão citadas, destaca-se os seguintes: (a) os materiais do duto não têm muita influência na temperatura de saída do ar; (b) em climas úmidos, os TCSA não são tão eficientes, então convém conectá-los a um dispositivo de controle da umidade, alterando o consumo energético; (c) o comprimento dos dutos pode ser reduzido dependendo das propriedades térmicas do solo; (d) é comum que TCSA apresentem melhor desempenho durante o dia no verão e à noite no inverno; (e) nota-se bastante preocupação com a redução do tamanho da instalação, devido as restrições de espaço em áreas urbanas; (f) com TCSA pode-se obter economias de até 50 % de energia em relação a sistemas convencionais.

Por fim, um trabalho particular que motivou a pesquisa dessa dissertação foi o de Hassanzadeh et al. (2018), o qual explora uma ideia para aumentar a troca térmica de TCSA. A novidade baseou-se na integração dos dutos com o que eles chamaram de “pontes galvanizadas” e que, basicamente, na linguagem especializada, são conhecidas simplesmente por aletas (INCROPERA ET AL., 2008; ÖZISIK, 1993). Os autores examinaram numericamente seis configurações, variando a localização e o número de aletas ao redor do duto. A metodologia foi bidimensional e considerou diferentes tipos de solo e de temperatura do ar ambiente. Eles verificaram melhorias na taxa de transferência de calor entre os dutos e o solo com a incorporação das aletas. Todavia, os autores não chegaram a analisar os efeitos das aletas na variação da temperatura de saída dos TCSA. Esse aspecto fundamental da pesquisa foi desenvolvido nesta dissertação e os resultados são apresentados no Capítulo 3.

## 1.4 Problema da pesquisa

Em Petroleum (2020), os autores prevêem que a participação das fontes de energia renováveis nos próximos 30 anos será muito significativa, passando de 5% em 2018

para algo entre 20% e até 60% em 2050. Assim, elas vão penetrar de forma mais rápida no sistema de energia do mundo do que qualquer outro combustível na história.

Como já mencionado, em áreas urbanizadas (principalmente em grandes cidades), uma restrição para a instalação de TCSA com dutos horizontais é o espaço reduzido, mas poucos trabalhos abordam isso (AGRAWAL ET AL., 2019). Por exemplo, Mathur et al. (2017) propuseram um projeto em forma de espiral para reduzir o espaço de construção. Eles obtiveram resultados satisfatórios em comparação com os sistemas usuais que empregam dutos horizontais retos. Benrachi et al. (2017) também consideraram dutos em forma de espiral do sistema TCSA para reduzir os requisitos de área. No mesmo sentido, Asgari et al. (2020) avaliaram e compararam os desempenhos térmicos de vários arranjos de dutos usando os tipos linear, espiral e deslizante de TCSA horizontal.

Diferentes referências estudaram o efeito do material do duto (especialmente usando aqueles de alta condutividade térmica); no entanto, eles não mostraram melhorias significativas no desempenho térmico do sistema (BANSAL ET AL., 2009; ASCIONE ET AL., 2011). Por outro lado, a ideia de Hassanzadeh et al. (2018) explora uma outra alternativa que é o acoplamento de aletas aos dutos, criando outras possibilidades de melhoria das trocas térmicas dos TCSA, permitindo a redução dos dutos.

Assim, esta pesquisa avança na ideia de Hassanzadeh et al. (2018) explorando questões relativas ao arranjo físico das aletas e tamanho da instalação. Além disso, o trabalho busca avaliar também o quanto vale a pena aumentar a condutividade térmica do solo.

## **1.5 Objetivos do estudo**

### **1.5.1 Objetivo geral**

Esta pesquisa visa analisar os potenciais térmicos dos TCSA, bem como sua eficiência térmica anual, adotando dutos aletados com configurações adaptadas do trabalho de Hassanzadeh et al. (2018). Considera-se aqui o cenário da cidade de Viamão e condições encontradas na instalação do trabalho de Vaz (2011).

### **1.5.2 Objetivos específicos**

- Validar o modelo numérico de TCSA adotado.
- Avaliar quais configurações de dutos aletados são mais efetivas para a melhoria do potencial térmico e da eficiência dos TCSA.
- Analisar a viabilidade do uso de dutos mais curtos do que os usados por Vaz (2011), mantendo altas taxas de eficiência.

- Estudar como a variação da geometria da região galvanizada em torno dos dutos afeta o desempenho dos TCSA.
- Avaliar como a condutividade térmica do solo afeta o potencial térmico do TCSA.

## **1.6 Organização do trabalho**

O Capítulo 2 aborda toda a metodologia científica utilizada para a obtenção dos resultados apresentados. Em particular, detalha-se o modelo adotado (GAEA). Como este depende de estimativas da temperatura do solo, apresenta-se também as técnicas numéricas utilizadas, bem como a modelagem fenomenológica.

O Capítulo 3 mostra os principais resultados dessa pesquisa. Incluem-se aqui testes de configurações de dutos aletados, avaliação teórica e física de como o enriquecimento da condutividade térmica do solo afeta os potenciais térmicos do solo, e uma avaliação da eficiência dos TCSA com a variação do comprimento do duto.

O Capítulo 4 resume as principais conclusões do trabalho e mostra perspectivas futuras para continuação do trabalho.

No Anexo A estão expostos os trabalhos realizados durante a investigação, apresentados como artigos completos em três congressos.

## 2 METODOLOGIA

### 2.1 Classificação da pesquisa

Jung (2003) realiza uma classificação dos tipos de pesquisa. Isso inclui as tecnológicas, como aquelas que usam softwares aplicados para alcançar a inovação de um produto em busca de uma necessidade. Esta pesquisa apresenta essa característica, pois utiliza diferentes softwares para realizar simulações inovadoras de TCSA considerando a utilização de material galvanizado nas aletas e no bloco que circunda o duto, objetivando a redução do seu comprimento, facilitando sua instalação em regiões urbanas.

Na Figura 2, a classificação completa, realizada por Jung (2003) quanto aos tipos de pesquisas pode ser vista. De acordo com ela, a natureza desta investigação é a de uma pesquisa básica, pois descreve fenômenos naturais (variação de temperatura no ar, no solo e em dutos de um TCSA), gera conhecimento a ser utilizado em futuras pesquisas aplicadas ou tecnológicas, mas não tem finalidade prática imediata.

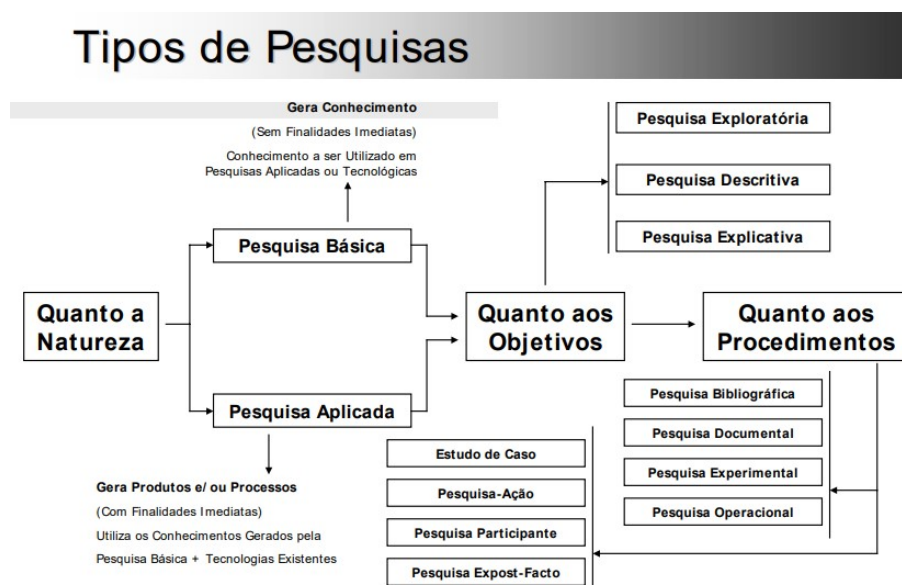


Figura 2: Tipos de Pesquisa. Fonte: (Jung, 2003).

Ainda se apoiando no referencial anterior, em termos de objetivos, esta é uma

investigação com características descritiva e exploratória, pois, por um lado observa, registra e analisa o fenômeno e, por outro, visa também produzir novos processos e inovações. Ou seja, por um lado realiza uma simulação com diferentes posições de aletas e comprimentos dos dutos e por outro gera novos conhecimentos inovadores.

Por fim, em termos de procedimentos, esta pesquisa tem características de ser operacional, uma vez que investiga de forma sistemática e racional as mudanças nas variáveis do TCSA, por meio de ferramentas matemáticas, a fim de otimizar potenciais térmicos e eficiência energética.

## 2.2 Definições importantes

Ao longo deste trabalho, as conceituações e definições introduzidas nesta seção serão usadas continuamente, sendo conveniente formalizá-las.

Em qualquer instante de tempo  $t$ , esse trabalho define o potencial térmico do solo  $P_s$  através da equação:

$$P_s(t) = T_{solo}(t) - T_a(t). \quad (1)$$

onde  $T_{solo}$  e  $T_a$  são, respectivamente as temperaturas do solo e do ar. Esse conceito é diferente do potencial térmico dos TCSA ( $P_{TCSA}$ ), apresentado em referências como Brum et al. (2019) e Domingues et al. (2021), o qual é representado por:

$$P_{TCSA}(t) = T_s(t) - T_a(t). \quad (2)$$

sendo  $T_s$  a temperatura na saída dos dutos. Cabe notar que  $T_a$  é também a temperatura na entrada dos dutos.

Em qualquer momento, a eficiência  $\theta$  dos TCSA (INCROPERA ET AL., 2008; PFAFFEROTT, 2003) é dada por

$$\theta(t) = \frac{P_{TCSA}(t)}{P_s(t)}. \quad (3)$$

Em diferentes análises feitas nessa pesquisa, é feito o cálculo do valor eficaz (RMS) anual para propriedades modeladas a partir de médias diárias. Para uma determinada função modelo  $f$ , cabe lembrar que seu valor RMS anual é dado por:

$$f_{RMS} = \sqrt{\frac{\int_0^{365} f(t)^2 dt}{365}}. \quad (4)$$

Nesse contexto, assim como feito em Brum et al. (2012), esse trabalho determina a eficiência anual  $\theta_a$  dos TCSA pela fórmula:

$$\theta_a = \frac{\sqrt{\int_0^{365} P_{TCSA}(t)^2 dt}}{\sqrt{\int_0^{365} P_s(t)^2 dt}}. \quad (5)$$



Pode-se notar que  $\theta_a$  é simplesmente uma razão entre os valores RMS anuais dos potenciais térmicos dos TCSA e do solo.

## 2.3 Apresentação geral

Como já discutido na introdução, este trabalho considera dados da cidade de Vião, no sul do Brasil, onde Vaz (2011) fez diversas medições experimentais de uma instalação de TCSA. O local possui clima subtropical; suas coordenadas geográficas e altitude são ( $30^{\circ}04'51''\text{S}$ ,  $51^{\circ}01'24''\text{W}$ ) e 111 m, respectivamente.

Esta pesquisa utiliza métodos numéricos e computacionais porque na revisão do estado da arte dos TCSA, apresentada no capítulo anterior, pode-se observar que é uma metodologia mais barata e eficaz, sempre que possível; enquanto simulações experimentais reais podem ter altos custos e demandar longos períodos para sua execução.

Replicando as condições encontradas em Vaz (2011), foi simulado um duto com diâmetro  $D_0 = 0,11$  m, enterrado a uma profundidade  $z_0 = 1,6$  m. As propriedades do material do duto não foram levadas em consideração, como é feito em muitas referências (BRUM ET AL., 2019; RODRIGUES ET AL., 2015). Isto é, nesses trabalhos o duto é apenas um espaço cilíndrico vazio no meio do solo.

A novidade aqui é que vamos considerar também a possibilidade do duto inserido dentro de blocos galvanizados que são acoplados a aletas (também galvanizadas). O material do bloco e das aletas têm condutividade térmica muito superior a do solo. Assim, esse trabalho explora variantes das idéias do trabalho de Hassanzadeh et al. (2018), onde o autor acopla as aletas diretamente aos dutos.

A razão do uso do bloco nesse trabalho é apenas metodológica, pois cria uma região com condutividade térmica homogênea em torno do duto. Isso possibilita estimativas e simulações com modelos analíticos menos complexos e de menor custo computacional, como é o caso do GAEA, já comentado na introdução.

A Tabela 1 define as propriedades termofísicas utilizadas onde os valores para o ar e solo são extraídos de Vaz (2011), enquanto as propriedades do material galvanizado provém de Hassanzadeh et al. (2018).

Tabela 1: Propriedades Termofísicas

	Massa específica $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	Calor específico $C_p$ (J/kgK)	Condutividade térmica $\lambda$ (W/mK)	Viscosidade dinâmica $\mu$ (kg/ms)
Ar	1,16	1010	0,0242	$1,789 \times 10^{-5}$
Solo	1800	1780	2,1	-
Material galvanizado	7800	446	52	-

Este trabalho inicia avaliando diversas configurações inspiradas nas feitas por Has-

sanzadeh et al. (2018), para determinar as que maximizam o potencial térmico do solo na posição dos dutos. A Figura 3 exemplifica um caso, mostrando a vista 2D do domínio computacional, incluindo duto, bloco e aletas. Na vista do plano  $x - z$ ,  $b_0 = 0,18 \text{ m}$  é o tamanho dos lados do bloco;  $S_v = 1 \text{ m}$  e  $S_h = 0,01 \text{ m}$  são, respectivamente, os tamanhos vertical e horizontal das aletas. Como mostra a vista do plano  $x - y$  da Figura 4, as aletas e o bloco têm o mesmo comprimento,  $L_0$ , do duto. Além disso, a porção de solo simulada tem uma profundidade de  $15 \text{ m}$ , uma largura de  $10 \text{ m}$  e um comprimento  $L_0$  variável entre  $0 \text{ m}$  e  $25,77 \text{ m}$ .

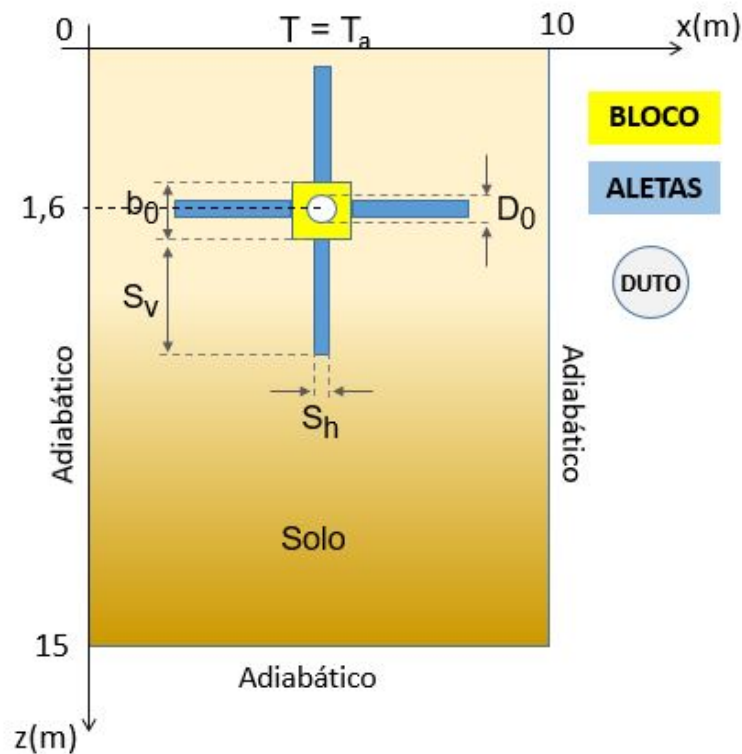


Figura 3: Domínio Computacional 2D

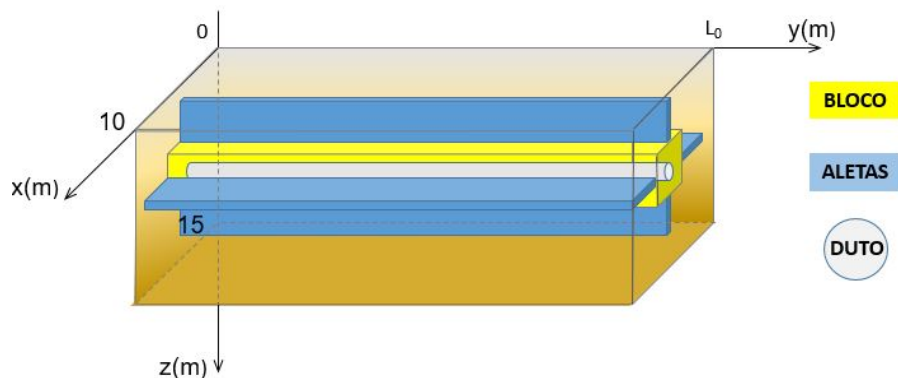


Figura 4: Domínio Computacional 3D

## 2.4 Transferência de calor no solo

A transferência de calor clássica ocorre apenas por condução, convecção, radiação ou qualquer combinação delas. Em resumo, podemos dizer que:

- **Condução:** Refere-se ao modo específico de transferência de calor no qual essa troca de energia ocorre em sólidos ou fluidos quiescentes (ou seja, sem movimento convectivo resultante do deslocamento macroscópico do meio) da região de alta temperatura para a região de baixa temperatura devido a presença de um gradiente de temperatura dentro do sistema (ÖZISIK, 1993).
- **Convecção:** refere-se ao mecanismo de transferência do calor pelo qual se um fluido escoar sobre um corpo sólido ou dentro de um canal, e se as temperaturas do fluido e da superfície sólida forem diferentes, haverá transferência de calor entre o fluido e a superfície sólida em consequência do movimento do fluido em relação a superfície (ÖZISIK, 1993).
- **Radiação:** Ao contrário dos mecanismos de transmissão de calor mencionados anteriormente, onde a transferência de energia está envolvida através de um meio material, o calor também pode ser transferido através de regiões onde há vácuo, como no caso da radiação eletromagnética, que se propaga como resultado de uma diferença de temperatura; isso é chamado de radiação térmica (HOLMAN, 2010).

No TCSA existe uma combinação de processos de transferência de calor, por um lado radiação solar, por outro lado convecção entre o ar que flui e a superfície interior do duto enterrado, condução de calor dentro da parede do duto e condução de calor dentro do solo ao redor do duto enterrado (ZHANG ET AL., 2020). Uma síntese de tais processos encontra-se representada esquematicamente na Figura 5.

A seção seguinte é dedicada à apresentação detalhada de todas as etapas que conduzem à equação diferencial parcial conhecida como equação do calor, e que integra o modelo matemático usado para descrever o processo de transferência de calor por condução no solo dentro do contexto do TCSA tratado neste trabalho.

## 2.5 Modelagem matemática da condução de calor

### 2.5.1 Introdução

A modelagem matemática desempenha um importante papel na descrição de uma grande parte dos fenômenos nas ciências aplicadas e em vários aspectos da atividade

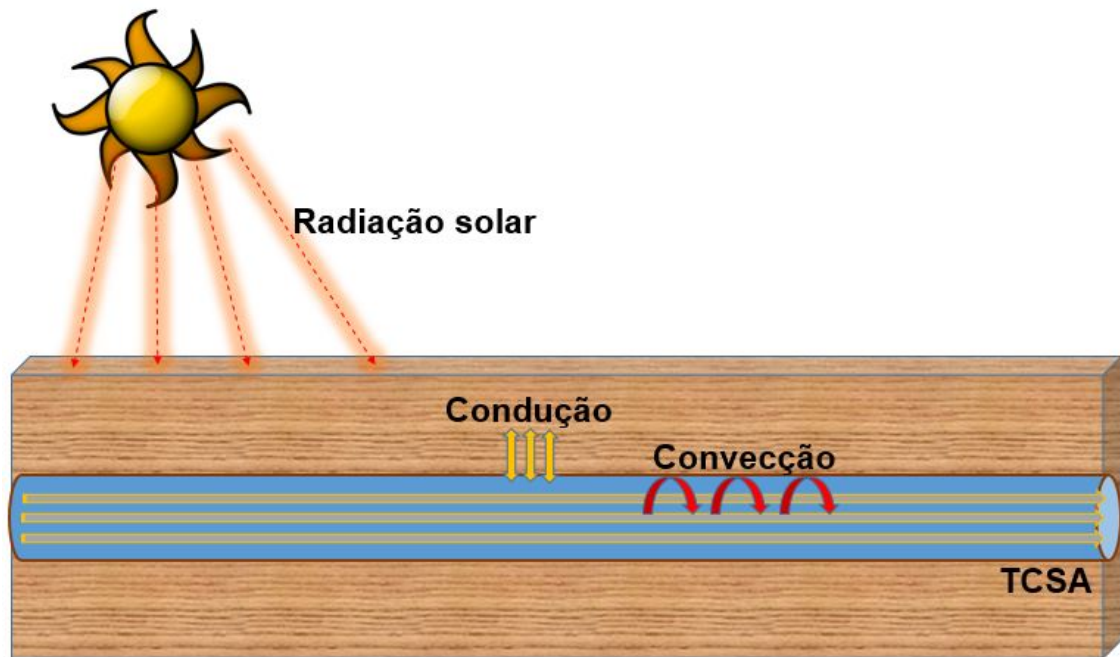


Figura 5: Esquema de processos de transferência de calor em um TCSA

técnica e industrial.

Entende-se por *modelo matemático* como sendo um conjunto de equações e/ou relações matemáticas capazes de capturar as características essenciais de um sistema complexo que pode ser natural ou artificial, com o objetivo de descrevê-lo, fazer previsões e monitorar a sua evolução.

Assim, nesta seção, aborda-se muito brevemente os conceitos fundamentais da mecânica do contínuo que conduzem à equação diferencial parcial conhecida como equação do calor. Mais precisamente, são apresentados alguns conceitos da termodinâmica como energia interna, calor, temperatura, considerados fundamentais para expressar o *princípio da conservação da energia*, que por sua vez leva à equação do calor. Em seguida, é complementada essa equação básica que governa a condução de calor em um sistema material com condições de contorno e condições iniciais apropriadas, ficando assim estabelecido o problema de valor inicial e de contorno (PVIC) tratado neste trabalho.

Visando certa simplicidade de exposição, são introduzidos inicialmente alguns conceitos e definições necessários aos desenvolvimentos subsequentes. Detalhes das ideias aqui abordadas podem ser encontrados em Chaves (2013); Gonzalez and Stuart (2008); Temam and Miranville (2005).

Sejam  $\kappa \in \mathcal{I} \subset \mathbb{R}$  um parâmetro representando um instante de tempo arbitrário e  $\mathcal{I}$  um intervalo de observação de certa fenomenologia de interesse. Na modelagem matemática dessa fenomenologia, a mecânica do contínuo como base teórica de construção de modelos, considera um *sistema material*, chamado simplesmente

de *corpo* e indicado por  $\mathcal{B}$ , tal que  $\mathcal{B} = \cup \mathcal{P}$ , onde a união é finita e disjunta, e cada elemento  $\mathcal{P}$  é denominado de *parte* do corpo  $\mathcal{B}$ . Cada parte  $\mathcal{P}$  de  $\mathcal{B}$  é um aglomerado de partículas de matéria de que é constituído o corpo  $\mathcal{B}$ . Sempre que for conveniente, será considerada a indexação  $\mathcal{B}_\kappa$  e  $\mathcal{P}_\kappa$  para ressaltar tanto a dependência do corpo  $\mathcal{B}$  e de sua parte  $\mathcal{P}$  relativamente ao parâmetro  $\kappa$ , quanto o estado em que eles se encontram em determinado instante  $\kappa$ . Assim,  $\mathcal{B}_\kappa = \cup \mathcal{P}_\kappa$  é uma representação do corpo  $\mathcal{B}$  em um instante de tempo  $\kappa$  dado.

Adicionalmente, a mecânica do contínuo também considera  $\mathcal{B}_\kappa$  como um *meio contínuo*, através do axioma conhecido como *hipótese do contínuo*, que matematicamente significa que é sempre possível estabelecer uma bijeção (um homeomorfismo<sup>1</sup>) entre  $\mathcal{B}_\kappa$  e uma região do espaço euclidiano tridimensional,  $\mathcal{R}_\kappa \subset \mathbb{R}^3$ , para cada  $\kappa \in \mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ . Em outras palavras,  $\mathcal{B}_\kappa$  é a imagem topológica de um domínio espacial. Tal bijeção, dada por  $\chi_\kappa : \mathcal{B}_\kappa \rightarrow \mathcal{R}_\kappa$ , é chamada de *configuração* do corpo  $\mathcal{B}_\kappa$  no instante  $\kappa$ . De igual modo,  $\Omega_\kappa \subset \mathbb{R}^3$  indica a subregião em  $\mathcal{R}_\kappa$  ocupada pela parte  $\mathcal{P}_\kappa$  do corpo  $\mathcal{B}_\kappa$ . Obviamente, durante o intervalo  $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$  de observação, o corpo  $\mathcal{B}_\kappa$  pode assumir infinitas configurações, estando cada uma delas associada à um valor de  $\kappa$  fixo. Com essa ideia em mente, é sempre possível selecionar dois valores de  $\kappa$  específicos indicados por  $\kappa = 0 \equiv t_0$  e  $\kappa = t$ . Assim, as configurações correspondentes à  $\kappa = 0$  e à  $\kappa = t$ , serão designadas especialmente por *configuração de referência* e *configuração corrente* respectivamente, estando portanto associadas aos mapeamentos  $\chi_0$  e  $\chi_t$  cujas imagens são exatamente as regiões  $\mathcal{R}_0$  e  $\mathcal{R}_t$ . Sempre que não existir perigo de ambiguidade, o termo *configuração* será associado indistintamente tanto ao mapeamento  $\chi_\kappa$  quanto a sua imagem  $\mathcal{R}_\kappa$ . É importante frisar que é na *configuração corrente* onde será estabelecido o princípio físico da *conservação da energia*, principal objeto de estudo desta seção.

Como o *corpo*  $\mathcal{B}$  experimenta infinitas *configurações* durante uma janela  $\mathcal{I}$  de observações, isso conduz naturalmente à *cinemática* que é o estudo do movimento de um *sistema material* relativamente a um observador. Logo, a *cinemática* impõe a introdução de dois elementos: o primeiro, já apresentado acima, é um privilegiado parâmetro contínuo,  $t \in \mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ , correspondente ao tempo. Isso implica na escolha de uma cronologia, ou seja, em uma forma de medir o tempo. O segundo elemento trata-se de um sistema de coordenadas dado, que é fixo em relação ao observador. Tal sistema de coordenadas (referencial) é definido por uma origem e uma base ortogonal de três vetores. Visando definir *movimento de um corpo*  $\mathcal{B}$ , será previamente introduzido o conceito de *deformação*. Portanto, *deformação* do corpo  $\mathcal{B}$  da *configuração de referência* para a *configuração corrente*, é definida como sendo o mapeamento  $\Psi_t : \mathcal{R}_0 \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}_t \subset \mathbb{R}^3$ . Note que um *sistema material* ocupa um domínio espa-

<sup>1</sup>Um homeomorfismo entre os conjuntos  $X$  e  $Y$  é uma bijeção contínua  $f : X \rightarrow Y$ , cuja inversa  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  também é contínua.

cial  $\mathcal{R}_0 \subset \mathbb{R}^3$  em um dado instante de tempo  $t_0$ . Depois da *deformação*, o *sistema material* passa a ocupar um domínio espacial  $\mathcal{R}_t \subset \mathbb{R}^3$ . Um *ponto material*, cuja posição inicial é dada pelo ponto  $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_0$ , estará, após a transformação, no ponto  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}_t$ . Então, a *deformação* pode ser caracterizada por um mapeamento da forma  $\Psi_t : \mathbf{X} \in \mathcal{R}_0 \mapsto \mathbf{x} \in \mathcal{R}_t$ . Assumindo que a matéria é conservada durante a deformação, pode-se fazer a seguinte hipótese natural: o mapeamento  $\Psi_t$  de  $\mathcal{R}_0$  em  $\mathcal{R}_t$  é injetivo<sup>2</sup>. Essa condição de injetividade sobre o mapeamento  $\Psi_t$  é fisicamente interpretada como o *princípio da impenetrabilidade da matéria*. Adicionalmente, assumi-se ainda que a deformação  $\Psi_t$  é um mapeamento suave de classe  $C^1$ , pelo menos, de  $\mathcal{R}_0$  em  $\mathcal{R}_t$ , bem como seu inverso ( $C^1$  de  $\mathcal{R}_t$  em  $\mathcal{R}_0$ ). Na verdade, esse grau de regularidade para  $\Psi_t$  pode ser aumentado ou enfraquecido conforme necessário.

Com base na noção de *deformação* de um corpo, acima estabelecida, são apresentadas em seguida breves considerações sobre *cinemática*.

### 2.5.2 Movimento e sua observação (cinemática)

*Cinemática* é o estudo do movimento de um *sistema material* relativamente a um observador. Assim, a *cinemática* requer a introdução de dois elementos essenciais:

- Um privilegiado parâmetro contínuo,  $t$ , correspondente ao tempo. Isso implica na escolha de uma cronologia, ou seja, em uma forma de medir o tempo.
- Um dado sistema de coordenadas, ou referencial, considerado fixo em relação ao observador. Tal referencial é definido no domínio espacial do  $\mathbb{R}^3$  por sua origem  $\vartheta$  e uma base ortonormal de três vetores  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ .

Esses elementos primitivos denominados de *posição* e de *tempo* são usados na definição abaixo.

**Definição 2.5.1** (Domínio espaço-tempo). *Um sistema de referência é definido pela escolha de uma cronologia e um sistema de coordenadas (referencial). Tal escolha resulta no chamado domínio espaço-tempo, indicado aqui por  $\mathcal{W}$ , com  $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ .*

O *movimento* do *sistema material* em consideração é observado durante um intervalo de tempo  $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ . A cada instante de tempo  $t \in \mathcal{I}$ , o *sistema material* ocupa um domínio espacial  $\mathcal{R}_t \subset \mathbb{R}^3$ . O *movimento* é então geometricamente definido por uma família de *mapeamentos de deformação*, indexada pelo parâmetro tempo  $t \in \mathcal{I}$ , conforme a definição que se segue.

<sup>2</sup>Como  $\Psi$  é injetivo e  $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_t$  são espaços vetoriais de dimensão finita, concluímos que o mapeamento  $\Psi$  é também bijetivo.

**Definição 2.5.2** (Movimento). *Chama-se movimento de um corpo  $\mathcal{B}$ , à sequência contínua no tempo de mapeamentos do tipo deformação, ou seja, à família*

$$\Psi := \{ \Psi_t, t \in \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \mid \Psi_t : \mathcal{R}_0 \rightarrow \mathcal{R}_t \}, \quad (6)$$

onde denotamos por  $\Psi(t, t_0)$  o difeomorfismo

$$\mathbf{X} \in \mathcal{R}_0 \longmapsto \mathbf{x} = \Psi(\mathbf{X}, t, t_0) \in \mathcal{R}_t$$

que mapeia cada partícula material  $\mathcal{X}$  ocupando a posição  $\mathbf{X}$  no instante  $t_0$  na posição  $\mathbf{x}$  no instante arbitrário  $t$ .

### 2.5.3 Descrição do movimento

Seja um corpo material  $\mathcal{B}_0$  ocupando a região  $\mathcal{R}_0$  na *configuração de referência*. Em um instante de tempo arbitrário  $t$ , o corpo material  $\mathcal{B}_t$  ocupa uma nova região  $\mathcal{R}_t$  no espaço. Agora, uma atenção especial será dada a uma partícula do meio contínuo designada por partícula  $\mathcal{X}$ .

**Observação 2.5.1.** *No que diz respeito à nomenclatura, as partículas são identificadas por rótulos. Essas etiquetas são as posições que elas ocuparam na configuração de referência. Por exemplo, a partícula  $\mathcal{X}$  que ocupou o ponto  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$  na configuração de referência será etiquetada com o rótulo  $\mathbf{X}$ .*

A posição de uma partícula é caracterizada pelo vetor posição. O vetor posição da partícula  $\mathcal{X}$  na configuração de referência,  $t = 0 \equiv t_0$ , é dada por:

$$\vartheta \mathbf{X} \equiv \mathbf{X} = X_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + X_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + X_3 \hat{\mathbf{e}}_3, \quad (7)$$

onde os escalares  $X_i, i \in \{1, 2, 3\}$  são chamados de *coordenadas materiais*.

Na *configuração corrente*, também conhecida por *configuração deformada*, a mesma partícula  $\mathcal{X}$  ocupa a posição indicada por  $\mathbf{x}$  cujo vetor posição é dado por:

$$\vartheta \mathbf{x} \equiv \mathbf{x} = x_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + x_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + x_3 \hat{\mathbf{e}}_3 = \Psi(\mathbf{X}, t, t_0), \quad (8)$$

que define as *coordenadas espaciais*  $x_i, i \in \{1, 2, 3\}$ .

Propriedades de um meio contínuo, tais como densidade de massa (massa específica), densidade de energia, temperatura, velocidade, aceleração, etc., são intrínsecas às partículas (pontos materiais), e essas propriedades podem variar com o tempo. Como mencionado antes, o movimento de um meio contínuo é caracterizado pela função bijetiva  $\Psi$  cuja inversa é indicada por  $\Psi^{-1}$ . Isso garante a possibilidade

de relacionar propriedades de meios contínuos entre as configurações corrente e de referência. Em outras palavras, o estudo do movimento pode ser efetuado tanto na *configuração corrente* quanto na *configuração de referência*. Cada uma dessas possibilidades é discutida em seguida.

### 2.5.3.1 Descrição lagrangiana do movimento

O movimento das partículas pode ser descrito em termos do vetor de coordenadas materiais  $\mathbf{X}$  (rótulo da partícula  $\mathcal{X}$ ) e do tempo  $t$  como:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \quad x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t) = x_i(\mathbf{X}, t), \quad i \in \{1, 2, 3\}. \quad (9)$$

As equações do movimento em (9) são chamadas de *Descrição Lagrangiana* ou *Descrição Material* do movimento. A equação paramétrica acima fornece a posição corrente  $\mathbf{x}$ , no tempo  $t$ , de uma partícula que ocupava a posição  $\mathbf{X}$  na configuração de referência, no tempo  $t_0$ . A equação em (9), aplicado à partícula  $\mathcal{X}$ , fornece o caminho único (trajetória) dessa partícula. Com isso, a velocidade  $\mathbf{v}$  de uma partícula  $\mathcal{X}$  é definida de forma imediata como a taxa de variação temporal material do vetor posição na configuração corrente  $\mathbf{x}$ , isto é:

$$\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{x}}{Dt} \equiv \dot{\mathbf{x}} = \frac{d(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t))}{dt}, \quad v_i = \dot{x}_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad \left[ \frac{m}{s} \right]. \quad (10)$$

### 2.5.3.2 Descrição euleriana do movimento

O movimento das partículas também pode ser descrito em termos do vetor de coordenadas espaciais  $\mathbf{x}$  e do tempo  $t$  como:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t), \quad X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t) = X_i(\mathbf{x}, t), \quad i \in \{1, 2, 3\}. \quad (11)$$

A equação acima fornece a posição original  $\mathbf{X}$ , no tempo  $t_0$ , de uma partícula que no instante  $t$  possui as coordenadas espaciais  $(x_1, x_2, x_3)$ .

A condição necessária e suficiente para que o mapeamento  $\Psi_t : \mathcal{R}_0 \rightarrow \mathcal{R}_t$  tenha



um inverso é:

$$J = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \left[ \frac{m^3}{m^3} \right]. \quad (12)$$

onde  $J$  é chamado de *determinante Jacobiano*, também conhecido como razão volumétrica.

**Axioma 2.5.1** (O axioma da impenetrabilidade da matéria). *Dois partículas não podem ocupar o mesmo lugar ao mesmo tempo. Essa condição é garantida sempre que o determinante Jacobiano é positivo, ou seja,  $J > 0$ .*

### 2.5.3.3 Variáveis de campo lagrangianas e eulerianas

Qualquer quantidade física  $Z$  associada a um meio contínuo  $\mathcal{B}$  pode ser expressa tanto através de uma descrição Lagrangiana,  $Z = Z(\mathbf{X}, t)$ , quanto por meio de uma descrição euleriana,  $z = z(\mathbf{x}, t)$ , estando ambas relacionados da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} Z(\mathbf{X}, t) &= Z(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t), & (\text{pois } \mathbf{X} &= \Psi_t^{-1}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)) \\ &= z(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (13)$$

e

$$\begin{aligned} z(\mathbf{x}, t) &= Z(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t), & (\text{pois } \mathbf{x} &= \Psi_t(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)) \\ &= Z(\mathbf{X}, t). \end{aligned} \quad (14)$$

**Observação 2.5.2** (Notação para variáveis de campo lagrangianas e eulerianas). *Alguns autores tentam diferenciar uma variável de campo Lagrangiana da Euleriana usando letras maiúsculas e minúsculas, respectivamente. Como regra geral, não adota-se essa convenção neste texto. Aqui, para lidar com uma variável de campo Lagrangiana, indica-se explicitamente esse fato por meio de seus argumentos, ou seja,  $G \equiv g(\mathbf{X}, t)$ . Por outro lado, uma variável de campo Euleriana, é indicada por  $g(\mathbf{x}, t)$ .*

As variáveis de campo tratadas neste texto encontram-se descritas na forma Euleriana. Assim, por exemplo, a função vetorial  $\mathbf{v} : \mathcal{R}_t \times \{t\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dada por  $\mathcal{R}_t \times \{t\} \ni (\mathbf{x}, t) \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3$ , representa o *campo vetorial de velocidades* descrito

na forma Euleriana. De igual modo, a função escalar  $\rho : \mathcal{R}_t \times \{t\} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $\mathcal{R}_t \times \{t\} \ni (\mathbf{x}, t) \mapsto \rho(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}$ , indica o *campo escalar de densidade de massa* na descrição Euleriana.

#### 2.5.3.4 A Derivada Material Temporal

A taxa de variação total no tempo de uma quantidade física, por exemplo, velocidade, temperatura, densidade de massa, etc., é chamada de *derivada material temporal* e é denotada por  $\frac{D}{Dt}(\cdot)$ . Apenas para fixar ideias, como um exemplo, considere um observador que está viajando com a partícula  $\mathcal{X}$  e está registrando como a temperatura varia ao longo do tempo. Essa taxa de variação da temperatura é indicada como a *derivada material temporal* da temperatura. A partir desse exemplo, parece razoável concluir que a derivada material temporal de uma propriedade física depende se tal propriedade encontra-se representada por uma variável de campo Lagrangiana ou Euleriana.

Uma propriedade física arbitrária,  $\beta$ , possui uma descrição Lagrangiana da forma:

$$\beta = \beta(X_1, X_2, X_3, t). \quad (15)$$

Nesse caso, a derivada material temporal é expressa na forma:

$$\dot{\beta}(\mathbf{X}, t) \equiv \frac{D\beta(\mathbf{X}, t)}{Dt} = \frac{d\beta(\mathbf{X}, t)}{dt}. \quad (16)$$

Portanto, quando a propriedade física é descrita em termos de coordenadas materiais, i.e, por meio de uma descrição Lagrangeana, isso significa que a propriedade representada está associada à mesma partícula durante o movimento.

Se a propriedade física estiver na descrição Euleriana, tem-se:

$$\beta = \beta(x_1, x_2, x_3, t). \quad (17)$$

Nessa descrição, o observador não está viajando com a partícula, porém encontra-se fixo em um ponto  $(x_1, x_2, x_3)$  observando a passagem das partículas. Assim, em um tempo  $t_1$ , a equação (17) fornece a propriedade física da partícula  $\mathcal{Q}$  passando pelo ponto  $(x_1, x_2, x_3)$ . Posteriormente, em um instante  $t_2$ , a equação (17), volta a fornecer a propriedade de outra partícula, por exemplo  $\mathcal{F}$ , e no tempo  $t_3$ , a equação (17) fornece o valor da propriedade da partícula  $\mathcal{G}$ , e assim sucessivamente.

Importa ressaltar que a *derivada material temporal* está relacionada à derivada com relação ao tempo de uma propriedade intrínseca da partícula, isto é, está relacio-

nada à mesma partícula. Mas um observador fixado em um ponto espacial  $(x_1, x_2, x_3)$  só tem informações sobre a taxa de variação temporal local. Para uma informação completa, é necessário saber como a propriedade dessa partícula varia ao longo de sua trajetória. Essa informação adicional é conhecida como *taxa de variação convectiva*, que está relacionada ao transporte de massa. Consequentemente, para obter a *derivada material temporal* de uma propriedade Euleriana  $\beta = \beta(\mathbf{x}, t)$ , deve-se levar em consideração:

- taxa de variação temporal local,
- taxa de variação convectiva.

Assim, se  $\beta$  é uma variável de campo escalar representando uma propriedade física com descrição Euleriana, segue que:

$$\begin{aligned} \dot{\beta}(\mathbf{x}(t), t) &\equiv \frac{D\beta(\mathbf{x}(t), t)}{Dt} = \frac{\partial\beta(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial\beta(\mathbf{x}, t)}{\partial x_k} \frac{\partial x_k(\mathbf{X}, t)}{\partial t} && \text{( via notação indicial )} \\ &= \frac{\partial\beta(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial\beta(\mathbf{x}, t)}{\partial x_k} v_k(\mathbf{X}, t) \\ &= \frac{\partial\beta(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}}\beta(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (18)$$

onde  $\nabla_{\mathbf{x}}\beta(\mathbf{x}, t) = \left( \frac{\partial\beta(\mathbf{x}, t)}{\partial x_1}, \frac{\partial\beta(\mathbf{x}, t)}{\partial x_2}, \frac{\partial\beta(\mathbf{x}, t)}{\partial x_3} \right)$  é o gradiente de  $\beta$  na descrição Euleriana e  $\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) \equiv \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t)$  é a velocidade da partícula, que também pode ser expressa na descrição euleriana substituindo as equações do movimento, ou seja,  $\mathbf{v}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ .

Por outro lado, se  $\mathbf{g} = (g_1(\mathbf{x}, t), g_2(\mathbf{x}, t), g_3(\mathbf{x}, t))$  é uma variável de campo vetorial representando uma propriedade física com descrição Euleriana, segue que:

$$\begin{aligned} \dot{g}_i(\mathbf{x}(t), t) &\equiv \frac{Dg_i(\mathbf{x}(t), t)}{Dt} = \frac{\partial g_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial g_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_k} \frac{\partial x_k(\mathbf{X}, t)}{\partial t} && \text{( via notação indicial )} \\ &= \frac{\partial g_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial g_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_k} v_k(\mathbf{X}, t), \quad i \in \{1, 2, 3\} \\ &= \frac{\partial g_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) g_i(\mathbf{x}, t), \quad i \in \{1, 2, 3\}, \end{aligned} \quad (19)$$

rescrita de forma compacta como

$$\dot{\mathbf{g}}(\mathbf{x}(t), t) \equiv \frac{D\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), t)}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + [\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)] \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad (20)$$

onde

$$\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x_1} & \frac{\partial g_3}{\partial x_2} & \frac{\partial g_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

#### 2.5.4 Equação geral de balanço

Daqui em diante,  $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$  representa uma parte arbitrária do corpo  $\mathcal{B}$  ocupando a subregião  $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$  na configuração corrente durante o movimento  $\Psi$  de  $\mathcal{B}$ . Além disso,  $\partial\Omega_t$  denota a fronteira de  $\Omega_t$  e  $\hat{\mathbf{n}}$  é a normal unitária exterior à  $\partial\Omega_t$ .

As leis básicas da mecânica do contínuo, também conhecidas como princípios de conservação, podem ser expressas na seguinte forma geral:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} \mathcal{Z}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega_t} \Phi_{\mathcal{Z}}(\mathbf{x}, t) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) ds + \int_{\Omega_t} \mathcal{G}_{\mathcal{Z}}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (22)$$

Na equação (22), conhecida como *forma global da equação geral de balanço*, as quantidades físicas  $\mathcal{Z}$  e  $\mathcal{G}_{\mathcal{Z}}$  são campos tensoriais de ordem  $m$ , enquanto que  $\Phi_{\mathcal{Z}}$  é um campo tensorial de ordem  $m + 1$ . Assim, quando  $\mathcal{Z}$  é um campo escalar (campo tensorial de ordem zero),  $\Phi_{\mathcal{Z}}$  é um campo vetorial (campo tensorial de ordem  $um$ ). Por outro lado, se  $\mathcal{Z}$  for um campo vetorial,  $m = 1$ , então  $\Phi_{\mathcal{Z}}$  é um campo tensorial de segunda ordem. Aqui, campos tensoriais de ordem dois são transformações lineares da forma  $(\mathbf{x}, t) \ni \mathcal{R}_t \times \{t\} \mapsto \mathbb{T}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  que mapeiam elementos do  $\mathbb{R}^3$  em elementos do próprio  $\mathbb{R}^3$ . Para  $m = 0$ , caso que será tratado neste trabalho no contexto do *princípio da conservação da energia*, a notação genérica  $\Phi_{\mathcal{Z}}(\mathbf{x}, t) \hat{\mathbf{n}}$  em (22) significa  $\Phi_{\mathcal{Z}}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t)$  com o símbolo,  $\cdot$ , indicando o produto escalar entre os campos vetoriais  $\Phi_{\mathcal{Z}}$  e  $\hat{\mathbf{n}}$ .

A *equação geral de balanço* para a quantidade física  $\mathcal{Z}$  na forma integral dada por (22), pode ser interpretada da seguinte maneira: a acumulação (incremento/decremento) ou a taxa de variação temporal total da quantidade física  $\mathcal{Z}$  em uma parte arbitrária  $\mathcal{P}$  de um corpo  $\mathcal{B}$  ocupando a subregião  $\Omega_t$  na configuração corrente, deve-se ao fluxo de  $\mathcal{Z}$  através da fronteira de  $\mathcal{P}$ , e a geração (fonte/sumidouro) ou (produção/consumo) de  $\mathcal{Z}$  dentro de  $\mathcal{P}$ . Por essa razão,  $\Phi_{\mathcal{Z}}$  é chamado de fluxo de  $\mathcal{Z}$  e  $\mathcal{G}_{\mathcal{Z}}$  de geração de  $\mathcal{Z}$ . De forma geral, o lado esquerdo da *equação geral de balanço* (22) é chamado de *termo de acumulação*, o primeiro termo no lado direito de *termo de fluxo*, enquanto que o segundo termo no lado direito é conhecido como *termo de fonte*.

Existe interesse na forma local da equação geral de balanço, i.e., na validade de

(22) em cada ponto da subregião  $\Omega_t$ . A dedução das formas locais associadas a (22) dependem de suposições a respeito da regularidade dos campos tensoriais  $\mathcal{Z}$ ,  $\Phi_{\mathcal{Z}}$  e  $\mathcal{G}_{\mathcal{Z}}$ . Neste trabalho, assumi-se que esses campos tensoriais são suficientemente regulares, o que significa que todas as operações matemáticas como limite, continuidade, diferenciação e integração envolvendo esses campos fazem sentido.

Antes das manipulações algébricas visando obter uma contrapartida local para (22), é necessário tratar do termo no lado esquerdo dado pela derivação em relação ao parâmetro  $t$  sob o sinal da integral cuja subregião de integração  $\Omega_t$  pode depender de  $t$ . Isso é feito recorrendo à extensão ao caso tridimensional da fórmula do cálculo para a diferenciação de uma integral definida sobre um intervalo em movimento, conhecida como *regra de Leibniz*:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \mathcal{Z}(x, t) dx = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{Z}(x, t) dx + \mathcal{Z}(\beta(t), t) \dot{\beta}(t) - \mathcal{Z}(\alpha(t), t) \dot{\alpha}(t). \quad (23)$$

Observe que os dois últimos termos no lado direito de (23) são dados pelo produto dos valores da função avaliada nos extremos de integração com a velocidade de saída nesses pontos extremos.

Tal extensão de (23) ao caso tridimensional, apresentada no teorema seguinte, é conhecida como *teorema do transporte de Reynolds*.

**Teorema 2.5.1** (Teorema do Transporte de Reynolds). *Sejam  $\mathcal{V}(t)$  uma região regular do  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{K}^m$  o conjunto dos tensores de ordem  $m$ ,  $\mathcal{Z} : \mathcal{V}(t) \rightarrow \mathcal{K}^m$  um campo tensorial de ordem  $m$ , e  $v_n(\mathbf{x}, t)$  a velocidade normal de um ponto  $\mathbf{x}$  da superfície  $\partial\mathcal{V}(t)$  de  $\mathcal{V}(t)$ . Então, para qualquer campo tensorial  $\mathcal{Z}(\mathbf{x}, t)$ , vale*

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \mathcal{Z}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{Z}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \mathcal{Z}(\mathbf{x}, t) v_n(\mathbf{x}, t) ds. \quad (24)$$

**Demonstração.** *Veja por exemplo (Liu, 2002).*

□

No teorema 2.5.1, se  $\mathcal{V}(t)$  é uma subregião material  $\Omega_t$  ocupada pela parte  $\mathcal{P}$  do corpo  $\mathcal{B}$  na configuração corrente, então  $v_n = \dot{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ , o que permite escrever (24) como

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} \mathcal{Z}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{Z}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_t} \mathcal{Z}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) ds. \quad (25)$$

Levando em conta (25), a *equação geral de balanço* em (22) toma a forma

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{Z}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_t} \mathcal{Z}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) ds = \int_{\partial\Omega_t} \Phi_{\mathcal{Z}}(\mathbf{x}, t) \hat{\mathbf{n}} ds + \int_{\Omega_t} \mathcal{G}_{\mathcal{Z}}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (26)$$

Os dois resultados seguintes, designados por teorema da divergência ou de Gauss e por teorema da localização, são necessários à obtenção da forma local associada à (26).

**Teorema 2.5.2** (Teorema da Divergência). *Sejam  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$  um domínio aberto limitado e  $\mathcal{D} \subset \mathcal{V}$  uma região compacta<sup>3</sup> de fronteira  $\partial\mathcal{D}$  orientada positivamente com normal unitária exterior  $\hat{\mathbf{n}}$ . Então, para todo campo vetorial  $\mathbf{f} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^1(\mathcal{D})$  vale*

$$\int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \int_{\mathcal{D}} \text{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) d\mathbf{x}. \quad (27)$$

**Demonstração.** *Veja por exemplo Thomas (2015).*

□

O resultado seguinte, conhecido como *teorema da localização*, afirma que se a integral de uma função contínua sobre subconjuntos arbitrários de seu domínio é zero, então a própria função deve ser zero.

**Teorema 2.5.3** (Teorema da Localização). *Sejam  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$  um domínio aberto limitado,  $\mathcal{D}$  um subconjunto arbitrário de  $\mathcal{V}$  e  $g : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Se*

$$\int_{\mathcal{D}} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \mathcal{D} \subseteq \mathcal{V}, \quad (28)$$

então

$$g(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}. \quad (29)$$

**Demonstração.** *Veja por exemplo Gonzalez and Stuart (2008).*

□

Combinando os resultados em (26), (27) e (29), obtem-se de imediato uma forma local correspondente a forma integral da equação geral de balanço. Em especial, tais desenvolvimentos são apresentados em seguida para o caso do princípio da conservação da energia.

<sup>3</sup>Em dimensão finita, regiões compactas são conjuntos fechados e limitados.

### 2.5.5 Forma local do Princípio da Conservação da Energia

Esta seção tem como finalidade obter a forma local do princípio da conservação da energia, explorando fortemente os resultados estabelecidos na seção anterior. De toda sorte, são apresentados previamente alguns conceitos e definições pertinentes a esse princípio físico.

#### 2.5.5.1 Densidade

Com a palavra *densidade*, indicada de forma genérica por  $\gamma : \mathcal{R}_t \times \{t\} \rightarrow \mathbb{R}$ , designamos uma função escalar que para cada  $t \in \mathcal{I}$ , está definida em toda parte de  $\mathcal{R}_t$ , e que mede a magnitude de uma propriedade física continuamente distribuída através de todo o *meio contínuo* por unidade de volume em torno de um ponto  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}_t$  no instante de tempo  $t$ . Assim, uma das funções densidade mais importantes é a *densidade de massa* que mede a quantidade ou magnitude da massa de um *corpo* por unidade de volume. Outra função densidade considerada aqui é a *densidade de energia interna*, que mede a energia armazenada no *corpo* por unidade de volume. O termo *específico* será usado para indicar a magnitude da propriedade física por unidade de massa. Assim, *densidade de energia interna específica* designa a energia interna armazenada por unidade de massa.

#### 2.5.5.2 Massa e Densidade de Massa

Meios contínuos resultam de uma quantidade escalar positiva chamada *massa*. De interesse primário, a mecânica do contínuo assume que a *massa* encontra-se continuamente distribuída através do meio contínuo, sendo portanto uma função absolutamente contínua do volume<sup>4</sup>. Considerando uma parte  $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$ , indica-se por  $M(\mathcal{P})$  sua distribuição de massa, que pelo princípio da *conservação da massa*, permanece inalterada em qualquer configuração do corpo  $\mathcal{B}$ .

Assumir que  $M(\mathcal{P})$  é absolutamente contínua significa dizer que, em toda configuração, uma parte  $\mathcal{P}$  de volume suficientemente pequeno possui massa arbitrariamente pequena.

Conforme Truesdell (1966), a massa de  $\mathcal{P}$ , indicada por  $M(\mathcal{P})$ , em uma configuração arbitrária  $\chi_\kappa$  pode ser expressa em termos de um campo escalar  $\rho_{\chi_\kappa} : \Omega_\kappa \subset \mathcal{R}_\kappa \rightarrow \mathbb{R}$ , conhecido por *densidade de massa*. Isto é,

$$M(\mathcal{P}) = \int_{\Omega_\kappa} \rho_{\chi_\kappa} d\mathbf{x}, \quad (30)$$

onde a integral é uma integral de Lebesgue. Claramente, o campo escalar  $\rho_{\chi_\kappa}$

<sup>4</sup>O termo volume aqui deve ser interpretado no sentido de medida, sendo suficiente considerar a medida de Borel

depende da configuração  $\chi_\kappa$  e, conforme indicado, a integração é realizada sobre a configuração  $\Omega_\kappa$  de  $\mathcal{P}$ .

A existência de uma função *densidade de massa* expressa uma relação entre o corpo abstrato  $\mathcal{B}$  e a configuração  $\mathcal{R}_\kappa$  que ele ocupa. Para uma sequência adequadamente escolhida de partes  $\mathcal{P}_j$ , aninhadas sob a forma  $\mathcal{P}_{j+1} \subset \mathcal{P}_j$ , de tal modo que todos os  $\mathcal{P}_j$  tenham apenas um único *ponto material* em comum, e que o volume  $V(\mathcal{P}_j)$  de  $\mathcal{P}_j$  se aproxime de zero conforme  $j$  vá para o infinito, a *densidade de massa* pode ser definida como sendo a razão final entre a massa e o volume:

$$\rho_{\chi_\kappa}(\mathbf{x}, t) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{M(\mathcal{P}_j)}{V(\mathcal{P}_j)}. \quad (31)$$

A relação entre as *densidades de massa* correspondentes a diferentes configurações da mesma parte  $\mathcal{P}$ , é obtida a partir das identidades

$$M(\mathcal{P}) = \int_{\Omega_1} \rho_{\chi_1} d\mathbf{x} = \int_{\Omega_2} \rho_{\chi_2} d\mathbf{x}. \quad (32)$$

Com isso, indicando por  $\mathbf{g}$  o mapeamento que leva a configuração  $\chi_1$  na configuração  $\chi_2$  e por  $J_{\mathbf{g}}$  o valor absoluto de seu determinante Jacobiano, segue que

$$J_{\mathbf{g}} \equiv |\det(\nabla \mathbf{g})| \quad (33)$$

e, portanto,

$$\int_{\Omega_1} \rho_{\chi_1} d\mathbf{x} = \int_{\Omega_1} \rho_{\chi_2} J_{\mathbf{g}} d\mathbf{x}, \quad (34)$$

para toda parte  $\mathcal{P}$  de  $\mathcal{B}$ . Consequentemente chega-se à equação que relaciona as duas densidades de massa:

$$\rho_{\chi_1} = \rho_{\chi_2} J_{\mathbf{g}}. \quad (35)$$

Essa equação mostra que a *densidade de massa* em qualquer configuração determina a *densidade de massa* em todas as outras.

**Observação 2.5.3** (Princípio da Conservação da Massa). *Considere um movimento  $\Psi$  de um corpo  $\mathcal{B}$  e seja  $\mathcal{R}_t \times t \ni (\mathbf{x}, t) \mapsto \rho(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^+$  o campo escalar de densidade de massa na configuração atual. Uma vez que a matéria não é destruída e nem é criada em qualquer movimento, na ausência de reações químicas, tem-se:*

*A massa total de qualquer parte  $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$  permanece constante em qualquer movi-*



mento, i.e,

$$\frac{D}{Dt}M(\mathcal{P}, t) = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 0. \quad (36)$$

### 2.5.5.3 Energia interna

O conteúdo de energia de um corpo contínuo não associado à energia cinética é chamado de *energia interna*. A energia interna de um corpo representa uma reserva de energia que pode ser aumentada de várias maneiras, por exemplo, adicionando calor ao corpo ou realizando trabalho mecânico nele. Uma vez armazenada, a energia interna pode ser liberada em qualquer forma, por exemplo como calor, trabalho mecânico ou movimento. Mais precisamente, a *energia interna* é definida como se segue.

**Definição 2.5.3** (Energia interna). *Para cada sistema material  $\mathcal{B}$  e em cada instante de tempo  $t$ , existe uma medida aditiva distribuída por toda região  $\mathcal{R}_t \subset \mathbb{R}^3$  ocupada por  $\mathcal{B}$  da forma  $e(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$ , onde o campo escalar  $(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{R}_t \times \{t\} \mapsto e(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}$  é uma função não-negativa. Com isso, por definição*

$$E_i(\mathcal{P}, t) := \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) e(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}, \quad (37)$$

é a energia interna de qualquer parte  $\mathcal{P}$  do corpo  $\mathcal{B}$  ocupando a subregião  $\Omega_t \subset \mathcal{R}_t$  na configuração corrente, ou seja, no instante  $t$ . Aqui,  $e$  é a densidade de energia interna específica (em unidades de energia por unidade de massa), de modo que  $\rho e$  é a densidade de energia interna (em unidades de energia por unidade de volume).

### 2.5.5.4 Energia cinética

A energia cinética é a energia do sistema material associado ao seu movimento. Sua definição é dada abaixo.

**Definição 2.5.4** (Energia cinética). *Para uma parte  $\mathcal{P}$  arbitrária do corpo material  $\mathcal{B}$  ocupando a subregião  $\Omega_t \subset \mathcal{R}_t$  na configuração corrente, a energia cinética de que  $\mathcal{P}$  está animada no instante  $t$  é definida por*

$$E_c(\mathcal{P}, t) := \int_{\Omega_t} \frac{1}{2} \rho(\mathbf{x}, t) |\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x}, \quad (38)$$

onde  $\Omega_t \times \{t\} \ni (\mathbf{x}, t) \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3$  é o campo vetorial de velocidade.

### 2.5.5.5 Energia total

**Definição 2.5.5** (Energia total). A energia total  $E$  do sistema material  $\mathcal{B}$  no instante de tempo  $t$  é definida como a soma de sua energia interna e de sua energia cinética. Assim, considerando as definições 2.5.3 e 2.5.4, segue que para uma parte  $\mathcal{P}$  arbitrária do corpo material  $\mathcal{B}$  ocupando a subregião  $\Omega_t \subset \mathcal{R}_t$  na configuração corrente, a energia total de  $\mathcal{P}$  no instante  $t$  é definida por

$$E(\mathcal{P}, t) := E_i(\mathcal{P}, t) + E_c(\mathcal{P}, t) = \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \left( e(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} |\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)|^2 \right) d\mathbf{x}. \quad (39)$$

Nesse momento, para formular o princípio da conservação da energia, são necessárias duas quantidades físicas a saber: a *potência mecânica*,  $P_M$ , e a *potência térmica*,  $P_T$ . Tais quantidades são discutidas na sequência.

### 2.5.5.6 Potência mecânica

A *potência mecânica*, também conhecida como *potência das forças externas*, resulta da atuação das forças externas sobre o sistema material. Logo, para defini-la é necessário introduzir o conceito de força. Contudo, *forças* estão entre os elementos primitivos da mecânica. Assim como *corpos* e *movimentos*, elas são dadas a priori. Embora exista a possibilidade de considerar vários tipos de forças em uma mecânica mais geral, neste trabalho são levados em conta apenas os tipos clássicos. Ou seja, considera-se que atuam sobre uma parte arbitrária  $\mathcal{P}$  de um corpo  $\mathcal{B}$  em uma configuração corrente, somente dois tipos de forças: *forças de corpo*,  $\mathbf{f}_b(\mathcal{P}, t)$ , que é uma função absolutamente contínua do volume  $\Omega_t$  que  $\mathcal{P}$  ocupa no instante  $t$ , e *forças de contato ou de superfície*,  $\mathbf{f}_c(\mathcal{P}, t)$ , que é uma função absolutamente contínua da superfície  $\partial\Omega_t$  fronteira de  $\Omega_t$  ocupada pelas partículas materiais que constituem o bordo de  $\mathcal{P}$  no instante  $t$ . Assim, a *força resultante*  $\mathbf{f}(\mathcal{P}, t)$  agindo sobre  $\mathcal{P}$  no instante  $t$  é dada por

$$\mathbf{f}(\mathcal{P}, t) = \mathbf{f}_b(\mathcal{P}, t) + \mathbf{f}_c(\mathcal{P}, t), \quad (40)$$

onde

$$\mathbf{f}_b(\mathcal{P}, t) = \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dv, \quad (41)$$

$$\mathbf{f}_c(\mathcal{P}, t) = \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{t} ds. \quad (42)$$

O campo vetorial  $\Omega_t \times \{t\} \ni (\mathbf{x}, t) \mapsto \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3$  no integrando de (41), é chamado de *densidade de força de corpo específica* (em unidades de força por unidade de massa) e representa a ação sobre uma parte arbitrária  $\mathcal{P}$  do corpo

$\mathcal{B}$  na configuração corrente de todas as forças que não atuam por meio de um contato físico direto com o corpo  $\mathcal{B}$ . Portanto, a força de corpo  $\mathbf{f}_b$  é o resultado de uma ação realizada à distância sobre o corpo  $\mathcal{B}$ . Um exemplo bastante familiar de uma força de corpo é o da força gravitacional. Por outro lado, o campo vetorial  $\partial\Omega_t \times \{t\} \ni (\mathbf{x}, t) \mapsto \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3$  no integrando de (42), é chamado de *densidade superficial das forças de contato* ou simplesmente *tração* (em unidades de força por unidade de área), de forma que  $\mathbf{f}_c$  representa a força resultante decorrente tanto da interação mútua entre as diferentes partes  $\mathcal{P}$  que constituem o corpo  $\mathcal{B}$ , quanto do contato físico direto do corpo  $\mathcal{B}$  com o ambiente externo através do seu bordo. O vetor *tração*  $\mathbf{t}$  é caracterizado matematicamente por meio do *princípio da tensão de Cauchy* apresentado no axioma seguinte.

**Axioma 2.5.2** (Princípio da tensão de Cauchy). *Em uma configuração corrente, para toda parte  $\mathcal{P}$  do corpo  $\mathcal{B}$  ocupando a subregião  $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$  e sujeita a forças de contato, existe um campo tensorial de segunda ordem,  $\mathcal{R}_t \times \{t\} \ni (\mathbf{x}, t) \mapsto \mathbb{T}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , chamado de tensor das tensões, tal que*

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = \mathbb{T}(\mathbf{x}, t) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t), \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega_t \times \{t\}. \quad (43)$$

*Isto é, o campo vetor tração  $\mathbf{t}$ , é uma função que depende continuamente apenas da normal unitária exterior à superfície  $\partial\Omega_t$ ,  $\hat{\mathbf{n}}$ , de forma linear, pois  $\mathbb{T} : \mathcal{R}_t \rightarrow \mathbb{R}^3$  é um operador linear.*

Agora que encontra-se caracterizada a natureza das forças que atuam sobre  $\mathcal{B}$ , é apresentada na sequência a definição de *potência mecânica*.

**Definição 2.5.6** (Potência mecânica). *Considerando (40), (41) (42) e (43), segue que para uma parte  $\mathcal{P}$  arbitrária do corpo material  $\mathcal{B}$  ocupando a subregião  $\Omega_t \subset \mathcal{R}_t$  na configuração corrente, a potência mecânica,  $P_M$ , a que  $\mathcal{P}$  encontra-se submetida no instante  $t$  é definida por*

$$\begin{aligned} P_M(\mathcal{P}, t) &:= \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \, ds \\ &= \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_t} \mathbb{T}(\mathbf{x}, t) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (44)$$

### 2.5.5.7 Potência térmica

A finalidade desta seção é apresentar a definição de *potência térmica*. Para tanto, são apresentadas preliminarmente as noções de *temperatura* e de *calor* também designada aqui por *energia térmica*.

No sentido mais básico, a *temperatura* é uma propriedade física da matéria que está associada a nossa percepção natural de quente e frio. Na modelagem de meios contínuos, assumi-se que uma *temperatura* é definida em cada ponto de um sistema material e em cada instante de tempo. Em especial, supõe-se a existência de um campo de *temperatura absoluta* na configuração corrente representado por  $\mathcal{R}_t \times \{t\} \ni (\mathbf{x}, t) \mapsto u(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^+$ .

A *temperatura* em um ponto de um meio contínuo deve ser interpretada como uma medida das flutuações da velocidade dos átomos individuais na vizinhança desse ponto. Assim, enquanto a velocidade do meio contínuo é uma medida da média, a temperatura do meio contínuo é uma medida da variação das velocidades dos átomos em torno de um ponto.

Por *energia térmica* ou *conteúdo de calor* de um corpo, deve-se entender como sendo a energia associada às flutuações da velocidade dos átomos individuais no corpo. Em especial, o *calor* é uma forma de energia associada à temperatura. Esse *conteúdo de calor* armazenado pelo corpo pode sofrer alterações causadas por quaisquer dos três mecanismos: *convecção*, *condução* e *radiação*. Detalhes a respeito de cada um desses mecanismos de transferência de calor podem ser encontrados em Özisik (1993); Bejan and Kraus (2003); Holman (2010) e Incropera et al. (2008)

Resultados experimentais mostram que os corpos materiais são capazes de realizar a conversão de *calor* em *trabalho mecânico* e vice-versa. Apenas para fixar ideias, como um exemplo, deformar um corpo pode afetar sua temperatura, e portanto seu *conteúdo de calor*, i.e, sua *energia térmica*. Da mesma forma, adicionar *calor* a um corpo aumentando conseqüentemente sua temperatura, pode colocar o corpo em movimento, por exemplo, ele pode se expandir. Por causa dessa interconversão, o *calor* pode ser expresso nas mesmas unidades do *trabalho mecânico*.

Portanto, em analogia com o tratamento dado a natureza das forças que atuam sobre qualquer parte  $\mathcal{P}$  do corpo  $\mathcal{B}$  na configuração corrente, veja seção anterior, assumi-se que a taxa material temporal de suprimento (fornecimento/remoção) de calor a que  $\mathcal{P}$  está sujeita, designada aqui por *potência térmica* e denotada por  $P_T(\mathcal{P}, t)$ , pode ser decomposta em uma *potência térmica de corpo*,  $P_T^b(\mathcal{P}, t)$ , e uma *potência térmica de contato ou de superfície*,  $P_T^c(\mathcal{P}, t)$ , de modo que

$$P_T(\mathcal{P}, t) = P_T^b(\mathcal{P}, t) + P_T^c(\mathcal{P}, t). \quad (45)$$

É suposto que a *potência térmica de corpo*,  $P_T^b(\mathcal{P}, t)$ , é uma função contínua do volume  $\Omega_t$  que  $\mathcal{P}$  ocupa na configuração corrente. Mais precisamente, assumi-se que existe um campo escalar de suprimento de potência térmica de corpo,  $\Omega_t \times \{t\} \ni (\mathbf{x}, t) \mapsto r(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}$ , chamado de *densidade de potência térmica de corpo específica*

em unidades de potência por unidade de massa, tal que

$$P_T^b(\mathcal{P}, t) = \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) r(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (46)$$

Também supõe-se que a *potência térmica de contato*,  $P_T^c(\mathcal{P}, t)$ , é uma função contínua da superfície  $\partial\Omega_t$  que o bordo de  $\mathcal{P}$  ocupa na configuração corrente. Em termos matemáticos, isso significa dizer que é assumido a existência de um campo escalar de suprimento (fornecimento/remoção) de potência térmica de contato,  $\partial\Omega_t \times \{t\} \ni (\mathbf{x}, t) \mapsto h(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}$ , chamado de *densidade de potência térmica de contato* em unidades de potência por unidade de área de superfície, tal que

$$P_T^c(\mathcal{P}, t) = \int_{\partial\Omega_t} h(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (47)$$

O axioma seguinte apresenta uma caracterização para o campo escalar  $h$  em (47) devida à Fourier e Stokes.

**Axioma 2.5.3** (Princípio do fluxo de calor de Fourier-Stokes). *Em uma configuração corrente, para toda parte  $\mathcal{P}$  do corpo  $\mathcal{B}$  ocupando a subregião  $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$  e sujeita a potência térmica de contato, existe um campo vetorial,  $\partial\Omega_t \times \{t\} \ni (\mathbf{x}, t) \mapsto \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3$ , chamado de vetor de fluxo de calor, tal que*

$$h(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t), \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega_t \times \{t\}. \quad (48)$$

A direção e a intensidade do fluxo de calor em qualquer superfície de um corpo são determinadas pelo campo vetorial  $\mathbf{q}$ . O sinal negativo em (48) deve-se ao fato de que  $\hat{\mathbf{n}}$  é escolhido como sendo a normal unitária exterior, em oposição à normal unitária interior. Em particular, de (48) conclui-se que  $h$  é positivo quando  $\mathbf{q}$  aponta para dentro de  $\Omega_t$ . A *densidade de potência térmica de contato*  $h$  representa a taxa temporal de transferência de calor através da superfície, e sua relação com o *vetor de fluxo de calor*  $\mathbf{q}$  é análoga à relação entre o *vetor tração* de superfície,  $\mathbf{t}$ , e o *tensor de tensão de Cauchy*  $\mathbb{T}$  (veja axioma 2.5.2).

Levando em conta as relações em (48), (47) e (46), é possível escrever (45) na forma dada na definição abaixo.

**Definição 2.5.7** (Potência térmica). *Considerando (48), (47) e (46), de (45) segue que para uma parte  $\mathcal{P}$  arbitrária do corpo material  $\mathcal{B}$  ocupando a subregião  $\Omega_t \subset \mathcal{R}_t$  na*

configuração corrente, a potência térmica,  $P_M$ , a que  $\mathcal{P}$  encontra-se submetida no instante  $t$  é definida por

$$\begin{aligned} P_T(\mathcal{P}, t) &:= \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) r(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_t} h(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) r(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (49)$$

Agora é possível estabelecer o *princípio da conservação da energia* conforme o axioma seguinte.

**Axioma 2.5.4** (Princípio da conservação da energia). *Em uma configuração corrente, para toda parte  $\mathcal{P}$  do corpo  $\mathcal{B}$  ocupando a subregião  $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$  vale*

$$\frac{D}{Dt} E(\mathcal{P}, t) = P_M(\mathcal{P}, t) + P_T(\mathcal{P}, t). \quad (50)$$

*Isto é, a taxa de variação temporal material da energia total do corpo deve-se em parte à potência mecânica e de outra parte ao suprimento (fornecimento/remoção) de potência térmica a que o corpo encontra-se submetido.*

Usando (39), (44) e (49), o princípio da conservação da energia em (50) toma a forma

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left\{ \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \left( e(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} |\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)|^2 \right) d\mathbf{x} \right\} &= \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\partial\Omega_t} \mathbb{T}(\mathbf{x}, t) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) r(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \\ &- \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (51)$$

Por conveniência de apresentação, (51) é reescrito na forma abaixo omitindo os argumentos  $(\mathbf{x}, t)$  em todas as suas variáveis de campo, e considerando as identidades  $\mathbb{T}\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \mathbb{T}^T \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  e  $\mathbb{T}^T = \mathbb{T}$  onde  $\mathbb{T}^T$  denota a transposta<sup>5</sup> de  $\mathbb{T}$ . Ou seja,

$$\frac{D}{Dt} \left\{ \int_{\Omega_t} \left[ \rho e + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \right] d\mathbf{x} \right\} = \int_{\Omega_t} [\rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + \rho r] d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_t} [(\mathbb{T}\mathbf{v} - \mathbf{q}) \cdot \hat{\mathbf{n}}] d\mathbf{x}. \quad (52)$$

<sup>5</sup>A identidade  $\mathbb{T}^T = \mathbb{T}$  é uma consequência do princípio da conservação do momento angular. Veja por exemplo (Liu, 2002) para mais detalhes.

Comparando (52) com a lei geral de balanço em (22) segue imediatamente que

$$\mathcal{Z} = \rho e + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2, \quad \mathcal{G}_{\mathcal{Z}} = \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + \rho r, \quad \Phi_{\mathcal{Z}} = \mathbb{T}\mathbf{v} - \mathbf{q}. \quad (53)$$

Em seguida, o resultado (24) no teorema 2.5.1 (teorema do transporte de Reynolds), permite escrever (52) como

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho e + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \right] d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_t} \left[ \rho e + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \right] \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} [\rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + \rho r] d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_t} [(\mathbb{T}\mathbf{v} - \mathbf{q}) \cdot \hat{\mathbf{n}}] d\mathbf{x}, \quad (54)$$

a partir da qual, considerando o resultado (27) dado pelo teorema da divergência, chega-se a

$$\int_{\Omega_t} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho e + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \right] - [\rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + \rho r] + \operatorname{div} \left( \left[ \rho e + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \right] \mathbf{v} - \mathbb{T}\mathbf{v} + \mathbf{q} \right) \right\} d\mathbf{x} = 0. \quad (55)$$

Um dos propósitos desta seção é a apresentação dos desenvolvimentos que conduzem à forma local do princípio da conservação da energia partindo de sua forma global. Finalmente, assumindo que o integrando em (55) é um campo escalar contínuo, pela arbitrariedade da subregião  $\Omega_t \subset \mathcal{R}_t$ , o teorema 2.5.3 (teorema da localização) permite concluir que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho e + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \right] - [\rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + \rho r] + \operatorname{div} \left( \left[ \rho e + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \right] \mathbf{v} - \mathbb{T}\mathbf{v} + \mathbf{q} \right) = 0, \quad (56)$$

para todo  $(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{R}_t \times \mathcal{I}$ .

A equação diferencial parcial presente no modelo matemático tratado neste trabalho é um caso espacial de (56) para a qual são identicamente nulos os campos de velocidade,  $\mathbf{v}$ , e de densidade de potência térmica de corpo,  $r$ . Com isso, (56) reduz-se à

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho(\mathbf{x}, t) e(\mathbf{x}, t)] + \operatorname{div}(\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times \mathcal{I}, \quad (57)$$

com substituição do domínio espacial  $\mathcal{R}_t$  por  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  considerado independente do parâmetro  $t$ .

### 2.5.6 Relações constitutivas

Uma equação geral de balanço como (56) ou mesmo o caso especial (57) representa uma equação fundamental válida para todos os sistemas materiais. No entanto, ela é insuficiente para caracterizar completamente o comportamento dos corpos materiais, pois experiências físicas mostram que dois corpos exatamente do mesmo tamanho e forma, em geral, não têm o mesmo comportamento quando estão sujeitos a exatamente um mesmo ambiente (suprimentos externos e condições de contorno). Por exemplo, uma mesma força não produzirá o mesmo alongamento em barras de borracha e de alumínio de mesmo diâmetro e comprimento.

Fisicamente, o comportamento de um corpo é caracterizado por uma descrição dos campos

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{X}, t), & \quad (\text{campo de densidade de massa}) \\ \Psi(\mathbf{X}, t), & \quad (\text{campo de movimento}) \\ u(\mathbf{X}, t), & \quad (\text{campo de temperatura}) \end{aligned}$$

chamados de *campos básicos*. Genericamente, a equação geral de balanço fornece um sistema de equações diferenciais parciais que consiste dos balanços de massa, de momento linear, de momento angular e de energia, que não são suficientes para determinar esses campos básicos. Isso ocorre porque tal sistema possui sempre mais incógnitas do que equações. Tomando como exemplo a equação (56), é imediato perceber a presença de outras variáveis de campo como o campo das tensões,  $\mathbb{T}$ , o campo fluxo de calor,  $\mathbf{q}$ , e o campo de densidade de energia interna específica,  $e$ , assim como os campos de suprimento externos dados pelo campo de densidade de forças de corpo específica,  $b$ , e o campo de densidade de suprimento de potência térmica de corpo específica  $r$ . Essas quantidades devem ser especificadas para que seja possível resolver o sistema de equações diferenciais parciais decorrente dos princípios básicos de conservação para qualquer das variáveis básicas de campo,  $\{\rho, \Psi, u\}$ .

Os suprimentos externos são sempre considerados como funções conhecidas, determinadas a partir do ambiente em que o corpo se encontra. Portanto, geralmente é assumido que as propriedades materiais são independentes de suprimentos externos, enquanto que o tensor das tensões, o vetor fluxo de calor e a densidade de energia interna específica,

$$\{\mathbb{T}(\mathbf{X}, t), \mathbf{q}(\mathbf{X}, t), e(\mathbf{X}, t)\}$$

dependem não só do comportamento do corpo, mas também do tipo de material de que é constituído o corpo. O estabelecimento de relações funcionais, conhecidas como *relações constitutivas*, para essas variáveis de campo é objeto de extensa pesquisa e detalhes a respeito podem ser encontrados em Liu (2002); Truesdell (1966);



Chaves (2013). Basicamente, na construção dessas relações constitutivas, hipóteses adicionais são introduzidas visando caracterizar as respostas termomecânicas de um determinado corpo material. Felizmente, em virtude das condições especiais do problema tratado neste trabalho, as relações constitutivas declaradas nos axiomas abaixo são suficientes para complementar a equação (57).

**Axioma 2.5.5** (Lei de Fourier da transferência de calor por condução). *Quando um meio contínuo sofre uma variação de temperatura não uniforme, o calor é transferido de uma região de temperatura mais alta para outra de temperatura mais baixa. Quando esse fenômeno ocorre sem transporte de massa, ele é conhecido como um problema de condução de calor ou de transferência de calor por condução. A lei fenomenológica (equação constitutiva do fluxo de calor por condução) que governa o comportamento de condução de calor pode ser definida por meio da lei de Fourier da condução de calor, que afirma que o fluxo de calor é proporcional ao gradiente de temperatura. Ou seja,*

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -\mathbb{K}(\mathbf{x}, t)\nabla_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x}, t), \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathcal{R}_t \times \mathcal{I}, \quad \left[ \frac{J}{m^2 s} \right], \quad (58)$$

onde  $\mathcal{R}_t \times \mathcal{I} \ni \mathbf{x}, t \mapsto \mathbb{K}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  é o tensor de condutividade térmica, determinado experimentalmente para cada tipo de sistema material.

**Axioma 2.5.6** (Relação constitutiva para densidade de energia interna específica). *Seja o corpo material  $\mathcal{B}$  ocupando a região  $\mathcal{R}_t$  em uma configuração corrente tal que  $\mathcal{R}_t = \mathcal{R}_0$  para todo  $t \in \mathcal{I}$ . Nesse caso, dizemos que os processos termodinâmicos ocorrem a volume constante, e sob tais condições o campo  $\mathcal{R}_t \times \mathcal{I} \ni (\mathbf{x}, t) \mapsto e(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}$  de densidade de energia interna específica é uma função apenas do campo de temperatura,  $\mathcal{R}_t \times \mathcal{I} \ni (\mathbf{x}, t) \mapsto u(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}$ , i.e,*

$$e(\mathbf{x}, t) = e(u(\mathbf{x}, t)),$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} [\rho(\mathbf{x}, t) e(\mathbf{x}, t)] &= \rho(\mathbf{x}, t_0) \frac{\partial}{\partial t} e(\mathbf{x}, t), \quad (\text{pois } \mathcal{R}_t = \mathcal{R}_0) \\
&= \rho_0(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial t} e(u(\mathbf{x}, t)) \\
&= \rho_0(\mathbf{x}) \frac{\partial e}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \\
&= \rho_0(\mathbf{x}) c_v(\mathbf{x}) \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t}
\end{aligned} \tag{59}$$

onde a função real positiva  $c_v = \frac{\partial e}{\partial u}$  é chamada de calor específico à volume constante ou ainda de calor específico à densidade de massa independente do tempo. Aqui  $\rho_0$  denota o campo de densidade de massa na configuração de referência. Obviamente,  $\rho_0(\mathbf{x}) = \rho_0(\mathbf{X}) = \rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x})$  para todo  $(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{R}_t \times \mathcal{I}$ .

Levando em conta os dois axiomas acima, a equação (57) finalmente toma a forma

$$\rho(\mathbf{x}) c_v(\mathbf{x}) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial t} - \operatorname{div}(\mathbb{K}(\mathbf{x}, t) \nabla_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, t)) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times \mathcal{I}. \tag{60}$$

Dois casos especiais de (60) aparecem nos problemas de valor inicial e de contorno considerados neste trabalho. O primeiro decorre do fato de  $\mathbb{K}$  ser dado por  $\mathbb{K}(\mathbf{x}, t) = \lambda(\mathbf{x}) \mathbb{I}$  onde  $\mathbb{I} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  é o tensor identidade. Assim, (60) torna-se

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial t} = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}) c_v(\mathbf{x})} \operatorname{div}(\lambda(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, t)) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times \mathcal{I}. \tag{61}$$

O segundo caso consiste em considerar o parâmetro  $\lambda$  como uma constante real positiva. Isso permite escrever (61) simplificada como

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial t} = \varepsilon(\mathbf{x}) \nabla^2 u(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times \mathcal{I}. \tag{62}$$

onde o parâmetro

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{\lambda}{\rho(\mathbf{x}) c_v(\mathbf{x})}$$

é chamado de *difusividade térmica*, e

$$\nabla^2(\cdot) := \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial z^2}$$

é o operador laplaciano em coordenadas cartesianas.

## 2.6 Modelo GAEA

Como ferramenta de simulação e cálculo para estimar o potencial térmico dos TCSA, foi utilizada uma versão do modelo GAEA, introduzido por Benkert et al. (1997) e avaliado em outros trabalhos como Ascione et al. (2011); Papakostas et al. (2019); Domingues et al. (2021), dentre outros. Para usar o modelo, é preciso conhecer os parâmetros da Tabela 1 e também o valor da velocidade de entrada de ar, dada aqui por  $v_a = 3,3 \text{ m/s}$ , como em Vaz (2011).

O modelo faz estimativas analíticas da transferência de calor no duto. Para isso, e como as referências citadas acima, é necessário calcular o número de Nusselt, estimado por:

$$Nu_D = 0,0214 \times (Re_D^{0,8} - 100) \times Pr^{0,4}. \quad (63)$$

Aqui, os números de Reynolds ( $Re$ ) e Prandtl ( $Pr$ ) são dados por:

$$Re_D = \frac{\rho_a v_a D_0}{\mu_a}, \quad Pr = \frac{\mu_a C_{p,a}}{\lambda_a},$$

onde,  $\rho_a$ ,  $\mu_a$ ,  $C_{p,a}$  e  $\lambda_a$  são, respectivamente, a densidade de massa, viscosidade dinâmica, calor específico e condutividade térmica do ar. Por outro lado,  $D$  seria o diâmetro do duto, ou seja,  $D_0$ .

Assim, pode-se calcular o coeficiente de convecção de calor na superfície interna do duto através da equação:

$$h = \frac{\lambda_a Nu}{D_0}.$$

Com isso, o coeficiente de transferência de calor entre o escoamento de ar e as paredes do duto, é dado por:

$$U_L = \pi D_0 h.$$

Segundo Benkert et al. (1997) um parâmetro  $U^*$  é definido para medir a relação de condutância da transferência de calor da superfície da terra para o duto e do fluxo de ar para a parede do duto

$$U^* = \frac{2\pi\lambda_s}{U_L \ln \left( \frac{2z_0}{D_0} + \sqrt{\left(\frac{2z_0}{D_0}\right)^2 - 1} \right)}, \quad (64)$$

onde  $\lambda_s$  é a condutividade térmica do material que circunda o duto.

O GAEA é um modelo iterativo, no qual o comprimento do duto é dividido em vários segmentos. O tamanho representativo desses segmentos é indicado por  $\Delta x$ . Neste trabalho, como sugerido em Benkert et al. (1997), o duto foi dividido em 100 segmentos de mesmo tamanho, ou seja,  $\Delta x = L_0/100$ . Em cada segmento supõe-se que o ar mantém uma temperatura aproximadamente constante. As mudanças

de temperatura ocorrem na fronteira entre dois segmentos sucessivos. Além disso, o GAEA utiliza uma estimativa da temperatura do solo  $T_s$  na posição do duto, sem a sua presença. Desse modo, para cada segmento  $k$ , é preciso fazer uma correção da temperatura do solo junto a parede do duto  $T_{c,w}^k$ . Isso é feito pela média ponderada:

$$T_{c,w}^k = \frac{U^* T_s + T_{a,i}^k}{U^* + 1}, \quad (65)$$

onde,  $T_{a,i}^k$  é a temperatura do ar na entrada do segmento  $k$ . Como pode ser visto  $U^*$  funciona como fator de ponderação.

A taxa de transferência de calor em cada segmento é dada por:

$$\dot{Q}_k = \dot{m} C_{p,a} (T_{a,o}^k - T_{a,i}^k), \quad (66)$$

onde  $T_{a,o}^k$  é a temperatura do ar na saída do  $k$ -ésimo segmento e  $\dot{m}$  a vazão do ar.

A taxa de transferência de calor pode ser definida também como:

$$\dot{Q}_k = \Delta x U_L (T_{c,w}^k - T_{a,i}^k). \quad (67)$$

Logo, usando as duas últimas equações, chegou-se a:

$$T_{a,o}^k = T_{a,i}^k + \frac{\Delta x U_L (T_{c,w}^k - T_{a,i}^k)}{\dot{m} C_{p,a}}. \quad (68)$$

Assim, obtém-se uma fórmula de cálculo iterativa para determinar as temperaturas do ar dentro do duto, até a sua saída.

## 2.7 Metodologia numérica

Como visto, o modelo GAEA depende do conhecimento da temperatura do solo na posição dos dutos. Esta seção apresenta a metodologia de cálculo, feita através da solução numérica da equação de conservação de energia no solo.

As temperaturas do solo ao longo do ano podem ser estimadas calculando a função  $T = T(x, z, t)$  satisfazendo a equação

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \epsilon \nabla^2 T \quad \text{em} \quad \Omega \times (0, \tau_0], \quad (69)$$

onde  $\Omega = (0, 10) \times (0, 15)$  representa o domínio espacial,  $\epsilon = \frac{\lambda}{\rho c_p}$  é a difusividade térmica e

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (70)$$

define o operador laplaciano em coordenadas cartesianas, restrito ao plano  $x - z$ ,

A equação (69) deve satisfazer o problema de valor inicial e de contorno (PVIC)

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{em } x = 0 \text{ e } x = 10 \quad (71)$$

$$T = T_a(t) \quad \text{em } z = 0, \quad (72)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad \text{em } z = 15, \quad (73)$$

$$T(x, z, 0) = T_{ini}(z). \quad (74)$$

Para focar essa seção nos aspectos numéricos da solução, as unidades são omitidas, mas lembrando que elas já foram apresentadas anteriormente.

Para evitar que as condições de contorno desse PVIC variem no tempo, pode-se introduzir um parâmetro  $\bar{T}$  através da equação

$$T = \bar{T} + T_a(t) \quad (75)$$

Com isso, o problema torna-se encontrar a função  $\bar{T} = \bar{T}(x, z, t)$  que satisfaz o seguinte PVIC modificado

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} - \epsilon \nabla^2 \bar{T} = -\frac{\partial T_a}{\partial t} \quad \text{em } \Omega \times (0, \tau_0], \quad (76)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = 0 \quad \text{em } x = 0 \quad \text{e} \quad x = 10, \quad (77)$$

$$\bar{T} = 0 \quad \text{em } z = 0, \quad (78)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = 0 \quad \text{em } z = 15, \quad (79)$$

$$\bar{T}(x, z, 0) = T_{ini}(z) - T_a(0) \quad (80)$$

Para fazer a discretização temporal, o intervalo de tempo total da simulação  $(0, \tau_0]$  é particionado em  $N$  partes iguais de tamanho  $\Delta t = \tau_0/N$ . Assim, é preciso achar soluções discretas  $\bar{T}^n = \bar{T}(x, z, n\Delta t)$  tais que:

$$\frac{\bar{T}^n - \bar{T}^{n-1}}{\Delta t} - \epsilon \nabla^2 \bar{T}^n = F^n \quad \text{em } \Omega, \quad (81)$$

$$\frac{\partial \bar{T}^n}{\partial x} = 0 \quad \text{em } x = 0 \quad \text{e} \quad x = 10, \quad (82)$$

$$\bar{T}^n = 0 \quad \text{em } z = 0, \quad (83)$$

$$\frac{\partial \bar{T}^n}{\partial z} = 0 \quad \text{em } z = 15, \quad (84)$$

para  $n = 1, 2, \dots, N$ , onde

$$F^n = -\frac{\partial T_a}{\partial t} \quad \text{em} \quad t = n\Delta t, \quad (85)$$

e

$$\bar{T}^0 = T_{ini}(z) - T_a(0) \quad (86)$$

Essa discretização temporal consiste basicamente de uma metodologia de diferenças finitas, especificamente o método de Euler implícito de primeira ordem (ÖZISIK, 1993). Com a utilização desta metodologia, os valores de  $\bar{T}$  são calculados iterativamente nos instantes de tempo  $t = n\Delta t$ , após determinar seus valores em  $t = (n-1)\Delta t$ . Desta forma, é conveniente reescrever a equação (81) na forma

$$\frac{\bar{T}^n}{\Delta t} - \epsilon \nabla^2 \bar{T}^n = F^n + \frac{\bar{T}^{n-1}}{\Delta t}, \quad (87)$$

onde temos a direita todos os termos conhecidos da equação.

Deve-se notar que todos os termos da equação (87) dependem apenas de  $x$  e  $z$ , em particular as soluções discretas, i.e.  $\bar{T}^n = \bar{T}^n(x, z)$ . Portanto, para cada  $t = n\Delta t$ , é preciso resolver um problema de valor de contorno (PVC) formado pela (87) e pelas condições dadas nas equações (82) a (84).

Nesse trabalho, foi utilizado o método de elementos finitos de Galerkin para resolver esse PVC. Em primeiro lugar, é necessário escrever a formulação variacional do PVC e, como usual, definir os espaços das funções tentativa e das funções teste. Neste problema específico, ambos coincidem e são dados por:

$$W = \{w/w \in H^1(\Omega) \text{ e } w = 0 \text{ em } \Gamma_1\} \quad (88)$$

onde  $\Gamma_1$  é o segmento de reta aberto definido pelas equações  $z = 0, 0 < x < 10$ . Como pode ser visto na Figura (6),  $\Gamma_1$  faz parte do contorno do domínio  $\Omega$ , o contorno completo é dado pelo conjunto fechado  $\Gamma = \overline{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4}$

Aqui é necessário definir o espaço de Sobolev  $H^1(\Omega)$  dado pelas funções  $u = u(x, z)$  que são quadrado integráveis, junto com suas derivadas parciais primeiras, no

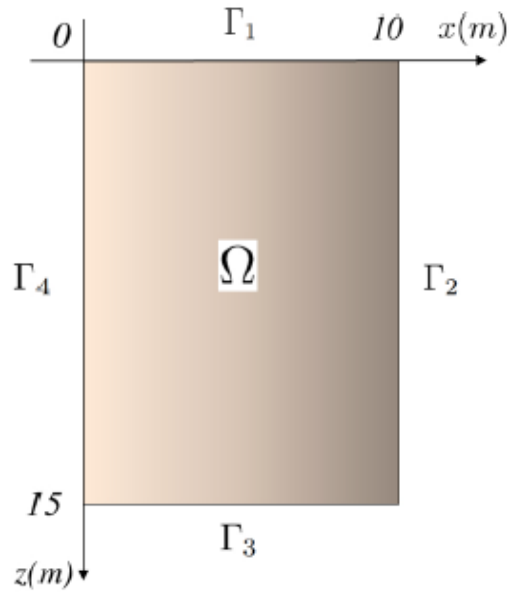


Figura 6: Ilustração do domínio  $\Omega$  e seu contorno  $\Gamma$ .

domínio  $\Omega$ . Em outras palavras,

$$H^1(\Omega) = \left\{ u / \int_{\Omega} u^2 dA < \infty, \right. \quad (89)$$

$$\left. \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dA < \infty, \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dA < \infty \right\}.$$

A formulação variacional do PVC consiste em buscar as funções  $\bar{T}^n \in W$ , com  $n = 1, 2, \dots, N$ , tais que

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \bar{T}^n V dA + \epsilon \int_{\Omega} \nabla \bar{T}^n \cdot \nabla V dA \quad (90)$$

$$- \epsilon \int_{\Gamma} (\nabla \bar{T}^n \cdot \mathbf{n}) V dL = \int_{\Omega} G^n V dA, \quad \forall V \in W, \quad (91)$$

onde

$$G^n = F^n + \frac{\bar{T}_{n-1}}{\Delta t}; \quad (92)$$

$$\nabla T = \left( \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (93)$$

define o operador gradiente em coordenadas cartesianas, restrito ao plano  $x-z$ ;  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal aos segmentos de reta que compõem o contorno  $\Gamma$ , com sentido para fora do domínio  $\Omega$ . O segundo e terceiro termos da equação (91) surgem de uma integração por partes, com a utilização do teorema da divergência.

Sabendo que  $V \in W$ , temos que  $V = 0$  em  $\Gamma_1$ . Além disso, pelas condições de contorno do problema,  $\nabla T^n \cdot \mathbf{n} = 0$  em  $\Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ . Logo, o terceiro termo na equação (91) é nulo.

Continuando com a discretização espacial, é preciso definir uma partição regular (ou malha)  $\zeta = \{K\}$  do domínio  $\Omega$  em elementos  $K$ . Neste trabalho são usados elementos triangulares, onde a intersecção de quaisquer dois elementos é um vértice (ou nó da malha), uma aresta, ou vazia. Cabe introduzir também o parâmetro de malha

$$h = \max_{K \in \zeta} [\text{diametro}(K)], \quad (94)$$

e baseado na partição adotada, escolhe-se um espaço de dimensão finita  $W_h \subset W$ .

Desse modo, no método de Galerkin, buscam-se soluções aproximadas  $\bar{T}_h^n \in W_h$ , para  $n = 1, 2, \dots, N$ , tal que

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \bar{T}_h^n V_h dA + \epsilon \int_{\Omega} \nabla \bar{T}_h^n \cdot \nabla V_h dA = \int_{\Omega} G_h^n V_h dA, \quad \forall V_h \in W_h \quad (95)$$

$$\bar{T}_h^0 = T_{ini}(z) - T_a(0).$$

Um detalhamento mais explícito de como converter a equação (95) em um sistema de equações lineares, bem como o processo de montagem das matrizes e vetores, permitindo calcular os valores de  $\bar{T}_h^n$  nos diversos nós da malha, é apresentado em diferentes referências acerca do método de elementos finitos, como Hughes (1987), dentre outros. Como essa metodologia já pode ser considerada clássica, foge ao escopo desse texto abordá-la aqui. Assim, o restante da seção fornece mais informações sobre as malhas adotadas no trabalho e o passo de tempo utilizado.

**Observação 2.7.1.** *Importa ressaltar que a formulação de elementos finitos usada neste trabalho considera elementos triangulares lineares.*

## 2.8 Malhas

### 2.8.1 Geração de malhas

O domínio geométrico considerado é um retângulo com lados de 10 e 15 m. Assim como Brum (2016) considera-se que as dimensões do solo são suficientes para garantir condições adiabáticas nas laterais e na sua parte inferior. O duto de 0,11 m de diâmetro está no centro do bloco maciço de material galvanizado. O diâmetro do duto é o mesmo que em Vaz (2011), assim como a profundidade de 1,6 m.

A Figura 7 mostra a configuração geométrica. Aqui, aparece também o bloco quadrado de 0,18 m de lado. O centro do bloco coincide com o centro do duto. Cabe lembrar que o duto não é considerado na malha, pois as soluções da equação de con-



servação de energia são feitas sem sua presença. Perpendicularmente às faces do bloco, a partir do meio delas, são instaladas as aletas de 0,01 m de espessura e 1 m de comprimento.

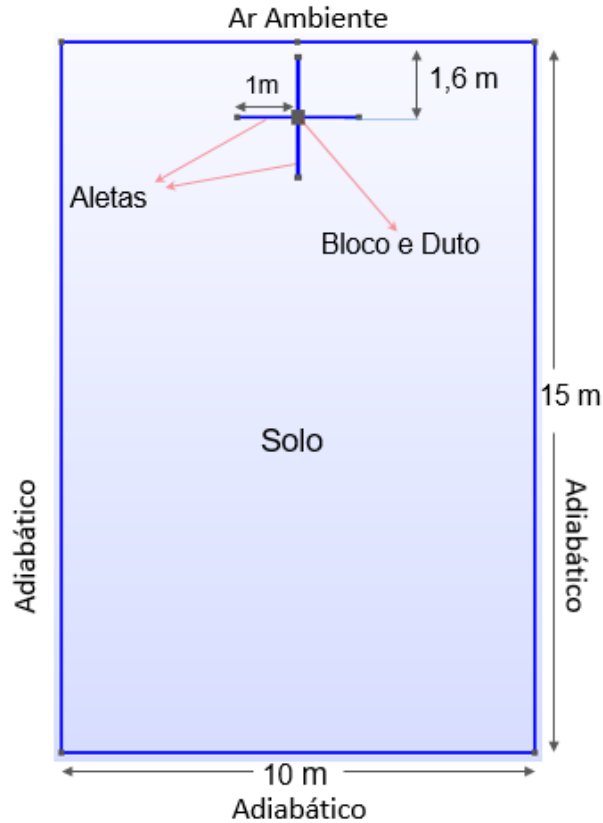


Figura 7: Configuração geométrica (seção transversal)

Nesse trabalho, o domínio computacional foi construído e discretizado por meio do software GMSH, que é um gerador de malhas. Em todos os casos foram usados elementos triangulares, cujo número variava de 2000 a 5500. Para melhorar a precisão, a malha foi mais refinada junto ao bloco. Isso foi feito criando dois parâmetros principais para controlar o tamanho dos pontos junto ao bloco e fora dele, que foram nomeados como *tamc* e *tpfora*<sup>6</sup>. A Figura 8 ilustra duas malhas geradas no GMSH nas quais os parâmetros *tpfora* e *tamc* são diferentes. Pode-se reparar que a malha fica mais refinada com a redução do valor desses parâmetros.

Na primeira etapa de simulações, o domínio principal foi dividido em seis subdomínios: 1) solo; 2) bloco; 3) aleta esquerda; 4) aleta direita; 5) aleta superior e 6) aleta inferior, a fim de formar diferentes possibilidades de configurações nas simulações, adaptadas dos casos propostos em Hassanzadeh et al. (2018). O código de simulação permitia considerar as propriedades de cada subdomínio como sendo as do solo ou do material galvanizado. Assim, por exemplo, se as simulações são realizadas com

<sup>6</sup> *tamc* e *tpfora* são designações de dois parâmetros definidos no software GMSH com o objetivo de controlar o grau de refinamento da malha na vizinhança de pontos do domínio computacional.

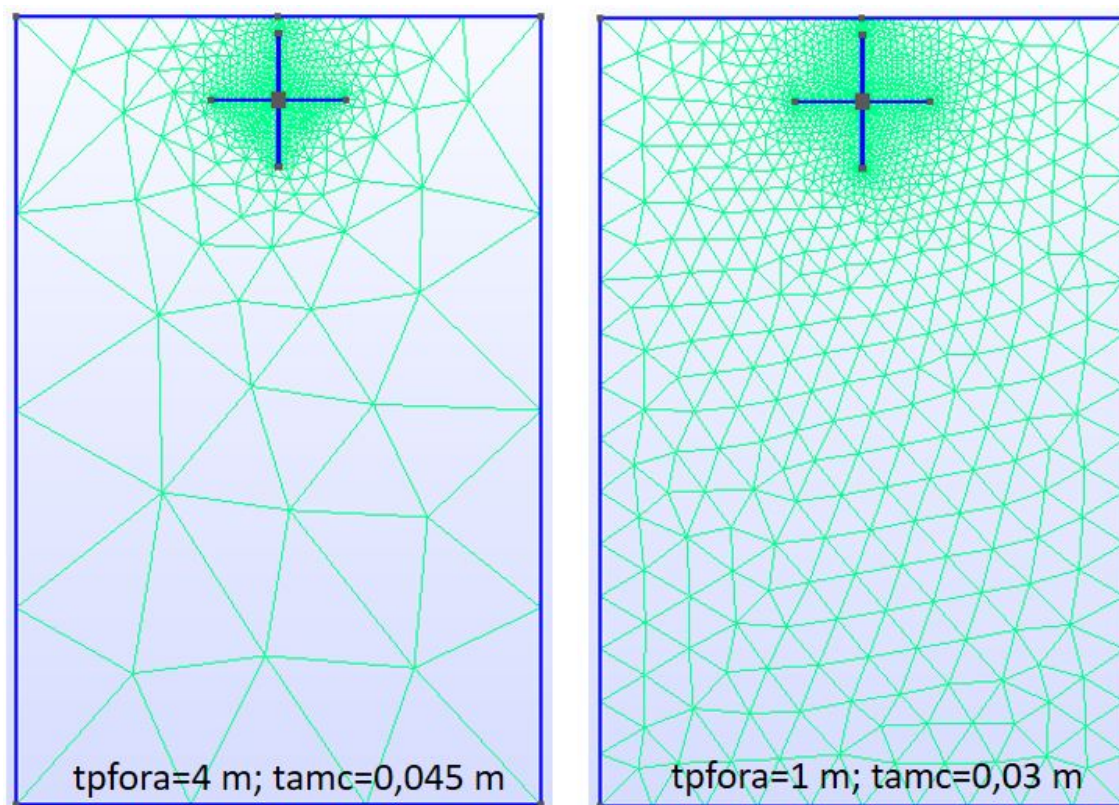


Figura 8: Variação de parâmetros e geração de malha em GMSH

o arranjo composto do bloco e da aleta direita, então assumia-se que os subdomínios 2 e 4 tinham as propriedades físicas do material galvanizado enquanto 1, 3, 5 e 6 tinham as propriedades do solo. Dessa forma, a mesma malha podia ser usada para diferentes casos.

### 2.8.2 Testes de malhas

Para que a malha adotada não interferisse significativamente nos resultados, várias malhas foram testadas. Da mesma forma que Domingues et al. (2021), para todos os casos foi adotada uma discretização temporal com um intervalo de tempo ( $\Delta t$ ) de 1800 segundos. Em todos os testes, foram comparados os vetores de temperatura ao longo do ano no centro do duto (e do bloco), isto é, no ponto de coordenadas  $x = 5$  m e  $z = 1.6$  m. Cada comparação foi feita calculando a magnitude máxima da diferença entre dois vetores solução de testes distintos.

Os testes conclusivos são apresentados na Tabela 2, junto com o número de nós, elementos e tempo total de simulação de cada um deles. Como se vê na mesma tabela, os resultados convergiram dentro do esperado com o aumento do número de nós e de elementos da malha. Assim como em Domingues et al. (2021), uma diferença máxima da ordem de  $10^{-4}$  entre dois testes foi considerada suficiente para concluir as comparações. A malha correspondente ao quarto caso da Tabela 2 pode ser vi-

sualizada na Figura 9. Como critério geral para simulações posteriores, passou-se a adotar malhas com número de nós superiores a 2000 e com mais de 4000 elementos. Assim, uma típica simulação consumia um tempo de processamento próximo de 6 minutos.

Tabela 2: Dados de teste de independência de malha

Nós	Elementos	Tempo (min)	Comparação
1097	2137	2,6	
1396	2722	3,4	$1,80 \times 10^{-3}$
1657	3230	4,2	$6,94 \times 10^{-4}$
<b>2017</b>	<b>3935</b>	<b>5,5</b>	<b><math>2,41 \times 10^{-4}</math></b>

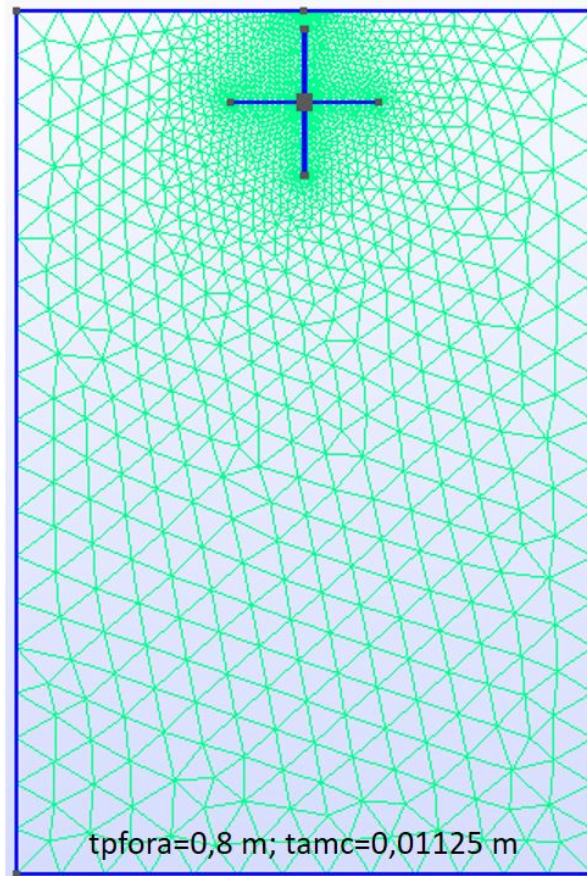


Figura 9: Vista da malha selecionada no programa GMSH

## 3 RESULTADOS

### 3.1 Verificação e validação do modelo computacional

Para começar a interpretar os resultados desta pesquisa, é necessário que alguns dados de referência estejam presentes. Da mesma forma que em Domingues et al. (2021), foi realizado um ajuste dos dados da temperatura do ar,  $T_a$ , de Viamão. Ou seja, os dados obtidos por Vaz (2011) foram ajustados por mínimos quadrados, obtendo-se a seguinte função periódica:

$$T_a(t) = 20,49 + 5,66 \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{365}t - 5,30 \right). \quad (96)$$

Aqui, o tempo,  $t$ , está em dias e a temperatura do ar em °C.

Os dados experimentais de Vaz (2011) são levados em consideração como pontos de partida para modelagem e simulação. Ou seja, inicialmente são adotados os parâmetros de comprimento do duto, diâmetro e profundidade iguais a  $L_0 = 25,77$  m,  $D_0 = 0,11$  m e  $z_0 = 1,6$  m, respectivamente. Além disso, as propriedades termofísicas são as dadas na Tabela 1. Também foi utilizada a velocidade de escoamento do ar na entrada dos dutos, dada por  $v_a = 3,3$  m/s, que corresponde a uma vazão de ar igual a  $\dot{m} = 0,0364$  kg/s

Como nas investigações recentes de Domingues et al. (2021) e Hermes et al. (2020), uma versão do modelo GAEA foi usada e validada com os dados experimentais de Vaz (2011). O primeiro adota um modelo GAEA e calcula as temperaturas do solo por uma metodologia unidimensional baseada em diferenças finitas. Este último usa um modelo numérico 3D baseado em equações de conservação, e as resolve por métodos de volumes finitos com o software Fluent. Em Domingues et al. (2021) o coeficiente de correlação de Pearson entre os resultados do seu modelo e os dados experimentais foi de 0,89; mais ainda, a mesma referência estimou a diferença anual RMS entre os valores do modelo e os experimentais em aproximadamente  $1,45^\circ$  C.

Na Figura 10, são comparados os resultados de diferentes investigações de referência. Ou seja, uma comparação entre: (1) os resultados das médias diárias (discre-

tas) de temperatura na saída do TCSA, conforme Vaz (2011); (2) uma curva ajustada por mínimos quadrados desses mesmos dados, seguindo uma função periódica, (3) os resultados de Domingues et al. (2021) e (4) os resultados de Hermes et al. (2020) (5) o resultado do Modelo atual. Como pode ser visto na mesma figura, os resultados desse trabalho são aproximadamente iguais aos de Domingues et al. (2021), validando e verificando o modelo proposto.

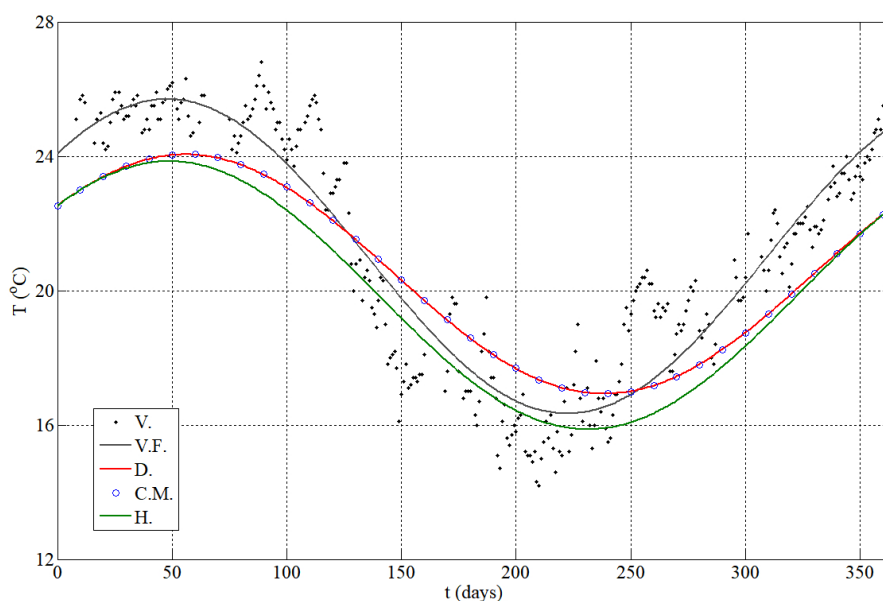


Figura 10: Comparação dos resultados do modelo atual com outros pesquisas de referência.

**Observação 3.1.1.** Na Figura 10, as legendas (V) as temperaturas médias diárias discretas na saída de uma instalação TCSA de Vaz (2011), (VF) a curva ajustada de mínimos quadrados dos mesmos dados, (D) e (H) os resultados numéricos dos modelos de Domingues et al. (2021) e Hermes et al. (2020), respectivamente; (CM) os resultados do nosso modelo atual.

A Figura 11 mostra os gráficos, utilizando este modelo, dos campos da temperatura média diária em 2D nas quatro estações do ano. A uma profundidade de 1,6 m, pode-se observar que o potencial térmico do solo ( $P_s$ ) é maior no verão e no inverno. Mais ainda, pode-se perceber que nessas estações há uma diferença de aproximadamente 5°C entre a temperatura do ar (na superfície) e no solo. Por exemplo, no verão, enquanto a temperatura na superfície é próxima de 25°C, a cerca de 5 m, a temperatura está em torno de 20°C.

## 3.2 Projetos com materiais galvanizados ao redor do duto

Seguindo as ideias de Hassanzadeh et al. (2018), quanto ao design dos materiais galvanizados ao redor do duto, foi escolhida uma estrutura sólida galvanizada que



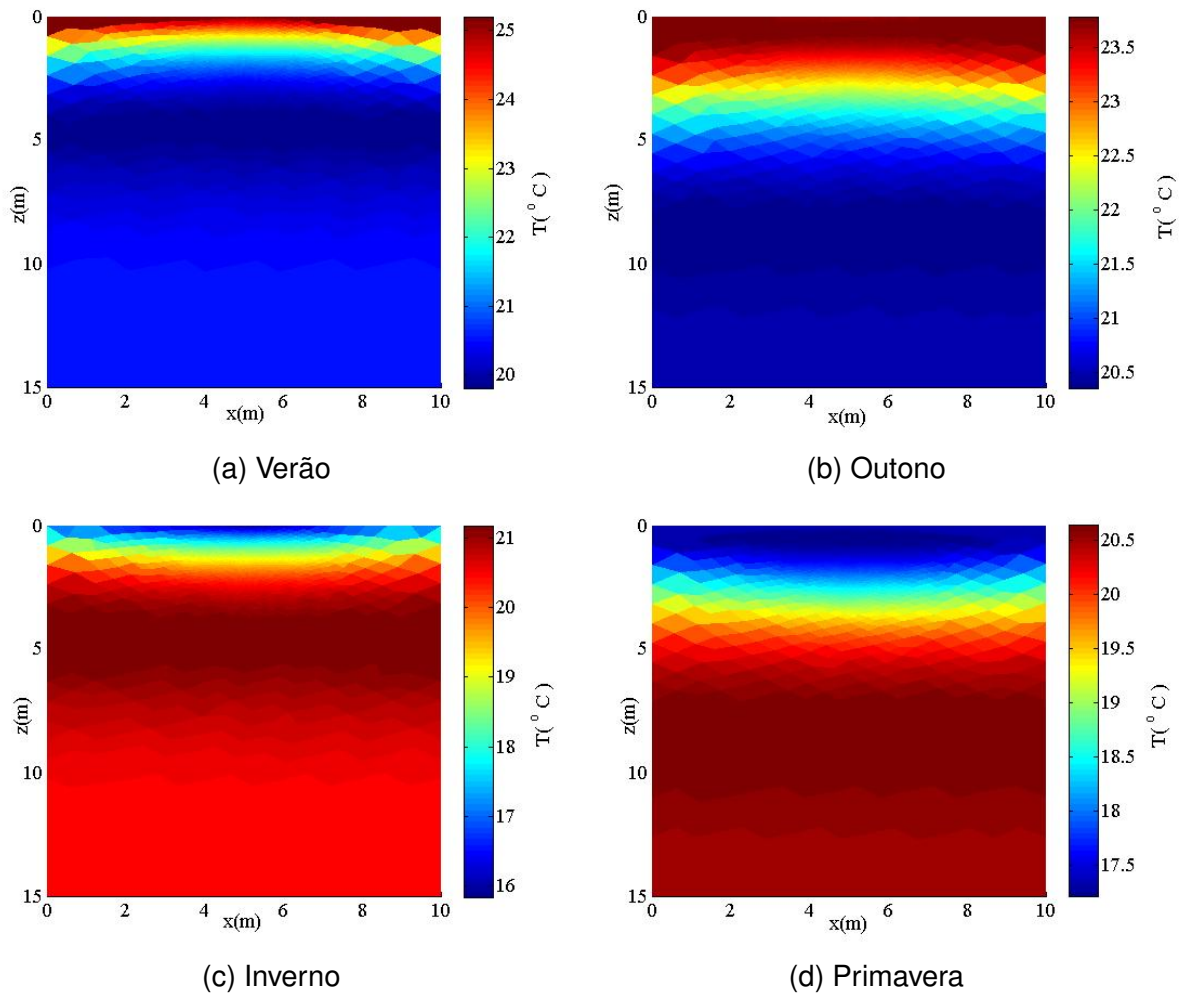


Figura 11: Campos de temperatura média diária do solo nas quatro estações usando o modelo atual

chamaremos de bloco e quatro estruturas galvanizadas fixadas a ela que chamaremos de aletas. A descrição das medidas e das posições é feita na seção 2.2.

Desta forma, diferentes configurações de projeto foram realizadas, levando em consideração a posição e o número de aletas. Na Figura 12, aparecem todos os casos considerados para a simulação computacional. A primeira parte da figura corresponde à distribuição dos subdomínios físicos da estrutura. Quando o subdomínio possui material galvanizado, ele aparece em azul, quando não, ele aparece em branco. Desta forma, o Caso 0 corresponde ao caso de Vaz (2011), visto que as posições referentes ao bloco e aletas são simulados com propriedades físicas do solo. Já o Caso 10, por exemplo, refere-se a uma simulação contendo o bloco mais as aletas esquerda, direita e inferior.

**Observação 3.2.1.** *O Caso 4 foi simulado com uma aleta do lado direito. Por simetria, isto é equivalente a simular com uma aleta do lado esquerdo.*

Na Tabela 3, os valores RMS anuais para o Potencial Térmico do solo ( $P_s$ ) é expli-

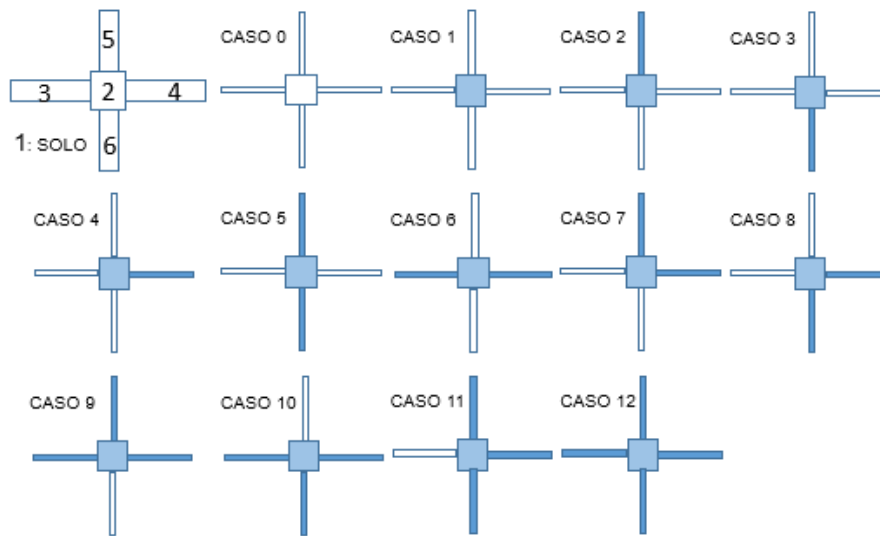


Figura 12: Diferentes configurações de duto, bloco e aletas

citado para os diferentes casos. Os números desta tabela são valores médios anuais, por isso estão entre 2 e 3 °C. O maior valor deste potencial ocorre nos casos 3, 8 e 10. Por outro lado, o Caso 3 é o que necessita de menos material, pois usa apenas uma aleta (a inferior). Sendo assim, este foi considerado o melhor caso das simulações.

Tabela 3: Valores RMS anuais para o potencial térmico do solo nos diferentes casos

Caso	0	1	2	<b>3</b>	4	5	6
$P_s(^{\circ}C)$	2,58	2,58	2,48	<b>2,64</b>	2,58	2,53	2,58
Caso	7	8	9	10	11	12	
$P_s(^{\circ}C)$	2,47	2,64	2,48	2,64	2,53	2,53	

### 3.3 Uma análise do enriquecimento da condutividade térmica do solo

É importante destacar as diferenças entre esse trabalho e o de Hassanzadeh et al. (2018). O objetivo daqueles autores era maximizar a dissipação de calor entre os dutos e o solo. Para isso, eles recorreram ao uso de aletas com alta condutividade térmica. No entanto, eles não fizeram estimativas de potencial térmico dos TCSA, nem do potencial térmico do solo. Desse modo, guiando-se exclusivamente pelo trabalho deles, onde há configurações muito análogas as da Figura 12, alguém poderia pré-assumir que o melhor caso seria o 12, ao invés do 3, como visto nessa dissertação.

Assim, um dos objetivos é esclarecer a diferença entre os resultados deste e daquele trabalho. Enquanto o aumento da condutividade térmica do solo ao redor do duto melhora a troca térmica, por outro lado, um aumento excessivo dessa condutividade pode não ser benéfica para a melhoria do potencial térmico dos TCSA. Para

tratar dessa questão física hipotética, são feitas simulações onde a área do bloco ao redor dos dutos varia, ocupando diferentes proporções da área total do solo.

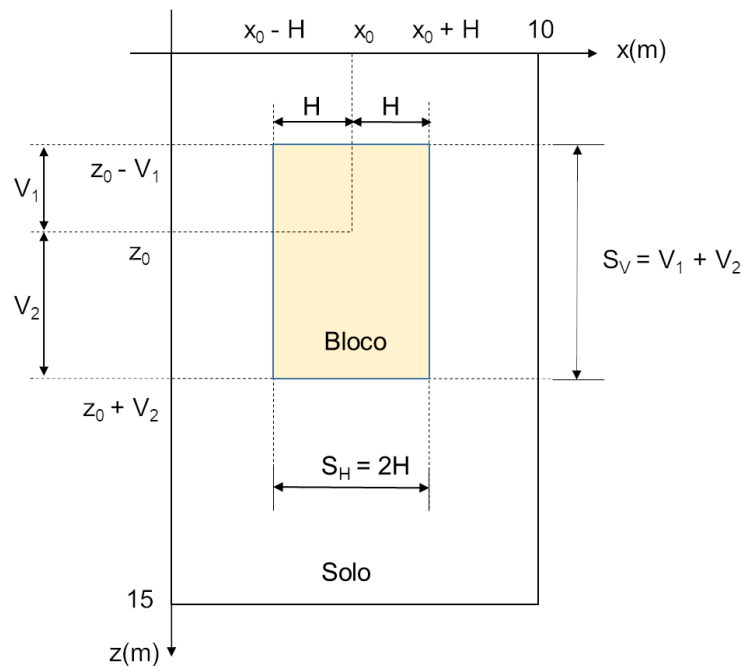


Figura 13: Definições do domínio computacional.

Uma seção transversal do domínio computacional pode ser vista na Figura 13. Aqui,  $x_0$  e  $z_0$  são as coordenadas do centro do duto;  $S_V$  e  $S_H$  representam, respectivamente, os tamanhos vertical e horizontal do bloco. Dentre as infinitas possibilidades de variação do bloco, aqui se escolheu a seguinte.

- A posição do bloco está centralizada na direção horizontal.
- Os limites de variação de  $H$  são 0 e 5 m, logo  $S_H$  pode variar de 0 a 10 m.
- A variação vertical segue a proporção:

$$S_V = \frac{15V_1}{z_0}.$$

Assim, nos limites de variação de  $V_1$ , entre 0 m e  $z_0$ ,  $S_V$  varia de 0 a 15 m. Nota-se que  $V_2$  depende de  $V_1$ , isto é  $V_2 = S_V - V_1$ . Portanto,  $V_2$  só pode variar entre 0 e  $15 \text{ m} - z_0$ .

- A área do bloco é proporcional a área do domínio. Para garantir isso, assume-se que

$$S_H = \frac{2S_V}{3}.$$

Desse modo, há dois casos limites: (a)  $S_V = 0$  m implica  $S_H = 0$  m e o bloco converge para o centro do duto; (b)  $S_V = 15$  m implica  $S_H = 10$  m e o bloco



ocupa todo o domínio computacional. Em suma, o caso (a) e (b) representam situações onde todo o domínio é composto, respectivamente, pelo solo ou pelo material galvanizado.

Nesta secção, para a geometria do duto, foram utilizados os mesmos parâmetros descritos em Vaz (2011), em que o seu comprimento assume o valor de 25,77 m e o diâmetro de 0,11 m. Novamente, as simulações desconsideram a presença do duto, com as temperatura do domínio estimadas resolvendo a equação de conservação de energia em duas dimensões. Isto é, basicamente segue-se a mesma metodologia apresentada no Capítulo 2, onde os domínios são semelhantes aos da Figura 13.

Em geral, excetuando-se o caso limite,  $S_V = S_H = 0$  m (em que todo o domínio é composto pelo solo e já tratado no Capítulo 3), foram evitadas situações onde as dimensões  $S_V$  ou  $S_H$  fossem menores que o diâmetro do duto. Mais especificamente, as simulações foram divididas em nove casos, variando de 10% a 90% as proporções entre as áreas do bloco galvanizado e do domínio computacional.

A Figura 14 apresenta os campos de temperaturas em dois casos. Em (a.1) pode-se ver o campo no verão e em (a.2) no inverno. Em ambos a área do bloco ocupa 10% do domínio computacional. Já os itens (b.1) e (b.2) apresentam, respectivamente, os campos no verão e no inverno, com a área do bloco ocupando 90% do domínio.

Pela Figura 14, na proporção de 10%, acontece uma condução térmica da forma esperada. Ou seja, o bloco auxilia em tornar a região ao redor do duto mais fria ou mais quente que a superfície. A região do bloco, que possui alta condutividade térmica, se destaca de forma homogênea na figura, criando uma conexão entre o duto e as camadas mais profundas do solo. Por outro lado, na proporção de 90%, o bloco passa a conectar a região próxima da superfície com as mais profundas. Nessa situação, a temperatura da superfície passa a influenciar significativamente o processo. Pode-se notar que a região em torno do duto passa a ter uma temperatura próxima a da superfície, reduzindo significativamente o potencial térmico dos TCSA.

A Figura 15 apresenta as curvas das temperaturas do ar, do solo e da saída do trocador de calor nas proporções de 10% e 90%. Pode-se observar que a eficiência é alta em ambos os casos, com a temperatura na saída próxima a temperatura do solo na posição do duto. Por outro lado, como esperado, percebe-se uma drástica variação nos potenciais térmicos dos TCSA.

Este último resultado mostra o seguinte. Uma região ao redor do duto com alta condutividade térmica possibilita aumentos significativos nas capacidades de trocas térmicas e também na eficiência. Por outro lado, isso não significa melhoria do potencial térmico dos TCSA (nem do solo), pois este depende de um aumento na diferença de temperaturas entre a superfície e o ponto de localização dos dutos.

Como o trabalho de Hassanzadeh et al. (2018) queria maximizar as trocas térmicas no domínio, isto é obtido aumentando o número de aletas e com uma configuração

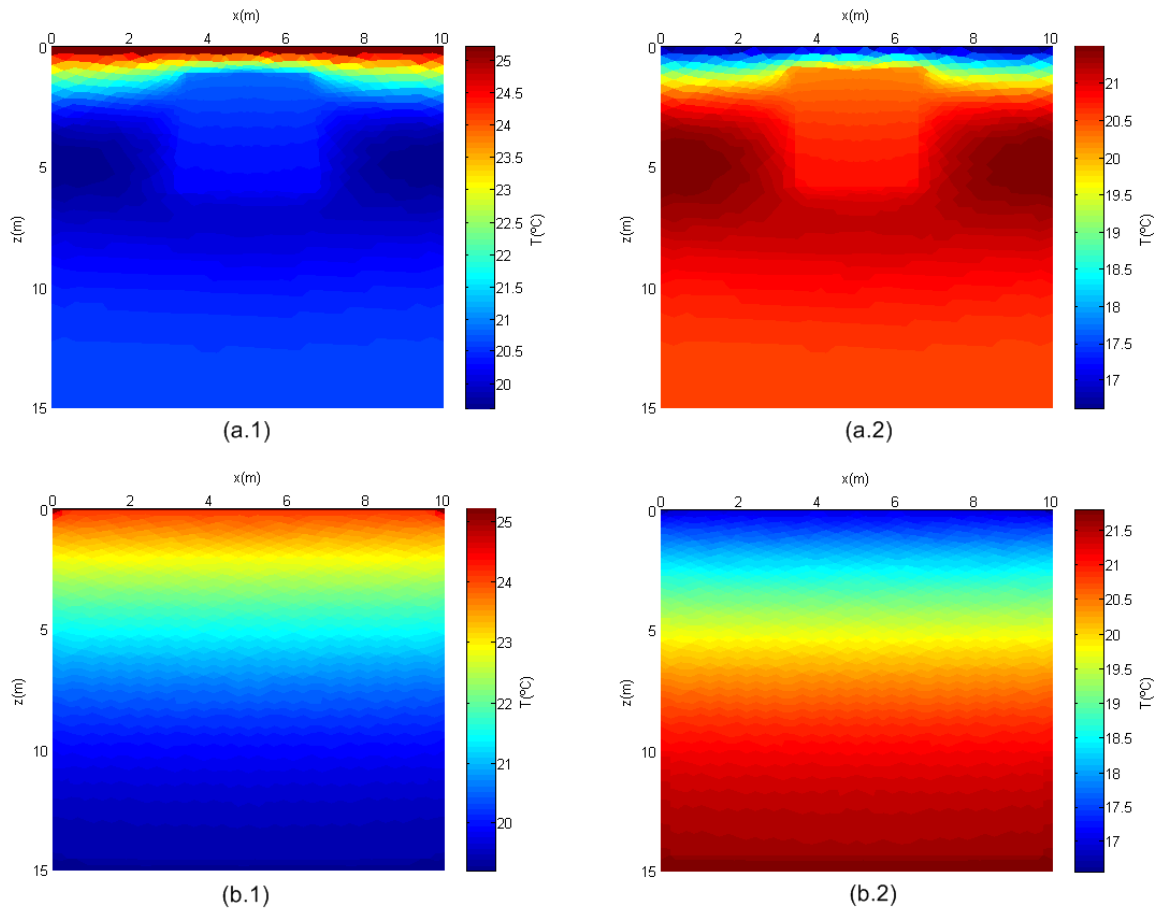


Figura 14: Campos de temperatura em dois casos (10% e 90%)

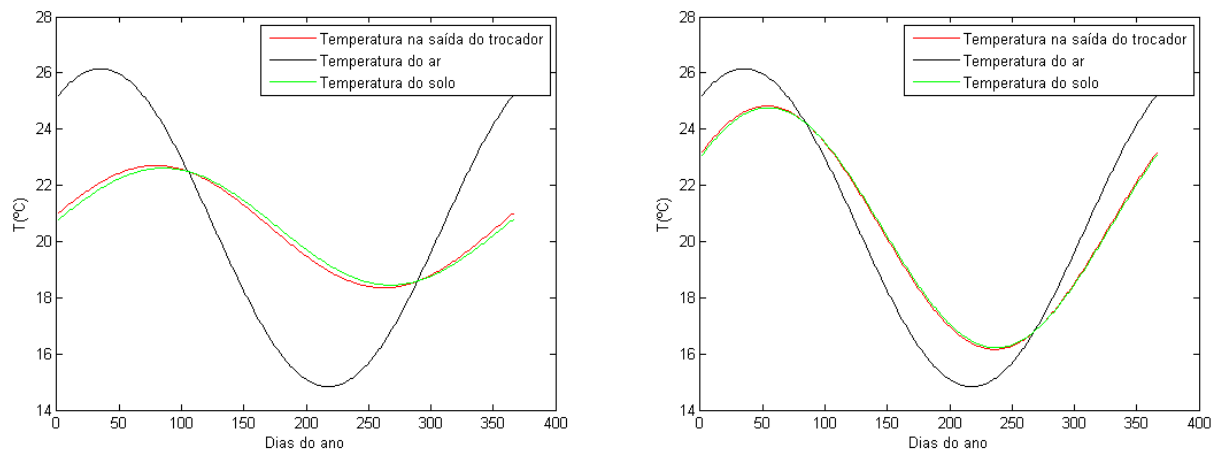


Figura 15: Diferença entre as temperaturas na proporção de 10% (esquerda) e 90% (direita).

como o caso 12 da Figura 12. Porém, os resultados mostram que tal configuração não é ideal, pois a temperatura na região dos dutos passa a ter mais influência da superfície. Isso não ocorre na configuração 3 da Figura 12, que forneceu melhores resultados.

A Tabela 4 apresenta os principais resultados obtidos nos nove casos simulados. Aqui fica claro que os potenciais térmicos do solo aumentam com a redução da área do bloco. Verifica-se também que a eficiência térmica varia muito pouco, permanecendo praticamente constante em um valor próximo de 95%.

Tabela 4: Resultados obtidos nos nove casos.

Casos (%)	Eficiência do sistema TCSA (%)	Potencial térmico do solo (°C)
10	94,9	3,23
20	94,9	3,18
30	95	3,05
40	95,1	2,97
50	94,2	2,81
60	94,1	2,61
70	93,9	2,35
80	95,4	2,01
90	95,1	1,5

### 3.4 Eficiência térmica e comprimento do duto

A Figura 16 mostra que a curva de temperatura de saída fica entre a do ar e a do solo. Nesta dissertação, é feita uma distinção entre os potenciais térmicos do solo e dos TCSA. O primeiro é a diferença entre as temperaturas do solo e do ar, enquanto o segundo é a diferença entre as temperaturas de saída e do ar. Quanto maior a eficiência dos TCSA, mais próximos esses dois potenciais estão. Como mostra o gráfico à direita na Figura 16, a inserção da caixa galvanizada e da ponte aumenta significativamente a eficiência dos TCSA em comparação com os resultados à esquerda, quando se tem apenas o duto.

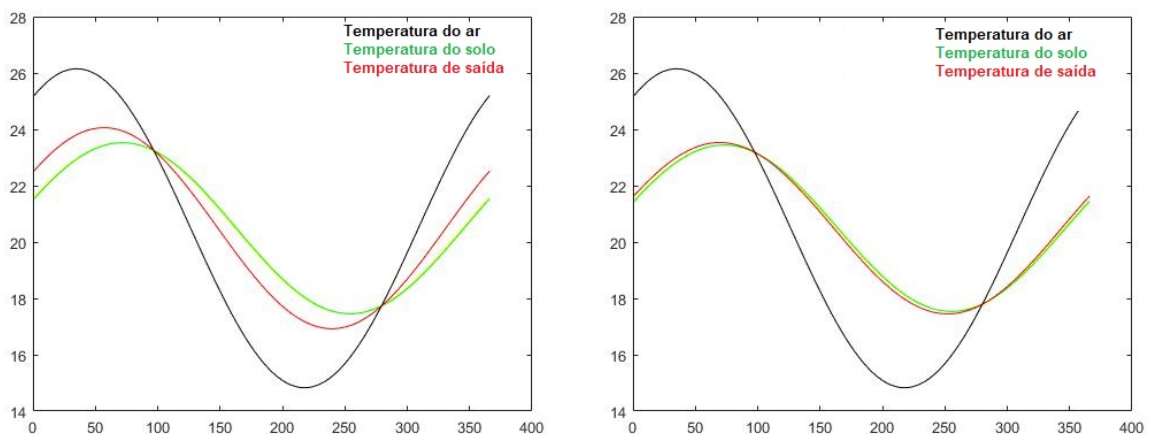


Figura 16: Comparativo das temperaturas de saída ao longo do ano: sem (esquerda) e com (direita) partes galvanizadas

Assim, nessa pesquisa, foi feito um estudo paramétrico, variando o tamanho do duto e verificando a eficiência anual. A Tabela 5 compara a eficiência térmica anual dos TCSA,  $\theta$ , variando o comprimento do duto  $L_0$ . Os resultados mostram que reduzir  $L_0$  também reduz  $\theta$ . Observa-se que a instalação de Vaz (2011) tem uma eficiência anual próxima a 72% usando um duto de 25,77 m. Acoplando o conjunto bloco - aleta inferior galvanizados, e usando o mesmo comprimento, obtém-se  $\theta \approx 95\%$ . Além disso, pode-se alcançar eficiências acima de 70% empregando dutos muito menores, com  $L_0$  variando entre 10,77 e 13,77 m, reduzindo em quase a metade do tamanho da instalação.

Tabela 5: Comparação entre o comprimento do duto ( $L_0$ ) e a eficiência térmica anual ( $\theta$ ).

$L_0(m)$	25,77	22,77	19,77	16,77	13,77	10,77
$\theta(\%)$	94,88	92,68	89,58	85,21	79,07	70,47

A Figura 17 mostra as variações na temperatura de saída conforme o comprimento do duto varia. Pode-se observar que a eficiência térmica diminui com a redução do comprimento do duto. Tais resultados complementam visualmente os da Tabela 2.

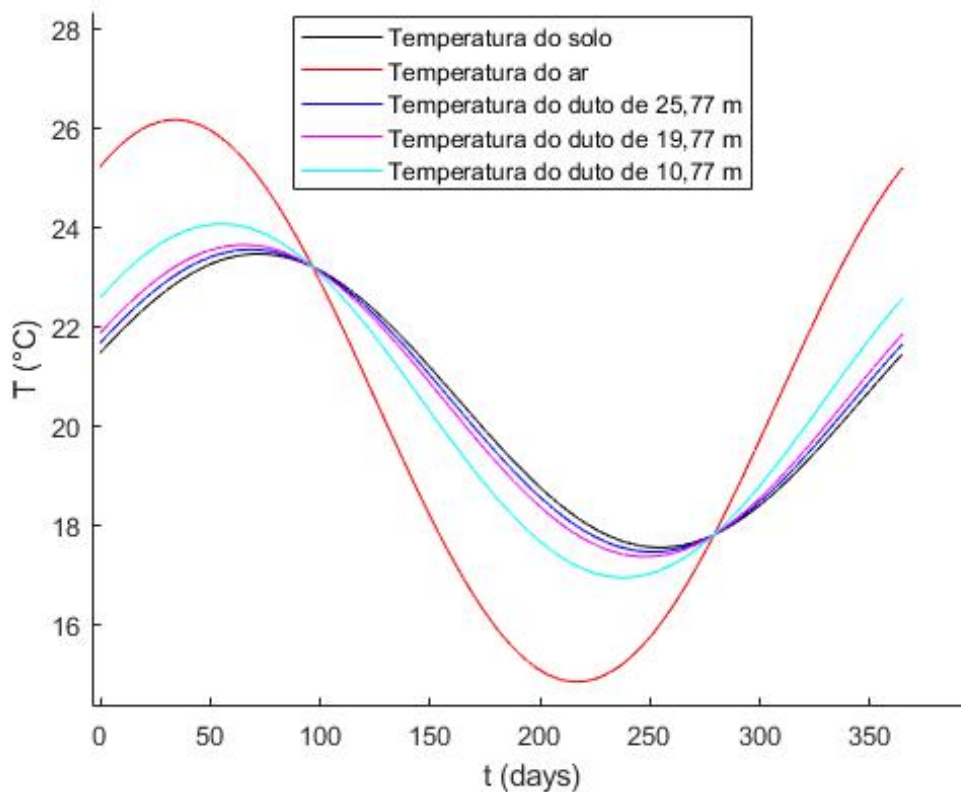


Figura 17: Gráfico das temperaturas utilizando diferentes comprimentos de duto

## 4 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Os projetos de estruturas galvanizadas ao redor do duto de um TCSA aumentaram o potencial térmico do solo tanto quanto o do TCSA. O desenho escolhido é considerado o mais eficaz, pois além de ser um dos que apresenta o maior RMS em relação ao potencial térmico do solo, é também o mais fácil de fabricar, pois possui apenas o bloco e uma aleta.

Novas geometrias de material galvanizado ao redor do bloco foram estudadas a fim de aumentar a condutividade térmica conforme proposto Hassanzadeh et al. (2018). Como conclusão, os resultados mostram que um bloco de tamanho menor pode garantir o aumento do potencial térmico do solo. Porém, um bloco maior pode reduzir o mesmo potencial, pois pode ser influenciado mais consideravelmente pelas temperaturas da superfície.

A eficiência térmica anual do TCSA é aumentada significativamente pelo acoplamento dos dutos a um conjunto de bloco e aletas galvanizadas. Essa metodologia permitiu obter eficiências acima de 70% usando dutos muito menores do que uma instalação convencional. Portanto, os sistemas TCSA podem ser melhorados, permitindo reduzir o tamanho das instalações em locais urbanizados onde os espaços são limitados.

Em pesquisas futuras, será possível investigar novas configurações para o conjunto bloco-aletas galvanizadas dedicando uma atenção especial a mudança de forma das aletas e variando a profundidade do duto.

## REFERÊNCIAS

- Agrawal, K. K., Misra, R., Agrawal, G. D., Bhardwaj, M., and Jamuwa, D. K. (2019). The state of art on the applications, technology integration, and latest research trends of earth-air-heat exchanger system. *Geothermics*, 82:34–50.
- Ascione, F., Bellia, L., and Minichiello, F. (2011). Earth-to-air heat exchangers for italian climates. *Renewable Energy*, 36:2177–2188.
- Asgari, B., Habibi, M., and Hakkaki-Fard, A. (2020). Assessment and comparison of different arrangements of horizontal ground heat exchangers for high energy required applications. *Applied Thermal Engineering*, 167(114770):1–12.
- Bansal, V., Misra, R., Agrawal, G. D., and Mathur, J. (2009). Performance analysis of earth-pipe-air heat exchanger for winter heating. *Energy and Buildings*, 41:1151–1154.
- Bejan, A. and Kraus, A. D. (2003). *Heat Transfer Handbook*. John Wiley & Sons, New Jersey.
- Bejan, A. and Lorente, S. (2008). *Design with constructal theory*. John Wiley & Sons, Hoboken.
- Benkert, S., Heidt, F. D., and SchÖler, D. (1997). Calculation tool for earth heat exchangers gaea. In *Proceedings Building Simulation, Fifth International IBPSA Conference 2*, -.
- Benrachi, N., Smaili, A., Lamarche, L., and Ouzzane, M. (2017). Numerical analysis of a new configuration of ground-air heat exchanger. In *International Renewable and Sustainable Energy Conference (IRSEC) IEEE*, -.
- Bisoniya, T. S. (2015). Design of earth-air heat exchanger system. *Geothermal Energy*, 3(18):1–10.
- Bordoloi, N., Sharma, A., Nautiyal, H., and Goel, V. (2018). An intense review on the latest advancements of earth air heat exchangers. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 89:261–280.

- Brum, R. S. (2016). *Teoria construtal e desempenho térmico de trocadores de calor solo-ar*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, Brasil.
- Brum, R. S., Ramalho, J. V. A., Rodrigues, M. K., Rocha, L. A. O., Isoldi, L. A., and Santos, E. D. D. (2019). Design evaluation of earth-air heat exchangers with multiple ducts. *Renewable Energy*, 135:1371–1385.
- Brum, R. S., Rocha, L. A. O., Vaz, J., Santos, E. D. D., and Isoldi, L. A. (2012). Development of simplified numerical model for evaluation of the influence of soil-air heat exchanger installation depth over its thermal potential. *International Journal of Advanced Renewable Energy Research*, 1(9):505–514.
- Brum, R. S., Rocha, L. A. O., Vaz, J., Santos, E. D. D., and Isoldi, L. A. (2013). A new computational modeling to predict the behavior of earth-air heat exchangers. *Energy and Buildings*, 1(64):395–402.
- Cabezas, A. (2012). Eficiencia energética a través de utilización de pozos canadienses con el análisis de datos de un caso real —casa pomaret. *Universidad Politécnica de Catalunya*.
- Chaves, E. W. V. (2013). *Notes on Continuum Mechanics*. Springer, New York.
- Domingues, A. M. B., Nóbrega, E. S. B., Ramalho, J. V. A., Brum, R. S., and Quadros, R. S. (2021). Parameter analysis of earth-air heat exchangers over multi-layered soils in south brazil. *Geothermics*, 93:1–14.
- Díaz, S. (2018). El terreno como intercambiador: Enfriamiento pasivo aplicado a un edificio de nueva planta. *Universidad Politécnica de Madrid*.
- Flores, S. and Lesino, G. (2000). Intercambiadores tierra-aire: uso del suelo para enfriamiento pasivo. *Avances en Energías Renovables y Medio Ambiente (AVERMA)*, 4:59–64.
- Gonzalez, O. and Stuart, A. M. (2008). *A First Course in Continuum Mechanics*. Cambridge University Press, New York.
- Hassanzadeh, R., Darvishyadegari, M., and Arman, S. (2018). A new idea for improving the horizontal straight ground source heat exchangers performance. *Sustainable Energy Technologies and Assessments*, 25:138–145.
- Hermes, V. F., Ramalho, J. V. A., Rocha, L. A. O., dos Santos, E. D., Marques, W. C., Costi, J., Rodrigues, M. K., and Isoldi, L. A. (2020). Further realistic annual simulations of earth-air heat exchangers installations in a coastal city. *Sustainable Energy Technologies and Assessments*, 37(100603):1–10.

- Holman, J. P. (2010). *Heat Transfer Tenth Edition*. McGraw-Hill Education, New York.
- Hughes, T. J. R. (1987). *The finite element method (Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis)*. Prentice Hall, INC., New Jersey.
- Incropera, F. P., Dewitt, D. P., Bergman, T. L., and Lavine, A. S. (2008). *Fundamentos de Transferencia de Calor e Massa*. LTC - Livros Técnicos e científicos Editorial Ltda, Rio de Janeiro.
- Jung, C. F. (2003). Metodologia científica. Ênfase em pesquisa tecnológica.
- Kalz, D. E., Pfafferott, J., Herkel, S., and Wagner, A. (2011). Energy and efficiency analysis of environmental heat sources and sinks: In-use performance. *Renewable Energy*, 36:916–929.
- Liu, I. S. (2002). *Continuum Mechanics*. Springer, New York.
- Liu, Z., Xie, M., Zhou, Y., He, Y., Zhang, L., Zhang, G., and Chen, D. (2021). A state of the art review on shallow geothermal ventilation systems with thermal performance enhancement system classifications, advanced technologies and applications. *Energy and Built Environment*.
- Mathur, A., Mathur, S., Agrawal, G. D., and Mathur, J. (2017). Comparative study of straight and spiral earth air tunnel heat exchanger system operated in cooling and heating modes. *Renewable Energy*, 108:474–487.
- Mihalakakou, G., Santamouris, M., Asimakopoulos, D., and Tselepidaki, I. (1995). Parametric prediction of the buried pipes cooling potential for passive cooling applications. *Solar Energy*, 55(3):163–173.
- Nóbrega, E. S., Brum, R. S., Ramalho, J. V., and Quadros, R. S. (2020). First study on earth-air heat exchanger in pelotas. *Revista Mundi Engenharia, Tecnologia e Gestão*, 5(6):286–01–286–15.
- Ozgener, L. (2011). A review on the experimental and analytical analysis of earth to air heat exchanger (eahe) systems in turkey. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 15:4483–4490.
- Özisik, M. N. (1993). *Heat Conduction*. John Wiley & Sons, New York.
- Paepe, M. D. and Janssens, A. (2003). Thermo-hydraulic design of earth-air heat exchangers. *Energy and Buildings*, 35:389–397.
- Papakostas, T., Tsamitros, A., and Martinopoulos, G. (2019). Validation of modified one-dimensional models simulating the thermal behavior of earth-to-air heat



exchangers-comparative analysis of modelling and experimental results. *Geothermics*, 82:1–6.

Petroleum, B. (2020). Energy Outlook 2020 edition. <https://www.bp.com/content/dam/bp/business-sites/en/global/corporate/pdfs/energy-economics/energy-outlook/bp-energy-outlook-2020.pdf>. [Acessado online em Setembro de 2021].

Pfafferott, J. (2003). Evaluation of earth-to-air heat exchangers with a standardised method to calculate energy efficiency. *Energy and Buildings*, 35:971–983.

Ramalho, J., Brum, R., Rocha, L., Isoldi, L., Santos, E. D., and Sulzbacher<sup>1</sup>, M. (2018). Fitting new constructal models for the thermal potential of earth-air heat exchangers. *Acta Scientiarum. Technology*, 40:8.

Rodrigues, L. T. and Gillott, M. A. (2015). A novel low-carbon space conditioning system incorporating phase-change materials and earth–air heat exchangers. *Journal of Low-Carbon Technologies*, 10.

Rodrigues, M. K., Brum, R. S., Vaz, J., Rocha, L. A. O., Santos, E. D. D., and Isoldi, L. A. (2015). Numerical investigation about the improvement of the thermal potential of an earth-air heat exchanger (eahe) employing the constructal design method. *Renewable Energy*, 80:538–551.

Rodrigues, M. K., Coswig, F. S., Camargo, K. R., Isoldi, L. A., Brum, R. S., Ramalho, J. V. A., Vaz, J., Rocha, L. A. O., and dos Santos, E. D. (2018). Thermal performance simulations of earth-air heat exchangers for different soils of a coastal city using in-situ data. *Sustainable Energy Technologies and Assessments*, 30:224–229.

Temam, R. and Miranville, A. (2005). *Mathematical modeling in continuum mechanics*. Cambridge University Press, New York.

Thomas, G. B. (2015). *Cálculo : Volume 2*. Springer, Pearson.

Truesdell, C. (1966). *The Elements of Continuum Mechanics*. Springer, New York.

Vaz, J. (2011). *Estudo experimental e numérico sobre o uso do solo como reservatório de energia para o aquecimento e resfriamento de ambientes edificadas*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, Brasil.

Zhang, C., Wang, J., Li, L., Wang, F., and Gang, W. (2020). Heat ventilation air and its annual energy performance evaluation: A case study. *Sustainability*, 12(20).

## **ANEXO A ARTIGOS APRESENTADOS EM CONGRESSOS**

Foram elaborados diversos artigos com alguns resultados parciais obtidos durante a investigação. Estas foram publicadas em CILAMCE, COBEM, ENMC e ENPÓS. os seguintes são detalhados abaixo:

- Marcos Rafael Burlón Olivera ; Nibia Raquel Navarro Pastor ; Ana Maria Bersch Domingues ; Jairo Valões de Alencar Ramalho ; Honório Joaquim Fernando ; Ruth da Silva Brum . Parameter analysis of Earth-air heat exchangers coupled to galvanized bridges. In: CILAMCE-PANACM 2021, 2021, Rio de Janeiro.
- Nibia Raquel Navarro Pastor ; Marcos Rafael Burlón Olivera ; Ana Maria Bersch Domingues ; Honório Joaquim Fernando ; Jairo Valões de Alencar Ramalho. Accessing the thermal performance of earth-air heat exchangers by adding galvanized bridges to the soil. In: COBEM-ABCM, 2021, Virtual Congress, Brazil.
- Ana Maria Bersch Domingues ; Nibia Raquel Navarro Pastor ; Marcos Rafael Burlón Olivera ; Honório Joaquim Fernando ; Jairo Valões de Alencar Ramalho . Simulações de um trocador de calor solo-ar com o acoplamento de uma caixa galvanizada para a cidade de Viamão/RS. In: XXIV Encontro Nacional de Modelagem Computacional (ENMC) e XII Encontro de Ciência e Tecnologia de Materiais (ECTM), 2021, Online. XXIV ENMC e XII ECTM, 2021. p. 1-10.
- Marcos Rafael Burlón Olivera ; Nibia Raquel Navarro Pastor ; Ana Maria Bersch Domingues ; Jairo Valões de Alencar Ramalho ; Honório Joaquim Fernando . Uma síntese de análises de parâmetros de trocadores de calor solo-ar acoplados a pontes galvanizadas. In: XXIII ENPÓS - Encontro de Pós-Graduação, 2021, Pelotas (RS). XXIII ENPÓS - Encontro de Pós-Graduação, 2021. p. 1-4.
- Nibia Raquel Navarro Pastor ; Marcos Rafael Burlón Olivera ; Ana Maria Bersch Domingues ; Honório Joaquim Fernando ; Jairo Valões de Alencar Ramalho . Uma síntese de análises de desempenho de trocadores de calor solo-ar com a inserção de materiais galvanizados no solo. In: XXIII ENPÓS - Encontro de Pós-

Graduação, 2021, Pelotas (RS). XXIII ENPÓS - Encontro de Pós-Graduação, 2021. p. 1-4.



# Parameter analysis of Earth-air heat exchangers coupled to galvanized bridges

Marcos Rafael Burlón Olivera<sup>1,2</sup>, Nibia Raquel Navarro Pastor<sup>1,2</sup>, Ana Maria Bersch Domingues<sup>1</sup>, Jairo Valões de Alencar Ramalho<sup>1</sup>, Honório Joaquim Fernando<sup>3</sup>, Ruth da Silva Brum<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Universidade Federal de Pelotas (UFPEL) Campus Capão do Leão s/n, 96160-000, Pelotas, RS, Brazil*  
*marcos.burlon@utec.edu.uy, nibia.navarro@utec.edu.uy, ambdomingues@ufpel.edu.br, jairo.ramalho@ufpel.edu.br, ruth.silva.brum@ufpel.edu.br*

<sup>2</sup>*Instituto Tecnológico Regional del Norte (ITRN), Universidad Tecnológica (UTEC) del Uruguay Ruta 5 (Guido Machado Brum), km 496, 40000, Rivera, Uruguay*

<sup>3</sup>*Instituto de Ciências Exatas (ICEx), Departamento de Matemática, Universidade Federal Fluminense (UFF) Campus Aterrado, Rua Desembargador Ellis Hermydio Figueira, 783, Aterrado, 27213-145, Volta Redonda, RJ, Brazil*  
*honoriofernando@id.uff.br*

**Abstract.** Due to the thermal inertia of the soil, it can be warmer or colder than the ambient air. Therefore, Earth-air heat exchangers (EAHE) connect the ventilation system of a building to buried ducts. Such research is valuable because EAHE use a renewable thermal source, and they consume little electricity. EAHE heating and cooling capacities depend on many factors, like the local climate, duct design, and soil properties. This study aims to evaluate the thermal performance of EAHE coupled to galvanized bridges with high thermal conductivity; the idea is to increase the overall heat exchange with the surrounding ground. This work analyses the settings of a subtropical climate, specifically, the southern Brazilian town of *Viamão*. The simulations use the validated 1D GAEA model, and they estimate the soil temperatures (without the ducts) by solving 2D heat transfer equations with finite element methods. The methodology considers the soil, galvanized bridges, and dynamic boundary conditions that vary throughout the year. As the thermal potential of EAHE improves with galvanized bridges, this article examines the reduction of the duct length, keeping high annual efficiency rates.

**Keywords:** Earth-air heat exchanger (EAHE), Galvanized bridges, GAEA model, Thermal performance.

## 1 Introduction

The greenhouse effect, which is considered a cause for climate change, makes us look for different possibilities of generating renewable and non-polluting energy. Besides, it is necessary to reduce electrical consumption and improve the efficiency of our technologies. Hence, the thermal comfort of building environments is a concerning theme because the usual air conditioning systems need high amounts of energy (Brum et al. [1], Brum [2]). Since the sun is an impressive energy source, we can explore it in many ways; one of them is the Earth-air heat exchangers (EAHE), which take advantage of the heat that our star emits and the planet stores on the superficial ground layers (Vaz [3]).

The flow of heat, which arises from the interaction between soil molecules, changes direction in daily and annual cycles. It flows to the soil during the day and towards the surface at night; a similar process occurs during summer and winter. Therefore, EAHE consist of one or more ducts buried horizontally or vertically; the air travels inside the ducts, exchanges heat with the soil, and enters the building environment at milder temperatures. Figure 1 shows a typical EAHE scheme.

Part of the EAHE research focuses on modeling the phenomenon of heat transfer, aiming to increase their thermal potential and efficiency. Domingues et al. [4] give a recent balance of the Brazilian studies in EAHE, while the articles by Agrawal et al. [5] and Bordoloi et al. [6] cover long reviews on the EAHE literature. Some of

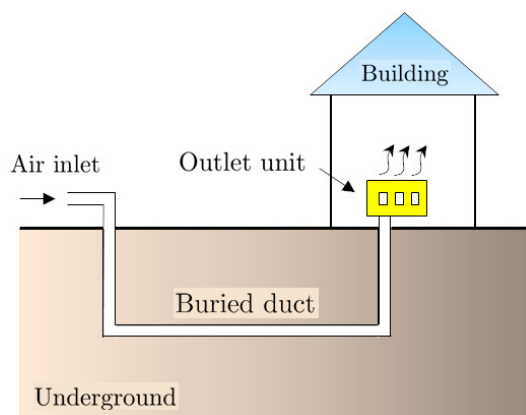


Figure 1. Typical EAHE scheme.

the main subjects in mathematical modeling regard: (1) the physical location of the installation, air temperatures, humidity, soil composition, compaction, solar radiation; (2) operational parameters, air velocity, installation depth, duct shape, and materials. Many works also investigate hybrid systems for air conditioning, combining EAHE to other technologies that may or may not use renewable energy.

Different references studied the effect of the duct material (especially using high thermal conductive ones); however, they have not shown significant improvements in the system thermal performance (Bansal et al. [7], Ascione et al. [8]). On the other hand, the radius and length of circular ducts, the installation depth, and the air velocity are four fundamental parameters to examine and develop parametric models, like Mihalakakou et al. [9], whose simulations showed significant agreement with experimental data.

In urbanized areas (particularly in large cities), a fundamental issue for the EAHE installation with horizontal ducts is the reduced space, but few works address it (Agrawal et al. [5]). For instance, Mathur et al. [10] proposed a spiral-shaped design to reduce construction space. They obtained satisfactory results compared to usual systems using straight horizontal ducts. Benrachi et al. [11] also considered spiral-shaped ducts from the EAHE system to reduce area requirements. In the same regard, Asgari et al. [12] assessed and compared the thermal performances of various duct arrangements using linear, spiral, and slinky types of horizontal EAHE.

Aiming to reduce the size of EAHE installations, this paper explores the idea proposed by Hassanzadeh et al. [13]; more specifically, we connect the ducts to galvanized bridges with high thermal conductivity. Since this method significantly improves the heat transfer rate between the ground and pipes, we show that their length can be reduced, keeping the system's annual thermal efficiency values above 70%.

## 2 Methodology

This work considers data from the south Brazilian town of *Viamão*, where Vaz [3] took several experimental measurements from a local EAHE installation. The place has a humid subtropical climate with slightly undulating soils; its geographic coordinates and altitude are (30°04'51"S, 51°01'24"W) and 111 m, respectively.

Replicating the conditions found in Vaz [3], we simulated a duct with diameter  $D_0 = 0.11$  m, buried at a depth of  $z_0 = 1.6$  m. We neglected the duct material properties, as done in many references (Brum et al. [14], Rodrigues et al. [15]). The novelty here is that we enclosed the duct with a box coupled to a vertical bridge, both of them galvanized and made of a high thermal conductivity material, exploring the ideas from Hassanzadeh et al. [13]. Moreover, we varied the duct length  $L_0$ , starting from 25.77 m (same value taken by Vaz [3]) and reducing it down to 10.77 m.

Figure 2 shows 2D views for the computational domain, including the duct, box, and bridge. In the  $x - z$  plane view,  $b_0 = 18$  cm is the size of the box;  $S_v = 1$  m and  $S_h = 1$  cm are, respectively, the vertical and horizontal sizes of the bridge. As we can see in the  $y - z$  plane view, the bridge and box have the same length,  $L_0$ , of the duct. Moreover, the simulated portion of soil has a height of 15 m, a width of 10 m, and a varying length  $L_0$ .

To simulate the EAHE, we adopted the GAEA model (Graphische Auslegung von Erdwärme Austauschern) that Domingues et al. [4] validated against the experimental data of Vaz [3]. GAEA is a 1D model that computes the longitudinal variations in air temperatures along the ducts; to do so, it depends on estimates for the soil temperature without the duct presence. Since the air in the duct also influences the ground temperature around it, the model equations also evaluate this effect; however, due to space constraints, we ask the reader to consult references like (Domingues et al. [4], Benkert et al. [16], Papakostas et al. [17]) for more details.

Considering Fig. 2, the main variations in soil temperature occur in the  $x$ - $z$  plane, and one can neglect them on

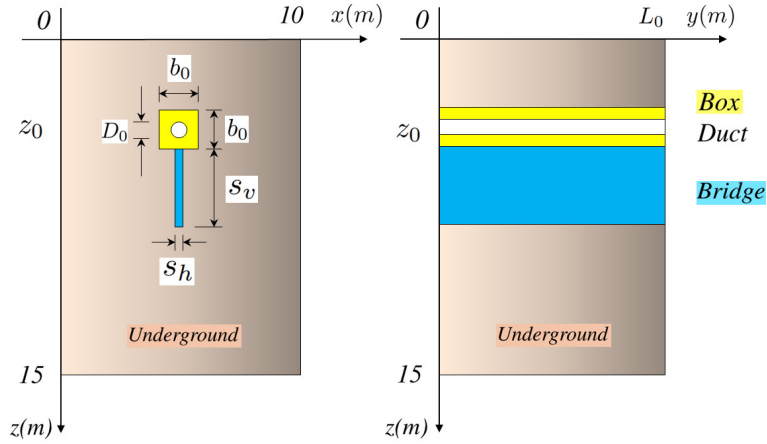


Figure 2. Schematic 2D views for the set duct, box, and bridge.

the  $y$ - $z$  one. Therefore, to compute the temperatures in the ground, box, and bridge, we solved the heat conservation equation

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad \text{in } \Omega \times (0, \tau_0]. \quad (1)$$

Here,  $T$  stands for the temperature ( $^{\circ}\text{C}$ ) and  $t$  for the time (in s). The spatial domain is  $\Omega = (0, 10) \times (0, 15)$  (dimensions in m), as in Fig. 2; the total time interval for simulations,  $\tau_0$ , is of one year and two months. Table 1 defines the thermophysical properties; the values for air and soil are given by Vaz [3], the ones for the galvanized parts are from Hassanzadeh et al. [13].

Table 1. Thermophysical properties

	Density $\rho$ ( $\text{kg/m}^3$ )	Specific heat $c_p$ ( $\text{J/kgK}$ )	Thermal conductivity $\lambda$ ( $\text{W/mK}$ )
Soil	1800	1780	2.1
Galvanized parts	7800	446	52
Air	1.16	1010	0.0242

The solution for eq. (1) is subject to the boundary conditions

$$T = T_a \quad \text{at } z = 0 \text{ m}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \text{ } ^{\circ}\text{C/m} \quad \text{at } x = 0 \text{ m and } x = 10 \text{ m}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \text{ } ^{\circ}\text{C/m} \quad \text{at } z = 15 \text{ m}. \quad (4)$$

In eq. (2),  $T_a$  is the air temperature in *Viamão*. We can model it by

$$T_a(t) = 20.49 + 5.66 \sin \left( \frac{2\pi}{365} t - 5.30 \right), \quad (5)$$

after fitting by least squares the daily average temperatures obtained by Vaz [3]. The initial condition is

$$T_{init}(z) = 20.49 - 5.66 \sin(5.30 + 0.39z)e^{-0.39z}, \quad (6)$$

where we are supposing that the soil temperature is initially varying only in the  $z$  direction. Equation 6 follows the methodology from Ozgener et al. [18].

We solved the equations numerically, using the Galerkin finite element method (Hughes [19]) for spatial discretization. The time discretization used the first-order, implicit Euler, finite differences method (Özsisik [20]). We conducted various refining tests before adopting meshes with about 4000 triangular elements, generating them in the GMSH software (version 4.8.8). As done by Domingues et al. [4], we employed discrete time intervals of 1800 seconds. The simulations used an in-house code; developed in the Matlab software (version R2012a)

As in Domingues et al. [4], we are computing the EAHE annual efficiency using the equation

$$\theta = \frac{\sqrt{\int_0^{365} (T_o - T_i)^2}}{\sqrt{\int_0^{365} (T_s - T_i)^2}}, \quad (7)$$

where  $T_o$  and  $T_i$  are, respectively, the temperatures at the duct outlet and inlet. Here, we assume  $T_i = T_a$  from eq. (5). As for  $T_s$ , it is an estimate of the temperature at the point (5 m, 1.6 m) on the  $x - z$  plane, i.e., at the duct center (see Fig. 2).

It is worth adding the following remarks.

- (a) To solve the initial and boundary values problem (IBVP), defined in eq. (1) to eq. (6), we are not considering the duct presence but only the soil, box, and bridge. The IBVP gives  $T_s$ , in eq. (7).
- (b) Although the total interval of simulations  $\tau_0$  covers one year and two months, we discard the first two ones to avoid numerical influences by the initial condition (see more details in Brum et al. [14]). Hence, the final results presented in this paper represent a period of one year.
- (c) In general, to keep consistency in the simulations, the time,  $t$ , is defined in seconds. For convenience, in pre and post-processing stages, we use least squares to fit all the temperature results by sine-based functions, where  $t$  is in days. Such is the case for the temperatures in eq. (5) and eq. (7).

### 3 Results

We begin comparing the annual results for the outlet temperatures, considering an EAHE duct buried at the depth  $z_0 = 1.6$  m, similar to the experimental case of Vaz [3]. This simulation used a mesh based on the  $x - z$  view from Fig. 2 and the same developed code. Since in Vaz [3], there was no box nor bridge, we just programmed these parts of the domain with the same thermophysical properties of the soil. The graphic on the left in Fig. 3 shows the adjusted air temperature of *Viamão* (see eq. (5)), the simulated soil temperature (without galvanized parts), and the outlet temperature.

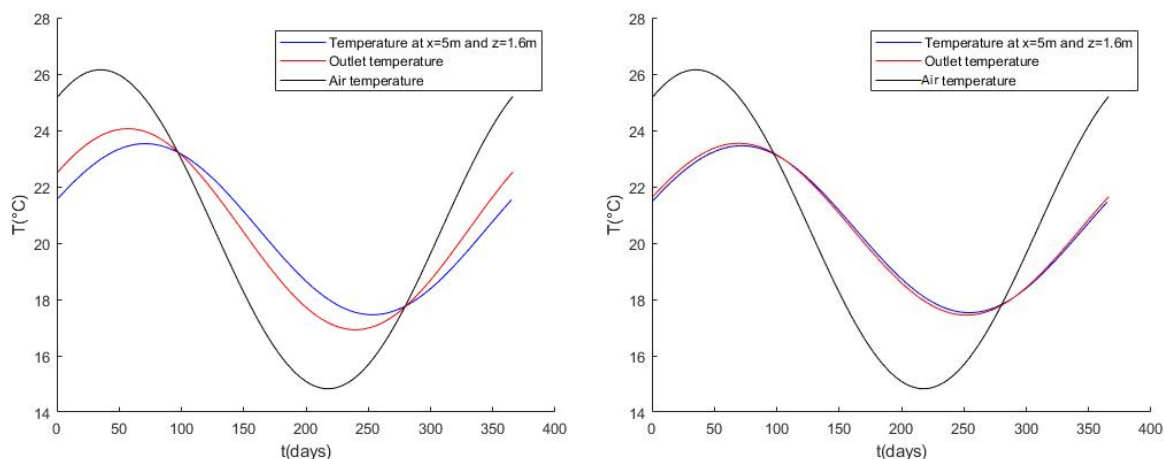


Figure 3. Comparative of the annual outlet temperatures without (left) and with (right) galvanized parts.

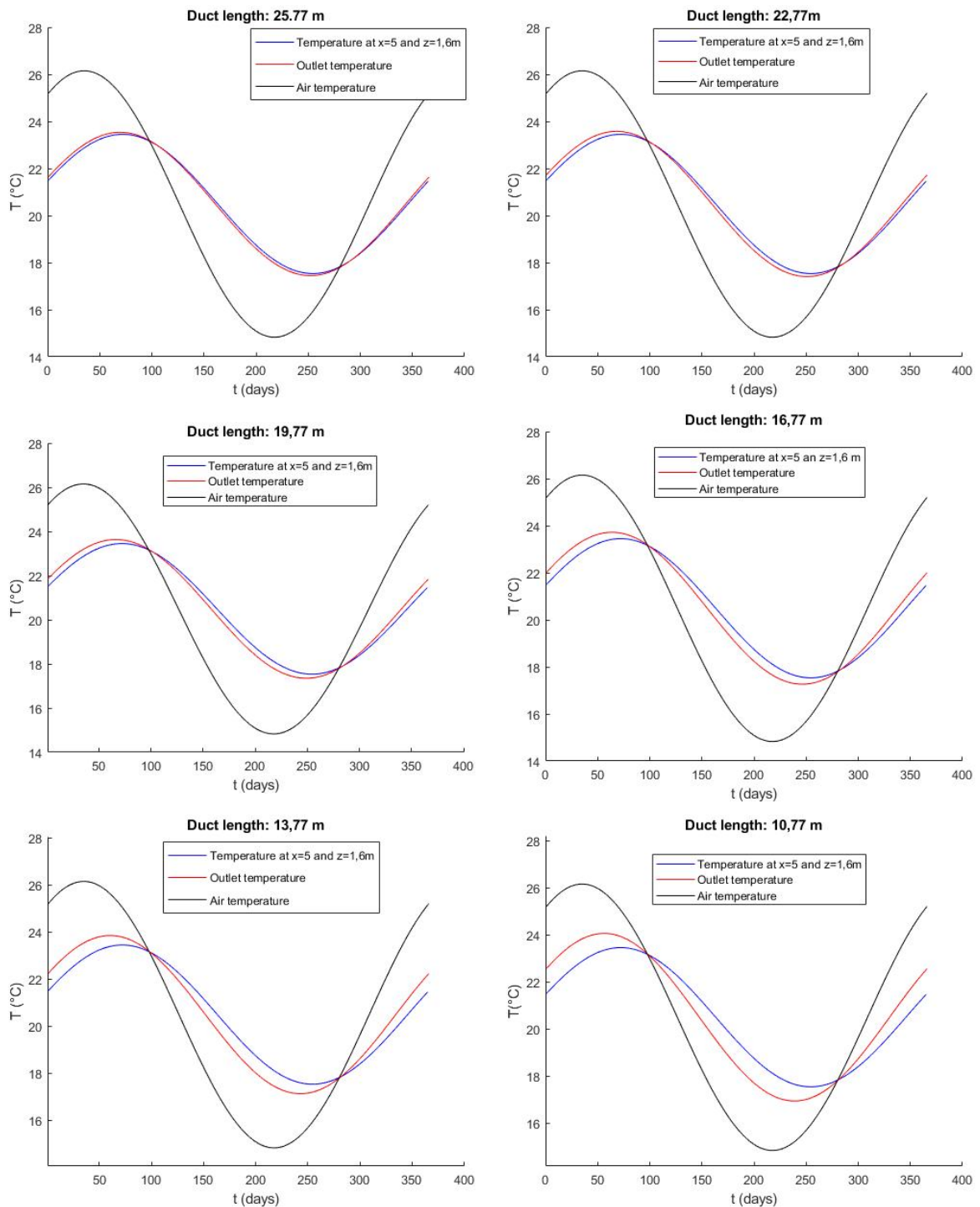


Figure 4. Comparison of annual outlet temperatures with ducts of different lengths

The results are very similar to the ones obtained by Domingues et al. [4], verifying the current methodology. Additionally, Fig. 3 shows that the outlet temperature curve lies between the air and soil ones. In this article, we distinguish the soil and EAHE thermal potentials. The former is the difference between the soil and air temperatures, while the latter is between the outlet and air ones. The higher the efficiency of the EAHE, the closer these two potentials are (see eq. (7)). As the graphic on the right in Fig. 3 shows, the insertion of the galvanized box and bridge hugely increases the EAHE efficiency compared to the results on the left. Besides, we note that the magnitude peaks of the thermal potential are close to  $4^{\circ}\text{C}$  in summer and winter. In annual terms, the root mean square (RMS) of the thermal potential is approximately  $2.6^{\circ}\text{C}$  (since the thermal potential is much smaller during spring and fall seasons).

Table 2 compares the EAHE annual thermal efficiency  $\theta$ , varying the duct length  $L_0$ ; the results show that



reducing  $L_0$  also reduces  $\theta$ . We observe that the Vaz [3] installation had an annual efficiency close to 72% using a duct of 25.77 m. Adding the galvanized parts and using the same length, one can obtain  $\theta \approx 95\%$ . Moreover, we achieve efficiencies above 70% employing much smaller ducts, with  $L_0$  varying between 10.77 and 13.77 m, reducing by almost half the installation size.

Table 2. Comparison between the length of the duct ( $L_0$ ) and the annual thermal efficiency ( $\theta$ ).

Lo(m)	25.77	22.77	19.77	16.77	13.77	10.77
$\theta(\%)$	94.88	92.68	89.58	85.21	79.07	70.47

Figure 4 shows the variations in the outlet temperature as the duct length varies. It can be seen that the thermal efficiency decreases by reducing the length of the duct. Such results complement the ones from Table 2. The graphic corresponding to the length of 13.77 m is very similar to the first graphic of Fig. 3, where we had a duct without bridge and with a length of 25.77 m.

## 4 Conclusions

The EAHE annual thermal efficiency is increased significantly by coupling the ducts to a galvanized box and bridge set. Such methodology allowed obtaining efficiencies above 70% using much smaller ducts than a conventional installation. Therefore, EAHE systems can be improved, allowing us to reduce installation sizes in urbanized places where the spaces are limited.

**Acknowledgements.** N. Navarro and M. Burlón welcome the financial support to the Universidad Tecnológica (UTEC) of Uruguay, as well as the incentive for permanent training in the Tecnólogo en Mecatrónica Industrial (TMECI) and Ingeniería Logística (ILOG) careers of the Instituto Tecnológico Regional del Norte (ITRN) of the city of Rivera, Uruguay. A. M. B. Domingues thanks her scholarships to the Fundação de Amparo à Pesquisa do Rio Grande do Sul (FAPERGS). R. S. Brum thanks the FAPERGS by the following grants: Edital 4/2019–ARD: Processo 19/2551-0001345-0 and Edital 05/2019–PqG: Processo 19/2551-0001964-5.

**Authorship statement.** The authors hereby confirm that they are the sole liable persons responsible for the authorship of this work, and that all material that has been herein included as part of the present paper is either the property (and authorship) of the authors, or has the permission of the owners to be included here.

## References

- [1] R. S. Brum, L. A. O. Rocha, J. Vaz, E. D. D. Santos, and L. A. Isoldi. Development of simplified numerical model for evaluation of the influence of soil-air heat exchanger installation depth over its thermal potential. *International Journal of Advanced Renewable Energy Research*, vol. 1, n. 9, pp. 505–514, 2012.
- [2] R. S. Brum. *Estudos do desempenho térmico de trocadores de calor solo-ar aplicando a teoria construtal*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, Brasil, 2016.
- [3] J. Vaz. *Estudo experimental e numérico sobre o uso do solo como reservatório de energia para o aquecimento e resfriamento de ambientes edificados*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, Brasil, 2011.
- [4] A. M. B. Domingues, E. S. B. Nóbrega, J. V. A. Ramalho, R. S. Brum, and R. S. Quadros. Parameter analysis of earth-air heat exchangers over multi-layered soils in south brazil. *Geothermics*, vol. 93, pp. 1–14, 2021.
- [5] K. K. Agrawal, R. Misrab, G. D. Agrawal, M. B, and D. K. Jamuwab. The state of art on the applications, technology integration, and latest research trends of earth-air-heat exchanger system. *Geothermics*, vol. 82, pp. 34–50, 2019.
- [6] N. Bordoloi, A. Sharma, H. Nautiyal, and V. Goel. An intense review on the latest advancements of earth air heat exchangers. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, vol. 89, pp. 261–280, 2018.
- [7] V. Bansal, R. Misra, G. D. Agrawal, and J. Mathur. Performance analysis of earth-pipe-air heat exchanger for winter heating. *Energy and Buildings*, vol. 41, pp. 1151–1154, 2009.
- [8] F. Ascione, L. Bellia, and F. Minichiello. Earth-to-air heat exchangers for italian climates. *Renewable Energy*, vol. 36, pp. 2177–2188, 2011.
- [9] G. Mihalakakou, M. Santamouris, D. Asimakopoulos, and I. Tselepidaki. Parametric prediction of the buried pipes cooling potential for passive cooling applications. *Solar Energy*, vol. 55, n. 3, pp. 163–173, 1995.

- [10] A. Mathur, S. Mathur, G. D. Agrawal, and J. Mathur. Comparative study of straight and spiral earth air tunnel heat exchanger system operated in cooling and heating modes. *Renewable Energy*, vol. 108, pp. 474–487, 2017.
- [11] N. Benrachi, A. Smaili, L. Lamarche, and M. Ouzzane. Numerical analysis of a new configuration of ground – air heat exchanger. International Renewable and Sustainable Energy Conference (IRSEC) IEEE, 2017.
- [12] B. Asgari, M. Habibi, and A. Hakkaki-Fard. Assessment and comparison of different arrangements of horizontal ground heat exchangers for high energy required applications. *Applied Thermal Engineering*, vol. 167, n. 114770, pp. 1–12, 2020.
- [13] R. Hassanzadeh, M. Darvishyadegari, and S. Arman. A new idea for improving the horizontal straight ground source heat exchangers performance. *Sustainable Energy Technologies and Assessments*, vol. 25, pp. 138–145, 2018.
- [14] R. S. Brum, J. V. A. Ramalho, M. K. Rodrigues, L. A. O. Rocha, L. A. Isoldi, and E. D. D. Santos. Design evaluation of earth-air heat exchangers with multiple ducts. *Renewable Energy*, vol. 135, pp. 1371–1385, 2019.
- [15] M. K. Rodrigues, R. S. Brum, J. Vaz, L. A. O. Rocha, E. D. D. Santos, and L. A. Isoldi. Numerical investigation about the improvement of the thermal potential of an earth-air heat exchanger (eahe) employing the constructal design method. *Renewable Energy*, vol. 80, pp. 538–551, 2015.
- [16] S. Benkert, F. D. Heidt, and D. Schöler. Calculation tool for earth heat exchangers gaea. Proceedings Building Simulation, Fifth International IBPSA Conference 2, 1997.
- [17] T. Papakostas, A. Tsamitros, and G. Martinopoulos. Validation of modified one-dimensional models simulating the thermal behavior of earth-to-air heat exchangers-comparative analysis of modelling and experimental results. *Geothermics*, vol. 82, pp. 1–6, 2019.
- [18] O. Ozgener, L. Ozgener, and J. W. Tester. A practical approach to predict soil temperature variations for geothermal (ground) heat exchangers applications. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 62, pp. 473–480, 2013.
- [19] T. J. R. Hughes. *The finite element method (Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis)*. Prentice Hall, INC., New Jersey, 1987.
- [20] M. N. Özisik. *Heat Conduction*. John Wiley & Sons, New York, 1993.



## COB-2021-1446

# ACCESSING THE THERMAL PERFORMANCE OF EARTH-AIR HEAT EXCHANGERS BY ADDING GALVANIZED BRIDGES TO THE SOIL

**Nibia Raquel Navarro Pastor**

**Marcos Rafael Burlón Olivera**

**Ana Maria Bersch Domingues**

Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Universidade Federal de Pelotas (UFPEL), Campus Capão do Leão s/n, 96160-000, Pelotas, RS, Brazil

nibia.navarro@utec.edu.uy, marcos.burlon@utec.edu.uy, ambdomingues@ufpel.edu.br

**Honório Joaquim Fernando**

Instituto de Ciências Exatas (ICEX), Departamento de Matemática, Universidade Federal Fluminense (UFF), Campus Atterrado, Rua Desembargador Ellis Hermydio Figueira, 783, Atterrado, 27213-145, Volta Redonda, RJ, Brazil

honoriofernando@id.uff.br

**Jairo Valões de Alencar Ramalho**

**Ruth da Silva Brum**

Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Universidade Federal de Pelotas (UFPEL), Campus Capão do Leão s/n, 96160-000, Pelotas, RS, Brazil

jairo.ramalho@ufpel.edu.br, ruth.silva.brum@ufpel.edu.br

**Abstract.** *Due to the thermal inertia of the ground, it can be warmer or colder than the environment. Earth-air heat exchangers (EAHE) take advantage of that by connecting a building ventilation system to one or more buried ducts. The research of EAHE is valuable because they employ a renewable thermal source, and they can work with little electrical energy. Regarding the heating and cooling capacities of EAHE, they depend on many factors like local climate, duct design, and soil properties. This paper aims to evaluate the thermal performance of EAHE after coupling the ducts with galvanized bridges. The idea is to increase the overall heat exchange, as the bridges have a thermal conductivity much higher than the soil around them. This work considers the scenario of the south Brazilian city of Viamão, which has a subtropical climate. The simulations use the 1D GAEA model for EAHE after validating it with experimental data. As the model depends on estimating the soil temperatures without the ducts, this work computes them by solving the heat transfer equations in 2D with finite element methods. The methodology allows considering the soil, the galvanized bridges, and dynamic boundary conditions, varying along the year. The results show that the thermal potential of EAHE improves by equipping the ducts with the bridges. This paper adopts some types of vertical bridges, and it studies how changing their position can enhance the thermal potential and efficiency of EAHE. Important results presented during the research show that the thermal potential of the soil increases with depth, but its relative gains decrease, therefore, it is recommended a depth of at most 3.6 m for the installation of an EAHE system. Also in this study, it is possible to see that the coupling of galvanized bridges close to the exchanger duct generates an increase in the efficiency of the system.*

**Keywords:** *Earth-air heat exchangers (EAHE), Thermal potential, Numerical simulations, GAEA, Galvanized bridges*

## 1. INTRODUCTION

Most of the energy used worldwide comes from fossil fuels such as coal, oil, and natural gas. The consumption of these fuels is faster than their regeneration, which is why they are considered non-renewable. Besides, their transport and storage have negative environmental impacts, hence, it is necessary to find alternative, efficient, non-polluting, and renewable sources.

The sun originates virtually every source of energy on Earth. This energy reaches the Earth's surface directly or by diffusion. The earth's crust acts as a large inertial reserve for this energy, with alternating cycles of storage and supply of heat to the environment. In the daily cycle, the Earth's surface gains heat during the day and loses it at night; similarly, in the annual cycle, the Earth's surface gains heat in hot periods and loses in cold periods (Vaz, 2011; Brum, 2016).

Among the most popular and increasingly accepted proposals for capturing this thermal energy from the soil, are the Earth-air heat exchangers (EAHE). The EAHE consists of one or more buried ducts, where the ambient air is forced to flow (for instance, by using fans). As the air exchanges heat with the soil, it is heated or cooled inside the ducts. After

that, it enters a building where it mixes with the indoor air. The basic scheme of the EAHE can be seen in Fig. 1.

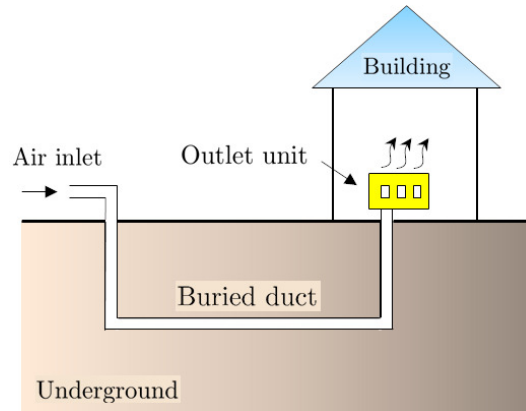


Figure 1: Typical EAHE scheme.

Articles like Agrawal *et al.* (2019); Bordoloi *et al.* (2018) cover the state of the art of EAHE, while one can discover many references on the Brazilian research by reading (Domingues *et al.*, 2021). Many works in the literature focus on modeling the phenomenon of heat transfer, which is established between the air, the duct and the ground, looking for the best efficiency for the system that depends on the optimization of its geometric characteristics and the physical environment. One-dimensional models of heat exchangers are treated in Benkert *et al.* (1997), Bisoniya (2015) and Nóbrega *et al.* (2020). Benkert *et al.* (1997) presents a model, called the GAEA model for EAHE, which will be worked on later in this research. Bisoniya (2015) presents important results on the geometry of the pipe used for the installation of an EAHE; the authors conclude that a duct with a longer length, followed by a smaller diameter can be used to increase the thermal potential. Nóbrega *et al.* (2020) presents the first simulations of a heat exchanger in the south Brazilian city of Pelotas, finding good prospects for a possible installation of the system. Exploring the same Brazilian region, Hermes *et al.* (2020) present numerical simulations of a 3D model for EAHE in the city of Rio Grande. The authors chose three places in the city and concluded that saturated soils present the best results for the installation of the system.

The differences among various approaches to model EAHE lie in several aspects of the system, like: (1) daily cycle and annual temperature cycle; (2) characteristics and thermal properties of the soil; (3) type of ground cover; (4) variation of air humidity in the ducts and in the soil; (5) interference of the heat transmission process in the ground around the ducts. Among the main parameters that affect the performance of EAHE, one can cite the air flow speed; the quantity and depth of ducts; their diameter, length, and, material.

This article aims to evaluate the thermal performance of EAHE after coupling galvanized bridges to the ducts, following the methodology presented in Hassanzadeh *et al.* (2018). The main idea is to improve the heat transfer rate between the ducts and the soil, as the bridges have a much higher thermal conductivity. After preliminary simulation tests using a bridge configuration shown in Hassanzadeh *et al.* (2018), adapted to the reality of the city of Viamão, in southern Brazil, this was adopted for simulations with the exchanger and significantly increased the thermal potential of the EAHE. In addition, the performance of the EAHE was also evaluated by varying the depth of the pipeline.

## 2. METHODOLOGY

The simulations were performed under the conditions of the city of Viamão (30° 04' 51''S; 51° 01' 24'' W), a humid subtropical climate, located in the state of Rio Grande do Sul. Information on local soil properties can be found in the work of Vaz (2011), which reports data from an experimental EAHE installation in that city.

This work, inspired by Hassanzadeh *et al.* (2018), simulates EAHE systems with a configuration where the duct is surrounded by a box coupled to a vertical bridge, both galvanized and with high thermal conductivity, aiming to improve the system performance. Fig. 2 presents a 2D schematic of the computational domain. In the same figure,  $z_0$  is the depth of the duct center,  $b_0 = 18$  cm is the size of the box (which has a square cross sectional area),  $S_v = 1$  m and  $S_h = 1$  cm represent, respectively the vertical and horizontal (thickness) sizes of the bridge. For the duct geometry, we used the parameters described in Vaz (2011), in which the length and diameter of the duct have values of 25.77 m and 0.11 m, respectively. The average air speed in the ducts is of 3.3m/s, also like Vaz (2011).

From the references of Vaz (2011) and Hassanzadeh *et al.* (2018), we obtained the thermophysical properties of the soil and air in Viamão, and of the galvanized materials. Their values are provided in Tab. 1.

### 2.1 Model Problem

To simulate the EAHE, we adopted the GAEA model (Graphic design of geothermal heat exchangers), first described in Benkert *et al.* (1997) and later cited in Papakostas *et al.* (2019) and Domingues *et al.* (2021). The model was imple-

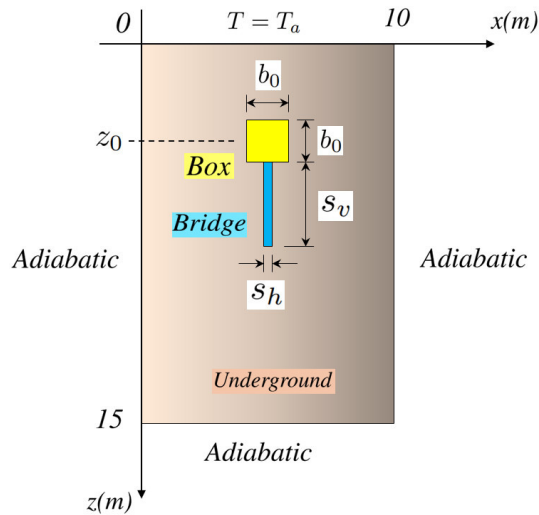


Figure 2: Computational domain definitions

Table 1: Thermophysical properties.

	Density $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	Specific heat $c_p$ (J/kgK)	Thermal conductivity $\lambda$ (W/mK)	Dynamic viscosity $\mu$ (kg/ms)
Soil	1800	1780	2.1	-
Galvanized parts	7800	446	52	-
Air	1.16	1010	0.0242	$1.789 \times 10^{-5}$

mented in Matlab software (version R2019a) and its main algorithm can be understood through the following equations. The same software was also used in pre-processing and post-processing stages.

The next equation shows the Nusselt number of air flowing in a duct:

$$Nu = 0.0214 (Re_D^{0.8} - 100) Pr^{0.4}, \quad (1)$$

where  $Re_D$  is the Reynolds number, and  $Pr$  the Prandtl number. The following equation presents the heat transfer coefficient in ( $W m^{-2} K^{-1}$ ) on the inner surface of the pipe:

$$h = \frac{\lambda_A Nu}{D_0}, \quad (2)$$

here,  $\lambda_A$  is the thermal conductivity in ( $W m^{-1} K^{-1}$ ) of the air and  $D_0$  is the diameter of the duct in (m). In the following equation, there is the coefficient of heat transfer by length of the pipe wall in ( $W m^{-1} K^{-1}$ ) between the bulk air and the wall:

$$U_L = \pi D_0 h. \quad (3)$$

The next equation is a dimensionless parameter for the ratio of the heat transfer modes:

$$U^* = 2\pi \frac{\lambda_s}{U_L \ln \left( \frac{2z_0}{D_0} + \sqrt{\left( \frac{2z_0}{D_0} \right)^2 - 1} \right)}, \quad (4)$$

where  $z_0$  is the depth of the duct center in (m) and  $\lambda_s$  the thermal conductivity in ( $W m^{-1} K^{-1}$ ) of the soil.

The GAEA continues by dividing the length  $L_o$  of the duct in 100 segments, of size  $\Delta x = L_o/100$ , where corrected soil temperatures on the pipe walls are found from:

$$T_{c,w}^k = \frac{U^* T_s + T_{a,i}^k}{U^* + 1}, \quad (5)$$

in which  $T_{a,i}^k$  is the air temperature at the inlet of the segment  $k$ , while its values at the segment outlet is:

$$T_{a,o}^k = T_{a,i}^k \frac{\Delta x U_L (T_{c,w}^k - T_{a,i}^k)}{\dot{m} c_{p,a}}, \quad (6)$$

where  $\dot{m}$  and  $c_{p,a}$  are, respectively, the mass flow in ( $\text{kg s}^{-1}$ ) and specific heat in ( $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ ) of the air. The algorithm ends finding the air temperature at the outlet of the last segment, which is also the outlet of the duct.

The GAEA model, as shown in the equations above, requires the soil temperature not influenced by the pipeline, that is, as if the Earth's temperature in the pipeline wall depended only on heat transfer from the earth's surface to the deeper layers. Thus, the soil temperature was numerically estimated, in a two-dimensional way, adopting computational domains similar to that shown in Fig. 2. In the case where the box or the galvanized bridges are not present, the problem can be simulated assuming that these parts of the domain have the same thermophysical properties as the soil.

That said, the temperatures in the soil, box and bridges are estimated by solving the heat conservation equation that models the problem in two dimensions, ie,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad \text{in } \Omega \times ]0, \tau]. \quad (7)$$

Here,  $T$  stands for the temperature in ( $^{\circ}\text{C}$ ),  $x$  and  $z$  for the spatial coordinates (in m), and  $t$  for the time (in s). The spatial domain (in m)  $\Omega$  is  $]0, 10[ \times ]0, 15[$  as shown in Fig. 2. The time period of simulations  $\tau$  covers one year and two months, but the two first months are discarded, to avoid numerical influences from the initial condition (see more details in (Brum *et al.*, 2019)).

As indicated by Fig. 2, the model should satisfy the following boundary conditions

$$T = T_a \quad \text{at } z = 0 \text{ m}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \text{ }^{\circ}\text{C/m} \quad \text{at } x = 0 \text{ m} \quad \text{and} \quad x = 10 \text{ m}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \text{ }^{\circ}\text{C/m} \quad \text{at } z = 15 \text{ m}. \quad (10)$$

Here,  $T_a$  is the air temperature in the city of *Viamão*. The equation of air temperature in the respective city, adjusted by the least squares method from the results of Vaz (2011), is given by

$$T_a(t) = 20.49 + 5.66 \sin \left( \frac{2\pi}{365} t - 5.30 \right). \quad (11)$$

As an initial condition, the soil temperature varies only in the direction  $z$ , according to the methodology of Ozgener *et al.* (2013). The equations were solved numerically using the Galerkin finite element method (Hughes, 1987) for the spatial discretization, and the first order implicit Euler finite difference method (Özisik, 1993) for the time discretization. It is important to highlight that in the finite element method, the continuity condition is absorbed in the variational formulation of the problem.

To avoid meshing significantly interfering with the final result, mesh independence tests were performed. Finally, after adopting a time step of  $\Delta t = 1800$  s (half an hour) for the temporal discretization, as in Domingues *et al.* (2021), comparisons of the solution vectors of the temperatures along one year at the point  $(x; z) = (5; 1, 6)$  m were made, that is, at the position referring to the center of the duct and also of the box. Basically, at each simulation the maximum value of the modulus of the difference between two successive solution vectors was compared.

Tab. 2 summarizes the last conclusive data from the mesh tests. It presents the number of nodes and triangles used in each mesh, the approximate simulation times of the finite element code implemented in Matlab, and finally the comparison of the differences between successive solutions.

Table 2: Dados finais dos testes de malha

Nodes	Elements	Time (min)	Comparison
1097	2137	2.6	
1396	2722	3.4	$1.80 \times 10^{-3}$
1657	3230	4.2	$6.94 \times 10^{-4}$
2017	3935	5.5	$2.41 \times 10^{-4}$

After the last result of Tab. 2, it was considered sufficient to adopt a mesh with 2017 nodes and 3935 triangles. After this study, it was standardized that when adopting different meshes for future simulations, these should contain 2000 or more nodes and/or 4000 or more elements.

### 3. RESULTS AND DISCUSSION

#### 3.1 Model Validation

The validation of this model was compared with the experimental data of Vaz (2011), a methodology also used in Domingues *et al.* (2021), in which the validation of the GAEA model is made, relative to the same data, but calculating

the temperature field in the soil through a 1D modeling. The Fig.3 presents a comparison between: (1) the results of the (discrete) daily averages of temperature at the exchanger outlet, as per Vaz (2011); (2) a least squares fitted curve of these same data; (3) the results of Domingues *et al.* (2021); (4) results present in this paper.

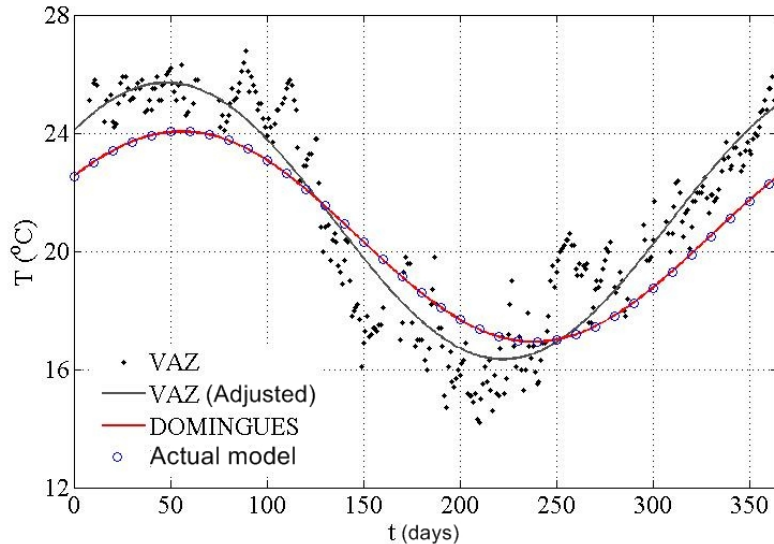
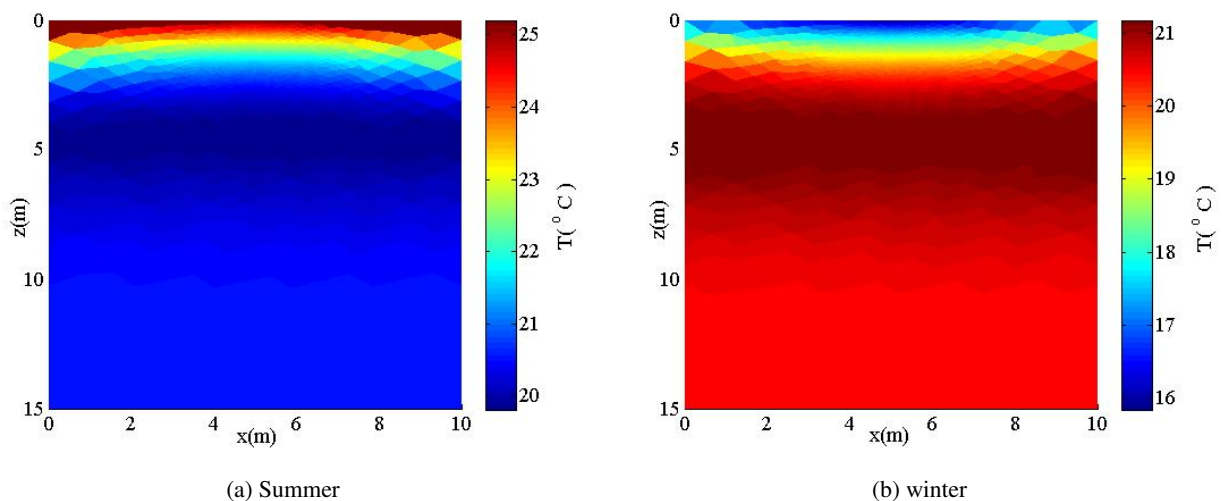


Figure 3: Comparison between results

As shown in Domingues *et al.* (2021), Pearson’s correlation coefficient between her model results and the experimental data is 0.89. Further, the same reference estimated the annual RMS difference between the model and experimental values to be approximately 1.45°C. Therefore, since the results of this work are approximately equal to those of Domingues *et al.* (2021), as shown in Fig.3, one can conclude the validity of the methodology used, which provides accurate results that are highly correlated to the experimental ones. Further, it can be seen that the methodology is computationally effective, as simulations can be performed in a few minutes (see Tab. 2).

To conclude this subsection, typical values for the soil temperature fields in summer and winter are shown in Fig. 4. In summer, the average daily air temperature is around 25°C and the minimum soil temperature is around 20°C. In winter, the air temperature decreases to almost 16°C, while the maximum soil temperature is around 21°C. In general, the maximum magnitude of the ground heat potential is a little above 5°C.



(a) Summer (b) winter  
Figure 4: Simulated soil temperature fields in summer (left) and winter (right)

### 3.2 EAHE Simulations

The first simulations were divided into two cases: (1) EAHE outlet temperature simulations without the galvanized bridges and (2) EAHE outlet temperature simulations with the galvanized bridges (both cases the burial depth of the ducts of 1.6 m (Vaz, 2011)). Fig. 5 presents these cases.



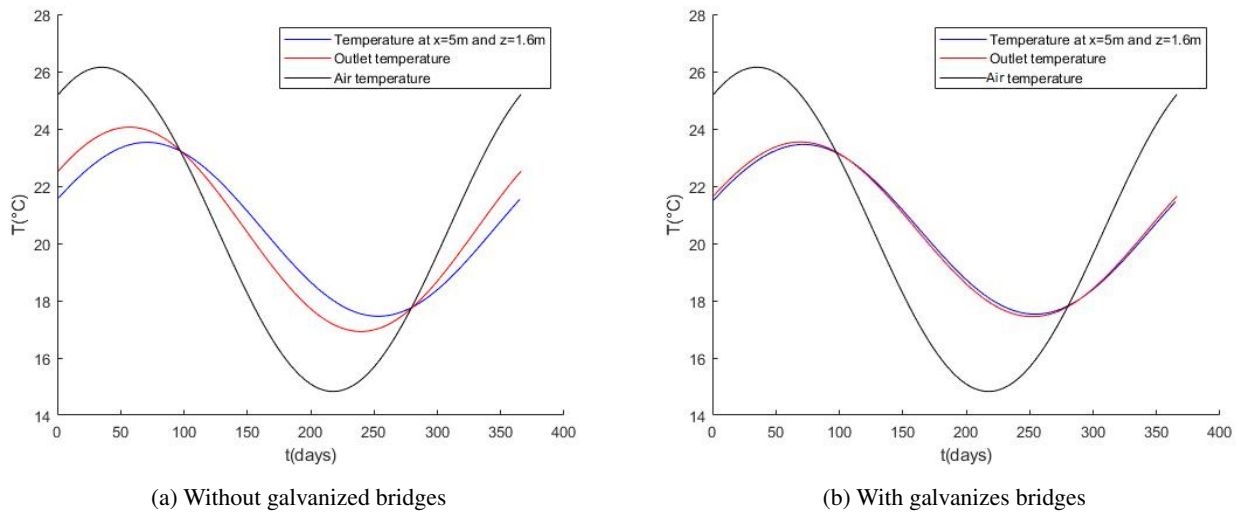


Figure 5: Temperature comparisons among the air, soil at the depth of 1.6 m, and EAHE outlet; without (left) and with (right) galvanized bridges

You can see, in Fig. 5, some interesting points. Before, it is necessary to make clear to the reader important definitions. We call the difference between the soil and air temperatures as the "soil thermal potential"; in addition, the difference between the outlet system and air temperatures is called the "EAHE thermal potential". It is logical to perceive that the greater the efficiency of the EAHE system, the smaller will be the difference between the curves for the EAHE outlet temperatures and the soil ones.

Still in Fig. 5, it is possible to see a large increase in the efficiency of the EAHE after coupling the galvanized box and bridge assembly in the duct. From the same figure, it can be seen that the peaks of the magnitude of the thermal potential approach  $4^{\circ}\text{C}$  in summer and winter. The root mean square annual (RMS) of the potential has been estimated to be about  $2.6^{\circ}\text{C}$ .

In order to increase the thermal potential of the EAHE system, some tests were carried out varying the ducts depth, as done in other works (Brum *et al.*, 2012; Hermes *et al.*, 2020). The chosen depths were: 1.6, 2.6, 3.6, 4.6 and 5.6 m and the simulation results are presented in Table 3 and in Fig. 6 (In the figure,  $T_a$  is the air temperature,  $T$  is the soil temperature, and  $T_s$  is the outlet temperature of the EAHE). It is noticed that the thermal potentials of the soil and of the EAHE increase with the depth, in which peaks of magnitude of more than  $5^{\circ}\text{C}$  are obtained at depths of 4.6 and 5.6 m. However, despite the improvement in thermal potential, the relative gains of the system decrease with depth. For example, the installation's annual gain by changing the depth from 4 to 5 m is less than 2%.

Table 3: Comparative on the annual root mean square (RMS) of the soil thermal potential at different depths.

Depth(m)	RMS	Relative gain (in %)
1.6	2.6481	-
2.6	3.4969	32.1
3.6	3.9753	13.7
4.6	4.2044	5.8
5.6	4.2762	1.7

#### 4. CONCLUSION

It is possible to conclude that the set with the galvanized box and bridge contributes to increase the efficiency of the earth-air heat exchanger system. Furthermore, tests carried out varying the depth of the pipeline's burial showed that high depths can increase the thermal potential of the heat exchanger, reaching practically  $5^{\circ}\text{C}$ , but the relative gains for such a situation do not favor the installation of these systems, since the greater the depth, the higher the installation costs. Therefore, an installation deeper than 3.6 m is not recommended.

Furthermore, it is possible to conclude that EAHE can be important devices to promote thermal comfort, without harming the environment, like many conventional cooling and heating systems.



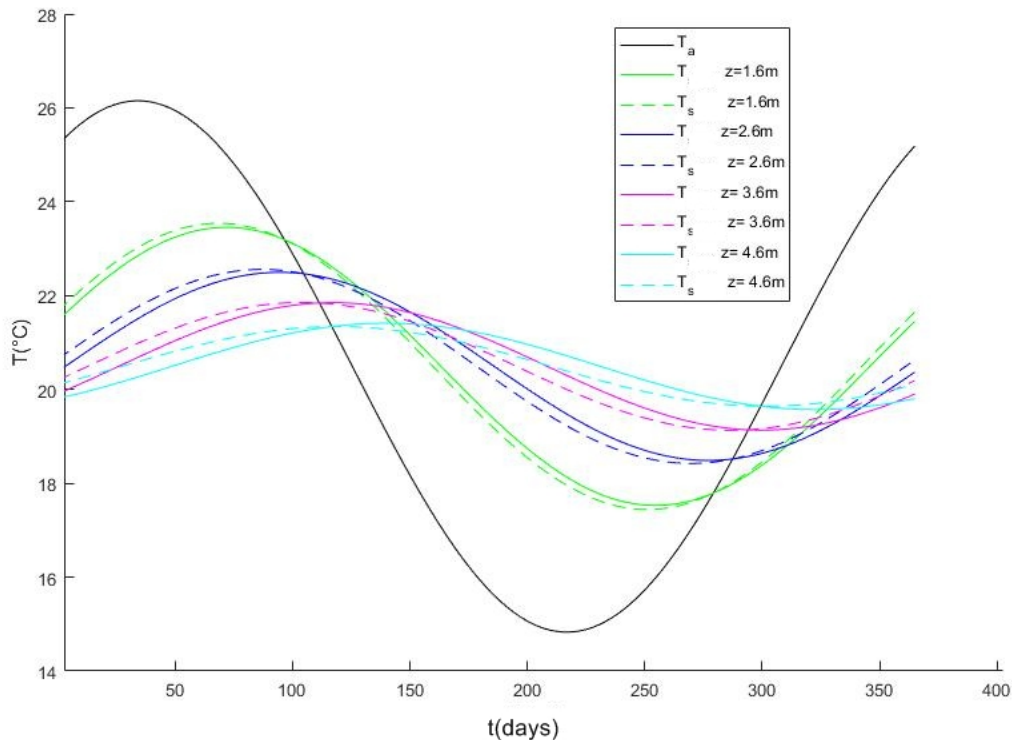


Figure 6: Comparative of the annual outlet temperatures placing the ducts at different depths

## 5. ACKNOWLEDGEMENTS

A. M. B. Domingues thanks her scholarships to the Fundação de Amparo à Pesquisa do Rio Grande do Sul (FAPERGS). R. S. Brum thanks the FAPERGS by the following grants: Edital 4/2019–ARD: Processo 19/2551-0001345-0 and Edital 05/2019–PqG: Processo 19/2551-0001964-5.

## 6. REFERENCES

- Agrawal, K.K., Misra, R., Agrawal, G.D., Bhardwaj, M. and Jamuwa, D.K., 2019. “The state of art on the applications, technology integration, and latest research trends of earth-air-heat exchanger system”. *Geothermics*, Vol. 82, pp. 34–50.
- Benkert, S., Heidt, F.D. and Schöler, D., 1997. “Calculation tool for earth heat exchangers gaea”. Proceedings Building Simulation, Fifth International IBPSA Conference 2.
- Bisoniya, T.S., 2015. “Design of earth-air heat exchanger system”. *Geothermal Energy*, Vol. 3, No. 18, pp. 1–10.
- Bordoloi, N., Sharma, A., Nautiyal, H. and Goel, V., 2018. “An intense review on the latest advancements of earth air heat exchangers”. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, Vol. 89, pp. 261–280.
- Brum, R.S., 2016. *Teoria construtal e desempenho térmico de trocadores de calor solo-ar*. Ph.D. thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, Brasil.
- Brum, R.S., Ramalho, J.V.A., Rodrigues, M.K., Rocha, L.A.O., Isoldi, L.A. and Santos, E.D., 2019. “Design evaluation of earth-air heat exchangers with multiple ducts”. *Renewable Energy*, Vol. 135, pp. 1371–1385.
- Brum, R.S., Rocha, L.A.O., Vaz, J., Santos, E.D.D. and Isoldi, L.A., 2012. “Development of simplified numerical model for evaluation of the influence of soil-air heat exchanger installation depth over its thermal potential.” *International Journal of Advanced Renewable Energy Research*, Vol. 1, No. 9, pp. 505–514.
- Domingues, A.M.B., Nóbrega, E.S.B., Ramalho, J.V.A., Brum, R.S. and Quadros, R.S., 2021. “Parameter analysis of earth-air heat exchangers over multi-layered soils in south brazil”. *Geothermics*, Vol. 93, pp. 1–14.
- Hassanzadeh, R., Darvishyadegari, M. and Arman, S., 2018. “A new idea for improving the horizontal straight ground source heat exchangers performance”. *Sustainable Energy Technologies and Assessments*, Vol. 25, pp. 138–145.
- Hermes, V.F., Ramalho, J.V.A., Rocha, L.A.O., dos Santos, E.D., Marques, W.C., Costi, J., Rodrigues, M.K. and Isoldi, L.A., 2020. “Further realistic annual simulations of earth-air heat exchangers installations in a coastal city”. *ELSEVIER - Sustainable Energy Technologies and Assessments*, Vol. 37.
- Hughes, T.J.R., 1987. *The finite element method (Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis)*. Prentice Hall,

INC., New Jersey.

Nóbrega, E.S., Brum, R.S., Ramalho, J.V. and Quadros, R.S., 2020. "First study on earth-air heat exchanger in pelotas". *Revista Mundi Engenharia, Tecnologia e Gestão*, Vol. 5, No. 6, pp. 286–01–286–15.

Ozgener, O., Ozgener, L. and Tester, J.W., 2013. "A practical approach to predict soil temperature variations for geothermal (ground) heat exchangers applications". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 62, pp. 473–480.

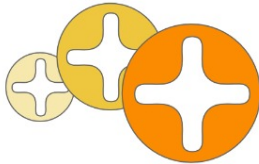
Özisik, M.N., 1993. *Heat Conduction*. John Wiley & Sons, New York.

Papakostas, T., Tsamitros, A. and Martinopoulos, G., 2019. "Validation of modified one-dimensional models simulating the thermal behavior of earth-to-air heat exchangers-comparative analysis of modelling and experimental results". *Geothermics*, Vol. 82, pp. 1–6.

Vaz, J., 2011. *Estudo experimental e numérico sobre o uso do solo como reservatório de energia para o aquecimento e resfriamento de ambientes edificados*. Ph.D. thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, Brasil.

## 7. RESPONSIBILITY NOTICE

The authors are solely responsible for the printed material included in this paper.



## **SIMULAÇÕES DE UM TROCADOR DE CALOR SOLO-AR COM O ACOPLAMENTO DE UMA CAIXA GALVANIZADA PARA A CIDADE DE VIAMÃO/RS**

**Ana Maria Bersch Domingues**<sup>1</sup> - ambdomingues@ufpel.edu.br

**Níbia Raquel Navarro Pastor**<sup>1,2</sup> - nibia.navarro@utec.edu.uy

**Marcos Rafael Burlón Olivera**<sup>1,2</sup> - marcos.burlon@utec.edu.uy

**Honório Joaquim Fernando**<sup>3</sup> - honoriofernando@id.uff.br

**Jairo Valões de Alencar Ramalho**<sup>1</sup> - jairo.ramalho@ufpel.edu.br

<sup>1</sup>Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Universidade Federal de Pelotas (UFPel), Campus Capão do Leão s/n, 96160-000, Pelotas, RS, Brasil

<sup>2</sup>Instituto Tecnológico Regional del Norte (ITRN), Universidad Tecnológica (UTEC) del Uruguay Ruta 5 (Guido Machado Brum), km 496, 40000, Rivera, Uruguai

<sup>3</sup>Instituto de Ciências Exatas (ICEX), Departamento de Matemática, Universidade Federal Fluminense (UFF), Campus Aterrado, Rua Desembargador Ellis Hermydio Figueira, 783, Aterrado, 27213-145, Volta Redonda, RJ, Brasil

### **Resumo.**

*Trocadores de calor solo-ar (TCSA) estão entre as tecnologias produzidas a partir da preocupação mundial acerca da preservação do meio ambiente. Um sistema TCSA utiliza, na maior parte do processo, a energia geotérmica, de modo a aquecer e resfriar ambientes. Desse modo, a utilização da energia elétrica diminui, o que torna os trocadores um sistema econômico. Basicamente, o TCSA é composto por um ou mais dutos enterrados a certa profundidade, onde o ar ambiente é forçado a fluir através dos mesmos, trocando calor com o solo ao redor e, por fim, entrar em edificações mais resfriado ou aquecido, dependendo da época do ano. Este trabalho apresenta simulações de um TCSA para a cidade brasileira de Viamão/RS. Uma caixa galvanizada foi posta em volta do duto a fim de aumentar a condutividade térmica do solo circundante. O objetivo deste trabalho é avaliar qual a proporção da caixa em relação ao solo é a mais adequada. Para isto, dividiram-se as simulações em nove casos, em que a proporção da caixa variou de 10 a 90%. Resultados prévios mostram que o sistema apresentou melhores rendimentos quando a caixa estava na proporção de 10%.*

**Palavras-chave:** Trocador de calor solo-ar, Potencial térmico, Caixa galvanizada, Condutividade térmica

## **1. INTRODUÇÃO**

Questões ambientais estão entre os assuntos mais discutidos atualmente. A preocupação com o aquecimento global atinge a população mundial e a busca por alternativas que amenizem os impactos causados pelo homem estão em crescente desenvolvimento. Segundo Souza

et al (2013), o aumento da concentração de gases de efeito estufa (GEE) na atmosfera está modificando o clima do planeta, sendo uma das consequências para tal, a elevação dos níveis de temperatura e alterações nos padrões de precipitação. Dito isso, Marengo (2007) aponta que entre 1900 e 2100 a temperatura global pode aquecer entre 1,4 e 5,8°C, assim, para se proteger do calor, por exemplo, a população passará a usar mais ventiladores e aparelhos de ar-condicionado, o que acarretará um maior gasto de energia elétrica (Souza et al, 2013).

Pensando nisso, novas formas de garantir o conforto térmico além de diminuir o consumo de energia elétrica estão sendo pesquisadas. Uma delas é o sistema de trocadores de calor solo-ar (TCSA), que utiliza principalmente a energia geotérmica e princípios operacionais, como mecânica dos fluidos e transferência de calor (Brum, 2016), para o aquecimento e resfriamento de ambientes. Os TCSA operam através de um ou mais dutos enterrados, onde o ar é forçado a fluir por estes e troca calor com o solo ao redor, sendo possível condicionar os edifícios no verão ou no inverno (Alves & Schmid, 2015). Isto acontece devido à inércia térmica do solo, cuja temperatura permanece mais amena e estável do que a temperatura do ar externo durante todo o ano (Estrada et al., 2018). A Fig. 1 apresenta um modelo de trocador de calor solo-ar em dias quentes.

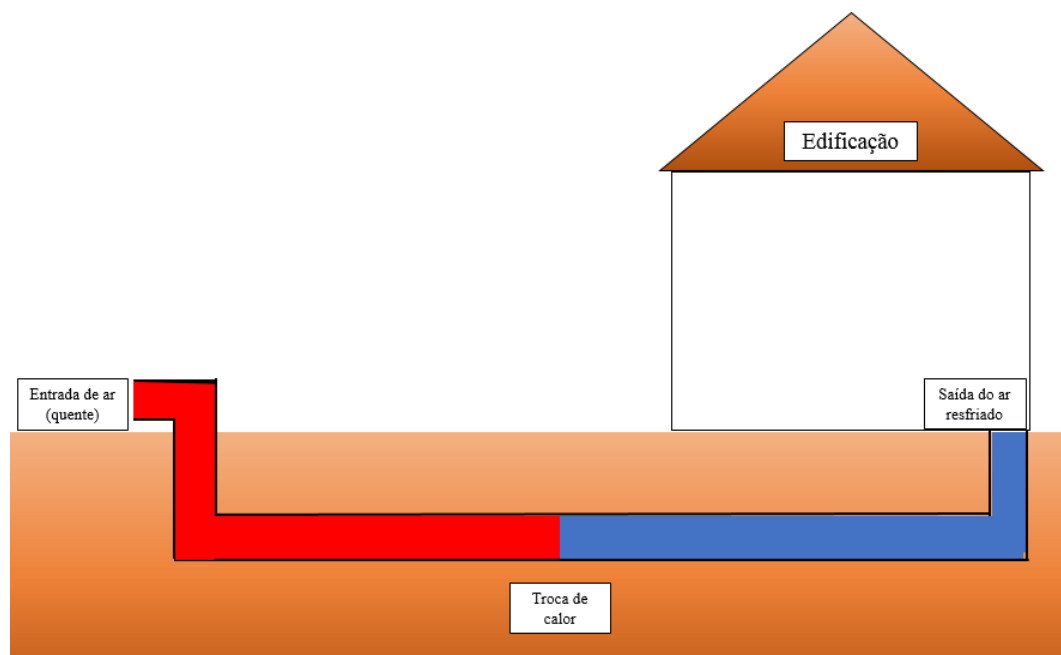


Figura 1- Modelo de um sistema TCSA em dias quentes.

Trabalhos importantes que envolvem trocadores de calor solo-ar podem ser encontrados facilmente na literatura. Agrawal et al. (2019) analisa e traz resultados envolvendo o respectivo assunto, apresentando os desenvolvimentos recentes acerca deste tema. Algumas pesquisas apresentam modelos 1D do problema, como é o caso de Bisoniya (2015). Este autor utiliza equações simplificadas para o projeto do TCSA, uma das vantagens de modelos unidimensionais, que permitem calcular a transferência de calor, o coeficiente de transferência de calor por convecção, a queda de pressão e o comprimento do tubo do sistema. Nóbrega et al. (2020) apresenta as primeiras simulações de um TCSA na cidade brasileira de Pelotas/RS; os resultados deste comprovam que as perspectivas são boas para a instalação do sistema na

respectiva cidade. A pesquisa de Domingues et al. (2021) realiza um estudo paramétrico a fim de aumentar o potencial térmico do sistema TCSA. As simulações foram feitas considerando características de lugares da cidade brasileira de Rio Grande/RS e os resultados indicam que melhores potenciais estão relacionados à menores diâmetros, maiores comprimento do duto do trocador e menor velocidade de escoamento. Em Hermes et al. (2020), analisou-se o comportamento térmico de TCSA, a partir de simulações com um modelo computacional tridimensional. Neste caso, a profundidade de 2 m foi considerada ideal para a instalação do duto.

Este trabalho simula um trocador de calor solo-ar a partir de características da cidade brasileira de Viamão/RS. Além do sistema TCSA tradicional e através da referência de Hassanzadeh et al. (2018), foi acoplado em volta do duto uma caixa galvanizada, de modo a aumentar a condutividade térmica do solo. Dito isso, o objetivo desta pesquisa é concluir a respeito do tamanho ideal da caixa galvanizada que garanta melhores potenciais térmicos e um aumento da eficiência do sistema.

## 2. METODOLOGIA

Este trabalho apresenta simulações de TCSA a partir de dados climáticos da cidade de Viamão, Rio Grande do Sul, cujas coordenadas geográficas são ( $30^{\circ} 04' 51''\text{S}$ ;  $51^{\circ} 01' 24''\text{O}$ ). Além do trocador, utilizou-se uma caixa galvanizada ao redor do duto, para aumentar a condutividade térmica do solo circundante, avaliando adaptações das ideias apresentadas em Hassanzadeh et al. (2018). A fim de concluir qual o melhor tamanho para a caixa galvanizada, os autores dividiram a pesquisa em nove casos, onde a proporção da caixa variou de 10 a 90%. Uma seção transversal do domínio computacional pode ser vista na Fig. 2.

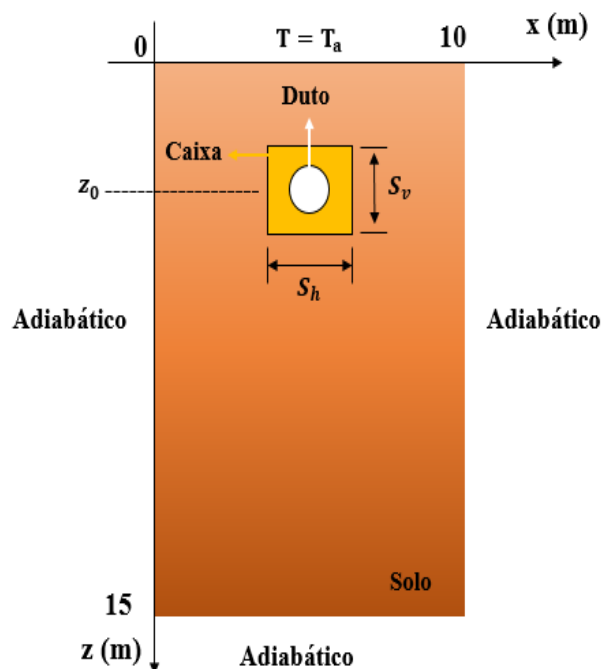


Figura 2- Definições do domínio computacional.

Na figura acima,  $z_0$  é a profundidade do centro do duto,  $S_v$  e  $S_h$  representam, respectivamente, os tamanhos vertical e horizontal da caixa,  $T$  é a temperatura em ( $^{\circ}\text{C}$ ) e  $T_a$  é a temperatura do ar em ( $^{\circ}\text{C}$ ). Para a geometria do duto, foram utilizados os parâmetros descritos em Vaz (2011), em que o comprimento do duto assume o valor de 25,77 m e o diâmetro de 0,11 m.

Para simular o trocador de calor, utilizou-se o modelo 1D chamado GAEA (Graphic design of geothermal heat exchangers), descrito em St Benkert et al. (1997) e posteriormente utilizado e validado em Domingues et al. (2021). Este modelo foi implementado no software Matlab (versão R2019a) e pode ser descrito através das equações que seguem.

A primeira equação apresenta o número de Nusselt do fluxo de ar em um tubo:

$$Nu = 0,0214 \times (Re_D^{0,8} - 100) \times Pr^{0,4}. \quad (1)$$

Aqui,  $Re_D$  e  $Pr$  são, respectivamente, o número de Reynolds e o número de Prandtl. A Eq. 2 calcula o coeficiente de transferência de calor em ( $\text{W m}^{-2}\text{K}^{-1}$ ) na superfície interna do duto:

$$h = \frac{\lambda_A \times Nu}{D_0} \quad (2)$$

na qual  $\lambda_A$  é a condutividade térmica em ( $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ ) do ar no duto e  $D_0$  é o diâmetro do mesmo em (m). Na próxima equação tem-se o coeficiente de transferência de calor por comprimento entre a corrente de ar e as paredes do duto em ( $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ ):

$$U_L = \pi D_0 h. \quad (3)$$

A relação de condutância da transferência de calor do ar para o duto e do duto para o solo pode ser calculada através de:

$$U^* = 2\pi \frac{\lambda_s}{U_L \ln\left(\frac{2z_0}{D_0} + \sqrt{\left(\frac{2z_0}{D_0}\right)^2 - 1}\right)}, \quad (4)$$

onde  $z_0$  é a profundidade do centro do duto em (m) e  $\lambda_s$  é a condutividade térmica do solo em ( $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ ).

O modelo GAEA diferencia-se dos demais por dividir o comprimento  $L_o$  do duto em 100 segmentos de tamanho  $\Delta x = L_o/100$ , sendo possível conhecer a temperatura em cada segmento do trocador, através do cálculo de estruturas de repetição. A temperatura do solo na parede do duto pode ser calculada a partir da Eq. 5.

$$T_{c,w}^k = \frac{U^* T_s + T_{a,i}^k}{U^* + 1}, \quad (5)$$

na qual  $T_{a,i}^k$  é a temperatura do ar na entrada do segmento  $k$  e  $T_s$  é a temperatura do solo. As temperaturas na saída de cada segmento podem ser calculadas através da seguinte equação:

$$T_{a,o}^k = T_{a,i}^k \frac{\Delta x U_L (T_{c,w}^k - T_{a,i}^k)}{\dot{m} c_{p,a}}, \quad (6)$$

onde  $\dot{m}$  e  $c_{p,a}$  são, respectivamente, o fluxo de massa em ( $\text{kg s}^{-1}$ ) e o calor específico do ar em ( $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ ). O algoritmo chega ao fim após encontrar a temperatura da saída no último segmento do duto, sendo que esta é a temperatura de entrada nas edificações.

Para as simulações do modelo descrito acima, é importante conhecer a temperatura do solo não influenciada pelas características do trocador, ou seja, como se a temperatura da terra na parede do duto dependesse apenas da transferência de calor da superfície terrestre para as camadas mais profundas. Dito isso, a temperatura do solo foi estimada numericamente, de forma bidimensional, adotando domínios computacionais semelhantes ao mostrado na Fig. 2, excluindo-se a existência do duto. As temperaturas no solo e caixa são estimadas resolvendo a equação de conservação de calor, que modela o problema em duas dimensões, sendo esta apresentada na Eq. 7.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad \text{em } \Omega \times ]0, \tau_0[. \quad (7)$$

Aqui,  $x$  e  $z$  representam as coordenadas espaciais em (m) e  $t$  o tempo em (s). O domínio espacial,  $\Omega$ , em (m) é  $]0, 10[ \times ]0, 15[$  como mostrado na Fig. 2. O período de tempo das simulações  $\tau$  cobre um ano e dois meses, mas os dois primeiros meses são descartados, para evitar influências numéricas da condição inicial. O modelo deve satisfazer as seguintes condições de contorno:

$$T = T_a \quad \text{em } z = 0 \text{ m}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \text{ } ^\circ\text{C/m} \quad \text{em } x = 0 \text{ m} \quad \text{e} \quad x = 10 \text{ m}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \text{ } ^\circ\text{C/m} \quad \text{em } z = 15 \text{ m}. \quad (10)$$

A equação da temperatura do ar  $T_a$  na respectiva cidade foi retirada da literatura (Vaz, 2011) e é descrita abaixo:

$$T_a(t) = 20,49 + 5,66 \sin \left( \frac{2\pi}{365}t - 5,30 \right). \quad (11)$$

As propriedades termofísicas podem ser encontradas na Tab. 1. Estas tratam das características do ar e do solo, retiradas de Vaz (2011) e da caixa galvanizada, retirada de Hassanzadeh et al. (2018).

Tabela 1- Propriedades termofísicas

	Densidade $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	Calor específico $c_p$ (J/kgK)	Condutividade térmica $\lambda$ (W/mK)	Viscosidade dinâmica $\mu$ (kg/ms)
Solo	1.800	1.780	2,1	-
Caixa galvanizada	7.800	446	52	-
Ar	1,16	1.010	0,0242	$1,789 \times 10^{-5}$

Mais recentemente, Domingues et al. (2021) adotaram uma condição inicial baseada em um modelo analítico unidimensional (considerando variações de temperatura apenas na direção  $z$ ), semelhante ao disposto em Vaz (2011) e Ozgener et al. (2013). Utilizando essa segunda proposta, baseando-se nas condições apresentadas em Viamão e ajustadas por mínimos quadrados, a condição inicial utilizada nesse trabalho foi:

$$T = T_0(z) = 20,49 - 5,66 \sin(5,30 + 0,39z) e^{-0,39z} \quad \text{em } t = 0 \text{ s}. \quad (12)$$

As equações foram resolvidas numericamente usando o método dos elementos finitos de Galerkin (Hughes, 1987) para a discretização espacial, e o método das diferenças finitas

implícitas de Euler de primeira ordem (Özsisik, 1993) para a discretização do tempo. Como as equações são resolvidas através de elementos finitos a condição de continuidade de fluxo entre o solo e o material galvanizado é absorvida na formulação variacional do problema.

Realizaram-se testes de independência da malha, em que foi adotado um intervalo de tempo de  $\Delta t = 1800$  s (meia hora) para a discretização temporal, assim como Domingues et al. (2021). Comparações dos vetores de solução das temperaturas ao longo de um ano no ponto  $(x; z) = (5; 1,6)$  m foram feitas. Basicamente, a cada simulação, foi comparado o valor máximo do módulo da diferença entre dois vetores de solução sucessivos. A Tab. 2 apresenta os últimos dados conclusivos dos testes de malha. A partir dos resultados encontrados, foi considerado suficiente adotar uma malha com 2.017 nós e 3.935 triângulos.

Tabela 2- Dados finais dos testes de malha

Nós	Elementos	Tempo (min)	Comparação
1.097	2.137	2,6	
1.396	2.722	3,4	$1,80 \times 10^{-3}$
1.657	3.230	4,2	$6,94 \times 10^{-4}$
2.017	3.935	5,5	$2,41 \times 10^{-4}$

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

#### 3.1 Validação do Modelo

A validação deste modelo foi feita através da comparação com os dados experimentais de Vaz (2011), o mesmo feito em Domingues et al. (2021). A Fig. 3 apresenta uma comparação entre: (1) os resultados das médias diárias (discretas) de temperatura na saída do trocador, conforme Vaz (2011); (2) curva ajustada de mínimos quadrados desses mesmos dados; (3) resultados de Domingues et al. (2021); (4) resultados apresentados neste trabalho.

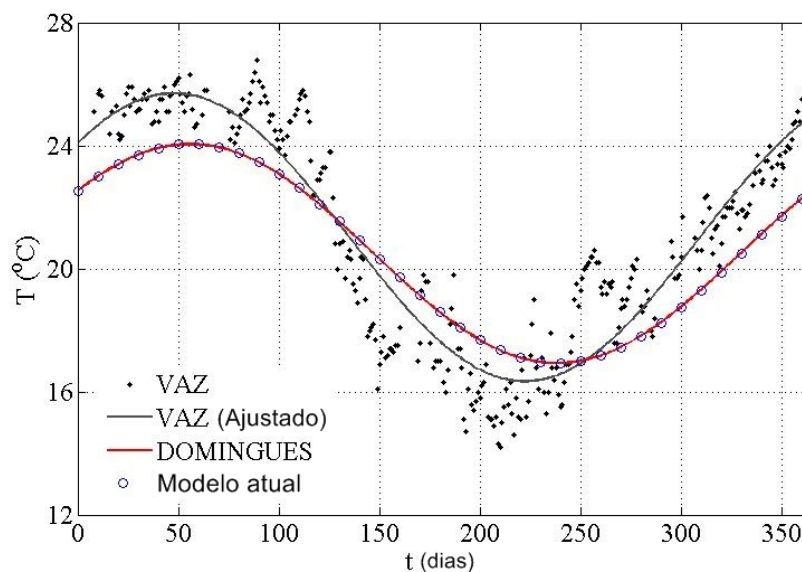


Figura 3- Comparação entre os resultados



O coeficiente de correlação de Pearson encontrado em Domingues et al. (2021), a partir da comparação entre seus resultados e os dados experimentais de Vaz (2011) foi de 0,89 e a diferença RMS anual foi de aproximadamente 1,45°C. Dito isso, é possível observar na Fig. 3, que os resultados deste trabalho quando comparados com Domingues et al. (2021) são aproximadamente iguais, logo conclui-se a validade da metodologia utilizada nesta pesquisa, fornecendo resultados precisos e altamente correlacionados aos experimentais.

### 3.2 Simulações do sistema TCSA

As simulações do sistema foram divididas em nove casos, variando a proporção da caixa galvanizada em relação ao solo. A Fig. 4 apresenta os campos de temperaturas em dois casos, no verão e no inverno. O item (a.1) apresenta o campo de temperatura no verão e o item (a.2) no inverno, ambos na proporção de 10%. Já os itens (b.1) e (b.2) apresentam, respectivamente, os campos no verão e no inverno na proporção de 90%.

É possível perceber através da Fig. 4 que, enquanto na proporção de 10% acontece a condução térmica da forma esperada, ou seja, a caixa auxilia na condução do calor das camadas mais profundas do solo, na proporção de 90%, além desta reter o calor das camadas mais profundas, a temperatura da superfície também influencia no processo, tornando o sistema menos eficiente. Este resultado também pode ser visto na Fig. 5, que apresenta as curvas das temperaturas do ar, do solo e da saída do trocador de calor nas proporções de 10% e 90%.

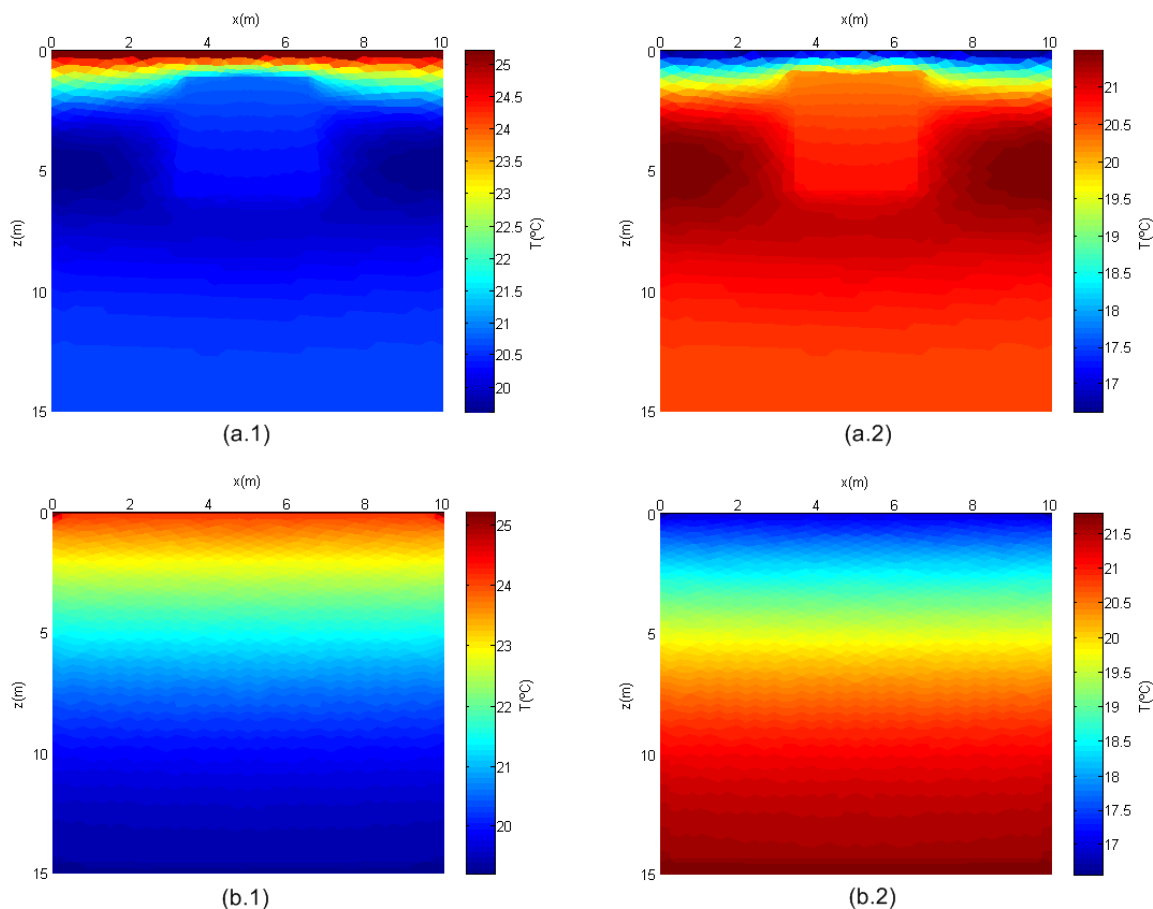


Figura 4- Campos de temperatura em dois casos (10% e 90%)

Através da Fig. 5 pode-se notar que o potencial térmico do solo (diferença entre a temperatura do ar e do solo) apresenta um aumento significativo quando a proporção da caixa assume o valor de 10% em relação ao solo. Consequentemente, o potencial térmico do trocador (diferença entre a temperatura do ar e da saída do TCSA) também aumenta, visto que este depende diretamente do potencial do solo.

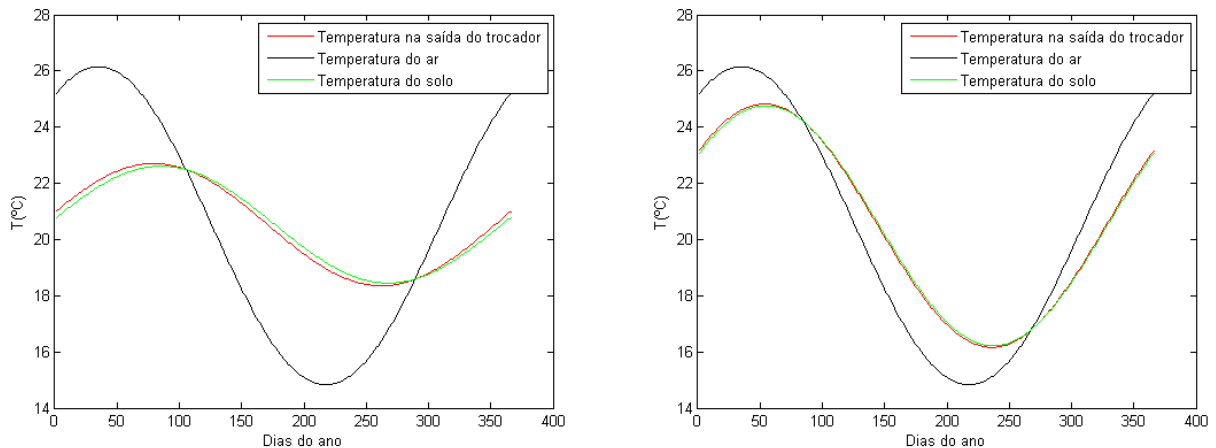


Figura 5- Diferença entre as temperaturas na proporção de 10% (esquerda) e 90% (direita).

A Tab. 3 apresenta os principais resultados obtidos nos nove casos. O leitor pode notar que os potenciais aumentam a medida que a proporção da caixa diminui.

Tabela 3- Resultados obtidos nos nove casos.

Casos (%)	Eficiência do sistema TCSA (%)	Potencial térmico do solo (°C)
10	94,9	3,23
20	94,9	3,18
30	95	3,05
40	95,1	2,97
50	94,2	2,81
60	94,1	2,61
70	93,9	2,35
80	95,4	2,01
90	95,1	1,5

#### 4. CONCLUSÕES

Um sistema TCSA é uma alternativa para possibilitar conforto térmico aliado à um baixo consumo de energia elétrica. A partir disto, formas de melhorar a eficiência destes sistemas vêm sendo estudadas no mundo todo.

Este trabalho dedicou-se a apresentar os resultados de uma pesquisa envolvendo simulações de um trocador acoplado a uma caixa galvanizada, a fim de melhorar a condutividade térmica do solo. Resultados encontrados a partir das simulações mostram que uma caixa de tamanho menor pode garantir o aumento do potencial térmico do solo, enquanto que uma caixa maior

falha neste ponto, visto que esta sofre influências consideráveis da temperatura da superfície, diminuindo a qualidade do sistema.

Pesquisas estão em desenvolvimento para averiguar se o potencial térmico do solo aumenta para proporções menores que 10%.

### **Agradecimentos**

Ana Maria B. Domingues agradece sua bolsa de pesquisa à Fundação de Amparo à pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul (FAPERGS).

### **Referências**

- Agrawal, K.K.; Misra, R.; Agrawal, G.D.; Bhardwaj, M.; Jamuwa, D.K. (2019), The state of art on the applications, technology integration, and latest research trends of earth-air-heat exchanger system. *Geothermics*, 82, 34-50.
- Alves, A.B.M.; Schmid, A.L. (2015), Cooling and heating potential of underground soil according to depth and soil surface treatment in the Brazilian climatic regions. *Energy and Buildings*, 90, 41-50.
- Benkert, St.; Heidt, F.D.; Schöler, D. (1997), "Calculation tool for earth heat exchangers GAEA", *Proceedings Building Simulation, Fifth International IBPSA Conference 2*.
- Bisoniya, T.S. (2015), Design of earth-air heat exchanger system. *Geothermal Energy*, 3:18, 1-10.
- Brum, R.S. (2016), "*Estudos do desempenho térmico de trocadores de calor solo-ar aplicando a teoria construtal*", Tese de Doutorado, Programa de pós-graduação em engenharia mecânica/UFRGS, Porto Alegre.
- Domingues, A.M.B.; Nóbrega, E.S.B.; Ramalho, J.V.A.; Brum, R.S.; Quadros, R.S. (2021), Parameter analysis of Earth-air heat exchangers over multi-layered soils in South Brazil. *Geothermics*, 93, 1-14.
- Estrada, E.; Labat, M.; Lorente, S.; Rocha L.A.O. (2018), The impact of latent heat exchanges on the design of earth air heat exchangers. *Applied Thermal Engineering*, 129, 306-317.
- Hassanzadeh, R.; Darvishyadegari, M.; Arman, S. (2018), A new idea for improving the horizontal straight ground source heat exchangers performance. *Sustainable Energy Technologies and Assessments*, 25, 138-145.
- Hermes, V.F.; Ramalho, J.V.A.; Rocha, L.A.O.; Santos, E.D.; Marques, W.C.; Costid, J.; Rodrigues, M.K.; Isoldi, L.A. (2020), Further realistic annual simulations of earth-air heat exchangers installations in a coastal city. *Sustainable Energy Technologies and Assessments*, 37, 1-11.
- Hughes, T.J.R. (1987), *The finite element method (Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis)*. Prentice Hall, INC., New Jersey.
- Marengo, J.A. (2007), *Mudanças Climáticas Globais e seus Efeitos sobre a Biodiversidade: Caracterização do Clima Atual e Definição das Alterações Climáticas para o Território Brasileiro ao Longo do Século XXI*. Brasília: MMA, 2ª edição, 212p.
- Nóbrega, E.S.B.; Brum, R.S.; Ramalho, J.V.A.; Quadros, R.S. (2020), A first study on earth-air heat exchanger in Pelotas. *Revista Mundi - Engenharia, Tecnologia e Gestão*, 6, 286(1)-286(15).
- Ozgener, Ö.; Ozgener, L.; Tester, J.W. (2013), A practical approach to predict soil temperature variations for geothermal (ground) heat exchangers applications. *Int. J. Heat Mass Transf.* 62, 473-480.
- Özisik, M.N. (1993), *Heat Conduction*. John Wiley & Sons, New York.
- Souza, E.C.; Coelho, A.B.; Lima, J.E.; Cunha, D.A.; Féres, J.G. (2013), Impactos das mudanças climáticas sobre o bem-estar relacionado à saúde no Brasil. *Pesquisa e planejamento econômico*, 43, 49-87.
- Vaz, J. (2011), "*Estudo experimental e numérico sobre o uso do solo como reservatório de energia para o aquecimento e resfriamento de ambientes edificadas*", Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre.

## SIMULATIONS OF A EARTH-AIR HEAT EXCHANGER WITH THE COUPLING OF A GALVANIZED BOX FOR THE CITY OF VIAMÃO/RS

**Abstract.** *Earth-air heat exchangers (EAHE) are among the technologies produced from the worldwide concern about the preservation of the environment. A EAHE system uses, for the most part, geothermal energy to heat and cool environments. In this way, the use of electrical energy is reduced, which makes the exchangers an economical system. Basically, the EAHE is composed of one or more ducts buried at a certain depth, where ambient air is forced to flow through them, exchanging heat with the surrounding ground and, finally, entering buildings cooled or heated, depending on the time of year. This paper presents simulations of a EAHE for the Brazilian city of Viamão/RS. A galvanized box was placed around the duct in order to increase the thermal conductivity of the surrounding soil. The objective of this work is to evaluate which ratio of the box to the soil is the most appropriate. For this purpose, the simulations were divided into nine cases, where the proportion of the box varied from 10 to 90%. Previous results show that the system presented better yields when the box was in the proportion of 10%.*

**Keywords:** *Earth-air heat exchanger, Thermal potential, Galvanized box, Thermal conductivity*

## UMA SÍNTESE DE ANÁLISES DE PARÂMETROS DE TROCADORES DE CALOR SOLO-AR ACOPLADOS A PONTES GALVANIZADAS

MARCOS RAFAEL BURLÓN OLIVERA<sup>1</sup>; NIBIA RAQUEL NAVARRO PASTOR<sup>2</sup>;  
ANA MARIA BERSCH DOMINGUES<sup>3</sup>; JAIRO VALÕES DE ALENCAR RAMALHO<sup>4</sup>; HONÓRIO JOAQUIM FERNANDO<sup>5</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal de Pelotas (UFPeI) – marcos.burlon@utec.edu.uy,

<sup>2</sup>Universidade Federal de Pelotas (UFPeI) – nibia.navarro@utec.edu.uy

<sup>3</sup>Universidade Federal de Pelotas (UFPeI) – ambdomingues@ufpel.edu.br

<sup>4</sup>Universidade Federal de Pelotas (UFPeI) – jairo.ramalho@ufpel.edu.br

<sup>5</sup>Universidade Federal Fluminense (UFF) – honoriofernando@id.uff.br

### 1. INTRODUÇÃO

O conforto térmico de ambientes de edifícios é um tema preocupante, pois os sistemas de ar condicionado usuais demandam grandes quantidades de energia. Como o sol é uma imensa fonte de energia, podemos explorá-lo de várias maneiras, por exemplo, com os trocadores de calor solo-ar (TCSA), que aproveitam o calor que nossa estrela emite e o planeta armazena nas camadas superficiais do solo (Vaz, 2011).

O fluxo de calor, que surge da interação entre as moléculas do solo, muda de direção nos ciclos diários e anuais. Flui para o solo durante o dia e para a superfície à noite; um processo semelhante ocorre durante o verão e o inverno. Portanto, TCSA consistem em um ou mais dutos enterrados horizontalmente ou verticalmente; o ar viaja dentro dos dutos, troca calor com o solo e entra no ambiente do edifício em temperaturas mais amenas. A Figura 1 mostra um esquema TCSA típico.

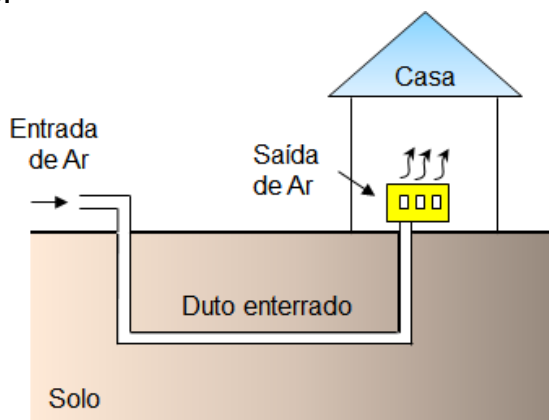


Figura 1: Esquema TCSA típico.

Parte da pesquisa da TCSA concentra-se na modelagem do fenômeno da transferência de calor, com o objetivo de aumentar seu potencial e eficiência térmica. Em áreas urbanas (principalmente em grandes cidades), uma questão fundamental para a instalação de TCSA com dutos horizontais é o espaço reduzido, mas poucos trabalhos abordam isso (Agrawal et al., 2019).

Com o objetivo de reduzir o tamanho das instalações de TCSA, este artigo explora a ideia proposta por Hassanzadeh et al. (2018); mais especificamente, conectamos os dutos a pontes galvanizadas com alta condutividade térmica. Uma vez que este método melhora significativamente a taxa de transferência de calor

entre o solo e os tubos, mostramos que seu comprimento pode ser reduzido, mantendo os valores de eficiência térmica anual do sistema acima de 70%.

## 2. METODOLOGIA

Este trabalho considera dados da cidade de Viamão, no sul do Brasil, onde Vaz (2011) fez diversas medições experimentais de uma instalação TCSA. O local possui clima subtropical úmido com solos levemente ondulados; suas coordenadas geográficas e altitude são (30°04'51"S, 51°01'24"W) e 111 m, respectivamente.

Replicando as condições encontradas em Vaz (2011), simulamos um duto com diâmetro  $D_0 = 0.11 \text{ m}$ , enterrado a uma profundidade  $z_0 = 1.6 \text{ m}$ . Desconsideramos as propriedades do material do duto, como feito em muitas referências (Rodrigues et al., 2015). A novidade aqui é que envolvemos o duto por uma caixa acoplada a uma ponte vertical, ambas galvanizadas e feitas de um material de alta condutividade térmica, explorando as ideias de Hassanzadeh et al., (2018). Além disso, variamos o comprimento do duto  $L_0$ , partindo de 25,77 m, mesmo valor tomado por Vaz (2011), e reduzindo-o para 10,77 m.

A Figura 2 apresenta vistas 2D para o domínio computacional, incluindo duto, caixa e ponte. Na vista do plano x-z,  $b_0 = 18 \text{ cm}$  é o tamanho da caixa;  $S_v = 1 \text{ m}$  e  $S_h = 1 \text{ cm}$  são, respectivamente, os tamanhos vertical e horizontal da ponte. Como podemos ver na vista do plano y-z, a ponte e a caixa têm o mesmo comprimento,  $L_0$ , do duto. Além disso, a porção de solo simulada tem uma profundidade de 15 m, uma largura de 10 m e um comprimento variável  $L_0$ .

Para simular o TCSA, adotamos o modelo GAEA (Graphische Auslegung von Erdwärme Austauschern) que Domingues et al. (2021) validou com os dados experimentais de Vaz (2011). GAEA é um modelo 1D que calcula as variações longitudinais nas temperaturas do ar ao longo dos dutos; para isso, ele depende de estimativas para a temperatura do solo sem a presença do duto.

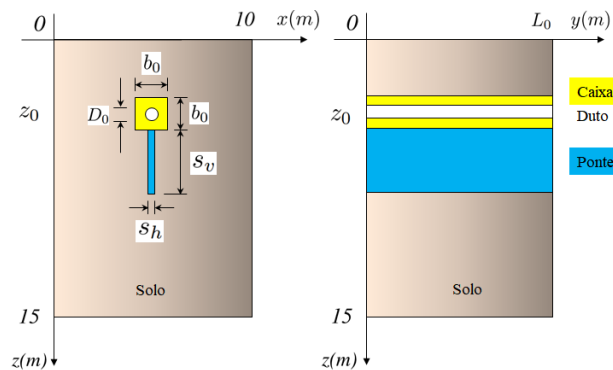


Figura 2: Vistas esquemáticas 2D para o conjunto duto, caixa e ponte.

Considerando a Fig. 2, as principais variações na temperatura do solo ocorrem no plano x-z, podendo-se desprezá-las no plano y-z. Portanto, para calcular as temperaturas no solo, caixa e ponte, resolvemos a equação de conservação de calor

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad \text{em } \Omega \times (0, \tau_0] \quad (1)$$

Aqui,  $T$  representa a temperatura em ( $^{\circ}\text{C}$ ) e  $t$  representa o tempo (em s). O domínio espacial é  $\Omega = (0,10) \times (0,15)$  (dimensões em m), como na Fig. 2; o intervalo de tempo total para simulações,  $\tau_0$ , é de um ano e dois meses. A Tabela

1 define as propriedades termofísicas; os valores para ar e solo são fornecidos por Vaz (2011), os das peças galvanizadas são de Hassanzadeh et al. (2018).

Tabela 1: Propriedades termo físicas.

	Densidade $\rho(\text{kg/m}^3)$	Condutividade Térmica $C_p(\text{W/m K})$	Calor Específico $\lambda(\text{J/kg K})$
Solo	1800	2.1	1780
Peças galvanizadas	7800	52	446
Ar	1.16	0.0242	1010

A solução para eq. (1) está sujeita às condições de contorno

$$T = T_a \quad \text{em } z = 0 \text{ m}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \text{ } ^\circ\text{C/m} \quad \text{em } x = 0 \text{ m e } x = 10 \text{ m} \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \text{ } ^\circ\text{C/m} \quad \text{em } z = 15 \text{ m} \quad (4)$$

Na eq. (2),  $T_a$  é a temperatura do ar em Viamão. Podemos modelá-la por

$$T_a(t) = 20.49 + 5.66 \sin\left(\frac{2\pi}{365}t - 5.30\right), \quad (5)$$

após ajuste por mínimos quadrados das temperaturas médias diárias obtidas por Vaz (2011)]. A condição inicial é

$$T_{init}(z) = 20.49 - 5.66 \sin(5.30 + 0.39z)e^{-0.39z}, \quad (6)$$

onde estamos supondo que a temperatura do solo está inicialmente variando apenas na direção  $z$  (Domingues et al., 2021).

Resolvemos as equações numericamente, usando o método de elementos finitos de Galerkin (Hughes, 1987) para discretização espacial. Discretizamos tempo via método de diferenças finitas implícito de Euler de primeira ordem (Özisik, 1993). Fizemos diversos testes de refinamento antes de adotar malhas com cerca de 4000 elementos triangulares, gerando-os no software GMSH (versão 4.8.8). Conforme feito por Domingue0 et al., (2021), empregamos intervalos de tempo discretos de 1800 segundos. As simulações usaram um código próprio; desenvolvido no software Matlab (versão R2012a). Além disso, calculamos a eficiência anual do TCSA usando a equação

$$\theta = \frac{\sqrt{\int_0^{365} [T_0 - T_i]^2 dt}}{\sqrt{\int_0^{365} [T_s - T_i]^2 dt}} \quad (7)$$

onde  $T_0$  e  $T_i$  são, respectivamente, as temperaturas na saída e na entrada do duto. Aqui, assumimos  $T_i = T_a$  da eq. (5). Quanto a  $T_s$ , é uma estimativa da temperatura no ponto (5 m, 1.6 m) no plano  $x$ - $z$ , ou seja, no centro do duto (ver Fig. 2).

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Começamos comparando os resultados anuais para as temperaturas de saída, considerando um duto enterrado na profundidade  $z_0 = 1.6 \text{ m}$ , semelhante ao caso experimental de Vaz (2011). Esta simulação utilizou uma malha baseada na vista do plano  $x$ - $z$  da Fig. 2 e o mesmo código desenvolvido. Como em Vaz (2011) não havia caixa nem ponte, apenas programamos essas partes do domínio com as

mesmas propriedades termofísicas do solo. Obtivemos um resultado que é muito semelhante ao obtido por Domingues et al., (2021), verificando a metodologia atual.

A Tabela 2 compara a eficiência térmica anual do TCSA, variando o comprimento do duto  $L_0$ ; os resultados mostram que reduzir  $L_0$  também reduz  $\theta$ . Observamos que a instalação Vaz (2011) teve uma eficiência anual próxima a 72% utilizando um duto de 25.77 m. Incorporando à instalação as peças galvanizadas e utilizando o mesmo comprimento, obtém-se  $\theta \approx 95\%$ . Além disso, alcançamos eficiências acima de 70% empregando dutos bem menores, com  $L_0$  variando entre 10.77 e 13.77 m, reduzindo em quase metade o tamanho da instalação.

Tabela 2: Comparação entre o comprimento do duto ( $L_0$ ) e a eficiência térmica anual ( $\theta$ ).

Lo(m)	25.77	22.77	19.77	16.77	13.77	10.77
$\theta(\%)$	94.88	92.68	89.58	85.21	79.07	70.47

#### 4. CONCLUSÕES

A eficiência térmica anual do TCSA é aumentada significativamente pelo acoplamento dos dutos a uma caixa e uma ponte galvanizada. Essa metodologia permitiu obter eficiências próximas a 70% utilizando dutos de comprimento bem menores do que uma instalação convencional. Portanto, os sistemas TCSA podem ser melhorados, permitindo-nos reduzir o tamanho das instalações em zonas urbanas, onde os espaços são limitados.

#### 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AGRAWAL, K.; MISRA, R; AGRAWAL, G.; GHARDWAJ, M; JAMUWA, D. The state of art on the applications, technology integration, and latest research trends of earth-air-heat exchanger system. *Geothermics. Rev.* 82, p.34-50, 2019.
- DOMINGUES, A., NÓBREGA, E., RAMALHO, J., BRUM, R., QUADROS, R. Parameter analysis of Earth-air heat exchangers over multi-layered soils in South Brazil. *Elsevier – Geothermics*, 93 (102074), p.1-14, 2021.
- HASSANZADEH, R.; DARVISHYADEGARI, M.; ARMAN, S. A new idea for improving the horizontal straight ground source heat exchangers performance. *Sustainable Energy Technologies and Assessments*. V.25, p. 138 – 145, 2018.
- HUGHES, T.J. *The finite element method*. New Jersey: Prentice Hall, INC., 1987
- OZISIK, M. *Heat Conduction*. New York: John Wiley & Sons, 1993.
- RODRIGUES, M., BRUM, R.; VAZ, V., ROCHA, L., SANTOS, E., ISOLDI, L. Numerical investigation about the improvement of the thermal potential of an earth-air heat exchanger (eahe) employing the constructal design method. *Renewable Energy*, vol. 80, pp. 538–551, 2015.
- VAZ, J. Estudo experimental e numérico sobre o uso do solo como reservatório de energia para o aquecimento e resfriamento de ambientes edificadas. Brasil. 2011. 237 f. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, 2011.



## UMA SÍNTESE DE ANÁLISES DE DESEMPENHO DE TROCADORES DE CALOR SOLO-AR COM A INSERÇÃO DE MATERIAIS GALVANIZADOS NO SOLO

NIBIA RAQUEL NAVARRO PASTOR<sup>1</sup>; MARCOS RAFAEL BURLÓN OLIVERA<sup>2</sup>;  
ANA MARIA BERSCH DOMINGUES<sup>3</sup>; HONÓRIO JOAQUIM FERNANDO<sup>4</sup>;  
JAIRO VALÕES DE ALENCAR RAMALHO<sup>5</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal de Pelotas(UFPel) – [nibia.navarro@utec.edu.uy](mailto:nibia.navarro@utec.edu.uy),  
<sup>2</sup>UFPel - [marcos.burlon@utec.edu.uy](mailto:marcos.burlon@utec.edu.uy), <sup>3</sup>UFPel - [ambdomingues@ufpel.edu.br](mailto:ambdomingues@ufpel.edu.br)  
<sup>4</sup>Universidade Federal Fluminense (UFF) - [honoriofernando@id.uff.br](mailto:honoriofernando@id.uff.br)  
<sup>5</sup>UFPel – [jairo.ramalho@ufpel.edu.br](mailto:jairo.ramalho@ufpel.edu.br)

### 1. INTRODUÇÃO

A maior parte da energia usada em todo o mundo vem de combustíveis fósseis como carvão, petróleo e gás natural. O consumo desses combustíveis é mais rápido do que sua regeneração, sendo considerados não renováveis. Além disso, seu transporte e armazenamento têm um impacto ambiental negativo, por isso é necessário encontrar alternativas eficientes, recursos não poluentes e renováveis (AGRAWAL et al, 2019).

Entre as fontes alternativas de energia com grande potencial, está o sol que origina praticamente todas as fontes de energia da Terra. A energia solar atinge a superfície da Terra diretamente ou por difusão. A crosta terrestre atua como uma grande reserva inercial para essa energia, com ciclos alternados de armazenamento e fornecimento de calor ao meio ambiente. No ciclo diário, a superfície da Terra ganha calor durante o dia e o perde à noite; da mesma forma, no ciclo anual, a superfície da Terra ganha calor nos períodos quentes e perde nos períodos frios (VAZ, 2011).

Entre as propostas para capturar e usar o calor subterrâneo da terra para resfriar / aquecer espaços estão os trocadores de calor solo-ar (TCSA). Estes sistemas acoplam um sistema de ventilação a uma rede de tubulações instaladas a determinadas profundidades. Nessas tubulações, o ar ambiente entra por uma extremidade, é forçado a fluir constantemente (por exemplo, através do uso de ventiladores) trocando calor com o solo e, em seguida, sai pela outra extremidade, entrando no edifício com uma temperatura mais amena. O esquema básico do TCSA pode ser visto na Fig. 1.

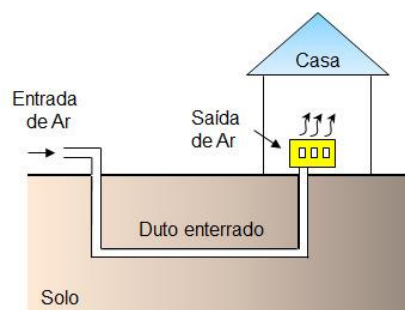


Figura 1: Esquema típico de um TCSA

As pesquisas em TCSA diferem nos aspectos e parâmetros escolhidos para aprofundar o estudo, que influenciam no desempenho do sistema: ciclos de temperatura diários e anuais da região de instalação; características e propriedades termofísicas do solo; velocidade do fluxo de ar; o número e a

profundidade dos dutos; seu diâmetro, comprimento e o material dos tubos (DOMINGUES et al., 2021). A eficácia dos TCSAs pode ser aumentada melhorando a condutividade térmica do solo. Esta ideia é a que se desenvolve no presente trabalho que visa avaliar o desempenho térmico de um TCSA após o acoplamento de pontes galvanizadas aos dutos baseando-se em instalações apresentadas por HASSANZADEH et al. (2018).

## 2. METODOLOGIA

As simulações foram realizadas com as condições do município gaúcho de Viamão. As informações sobre as propriedades do solo local foram extraídas do trabalho experimental de VAZ (2011). En tal experimento, o comprimento do duto de interesse era 25,77 m, seu diâmetro 0,11 m, e foi colocado a uma profundidade de 1,6 m. Como variante da configuração original, o duto foi envolvido por uma caixa acoplada a uma ponte vertical, ambos elementos galvanizados, de alta condutividade térmica.

O domínio computacional definido para essas simulações é delineado em duas dimensões, na Fig. 2. Aqui  $z_0$  é a profundidade do centro do duto,  $b_0 = 18$  cm,  $S_v = 1$  m e  $S_h = 1$  cm.

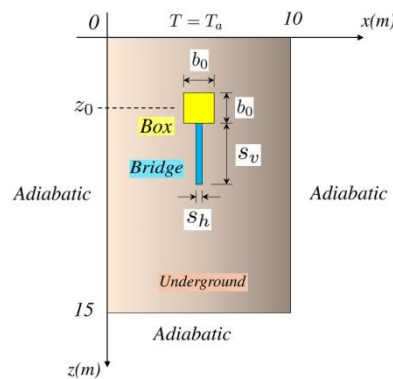


Figura 2: Domínio computacional

A Tabela 1 mostra as propriedades termofísicas do solo, ar e materiais galvanizados.

Tabela 1: Propriedades termofísicas

	Densidade $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	Calor específico $c_p$ (J/kgK)	Condutividade térmica $\lambda$ (W/mK)	Viscosidade dinâmica $\mu$ (kg/ms)
Solo	1800	1780	2.1	-
Partes galvanizadas	7800	446	52	-
Ar	1.16	1010	0.0242	$1.789 \times 10^{-5}$

Para simular o TCSA, é adotado o modelo GAEA 1D que estima as variações longitudinais nas temperaturas do ar ao longo do duto. Tal modelo foi validado por DOMINGUES et al. (2021) contra dados experimentais de VAZ (2011). As temperaturas no solo, caixa e ponte são estimadas resolvendo a equação de conservação de calor que modela o problema em duas dimensões:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \text{ em } \Omega \times (0, \tau_0] \text{ e } \begin{cases} T \text{ em } ^\circ\text{C}; t \text{ em } s \\ x, z: \text{ em } m \\ \Omega: (0,10) \times (0,15) \text{ em } m \end{cases} \quad (1)$$

O tempo das simulações abrange um ano e dois meses ( $\tau_0$ ), mas os dois primeiros meses são descartados para evitar influências numéricas devido à

condição inicial. Na Fig. 2, as condições de contorno também foram incluídas após o ajuste por mínimos quadrados dos dados de VAZ (2011):

$$\begin{cases} T = T_a \text{ em } z = 0 \text{ m} \\ \frac{\partial T}{\partial x} = 0^\circ\text{C/m em } x = 0\text{m e } x = 10\text{m} \\ \frac{\partial T}{\partial z} = 0^\circ\text{C/m em } z = 15\text{m} \end{cases} \quad (2)$$

Aquí

$$T_a(t) = 20.49 + 5.66 \sin\left(\frac{2\pi}{365}t - 5.30\right) \quad (3)$$

As equações foram resolvidas numericamente usando o método dos elementos finitos de Galerkin (HUGHES, 1987) para discretização espacial; e o método das diferenças finitas implícitas de Euler de primeira ordem (ÖZISIK, 1993) para a discretização temporal. As malhas de teste triangulares foram geradas com o software GMSH (versão 4.8.8); o intervalo de tempo foi de 1800 segundos conforme DOMINGUES et al.(2021). Para as etapas de pré, pós e processamento foram utilizados o software MATLAB (versão R2019a).

O desempenho do TCSA modificado também foi avaliado variando a profundidade do duto e da ponte.

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados que podem ser compartilhados até agora são os seguintes:

- 1) A Fig. 3 mostra a comparação do TCSA nas condições propostas por VAZ (2011) com a adição da caixa e ponte galvanizadas, na mesma profundidade do duto:  $z = 1,6$  m.

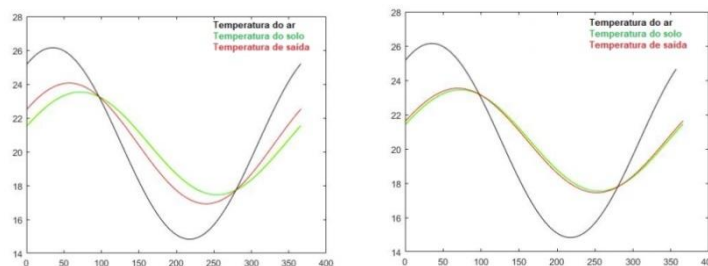


Figura 3: Temperaturas anuais comparativas com o duto a profundidade de 1,6 m; sem ponte (esquerda) e com ponte (direita)

Após o acoplamento do duto com o conjunto da caixa e da ponte galvanizadas, as temperaturas de saída estão muito próximas das temperaturas do solo (eficiência de 72,97% sem ponte e 94,87% com ponte).

- 2) Os resultados das simulações, posicionando o duto com caixa e ponte acoplados, em profundidades de 2,6, 3,6 e 4,6 m, são apresentados na Fig. 4.

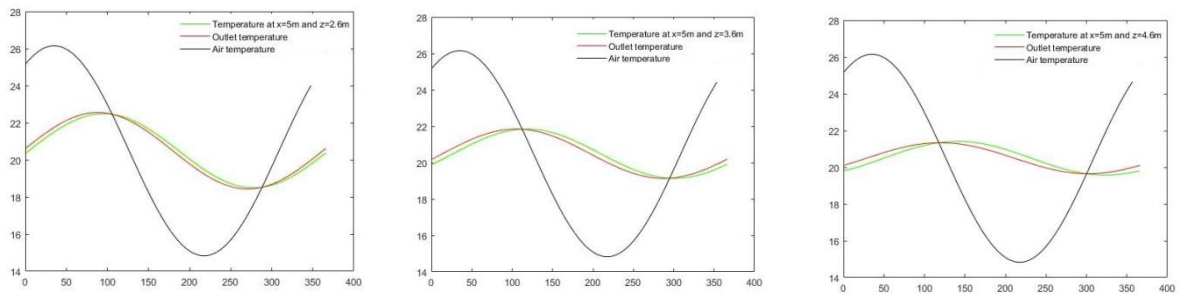


Figura 4: Temperaturas anuais comparativas variando a profundidade do duto

- 3) Para melhorar a precisão na comparação, foram calculados os ganhos relativos dos valores eficazes anuais (RMS) para o potencial térmico de solo. Deve-se considerar que quanto mais fundo os dutos estiverem enterrados, maiores serão os custos de instalação e manutenção do TCSA. O maior ganho é de 32%, a 2.6 m como se mostra na Tabela 2.

Tabela 2: Comparativo dos valores RMS do potencial térmico do solo variando a profundidade

Profundidade (m)	RMS (ok)	Ganho relativo (%)
1.6	2.6481	-
2.6	3.4969	32.1
3.6	3.9753	13.7
4.6	4.2044	5.8

#### 4. CONCLUSÕES

Os resultados obtidos até agora encorajam uma investigação mais aprofundada sobre as melhorias que podem ser feitas no TCSA com pontes galvanizadas. O custo deste material é baixo e isso pode contribuir para tornar esta alternativa mais eficaz do que o TCSA convencional.

#### 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGRAWAL, K.; MISRA, R; AGRAWAL, G.; GHARDWAJ, M; JAMUWA, D. The state of art on the applications, technology integration, and latest research trends of earth-air-heat exchanger system. **Geothermics**. Rev. 82, p.34-50, 2019.

DOMINGUES, A., NÓBREGA, E., RAMALHO, J., BRUM, R., QUADROS, R. Parameter analysis of Earth-air heat exchangers over multi-layered soils in South Brazil. **Elsevier – Geothermics**, 93 (102074), p.1-14, 2021.

HASSANZADEH, R.; DARVISHYADEGARI, M.; ARMAN, S. A new idea for improving the horizontal straight ground source heat exchangers performance. **Sustainable Energy Technologies and Assessments**. V.25, p. 138 – 145, 2018.

HUGHES, T.J. **The finite element method**. New Jersey: Prentice Hall, INC., 1987

OZISIK, M. **Heat Conduction**. New York: John Wiley & Sons, 1993.

VAZ, J. **Estudo experimental e numérico sobre o uso do solo como reservatório de energia para o aquecimento e resfriamento de ambientes edificadas**. Brasil. 2011. 237 f. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, 2011.

**Análises paramétricas de trocadores de calor solo-ar  
acoplados a estruturas galvanizadas** – Marcos Rafael  
Burlón Olivera



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS**

Instituto de Física e Matemática

Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática



Dissertação

**Análises paramétricas de trocadores de calor solo-ar  
acoplados a estruturas galvanizadas**

**MARCOS RAFAEL BURLÓN OLIVERA**

Pelotas, 2022