

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
Instituto de Física e Matemática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática



Dissertação

**EFEITOS ESTOCÁSTICOS DO MEANDRO NA DISPERSÃO DE POLUENTES NA
CAMADA LIMITE PLANETÁRIA EM CONDIÇÕES DE VENTO FRACO**

Camila Fávero

Pelotas, 2020

Camila Fávero

**EFEITOS ESTOCÁSTICOS DO MEANDRO NA DISPERSÃO DE POLUENTES NA
CAMADA LIMITE PLANETÁRIA EM CONDIÇÕES DE VENTO FRACO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática

Orientador: Prof. Dr. Glênio Aguiar Gonçalves
Coorientador: Prof. Dra. Daniela Buske

Pelotas, 2020

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas
Catalogação na Publicação

F111e Fávero, Camila

Efeitos estocásticos do meandro na dispersão de poluentes na camada limite planetária em condições de vento fraco / Camila Fávero ; Glênio Aguiar Gonçalves, orientador ; Daniela Buske, coorientadora. — Pelotas, 2020.
66 f. : il.

Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2020.

1. Vento fraco. 2. Dispersão de poluentes. 3. Solução analítica. 4. Equação de advecção-difusão. I. Gonçalves, Glênio Aguiar, orient. II. Buske, Daniela, coorient. III. Título.

CDD : 551.5185

EFEITOS ESTOCÁSTICOS DO MEANDRO NA DISPERSÃO DE POLUENTES NA
CAMADA LIMITE PLANETÁRIA EM CONDIÇÕES DE VENTO FRACO

por

Camila Fávero

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, PPGMMat,
do Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como parte dos
requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Modelagem Matemática

Banca Examinadora:

Prof. Dr. – Glênio Aguiar Gonçalves (UFPel)

Profa. Dra. – Daniela Buske (UFPel)

Prof. Dr. – Jonas da Costa Carvalho (UFPel)

Prof. Dr. – Guilherme Jahnecke Weymar (UFPel)

Prof. Dr. – Viliam Cardoso da Silveria (UFPel)

Prof. Dr. – Bardo Ernst Josef Bodmann (UFRGS)

Pelotas, 03 de setembro de 2020

AGRADECIMENTOS

Agradeço a toda minha família, em especial a minha mãe, Mari, por todo apoio e compreensão durante a realização desse trabalho.

Agradeço ao professor Glênio Aguiar Gonçalves e a professora Daniela Buske, por todo o empenho e dedicação durante a orientação dessa dissertação e por todo o conhecimento transmitido.

Agradeço a todos os amigos que estiveram comigo durante esse período, pessoalmente ou a distância. Ao colegas e professores do laboratório GDISPEN, obrigada pela parceria e companheirismo.

Por fim, agradeço a CAPES pelo suporte financeiro e a UFPEL representada por seus funcionários e docentes.

RESUMO

FÁVERO, Camila. **EFEITOS ESTOCÁSTICOS DO MEANDRO NA DISPERSÃO DE POLUENTES NA CAMADA LIMITE PLANETÁRIA EM CONDIÇÕES DE VENTO FRACO**. 2020. 66 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2020.

Neste trabalho é apresentada uma solução analítica para a equação transiente de advecção-difusão em três dimensões, com o objetivo de simular a dispersão de poluentes na atmosfera. Esta resolução é obtida a partir da combinação dos métodos de separação de variáveis e da técnica GILTT. A nova solução apresenta a vantagem de não necessitar a inversão numérica realizada na variável temporal nos trabalhos que utilizam somente a técnica GILTT. O modelo foi testado em condições de vento fraco, com difusão nas direções transversal e longitudinal. Foram inseridas flutuações estocásticas nas velocidades do vento, representado o efeito do meandro do vento na dispersão de substâncias na atmosfera e dando ao modelo um caráter estocástico. Simulações utilizando os dados do experimento de INEL, indicaram um desempenho adequado.

Palavras-chave: Vento fraco, Dispersão de poluentes, Solução analítica, Equação de advecção-difusão.

ABSTRACT

FÁVERO, Camila. **Stochastic effects of the meander on the dispersion of pollutants in the planetary boundary layer under low wind conditions.** 2020. 66 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2020.

This work presents an analytical solution for the transient three-dimensional advection-diffusion equation, to simulate the pollutant dispersion in the atmosphere. This solution is obtained from a combination of the variable separation method and the GILTT technique. The new solution has the advantage of not requiring a numerical inversion performed in the temporal variable if compared with works using only GILTT technique. The model was tested in low wind conditions, with diffusion in transverse and longitudinal directions. Stochastic fluctuations in wind speeds were inserted, representing the effect of the wind meander on the dispersion of substances in the atmosphere and giving the model a stochastic character. Simulations using the data from the INEL experiment, indicated adequate performance.

Keywords: Low wind. Pollutant dispersion. Analytical solution. Advection-difusion equation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Esquema ilustrativo representando a dispersão de poluentes.	26
Figura 2	Esquema ilustrativo de um modelo de dispersão considerando segmentos de pluma	33
Figura 3	Gráfico de dispersão das concentrações observadas (linha verde), preditas com presença de meandro (linha preta) e preditas sem a presença de meandro (linha azul) para o arco de 100 <i>m</i> do teste 11 do experimento de INEL.	48
Figura 4	Gráficos de dispersão das concentrações observadas (linha verde) e preditas (linha preta) para o teste 4 do experimento de INEL para os arcos de 100, 200 e 400 <i>m</i> respectivamente.	50
Figura 5	Gráficos de dispersão das concentrações observadas (linha verde) e preditas (linha preta) para o teste 5 do experimento de INEL para os arcos de 100, 200 e 400 <i>m</i> respectivamente.	51
Figura 6	Gráficos de dispersão das concentrações observadas (linha verde) e preditas (linha preta) para o teste 7 do experimento de INEL para os arcos de 100, 200 e 400 <i>m</i> respectivamente.	52
Figura 7	Gráficos de dispersão das concentrações observadas (linha verde) e preditas (linha preta) para o teste 8 do experimento de INEL para os arcos de 100, 200 e 400 <i>m</i> respectivamente.	53
Figura 8	Gráficos de dispersão das concentrações observadas (linha verde) e preditas (linha preta) para o teste 9 do experimento de INEL para os arcos de 100, 200 e 400 <i>m</i> respectivamente.	54
Figura 9	Gráficos de dispersão das concentrações observadas (linha verde) e preditas (linha preta) para o teste 10 do experimento de INEL para os arcos de 100, 200 e 400 <i>m</i> respectivamente.	55
Figura 10	Gráficos de dispersão das concentrações observadas (linha verde) e preditas (linha preta) para o teste 11 do experimento de INEL para os arcos de 100, 200 e 400 <i>m</i> respectivamente.	56
Figura 11	Gráficos de dispersão das concentrações observadas (linha verde) e preditas (linha preta) para o teste 12 do experimento de INEL para os arcos de 100, 200 e 400 <i>m</i> respectivamente.	57
Figura 12	Gráficos de dispersão das concentrações observadas (linha verde) e preditas (linha preta) para o teste 13 do experimento de INEL para os arcos de 100, 200 e 400 <i>m</i> respectivamente.	58

Figura 13	Gráficos de dispersão das concentrações observadas (linha verde) e preditas (linha preta) para o teste 14 do experimento de INEL para os arcos de 100, 200 e 400 <i>m</i> respectivamente.	59
-----------	--	----

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Valores reportados pelo experimento de INEL para velocidade média do vento (u) e desvio padrão do vento em relação a direção principal (σ_θ).	38
Tabela 2	Valores de p e q calculados para o experimento de INEL segundo Stefanello (2017).	39
Tabela 3	Valores de m e T_* calculados para o experimento de INEL segundo Stefanello (2017).	39
Tabela 4	Diferentes simulações utilizadas no trabalho.	41
Tabela 5	Concentrações observadas experimentalmente (C_o) e preditas pelo modelo proposto (C_{p1} , C_{p2} e C_{p3}) para os arcos de 100, 200 e 300 m do experimento de INEL. As concentrações de poluente são normalizadas pela taxa de emissão (cu/Q).	42
Tabela 6	Concentrações médias, desvio padrão, máximos e mínimos preditos para cada simulação considerando a distância de 100 m da fonte do experimento de INEL. As concentrações de poluente são normalizadas pela taxa de emissão (cu/Q).	44
Tabela 7	Concentrações médias, desvio padrão, máximos e mínimos preditos para cada simulação considerando a distância de 200 m da fonte do experimento de INEL. As concentrações de poluente são normalizadas pela taxa de emissão (cu/Q).	45
Tabela 8	Concentrações médias, desvio padrão, máximos e mínimos preditos para cada simulação considerando a distância de 400 m da fonte do experimento de INEL. As concentrações de poluente são normalizadas pela taxa de emissão (cu/Q).	46
Tabela 9	Avaliação estatística do modelo.	47
Tabela 10	Avaliação estatística do modelo e comparação com a literatura . . .	49

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

Caracteres arábicos

C	concentração média de um poluente passivo (g/m^3)
CLP	Camada Limite Planetária
F (y)	concentração média do poluente sobre o eixo y (g/m^3)
Vg	velocidade de deposição do poluente (m/s)
h	altura da camada limite (m)
H _s	altura da fonte (m)
k	constante de Von-Kármán
K _x	coeficiente de difusão turbulenta na direção x (m^2/s)
K _y	coeficiente de difusão turbulenta na direção y (m^2/s)
K _z	coeficiente de difusão turbulenta na direção z (m^2/s)
L	comprimento de Monin-Obukhov (m)
Q	taxa de emissão da fonte (g/s)
t	tempo (s)
u	velocidade média do vento na direção x (m/s)
v	velocidade média do vento na direção y (m/s)
u*	velocidade de fricção (m/s)
u'	flutuação na velocidade do vento orientado na direção x (m/s)
v'	flutuação na velocidade do vento orientado na direção y (m/s)
w'	parte turbulenta do vento médio na direção z
x	distância longitudinal da fonte (m)
z	altura acima da superfície (m)
z ₀	comprimento de rugosidade aerodinâmico (m)

Caracteres gregos

α	componente da turbulência na direção x
----------	--

β	componente da turbulência na direção y
γ	componente da turbulência na direção z
δ	função delta de Dirac
η	autovalor do problema em x
κ	autovalor do problema em y
λ	autovalor do problema em z
τ	tempo de liberação da pluma (s)
ψ_{κ}	autofunção do problema
φ_{λ}	autofunção do problema
σ_{θ}	desvio padrão da direção do vento

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	16
2.1	Solução analítica da equação de advecção-difusão	16
2.2	Dispersão de poluentes atmosféricos em condições de vento fraco	19
3	MEANDRO DO VENTO	22
3.1	Funções de autocorrelação	24
4	O MODELO FÍSICO MATEMÁTICO	25
4.1	Solução da equação de advecção-difusão para modelo proposto	26
4.2	Determinação da solução para as condições inicial e de fonte	28
4.3	Solução considerando uma fonte contínua	30
4.4	Solução de Green	31
4.4.1	Solução fonte de Heaviside	32
4.5	Modelo meteorológico com condições variáveis	32
5	PARAMETRIZAÇÃO DA TURBULÊNCIA	34
5.1	Coefficientes de difusão	35
5.2	Perfil de vento	35
5.3	Flutuações no vento	36
6	DADOS EXPERIMENTAIS	37
6.1	Experimento de INEL	37
6.2	Valores de p , q , T_* e m calculados para o experimento de INEL	38
6.3	Índices Estatísticos	39
7	RESULTADOS	41
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	60
	REFERÊNCIAS	61

1 INTRODUÇÃO

A preocupação acerca de problemas relacionados à poluição atmosférica é constante e crescente nas sociedades atuais. A intensificação das emissões de poluentes devido a fatores como o aumento da geração de energia elétrica e o aumento de emissões veiculares e industriais comprometem a qualidade do ar, causando consequências diretas na saúde das populações expostas e no equilíbrio dos ecossistemas.

Segundo a Organização Mundial da Saúde (OMS, 2016) a exposição a poluição do ar em ambientes externos foi responsável por 4,2 milhões de mortes mundialmente. No Brasil, o último levantamento da OMS registrou um total de mais de 50 mil mortes por ano, número que representa um aumento de 14% no total de mortes em relação aos últimos 10 anos. Essas estatísticas, somadas ao fato da poluição ambiental ser a quinta maior causa de óbitos mundialmente e a primeira entre os fatores ambientais torna irrefutável a importância da pesquisa nessa área.

Quanto a sua origem a poluição atmosférica pode ser classificada como natural (causadas por erupções vulcânicas ou erosão eólica, por exemplo) ou antropogênica (de origem urbana, industrial ou agrícola) (ARYA, 1995). Embora possa ser considerada poluição atmosférica qualquer aumento de alguma substância presente na atmosfera acima do seu nível de ocorrência natural, geralmente a atenção é voltada a substâncias que causam efeitos indesejados, que variam desde odores até problemas de saúde que podem ser letais aos seres humanos. Essas substâncias têm seu aumento comumente relacionado a atividades antrópicas e cada vez mais sua emissão tem sido controlada por legislações com diferentes níveis de rigidez ao redor do mundo.

Outra forma de classificação para a poluição atmosférica leva em consideração a sua escala de abrangência, dividindo-a em três categorias: tipo I ou de microescala, tipo II ou de mesoescala e tipo III ou de macroescala, (ARYA, 1995). Os fenômenos atmosféricos que ocorrem na extremidade inferior do espectro da atmosfera são caracterizados como de microescala e são estudados pelo ramo da meteorologia chamado micrometeorologia. O escopo da micrometeorologia se limita aos fenômenos que se originam e são predominantemente causados pela interação entre a camada

mais baixa da atmosfera, conhecida como Camada Limite Planetária (CLP), e a superfície da Terra (ARYA, 2001). Os eventos que fazem parte desse estudo são eventos de microescala.

O movimento e as distribuições dos poluentes atmosféricos emitidos na CLP são determinados por processos de dispersão, que precisam ser estudados e compreendidos, visando a redução de danos. Nesse contexto, o monitoramento da dispersão de poluentes é essencial para o gerenciamento ambiental, especialmente com ênfase no controle da qualidade do ar. Conseqüentemente, esse tema tem atraído pesquisas com objetivos diversos. Algumas dessas pesquisas estão focadas nos impactos ambientais e riscos para a saúde, enquanto outras trabalham avaliando diversos aspectos dos modelos, como por exemplo, condições meteorológicas, mecanismos de dispersão e remoção e influência topográfica (VERMA; SRIVASTAVA; BHANDARI, 2015).

O monitoramento e mensuração da concentração de espécies químicas nem sempre é fácil de ser obtido, devido aos custos e dificuldades operacionais envolvidas nos processos experimentais. Invariavelmente, modelos matemáticos são usados na maioria desses estudos. Técnicas de simulação podem ser aplicadas em todos os aspectos de poluição do ar, isto é, avaliação de taxas de emissão, descrição de fenômenos que ocorrem na atmosfera e quantificação de fenômenos adversos que ocorrem em uma determinada região (ZANNETTI, 1990).

Esses modelos matemáticos, denominados modelos de dispersão, podem ser classificados como Eulerianos e Lagrangeanos. A aproximação Euleriana considera o movimento do fluido relacionado a um sistema de referência fixo no espaço enquanto nos modelos Lagrangeanos é utilizado um sistema de referência que segue o movimento da atmosfera (MOREIRA; TIRABASSI, 2004).

Além da classificação quanto ao sistema de referência, os modelos matemáticos também podem ser classificados como determinísticos, estocásticos e determinísticos-estocásticos. Os modelos determinísticos não incluem nenhuma variável aleatória, sendo assim, possuem uma solução exata, em geral obtida analiticamente. Entretanto, a dispersão de poluentes é um processo estocástico que varia de forma imprevisível durante um intervalo de tempo (FURTADO; BODMANN; VILHENA, 2016). Como são inseridas variáveis aleatórias, os resultados de cada evento são também aleatórios. Esse tipo de modelo é considerado uma melhor representação da realidade por incluir variáveis que descrevem as flutuações na velocidade do vento, presentes no fenômeno físico.

Na estimativa do campo de concentração de poluentes na baixa atmosfera, emprega-se, normalmente, a equação de advecção-difusão, que é obtida a partir da parametrização dos fluxos turbulentos na equação da continuidade, sendo que os modelos Eulerianos de dispersão têm como característica a solução desta equação. Sob certas condições, pode-se obter expressões para o campo de concentração que se-

jam funções da emissão de poluentes, de variáveis meteorológicas e de parâmetros de dispersão da pluma (PASQUILL; SMITH, 1983). Essa equação, é considerada determinística, pois seus termos contêm toda a informação da complexidade da turbulência que é altamente irregular e não pode ser descrita com precisão por um modelo determinístico (LOECK, 2014).

Na literatura encontram-se disponíveis inúmeros trabalhos que concentram-se no estudo da dinâmica da CLP, em que são considerados diversos modelos para fechamento das equações dos fluxos turbulentos tais como: modelos de primeira ordem ou teoria K, segunda ordem ou superior. A maneira mais utilizada para solucionar o problema de fechamento da equação de advecção-difusão é baseada na hipótese de transporte por gradiente (ou teoria K) que, em analogia com a difusão molecular, assume que o fluxo turbulento de concentração é proporcional à magnitude do gradiente de concentração média.

Os modelos convencionais clássicos, como o modelo de pluma Gaussiana ou modelos baseados na teoria K, são conhecidos por fornecerem resultados razoáveis sobre a maioria dos modelos meteorológicos, exceto em condições de vento fraco ($v < 2$ m/s). Assim, torna-se importante estudar a dispersão de poluentes em tais condições (GOYAL; KRISHNA, 2002).

Dentro desse contexto, o objetivo desse trabalho foi elaborar um modelo de dispersão através de uma solução analítica para a equação de advecção-difusão transiente tridimensional utilizando a técnica de separação de variáveis juntamente com a técnica GILTT. O modelo desenvolvido apresenta parâmetros difusivos nas direções x , y e z , que são importantes para a investigação da dispersão de poluentes em condições de vento fraco. São inseridas flutuações nas velocidades longitudinal e transversal do vento, tornando as parametrizações estocásticas.

Esta dissertação encontra-se estruturada em oito capítulos. O capítulo 2 é dedicado a uma revisão bibliográfica com ênfase em resoluções analíticas da equação de advecção-difusão e em trabalhos com aplicações em condições de vento fraco, enquanto o capítulo 3 foca em trabalhos que consideram o meandro do vento. No capítulo 4 é apresentado o modelo matemático desenvolvido e sua resolução. O capítulo 5 é dedicado as parametrizações utilizadas no trabalho e o capítulo 6 aos dados experimentais usados para validar o modelo. No capítulo 7 são apresentados os resultados obtidos. Por fim, o capítulo 8 contém algumas considerações sobre o que foi apresentado nessa dissertação.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Solução analítica da equação de advecção-difusão

Um esforço contínuo e progressivo tem sido feito ao longo dos anos para se obter soluções analíticas para a equação de advecção-difusão. A solução dessa equação, oriunda de abordagens analíticas, é fundamental para entender e descrever os fenômenos físicos envolvidos na dispersão de poluentes, visto que considera explicitamente todos os parâmetros envolvidos no problema. Assim sendo, a influência dentro dessa solução, de cada um dos parâmetros pode ser investigada (BUSKE et al. 2012).

A primeira solução analítica da equação de advecção-difusão, a solução Gaussiana, foi proposta por Fick em meados do século XIX. O modelo de pluma Gaussiana, derivado de tal solução continua sendo bastante utilizado em estudos de poluição atmosférica. Tal modelo é composto por uma única expressão analítica que descreve um campo de concentração tridimensional gerado por uma fonte pontual em condições meteorológicas e de emissão estacionárias. Usa-se de parâmetros de difusão empíricos, de modo a forçar a solução Gaussiana a se aproximar do comportamento da concentração de poluentes. O coeficiente de difusão e a velocidade do vento são constantes com a altura e as condições de contorno correspondem ao fluxo nulo na extremidade inferior da CLP.

Roberts (1923) apresentou uma solução bidimensional para a equação de advecção-difusão, considerando a fonte ao nível do solo, na qual a velocidade do vento e o coeficiente de difusão vertical seguem uma lei de potência dada por:

$$u = u_1 \left(\frac{z}{h} \right)^m ; K = K_z \left(\frac{z}{h} \right)^n \quad (1)$$

onde h é altura na qual os parâmetros u e k são avaliados e m e n variam de 0 a 1. Utilizando o mesmo perfil de vento, Rounds (1955) obteve uma solução bidimensional para fontes elevadas, porém apenas para coeficientes difusivos lineares.

Uma nova solução para a equação bidimensional foi proposta por Smith (1957a) utilizando a lei de potência para determinar u e K_z , com os expoentes seguindo a lei conjugada de Smith ($\alpha = 1 - \beta$). Logo após, Smith (1957b) publicou uma nova solução

com u constante, entretanto, o K_z utilizado foi:

$$K = K_0 z^\alpha (h - z)^\beta \quad (2)$$

onde K_0 é uma constante e α e β variam entre 0 e 1, conforme altura da CLP.

Scriven e Fisher (1975) propuseram uma solução para transporte de poluentes à longas distâncias, largamente utilizada no Reino Unido. Nessa proposta, o vento médio é constante e o coeficiente de difusão foi determinado por:

$$K_z = z \text{ para } 0 \leq z \leq z_t \text{ e } K_z = K_z(z_t) \text{ para } z_t \leq z \leq h \quad (3)$$

onde z_t é uma altura pré determinada, geralmente coincidente com a altura da camada limite. Esta solução admite condições de contorno não nulas, do tipo:

$$K_z \frac{\partial C}{\partial Z} = V_g C \quad (4)$$

em que V_g é a velocidade de deposição do poluente analisado (m/s).

Yeh e Huang (1975) e Berlyand (1975) resolveram a equação de advecção-difusão bidimensional considerando fontes elevadas com u e K_z dados por perfis de potência e condição de contorno $K_z \frac{\partial C}{\partial Z} = 0$ em $z = \infty$. As soluções obtidas foram na forma de funções de Green. Demuth (1978) apresentou uma solução em termos de funções de Bessel, considerando uma camada verticalmente limitada.

Ulden (1978) utilizou a teoria da similaridade de Monin-Obukhov para obter uma solução para a difusão vertical a partir de fontes contínuas e próximas ao solo, com o vento e o coeficiente de difusão seguindo perfis de similaridade. Ele formulou um modelo para fontes elevadas, mas aplicável a fontes dentro da camada limite superficial. Nieuwstadt (1980) apresentou uma solução para um caso particular da solução de Smith (1975b). Posteriormente, Nieuwstadt e Haan (1981) aprimoraram tal solução para um caso onde há aumento da altura da camada limite.

Todas as soluções citadas anteriormente são puramente analíticas. Nas últimas décadas surgiram outros modelos analíticos ou semi-analíticos não Gaussianos e com coeficientes de difusão arbitrários. Dentre estes, destacam-se principalmente: ADMM (*Advection Diffusion Multilayer Model*), GITT (*Generalized Integral Transform Technique*), GIADMT (*Generalized Integral Advection Diffusion Multilayer Technique*), GILTT (*Generalized Integral Laplace Transform Technique*) e 3D-GILTT (*Three-dimensional Generalized Integral Laplace Transform Technique*).

No método ADMM a equação de advecção-difusão é resolvida semi analiticamente. O método consiste na divisão da CLP em diferentes camadas ou subcamadas. A solução da equação, em cada uma das camadas, é obtida pela técnica da transformada de Laplace com inversão numérica, considerando ventos e coeficientes de difusão turbulenta constantes com a altura da camada. A divisão em subcamadas permite

que um valor médio da velocidade do vento e do coeficiente de difusão turbulenta seja utilizado em cada uma delas (MOREIRA et al., 2006). Dessa forma, o problema original com coeficientes variáveis passa a ter coeficientes constantes em cada camada, de acordo com a continuidade de concentração e o fluxo de contaminante nas interfaces. Esse método é amplamente utilizado na dispersão de poluentes na atmosfera. Além do trabalho de Moreira et al. (2006) pode-se citar: Moura, Vilhena e Degrazia (1995), Vilhena et al. (1998), Degrazia, Moreira e Vilhena (2001), Neto (2003), Costa, Moreira e Vilhena (2004), Moreira e Tirabassi (2004), Moreira, Carvalho e Tirabassi (2005), Moreira, Neto e Carvalho (2005), Moreira et al. (2005) e Buligon, Moreira e Vilhena (2006).

O método GITT pode ser descrito como uma transformação integral associada a uma expansão em série, usado para resolver equações diferenciais parciais. Suas principais etapas incluem a elaboração do problema auxiliar de Sturm-Liouville associado ao problema original, a determinação de uma série através da técnica de transformada integral usando como base as autofunções que constituem a solução do problema de Sturm-Liouville e a substituição dessa série no problema original. Esse procedimento resulta em uma equação diferencial ordinária, que é resolvida numericamente (COSTA et al., 2006). Esse método é utilizado nos trabalhos de Cataldi et al. (2000), Ribeiro et al. (2000), Storch e Pimentel (2003), Velloso et al. (2004), Cotta e Barros (2007) e Guerrero et al. (2012).

Através da combinação dos métodos ADMM e GITT (COSTA et al. 2006; VILHENA et al. 2008, COSTA et al. 2012; COSTA et al. 2012), obtem-se o método conhecido como GIADMT. Ou seja, o problema tridimensional é transformado em um problema bidimensional utilizando a técnica GITT e é então resolvido pelo método ADMM.

Proposto por Wortmann et al. (2005) o método GILTT é uma aplicação da técnica GITT utilizado em problemas de poluição atmosférica. O método compreende os mesmos passos anteriormente citados para a GITT, porém o sistema de equações diferenciais ordinárias resultante é resolvido analiticamente por transformada de Laplace. Esse método não utiliza de nenhuma aproximação numérica ao longo da derivação da solução, exceto pelo erro de truncamento da solução em série para fins de cálculos numéricos. Nesse sentido, pode ser considerado um método puramente analítico e tem sido utilizado em diversos trabalhos presentes na literatura. Alguns desses trabalhos utilizam a GILTT para resolução de problemas bidimensionais (WORTMANN et al. 2005; MOREIRA et al. 2006; BUSKE et al. 2007a; BUSKE et al. 2007; TIRABASSI et al. 2008 MOREIRA et al. 2009).

Por fim, o método 3D-GILTT, que surgiu em 2009, é utilizado para a resolução de uma classe abrangente de problemas de dispersão de poluentes na atmosfera, os quais consideram também o coeficiente de dispersão dependente do tempo. Esse método é utilizado por: Buske et al. (2009), Buske, Moreira e Vilhena (2009), Buske

et al. (2011), Buske, Vilhena M. T. Bodmann e Tirabassi (2012) Buske et al. (2012), Vilhena et al. (2012) e Silveira et al. (2018).

2.2 Dispersão de poluentes atmosféricos em condições de vento fraco

Ventos com baixas velocidade estão geralmente associados com altas concentrações de poluentes na atmosfera (OETTL et. al, 2005). Embora essa seja uma das condições mais críticas no estudo da dispersão de poluentes, não há um consenso quanto a definição de ventos fracos. Smith (1992) os definiu como aqueles em que a velocidade média do vento (u) é igual ou menor a raiz quadrada da velocidade turbulenta horizontal. A partir dessa definição, o autor propôs valores para u com base nas classes de estabilidade atmosférica. Para condições estáveis e neutras a velocidade do vento é considerada baixa quando seus limites máximos variam de $0,35 \text{ m/s}$ à $0,5 \text{ m/s}$ e para condições instáveis esses valores vão de $0,8 \text{ m/s}$ à $1,2 \text{ m/s}$.

Apesar de não haver uma definição precisa, frequentemente são considerados ventos fracos aqueles com velocidade inferior a 2 m/s . Isto se dá devido ao fato dessa ser a velocidade abaixo da qual os dados meteorológicos padrão se tornam imprecisos e a aplicabilidade dos modelos de dispersão precisa ser considerada mais cuidadosamente (LINES; DEAVES 1997).

Entre diversas razões, pode-se citar duas cruciais para o estudo da dispersão de poluentes em condições de ventos fracos. A primeira delas é que a ocorrência dos mesmos pode ser considerada frequente em todos os lugares do globo terrestre, exceto nas regiões costeiras. A frequência de ocorrência nos trópicos é maior. E a segunda, é que em tais condições a dispersão de poluentes atmosféricos é irregular e indefinida o que a torna crucial em episódios de poluição. Os modelos matemáticos possuem limitações para prever as concentrações no nível do solo nesses casos (SHARAN; YADAV 1998). Por exemplo, nos modelos de pluma Gaussiana, a concentração é inversamente proporcional a velocidade do vento, fornecendo um resultado superestimado de concentração conforme a velocidade se aproxima de zero.

Assim sendo, diversos autores pesquisam modelos que possam representar de forma mais apropriada esses fenômenos (CIRILLO; POLI 1992; SHARAN; YADAV 1998; GOYAL; KRISHNA 2002; OETTL et al. 2005; SHARAN; YADAV; MODANI 2002; BUSKE et al. 2007b; MOREIRA et al. 2009; QIAN; VENKATRAM 2011).

Cirillo e Poli (1992) testaram quatro modelos semi-empíricos validando-os através de dados experimentais. Todos os modelos foram baseados em modelos Gaussianos, distinguindo-se pela proposta dos diferentes tipos de parâmetros de dispersão. Os dados utilizados em cada modelo foram a classe de estabilidade, velocidade média do vento e desvio padrão do vento na direção horizontal durante o período de tempo

considerado. Os resultados obtidos mostraram que nos casos onde a velocidade do vento era baixa e a dispersão lateral da pluma era grande, o desempenho dos modelos foi melhor.

Sharan e Yadav (1998) apresentaram uma solução analítica para a equação tridimensional da advecção-difusão, incluindo a difusão longitudinal, aplicada a uma fonte fixa com altura próxima à superfície em condições atmosféricas estáveis e de vento fraco. Os vórtices difusivos foram parametrizados em termos da distância da fonte e do desvio padrão do vento em relação a direção principal. Em 2002, Sharan, Yadav e Modani, usaram desse modelo para efetuar testes de dispersão de poluentes em condições atmosféricas convectivas, durante o inverno. A parametrização da turbulência utilizada nesse caso baseou-se na distância da fonte e na velocidade de fricção longitudinal (u^*). A nova parametrização melhorou os resultados obtidos anteriormente.

Goyal e Krishna (2002) realizaram um estudo em condições convectivas, com ventos moderado a fraco, testando três diferentes modelos. Os modelos testados foram o modelo de pluma Gaussiana e dois modelos desenvolvidos para condições de vento fraco. O primeiro modelo para análise de vento fraco considera a emissão em forma de *puffs* com uma distribuição Gaussiana radial para cada *puff* e não considera, portanto, flutuações na concentração. Já o segundo modelo, considera o material emitido na forma de uma série de *puffs* carregados da fonte até o receptor por uma velocidade (u, v) . Para este experimento, os autores concluíram que o modelo de pluma Gaussiana fornece resultados superestimados, enquanto o segundo modelo de vento fraco os subestima. Os autores recomendam dessa forma o primeiro modelo de vento fraco para tais condições.

Buske et al. (2007b), simularam a dispersão de poluentes em condições de vento fraco considerando a CLP estática e convectiva. Para a solução da equação de advecção-difusão, os autores utilizaram a técnica GILTTG. Uma das conclusões apresentadas é de que sob condições de vento fraco deve ser considerada a difusão longitudinal e os coeficientes de difusão dependentes da distância da fonte.

Qian e Venkatram (2011) revisaram diversos estudos considerados mais apropriados para a dispersão de partículas em condições de vento fraco do que a aproximação Gaussiana. Segundo os autores, a principal constatação dos mesmos é de que estimativas realísticas da concentração de poluentes sob condições de vento fraco podem ser obtidas desde que os parâmetros meteorológicos sejam medidos em intervalos de tempo significativamente menores do que aqueles utilizados para a medição das concentrações. Porém, na maior parte das aplicações práticas, os dados meteorológicos disponíveis não possuem tal precisão, sendo usual realizar medições em intervalos de uma hora.

Sharan, Singh e Yadav (1996) simularam casos de dispersão de poluentes para ventos fracos em condições meteorológicas não estacionárias. Para tal, combinaram

o método de segmento de pluma com o método de *puffs* Gaussiano.

Oettl et al. (2005) realizaram estudos de dispersão em condições de vento fraco, iniciando com a coleta de dados a 10 metros do nível do solo, no período de um ano. A região onde foi realizado o experimento apresentou vento médio com velocidade em torno de 0,8 m/s durante 70% do ano. Através desses dados, foi observado que a função de autocorrelação Euleriana computada não apresenta um comportamento exponencial, conforme esperado. Para todas as classes de estabilidade atmosférica, a mesma apresentou um lóbulo negativo em condições de vento fraco. Esse comportamento é uma evidência do efeito de meandro em baixas frequências.

3 MEANDRO DO VENTO

Em condições de vento fraco, sabe-se que há um aumento da dispersão lateral resultante do fenômeno de meandro do vento. Esse fenômeno, é identificado através das funções de autocorrelação, onde surgem lóbulos negativos. Não há um entendimento físico completo que explique sua origem. No entanto, é possível encontrar alguns trabalhos cujo objetivo foi estudar o meandro do vento horizontal e incluí-lo em modelos matemáticos, os quais fornecem importantes informações sobre suas características e sua influência na dispersão de substâncias na atmosfera. No processo de formação de meandros, os poluentes são dispersos em ângulos variados. Tal característica se soma ao problema de definir a direção da velocidade média dos ventos nesses casos, dificultando a simulação (ANFOSSI et al. 2006).

Com a diminuição da velocidade do vento há um aumento expressivo na média horária do desvio padrão do vento (MORTARINI et al., 2016). Conseqüentemente, é difícil definir uma direção precisa para a pluma e dados experimentais mostram que pode ocorrer uma distribuição em 360° ao nível do solo, em condições instáveis ou estáveis (SAGENDORF; DICKSON, 1974). Nessas condições, é mais evidente o efeito do meandro no comportamento da pluma.

De acordo com Anfossi et al. (2006), em condições de vento fraco há uma diminuição no limite das variações horizontais do vento. Os autores observaram que a presença do meandro causa uma alteração importante na função Euleriana de autocorrelação do vento horizontal, que passa a exibir um comportamento oscilatório, com a presença de lóbulos negativos. O mesmo comportamento foi observado no trabalho de Oettl et al. (2005).

De acordo com Vickers e Marht (2003), o meandro resulta de uma sobreposição de diferentes movimentos, dificultando o entendimento de sua origem. Entretanto, os autores concluíram através de um modelo que avalia a trajetória de uma partícula no tempo e no espaço que o meandro, e não a turbulência, é responsável pela dispersão da partícula nos primeiros instantes após sua emissão.

Recentemente Mortarini et al. (2016) investigaram a ocorrência de meandro em condições de vento fraco através da análise da função Euleriana de autocorrelação

das velocidades horizontais do vento e da temperatura. Houve registros de meandro durante todas as condições de estabilidade, porém a maior parte das ocorrências foram registradas no período noturno. Novamente, entendeu-se que não há relação entre meandro e estabilidade atmosférica. Todavia, o desenvolvimento de meandros sofre influência da presença de prédios e da velocidade do vento. Valores altos para o desvio padrão na direção principal do vento são típicos em condições de vento fraco e não devem ser usados para avaliar a presença de meandros. Os autores sugerem como parâmetro para tal determinação a razão entre os desvios padrão das componentes verticais e horizontais da velocidade do vento, a qual é baixa em casos de formação de meandro.

As constatações apresentadas anteriormente evidenciam a importância do meandro nos processos de dispersão atmosférica. Além destes, pode-se citar outros trabalhos que abordaram esse fenômeno como os apresentados por: Carvalho et al. (2006), Anfossi et al. (2006), Goulart et al. (2007), e Timm et al. (2009). Todos os autores citados realizaram pesquisas através de modelos Lagrangeanos.

Uma nova expressão para os parâmetros que controlam as frequências de oscilação do meandro do vento foi proposta por Carvalho et al. (2006). Para estimar esses parâmetros foram utilizadas as expressões clássicas de autocorrelação para meandros, a teoria estatística da difusão turbulenta e a teoria da similaridade para a camada limite atmosférica. A nova parametrização foi aplicada em um modelo estocástico Lagrangeano chamado solução de *Langevin* iterativa para ventos fracos.

Ao estudarem a influência da turbulência no fenômeno de meandro do vento, Goulart et al. (2007) mostraram, com base nas equações de Navier-Stokes tridimensionais, que quando o fluxo turbulento pode ser negligenciado o resultado obtido é uma solução assintótica que descreve o não decaimento da oscilação do vento horizontal.

Anfossi et al. (2006) estudaram o efeito do meandro na dispersão de poluentes utilizando os modelos LAMBDA e GRAL. Para isso, os autores utilizaram um sistema de duas equações de *Langevin* acopladas, que representavam explicitamente o efeito de meandro.

O modelo LAMBDA também foi utilizado por Timm et al. (2009) para simular a dispersão e o transporte de contaminantes, sob condições estáveis, com velocidade de vento fraco. O trabalho testa uma nova parametrização para os parâmetros que representam as frequências associadas ao fenômeno de meandro do vento. A vantagem do modelo proposto por Timm et al. (2009) em relação ao LAMBDA é que este pode ser aplicado, na CLP, em casos de turbulência bem desenvolvida mas também em casos de turbulência associada ao efeito de meandro do vento.

Tratando-se de modelos puramente analíticos, pode-se citar o trabalho de Silveira et al. (2018). Os autores estudaram a dispersão de poluentes em condições de vento fraco resolvendo a equação da advecção-difusão pelo método 3D-GILTT. Para des-

crever o efeito dispersivo resultante do meandro do vento os autores utilizaram um sistema de modelos computacionais composto pelo WRF (*Weather Research and Forecasting*) e pelo LES-PALM (*Large-Eddy Simulation-Parallelized*). O modelo de meandro horizontal gerado foi utilizado como condição inicial para a aplicação do método 3D-GILTT.

3.1 Funções de autocorrelação

Uma função de autocorrelação no tempo descreve a relação de uma variável em qualquer instante de tempo com ela mesma, em um instante de tempo anterior ou posterior. Uma função de autocorrelação no espaço, por sua vez, é definida de forma análoga (ARYA, 1995). Conforme mencionado, de acordo com o trabalho de Anfossi et al. (2006), as funções de autocorrelação para as componentes horizontais do vento em casos de vento fraco, apresentam oscilações com presença de lóbulos negativos (meandros). Essas funções, são representadas pela expressão a seguir:

$$R(\tau) = e^{-p\tau} \cos(q\tau) \quad (5)$$

Para estimativa de p e q presentes na equação (5), Frenkiel (1953) propôs as seguintes relações:

$$p = \frac{1}{(m^2 + 1)T} \quad (6)$$

$$q = \frac{m}{(m^2 + 1)T} \quad (7)$$

As equações (6) e (7) apresentam dois parâmetros desconhecidos: T e m . De acordo com o trabalho de Carvalho et al. (2006), combinando as equações (5), (6) e (7) o período do meandro do vento pode ser definido como:

$$T_* = \frac{2\pi(m^2 + 1)T}{m} \quad (8)$$

Essa definição, possibilita encontrar m através da expressão:

$$m = \frac{T_* + \sqrt{T_*^2 - 16\pi^2 T^2}}{4} \quad (9)$$

Dados experimentais mostram que o valor do período do meandro representado por T_* é aproximadamente 2000s independente da classe de estabilidade da atmosfera. O parâmetro m depende do período T_* e da escala de tempo necessária para que a turbulência se desenvolva totalmente (T).

A parametrização de T para condições estáveis da CLP é dada por (CARVALHO et al., 2006):

$$T = 0,064 \frac{h}{u_*} \quad (10)$$

onde u_* é a velocidade de fricção do vento e h é a altura da CLP durante condições estáveis.

4 O MODELO FÍSICO MATEMÁTICO

A concentração das substâncias poluentes na atmosfera, em geral, é governada por dois fenômenos principais: o transporte (advecção) e a difusão. O vento médio, responsável pelo transporte na horizontal, é geralmente obtido através de um campo de vento que por sua vez é determinado por modelos matemáticos meteorológicos. A difusão, resulta da interação do campo de vento com o solo e do aquecimento e resfriamento do mesmo. Como resultado, há um movimento caótico denominado turbulência atmosférica que é limitado pela CLP (MOREIRA et al. 2008). Por esses motivos, a equação de advecção-difusão, baseada na lei da conservação da massa, é fortemente utilizada na modelagem do transporte e dispersão de poluentes atmosféricos.

Considera-se um caso de dispersão de poluentes na atmosfera, no qual uma fonte aérea libera uma substância química. Esta é abandonada sem empuxo, a partir de uma torre com altura H_s que emite tal poluente com uma intensidade Q conforme ilustrado na Figura 1.

Dessa forma, a equação transiente tridimensional, advectiva nas direções horizontais e difusiva na direção vertical, que descreve a concentração C de um poluente na atmosfera, emitido por uma fonte Q , em um tempo inicial $t = 0$, é escrita como:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (11)$$

onde $C(t, x, y, z)$ é a função concentração (g/m^3), K_z (m^2/s) é o coeficiente de difusão turbulenta e u e v são as velocidades médias (m/s) nas direções longitudinal e transversal, respectivamente.

A equação (11) considera o processo difusivo apenas na direção z . Dessa forma, ela pode ser resolvida analiticamente através dos métodos propostos. Porém, a difusão nas direção x e y é importante na dispersão atmosférica e os coeficientes difusivos k_x e K_y serão inseridos no modelo através de aproximações realizadas durante a resolução e que são apresentadas no decorrer desse trabalho.

Inferindo que não há fluxo de poluentes no topo da CLP (h) e ao nível do solo (ou ao nível da rugosidade z_0) a equação (11) está sujeita às seguintes condições de

contorno:

$$K_z \frac{\partial C}{\partial z} = 0 \quad \text{em } z = h \text{ e } z = z_0 \quad (12)$$

Além disso, admitindo que a concentração é zero no instante inicial $t = 0$ (pois ainda não houve emissão), a equação (5) também está sujeita às condições a seguir, em $t = 0$ (condição inicial) e $x = 0$ (condição de fonte), respectivamente:

$$uC(0, x, y, z) = Q(0)\delta(x)F(y)\delta(z - H_s) \quad (13)$$

$$uC(t, 0, y, z) = Q(t)F(y)\delta(z - H_s) \quad (14)$$

nas quais $H_s(m)$ é a altura e $Q (g/m^2s)$ é a intensidade da fonte e $F(y)$ é a concentração média do poluente sobre o eixo y .



Figura 1: Esquema ilustrativo representando a dispersão de poluentes.

4.1 Solução da equação de advecção-difusão para modelo proposto

Para obter uma solução analítica para o modelo proposto, utilizou-se a técnica de separação de variáveis. Inicialmente, u e v foram considerados constantes e $K_z = K_z(z)$. Essas simplificações permitem a resolução por tal técnica, resultando em:

$$\frac{d}{dt} T_\nu = -\nu T_\nu \quad (15)$$

$$u \frac{d}{dx} X_\eta = \eta X_\eta \quad (16)$$

$$v \frac{d}{dy} Y_\kappa = -\kappa Y_\kappa \quad (17)$$

$$\frac{d}{dz} \left(K_z \frac{d}{dz} Z \right) = [\eta - (\kappa + \nu)] Z \quad (18)$$

Os autovalores presentes nas equações acima podem ser reformulados de forma mais conveniente, onde:

$$\kappa = \lambda - \nu \quad (19)$$

$$\nu = -\kappa + \lambda \quad (20)$$

$$\eta = \alpha + \lambda \quad \text{logo} \quad \eta - (\kappa + \nu) = \alpha \quad (21)$$

que substituídos no sistema de equações formado por (15), (16), (17) e (18), possibilita reescrevê-lo como:

$$\frac{d}{dt} T_{\kappa\lambda} = (\kappa - \lambda) T_{\kappa\lambda} \quad (22)$$

$$u \frac{d}{dx} X_{\alpha\lambda} = (\alpha + \lambda) X_{\alpha\lambda} \quad (23)$$

$$v \frac{d}{dy} Y_{\kappa} = -\kappa Y_{\kappa} \quad (24)$$

$$\frac{d}{dz} \left(K(z) \frac{d}{dz} Z_{\alpha} \right) = \alpha Z_{\alpha} \quad (25)$$

As soluções para as equações (22), (23) e (24) são, nesta ordem:

$$T_{\kappa\lambda}(t) = T_{\kappa}(t) T_{\lambda}(t) = e^{\kappa t} e^{-\lambda t} \quad (26)$$

$$X_{\alpha\lambda}(x) = X_{\alpha}(x) X_{\lambda}(x) = e^{(\alpha+\lambda)\frac{x}{u}} \quad (27)$$

$$Y_{\kappa}(y) = e^{-\frac{\kappa}{v}y} \quad (28)$$

A equação (25), por sua vez, é resolvida pelo método GILTT. Dessa forma, a solução que expressa a concentração é um produto de autofunções:

$$C_{\kappa\lambda\alpha}(t, x, y, z) = [\psi_{\kappa}(t, y)][\varphi_{\lambda}(t, x)][\phi_{\alpha}(x, z)] \quad (29)$$

onde cada uma das autofunções que compõem a solução, corresponde as expressões a seguir:

$$\psi_{\kappa}(t, y) = T_{\kappa}(t) Y_{\kappa}(y) = e^{-\frac{\kappa}{v}(y-vt)} \quad (30)$$

$$\varphi_{\lambda}(t, x) = T_{\lambda}(t) X_{\lambda}(x) = e^{-\lambda(t-\frac{x}{u})} \quad (31)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(K(z) \frac{\partial}{\partial z} \phi_\alpha(x, z) \right) = u \frac{\partial}{\partial x} \phi_\alpha(x, z) \quad (32)$$

A solução para a equação (32), conforme mencionado anteriormente, é obtida pela técnica GILTT. Para isso, consideramos $\phi_\alpha(x, z) = X_\alpha(x)GILTT_\alpha(z)$.

Assim sendo, a solução geral da equação de advecção-difusão é uma combinação linear do produto das autofunções (30), (31) e (32) com seus respectivos autovalores $\kappa(m)$ e $\lambda(1/s)$, associados. Ou seja:

$$C(t, x, y, z) = \int_0^\infty A(\kappa)\psi_\kappa(t, y) d\kappa \int_0^\infty B(\lambda)\varphi_\lambda(t, x) d\lambda \xi(x, z) \quad (33)$$

onde a função $\xi(x, z)$ vem da solução do problema (32) pelo método GILTT. Portanto, a concentração média é representada por:

$$C(t, x, y, z) = \psi(t, y)\varphi(t, x)\xi(x, z) \quad (34)$$

com:

$$\psi(t, y) = \int_0^\infty A(\kappa)\psi_\kappa(t, y) d\kappa \quad (35)$$

$$\varphi(t, x) = \int_0^\infty B(\lambda)\varphi_\lambda(t, x) d\lambda \quad (36)$$

Para determinar os coeficientes $A(\kappa)$ e $B(\lambda)$ é necessário utilizar a condição inicial e a condição de fonte, conforme procedimento apresentado a seguir.

4.2 Determinação da solução para as condições inicial e de fonte

Primeiramente, usa-se a condição inicial que foi imposta ao problema, através da equação (13). Observando que:

$$uC(0, x, y, z) = Q(0)\delta(x)F(y)\delta(z - H_s) = u\psi(0, y)\varphi(0, x)\xi(x, z) \quad (37)$$

Tendo sido estabelecidas as igualdades na equação (37), podemos encontrar a integral relativa ao autovalor κ .

$$\begin{cases} \psi(0, y) = F(y) \\ \varphi(0, x) = Q(0)\delta(x) \\ \xi(x, z) = \frac{\delta(z-H_s)}{u} \end{cases} \quad (38)$$

Para a resolução da integral (35), substitue-se a autofunção pela sua forma encontrada na equação (30). Ou seja:

$$\psi(t, y) = \int_0^\infty A(\kappa)\psi_\kappa(t, y) d\kappa = \int_0^\infty A(\kappa)e^{-\frac{\kappa}{v}(y-vt)} d\kappa \quad (39)$$

Usando as igualdades estabelecidas em (38) e considerando a condição inicial em $t = 0$, chega-se à:

$$\psi(0, y) = F(y) = \int_0^{\infty} A(\kappa) e^{-\frac{\kappa y}{v}} d\kappa \quad (40)$$

$$\psi(0, y) = F(y) = \int_0^{\infty} vA(\kappa) e^{-\frac{\kappa y}{v}} \frac{1}{v} d\kappa \quad (41)$$

sabendo que $\mu = \frac{\kappa}{v}$; $d\mu = \frac{1}{v} d\kappa$ e $vA(\kappa) = D(\mu)$, temos:

$$\psi(0, y) = F(y) = \int_0^{\infty} D(\mu) e^{-\mu y} d\mu \quad (42)$$

Observando a equação (42), pode-se afirmar que $\psi(0, y)$ é uma transformada de Laplace. Portanto:

$$D(\mu) = L^{-1}\{F(y), y \rightarrow \mu\} \quad (43)$$

onde L^{-1} representa uma transformada inversa de Laplace. Logo:

$$\psi(t, y) = \int_0^{\infty} L^{-1}\{F(y), y \rightarrow \mu\} e^{-\mu(y-vt)} d\mu = F(y - vt) \quad (44)$$

O segundo passo para a resolução do problema, consiste em aplicar a condição de fonte estabelecida para $x = 0$

$$uC(t, 0, y, z) = Q(t)F(y - vt)\delta(z - H_s) = u\psi(t, y)\varphi(t, 0)\xi(0, z) \quad (45)$$

Mais uma vez $\psi(t, y) = F(y - vt)$. Realizando novamente o procedimento aplicado para a resolução da integral (39), pode-se estabelecer as igualdades:

$$\begin{cases} \varphi(t, 0) = Q(t) \\ u\xi(0, z) = \delta(z - H_s) \end{cases} \quad (46)$$

A solução para a integração em x é obtida de forma análoga. Portanto, após a substituição dos autovalores chega-se à:

$$\varphi(t, x) = \int_0^{\infty} B(\lambda)\varphi_{\lambda}(t, x)d\lambda = \int_0^{\infty} B(\lambda)e^{-\lambda(t-\frac{x}{u})}d\lambda \quad (47)$$

quando a equação (47) é analisada em $x = 0$, resulta em:

$$\varphi(t, 0) = \int_0^{\infty} B(\lambda)e^{-\lambda t}d\lambda \quad (48)$$

a equação (48) é uma transformada de Laplace. Assim, podemos determinar o coeficiente $B(\lambda)$ conforme demonstrado a seguir:

$$\varphi(t, 0) = Q(t) \quad (49)$$

$$\varphi(t, 0) = Q(t) = L\{B(\lambda), \lambda \rightarrow t\} \quad (50)$$

$$L^{-1}\{Q(t), t \rightarrow \lambda\} = L^{-1}\{L\{B(\lambda), \lambda \rightarrow t\}, t \rightarrow \lambda\} = B(\lambda) \quad (51)$$

Portanto, os coeficientes $B(\lambda)$ são determinados pela transformada inversa de Laplace do termo de fonte. Logo, temos:

$$\varphi(t, x) = \int_0^\infty L^{-1}\{Q(t), t \rightarrow \lambda\} e^{-\lambda(t-\frac{x}{u})} d\lambda = Q\left(t - \frac{x}{u}\right) \quad (52)$$

Conseqüentemente, a solução geral, é um produto das equações (44), (52) e da solução $\xi(x, z)$ obtida pelo método GILTT, ou seja:

$$C(t, x, y, z) = F(vt - y)Q\left(t - \frac{x}{u}\right)\xi(x, z) \quad (53)$$

4.3 Solução considerando uma fonte contínua

Considerando uma função de distribuição delta de Dirac $Q(t) = Q\delta(t)$, e que $F(y) = \delta(y)$ conseqüentemente, a solução deverá ser uma advecção de *puffs* de alta concentração. Logo, a concentração do poluente é dada por:

$$C(t, x, y, z) = 2Q\delta(vt - y)\delta\left(t - \frac{x}{u}\right)\xi(x, z) \quad (54)$$

Considerando então, que esta é uma função altamente concentrada, pode-se escrevê-la com a seguinte propriedade:

$$\delta\left(t - \frac{x}{u}\right) = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi b}} e^{-\frac{(t-\frac{x}{u})^2}{b}} \quad (55)$$

$$\delta\left(t - \frac{x}{u}\right) = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{u}{\sqrt{\pi b u^2}} e^{-\frac{(ut-x)^2}{b u^2}} \quad (56)$$

Similarmente, para $\delta(vt - y)$, chega-se á:

$$\delta(vt - y) = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi c}} e^{-\frac{(vt-y)^2}{c}} \quad (57)$$

Define-se então que $b = \frac{4K_x \frac{x}{u}}{u^2}$ e $c = 4K_y \frac{x}{u}$. As equações (55) e (57) podem ser rescritas na forma:

$$\delta\left(t - \frac{x}{u}\right) = \lim_{K_x \rightarrow 0} \frac{u}{\sqrt{4\pi K_x \frac{x}{u}}} e^{-\frac{(ut-x)^2}{4K_x \frac{x}{u}}} \quad (58)$$

Nesse momento, os processos difusivos em x e y são inseridos no problema através da definição de b e c .

$$\delta(vt - y) = \lim_{K_y \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi K_y \frac{x}{u}}} e^{-\frac{(vt-y)^2}{4K_y \frac{x}{u}}} \quad (59)$$

$$Q(t)\delta(vt - y)\delta\left(t - \frac{x}{u}\right) = \lim_{K_y \rightarrow 0} \lim_{K_x \rightarrow 0} \frac{Q(t)u}{\sqrt{16\pi^2 K_x K_y \left(\frac{x}{u}\right)^2}} e^{-\frac{(vt-y)^2}{4K_y \frac{x}{u}}} e^{-\frac{(ut-x)^2}{4K_x \frac{x}{u}}} \quad (60)$$

A solução para a concentração do poluente pode ser reescrita da seguinte forma:

$$C(t, x, y, z) = \lim_{K_y \rightarrow 0} \lim_{K_x \rightarrow 0} \frac{Q(t)u}{\sqrt{16\pi^2 K_x K_y \left(\frac{x}{u}\right)^2}} e^{-\frac{(vt-y)^2}{4K_y \frac{x}{u}}} e^{-\frac{(ut-x)^2}{4K_x \frac{x}{u}}} \xi(x, z) \quad (61)$$

Neste ponto é necessário relaxar os limites de K_x e K_y , de forma que eles possam contemplar a difusão nas direções horizontais. Então, a solução pode ser reescrita como:

$$C(t, x, y, z) = \frac{Q(t)u}{\sqrt{16\pi^2 K_x K_y \left(\frac{x}{u}\right)^2}} e^{-\frac{(vt-y)^2}{4K_y \frac{x}{u}}} e^{-\frac{(ut-x)^2}{4K_x \frac{x}{u}}} \xi(x, z) \quad (62)$$

4.4 Solução de Green

Uma solução onde a fonte é uma delta de Dirac é também uma solução de Green. Isto significa que conhecendo a função de Green, podemos encontrar soluções para formas distintas de fontes dependentes do tempo. Para isto, a fonte será escrita na forma $\delta(t - \tau)$. Substituindo a fonte na equação (54) temos:

$$Q\delta\left((t - \tau) - \frac{x}{u}\right)\delta(v(t-\tau) - y) = \lim_{K_x, K_y \rightarrow 0} \frac{Q(\tau)u}{\sqrt{16\pi^2 K_x K_y \left(\frac{x}{u}\right)^2}} e^{-\frac{(u(t-\tau)-x)^2}{4K_x \frac{x}{u}}} e^{-\frac{(v(t-\tau)-y)^2}{4K_y \frac{x}{u}}} \quad (63)$$

Relaxando novamente o limite de K_x e K_y e realizando os procedimentos algébricos que sucedem a equação (63), obtem-se uma nova expressão para a concentração média do poluente, dada por:

$$C(t, \tau, x, y, z) = G(t, \tau, x, y, z) = \frac{2Q(\tau)u}{\sqrt{16\pi^2 K_x K_y \left(\frac{x}{u}\right)^2}} e^{-\frac{(v(t-\tau)-y)^2}{4K_y \frac{x}{u}}} e^{-\frac{(u(t-\tau)-x)^2}{4K_x \frac{x}{u}}} \xi(x, z) \quad (64)$$

A solução acima é conhecida como solução de Green. Considerando um problema com uma fonte arbitrária $Q(t)$ emitindo em um intervalo (t_0, t) a solução do problema é dada pela integração em τ no intervalo $[t_0, t]$.

$$C(t, x, y, z) = \int_{t_0}^t G(t, \tau, x, y, z) d\tau = \frac{2}{\sqrt{16\pi^2 K_x K_y \left(\frac{x}{u}\right)^2}} \int_{t_0}^t uQ(\tau) e^{-\frac{(u(t-\tau)-x)^2}{4K_x \frac{x}{u}}} e^{-\frac{(v(t-\tau)-y)^2}{4K_y \frac{x}{u}}} d\tau \xi(x, z) \quad (65)$$

Nessa solução, estão presentes os coeficientes de difusão nas direções horizontais, tendo portanto, um comportamento difusivo nessas direções.

4.4.1 Solução fonte de Heaviside

Considerando a fonte do tipo Heaviside, como apresentada abaixo:

$$QH(t - t_0) \begin{cases} 0 & \text{se } t < t_0 \\ \frac{Q}{2} & \text{se } t = t_0 \\ Q & \text{se } t > t_0 \end{cases} \quad (66)$$

Substituindo as condições de fonte Heaviside na equação (65) chega-se à:

$$C(t, x, y, z) = \frac{2}{\sqrt{16\pi^2 K_x K_y \left(\frac{x}{u}\right)^2}} \int_{t_0}^t u Q e^{-\frac{(u(t-\tau)-x)^2}{4K_x \frac{x}{u}}} e^{-\frac{(v(t-\tau)-y)^2}{4K_y \frac{x}{u}}} d\tau \xi(x, z) \quad (67)$$

Após manipulações algébricas, é possível reescrever a equação (67) conforme apresentada a seguir:

$$C(t, x, y, z) = \frac{2Qu}{\pi D} \int_{t_0}^t e^{-\frac{(A\tau^2 + B\tau + C)}{D}} d\tau \xi(x, z) \quad (68)$$

onde $A = u^2 K_y + v^2 K_x$, $B = 2u K_y (x - ut) + 2v K_x (y - vt)$, $C = K_y (x - ut)^2 + K_x (y - vt)^2$ e $D = 4\left(\frac{x}{u}\right) K_x K_y$. Portanto, a solução para a equação (68) é:

$$C(t, x, y, z) = \frac{Que^{-\frac{-4CA+B^2}{4DA}}}{\sqrt{\pi DA}} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{(2At + B)}{2\sqrt{AD}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{(2At_0 + B)}{2\sqrt{AD}} \right) \right] \xi(x, z) \quad (69)$$

onde erf é a função erro. Essa solução mostra a evolução temporal na concentração média de poluentes de uma pluma cuja fonte começa a liberação no tempo $t = 0$.

4.5 Modelo meteorológico com condições variáveis

Sabendo que as condições meteorológicas podem variar de forma significativa em um determinado período, pode-se utilizar a equação (59) considerando intervalos de tempo, na integração, com comprimento (duração) desejado (Figura 2). Dessa forma, será simulada a concentração média de um determinado poluente em condições meteorológicas variáveis com o tempo. Em um determinado intervalo $\Delta t = [t_{j-1}, t_j]$ a fonte é composta por um conjunto de segmentos de pluma, conforme equação a seguir:

$$Q(t) = \frac{2Qu}{\pi D} \int_{t_0}^t e^{-\frac{(A\tau^2 + B\tau + C)}{D}} d\tau = \frac{2Qu}{\pi} \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{1}{D_j} e^{-\frac{(A\tau^2 + B\tau + C)}{D}} d\tau \quad (70)$$

onde o índice j designa o j -ésimo intervalo, sendo $t_0 = 0$ e $t_N = t$. Nesta formulação, é possível simular condições meteorológicas distintas medidas a cada intervalo $[t_{j-1}, t_j]$. A concentração média expressa pela equação (70), para esse caso, é escrita como:

$$C(t, x, y, z) = \sum_{j=1}^N \frac{Q_j u_j}{\sqrt{\pi D_j A_j}} e^{-\frac{4C_j A_j + B_j^2}{4A_j D_j}} \left\{ \left[\operatorname{erf} \left(\frac{2A_j t_j + B_j}{2\sqrt{A_j D_j}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{2A_j t_{j-1} + B_j}{2\sqrt{A_j D_j}} \right) \right] \right\} \xi(x, t) \quad (71)$$

se $t \leq t_j$ então $t = t_j$, esta observação é resultado da integração em intervalos realizada na equação (70).

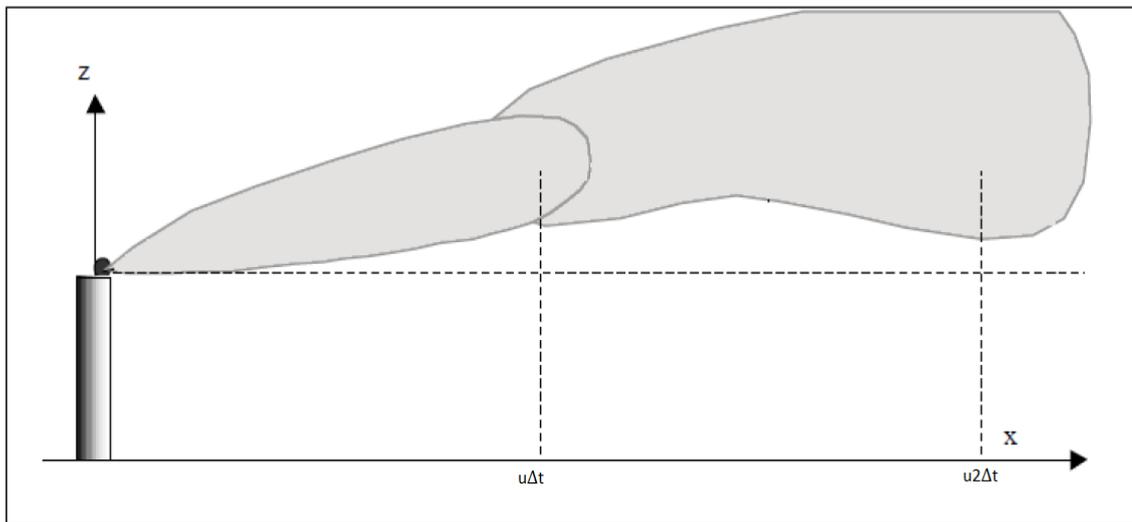


Figura 2: Esquema ilustrativo de um modelo de dispersão considerando segmentos de pluma

5 PARAMETRIZAÇÃO DA TURBULÊNCIA

A turbulência atmosférica resulta da grande variação da velocidade do escoamento do vento na superfície terrestre. O escoamento, por sua vez, sofre tais alterações devido a variação da velocidade do vento com a altura (cisalhamento) e do aquecimento da superfície do planeta pela radiação solar durante o dia. A importância desse fenômeno reside no fato que esta representa um processo bastante efetivo de transporte. A intensa variabilidade das componentes da velocidade turbulenta, proporciona uma constante mistura entre camadas adjacentes de fluido que, conseqüentemente, tem suas propriedades misturadas (MORAES; ACEVEDO 2005).

A maior parte das parametrizações encontradas na literatura se fundamenta teoricamente na análise de perfis verticais médios de vento e no conceito de que o sinal do fluxo tende a ser inverso ao sinal do gradiente vertical. Além disso, a magnitude dos fluxos aumenta conforme aumentam os gradientes verticais. Assim, a chamada teoria K estabelece que os fluxos devam ser diretamente proporcionais aos gradientes, mas de sinais inversos, conforme mostra a equação abaixo.

$$w'C' = -K_z \frac{\partial C}{\partial z} \quad (72)$$

onde w' representa a parte turbulenta do vento médio na direção z , C' é a componente turbulenta de uma espécie genérica que se conserva e $\frac{\partial C}{\partial z}$ é o gradiente médio na direção z . O fator de proporcionalidade, chamado de coeficiente de difusão turbulenta K_z , é em geral expresso usando uma parametrização apropriada através de parâmetros atmosféricos medidos ou estimados.

A escolha de uma parametrização turbulenta adequada é imprescindível para prever a concentração de poluentes atmosféricos. Portanto, a precisão dos modelos de dispersão atmosférica está diretamente relacionada com os parâmetros turbulentos, que por sua vez, estão relacionados às propriedades dinâmicas e termodinâmicas da CLP. Do ponto de vista físico, a parametrização da turbulência é a aproximação da natureza que substitui um termo desconhecido. Nessa seção será apresentada a formulação para a parametrização da turbulência, a fórmula de obtenção do vento médio e as expressões que inserem flutuações no vento, utilizadas nesse trabalho.

5.1 Coeficientes de difusão

Para representar a difusão turbulenta perto da fonte em condições de vento fraco, os coeficientes de difusão devem ser considerados como funções não somente da turbulência (ou seja, do comprimento dos grandes turbilhões e escala de velocidade), mas também da distância da fonte (ARYA 1995).

Considerando o efeito de difusão causado pela ação da turbulência na direção x , y e z , para velocidades diferentes de zero, os coeficientes de difusão, K , são funções lineares da distância da fonte, conforme apresentado a seguir:

$$K_x = \alpha ux, \quad K_y = \beta ux, \quad K_z = \gamma ux \quad (73)$$

onde α , β e γ representam parâmetros turbulentos, que variam conforme a estabilidade atmosférica e x é a distância a partir da fonte.

Os parâmetros α , β e γ representam a intensidade da turbulência e são estimados a partir da teoria da similaridade. Em geral, para condições atmosféricas estáveis, a parametrização ocorre em função da velocidade de fricção. Nesse trabalho, utilizou-se a parametrização proposta por Sharan, Yadav e Modani (2002), para estimativa de K_z na qual:

$$\gamma = 1,69 \left(\frac{u^*}{u} \right)^2 \quad (74)$$

Por sua vez, α e β foram obtidos a partir da relação proposta por Sharan e Yadav (1996), onde:

$$\alpha = u[\cosh(\sigma_\theta^2) - 1]^{1/2} \quad (75)$$

$$\beta = u[\sinh(\sigma_\theta^2)]^{1/2} \quad (76)$$

5.2 Perfil de vento

Para estimar o perfil de vento na direção longitudinal, utilizou-se a equação proposta por Businger et al. (1971):

$$u(z) = \frac{u^*}{k} \left(\ln \frac{z}{z_0} + 0,74 \frac{z - z_0}{L} \right) \quad (77)$$

Para o caso aqui estudado, a altura da rugosidade z_0 foi definida como 0,005 m, conforme trabalhos de Brusasca, Tinarelli e Anfossi (1992) e Sharan e Yadav (1998) e k é a constante de von Kármán. Os parâmetros u^* e L são chamados de velocidade de fricção e comprimento de Monin-Obukhov, respectivamente, e são calculados a partir das equações:

$$u^* = k \frac{u}{\log(z_1 - z_0)} \quad (78)$$

$$L = 1100(u^*)^2 \quad (79)$$

5.3 Flutuações no vento

Para relacionar as funções de autocorrelação Eulerianas, usualmente utilizadas nos modelos Lagrangeanos com a influência do meandro, Oettl et al. (2005) apresentaram uma relação através da qual a flutuação no vento nas direções x e y é representada por:

$$u'(t + \Delta t) = \rho_u u'(t) + \sigma_u (1 - \rho_u^2)^{1/2} \chi \quad (80)$$

$$v'(t + \Delta t) = \rho_v v'(t) + \sigma_v (1 - \rho_v^2)^{1/2} \chi \quad (81)$$

onde u' e v' são as flutuações das velocidades, σ_u e σ_v são os desvios padrão das respectivas velocidades, χ é um número randômico com média zero e desvio padrão igual a um e ρ_u é um parâmetro de intercorrelação, dado por:

$$\rho_{u,v} = \frac{A_x}{\sigma_\theta + B_y} - 0,9 \quad (82)$$

onde A_x e B_y são constantes determinadas empiricamente com valores 0,5 e 0,2, respectivamente e Δt é um intervalo de tempo randômico no qual as flutuações da velocidade horizontal permanecem constantes. Quando $\rho_{u,v}$ for menor que 0, um lóbulo negativo aparece, indicando a presença de um meandro o que é fundamental no caso de dispersão em condições de vento fraco (OETTTL et al. 2005).

Outra forma de inserir o efeito do meandro do vento no modelo proposto, através da inserção de flutuações na velocidade do vento foi adaptada a partir do trabalho de Anfossi et al. (2006), resultando em:

$$u'(t + \Delta t) = u(t) - (pu' + qv')dt + \sigma_u \sqrt{2pdt} \xi_u \quad (83)$$

$$v'(t + \Delta t) = v(t) - (qu' + pv')dt + \sigma_v \sqrt{2pdt} \xi_v \quad (84)$$

onde ξ_u e ξ_v são variáveis Gaussianas randômicas com média zero e variância igual a um.

Nesse trabalho, foram utilizados os parâmetros p e q teóricos, obtidos através das equações (6) e (7) e p e q calculados através dos dados experimentais de INEL, os quais foram retirados do trabalho de Stefanello (2017) e serão apresentados no próximo capítulo.

6 DADOS EXPERIMENTAIS

Uma metodologia abrangente para avaliar um modelo de dispersão atmosférica inclui a avaliação técnica e científica do algoritmo utilizado, a avaliação estatística a partir de dados de campo ou laboratório e avaliações operacionais com base em aplicações reais. A natureza randômica dos processos naturais que governam a dispersão de poluentes resulta em uma inerente incerteza em relação a avaliação de um modelo. Assim sendo, um modelo nunca poderá ser “perfeito”. Nesse trabalho, o modelo proposto é avaliado utilizando dados experimentais disponíveis para condições de vento fraco, conforme apresentado a seguir.

6.1 Experimento de INEL

De autoria de Sagendorf e Dickson (1974), o experimento de INEL foi uma série de 14 testes de difusão realizados em condições atmosféricas estáveis e ventos fracos, em um terreno plano e uniforme. Devido a variabilidade na direção do vento, foi implementada uma malha de amostragem de 360° . Foram dispostos arcos a distâncias de 100, 200 e 400 metros a partir do centro da malha. Coletores foram locados em intervalos de 6° em cada arco, totalizando 180 pontos de amostragem. O traçador SF_6 foi liberado a uma altura de 1,5 metros e a coleta realizada a 0,76 metros de elevação a partir do solo. A média horária das concentrações foi determinada por meio de captura de elétrons através de cromatografia. Os testes 1, 2 e 3 foram utilizados para avaliação de equipamentos e procedimentos. O teste de número 6 não é apresentado por enquadrar-se em condições neutras ao invés de estáveis. A tabela a seguir apresenta os parâmetros meteorológicos registrados durante as amostragens. Nesse trabalho, foram utilizados os dados relativos a altura de referência na qual velocidade do vento registrada é mais próxima a 1 m/s .

Tabela 1: Valores reportados pelo experimento de INEL para velocidade média do vento (u) e desvio padrão do vento em relação a direção principal (σ_θ).

Teste	Variável	2 m	4 m	8 m	16 m
4	$u(m/s)$	0,7	1,2	-	1,5
	$\sigma_\theta(^{\circ})$	13,6	12,0	7,7	11,5
5	$u(m/s)$	0,8	0,9	1,2	2,2
	$\sigma_\theta(^{\circ})$	28,4	28,4	22,3	16,6
7	$u(m/s)$	0,6	0,9	0,4	0,5
	$\sigma_\theta(^{\circ})$	23,9	22,3	34,4	20,1
8	$u(m/s)$	0,5	0,8	0,6	1,2
	$\sigma_\theta(^{\circ})$	19,6	72,1	25,5	15,3
9	$u(m/s)$	0,5	0,5	0,9	1,6
	$\sigma_\theta(^{\circ})$	21,4	17,9	14,6	13,9
10	$u(m/s)$	1,1	1,7	2,1	3,2
	$\sigma_\theta(^{\circ})$	24,8	21,7	13,0	6,2
11	$u(m/s)$	1,4	1,9	2,3	2,9
	$\sigma_\theta(^{\circ})$	37,6	37,9	35,1	31,5
12	$u(m/s)$	0,1	1,1	1,1	1,6
	$\sigma_\theta(^{\circ})$	28,8	60,2	92,6	74,2
13	$u(m/s)$	1,0	1,6	2,0	3,0
	$\sigma_\theta(^{\circ})$	12,0	11,7	11,7	11,2
14	$u(m/s)$	1,0	1,5	2,0	3,5
	$\sigma_\theta(^{\circ})$	17,2	18,7	15,7	12,2

6.2 Valores de p , q , T_* e m calculados para o experimento de INEL

Os valores das variáveis p , q , T_* e m , anteriormente definidas, são utilizadas para acrescentar ao modelo o fenômeno de meandro do vento, cuja influência nos processos dispersivos na atmosfera em condições de vento fraco foi discutido no capítulo 3. Uma das formas de obter tais valores é através de dados experimentais. O trabalho de Stefanello (2017), apresenta esses valores, calculados a partir dos dados meteorológicos do experimento de INEL e representados nas tabelas a seguir.

Tabela 2: Valores de p e q calculados para o experimento de INEL segundo Stefanello (2017).

Teste	$p_u(s^{-1})$	$q_u(s^{-1})$	$p_v(s^{-1})$	$q_v(s^{-1})$
4 (4m)	0,007556	0,030121	0,006515	0,012815
7	0,008302	0,021958	0,002489	0,009445
8	0,004295	0,009744	0,001799	0,008073
9	0,003513	0,010404	0,001335	0,006510
10 (4m)	0,002996	0,011516	0,001003	0,008080
11	0,001321	0,006060	0,001471	0,005338
12	0,012110	0,031390	0,010650	0,011440
13	0,001338	0,007407	0,001040	0,005696
14	0,002029	0,00464	0,001326	0,005390

Tabela 3: Valores de m e T_* calculados para o experimento de INEL segundo Stefanello (2017).

Teste	m_u	$T_{*u}(s)$	m_v	$T_{*v}(s)$
4 (4m)	4	209	2	490
7	2,6	286	3,8	665
8	2,3	645	4,5	778
9	3	604	4,9	965
10 (4m)	3,8	546	8,1	778
11	4,6	1037	3,6	1177
12	2,6	200	1,1	549
13	5,5	848	5,5	1103
14	2,3	1354	4,1	1166

6.3 Índices Estatísticos

Como forma de avaliar a performance de um modelo, utilizam-se índices estatísticos, conforme descritos a seguir:

1. Erro quadrático médio normalizado: $NMSE = \frac{(\overline{C_o - C_p})^2}{\overline{C_o C_p}}$

analisa os desvios entre as concentrações preditas pelos modelos e as concentrações observadas. É um índice adimensional, valores ínfimos indicam desempenho adequado.

2. Coeficiente de correlação: $COR = \frac{((\overline{C_o - C_o})(\overline{C_p - C_p}))}{\sigma_o \sigma_p}$

informa o grau de associação ou concordância entre as variáveis. Para uma boa performance seu valor deve ser 1.

3. Desvio fracional padrão: $FS = \frac{\sigma_o - \sigma_p}{0,5(\sigma_o + \sigma_p)}$

o valor ótimo para esse índice deve ser igual a zero. O desvio padrão observado (σ_o) é dado por $\sigma_o = \frac{\sum (c_o - \overline{C_o})^2}{(n-1)}$ e o desvio padrão previsto (σ_p) por $\sigma_p = \frac{\sum (c_p - \overline{C_p})^2}{(n-1)}$

7 RESULTADOS

Nesta seção, através do modelo representado pela equação (71), investigou-se o problema da dispersão de poluentes em condições de vento fraco e condições atmosféricas estáveis. Para tanto, foram utilizados os dados micrometeorológicos do experimento de INEL e as parametrizações apresentadas no capítulo 5. Para a obtenção dos resultados numéricos foram utilizados 50 autovalores na solução em série. O modelo de dispersão foi escrito na linguagem Fortran e executado no sistema operacional Windows 10.0. O intervalo de tempo utilizado foi de 180 minutos, ou seja, considerou-se 9 intervalos de 20 minutos cada no modelo meteorológico.

A performance do modelo foi avaliada para três condições distintas, nas quais foram variadas as equações que representam as flutuações na velocidade do vento e a forma de estimar os parâmetros p e q . As três condições de simulação, definidas como C_{p1} , C_{p2} e C_{p3} estão descritas na tabela (4) e os resultados obtidos a partir delas estão confrontados com as concentrações observadas experimentalmente, representadas por C_o . Esses resultados podem ser observados na tabela (5). Não há no trabalho consultado valores de calculados de p e q para o teste 5, o que justifica a ausência de concentrações preditas para esse teste nas tabelas a seguir.

Tabela 4: Diferentes simulações utilizadas no trabalho.

Simulação	Flutuações em u e v	Parâmetros p e q
C_{p1}	$u'(t + \Delta t) = \rho_u u'(t) + \sigma_u (1 - \rho_u^2)^{1/2} \chi$ $v'(t + \Delta t) = \rho_v v'(t) + \sigma_v (1 - \rho_v^2)^{1/2} \chi$	ausentes
C_{p2}	$u'(t + \Delta t) = u(t) - (pu' + qv')dt + \sigma_u \sqrt{2pdt} \xi_u$ $v'(t + \Delta t) = v(t) - (qu' + pv')dt + \sigma_v \sqrt{2pdt} \xi_v$	equações (6) e (7)
C_{p3}	$u'(t + \Delta t) = u(t) - (pu' + qv')dt + \sigma_u \sqrt{2pdt} \xi_u$ $v'(t + \Delta t) = v(t) - (qu' + pv')dt + \sigma_v \sqrt{2pdt} \xi_v$	tabela (2)

Ainda como forma de mensurar o desempenho do modelo em estudo, realizou-se uma análise estatística de acordo com os índices propostos por Hanna (1989). A análise foi feita para o conjunto total de dados e somente para aqueles onde a

velocidade do vento é inferior a $1m/s$. Os resultados estão apresentados na Tabela 9.

Tabela 5: Concentrações observadas experimentalmente (C_o) e previstas pelo modelo proposto (C_{p1} , C_{p2} e C_{p3}) para os arcos de 100, 200 e 300 m do experimento de INEL. As concentrações de poluente são normalizadas pela taxa de emissão (cu/Q).

Exp.	Dist.(m)	C_o	C_{p1}	C_{p2}	C_{p3}
4	100	5,81	4,80	4,71	4,70
	200	2,99	2,23	2,23	2,17
	400	1,47	1,11	1,12	1,06
5	100	1,36	1,64	1,60	-
	200	0,87	0,59	0,63	-
	400	0,30	0,30	0,32	-
7	100	1,26	2,10	2,11	2,10
	200	0,71	0,77	0,81	0,76
	400	0,33	0,39	0,40	0,40
8	100	0,59	1,24	1,33	1,40
	200	0,32	0,37	0,42	0,41
	400	0,33	0,15	0,15	0,17
9	100	1,09	2,75	2,69	2,71
	200	0,57	1,19	1,21	1,23
	400	0,39	0,59	0,63	0,63
10	100	2,41	2,02	2,05	2,06
	200	1,80	0,52	0,57	0,51
	400	0,71	0,24	0,25	0,25
11	100	2,32	1,41	1,42	1,89
	200	1,09	0,30	0,34	0,43
	400	1,10	0,10	0,10	0,12
12	100	2,00	2,13	2,17	2,63
	200	1,77	0,98	1,01	1,04
	400	0,99	0,50	0,47	0,51
13	100	3,19	4,21	4,17	4,16
	200	2,30	1,22	1,22	1,25
	400	1,37	0,60	0,60	0,61
14	100	2,81	2,65	2,75	2,70
	200	1,59	0,79	0,79	0,79
	400	0,30	0,38	0,38	0,39

Os valores de concentração apresentados na Tabela 5 são uma média obtida através de simulações que consideraram 4 períodos com 10 previsões para cada um de-

les. Ou seja, essa concentração é igual a média de 40 valores de pico para cada arco de cada experimento. As Tabelas 6, 7 e 8 mostram o desvio padrão e os valores de máximo e mínimo conseguintes de cada teste. Esses dados são importantes pois a escolha de representação através da média tem influência nos índices estatísticos de avaliação do modelo.

Tabela 6: Concentrações médias, desvio padrão, máximos e mínimos preditos para cada simulação considerando a distância de 100 *m* da fonte do experimento de INEL. As concentrações de poluente são normalizadas pela taxa de emissão (cu/Q).

Exp.	C_o	Simulação	Média	Desv. Padrão	Máximo	Mínimo
4	5,81	C_{p1}	4,80	0,08	5,03	4,52
		C_{p2}	4,71	0,21	5,17	4,28
		C_{p3}	4,70	1,24	8,60	2,57
5	1,36	C_{p1}	1,64	0,21	2,36	1,26
		C_{p2}	1,60	0,06	2,66	0,97
		C_{p3}	-	-	-	-
7	1,26	C_{p1}	2,10	0,23	2,70	1,67
		C_{p2}	2,11	0,34	3,17	1,51
		C_{p3}	2,10	0,53	3,03	1,03
8	0,59	C_{p1}	1,24	0,38	2,25	0,68
		C_{p2}	1,33	0,66	2,94	0,49
		C_{p3}	1,40	0,72	3,48	0,50
9	1,09	C_{p1}	2,75	0,16	3,10	2,35
		C_{p2}	2,69	0,32	3,63	2,08
		C_{p3}	2,71	0,34	3,52	2,16
10	2,41	C_{p1}	2,02	0,35	2,83	1,24
		C_{p2}	2,05	0,45	3,65	1,16
		C_{p3}	2,06	0,44	3,27	1,28
11	2,32	C_{p1}	1,41	0,29	2,16	0,60
		C_{p2}	1,42	0,48	2,67	0,55
		C_{p3}	1,89	1,06	5,08	0,64
12	2,00	C_{p1}	2,13	0,23	2,60	1,70
		C_{p2}	2,17	0,34	2,97	1,30
		C_{p3}	2,63	0,99	4,75	0,94
13	3,19	C_{p1}	4,21	0,15	4,59	3,87
		C_{p2}	4,17	0,26	4,86	3,78
		C_{p3}	4,16	0,32	4,78	3,17
14	2,81	C_{p1}	2,65	0,22	3,10	1,93
		C_{p2}	2,75	0,31	3,44	2,25
		C_{p3}	72,70	0,27	3,42	2,22

Tabela 7: Concentrações médias, desvio padrão, máximos e mínimos preditos para cada simulação considerando a distância de 200 m da fonte do experimento de INEL. As concentrações de poluente são normalizadas pela taxa de emissão (cu/Q).

Exp.	Simulação	C_o	Média	Desv. Padrão	Máximo	Mínimo
4	2,99	C_{p1}	2,23	0,08	2,40	2,05
		C_{p2}	2,23	0,16	2,67	1,96
		C_{p3}	2,17	0,53	3,42	0,87
5	0,87	C_{p1}	0,59	0,06	0,78	0,48
		C_{p2}	0,63	0,17	1,21	0,42
		C_{p3}	-	-	-	-
7	0,71	C_{p1}	0,77	0,06	0,91	0,63
		C_{p2}	0,81	0,12	1,1	0,61
		C_{p3}	0,76	0,27	1,54	0,30
8	0,32	C_{p1}	0,37	0,07	0,60	0,26
		C_{p2}	0,42	0,17	0,86	0,14
		C_{p3}	0,41	0,12	0,78	0,26
9	0,57	C_{p1}	1,19	0,06	1,35	1,04
		C_{p2}	1,21	0,13	1,60	1,01
		C_{p3}	1,23	0,15	1,71	0,95
10	1,80	C_{p1}	0,52	0,07	0,64	0,35
		C_{p2}	0,52	0,13	0,94	0,35
		C_{p3}	0,51	0,15	1,05	0,26
11	1,09	C_{p1}	0,30	0,05	0,40	0,21
		C_{p2}	0,34	0,14	0,80	0,13
		C_{p3}	0,43	0,24	1,09	0,14
12	1,77	C_{p1}	0,98	0,08	1,28	0,81
		C_{p2}	1,01	0,20	1,47	0,60
		C_{p3}	1,04	0,35	2,03	0,37
13	2,30	C_{p1}	1,22	0,04	1,29	1,11
		C_{p2}	1,22	0,07	1,44	1,08
		C_{p3}	1,25	0,10	1,46	0,99
14	1,59	C_{p1}	0,79	0,06	0,93	0,66
		C_{p2}	0,79	0,10	0,98	0,58
		C_{p3}	0,79	0,09	1,08	0,64

Tabela 8: Concentrações médias, desvio padrão, máximos e mínimos preditos para cada simulação considerando a distância de 400 *m* da fonte do experimento de INEL. As concentrações de poluente são normalizadas pela taxa de emissão (*cu/Q*).

Exp.	C_o	Simulação	Média	Desv. Padrão	Máximo	Mínimo
4	1,47	C_{p1}	1,11	0,03	1,17	1,04
		C_{p2}	1,12	0,07	1,30	0,97
		C_{p3}	1,06	0,39	2,01	0,41
5	0,30	C_{p1}	0,30	0,02	0,35	0,26
		C_{p2}	0,32	0,10	0,67	0,17
		C_{p3}	-	-	-	-
7	0,33	C_{p1}	0,39	0,02	0,43	0,33
		C_{p2}	0,40	0,07	0,60	0,29
		C_{p3}	0,39	0,11	0,63	0,19
8	0,33	C_{p1}	0,15	0,03	0,23	0,1
		C_{p2}	0,15	0,05	0,36	0,07
		C_{p3}	0,17	0,05	0,31	0,10
9	0,39	C_{p1}	0,59	0,02	0,64	0,53
		C_{p2}	0,63	0,1	0,95	0,47
		C_{p3}	0,63	0,20	1,12	0,34
10	0,71	C_{p1}	0,24	0,02	0,27	0,20
		C_{p2}	0,24	0,07	0,42	0,14
		C_{p3}	0,25	0,09	0,45	0,09
11	1,10	C_{p1}	0,09	0,01	0,13	0,06
		C_{p2}	0,10	0,04	0,24	0,04
		C_{p3}	0,11	0,05	0,31	0,04
12	0,99	C_{p1}	0,49	0,03	0,58	0,04
		C_{p2}	0,47	0,07	0,6	0,03
		C_{p3}	0,51	0,12	0,90	0,03
13	1,37	C_{p1}	0,60	0,02	0,67	0,57
		C_{p2}	0,60	0,05	0,71	0,50
		C_{p3}	0,61	0,06	0,78	0,50
14	0,30	C_{p1}	0,38	0,02	0,42	0,34
		C_{p2}	0,38	0,05	0,50	0,29
		C_{p3}	0,39	0,06	0,56	0,28

Tabela 9: Avaliação estatística do modelo.

Simulação	NMSE	COR	FS
Simulação $Cp1$	0,30	0,81	0,01
Simulação $Cp2$	0,27	0,82	0,03
Simulação $Cp3$	0,25	0,82	0,03
Simulação $Cp1 < 1m/s$	0,23	0,88	0,14
Simulação $Cp2 < 1m/s$	0,24	0,87	0,17
Simulação $Cp3 < 1m/s$	0,25	0,87	0,2

Como mencionado anteriormente, a Tabela 9 apresenta a avaliação estatística do modelo. Valores próximos a 1 para o NMSE indicam um desempenho adequado, enquanto os demais índices devem ser o mais próximo possível de zero. Pode-se perceber um resultado ligeiramente superior quando considerados apenas os eventos onde a velocidade do vento foi inferior a $1m/s$.

Além dos valores para a concentração do poluente atmosférico (Tabela 1) o modelo proposto permitiu uma análise comparativa dos valores de pico e da abertura da pluma. Esses resultados estão apresentados nas figuras a seguir, cujos gráficos estão em escala logarítmica. Devido ao modelo considerar velocidades estocásticas para a direção principal do vento, os gráficos de dispersão possuem oscilações nos valores máximos de concentração, representadas através de múltiplos picos. Esse comportamento não é corretamente representado quando não consideradas tais variações na velocidade.

Essas representações podem ser observada na figura a seguir, que novamente ressalta a importância desse fenômeno. Comparando o gráfico gerado para a dispersão quando o meandro está presente (linha preta), com aquele quando ele não é considerado (linha azul), pode-se perceber uma diferença significativa. Ambas as simulações foram realizadas nas mesmas condições, exceto pela presença ou não do meandro.

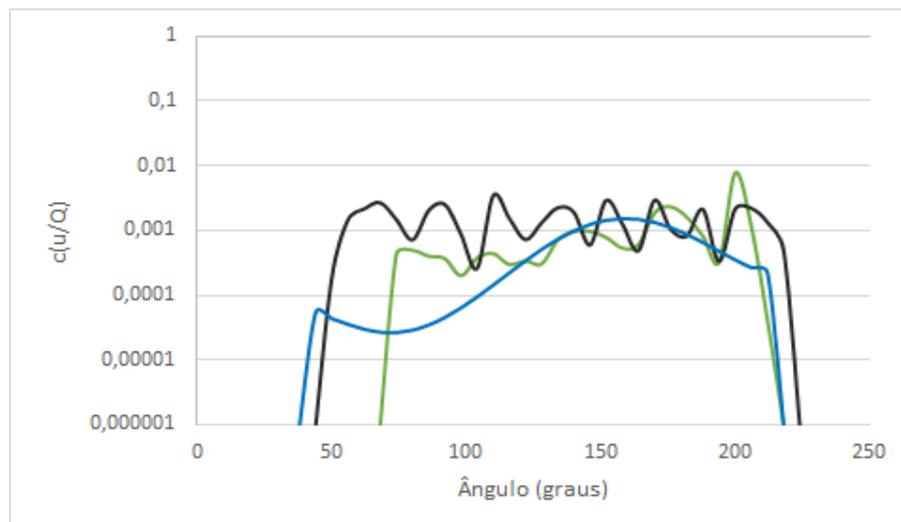


Figura 3: Gráfico de dispersão das concentrações observadas (linha verde), previstas com presença de meandro (linha preta) e previstas sem a presença de meandro (linha azul) para o arco de 100 m do teste 11 do experimento de INEL.

Pode-se ver pela figura que quando o meandro não está inserido no modelo (linha azul) a simulação não reproduz os diversos picos presentes no gráfico que representa os resultados observados. Nesse caso, o comportamento da curva gerada é mais próximo a uma Gaussiana. Embora no valor máximo de concentração para os dois casos não haja uma diferença expressiva o gráfico que considera o meandro (linha preta) é uma representação mais aproximada da realidade. O mesmo comportamento repetiu-se nos demais testes.

Por se tratar de um modelo estocástico, inúmeras simulações geram diferentes resultados. Isso explica valores de pico nas figuras diferentes daqueles apresentados na Tabela 4, onde utilizou-se a média da concentração.

O teste 8 possui algumas particularidades. Devido as condições meteorológicas presentes durante a sua realização, o espalhamento do poluente ocorreu em todas as direções. Dessa forma, como pode ser observado na Figura 7, o registro das concentrações se deu em 360° no entorno da fonte. O modelo proposto, no entanto, possui a capacidade de registrar as concentrações somente num arco de 180° , devido a limitações no seu domínio, explicando assim a discrepância entre a abertura da pluma nos dados observados e previstos.

Enfim, o modelo estudado foi comparado estatisticamente com outros disponíveis na literatura. O primeiro deles, proposto por Oettl, Almbauer e Sturm (2001) é um modelo Lagrangeano onde foi proposta uma das relações para a flutuação do vento utilizadas nesse trabalho. O segundo, é também um modelo Lagrangeano que considera o efeito do meandro do vento, proposto por Carvalho et al. (2006). Como exemplo de um modelo Euleriano, utilizou-se o trabalho de Silveira et al. (2018), cujo modelo

resolve a equação de advecção-difusão através do método GILTT e também considera o efeito do meandro do vento.

Tabela 10: Avaliação estatística do modelo e comparação com a literatura

Modelo	NMSE	COR	FS
Simulação C_{p3}	0,25	0,82	0,03
Oettl, Almbauer e Sturm (2001)	0,21	0,86	-
Carvalho et al. (2006)	0,14	0,94	-0,26
Silveira et al. (2018)	0,12	0,92	0,08

É importante salientar que os índices estatísticos obtidos nessa simulação foram calculados utilizando valores de média de concentração. Melhores valores poderiam ser obtidos se considerada a concentração cujo valor absoluto, entre todas as simulações realizadas, fosse o mais próximo ao observado. Porém, a opção pela média se deve ao fato do modelo ser estocástico, mostrando assim que o desempenho é adequado mesmo variando imprevisivelmente as flutuações na velocidade do vento.

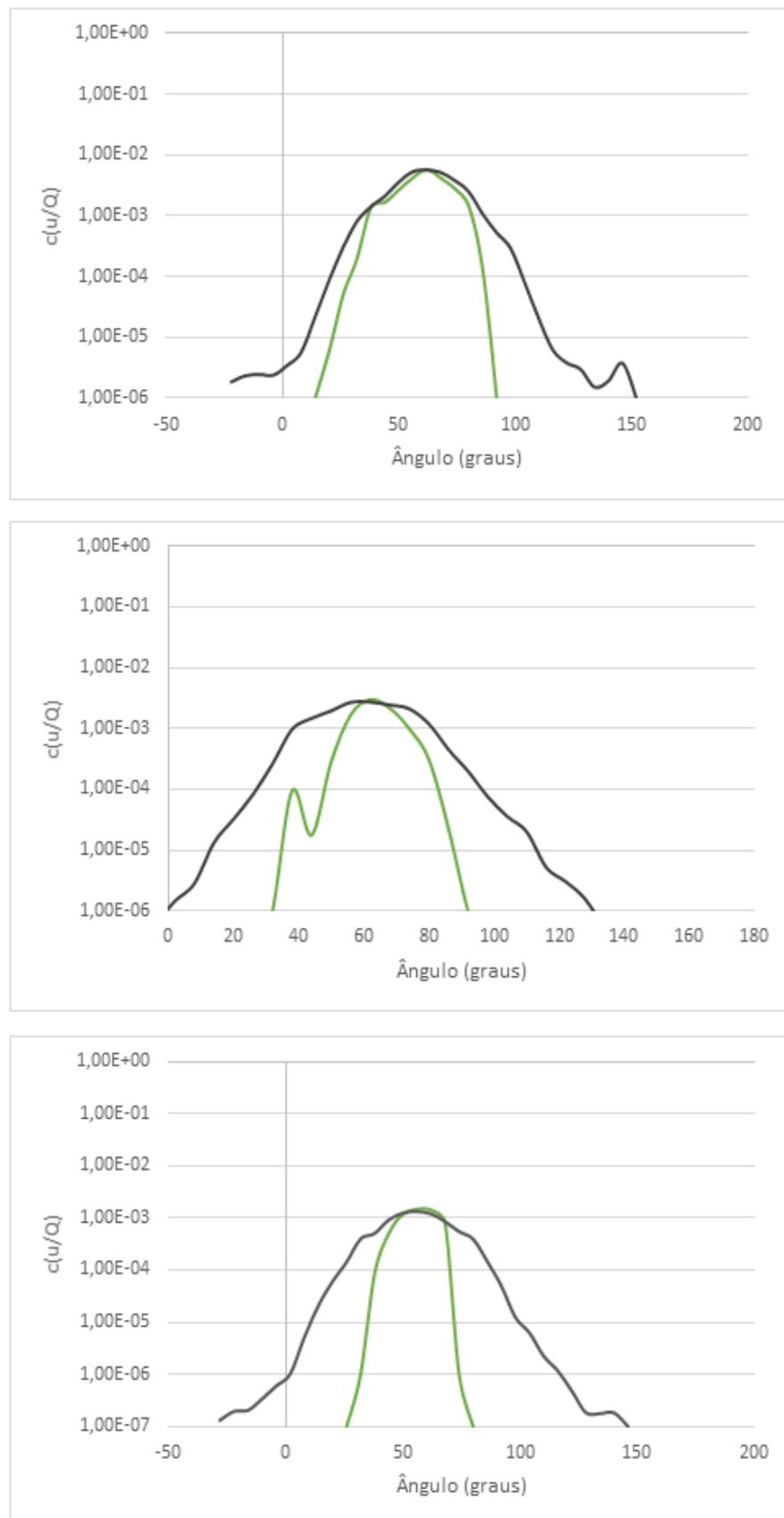


Figura 4: Gráficos de dispersão das concentrações observadas (linha verde) e previstas (linha preta) para o teste 4 do experimento de INEL para os arcos de 100, 200 e 400 m respectivamente.

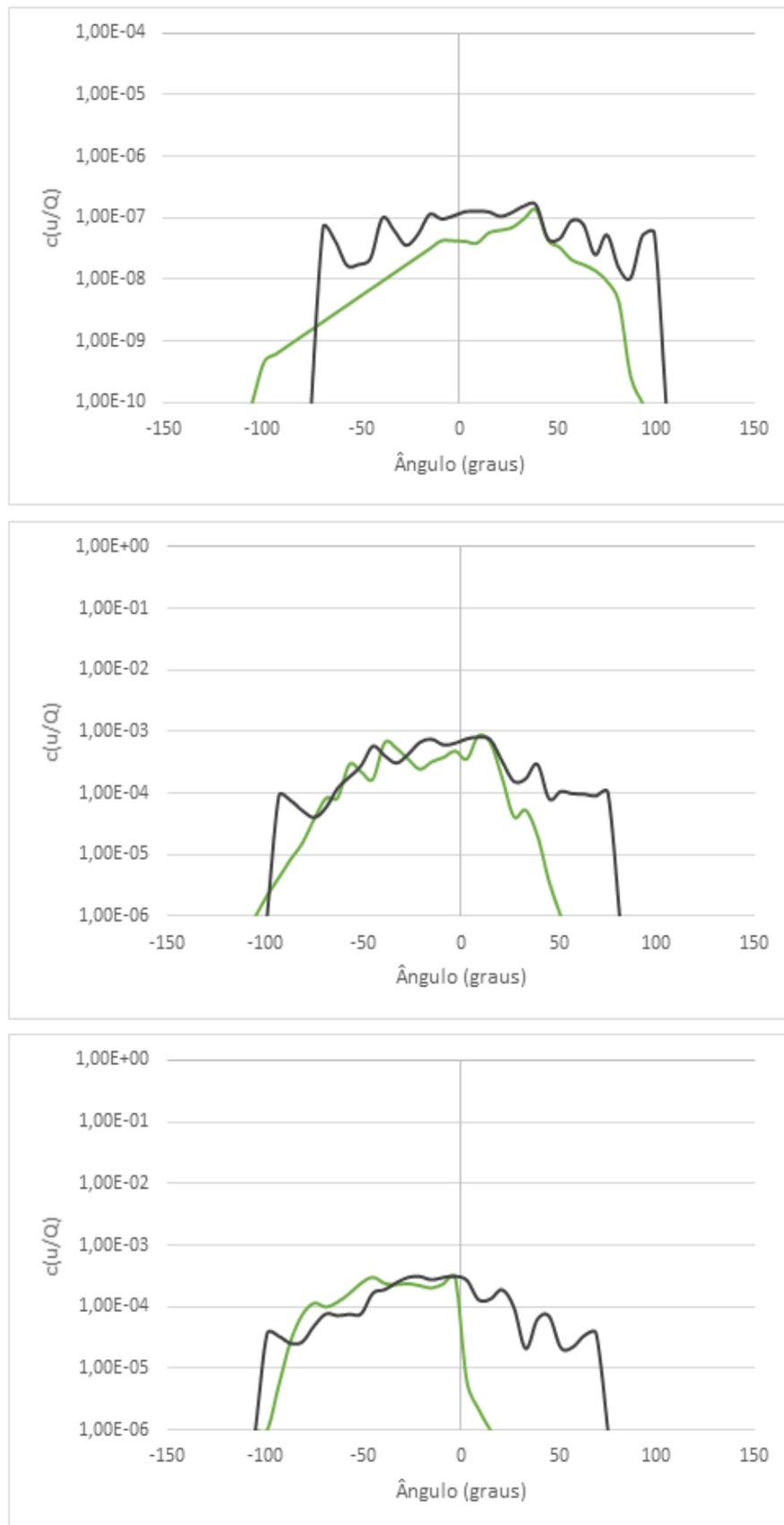


Figura 5: Gráficos de dispersão das concentrações observadas (linha verde) e previstas (linha preta) para o teste 5 do experimento de INEL para os arcos de 100, 200 e 400 m respectivamente.

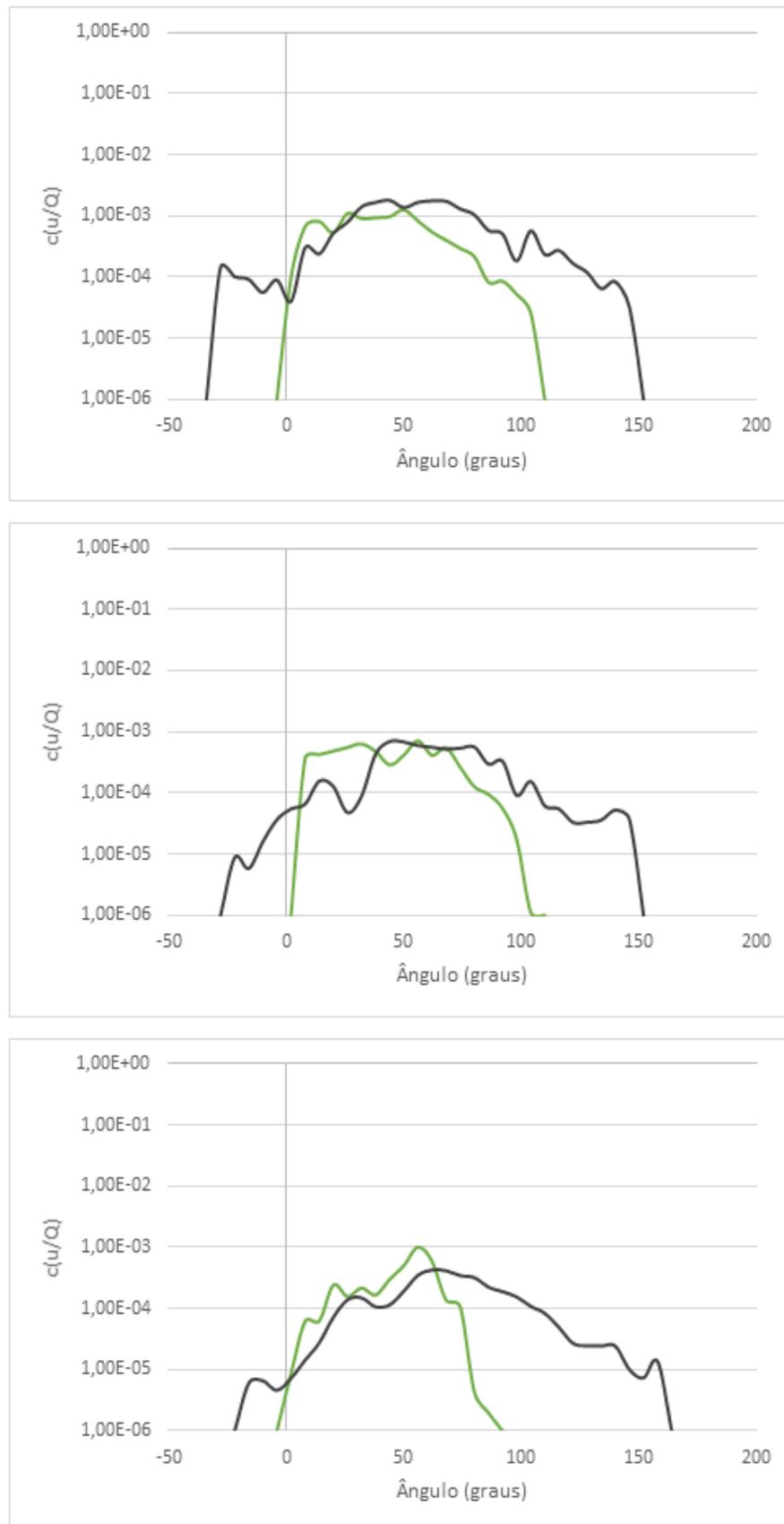


Figura 6: Gráficos de dispersão das concentrações observadas (linha verde) e previstas (linha preta) para o teste 7 do experimento de INEL para os arcos de 100, 200 e 400 m respectivamente.



Figura 7: Gráficos de dispersão das concentrações observadas (linha verde) e previstas (linha preta) para o teste 8 do experimento de INEL para os arcos de 100, 200 e 400 m respectivamente.

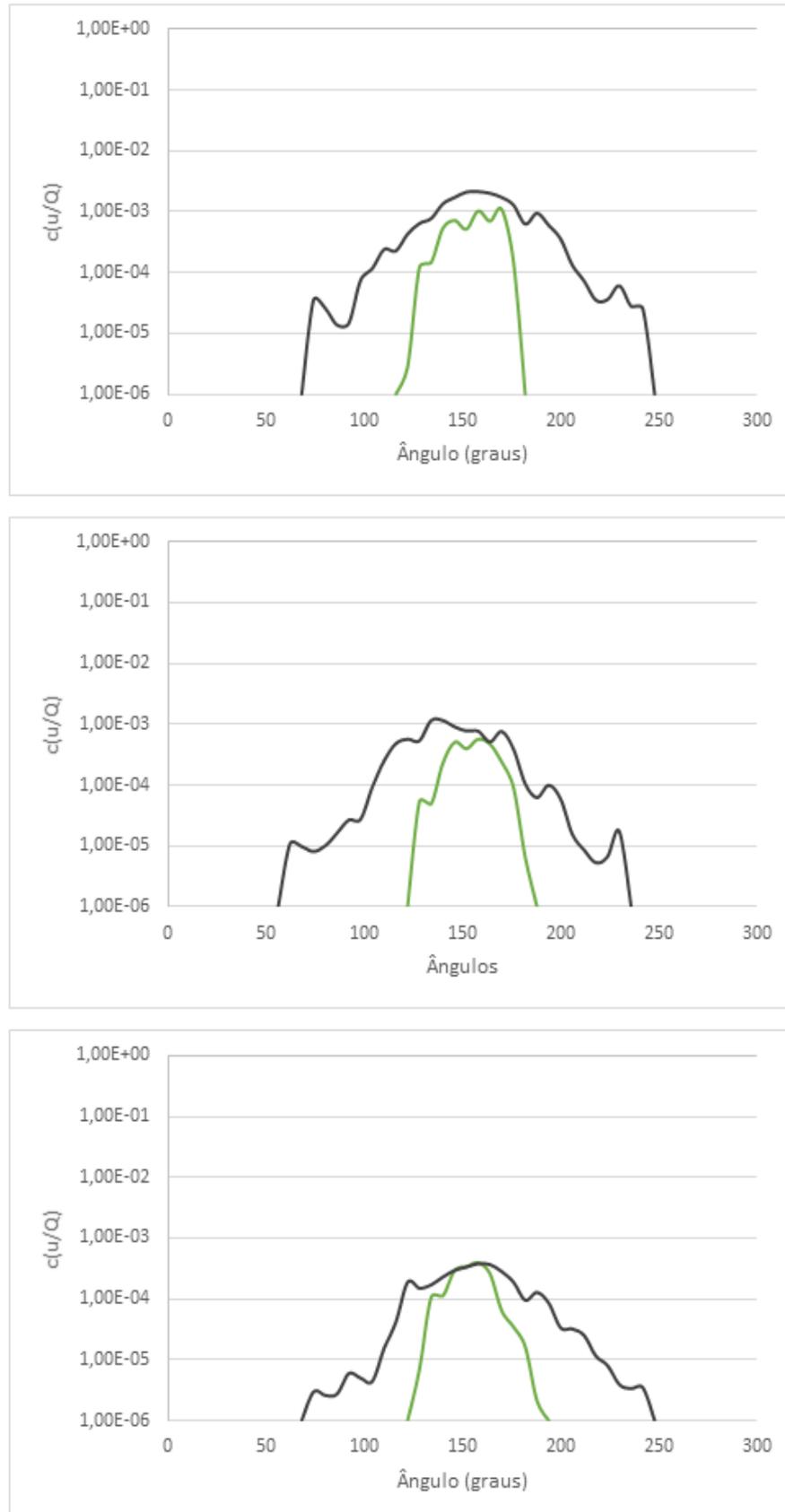


Figura 8: Gráficos de dispersão das concentrações observadas (linha verde) e previstas (linha preta) para o teste 9 do experimento de INEL para os arcos de 100, 200 e 400 m respectivamente.

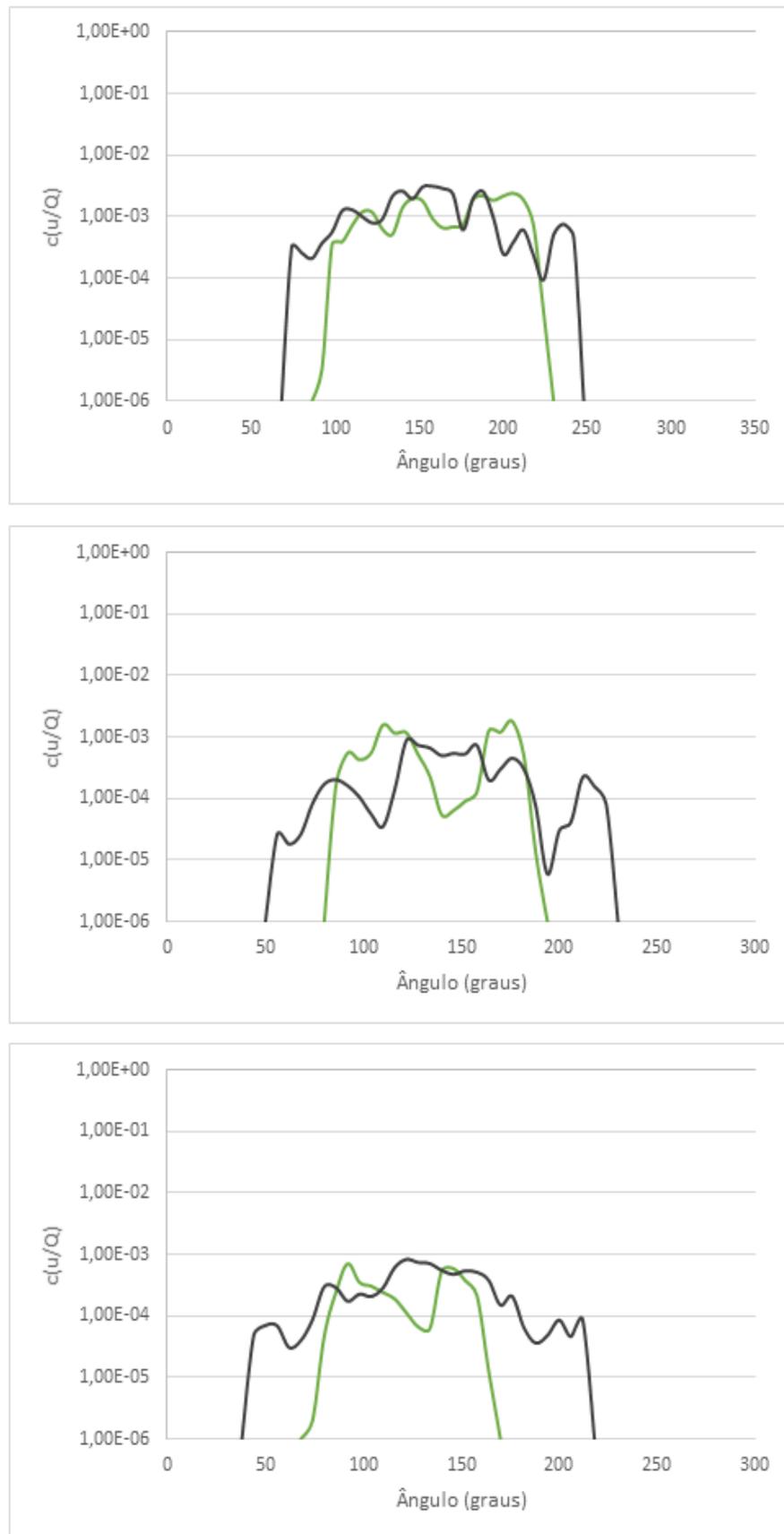


Figura 9: Gráficos de dispersão das concentrações observadas (linha verde) e previstas (linha preta) para o teste 10 do experimento de INEL para os arcos de 100, 200 e 400 m respectivamente.



Figura 10: Gráficos de dispersão das concentrações observadas (linha verde) e previstas (linha preta) para o teste 11 do experimento de INEL para os arcos de 100, 200 e 400 m respectivamente.

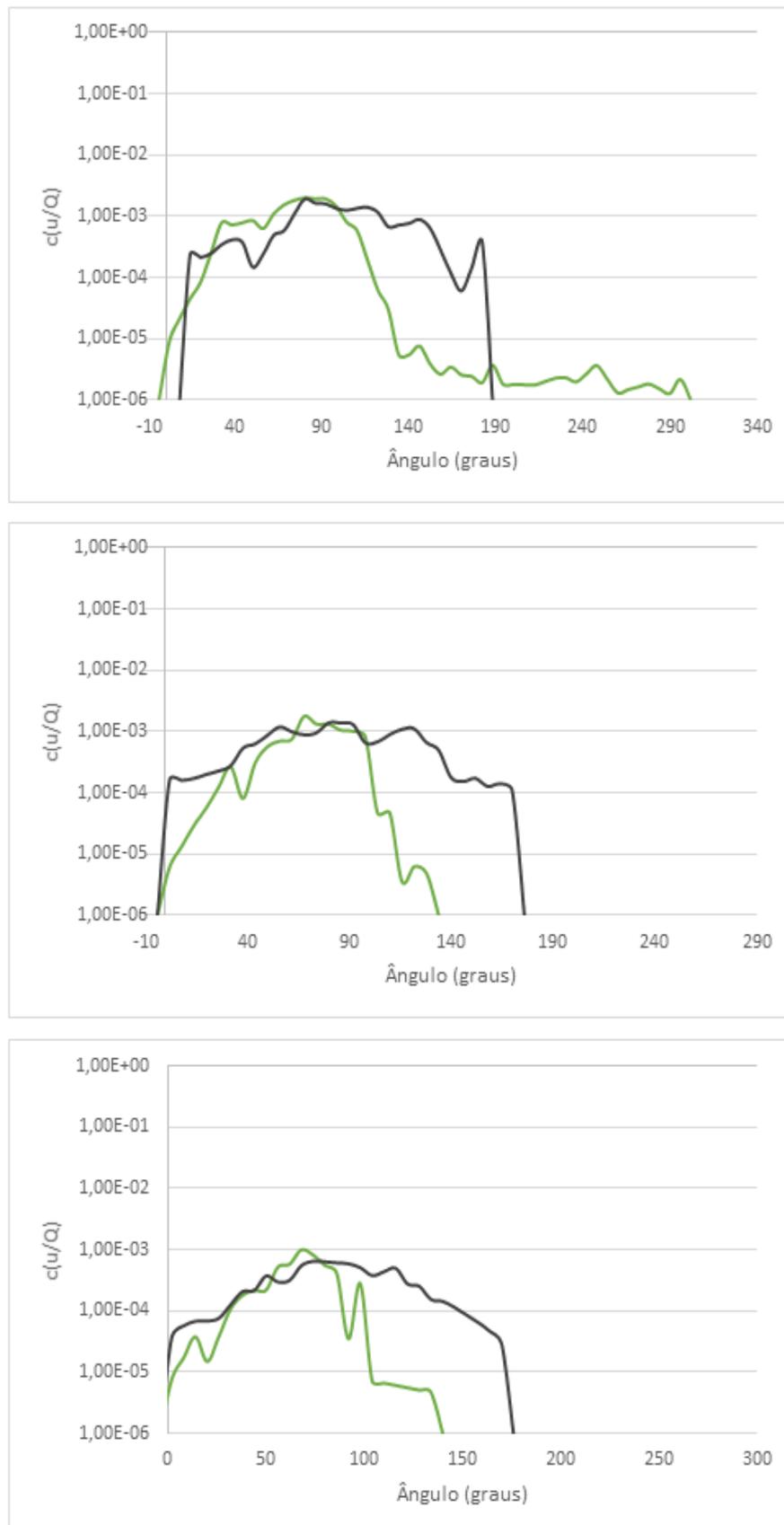


Figura 11: Gráficos de dispersão das concentrações observadas (linha verde) e previstas (linha preta) para o teste 12 do experimento de INEL para os arcos de 100, 200 e 400 m respectivamente.

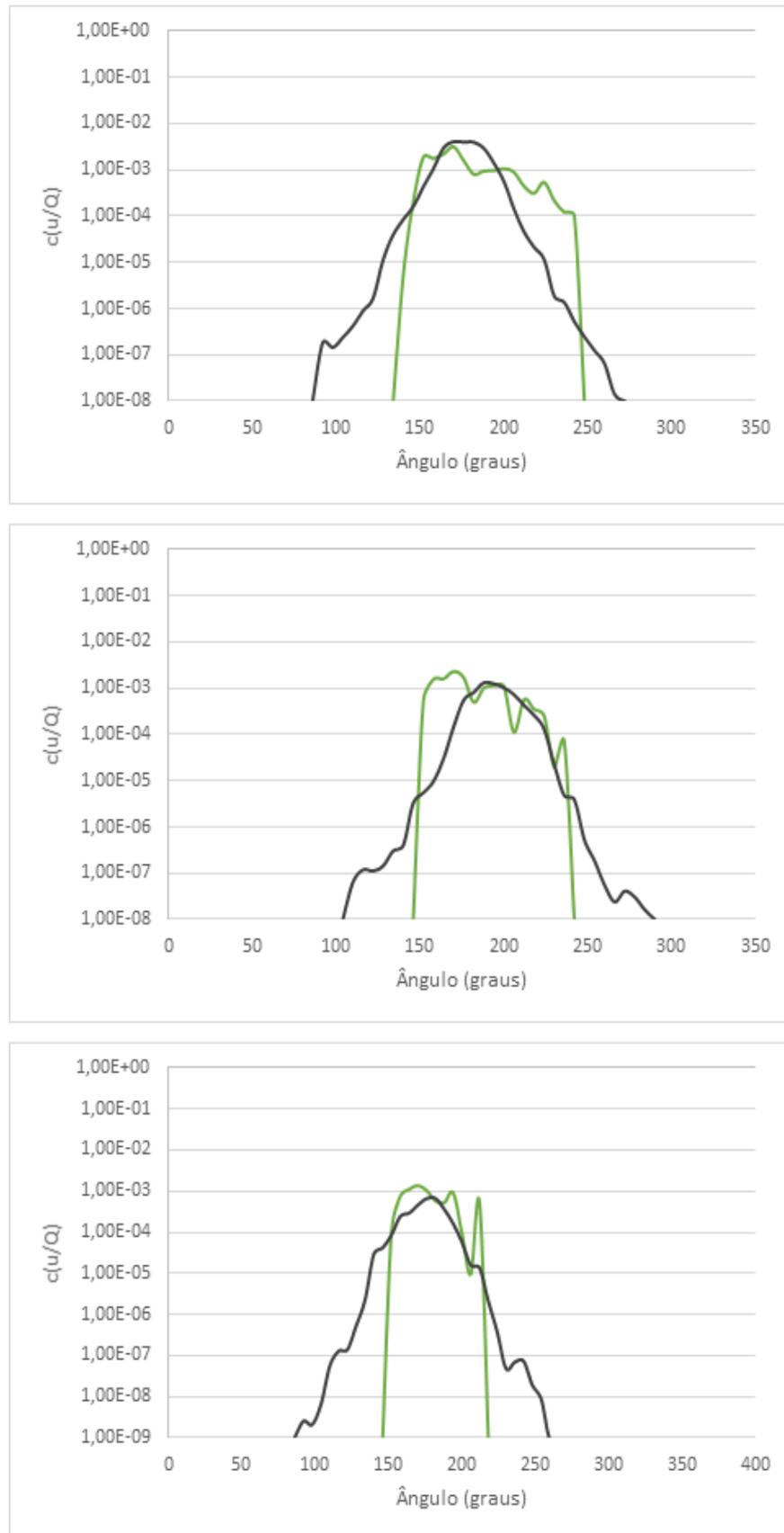


Figura 12: Gráficos de dispersão das concentrações observadas (linha verde) e previstas (linha preta) para o teste 13 do experimento de INEL para os arcos de 100, 200 e 400 m respectivamente.

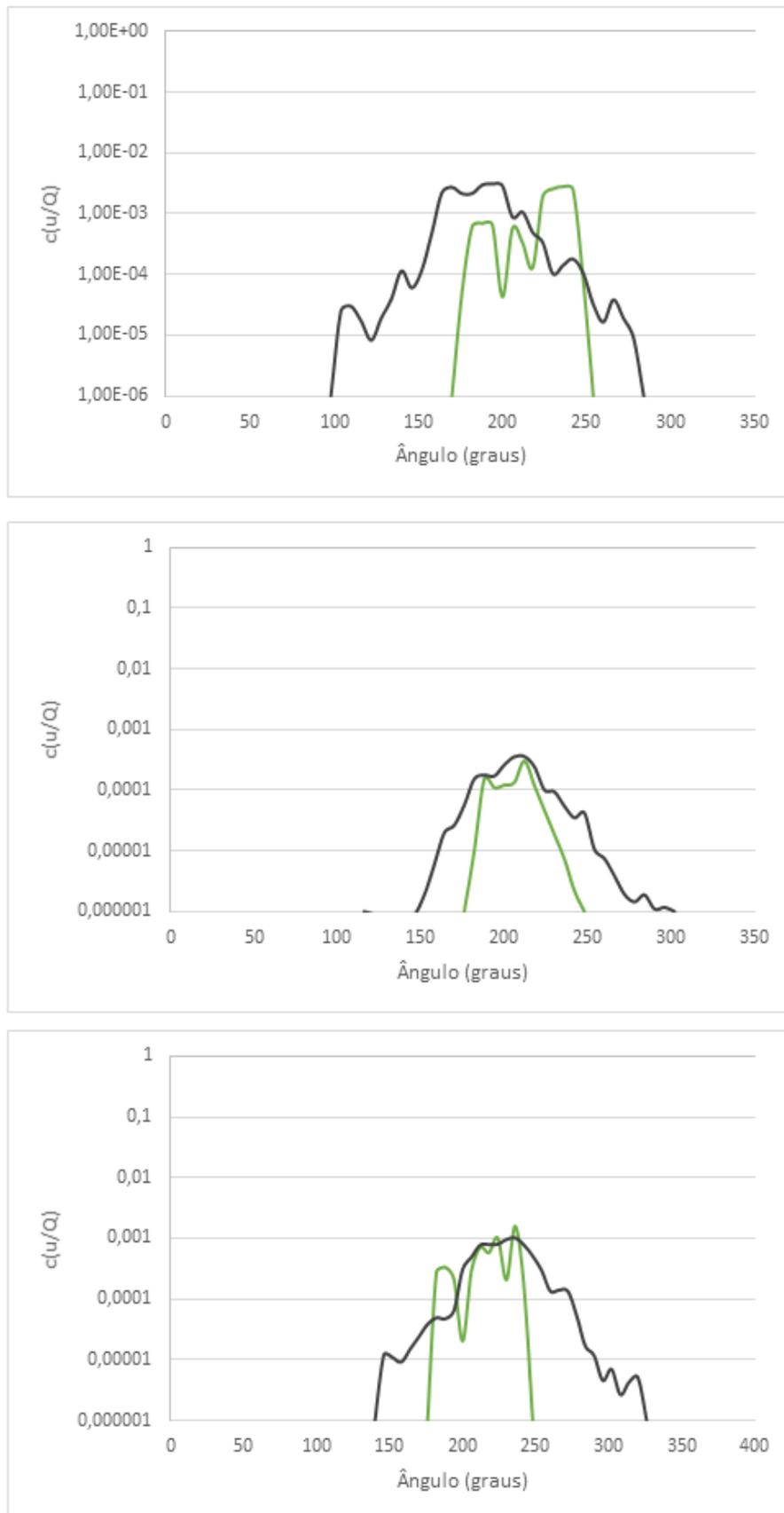


Figura 13: Gráficos de dispersão das concentrações observadas (linha verde) e previstas (linha preta) para o teste 14 do experimento de INEL para os arcos de 100, 200 e 400 m respectivamente.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O modelo proposto apresentou um desempenho adequado quando comparado aos dados observados, tanto através das médias de concentração quanto através da concentração obtida pela simulação de um único evento, representadas nos gráficos. Os dados estatísticos também indicam uma boa performance.

É importante salientar que a principal vantagem em comparação com os trabalhos da literatura que utilizam apenas o método GILTT é a não necessidade de realizar a inversão numérica na variável temporal, o que possui influência direta no custo computacional necessário para obtenção dos resultados.

O trabalho evidenciou a importância do efeito do meandro na simulação de dispersão de substâncias na atmosfera. Essa importância fica ainda mais evidente quando comparados os resultados gerados nas mesmas condições, porém, sem considerá-lo. A presença de velocidades estocásticas no modelo o torna uma representação mais aproximada da realidade, e permite reproduzir de forma mais factual a pluma de dispersão da substância na atmosfera.

Por se tratar de um modelo analítico, pode-se dizer que os erros ficam restritos ao erro de truncamento e às incertezas impostas ao modelo físico. Esforços futuros serão direcionados para melhorias do modelo, testando novas parametrizações, outras classes de estabilidade atmosférica e a influência de diferentes formas de fechamento da equação de advecção-difusão nos resultados, por exemplo.

REFERÊNCIAS

- ANFOSSI, D. et al. Tracer dispersion simulation in low wind speed conditions with a new 2d langevin equation system. *Atmospheric Environment*, v. 40, p. 7234–7245, 2006.
- ARYA, P. Modeling and parameterization of near-source diffusion in weak winds. *Journal of Applied Meteorology*, v. 34, p. 1112–1122, 1995.
- ARYA, S. P. *Introduction to Micrometeorology*. 2. ed. California: Academic Press, 2001.
- BERLYAND, M. *Contemporary problems of atmospheric diffusion and pollution of the atmosphere*. Raleigh, NC, USA: Translated version by NERC, USEPA, 1975.
- BRUSASCA, G.; TINARELLI, G.; ANFOSSI, D. Particle model simulation of diffusion in low wind speed stable conditions. *Atmospheric Environment*, v. 26A, p. 707–723, 1992.
- BULIGON, L.; MOREIRA, D. M.; VILHENA, M. T. Uma solução semi-analítica da dispersão de poluentes com a equação do telégrafo e fluxo contra-gradiente. *Revista Brasileira de Meteorologia*, v. 21, p. 77–85, 2006.
- BUSINGER, J. A. et al. Flux–profile relationships in the atmospheric surface layer. *Journal of the Atmospheric Sciences*, v. 28, p. 181–189, 1971.
- BUSKE, D. et al. An unsteady two-dimensional analytical solution for modeling air pollution dispersion and turbulent dry deposition. *Proceedings do 19th Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, 2007.
- BUSKE, D.; MOREIRA, D. M.; VILHENA, M. T. A 3d analytical solution of the advection-diffusion equation applied to pollutant dispersion in atmosphere. *In Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, 2009.
- BUSKE, D. et al. Simulação analítica da dispersão de poluentes atmosféricos tridimensional. *Revista Ciência e Natura*, 2009.
- BUSKE, D. et al. An analytical solution for the steady-state two-dimensional diffusion-advection-deposition model by the giltt approach. In: _____. Birkhauser, Boston: Integral Methods in Science and Engineering: Techniques and Applications, Organized by: C. Constanda; S. Potapenko, 2007. p. 27–36.

BUSKE, D. et al. Simulation of pollutant dispersion for low wind conditions in stable and convective planetary boundary layer. *Atmospheric Environment*, v. 41, p. 5496–5501, 2007.

BUSKE, D. et al. Simulação analítica da dispersão de poluentes atmosféricos tridimensional. *Revista Ciência e Natura*, 2011.

BUSKE, D. et al. Air pollution steady-state advection-diffusion equation: The general three-dimensional solution. *Journal of Environmental Protection*, v. 3, p. 1124–1134, 2012.

BUSKE, D.; VILHENA M. T. BODMANN, B.; TIRABASSI, T. Analytical model for air pollution in the atmospheric boundary layer. In: _____. [S.l.]: Dr. Mukesh Khare. (Org.). Air Pollution - Book, 2012.

CARVALHO, C. J. et al. Parameterization of meandering phenomenon in a stable atmospheric boundary layer. *Physica A*, 2006.

CATALDI, M. et al. Estudo do transporte de poluentes na região da camada de superfície sob diversas condições de estabilidade atmosférica. *Proceedings do XI Congresso Brasileiro de Meteorologia*, v. 1, p. 2890–2899, 2000.

CIRILLO, M. C.; POLI, A. A. An inter comparison of semi empirical diffusion models under low wind speed, stable conditions. *Atmospheric Environment*, v. 26A, p. 765–774, 1992.

COSTA, C. et al. Semi-analytical solution of the steady three-dimensional advection-diffusion equation in the planetary boundary layer. *Atmospheric Environment*, v. 40, n. 29, p. 5659–5669, 2006.

COSTA, C. P.; MOREIRA, D. M.; VILHENA, M. T. Influência de efeitos não-locais na dispersão de poluentes na camada limite convectiva. *Proceedings do XIII Congresso Brasileiro de Meteorologia*, 2004.

COSTA, C. P. et al. A general formulation for pollutant dispersion in the atmosphere. *Journal of Engineering Mathematics*, v. 74, p. 159–173, 2012.

COTTA, R. M.; BARROS, F. P. J. Integral transforms for three-dimensional steady turbulent dispersion in rivers and channels. *Applied Mathematical Modelling*, v. 31, p. 2719–2732, 2007.

DEGRAZIA, G. A.; MOREIRA, D. M.; VILHENA, M. T. Derivation of an eddy diffusivity depending on source distance for vertically inhomogeneous turbulence in a convective boundary layer. *Journal of Applied Meteorology*, p. 1233–1240, 2001.

DEMUTH, C. A. Contribution to the analytical steady solution of the diffusion equation for line sources. *Atmospheric Environment*, v. 12, p. 1255–1258, 1978.

FRENKIEL, F. Flow field of homogeneous turbulence. *Advances in applied mechanics*, v. 3, p. 61, 1953.

FURTADO, I. C.; BODMANN, E. J. B. E. J.; VILHENA, M. T. On the reconstruction of concentration distributions from comparison of deterministic predictions to observational data. *American Journal of Environmental Engineering*, v. 6, n. 4(A), p. 6–11, 2016.

GOULART, O. G. A. et al. Theoretical considerations of meandering winds in simplified conditions. *Boundary-Layer Meteorol*, 2007.

GOYAL, P.; KRISHNA, T. Dispersion of pollutants in convective low wind: a case study of delhi. *Atmospheric Environment*, v. 36, p. 2071–2079, 2002.

GUERRERO, J. S. P. et al. A unified analytical solution of the steady-state atmospheric diffusion equation. *Atmospheric Environment*, v. 55, p. 201–212, 2012.

HANNA, S. R. Confidence limit for air quality models as estimated by bootstrap and jackknife resampling methods. *Atmospheric Environment*, v. 23, p. 1385–1395, 1989.

LINES, I.; DEAVES, D. M. *The implications of dispersion in low wind speed conditions for quantified risk assessment*. 1. ed. Norwich: HSE books, 1997.

LOECK, J. F. *Efeitos estocásticos em modelos determinísticos para dispersão de poluentes na camada limite atmosférica*. 81 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.

MORAES, L. L. O.; ACEVEDO. Fluxos turbulentos na atmosfera. In: _____. Editora da UFRGS, Porto Alegre: Tópicos em turbulência e modelagem da dispersão de poluentes na camada limite planetária, Organizadores: D.M. Moreira, J.C. Carvalho e M.T. Vilhena, 2005.

MOREIRA, D.; TIRABASSI, T. Modelo matemático de dispersão de poluentes na atmosfera: um instrumento técnico para a gestão ambiental. *Ambiente e sociedade*, VII n.2, p. 159–172, 2004.

MOREIRA, D. M.; CARVALHO, J. C.; TIRABASSI, T. Plume dispersion simulation in low wind conditions in stable and convective boundary layers. *Atmospheric Environment*, v. 39, n. 20, p. 3643–3650, 2005.

MOREIRA, D. M.; NETO, P. V. F.; CARVALHO, J. C. Analytical solution of the eulerian dispersion equation for nonstationary conditions: development and evaluation. *Environmental Modelling and Software*, v. 20, p. 1159–1165, 2005.

MOREIRA, D. M. et al. The giltt solution of the advection–diffusion equation for an inhomogeneous and nonstationary pbl. *Atmospheric Environment*, v. 40, p. 3186–3194, 2006.

MOREIRA, D. M. et al. The giltt solution of the advection–diffusion equation for an inhomogeneous and nonstationary pbl. *Atmospheric Environment*, v. 92, p. 1–17, 2009.

MOREIRA, D. M. et al. A semi-analytical model for the tritium dispersion simulation in the pbl from the angra i nuclear power plant. *Ecological Modelling*, v. 189, n. 3-4, p. 413–424, 2005.

MOREIRA, D. M. et al. Simulation of pollutant dispersion in atmosphere by the laplace transform: the admm approach. *Water, Air and Soil Pollution*, v. 177, p. 411–439, 2006.

MOREIRA, D. M. et al. Comparison between analytical models to simulate pollutant dispersion in the atmosphere. *International Journal of Environment and Waste Management*, v. 1, n. 2, p. in press, 2008.

MORTARINI, L. et al. Temperature auto-correlation and spectra functions in low-windmeandering conditions. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, v. 142, p. 1881–1889, 2016.

MOURA, A.; VILHENA, M.; DEGRAZIA, G. Solução analítica para a dispersão vertical turbulenta em uma camada limite estável. *In Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, 1995.

NETO, P. V. F. *Desenvolvimento de um modelo de dispersão de poluentes para o estudo de impacto ambiental em fontes isoladas*. Dissertação (Dissertação de mestrado) — Programa de pós-graduação em Engenharia Ambiental, ULBRA, 2003.

NIEUWSTADT, F. T. M. An analytical solution of the time-dependent, one-dimensional diffusion equation in the atmospheric boundary layer. *Atmospheric Environment*, v. 14, p. 1361–1364, 1980.

NIEUWSTADT, F. T. M.; HAAN, B. J. An analytical solution of the one-dimensional diffusion equation in a non-stationary boundary layer with an application to inversion rise fumigation. *Atmospheric Environment*, v. 15, p. 845–851, 1981.

OETTL, D.; ALMBAUER, R. A.; STURM, P. J. A new method to estimate diffusion in stable, low-wind conditions. *Journal of Applied Meteorology*, v. 40, 2001.

OETTL, D. et al. A new hypothesis on meandering atmospheric flows in low wind speed conditions. *Atmospheric Environment*, v. 39, p. 1739–1748, 2005.

OMS. *Ambient air pollution: a global assessment of exposure and burden of disease*. [S.I.], 2016.

PASQUILL, F.; SMITH, F. B. *Atmospheric Diffusion*. 3. ed. New York: Halsted Press, 1983.

QIAN, W.; VENKATRAM, A. Performance of steady-state dispersion models under lowwind-speed conditions. *Boundary-Layer Meteorol*, v. 138, p. 475–491, 2011.

RIBEIRO, M. et al. Estudo da dispersão de poluentes na atmosfera via transformação integral. *Proceedings do XI Congresso Brasileiro de Meteorologia*, v. 1, p. 2969–2975, 2000.

ROBERTS, O. F. T. The teorical scattering of smoke in a turbulent atmosphere. *Proceedings of the Royal Society of London*, v. 104, p. 640–648, 1923.

ROUNDS, W. Solutions of the two-dimensional diffusion equation. *American Geophysical Union*, v. 36, p. 395–405, 1955.

SAGENDORF, J. F.; DICKSON, C. R. *Diffusion under low wind-speed, inversion conditions*. [S.I.], 1974.

SCRIVEN, R. A.; FISHER, B. A. The long range transport of airborne material and its removal by deposition and washout - ii - the efect of turbulent diffusion. *Atmospheric Environment*, v. 9, p. 59–69, 1975.

- SHARAN, M.; SINGH, M. P.; YADAV, A. K. A mathematical model for the dispersion in low winds with eddy diffusivities as linear functions of downwind distance. *Atmospheric Environment*, v. 30, p. 1137–1145, 1996.
- SHARAN, M.; YADAV, A. K. Plume dispersion simulation in low-wind conditions using coupled plume segment and gaussian puff approaches. *American Meteorological Society*, p. 1625–1631, 1996.
- SHARAN, M.; YADAV, A. K. Simulation of experiments under light wind, stable conditions by a variable k-theory model. *Atmospheric Environment*, v. 32, p. 3481–3492, 1998.
- SHARAN, M.; YADAV, A. K.; MODANI, M. Simulation of short-range diffusion experiment in low wind convective conditions. *Atmospheric Environment*, v. 36, p. 1901–1906, 2002.
- SILVEIRA, V. et al. Difusão de contaminantes em condições de vento fraco empregando um modelo estocástico lagrangeano. *Revista Brasileira de Meteorologia*, v. 8(2), p. 36–43, 2018.
- SMITH, F. B. *Convection-diffusion processes below a stable layer*. London, 1957.
- SMITH, F. B. The diffusion of smoke from a continuous elevated point source into a turbulent atmosphere. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 2, p. 49–76, 1957.
- STEFANELLO, M. B. *Desenvolvimento de uma modelo Lagrangeano para estimar a dispersão de escalares passivos em condições de meandro do vento horizontal*. 62 f. Tese (Mestrado em Física) — Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2017.
- STORCH, R.; PIMENTEL, L. Desenvolvimento de um modelo eulariano de dispersão de poluentes atmosféricos via gitt e modelos algébricos para os fluxos turbulentos. *Revista Ciência e Natura*, p. 103–106, 2003.
- TIMM, A. U. et al. Modelling contaminant dispersion in meandering low wind conditions employing meteorological models. *American Journal of Environmental Engineering*, 2009.
- TIRABASSI, T. et al. A two-dimensional solution of the advection-diffusion equation with dry deposition to the ground. *Journal of Applied Meteorology and Climatology*, p. In Press, 2008.
- ULDEN, A. P. V. Simple estimates for vertical diffusion from sources near ground. *Atmospheric Environment*, v. 12, p. 2125–2129, 1978.
- VELLOSO, M. F. et al. Estudo do transporte de poluentes na camada limite atmosférica a partir de dois modelos algébricos para o coeficiente de difusão turbulenta e transformação integral. *Proceedings do XIII Congresso Brasileiro de Meteorologia*, 2004.
- VERMA, V. S.; SRIVASTAVA, U.; BHANDARI, P. S. A mathematical model on dispersion of air pollutants. *International Journal of Science and Research*, v. 4, p. 1904–1907, 2015.

VICKERS, D.; MARHT, L. The cospectral gap and turbulent flux calculations. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, v. 20, n. 2, p. 660–672, 2003.

VILHENA, M. et al. An analytical air pollution model: Development and evaluation. *Contributions to Atmospheric Physics*, v. 71, p. 315–320, 1998.

VILHENA, M. T. et al. An analytical model with temporal variable eddy diffusivity applied to contaminant dispersion in the atmospheric boundary layer. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2012.

VILHENA, M. T. et al. A semi-analytical solution for the three-dimensional advection–diffusion equation considering non-local turbulence closure. *Atmospheric Research*, v. 90, p. 63–69, 2008.

WORTMANN, S. et al. A new analytical approach to simulate the pollutant dispersion in the pbl. *Atmospheric Environment*, v. 39, p. 2171–2178, 2005.

YEH, G.; HUANG, C. Three-dimensional air pollutant modelling in the lower atmosphere. *Boundary-Layer Meteorology*, v. 9, p. 381–390, 1975.

ZANNETTI, P. *Air Pollution Modelling: theories, computational methods and available software*. 1. ed. New York: Springer, 1990.