

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS**  
Instituto de Física e Matemática  
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática



Dissertação

**Solução das Equações da Cinética Pontual de Nêutrons pelo Método da  
Aproximação de Padé**

**Noé Franco de Jesus**

Pelotas, 2020

**Noé Franco de Jesus**

**Solução das Equações da Cinética Pontual de Nêutrons pelo Método da Aproximação de Padé**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Schramm  
Coorientador: Prof. Dr. Claudio Zen Petersen

Pelotas, 2020

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas  
Catalogação na Publicação

J58s Jesus, Noé Franco de

Solução das equações da cinética pontual de nêutrons pelo método da aproximação de Padé / Noé Franco de Jesus ; Marcelo Schramm, orientador ; Claudio Zen Petersen, coorientador. — Pelotas, 2020.

68 f.

Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2020.

1. Método da aproximação de Padé. 2. Cinética pontual de nêutrons. 3. Reatividades. 4. Densidade de nêutrons. I. Schramm, Marcelo, orient. II. Petersen, Claudio Zen, coorient. III. Título.

CDD : 539.7

**Solução das equações da cinética pontual de nêutrons pelo método de aproximação de Padé.**

por

**Noé Franco de Jesus**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, PPGMMat, do Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

**Mestre em Modelagem Matemática**

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Marcelo Schramm – Orientador (UFPel)

Prof. Dr. Claudio Zen Petersen – Coorientador (UFPel)

Prof. Dr. Glênio Aguiar Gonçalves (UFPel)

Prof. Dr. Carlos Eduardo Espinosa (UFPel)

Profa. Dr. Júlio César Lombaldo (UFRGS)

Pelotas, 13 de março de 2020.

**Dedico esta obra a meu pai, Noé Santana de Jesus, pelos seus ensinamentos e por me mostrar que o maior fundamento que um homem pode ter é a família. Sei o quanto fizeste para que um dia eu tivesse uma vida cheia de realizações.**

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por ter me proporcionado estudar matemática e assim debaixo de sua mão poderosa me sustentar até aqui. Fortalecendo-me nas horas mais difíceis e confortando-me sempre. Sei que Ele coloca pessoas maravilhosas ao nosso lado e isso Ele fez comigo. Pessoas que me ajudaram a concluir mais essa etapa da minha vida.

Agradeço a estes professores incríveis que com dedicação e paciência me ajudaram a concretizar este trabalho.

Aos professores Marcelo Schramm, Claudio Zen Petersen e Fernanda Tumelero, vocês foram o divisor de águas no meu conhecimento me proporcionando conhecimento matemático e o verdadeiro gosto pelo que faz.

À oportunidade, aos ensinamentos, apoio, incentivo e acompanhamento que fez com que se tornasse possível a conclusão desta dissertação e isso por que tive bons colegas e professores que no andamento do curso se tornaram grandes amigos.

Aos professores do Departamento, do Programa de Pós graduação em Modelagem Matemática, pela ajuda que propuseram sempre que precisávamos.

Aos amigos do Programa de Pós graduação em Modelagem em matemática pelo companheirismo e espontaneidade em ajudar sempre que possível.

Aos familiares e principalmente à minha esposa, Camila, pela paciência e compreensão por minha ausência, que em muitos momentos se fez necessária. E à minha mãe, Sueli, que amo muito e sei o quanto ela torce por mim.

Agradeço à Capes e ao Programa de bolsas afirmativas que custeou o meu período de estudo e sei que muitos não tem esse incentivo quando se disponibilizam a fazer um curso de pós-graduação.

**A Matemática, quando a compreendemos bem, possui não somente a verdade,  
mas também a suprema beleza.**  
(BERTRAND RUSSEL)

## RESUMO

DE JESUS, Noé Franco. **Solução das Equações da Cinética Pontual de Nêutrons pelo Método da Aproximação de Padé.** 2020. 68 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2020.

Nesta dissertação, apresenta-se a solução das Equações da Cinética Pontual de Nêutrons aplicando o Método da Aproximação de Padé. Para a resolução consideram-se seis grupos de precursores de nêutrons atrasados com os seguintes tipos de reatividades: constante, rampa, quadrática, senoidal e zig-zag. O objetivo desta dissertação é apresentar resultados precisos com baixo custo computacional através do Método da Aproximação de Padé. A ideia principal é a aplicação deste método para a reatividade superando o problema de rigidez das equações. Comparam-se os resultados obtidos através de simulações numéricas com os existentes na literatura.

**Palavras-chave:** Método da Aproximação de Padé, Cinética Pontual de Nêutrons, Reatividades, Densidade de Nêutrons.

## ABSTRACT

DE JESUS, Noé Franco. **Solution of Neutron Point Kinetics Equations by Padé Approximation Method**. 2020. 68 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2020.

In this dissertation, the solution of the Neutron Point Kinetics Equations is presented via Padé Approximation Method. For resolution, six groups of delayed neutron precursors are considered with the following types of reactivity: constant, ramp, quadratic, sinusoidal and zigzag. The goal of this dissertation is to present accurate results with low computational cost through the Padé Approximation Method. The main idea is the application of this method in the reactivity overcoming the stiffness problem in the equations. It compares the results obtained with numerical simulations with those in the literature.

**Keywords:** Padé Approximation Method, Neutron Point Kinetics Equations, Reactivities, Neutron Density.

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

ECPN	Equações da Cinética Pontual de Nêutrons
MAP	Método da Aproximação de Padé
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
BEFD	Backward Euler Finite Difference
PAM	Método Aproximação Polinomial
PCA	Piecewise Constant Approximation
EPCA	Enhanced Piecewise Constant Approximation

## LISTA DE SÍMBOLOS

$V$	Volume arbitrário, $cm^3$
$S$	Área da superfície do volume $V$ , $cm^2$
$E$	Energia de nêutrons, $MeV$
$\mathbf{r}$	Vetor de posição espacial, $cm$
$n$	Densidade de nêutrons, $cm^{-3}$
$\Sigma$	Seção de choque macroscópica, $cm^{-1}$
$v$	Velocidade do nêutron, $cm/s$
$F$	Densidade da taxa de interação
$\Phi$	Fluxo escalar de nêutrons, $cm^{-2}s^{-1}$
$\mathbf{J}$	Densidade de corrente de nêutrons, $cm^{-2}s^{-1}$
$D$	Coeficiente de Difusão, $cm$
$\Sigma_{tr}$	Seção de choque de transporte, $cm^{-1}$
$\Sigma_a$	Seção de choque macroscópica de absorção, $cm^{-1}$
$Q$	Fonte de nêutrons, $cm^{-3}s^{-1}$
$\chi$	Probabilidade que um nêutron pronto apresente energia entre $E$ e $E + dE$ como resultado de uma fissão
$\chi_g$	Probabilidade que um nêutron gerado em uma fissão com energia no grupo $g$
$\nu$	Número médio de nêutrons produzidos na fissão
$N$	Densidade atômica, $cm^{-3}$
$\sigma_t$	Seção de choque microscópica total, $cm^2$
$\Sigma_f$	Seção de choque macroscópica de fissão, $cm^{-1}$
$Q_{ext}$	Fonte externa de nêutrons, $cm^{-3}s^{-1}$
$\Sigma_s$	Seção de choque macroscópica de espalhamento, $cm^{-1}$
$\Sigma_T$	Seção de choque total, $cm^{-1}$
$\beta$	Fração de nêutrons atrasados
$\beta_i$	Fração de nêutrons atrasados para o grupo $i$ de precursores

$\lambda$	Constante de decaimento, $s^{-1}$
$\lambda_i$	Constante de decaimento do grupo $i$ , $s^{-1}$
$C_i$	Concentração de precursores de nêutrons atrasados para o grupo $i$ de precursores, $cm^{-3}$
$f_i$	Probabilidade de um neutron atrasado apresentar energia entre $E$ e $E + dE$ como resultado do decaimento do $i$ -ésimo emissor
$\Psi$	Função forma
$k_{eff}$	Coeficiente de multiplicação efetivo
$t$	tempo, $s$
$\Lambda$	Tempo médio de geração entre o nascimento do nêutron e posterior absorção, $s$
$\rho$	Reatividade
$I$	intensidade de nêutrons que atinge o alvo, $cm^{-2}s^{-1}$

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>NOÇÕES BÁSICAS DA FISSÃO NUCLEAR EM REATORES NUCLEARES</b>	<b>19</b>
2.1	Principais características dos nêutrons prontos	21
2.2	Principais características dos nêutrons atrasados	21
<b>3</b>	<b>TEORIA DA DIFUSÃO DE NÊUTRONS</b>	<b>23</b>
<b>3.1</b>	<b>Fundamentos dos cálculos de reatores</b>	<b>25</b>
3.1.1	Modelo Monoenergético	25
3.1.2	Cinética de reatores nucleares	29
<b>3.2</b>	<b>Equações da Cinética Pontual</b>	<b>30</b>
<b>4</b>	<b>METODOLOGIA DE SOLUÇÃO PARA AS EQUAÇÕES DA CINÉTICA PONTUAL DE NÊUTRONS</b>	<b>36</b>
<b>4.1</b>	<b>Método da Aproximação de Padé</b>	<b>37</b>
<b>4.2</b>	<b>Definição dos aproximantes de Padé</b>	<b>37</b>
4.2.1	Aproximação de Padé para a função exponencial	40
<b>4.3</b>	<b>Aplicação do Método da Aproximação de Padé para calcular a matriz exponencial gerada pelas Equações da Cinética Pontual de Nêutrons</b>	<b>45</b>
<b>4.4</b>	<b>PCA (<i>Piecewise Constant Approximation</i>)</b>	<b>46</b>
<b>5</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>47</b>
<b>5.1</b>	<b>Inserção de reatividade constante</b>	<b>48</b>
<b>5.2</b>	<b>Inserção de reatividade rampa</b>	<b>54</b>
<b>5.3</b>	<b>Inserção de Reatividade Quadrática</b>	<b>56</b>
<b>5.4</b>	<b>Inserção de Reatividade Zig-Zag</b>	<b>57</b>
<b>5.5</b>	<b>Inserção de Reatividade Senoidal</b>	<b>59</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS</b>	<b>64</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>66</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Existem várias formas para produzir energia elétrica, dentre estas formas de produção encontra-se a energia nuclear que é responsável por cerca de 16% de toda produção de acordo com OCDE (Energia Nuclear da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico). No entanto, existem alguns países com maior dependência da geração de energia elétrica por usinas nucleares de potência. No Brasil, por exemplo, apenas 3% da energia elétrica utilizada provém das usinas nucleares. Já na França 78% da energia elétrica é gerada por elas (Fonte: Agência de Energia Nuclear da OCDE).

Em países como Estados Unidos, existem mais de 100 usinas nucleares e alguns estados utilizam mais este tipo de energia do que outras fontes energéticas, como por exemplo as termoelétricas e hidrelétricas. No Brasil temos em funcionamento apenas duas usinas nucleares, Angra 1 e Angra 2, estando uma terceira, Angra 3 em fase de construção mas que atualmente se encontra paralisada e todas constituindo a Central Nuclear Almirante Álvaro Alberto, situada no Estado do Rio de Janeiro.

Em termos de fontes energéticas, a energia nuclear consiste na produção de eletricidade a partir do processo de fissão nuclear e, em consequência, da reação de fissão nuclear em cadeia, que libera uma grande quantidade de calor (energia térmica). Nesse sentido, as usinas nucleares ou usinas termonucleares são consideradas, atualmente, uma entre as principais opções para o desenvolvimento dos lugares desprovidos de outras fontes de energia como hidrelétricas, térmicas e eólicas.

No Brasil, o Urânio 235 é o principal combustível<sup>1</sup> utilizado na fissão nuclear das usinas termonucleares e este combustível libera mais energia do que a queima do carvão mineral, que é o principal material utilizado nas usinas termoelétricas convencionais.

Vale ressaltar que, Urânio 235 é um isótopo de urânio que é responsável por cerca de 0.72% do urânio natural. Diferente do isótopo predominante, o urânio 238, ele é físsil, ou seja, ele pode sustentar uma reação em cadeia de fissão nuclear. É o único

---

<sup>1</sup>combustível - indica algo que queima, que não é o que acontece com materiais fissionáveis, mas na área é utilizado este jargão para indicar material de fissão no núcleo do reator.

isótopo natural e físsil que é encontrado na natureza em quantidades relevantes, além de ser um nuclídeo primordial.

Um dos aspectos positivos da energia nuclear está relacionado com as grandes reservas de Urânio e sua eficiência energética comparadas com as usinas de combustíveis fósseis. Além disso, esta usina requer uma menor área para instalação de uma unidade nuclear. Estas possibilitam maior independência energética para os países importadores de petróleo e gás e não contribui para o efeito estufa, pois elas não emitem o  $CO_2$ .

Como aspectos negativos tem-se as possibilidades de fabricação de armas nucleares que muitas vezes são evidenciadas por países que a utilizam. Além disso, o lixo atômico deve ser propriamente destinado, seguindo normas internacionais, para áreas que não sejam habitadas e nem utilizadas para outros fins. Cabe ressaltar que os acidentes nucleares podem resultar em liberação de material radioativo que levam a contaminar uma região. Por exemplo, o Plutônio 239 leva 24.000 anos para ter sua radioatividade reduzida à metade, e cerca de 50.000 anos para tornar-se inócuo.

As grandes reservas brasileiras de Urânio, além do domínio tecnológico que o País tem sobre o ciclo do combustível nuclear e as preocupações com as mudanças climáticas globais, são fortes motivações para o aprofundamento da discussão da geração elétrica nuclear no Brasil.

Com o exposto acima, nota-se a grande importância e o desenvolvimento de estudos na área nuclear visando um estudo detalhado da população de nêutrons, que é diretamente proporcional à potência gerada pelo reator. Com isso, é de suma importância o aprimoramento dos modelos matemáticos para descrever a distribuição de nêutrons no núcleo do reator com certa confiabilidade e segurança. Para isso, muitos modelos matemáticos foram construídos para prever a população de nêutrons no núcleo do reator. Dentre esses, tem-se o modelo de transporte de nêutrons e o modelo de difusão de nêutrons.

A Equação de Transporte de Nêutrons é uma equação a sete variáveis, três espaciais, duas angulares, uma temporal e uma energética; e a Equação da Difusão de Nêutrons é uma equação a cinco variáveis sendo três espaciais, uma temporal e uma energética. Embora a Equação da Difusão de Nêutrons seja um modelo mais simplificado ainda é de grande importância para o cálculo global na distribuição de nêutrons no núcleo do reator, uma vez que ela fornece uma aproximação com certo grau de precisão e rapidez para os cálculos de criticalidade em física do reator.

Nos reatores, o curso de uma reação em cadeia é determinado pela probabilidade de que um nêutron liberado na fissão cause uma fissão subsequente. Se a população de nêutrons em um reator diminui durante um determinado período de tempo, a taxa de fissão diminuirá e, finalmente, cairá para zero. Nesse caso, o reator estará no que é conhecido como estado subcrítico. Se ao longo do tempo a população de nêutrons

for sustentada a uma taxa constante, a taxa de fissão permanecerá estável, e o reator estará no que é chamado de estado crítico. Finalmente, se a população de nêutrons aumentar ao longo do tempo, a taxa de fissão e a potência aumentarão, e o reator estará em um estado supercrítico.

O afastamento do estado crítico do reator dá-se pelas variações de potências requeridas ou por condições intrínsecas associadas aos produtos de fissão gerados pelo núcleo do reator. Este afastamento da criticalidade pode ser melhor observado pelo modelo de cinética espacial, na qual, a distribuição de nêutrons é contabilizada por uma função forma e uma função temporal. Segundo LAMARSH; BARATTA (2001), um modelo mais simplificado para contabilizar os efeitos dos nêutrons atrasados é o modelo da cinética pontual que considera uma função forma conhecida e preocupa-se exclusivamente com a função amplitude que varia com o tempo.

Neste trabalho o modelo utilizado é o da cinética pontual de nêutrons que estima a distribuição temporal da população de nêutrons em reatores nucleares.

O modelo da cinética pontual de nêutrons representa a interação dos nêutrons prontos e atrasados gerados pelo processo de fissão nuclear. Esta reação nuclear é exotérmica, ou seja, libera energia junto com seus produtos, sendo estes dois ou mais núclídeos de massa menor que a do original e nêutrons. Estes são categorizados em duas escalas de tempo: nêutrons rápidos que são gerados instantaneamente após a fissão, e nêutrons atrasados, gerados após o decaimento de seus precursores.

O balanço entre a perda e a produção destes nêutrons é crucial para o controle dos reatores nucleares, e é neste balanço temporal que o modelo de cinética pontual de nêutrons se baseia.

As metodologias desenvolvidas para estes modelo simplificado normalmente são estendidas para o modelo de cinética espacial de nêutrons que consideram a distribuição tanto temporal quando espacial dos nêutrons em reatores nucleares.

Ao longo dos anos, diversos métodos foram implementados no modelo da cinética pontual de nêutrons, em sua maioria, numéricos. Para ilustração, citam-se alguns recentes. Em PATRA; SAHA RAY (2014) usaram um método baseado no de Haar para obter a solução para problemas lineares de cinética pontual, enfatizando a eficiência do método, mas sem aplicações em sistemas não lineares. LEPPANEN et al. (2014) implementaram um código de Monte Carlo para obter parâmetros efetivos para a cinética pontual de nêutrons, alegando que os clássicos não são determinados precisamente. ESPINOSA-PAREDES et al. (2014) apresentaram e resolveram o modelo da cinética pontual fracionária (com derivadas de ordem fracionárias) não linear, com retroalimentação newtoniana de temperatura, baseado no modelo de onda para difusão. SCHRAMM et al. (2016) utilizaram a técnica da decomposição de Adomian e a definição de Riemann-Liouville para derivadas fracionárias para obter uma solução muito próxima do modelo original da cinética pontual de nêutrons, concluindo que o

modelo da cinética pontual fracionária não serve para situações mais realísticas, como em retroalimentação de temperatura.

Outros trabalhos sobre as Equações da Cinética Pontual de Nêutrons com abordagens analíticas, numéricas e híbridas já foram publicados como KINARD; ALLEN (2004) que apresentaram solução numérica eficiente das Equações da Cinética Pontual na dinâmica de reatores nucleares. ESPINOSA-PAREDES et al. (2011) resolveram as Equações da Cinética Pontual de Nêutrons fracionárias para a dinâmica do reator nuclear. O modelo fracionário retém as principais características para as dinâmicas do movimento de nêutrons, em que o tempo de relaxamento associado a uma rápida variação no fluxo de nêutrons contém uma ordem fracionária, atuando como expoente do tempo de relaxamento, para obter a melhor representação da dinâmica de um reator nuclear. HAYES; ALLEN (2005) apresentaram Equações da Cinética Pontual Estocásticas na dinâmica de reatores nucleares. Um sistema de equações diferenciais estocásticas de Itô é derivado desse modelo na dinâmica da densidade de nêutrons e os precursores de nêutrons atrasados em um reator nuclear. O modelo estocástico é testado em comparação com cálculos de Monte Carlo e dados experimentais. Os resultados demonstraram que o modelo de equações diferenciais estocásticas descreve com precisão o comportamento aleatório da densidade de nêutrons e as concentrações de precursores em um reator. ABOANBER; NAHLA (2002a) trouxeram um estudo na generalização do método de inversão analítica para a solução das Equações da Cinética Pontual. Apresentaram um método baseado na inversão analítica de polinômios da matriz fornecida pelas Equações da Cinética Pontual aplicado à solução das equações da cinética do reator. Este método permite uma inversão rápida de polinômios, indo temporariamente para o plano complexo. Em ABOANBER; NAHLA (2002b) abordaram soluções das Equações da Cinética Pontual na presença de realimentação de temperatura newtoniana por aproximações de Padé através do método de inversão analítica. Um método baseado nas aproximações de Padé é aplicado à solução das Equações da Cinética Pontual com uma reatividade variável no tempo. A técnica consiste em tratar explicitamente as raízes da fórmula de *inhour*. Os resultados são apresentados para vários casos de aproximações de Padé usando várias opções do método com diferentes tipos de reatividade. Em NAHLA (2011) utilizaram o método da série de Taylor para resolver as Equações da Cinética Pontual não linear com múltiplos grupos de nêutrons atrasados na presença de reatividade de realimentação de temperatura newtoniana e sendo programado em FORTRAN. PETERSEN et al. (2011) apresentaram uma solução analítica das Equações da Cinética Pontual com a reatividade variável no tempo pelo método de decomposição assumindo que a reatividade é uma função arbitrária do tempo. E por fim, as aproximações de Padé e as Equações da Cinética Pontual de Nêutrons, trabalhos como de ABOANBER; NAHLA (2004) apresentaram as aproximações de Padé em aplicação às

Equações da Cinética Pontual que permitem aproximar a função exponencial de maneira econômica.

NÓBREGA (1971) apresentou uma técnica baseada nas aproximações de Padé sendo aplicada à solução das Equações da Cinética Pontual. O método tratou explicitamente as raízes da fórmula inhour, o que tornaria imprecisas as aproximações de Padé. Além disso, é desenvolvido um método analítico que permite uma rápida inversão de polinômios da matriz cinética dos pontos e tem aplicabilidade direta às aproximações de Padé.

Os resultados são apresentados para vários casos de reatividade usando várias opções do método. Concluindo que a técnica fornece um método computacional rápido e preciso para as Equações da Cinética Pontual.

De uma maneira geral, o interesse está principalmente no desenvolvimento de um modelo novo para cinética pontual, juntamente na aplicação de um método numérico para sua resolução com perturbações resultantes aplicadas à solução das Equações da Cinéticas Pontuais do reator nuclear com diferentes tipos de reatividade.

Este trabalho trata da necessidade de obter modelos eficientes para a cinética pontual de nêutrons, devido a sua dificuldade. Neste sentido, ao longo da execução desta dissertação, pretende-se desenvolver uma metodologia para a cinética pontual de nêutrons clássica, focada em obter um menor custo computacional. De uma maneira geral, como o modelo da cinética pontual já foi suficientemente resolvido ao longo dos anos por diversos métodos, desenvolve-se uma metodologia para as equações a fim de expandir para modelos mais realísticos (modelo de cinética espacial).

É importante salientar que para a abordagem dos aproximantes de Padé estudasse as seguintes obras como: ARIOLI; CODENOTTI; FASSINO (1996) analisaram o método de Padé para calcular a exponencial de uma matriz real. Mais precisamente, estudaram o erro de arredondamento introduzido pelo método no caso geral e em três casos especiais. Para essas matrizes especiais, verificaram que o método de Padé é estável. E por fim, compararam o limite superior de Ward com resultados encontrados e mostrando que os limites utilizados são geralmente mais estreitos; e AGUILERA-NAVARRO et al. (1999) que fundamenta uma boa parte desta dissertação.

Neste trabalho, encontra-se uma solução aproximada para o modelo clássico da cinética pontual de nêutrons, pois são modelos de aproximação mais simples. Cabe ressaltar que este modelo determina o comportamento da amplitude do fluxo de nêutrons com o tempo admitindo total separabilidade no tempo e espaço, cuja forma do fluxo espacial de nêutrons é conhecida, tornando essas equações dependentes unicamente do tempo (PETERSEN, 2011). Assim, obtém-se um método eficiente para a determinação da população de nêutrons em reatores nucleares térmicos em cada instante de tempo. Além disso, desenvolve-se uma metodologia genérica e precisa que foca em obter as restrições e aplicabilidade necessárias. E por fim, implementa-

se o método proposto em uma linguagem de programação, neste caso o Scilab, simulando diversos casos recorrentes na literatura e comparando os resultados presentes na literatura.

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira:

No capítulo 2, apresentam-se conceitos sobre noções básicas da fissão nuclear em reatores nucleares determinando as principais características dos nêutrons prontos e nêutrons atrasados. No capítulo 3, estuda-se a Teoria da Difusão de Nêutrons juntamente com fundamentos dos cálculos de reatores e as Equações da Cinética Pontual. No capítulo 4, mostra-se a solução para as Equações da Cinética Pontual de Nêutrons com aplicação do Método da Aproximação de Padé. No Capítulo 5, mostra-se os resultados obtidos com simulações numéricas analisando e comparando com os disponíveis na literatura. As comparações foram realizadas com vários tipos de reatividades e se encontram tabelados neste capítulo. No capítulo 6, apresentam-se as conclusões e perspectivas para trabalhos futuros.

## 2 NOÇÕES BÁSICAS DA FISSÃO NUCLEAR EM REATORES NUCLEARES

A energia nuclear vem de conversões espontâneas de núcleos ou de conversões de núcleos induzidos. Entre essas conversões (reações nucleares) pertencem, por exemplo, a fissão nuclear, a decaimento radioativo e a fusão nuclear. As conversões estão associadas a mudanças de massa e energia. Um dos resultados surpreendentes da teoria da relatividade de Einstein é que massa e energia são equivalentes e conversíveis, uma na outra. A equivalência da massa e energia é descrita pela famosa fórmula de Einstein:

$$E = mc^2, \quad (1)$$

onde  $m$  é a quantidade de massa e  $c$  é a velocidade da luz.

Existem núcleos que podem sofrer fissão espontaneamente, mas apenas certos núcleos, como o Urânio 235, o Urânio 233 e o Plutônio 239, podem sustentar uma reação em cadeia da fissão. Isso ocorre porque esses núcleos liberam nêutrons quando se quebram, e esses nêutrons podem induzir a fissão de outros núcleos. Nêutrons livres liberados por cada fissão desempenham um papel muito importante como um gatilho da reação (WILLIAMS, 1991).

Uma reação em cadeia nuclear ocorre quando uma única reação nuclear causa uma ou mais reações nucleares subsequentes, levando à possibilidade de uma série de autopropagações dessas reações. O *um* ou *mais* é o parâmetro chave da física do reator (processo de fissão nuclear). Para aumentar ou diminuir a potência, a quantidade de reações deve ser alterada (usando as hastes de controle) de modo que o número de nêutrons presentes (e, portanto, a taxa de geração de energia) seja reduzido ou aumentado.

Então tem-se como principais características da fissão nuclear:

- A fissão nuclear é o principal processo gerador de energia nuclear;
- A maior parte da energia (aproximadamente 85 por cento) é liberada na forma de energia cinética das partes divididas;

- Os nêutrons provocam a fissão nuclear;
- O processo de fissão produz nêutrons livres (2 ou 3) em média mas é possível que uma fissão emita 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... nêutrons livres, entretanto suas probabilidades são ínfimas se comparadas à probabilidade de emitir 2 ou 3;
- A reação em cadeia significa que a reação induz uma ou mais reações;
- A probabilidade de que a fissão ocorra depende da energia do nêutron incidente;
- O moderador é usado para desacelerar os nêutrons (para aumentar a probabilidade de fissão);
- Para reatores que usam água leve como moderador, é necessário o uso de combustível enriquecido, o Urânio. Por não ser físsil o U-238 não é empregado em reatores e com isso utiliza-se U-235 que tem proporção maior em relação ao U-238.
- Barras de controle contém material que absorve nêutrons (Boro, Cádmio, ...);
- A retirada das barras de controle aumenta o fator de multiplicação, aumentando assim a potência e a inserção das barras diminui o fator de multiplicação, diminuindo assim a potência. Cabe ressaltar que o fator de multiplicação é influenciado também por outros parâmetros, como temperatura, queima de combustível e envenenamento do reator, sendo que a fissão ocorre no núcleo do reator nuclear. E o núcleo do reator é composto de combustível nuclear, barras de controle, moderador (refrigerante) e refletor de nêutrons.

Em geral, a reação de fissão induzida por nêutrons é a reação em que os nêutrons incidentes entram no núcleo alvo pesado (núcleo físsil) formando um núcleo composto que é movimentado de um tal alto nível de energia ( $E$  excitação  $>$   $E$  crítico) que esse núcleo se divide em dois grandes fragmentos de fissão. Uma grande quantidade de energia é liberada na forma de radiação e energia cinética do fragmento. Além disso, o processo de fissão pode produzir 2, 3 ou mais nêutrons livres e esses nêutrons podem desencadear mais fissão e uma reação em cadeia pode ocorrer. Para entender o processo de fissão, precisamos entender processos que ocorrem dentro do núcleo para serem fissionados via a energia de ligação nuclear no interior do reator.

A rigor, atualmente estão sendo desenvolvidos reatores que funcionam com a colisão com prótons, não nêutrons. Pode-se dizer que no caso de estudo desta dissertação, os nêutrons são importantes para a reação em cadeia. Os nêutrons desencadeiam a fissão nuclear de alguns núcleos como em Urânio 235, Urânio 238 ou até Tório 232. Até mesmo a natureza da criação desses nêutrons é diferente. Desse ponto de vista, geralmente dividimos os nêutrons da fissão em dois grupos:

**Nêutrons Prontos:** Nêutrons imediatos que são emitidos diretamente da fissão e são emitidos dentro de um tempo muito curto de cerca de  $10^{-14}$  segundos (JAMES et al., 1981).

**Nêutrons atrasados:** Nêutrons atrasados são emitidos por fragmentos de fissão ricos em nêutrons que são chamados de precursores de nêutrons atrasados. Estes precursores geralmente sofrem decaimento beta, mas uma pequena fração deles é excitada o suficiente para sofrer emissões de nêutrons.

## 2.1 Principais características dos nêutrons prontos

Como mencionado acima, os nêutrons prontos são emitidos diretamente da fissão e são emitidos dentro de um tempo muito curto de cerca de  $10^{-14}$  segundos. A maioria dos nêutrons produzidos na fissão são imediatos - cerca de 99,5 por cento. Por exemplo, uma fissão de Urânio 235 por nêutrons térmicos produz em média 2,43 nêutrons, dos quais 2,42 nêutrons são imediatos e 0,01 são atrasados.

A produção de nêutrons prontos aumenta levemente com a energia de nêutrons incidente. Quase todos os nêutrons de fissão imediatos têm energias entre 0,1 MeV e 10 MeV. A energia média dos nêutrons é de cerca de 2 MeV e a energia de nêutrons mais provável é de cerca de 0,7 MeV. Seu valor depende especialmente do tipo do moderador e da energia dos nêutrons que causam fissão. Em um reator infinito (sem escape), a vida útil dos nêutrons é a soma do tempo de desaceleração e do tempo de difusão. O tempo de vida de nêutrons rápidos em reatores térmicos é da ordem de  $10^{-4}$  segundos enquanto em reatores rápidos é da ordem de  $10^{-7}$  segundos (OKA; SUZUKI et al., 2013).

## 2.2 Principais características dos nêutrons atrasados

A presença de nêutrons atrasados é talvez o aspecto mais importante do processo de fissão do ponto de vista do controle do reator. Nêutrons atrasados são emitidos por fragmentos de fissão ricos em nêutrons que são chamados de precursores de nêutrons atrasados. Estes precursores geralmente sofrem decaimento beta, mas uma pequena fração deles é excitada o suficiente para sofrer emissões de nêutrons. A emissão de nêutrons acontece com ordens de grandeza muito mais tarde em comparação com a emissão dos nêutrons imediatos. A fim de simplificar os cálculos cinéticos do reator, sugere-se agrupar os precursores com base em suas meias-vidas. Portanto, os nêutrons atrasados são tradicionalmente representados por seis grupos de nêutrons atrasados.

Sua presença muda completamente a resposta dinâmica do tempo de um reator para alguma mudança de reatividade, tornando-o controlável por sistemas de controle,

como as hastes de controle.

Para entender o que acontece no interior do reator nuclear, necessita-se compreender todos os parâmetros que envolvem as reações no núcleo do reator para então constituir um balanço entre as perdas e produções de nêutrons. E para essa situação tem-se a Equação de Transporte de Boltzmann dependente do tempo que leva em conta além dos nêutrons prontos também os nêutrons atrasados (DUDERSTADT; HAMILTON, 1976) que define de forma íntegra a população de nêutrons, mas possui o obstáculo de ser uma equação de difícil resolução devido ao número de variáveis que definem o problema, entre outras complicações. O número de variáveis é apenas um dos motivos que transporte é mais complicado que difusão. Por exemplo, a equação do transporte é íntegro-diferencial também. A equação da difusão é mais utilizada e também é mais simples que a de transporte, pois as Equações da Cinética Pontual vêm do princípio da separabilidade dos efeitos espaciais e temporais na equação da difusão.

Vale a pena salientar que as Equações da Cinética Pontual de Nêutrons são muito importantes na física de reatores, pois possibilitam uma previsão da potência do reator em tempo real, fornecendo dados importantes sobre a dinâmica do reator quando, por exemplo, a ocorrência de ajuste das barras de controle no núcleo do reator durante a partida ou desligamento.

No capítulo seguinte, aborda-se de maneira sucinta a Teoria da Difusão e com isso se busca conhecer o processo que envolve a equação da difusão que rege a cinética de reator.

### 3 TEORIA DA DIFUSÃO DE NÊUTRONS

Nesta parte, estudam-se as condições para uma reação em cadeia de fissão estável e autossustentável e como manter tais condições. Esse problema não contém informações sobre a distribuição espacial de nêutrons, porque é um problema de geometria pontual. Caracterizam-se os efeitos da distribuição global de nêutrons simplesmente por uma probabilidade de não-fuga (térmica ou rápida), que aumenta em direção a um valor à medida que o núcleo do reator se torna maior (LEWINS, 2013).

De acordo com LEWINS (2013) projetar corretamente um reator nuclear e obter-se a previsão de como os nêutrons serão distribuídos por todo o sistema é da maior importância. Este é um problema muito difícil, porque os nêutrons interagem de forma diferente com diferentes ambientes (moderador, combustível, etc.) que estão em um núcleo de reator. Os nêutrons sofrem várias interações quando migram através do sistema multiplicador. Para uma primeira aproximação, o efeito geral dessas interações faz com que os nêutrons sofram um tipo de difusão no núcleo do reator, muito parecido com a difusão de gases. Por isso, a difusão de nêutrons é baseada na Teoria da Difusão de Gases. Assim, a aproximação permite resolver esse problema usando a equação da difusão.

Além disso, utiliza-se a Teoria da Difusão para entender as relações entre tamanho, forma e criticalidade do reator, e para determinar as distribuições de fluxos espaciais em reatores de potência. A Teoria da Difusão fornece base teórica para uma computação física de nêutrons de núcleos fissionáveis (STACEY, 2018).

Analisa-se as distribuições espaciais de nêutrons e a Teoria da Difusão de um grupo para um meio uniforme não multiplicador. Isso significa que o fluxo de nêutrons e seções transversais já foram calculados sobre energia. Um modelo relativamente simples tem a grande vantagem de ilustrar muitas características importantes da distribuição espacial de nêutrons sem a complexidade introduzida pelo tratamento de efeitos associados ao espectro de energia de nêutrons (LAMARSH, 1966).

Além disso, os métodos matemáticos usados para analisar uma equação da difusão de um grupo são os mesmos aplicados em métodos mais sofisticados e precisos, como a Teoria da Difusão de múltiplos grupos. Posteriormente, a Teoria da

Difusão de um grupo será aplicada em um meio multiplicador uniforme (um "reator nuclear" homogêneo) em geometrias simples. Finalmente, a Teoria da Difusão Multi-grupo pode ser aplicada em um meio multiplicador não uniforme (um "reator nuclear" heterogêneo) em geometrias simples (LAMARSH; BARATTA, 2001).

Em REUSS (2012), Transporte de Nêutrons é o estudo dos movimentos e interações de nêutrons com materiais. Cientistas e engenheiros nucleares frequentemente precisam saber onde estão os nêutrons, em que direção estão indo e com que velocidade estão se movendo. Então se utiliza um determinado aparelho que é comumente usado para determinar o comportamento de núcleos de reatores nucleares e feixes de nêutrons experimentais. Os nêutrons são partículas neutras viajando em linhas retas, desviando-se de seu caminho somente quando eles colidem com um núcleo para serem espalhados em uma nova direção ou absorvidos. Teoria de transporte é relativamente simples, em princípio, e uma equação de transporte exata que rege este fenômeno pode ser facilmente derivada. Essa equação é chamada de Equação de Transporte de Boltzmann e todo o estudo da Teoria dos Transportes se concentra no estudo dessa equação.

Alguns métodos resolvem a Equação de Transporte de Boltzmann de maneira numericamente aproximada em todo o sistema modelado. Essa tarefa exige enormes recursos computacionais porque o problema tem muitas dimensões. Mas a Equação de Transporte de Boltzmann pode ser tratada de maneira bastante direta. Esta versão simplificada da Equação de Transporte de Boltzmann é a equação da difusão de nêutrons. Naturalmente, há muitas suposições que precisam ser cumpridas ao usar a equação da difusão, mas o uso da equação da difusão geralmente fornece uma aproximação simplificada da equação de transporte.

No modelo monoenergético assume-se que todos os nêutrons se caracterizam por uma única energia cinética que simplifica o estudo matemático do fenômeno da difusão. Neste modelo os resultados são muito precisos podendo ser utilizado para uma análise preliminar dos cálculos globais dos reatores nucleares.

No modelo multigrupo de energia os nêutrons em um reator variam de 10 MeV para menos do que 0,01 eV. Aqui busca-se desenvolver uma abordagem mais detalhada sobre a distribuição de nêutrons no reator se identificando como as varias reações acontecem. Como mencionado na seção anterior, os nêutrons penetram/interagem em qualquer núcleo por serem eletricamente neutros sofrendo vários tipos de reações dentro do reator nuclear que envolvem perdas e ganhos na produção e isso denomina-se balanço de nêutrons. Deste modo, se constrói a equação de balanço de nêutrons que se pode levar em consideração efeitos de fuga e isótopos fissionáveis com o intuito de descrever fenômenos de criticalidade em sistemas multiplicativos de dimensões finitas (LEWIS, 2008). Neste caso considera-se um volume arbitrário  $V$  de área de superfície  $S$  que se localiza no interior do reator:

$$\text{Número esperado de nêutrons} = n(\mathbf{r}, E, t)d^3\mathbf{r}dE. \quad (2)$$

A representação completa da densidade exige sete variáveis, três para as coordenadas espaciais representadas pelo vetor  $\mathbf{r}$  que indica a posição, duas angulares, na direção do movimento, uma para a energia cinética (velocidade) e uma temporal (instante de observação). É importante ressaltar que quando os nêutrons são produzidos, possuem energia cinética elevada (aproximadamente 1 até 10 MeV) e, devido a esse fato, são definidos como nêutrons rápidos. Através do processo de moderação, no qual cedem energia ao meio devido as colisões, atingem energias intermediárias (em torno de 1 até 1000 keV), passando a serem chamados de nêutrons intermediários. Quando alcançam energias baixas próximas a energia térmica (aproximadamente 0,025 eV), denominam-se nêutrons térmicos (DUDERSTADT; HAMILTON, 1976).

### 3.1 Fundamentos dos cálculos de reatores

A partir desta seção derivam-se as principais equações em física de reatores, que serão de grande importância nesta dissertação.

#### 3.1.1 Modelo Monoenergético

No modelo monoenergético assumem-se que todos os nêutrons se caracterizam por uma única energia cinética, e assim simplifica-se o estudo matemático do fenômeno da difusão. Então, neste modelo os resultados não são muito precisos mas sendo utilizado para fazer análises preliminares dos cálculos globais de reatores nucleares.

Tem-se como processo importante o fluxo de nêutrons que indica quando um feixe de nêutrons de intensidade  $I$  atinge um alvo. Isto é dado por:

$$F = \Sigma_T I, \quad (3)$$

onde o número de colisões é  $cm^3 \cdot s$  na qual  $F$  é o número de colisões,  $\Sigma_T$  é a seção de choque macroscópica total, em  $cm^{-1}$  e  $I$  é a intensidade de nêutrons que atinge o alvo, em  $cm^{-2}s^{-1}$ . Sendo que  $\Sigma_T$ , a seção de choque, surge do fato que este relaciona-se com a probabilidade de colisão de um nêutron com os núcleos dos átomos que formam uma determinada área macroscópica de um material.

Partindo da definição de  $\Sigma_T$ , tem-se:

$$\Sigma_T = N\sigma_t, \quad (4)$$

onde,  $N[cm^{-3}]$  é a densidade atômica e  $\sigma_t[cm^2]$  é a seção de choque microscópica total. Então  $\Sigma_T$  tem unidade de  $[cm^{-1}]$ . A intensidade desses feixes é dada por:

$$F = \Sigma_T(I_A + I_B + I_C + \dots), \quad (5)$$

onde esta equação define os feixes de nêutrons que incidem num alvo. Com isso se assume que os nêutrons são monoenergéticos e escreve-se a Equação (4) como:

$$F = \Sigma_T(n_A + n_B + n_C + \dots)v, \quad (6)$$

onde,  $n_A, n_B, n_C, \dots$  são as densidades dos vários feixes e  $v$  é a velocidade do nêutron. Assim,  $(n_A + n_B + n_C + \dots)$  é igual a  $n$ , a densidade total de nêutrons atingindo o alvo. Então a Equação (6) torna-se:

$$F = \Sigma_T nv. \quad (7)$$

A quantidade  $nv$  na Equação (7) é definida como fluxo escalar de nêutrons. Com relação à esta situação o fluxo de nêutrons monoenergéticos são representados pelo símbolo  $\Phi$ , e é dado por:

$$\Phi = nv. \quad (8)$$

A unidade para o fluxo de nêutrons é  $[cm^{-2} \cdot s^{-1}]$ . Então tem-se,

$$F = \Sigma_T \Phi, \quad (9)$$

e com esta equação incluem-se os nêutrons rápidos e térmicos, definindo  $n(E)$  como a densidade de nêutrons por unidade de energia. Portanto  $n(E)dE$  é o número de nêutrons por  $cm^3$  com energia entre  $E$  e  $E + dE$ . Da equação (7), a taxa de interação para estes nêutrons torna-se:

$$dF = \Sigma_T(E)n(E)v(E)dE \quad (10)$$

Nota-se aqui a dependência de todos os parâmetros, sendo a taxa de interação total dada pela integral.

$$F = \int_0^{\infty} \Sigma_T(E)n(E)v(E)dE, \quad (11)$$

onde

$$\Phi(E) = n(E)v(E) \quad (12)$$

é o fluxo escalar que depende da energia ou fluxo por unidade de energia (DUDERS-TADT; HAMILTON, 1976). A Equação (11) referente à interação total e com isso podem-se encontrar expressões para o número de colisões de espalhamento por  $cm^3$ , que é,

$$F_s = \int_0^{\infty} \Sigma_s(E)\Phi(E)dE \quad (13)$$

já para o número de nêutrons absorvidos por  $cm^3$  tem-se:

$$F_a = \int_0^{\infty} \Sigma_a(E)\Phi(E)dE. \quad (14)$$

### 3.1.1.1 A equação da difusão de nêutrons monoenergética.

Neste caso, tem-se um volume  $V$  de área de superfície  $S$  que se localiza no interior de um meio material, na qual existe uma fonte fixa de nêutrons. Com isso, para modelar matematicamente a população de nêutrons que varia no interior desse volume, examina-se com cuidado esse balanço.

O número total em  $V$  no tempo  $t$  pode ser obtido pela integração do volume que é dado por:

$$\int_V d^3\mathbf{r}n(\mathbf{r}, t) = \int_V d^3\mathbf{r}\frac{1}{v}\Phi(\mathbf{r}, t). \quad (15)$$

Assim, a taxa de mudança de número de nêutrons em  $V$  deve ser:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \int_V d^3\mathbf{r}n(\mathbf{r}, t) \right] &= \int_V d^3\mathbf{r}\frac{1}{v}\frac{\partial\Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ &= \text{Produção em } V - \text{Absorção em } V \\ &\quad - \text{Taxa de fuga pelo contorno do volume } V. \end{aligned} \quad (16)$$

Para a modelagem matemática, precisa-se escrever expressões matemáticas para obter todos esses termos. Além disso, definindo-se uma densidade de fonte  $Q(\mathbf{r}, t)$ , tem-se:

$$\text{Produção} \equiv \int_V d^3\mathbf{r}Q(\mathbf{r}, t). \quad (17)$$

A taxa de densidade em algum ponto em  $V$  é  $\Sigma_a(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}, t)$ , logo a taxa total de nêutrons perdidos por absorção em  $V$  é:

$$\text{Absorção} \equiv \int_V d^3\mathbf{r}\Sigma_a(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}, t). \quad (18)$$

Sendo  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  a densidade de corrente de nêutrons, então a taxa de nêutrons que passa através de um elemento de superfície  $dS$  no ponto  $\mathbf{r}_s$  é  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)dS$ . Portanto, a taxa total de fuga ou escape pela superfície de contorno do volume  $V$  é:

$$\text{Fuga} \equiv \oint_S dS\mathbf{J}(\mathbf{r}, t). \quad (19)$$

Antes de substituir todas essas expressões na equação (17) é conveniente converter a equação (19) em uma integral de volume. Para isto, se utilizar o Teorema de Gauss e obtem-se:

$$\text{Fuga} \equiv \oint_S dS\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \int_V d^3\mathbf{r}\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t). \quad (20)$$

Substituindo as equações (17),(18) e (20) em (16) encontra-se:

$$\int_V d^3\mathbf{r} \left[ \frac{1}{v}\frac{\partial\Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - Q(\mathbf{r}, t) + \Sigma_a(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \right] = 0. \quad (21)$$

Isto implica que o integrando é nulo, já que o volume de controle  $V$  é arbitrário, logo:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) - \Sigma_a(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}, t) + Q(\mathbf{r}, t). \quad (22)$$

Agora, substituindo a lei de Fick, que afirma que se a concentração de um soluto em uma região é maior do que em outra de uma solução, o soluto se difunde da região de maior concentração para a região de menor concentração, com uma magnitude que é proporcional ao gradiente de concentração. Assim se tem:

$$\mathbf{J} = -D\nabla\Phi, \quad (23)$$

na qual,  $D$  é o coeficiente de difusão. Da equação (22) se obtém:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \nabla \cdot D(\mathbf{r})\nabla\Phi(\mathbf{r}, t) + \Sigma_a(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}, t) = Q(\mathbf{r}, t), \quad (24)$$

que é a equação da difusão monoenergética de nêutrons com fonte fixa. Considerando-se o meio natural onde ocorre a difusão dos nêutrons como homogêneo e uniforme, tem-se que  $D$  e  $\Sigma_a$  dependem da posição. Assim, a equação da difusão monoenergética com fonte fixa pode ser simplificada como:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - D(\mathbf{r})\nabla^2\Phi(\mathbf{r}, t) + \Sigma_a(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}, t) = Q(\mathbf{r}, t). \quad (25)$$

Cumprе salientar que a Teoria da Difusão está fundamentada na lei de Fick, a qual foi originalmente usada para descrever a difusão química. É mostrado em química que se a concentração de um soluto é maior em uma determinada região de uma solução, o soluto sofre difusão da região de maior concentração para a de menor concentração. Além disso, a taxa do fluxo do soluto é proporcional ao gradiente da concentração em sentido oposto (LAMARSH, 1983).

O comportamento de nêutrons assemelha-se muito ao de um soluto em uma solução (LAMARSH, 1983). Se a densidade de nêutrons é maior em uma parte do reator do que em outra, existe um fluxo de nêutrons na direção de menor densidade de nêutrons. É importante ressaltar que os nêutrons não migram simplesmente da região de maior para a de menor concentração, há simplesmente uma maior migração numa direção do que em outra (LAMARSH, 1983).

### 3.1.1.2 Cálculos de Criticalidade.

Os nêutrons num processo de fissão emitem um número de  $\nu$  nêutrons em média por fissão nuclear. Destes  $\nu$  nêutrons, alguns são absorvidos por captura no próprio combustível e alguns desaparecem pelo contorno do reator. Depois de todas essas perdas serem contabilizadas, ainda deve existir um nêutron para cada uma das fissões, caso contrário não será possível manter uma reação em cadeia sustentável.

Deseja-se manter a distribuição de nêutrons em um reator na ausência de fontes externas, mas na presença de uma fonte fissionável. Esta fonte é dada pelo produto da taxa de fissão  $\Sigma_f(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r})$  pelo número de nêutrons emitidos por fissão onde  $\Sigma_f$  é a seção de choque macroscópica de fissão. Então se pode escrever a fonte de nêutrons como:

$$\text{Fonte Reator} \equiv \nu\Sigma_f(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}). \quad (26)$$

Considerando que a equação da difusão monoenergética seja um modelo matemático satisfatório para cálculos neutrônicos em reatores nucleares. Portanto, escreve-se a equação da difusão de nêutrons substituindo a equação (26) no lugar da fonte na equação (25). Desconsiderando a variação temporal da população de nêutrons fica-se com

$$-\nabla \cdot D(\mathbf{r})\nabla\Phi(\mathbf{r}) + \Sigma_a(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) = \nu\Sigma_f(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}). \quad (27)$$

Infelizmente a equação acima não tem solução de relevância física para os casos gerais realísticos, a menos que se corrija a combinação exata da composição e da geometria do reator para que o mesmo esteja crítico. Portanto, o que se faz é introduzir um parâmetro arbitrário  $k$  nesta equação de tal forma que

$$-\nabla \cdot D(\mathbf{r})\nabla\Phi(\mathbf{r}) + \Sigma_a(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{k}\nu\Sigma_f(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}). \quad (28)$$

Logo, para algum valor de  $k$ , pode-se garantir relevância física. Se  $k = 1$ , a equação (28) reduz-se a (27) e, portanto, consegue-se um sistema crítico. Se  $k \neq 1$ , entretanto, precisa-se escolher uma nova combinação entre dimensão e composição para que se atinja a criticalidade.

Claramente, haverá em geral um conjunto de (28), na qual apenas o maior dominante corresponderá a autofunção  $\Phi(\mathbf{r})$  que seja positiva em todos os pontos do sistema e, portanto, fisicamente relevante. Define-se o autovalor dominante como o fator de multiplicação efetivo ( $k_{eff}$ ) que indicará se o sistema está em estado subcrítico ( $k_{eff} < 1$ ), crítico ( $k_{eff} = 1$ ) ou supercrítico ( $k_{eff} > 1$ ) (BELL; GLASSTONE, 1970).

### 3.1.2 Cinética de reatores nucleares

A operação de um reator nuclear a um nível de potência constante com a taxa de produção através da fissão de nêutrons deverá ser balanceada pela perda através da absorção ou fuga de nêutrons, e então se pode determinar que a densidade neutrônica ou o fluxo não depende do tempo, o que caracteriza o estado crítico de um reator.

Deve-se reconhecer que as mudanças no comportamento da população neutrônica, muitas vezes, não estão sob o controle do operador do reator. Em alguns casos, isso dependerá da composição do núcleo que dependerá de outras variáveis que estão diretamente acessíveis ao controle, tal como a temperatura do combustível ou refrigerante.

Entretanto, essas variáveis dependem, por sua vez, do nível de potência do reator e, conseqüentemente do fluxo espacial de nêutrons. Nesta dissertação, dá-se ênfase à cinética de reatores nucleares mais especificamente as variações de fluxo de nêutrons devido a escalas pequenas de tempo, ou seja, o afastamento da criticidade devido a mudança nos parâmetros nucleares para tempos pequenos.

### 3.2 Equações da Cinética Pontual

No desenvolvimento desta seção, o número de nêutrons é multiplicado por um fator  $k_{eff}$  de uma geração de nêutrons para a seguinte geração. Portanto, o ambiente de multiplicação (reator nuclear) se comporta como o sistema exponencial, ou seja, o aumento de potência não é linear mas é exponencial. Pode se notar que o fator de multiplicação efetivo em um sistema multiplicador é uma medida da mudança na população de nêutrons de fissão de uma geração de nêutrons para a geração subsequente.

Quando  $k_{eff} < 1$ , então o número de nêutrons está diminuindo no tempo (com o tempo médio de geração) e a reação em cadeia nunca será autossustentável. Essa condição é conhecida como o estado subcrítico. Para  $k_{eff} = 1$ , então não há mudança na população de nêutrons no tempo e a reação em cadeia será autossustentável. Essa condição é conhecida como estado crítico. E para  $k_{eff} > 1$ , o sistema multiplicador produzirá mais nêutrons do que o necessário para ser autossustentável. O número de nêutrons está aumentando exponencialmente no tempo (com o tempo médio de geração). Essa condição é conhecida como estado supercrítico.

As Equações da Cinética Pontual simples são apenas uma aproximação. A Equação da Cinética Pontual simples com nêutrons atrasados falha completamente para inserções de reatividade mais altas, onde há diferença significativa entre a produção de nêutrons imediatos e atrasados. Portanto, um modelo mais preciso é necessário.

A partir da equação que expressa a variação da concentração dos precursores em um reator nuclear é dada por:

$$\frac{\partial C_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \int \beta_i \nu \Sigma_f(\mathbf{r}, E', t) \Phi(\mathbf{r}, E', t) dE' - \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) \quad (29)$$

para  $i = 1 : P$ . Com acréscimo da contribuição dos nêutrons atrasados, o número de precursores de nêutrons atrasados que decaem e contribuem para a fissão é dado por:

$$\left[ \begin{array}{c} \text{Produção dos} \\ \text{nêutrons atrasados} \end{array} \right] = \sum_i f_i(E) \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t), \quad (30)$$

para  $i = 1 : P$ , onde  $f_i(E)$  representa a probabilidade de um nêutron atrasado apresentar energia entre  $E$  e  $E + dE$  como resultado do decaimento do  $i$ -ésimo emissor.

Logo a seguir, define-se o número de nêutrons produzidos pela fissão subtraído da contribuição dos nêutrons oriundos de decaimento dos produtos de fissão, ou seja, somente os nêutrons prontos:

$$\left[ \begin{array}{c} \text{Produção dos} \\ \text{nêutrons prontos} \end{array} \right] = \int (1 - \beta)\chi(E)\nu\Sigma_f(\mathbf{r}, E', t)\Phi(\mathbf{r}, E', t)dE'. \quad (31)$$

Portanto, a equação da difusão dependente do tempo, acrescentando-se a contribuição dos nêutrons atrasados, pode ser escrita como:

$$\frac{1}{v(E)} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, E, t)}{\partial t} = \nabla \cdot D(\mathbf{r}, E, t)\nabla \Phi(\mathbf{r}, E, t) - \Sigma_T(\mathbf{r}, E, t)\Phi(\mathbf{r}, E, t) + \int (1 - \beta)\chi(E)\nu\Sigma_f(\mathbf{r}, E', t)\Phi(\mathbf{r}, E', t)dE' + \int \Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, t)\Phi(\mathbf{r}, E', t)dE' + \sum_i f_i(E)\lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) + Q_{ext}(\mathbf{r}, E, t), \quad (32)$$

para  $i = 1 : P$ .

Para que se resolva as equações (29) e (32) é necessário conhecer as condições iniciais e de contorno espacial. Sabendo que o núcleo do reator é heterogêneo, ou seja, apresenta regiões distintas (combustível, barras de controle, refrigerante, entre outros). É preciso também impor uma contribuição de continuidade entre as interfaces de regiões distintas para o fluxo e para a corrente de nêutrons.

A equação (32) para o fluxo escalar de nêutrons pode ser de difícil resolução tanto analiticamente como numericamente, causada pela dependência do espaço, energia e tempo dos parâmetros nucleares. Devido a este fato, faz-se simplificações espaciais visando facilitar a sua resolução, proporcionando, assim, prever o comportamento, suficientemente preciso para situações praticas, da população de nêutrons no reator em função do tempo.

Desta forma, levando em consideração que o reator deve compor um balanço entre perdas e a produção que significa que não existe nenhuma perturbação grande devido a fatores internos ou externos e com isso, assume-se que em um transiente:

$$\Phi(\mathbf{r}, E, t) \propto \Psi_0(\mathbf{r}, E)n(t). \quad (33)$$

onde  $\Psi_0(\mathbf{r}, t)$  é a função forma. Vale destacar que a função forma é estimada conforme a geometria e composição do núcleo do reator.

O comportamento de um reator nuclear em que a densidade varia com o tempo pode ser determinado pelas Equações da Cinética Pontual de Nêutrons. Para isso, é necessário que a função forma seja estimada, reduzindo o problema a encontrar a densidade de nêutrons dependente do tempo.

Desta forma, para encontrar as Equações da Cinética Pontual de Nêutrons são feitas as simplificações que seguem. Primeiramente, integra-se as equações dos pre-

cursores de nêutrons atrasados (29) em  $d^3\mathbf{r}$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int C_i(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} = \int \int \beta_i \nu \Sigma_f(\mathbf{r}, E', t) \Phi(\mathbf{r}, E', t) dE' d^3\mathbf{r} - \lambda_i \int C_i(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r}, \quad (34)$$

para  $i = 1 : P$ .

Integrando a Equação (32) em espaço e energia obtém-se:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int \int \frac{1}{v(E)} \Phi(\mathbf{r}, E, t) dE d^3\mathbf{r} = \int \int \nabla \cdot D(\mathbf{r}, E, t) \nabla \Phi(\mathbf{r}, E, t) dE d^3\mathbf{r} \\ & - \int \int \Sigma_T(\mathbf{r}, E, t) \Phi(\mathbf{r}, E, t) dE d^3\mathbf{r} + \int \int [(1 - \beta) \chi(E) \nu \Sigma_f(\mathbf{r}, E', t) \Phi(\mathbf{r}, E', t) dE'] dE d^3\mathbf{r} \\ & + \int \int \int \Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, t) \Phi(\mathbf{r}, E', t) dE' dE d^3\mathbf{r} + \int \int f_i(E) \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) dE d^3\mathbf{r} \\ & + \int \int Q_{ext}(\mathbf{r}, E, t) dE d^3\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (35)$$

para  $i = 1 : P$ , mas como:

$$\begin{aligned} & \int \chi(E) dE = 1, \\ & \int f_i(E) dE = 1, \\ & \int \Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, t) dE = \Sigma_T(\mathbf{r}, E', t) - \Sigma_a(\mathbf{r}, E', t), \end{aligned} \quad (36)$$

para  $i = 1 : P$ , reescreve-se a Equação (35) como:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int \int \frac{1}{v(E)} \Phi(\mathbf{r}, E, t) dE d^3\mathbf{r} = \int \int \nabla \cdot D(\mathbf{r}, E, t) \nabla \Phi(\mathbf{r}, E, t) dE d^3\mathbf{r} - \\ & \int \int \Sigma_T(\mathbf{r}, E, t) \Phi(\mathbf{r}, E, t) dE d^3\mathbf{r} + \int \int (1 - \beta) \nu \Sigma_f(\mathbf{r}, E', t) \Phi(\mathbf{r}, E', t) dE' d^3\mathbf{r} \\ & + \int \int \Sigma_T(\mathbf{r}, E', t) \Phi(\mathbf{r}, E', t) dE' d^3\mathbf{r} - \int \int \Sigma_a(\mathbf{r}, E', t) \Phi(\mathbf{r}, E', t) dE' d^3\mathbf{r} + \\ & \int \sum_i \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} + \int \int Q_{ext}(\mathbf{r}, E, t) dE d^3\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (37)$$

para  $i = 1 : P$ . Simplificando e reajustando os termos, tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int \int \frac{1}{v(E)} \Phi(\mathbf{r}, E, t) dE d^3\mathbf{r} = \int \int \nabla \cdot D(\mathbf{r}, E, t) \nabla \Phi(\mathbf{r}, E, t) dE d^3\mathbf{r} + (\nu \Sigma_f(\mathbf{r}, E, t)) \\ & - \Sigma_a(\mathbf{r}, E, t) \Phi(\mathbf{r}, E, t) dE d^3\mathbf{r} - \int \int \beta \nu \Sigma_f(\mathbf{r}, E, t) \Phi(\mathbf{r}, E, t) dE d^3\mathbf{r} \\ & + \int \sum_i \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} + \int \int Q_{ext}(\mathbf{r}, E, t) dE d^3\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (38)$$

para  $i = 1 : P$ . A partir dessa equação, pode-se identificar a quantidade que representa o número no reator nuclear em um instante  $t$ , ou seja, definindo a densidade de nêutrons como:

$$n(t) = \int \int \frac{1}{v(E)} \Phi(\mathbf{r}, E, t) dE d^3\mathbf{r}. \quad (39)$$

Como explicado anteriormente, é necessário que a função forma seja estimada, então supondo:

$$\Psi_0(\mathbf{r}, E) = \frac{\Phi(\mathbf{r}, E, t)}{n(t)}. \quad (40)$$

Substituindo  $\Phi(\mathbf{r}, E, t)$  nas Equações (34) e (38) e notando que:

$$\int \int \frac{1}{v(E)} \Psi_0(\mathbf{r}, E) dE d^3\mathbf{r} = \int \int \frac{1}{v(E)n(t)} \Phi(\mathbf{r}, E, t) dE d^3\mathbf{r}, \quad (41)$$

e ainda lembrando da definição da Equação (39), pode-se concluir que:

$$\int \int \frac{1}{v(E)} \Psi_0(\mathbf{r}, E) dE d^3\mathbf{r} = 1, \quad (42)$$

para todo  $t$ . Desta forma, a função forma não é separável em espaço, energia e tempo, além de ser proporcional ao fluxo.

Tendo em vista posteriores alterações na derivação das Equações da Cinética Pontual, introduz-se novas definições:

$$C_i(t) = \frac{\int C_i(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r}}{\int \int \frac{1}{v(E)} \Psi_0(\mathbf{r}, E) dE d^3\mathbf{r}}, \quad (43)$$

para  $i = 1 : P$ , como sendo a população total no instante  $t$  do  $i$ -ésimo precursor de nêutrons atrasados e:

$$Q(t) = \frac{\int \int Q_{ext}(\mathbf{r}, E, t) dE d^3\mathbf{r}}{\int \int \frac{1}{v(E)} \Psi_0(\mathbf{r}, E) dE d^3\mathbf{r}}, \quad (44)$$

como sendo a fonte total no instante  $t$ .

Assim, para reescrever as equações integradas utilizando os parâmetros cinéticos, é necessário definir a reatividade. Para tanto, é imprescindível lembrar que o processo multiplicativo de reações em cadeia não só pode aumentar o número de nêutrons, como também reduzi-lo ou mantê-lo. Portanto, a razão anterior é chamado de fator de multiplicação ( $k_{eff}$ ) e é o que determina o comportamento da densidade de nêutrons no reator em função do tempo.

O fator de multiplicação efetivo pode ser afastar da criticalidade e essa distância pode ser medida pela reatividade, que é a taxa líquida instantânea de produção de nêutrons dividida pela taxa instantânea devido a fissão. A reatividade pode assumir três casos:  $\rho(t) < 0$ , em que o sistema é subcrítico em que o número de fissões e a população de uma geração é menor que a geração anterior;  $\rho(t) > 0$ , em que o sistema é supercrítico, isto é, o número de fissões e a população de de uma geração é maior que a geração anterior. E dentro do caso supercrítico existem ainda outras três possibilidades: subpronto-crítico que é quando  $\rho(t) < \beta$ , pronto-crítico quando  $\rho(t) = \beta$  e superpronto-crítico quando  $\rho(t) > \beta$ . A reatividade pode ser relacionada a vários parâmetros como por exemplo, a temperatura que tem como consequência a

inserção de um tempo não linear nas Equações da Cinética Pontual de Nêutrons para solucionar o sistema.

Outras unidades adimensionais são empregadas para este sistema como se nota na Tabela abaixo.

Tabela 1: Unidades e reatividade correspondente.

Unidade	Reatividade correspondente
1%	0,01
1ΔK	0,0001
1\$	1β
1c	0,01\$
1pcm	0,00001

Diante desses conceitos, define-se a reatividade como:

$$\rho(t) = \frac{\int \int [\nabla \cdot D(\mathbf{r}, E, t) \nabla \Psi_0(\mathbf{r}, E) + (\nu \Sigma_f(\mathbf{r}, E, t) - \Sigma_a(\mathbf{r}, E, t)) \Psi_0(\mathbf{r}, E)] dE d^3\mathbf{r}}{\int \int \nu \Sigma_f(\mathbf{r}, E, t) \Psi_0(\mathbf{r}, E) dE d^3\mathbf{r}} \quad (45)$$

Outro parâmetro cinético a ser definido é o tempo médio de geração, que é o tempo de vida dos nêutrons prontos entre o seu surgimento e o seu subsequente desaparecimento no reator, da seguinte forma:

$$\Lambda(t) \equiv \frac{\int \int \frac{1}{v(E)} \Psi_0(\mathbf{r}, E) dE d^3\mathbf{r}}{\int \int \nu \Sigma_f(\mathbf{r}, E, t) \Psi_0(\mathbf{r}, E) dE d^3\mathbf{r}}, \quad (46)$$

e por fim, as frações de nêutrons atrasados:

$$\beta_i(t) \equiv \frac{\int \int \beta_i \nu \Sigma_f(\mathbf{r}, E, t) \Psi_0(\mathbf{r}, E) dE d^3\mathbf{r}}{\int \int \nu \Sigma_f(\mathbf{r}, E, t) \Psi_0(\mathbf{r}, E) dE d^3\mathbf{r}}, \quad (47)$$

$$\beta_i = \sum_i \beta_i(t), \quad (48)$$

para  $i = 1 : P$ . Fazendo as seguintes divisões:

$$\frac{\rho(t)}{\Lambda(t)} = \frac{\int \int [\nabla \cdot D(\mathbf{r}, E, t) \nabla \Psi_0(\mathbf{r}, E) + \Sigma_a(\mathbf{r}, E, t) \Psi_0(\mathbf{r}, E)] dE d^3\mathbf{r}}{\int \int \frac{1}{v(E)} \Psi_0(\mathbf{r}, E) dE d^3\mathbf{r}}, \quad (49)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\sum_i \beta_i(t)}{\Lambda(t)} &= \frac{\int \int \sum_i \beta_i \nu \Sigma_f(\mathbf{r}, E, t) \Psi_0(\mathbf{r}, E) dE d^3\mathbf{r}}{\int \int \frac{1}{v(E)} \Psi_0(\mathbf{r}, E) dE d^3\mathbf{r}} \\ &= \frac{\int \int \beta \nu \Sigma_f(\mathbf{r}, E, t) \Psi_0(\mathbf{r}, E) dE d^3\mathbf{r}}{\int \int \frac{1}{v(E)} \Psi_0(\mathbf{r}, E) dE d^3\mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (50)$$

para  $i = 1 : P$ , levando-se em consideração as definições (43) e (44), obtém-se as Equações da Cinética Pontual de Nêutrons:

$$\begin{aligned}\frac{dn(t)}{dt} &= \frac{\rho(t) - \beta(t)}{\Lambda(t)} n(t) \sum_i \lambda_i C_i(t) + Q(t), \\ \frac{dC_i}{dt} &= \frac{\beta_i(t)}{\Lambda(t)} n(t) - \lambda_i C_i(t),\end{aligned}\tag{51}$$

para  $i = 1 : P$ .

Essas equações constituem de  $P + 1$  equações diferenciais ordinárias acopladas. Para o modelo e análises realizadas nesta dissertação, admite-se a aproximação  $\beta(t) = \beta$  e  $\Lambda(t) = \Lambda$ , ou seja, não alteram significativamente em um espaço curto de tempo e, portanto, são consideradas constantes. Conseqüentemente, somente a reatividade e a fonte externa modificam a população de nêutrons e de precursores com o passar do tempo. A dependência da reatividade do tempo está relacionada a várias propriedades, tais como o histórico de potência, temperatura, entre outros.

Para a obtenção de uma solução única do problema, são aplicadas as seguintes condições iniciais:

$$\begin{aligned}n(0) &= n_0 \\ C_i(0) &= \frac{\beta_i}{\lambda_i \Lambda} n_0,\end{aligned}\tag{52}$$

para  $i = 1 : P$ .

As Equações da Cinética Pontual são modelos matemáticos relativamente simples mas apurados para representar as situações dinâmicas em um reator nuclear. Essas situações podem envolver, por exemplo, o ligamento, controle e desligamento do reator, permitindo prever o que pode acontecer com inserção de reatividades de diferentes tipos. Embora no sistema (51) está o fato de serem um problema de rigidez (*stiffness*). A causa que explica essa dificuldade é a grande diferença entre os tempos de vidas dos nêutrons prontos e atrasados, pois os nêutrons atrasados apresentam um tempo de vida de no mínimo mil vezes maior que os nêutrons prontos.

## 4 METODOLOGIA DE SOLUÇÃO PARA AS EQUAÇÕES DA CINÉTICA PONTUAL DE NÊUTRONS

Partindo das Equações da Cinética Pontual de Nêutrons

$$\begin{aligned}\frac{dn(t)}{dt} &= \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} n(t) + \sum_{i=1}^P \lambda_i C_i(t) \\ \frac{dC_i(t)}{dt} &= \frac{\beta_i}{\Lambda} n(t) - \lambda_i C_i(t)\end{aligned}\quad (53)$$

para  $i = 1, 2, \dots, P$  em que  $\rho$  é a reatividade;  $\beta$  é a fração de nêutrons atrasados;  $\Lambda$  é o tempo de geração instantânea, em  $s$ ;  $\lambda_i$  é a constante de decaimento de precursores do grupo  $i$ , em  $s^{-1}$ ;  $\beta_i$  é a fração de nêutrons atrasados do grupo  $i$ ;  $P$  é o número de grupos de precursores de nêutrons atrasados;  $n$  é a incógnita de densidade de nêutrons, em  $cm^{-3}$ ;  $C_i$  é a concentração de precursores de nêutrons atrasados do grupo  $i$ , em  $cm^{-3}$ ; e  $t$  é a variável temporal, em  $s$ . Neste caso, todos os parâmetros são considerados constantes, exceto a reatividade, que pode depender de  $t$  e  $n$ .

A ideia geral para reatividades não dependentes de  $n$  é escrever o sistema em forma matricial

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}, \quad (54)$$

e para formar a matriz com  $i = 1, 2, \dots, 6$  e onde

$$\mathbf{x} = \left\{ n \quad C_1 \quad C_2 \quad \dots \quad C_6 \right\}^T, \quad (55)$$

e

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} & \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_6 \\ \frac{\beta_1}{\Lambda} & -\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\beta_2}{\Lambda} & 0 & -\lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\beta_6}{\Lambda} & 0 & 0 & \dots & -\lambda_6 \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Portanto, a reatividade abordada nesta dissertação é linear, e a solução deste sistema matricial é dada por:

$$\mathbf{x} = \exp\left(\int \mathbf{A}(t)dt\right) \mathbf{x}_0, \quad (57)$$

em que  $\mathbf{x}_0$  é a condição inicial.

O desafio é como expressar  $\exp\left(\int \mathbf{A}(t)dt\right) \mathbf{x}_0$  de forma mais eficiente que as maneiras atuais. Sendo que a única parte que depende de  $t$  da matriz  $\mathbf{A}$  é a reatividade  $\rho$ . Neste trabalho, sem perda de generalidade, irá lidar-se com a aproximação constante por partes da reatividade (*piecewise constant approximation*).

## 4.1 Método da Aproximação de Padé

Os polinômios são as funções fáceis de manipular, já que os seus valores podem ser obtidos através de simples adições e multiplicações. Parece natural, portanto, buscar aproximar funções mais complicadas por funções polinomiais. Neste caso o Método da Aproximação de Padé (MAP) utiliza de maneira geral os polinômios de Taylor. A ideia do Método da Aproximação de Padé parte da função racional com parâmetros que estipulam o grau destes polinômios.

De acordo com AGUILERA-NAVARRO et al. (1999), os aproximantes de Padé geralmente dão melhores aproximações da função do que truncar sua série de Taylor, e ainda podem funcionar onde a série de Taylor não converge. Por estas razões, os aproximadores de Padé são usados extensivamente em cálculos computacionais.

## 4.2 Definição dos aproximantes de Padé

Quando se expande uma função como uma relação de duas séries de potência se determinam os coeficientes do numerador e do denominador, obtendo neste caso as aproximações. Dentre essas, estuda-se as aproximações de Padé que são geralmente superiores às séries de Taylor quando as funções contêm pólos, porque o uso de funções racionais permite que elas sejam bem representadas. Considera-se uma expansão do tipo:

$$f(z) = \sum_{i=0}^J a_i z^i, \quad (58)$$

sendo que  $J$  é infinito. Tais expansões aparecem quando desenvolvem uma função em série de Taylor e/ou em outras séries como por exemplo série de potência. Existem várias situações que podem surgir expansões. Como exemplo, situação em que surgem expansões como (58) é encontrada em cálculos perturbativos, comuns, no tratamento de equações diferenciais. Os coeficientes  $a_i$ , neste tipo de cálculo, são encontrados individualmente através de processos, geralmente elaborados e que buscam

desenvolver funções de maneira mais eficiente para obter resultados que satisfaçam cada situação (AGUILERA-NAVARRO et al., 1999).

É importante ressaltar que os aproximantes de Padé quando são associados com a expansão (58) são funções racionais, ou seja, quocientes de dois polinômios.

Na obra de AGUILERA-NAVARRO et al. (1999), esses aproximantes são caracterizados por dois inteiros  $L$  e  $M$ , graus do numerador e denominador, respectivamente da função racional e são representados pela notação  $[L/M]_{f(z)}$ . Sendo assim, em benefício da notação, o índice  $f(z)$  é omitido quando a situação é bem definido, eliminando qualquer possibilidade de haver dúvida. Neste caso, o aproximante de Padé  $[L/M]$  é definido por:

$$[L/M] = \frac{P_L(z)}{Q_M(z)} \quad L, M \geq 0, \quad (59)$$

com

$$P_L(z) = p_0 + p_1z + p_2z^2 + \cdots + p_Lz^L, \quad (60)$$

e

$$Q_M(z) = q_0 + q_1z + q_2z^2 + \cdots + q_Mz^M. \quad (61)$$

Define-se  $[L/M]$  aproximação de Padé para  $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$  e a fração racional;

$$[L/M] = \frac{P_L(z)}{Q_M(z)} = \frac{p_0 + p_1z + \cdots + p_Lz^L}{1 + q_1z + \cdots + q_Mz^M} \quad (62)$$

onde  $P_L$  e  $Q_M$  são primos entre si e os  $L + M + 1$  primeiros coeficientes da sua série de potências coincidem com  $a_0, a_1, \dots, a_{L+M}$ . Ou seja

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i = \frac{P_L(z)}{Q_M(z)} + O(z^{L+M+1}) \quad (63)$$

Exemplos: Se  $f(z) = 1 - z/2 + z^2/3 + \cdots$ , então

$$[1/0] = 1 - z/2 = f(z) + O(z^2)$$

$$[0/1] = \frac{1}{1 + z/2} = f(z) + O(z^2)$$

$$[1/1] = \frac{1 + z/6}{1 + 2z/3} = f(z) + O(z^3)$$

Da equação (63), multiplicando por  $Q_M(z)$ , obtém-se

$$(1 + q_1z + \cdots + q_Mz^M)(a_0 + a_1z + \cdots) = p_0 + p_Lz + \cdots + p_Lz^L + O(z^{M+L+1}). \quad (64)$$

Com isso, se obtém as equações para os coeficientes:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= p_0 \\ a_1 + a_1 q_1 &= p_1 \\ a_2 + a_1 q_1 + a_2 q_2 &= p_2 \\ \vdots &\vdots \\ a_L + a_{L-1} q_1 + \cdots + a_0 q_L &= p_L \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{L+1} + a_L q_1 + \cdots + a_{L-M+1} q_M &= 0 \\ \vdots &\vdots \\ a_{L+M} + a_{L+M-1} q_1 + \cdots + a_L q_M &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

se  $i < 0$ , define-se  $a_i = 0$ .

Pode-se escrever (66) da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} a_{L-M+1} & a_{L-M+2} & a_{L-M+3} & a_L \\ a_{L-M+2} & a_{L-M+3} & a_{L-M+4} & a_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_L & a_{L+1} & a_{L+2} & a_{L+M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_M \\ q_{M-1} \\ \vdots \\ q_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_{L+1} \\ a_{L+2} \\ \vdots \\ a_{L+M} \end{bmatrix} \quad (67)$$

do qual os  $q_i$  podem ser encontrados. Os coeficientes do numerador  $p_0, p_1, \dots, p_L$  seguem de (65). Assim (67) e (65), determinam o numerador e o denominador da  $[L/M]$  aproximação de Padé que concorda com a série de potências da ordem  $z^{L+M}$ .

É importante salientar aqui que a condição  $Q_M(0) = 1$  difere da definição encontrada em PADÉ (1892) apud (BAKER et al., 1996) que requer simplesmente que  $Q_M(z) \neq 0$ . Então para ficar melhor de compreender se exemplifica e esta diferença pode ser vista a seguir:

Exemplo: Se  $f(z) = 1 + z^2 + \cdots$  e  $L = M = 1$ , pode-se facilmente verificar que  $P_1(z) = Q_1(z) = z$ ,  $P_1(z)/Q_1(z) = 1$  satisfaz

$$Q_1(z) \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i - P_1(z) = O(z^3)$$

mas não satisfaz

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i - \frac{P_1(z)}{Q_1(z)} = O(z^3).$$

E assim de acordo BAKER et al. (1996) Padé ajustou as aproximações em uma ordem semi-infinita ou tabela. Pela tábua de Padé entende-se o arranjo:

Tabela 2: Tábua de Padé

$M \setminus L$	0	1	2	3
0	[0/0]	[1/0]	[2/0]	[3/0]
1	[0/1]	[1/1]	[2/1]	[3/1]
2	[0/2]	[1/2]	[2/2]	[3/2]
3	[0/3]	[1/3]	[2/3]	[3/3]

As somas parciais da série de Taylor ocupam a primeira linha da Tabela 2.

#### 4.2.1 Aproximação de Padé para a função exponencial

A expansão em série de Taylor de  $e^z$  é dada por:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots \quad (68)$$

e deseja-se calcular  $Q_M(z)$ , da  $[L/M]$  aproximação de Padé,

$$Q_M = \frac{1}{C_M} \begin{vmatrix} \frac{1}{(L-M+1)!} & \frac{1}{(L-M+2)!} & \dots & \frac{1}{L!} & \frac{1}{(L+1)!} \\ \frac{1}{(L-M+2)!} & \frac{1}{(L-M+3)!} & \dots & \frac{1}{(L+1)!} & \frac{1}{(L+2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{L!} & \frac{1}{(L+1)!} & \dots & \frac{1}{(L-M+1)!} & \frac{1}{(L-M)!} \\ z^M & z & \dots & z & 1 \end{vmatrix} \quad (69)$$

onde

$$C_M = \begin{vmatrix} \frac{1}{(L-M+1)!} & \frac{1}{(L-M+2)!} & \dots & \frac{1}{L!} \\ \frac{1}{(L-M+2)!} & \frac{1}{(L-M+3)!} & \dots & \frac{1}{(L+1)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{L!} & \frac{1}{(L+1)!} & \dots & \frac{1}{(L-M+1)!} \end{vmatrix} \quad (70)$$

Removendo o denominador de cada linha, usando as propriedades de determinante e a definição:

$$P = \prod_{i=1}^n \frac{1}{(L+i-1)!} \quad (71)$$

obtém-se

$$C_M = P \begin{vmatrix} \frac{L!}{(L-M+1)!} & \frac{L!}{(L-M+2)!} & \cdots & L & 1 \\ \frac{L!}{(L+1)!} & \frac{L!}{(L+1)!} & \cdots & L+1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \frac{L!}{(L+M-1)!} & \frac{L!}{(L+M-1)!} & \cdots & L+M-1 & 1 \end{vmatrix} \quad (72)$$

subtraindo a  $(M-1)$ -ésima linha da  $M$ -ésima, a  $(M-2)$ -ésima linha da  $(M-1)$ -ésima, e sucessivamente, a primeira linha da segunda, e usando a identidade

$$\frac{r!}{s!} - \frac{(r-1)!}{(s-1)!} = r - s \frac{(r-1)!}{s!} \quad (73)$$

obtém-se

$$C_M = P(M-1)! \begin{vmatrix} \frac{L!}{(L-M+1)!} & \frac{L!}{(L-M+2)!} & \cdots & L & 1 \\ \frac{L!}{L!} & \frac{L!}{L!} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \frac{L!}{(L+M-2)!} & \frac{L!}{(L+M-2)!} & \cdots & 1 & 0 \\ \frac{L!}{L!} & \frac{L!}{(L+1)!} & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= P(-1)^{M-1}(M-1)! \begin{vmatrix} \frac{L!}{(L-M+1)!} & \frac{L!}{(L-M+2)!} & \cdots & 1 \\ \frac{L!}{L!} & \frac{L!}{L!} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{L!}{(L+M-2)!} & \frac{L!}{(L+M-2)!} & \cdots & 1 \\ \frac{L!}{L!} & \frac{L!}{(L+1)!} & \cdots & 1 \end{vmatrix} \quad (74)$$

Agora, (74) é um determinante  $(M-1) \times (M-1)$  com a mesma forma (72), apenas com  $M-1$  no lugar de  $M$ , assim com o mesmo procedimento chega-se a<sup>1</sup>

$$C_M = P \prod_{i=1}^M (-1)^{i-1} (i-1)! =$$

$$= (-1)^{M(M-1)/2} \prod_{i=1}^M \frac{(i-1)!}{(L+i-1)!} \quad (75)$$

Considera-se o coeficiente de  $(-z)^k$  aplicado em que  $Q_M(z)$  para obter:

$$(-1)^k q_k = \frac{1}{C_M} \begin{vmatrix} \frac{1}{(L-M+1)!} & \frac{1}{(L-M+2)!} & \cdots & \frac{1}{(L-k+1)!} & \cdots & \frac{1}{(L+1)!} \\ \frac{1}{(L-M+2)!} & \frac{1}{(L-M+3)!} & \cdots & \frac{1}{(L-k+2)!} & \cdots & \frac{1}{(L+2)!} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{L!} & \frac{1}{(L+1)!} & \cdots & \frac{1}{(L+M-k)!} & \cdots & \frac{1}{(L+M)!} \end{vmatrix} \quad (76)$$

<sup>1</sup>Usando a identidade (73) na coluna 1 obtém  $r-s = M-l$ , na coluna 2 obtém  $r-s = M-2$ , e assim sucessivamente.

onde a coluna de  $\frac{1}{(L-k+1)!}$  é retirada. Usando o mesmo procedimento anterior, pode definir,

$$\tilde{p} = \prod_{i=0}^M \frac{1}{(L+i)!} \quad (77)$$

e assim,

$$(-1)^k q_k = \frac{\tilde{p}}{C_M} \begin{vmatrix} \frac{(L+1)!}{(L-M+1)!} & \cdots & \frac{(L+1)!}{(L-k+1)!} & \cdots & 1 \\ \frac{(L+2)!}{(L-M+2)!} & \cdots & \frac{(L+2)!}{(L-M+2)!} & \cdots & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{(L+M)!}{L!} & \cdots & \frac{(L+M)!}{(L+M-k)!} & \cdots & 1 \end{vmatrix} \quad (78)$$

Usando as operações e desenvolvendo cada linha aplicando a identidade (73), obtém-se:

$$(-1)^k q_k = \frac{(-1)^M \tilde{p} M!}{C_M k} \begin{vmatrix} \frac{(L+1)!}{(L-M+2)!} & \cdots & \frac{(L+1)!}{(L-k+2)!} & \cdots & 1 \\ \frac{(L+2)!}{(L-M+3)!} & \cdots & \frac{(L+2)!}{(L-k+3)!} & \cdots & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{(L+M-1)!}{L!} & \cdots & \frac{(L+M-1)!}{(L+M-k)!} & \cdots & 1 \end{vmatrix} \quad (79)$$

Prosseguindo assim, obtém:

$$(-1)^k q_k = \pm \frac{\tilde{p}}{C_M k!} \prod_{i=0}^k (M-i+1)! \cdot \begin{vmatrix} \frac{(L+1)!}{(L-M+k+1)!} & \cdots & \frac{(L+1)!}{L!} & \cdots & 1 \\ \frac{(L+2)!}{(L-M+k+2)!} & \cdots & \frac{(L+2)!}{(L+1)!} & \cdots & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{(L+M-k)}{L!} & \cdots & \frac{(L+M-k)!}{(L+M-k-1)!} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \quad (80)$$

$$= \pm \frac{\tilde{p}}{C_M k!} \frac{(L+M-k)!}{L!} \prod_{i=1}^k (M-i+1)! \begin{vmatrix} \frac{L!}{(L-M+k+1)!} & \cdots & 1 \\ \frac{L!}{(L-M+k+2)!} & \cdots & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{(L+M-k-1)}{L!} & \cdots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \pm \frac{1}{C_M} \left\{ \prod_{i=0}^M \frac{1}{(L+1)!} \right\} \frac{(L+M-k)!}{L!k!} \left\{ \prod_{i=1}^k (M-i+1)! \right\} \prod_{i=1}^{M-k-1} i! = \\
&= \pm \frac{1}{C_M} \frac{(L+M-k)}{L!k!(M-k)!} \prod_{i=1}^M \frac{i!}{(L+i)!}.
\end{aligned} \tag{81}$$

O sinal do lado direito de (81) é o mesmo de (75), porque os determinantes (81) e (76) tem a mesma dimensão e sofrem as mesmas operações. Logo,

$$(-1)^k q_k = (-1)^{M(M-1)/2} \frac{1}{C_M} \frac{(L+M-k)!}{L!k!(M-k)!} \prod_{i=1}^M \frac{i!}{(L+i)!} \tag{82}$$

e observando que para  $k = 0$ , tem-se exatamente (75). Portanto,

$$q_k = (-1)^k \frac{C_M}{C_M} \frac{(L+M-k)!}{(L+M)!} \frac{M!}{(M-k)!} \frac{1}{k!} \tag{83}$$

e

$$Q_M(z) = \sum_{k=0}^M \frac{(L+M-k)!}{(L+M)!} \frac{M!}{(M-k)!} \frac{(-z)^k}{k!} \tag{84}$$

E da mesma forma determina-se a:

$$P_L(z) = \sum_{k=0}^L \frac{(L+M-k)!}{(L+M)!} \frac{L!}{(L-k)!} \frac{(z)^k}{k!} \tag{85}$$

Portanto a  $[L/M]$  aproximação de Padé para  $\exp(z)$  é dada por:

$$[L/M] = \frac{\sum_{k=0}^L \frac{(L+M-k)!}{(L+M)!} \frac{L!}{(L-k)!} \frac{(z)^k}{k!}}{\sum_{k=0}^M \frac{(L+M-k)!}{(L+M)!} \frac{M!}{(M-k)!} \frac{(-z)^k}{k!}} \tag{86}$$

ou seja;

$$[L/M] = \frac{P_L(z)}{Q_M(z)} \tag{87}$$

E por fim, segue algumas aproximações de Padé para a função  $e^z$ , disposta na tabela ou tábua de Padé.

Tabela 3: Aproximações para  $e^z$ .

$M \setminus L$	0	1	2
0	$\frac{1}{1}$	$\frac{1+z}{1}$	$\frac{2+2z+z^2}{2}$
1	$\frac{1}{1+z}$	$\frac{2+z}{2-z}$	$\frac{6+4z+z^2}{6-2z}$
2	$\frac{2}{2-2z-z^2}$	$\frac{6+2z}{6-4z+z^2}$	$\frac{12+6z+z^2}{12-6z+z^2}$
3	$\frac{6}{6-6z+3z^2-z^3}$	$\frac{24+z}{24-18z+6z^2-z^3}$	$\frac{60+24z+3z^2}{60-36z+9z^2-z^3}$

**Teorema 4.1.** A  $[L/M]$  aproximação de Padé de  $\sum a_i z^i$  é dada por:

$$[L/M] = \frac{P_L(z)}{Q_M(z)},$$

onde  $Q_M$  e  $P_L$  são dadas respectivamente por (60) e (61).

Este teorema será enunciado sem demonstração.

**Teorema 4.2.** (Unicidade). Quando existe, a  $[L/M]$  aproximação de Padé para qualquer série formal  $A(z)$ , é única.

**Prova 1.** Então para desenvolver, assumi-se que existem duas destas aproximações de Padé  $X(z)/Y(z)$  e  $U(z)/V(z)$ , onde o grau de  $X$  e  $U$  é menor ou igual a  $L$  e que o grau de  $U$  e  $V$  é menor ou igual a  $M$ . Então se deve ter, por (63).

$$X(z)/Y(z) - U(z)/V(z) = O(z^{L+M+1}) \quad (88)$$

visto que ambas aproximam a mesma série. Se multiplicar (88) por  $Y(z)V(z)$ , obtém-se

$$X(z)/V(z) - U(z)/Y(z) = O(z^{L+M+1}) \quad (89)$$

Mas o lado esquerdo de (89) é um polinómio de grau no máximo  $L+M$ , e desta forma é identicamente nulo. Visto que nem  $Y$  nem  $V$  é identicamente nulo, conclui-se que

$$X(z)/Y(z) = U(z)/V(z) \quad (90)$$

Pela definição, ambos  $X$  e  $Y$ , e  $U$  e  $V$  são relativamente primos e  $Y(0) = V(0) = 1$ , temos mostrado que as duas, supostamente aproximações de Padé distintas, são as mesmas.

O objetivo de usar os aproximantes de Padé é ter uma maneira rapidamente convergente de avaliar o valor de uma função de interesse em um ponto específico ou criar uma curva que mostre o comportamento da função em uma região de interesse.

E com relação à convergência dos aproximantes de Padé é complicada pela ocorrência de singularidades. Com isso, entende-se um zero e um pólo muito próximos um do outro. O valor do padé aproximado é interrompido em uma região muito pequena. Grande parte do esforço de convergência de aproximações de Padé está relacionado à questão de saber se esse problema ocorre em um caso específico e se isso ocorre como limitar o tamanho da interrupção. Assim, há convergência pontual, convergência em medida, convergência em capacidade e convergência na média. Em muitos casos, as aproximações diagonais do Padé são as seqüências mais eficazes.

Nesta dissertação, a existência e a unicidade dos aproximantes de Padé estão sendo abordadas com menos rigor, pois na obra de AGUILERA-NAVARRO et al. (1999) se encontram de maneira detalhada e de fácil compreensão.

E para resolver o sistema matricial das Equações da Cinética Pontual de Nêutrons o Método de Aproximação de Padé foi aplicado.

### 4.3 Aplicação do Método da Aproximação de Padé para calcular a matriz exponencial gerada pelas Equações da Cinética Pontual de Nêutrons

A partir da solução do sistema matricial;

$$\mathbf{x} = \exp\left(\int \mathbf{A}(t)dt\right) x_0$$

que quando se resolve a integral, se obtém;

$$\mathbf{x} = \exp(\mathbf{A} \cdot t) x_0$$

com todos os elementos desta matriz constantes e não dependentes do tempo.

Agora, aplica-se neste caso a aproximação de Padé para resolver a exponencial da matriz que pode ser assim:

$$R_{LM}(\mathbf{A} \cdot t) = [Q_M(\mathbf{A} \cdot t)]^{-1} P_L(\mathbf{A} \cdot t)$$

onde

$$Q_M(\mathbf{A} \cdot t) = \sum_{k=0}^M \frac{(L+M-k)!}{(L+M)!} \frac{M!}{(M-k)!} \frac{(-\mathbf{A} \cdot t)^k}{k!}$$

e

$$P_L(\mathbf{A} \cdot t) = \sum_{k=0}^L \frac{(L+M-k)!}{(L+M)!} \frac{L!}{(L-k)!} \frac{(\mathbf{A} \cdot t)^k}{k!}$$

Portanto a  $[L/M]$  aproximação de Padé para  $\exp(\mathbf{A} \cdot t)$  é dada por:

$$[L/M] = \frac{\sum_{k=0}^L \frac{(L+M-k)!}{(L+M)!} \frac{L!}{(L-k)!} \frac{(\mathbf{A} \cdot t)^k}{k!}}{\sum_{k=0}^M \frac{(L+M-k)!}{(L+M)!} \frac{M!}{(M-k)!} \frac{(-\mathbf{A} \cdot t)^k}{k!}}$$

ou seja;

$$[L/M] = \frac{P_L(\mathbf{A} \cdot t)}{Q_M(\mathbf{A} \cdot t)}.$$

#### 4.4 PCA (*Piecewise Constant Approximation*)

Uma função linear ou segmentada por partes é uma função com valor real definida nos números reais ou em um segmento dos mesmos, cujo gráfico é composto de seções lineares. É uma função definida por partes, cada uma das quais é uma função afim. E esta maneira ou procedimento de aproximação constante por partes consiste em reduzir qualquer perfil de grade a um conjunto finito de regiões retangulares uniformes, denomina-se PCA (*Piecewise Constant Approximation*).

Em GANAPOL; PICCA (2015) uma nova forma de aplicação do algoritmo PCA para soluções de alta precisão para as equações da cinética pontual, chamada PCA Modificado (MPCA), foi apresentada e demonstrada para resolvê-las com inserções de reatividade não linear e prescritas, dependentes do tempo.

Esta técnica aplica-se nesta dissertação para abordar as reatividades dependentes do tempo. Portanto, no decorrer utiliza-se PCA (*Piecewise Constant Approximation*) juntamente com o Método da Aproximação de Padé para resolver os casos de reatividades dependentes do tempo. O que vale ressaltar é que o passo de tempo utilizado é de 0,001 o que faz com que esta implementação tenha um desempenho computacional alto.

## 5 RESULTADOS

Neste capítulo, apresentam-se os resultados numéricos para a metodologia proposta e descrita nesta dissertação e comparam-se com os existentes na literatura. Os resultados são obtidos para seis grupos de precursores de nêutrons atrasados, com varios tipos de reatividade.

Para os casos de reatividade estudados são apresentados tabelas com os resultados obtidos para densidade de nêutrons e o tempo computacional para cada um deles.

Foram utilizados os parâmetros cinéticos estudados na obra de TUMELERO (2015) e que se encontram tabelados neste capítulo. Considera-se a densidade de nêutrons inicial como  $n_0 = 1cm^{-3}$  e a concentração de nêutrons atrasados  $C_i(0) = \frac{\beta_i}{\lambda_i \Lambda}$  para  $i = 1 : 6$ . O software utilizado para implementação do algoritmo foi o Scilab 6.0.1 juntamente com um computador que possui essas configurações: Intel(R) Core(TM) i5-7200U 2.5GHz, 8GB de RAM, Sistema operacional de 64 bits e processador com base em x64.

Tabela 4: Parâmetros cinéticos para um reator térmico I com  $\Lambda = 5 \cdot 10^{-4}s$ .

$i$	$\beta_i$	$\lambda_i(s^{-1})$
1	0,000266	0,0127
2	0,0015975	0,0317
3	0,001410	0,115
4	0,0030525	0,311
5	0,00096	1,40
6	0,000195	3,87
$\beta = 0,0075$		

Tabela 5: Parâmetros cinéticos para um reator térmico II com  $\Lambda = 2 \cdot 10^{-5} s$ .

$i$	$\beta_i$	$\lambda_i(s^{-1})$
1	0,000266	0,0127
2	0,001491	0,0317
3	0,001316	0,115
4	0,002849	0,311
5	0,000896	1,40
6	0,000182	3,87
		$\beta = 0,007$

Tabela 6: Parâmetros cinéticos para um reator térmico com  $\Lambda = 3 \cdot 10^{-5} s$ .

$i$	$\beta_i$	$\lambda_i(s^{-1})$
1	0,000214	0,0127
2	0,001423	0,0317
3	0,001247	0,115
4	0,002568	0,311
5	0,000748	1,40
6	0,000273	3,87
		$\beta = 0,006473$

Tabela 7: Parâmetros cinéticos para um reator térmico III com  $\Lambda = 5 \cdot 10^{-5} s$ .

$i$	$\beta_i$	$\lambda_i(s^{-1})$
1	0,00021	0,0124
2	0,00141	0,0305
3	0,00127	0,111
4	0,00255	0,301
5	0,00074	1,13
6	0,00027	3,00
		$\beta = 0,00645$

## 5.1 Inserção de reatividade constante

Utilizando-se do que foi desenvolvido em TUMELERO (2015), usando os parâmetros cinéticos referente a Tabela 4, resolvem-se as equações da cinética pontual de nêutrons pelo Método da Aproximação de Padé (MAP) para inserção de reatividade constante. Consideram-se quatro valores constantes de reatividade, dois deles subcríticos ( $\rho = -1\beta$  e  $\rho = -0,5\beta$ ) e outros dois supercríticos (subpronto-critico:

$\rho = 0,5\beta$  e pronto-critico:  $\rho = 1\beta$ ). Os resultados obtidos são comparados com os do Método da Aproximação Polinomial (PAM) referentes à obra citada nesta seção e também o método *Backward Euler Difference* (BEFD) apresentados por (GANAPOL, 2013).

Tabela 8: Densidade de nêutrons em  $cm^{-3}$  para inserção de reatividade constante.

Reatividade	t(s)	PAM	PAM	BEFD	MAP [4/4]
		$\Delta t = 0,001s$	$\Delta t = 0,0001s$		
$\rho = -1\beta$	0,1	0,520542216	0,520564066	0,5205642866	0,520542217
	1,0	0,433333435	0,433333445	0,4333334453	0,433333456
	10,0	0,236110650	0,236110651	0,2361106508	0,236110631
	100,0	0,028667642	0,028667642	0,0286676424	0,028667644
$\rho = -0,5\beta$	0,1	0,698912114	0,698925094	0,6989252256	0,698912115
	1,0	0,607053557	0,607053566	0,6070535656	0,607053568
	10,0	0,396077690	0,396077691	0,3960776907	0,396077651
	100,0	0,071582854	0,071582854	0,0715828544	0,071582855
$\rho = 0,5\beta$	0,1	1,533119402	1,533112714	1,533112646	1,533119403
	1,0	2,511494396	2,511494293	2,511494291	2,511494357
	10,0	14,21502549	14,21502524	14,21502524	14,21502540
	100,0	80061449,33	80061435,76	80061435,62	80061438,64
$\rho = 1\beta$	0,1	2,515769054	2,515766171	2,515766141	2,515769056
	0,5	10,3625526	10,36253400	10,36253381	10,36255271
	1,0	32,1836363	32,18354190	32,18354095	32,18363641
	10,0	3247071362	32469798230	3246978898	32470713621
	100,0	2,59722E+89	2,5964E+89	2,5964E+89	2,59722E+89

Então, com os resultados da Tabela 8 estuda-se o desvio absoluto e nota-se resultados satisfatórios comparados com o método BEFD de (GANAPOL, 2013) e o Método da Aproximação Polinomial de (TUMELERO, 2015). Utiliza-se para o método da Aproximação de Padé tanto para o numerador quanto para o denominador polinômios de quarto grau.

Neste primeiro momento, aplica-se o desvio absoluto<sup>1</sup> comparando o Método da Aproximação Polinomial e o Método da Aproximação de Padé, como se nota na Tabela 9.

<sup>1</sup>Desvio absoluto ou erro absoluto: É a diferença entre o valor exato de um número  $x$  e o seu valor aproximado  $x'$ . Sendo apresentado desta maneira:

$$d_a = |x - x'|.$$

Tabela 9: Analisando o desvio absoluto para inserção de reatividade constante.

Reatividade	t(s)	PAM $\Delta t = 0,001s$	MAP [4/4]	Desvio Absoluto
$\rho = -1\beta$	0,1	0,520542216	0,520542217	1,0E-9
	1,0	0,433333435	0,433333456	2,1E-8
	10,0	0,236110650	0,236110631	1,9E-8
	100,0	0,028667642	0,028667644	2,0E-9
$\rho = -0,5\beta$	0,1	0,698912114	0,698912115	1,0E-9
	1,0	0,607053557	0,607053568	1,1E-8
	10,0	0,396077690	0,396077651	3,9E-8
	100,0	0,071582854	0,071582855	1,0E-9
$\rho = 0,5\beta$	0,1	1,533119402	1,533119403	1,0E-9
	1,0	2,511494396	2,511494357	3,9E-8
	10,0	14,21502549	14,21502540	9,0E-8
	100,0	80061449,33	80061438,64	10,69
$\rho = 1\beta$	0,1	2,515769054	2,515769056	2,0E-9
	0,5	10,3625526	10,36255271	1,1E-7
	1,0	32,1836363	32,18363641	1,1E-7
	10,0	3247071362	32470713631	2,9 E+10
	100,0	2,59722E+89	2,59722E+89	1,2 E+85

E prosseguindo, aplica-se o desvio absoluto para o BEFD e o Método da Aproximação de Padé.

Tabela 10: Desvio absoluto para inserção de reatividade constante.

Reatividade	t(s)	BEFD	MAP [4/4]	Desvio Absoluto
$\rho = -1\beta$	0,1	0,5205642866	0,520542217	2,21E-5
	1,0	0,4333334453	0,433333456	1,07E-8
	10,0	0,2361106508	0,236110631	1,98E-8
	100,0	0,0286676424	0,028667644	1,60E-9
$\rho = -0,5\beta$	0,1	0,6989252256	0,698912115	1,31E-5
	1,0	0,6070535656	0,607053568	2,40E-9
	10,0	0,3960776907	0,396077651	3,97E-8
	100,0	0,0715828544	0,071582855	6 E-10
$\rho = 0,5\beta$	0,1	1,533112646	1,533119403	6,76E-6
	1,0	2,511494291	2,511494357	6,60E-8
	10,0	14,21502524	14,21502540	1,60E-7
	100,0	80061435,62	80061438,64	3,02
$\rho = 1\beta$	0,1	2,515766141	2,515769056	2,92E-6
	0,5	10,36253381	10,36255271	1,89E-5
	1,0	32,18354095	32,18363641	9,55E-5
	10,0	3246978898	32470713621	2,92E+10
	100,0	2,5964E+89	2,59722E+89	8,2E+85

Aqui, estuda-se o tempo computacional entre os métodos que foram aplicados nas ECPN e assim comparando-os e analisando os resultados obtidos.

Tabela 11: Tempo computacional para inserção de reatividade constante.

Reatividade	t(s)	PAM	PAM	MAP
		$\Delta t = 0,001s$	$\Delta t = 0,0001$	[4/4]
$\rho = -1\beta$	0,1	0,017	0,082	0,026
	1,0	0,091	0,756	0,032
	10,0	0,809	7,516	0,042
	100,0	7,759	74,642	1,356
$\rho = -0,5\beta$	0,1	0,016	0,083	0,025
	1,0	0,083	0,755	0,038
	10,0	0,758	7,475	0,059
	100,0	7,467	74,556	1,354
$\rho = 0,5\beta$	0,1	0,016	0,082	0,028
	1,0	0,084	0,407	0,035
	10,0	0,760	0,807	0,051
	100,0	7,569	7,735	2,006
$\rho = 1\beta$	0,1	0,017	0,082	0,021
	0,5	0,049	0,407	0,037
	1,0	0,089	0,807	0,043
	10,0	0,757	7,735	0,061
	100,0	7,860	74,647	1,852

Segue os gráficos das reatividades constantes para os casos mencionados aqui:

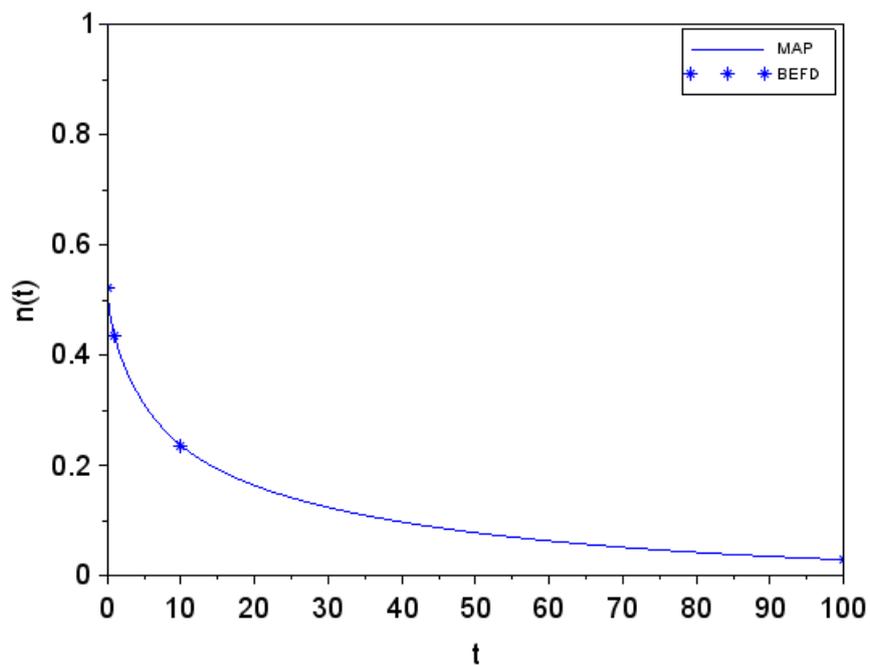


Figura 1: Densidade de nêutrons para reatividade constante com  $\rho = -1\beta$ .

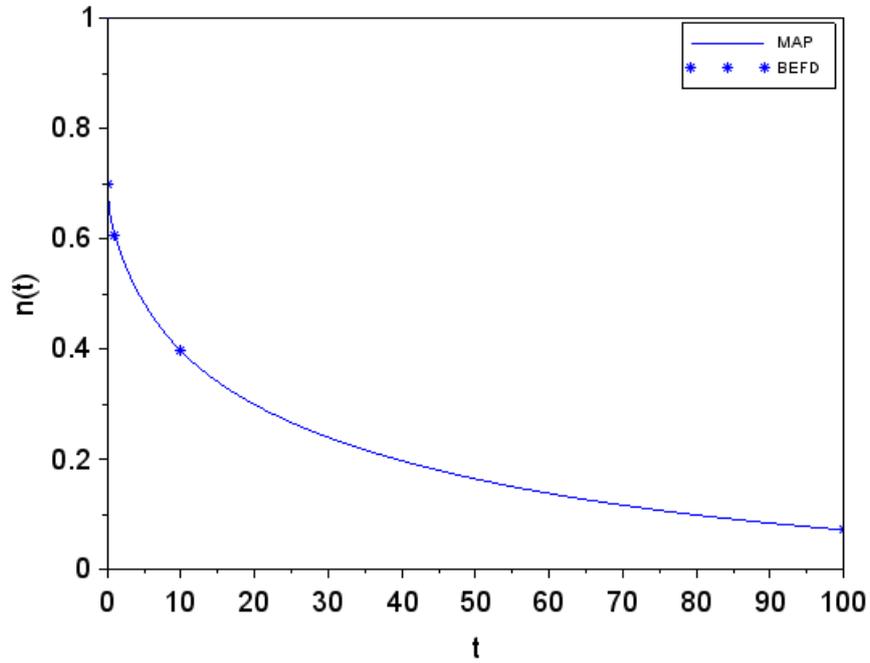


Figura 2: Densidade de nêutrons para reatividade constante com  $\rho = -0,5\beta$ .

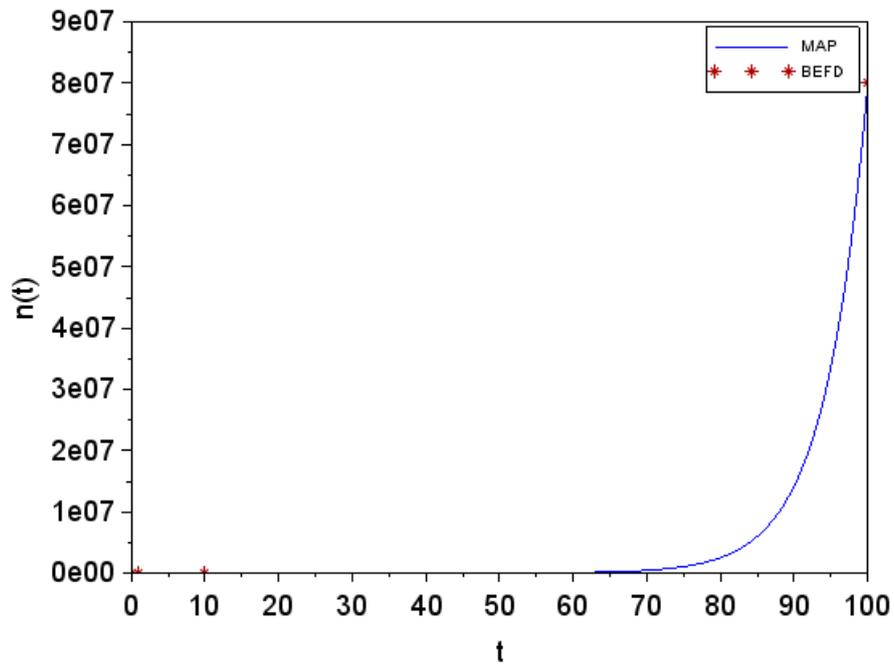


Figura 3: Densidade de nêutrons para reatividade constante com  $\rho = 0,5\beta$ .

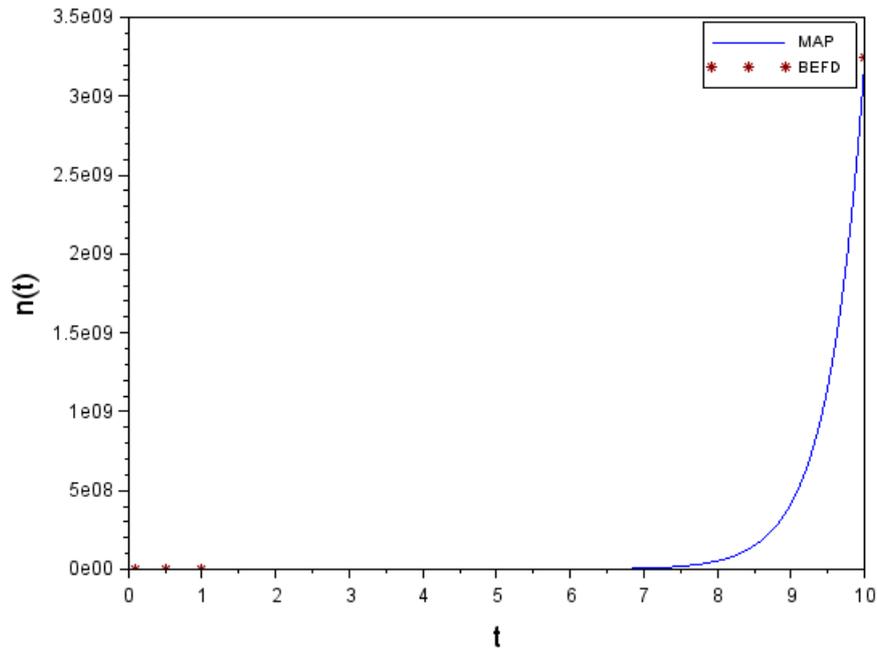


Figura 4: Densidade de nêutrons para reatividade constante com  $\rho = 1\beta$ .

De acordo com os gráficos e tabelas pode-se perceber que o método MAP aproxima-se satisfatoriamente dos resultados do método BEFD. Nota-se dentre esses casos estudados um desvio absoluto que no decorrer do tempo tende a aumentar.

## 5.2 Inserção de reatividade rampa

Para este caso, utiliza-se os parâmetros cinéticos apresentados na Tabela 5, considerado conforme estabelecido na obra de (TUMELERO, 2015) que aborda a inserção de reatividade linear  $\rho(t) = at$ , onde  $a = 0,1\%$ . Usando o Método da Aproximação de Padé com a utilização do PCA (*Piecewise Constant Approximation*) para resolver este caso de reatividade que apresenta variação no tempo.

Desta maneira, aplica-se PCA com o Método da Aproximação de Padé buscando um resultado próximo dos até então encontrados na literatura. E com isso, nota-se os seguintes resultados conforme a Tabela 12.

Tabela 12: Densidade de nêutrons em  $cm^{-3}$  para inserção de reatividade rampa com  $\rho = 0,1\beta t$ .

t(s)	PAM	PAM	BEFD	MAP [4/4]
	$\Delta t = 0,001s$	$\Delta t = 0,0001s$		
2	1,33820001	1,33820005	1,33820005	1,33811140
4	2,22844174	2,22844189	2,22844189	2,22843865
6	5,58205137	5,58205243	5,58205244	5,58204311
8	42,7862661	42,7862954	42,7862957	42,7860035
10	451210,982	451164,097	451164,623	451336,845
11	1,803607E+16	1,792327E+16	1,792213E+16	1,762548E+16

Explorando os resultados encontrados para este caso de reatividade com a aplicação do Método da Aproximação de Padé, utiliza-se o desvio absoluto para compará-los.

Tabela 13: Desvio absoluto dos métodos PAM e MAP para a inserção da reatividade rampa.

t(s)	PAM	MAP	Desvio
	$\Delta t = 0,001s$	[4/4]	Absoluto
2	1,33820001	1,33811140	8,9E-5
4	2,22844174	2,22843865	3,1E-6
6	5,58205137	5,58204311	8,3E-6
8	42,7862661	42,7860035	2,6E-4
10	451210,982	451336,845	125,863
11	1,803607E+16	1,762548E+16	4,1E+14

Tabela 14: Desvio absoluto dos métodos BEFD e MAP para a inserção da reatividade rampa.

t(s)	BEFD	MAP	Desvio
		[4/4]	Absoluto
2	1,33820005	1,33811140	8,9E-5
4	2,22844189	2,22843865	3,2E-6
6	5,58205244	5,58204311	9,3E-6
8	42,7862957	42,7860035	2,9E-4
10	451164,623	451336,845	172,222
11	1,792213E+16	1,762548E+16	3E+14

Nota-se nas tabelas acima que os valores encontrados em MAP possui um desvio absoluto de  $10^{-6}$  com relação aos demais métodos apresentados aqui.

Analisando a Figura 5 para comparar os resultados obtidos relacionando os métodos de MAP e BEFD. O Método da Aproximação Polinomial apresenta resultados que se assemelham com o método BEFD e conforme TUMELERO (2015) destaca para  $\Delta t = 0,001s$ , o desvio relativo ocorrido é de  $6,36 \cdot 10^{-3}$  enquanto que para  $\Delta t = 0,0001$  é de  $6,33 \cdot 10^{-5}$ , ambos no instante de  $11s$ .

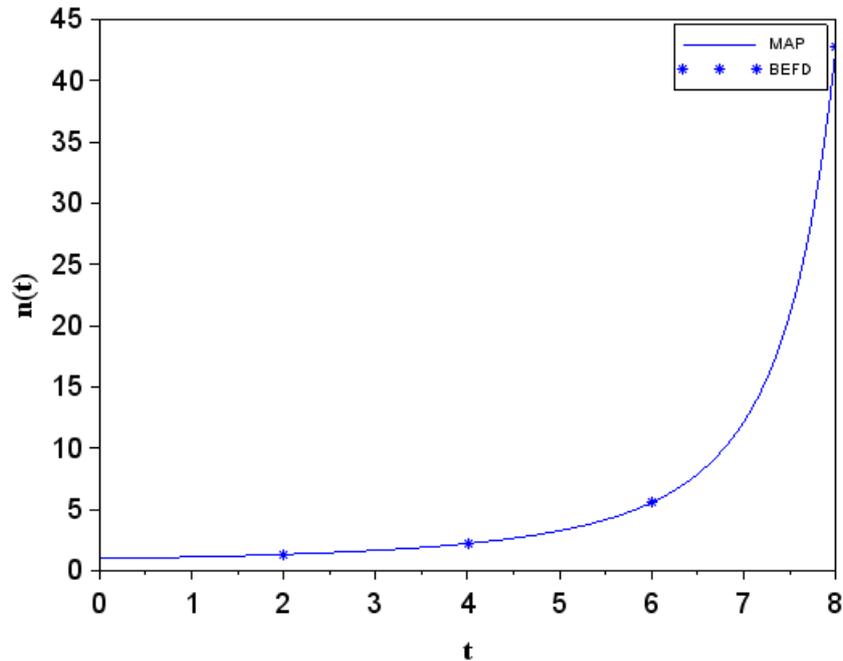


Figura 5: Densidade de nêutrons para reatividade de 0 a 8 segundos.

Através das tabelas e gráficos apresentados para este caso, o MAP apresenta resultados satisfatórios em comparação com os estudados nesta dissertação.

### 5.3 Inserção de Reatividade Quadrática

Nesta seção, apresenta a resolução das ECPN pelo MAP para uma reatividade do tipo quadrática e com isso, compara-se com os métodos já estudados aqui. Este tipo de reatividade é dada por:

$$\rho(t) = at + bt^2 \quad (91)$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes arbitrárias.

Utiliza-se os parâmetros apresentados na Tabela 4 e assim na Figura 6 encontra-se os resultados para densidade de nêutrons em  $cm^{-3}$  até  $1,2s$ , onde se estabelece um parâmetro fixo para  $b = 0,003$  e para  $a$  se assume três valores sendo  $-b/10$ ,  $0$ ,  $b/10$ .

É importante salientar que para este caso de reatividade, não foram encontrados resultados numéricos na literatura e portanto apresenta-se graficamente os resultados obtidos. O que se considera em estudo aqui é o ajuste do parâmetro  $a$  que controla o crescimento da densidade de nêutrons, que fisicamente pode representar o movimento das barras de controle dada pela variação da reatividade com o tempo (PETERSEN, 2011).

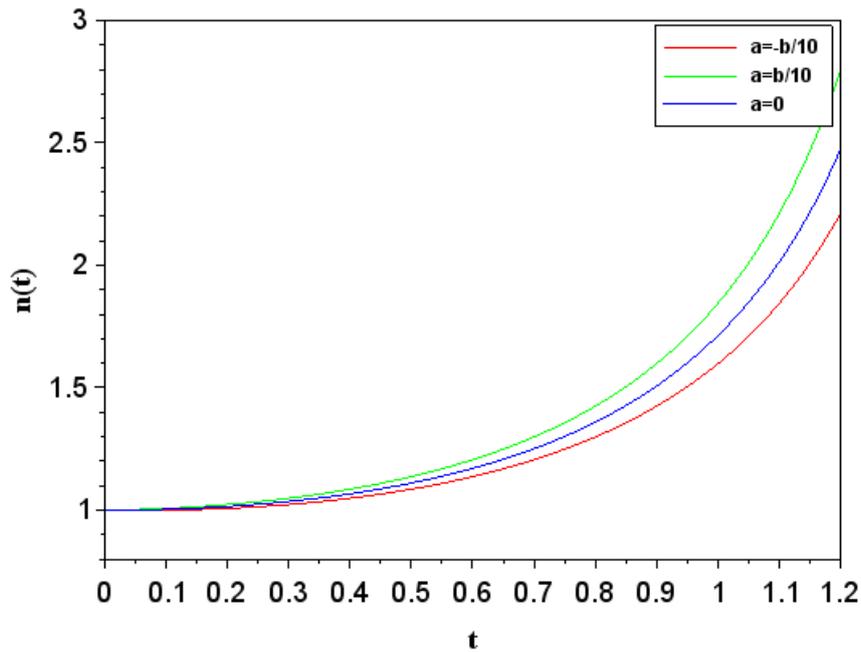


Figura 6: Densidade de nêutrons para reatividade quadrática.

#### 5.4 Inserção de Reatividade Zig-Zag

Para este caso, resolvem-se as ECPN com reatividade do tipo zig-zag pelo MAP e compara-se com os resultados apresentados por (GANAPOL, 2013) com o método *Enhanced Piecewise Constant Approximation* (EPCA).

As EPCN com reatividade zig-zag é dada por:

$$\rho(t) = \begin{cases} 0,0075t, & 0 \leq t \leq 0,5 \\ -0,0075(t - 0,5) + 0,00375, & 0,5 \leq t \leq 1 \\ 0,0075(t - 1), & 1 \leq t \leq 1,5 \\ 0,00375, & t \geq 1,5 \end{cases} \quad (92)$$

Neste caso, a densidade de nêutrons estipulada na tabela varia até 100s e na figura, de 0 a 2s.

Tabela 15: Densidade de nêutrons em  $cm^{-3}$  para inserção de reatividade zig-zag.

t(s)	PAM	PAM	EPCA	MAP [4/4]
	$\Delta t = 0,001s$	$\Delta t = 0,0001s$		
0,5	1,721419480	1,721422393	1,721422422	1,721018471
1,0	1,211125799	1,211127399	1,211127415	1,211836211
1,5	1,892222531	1,892226104	1,892226140	1,890710755
2,0	2,521600093	2,521600526	2,521600530	2,521237319
10,0	12,04710289	12,04710533	12,04710535	12,04603501
100,0	68155565,88	68155568,86	68155568,88	68149693,23

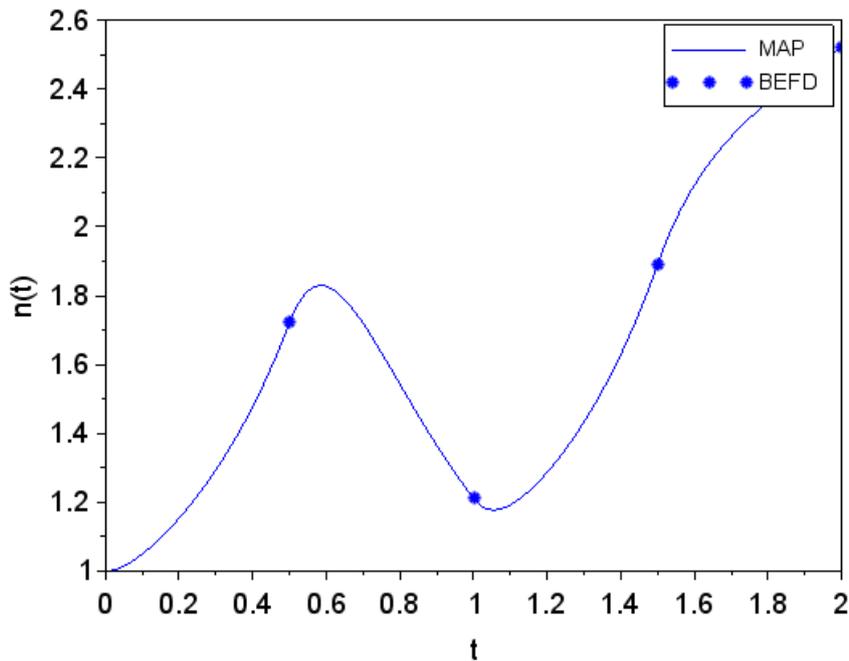


Figura 7: Densidade de nêutrons para reatividade zig-zag.

Em comparação dos resultados aplica-se o desvio padrão para analisar os métodos MAP com relação ao PAM e EPCA.

Tabela 16: Análise do desvio absoluto com relação ao PAM ( $\Delta t = 0.001$ ) e MAP.

t(s)	PAM	MAP	Desvio absoluto
	$\Delta t = 0,001$	[4/4]	
0,5	1,721419480	1,721018471	4E-4
1,0	1,211125799	1,211836211	7E-4
1,5	1,892222531	1,890710755	2E-3
2,0	2,521600093	2,521237319	4E-4
10,0	12,04710289	12,04603501	1E-3
100,0	68155565,88	68149693,23	5873

Tabela 17: Análise do desvio absoluto com relação ao EPCA e MAP.

t(s)	EPCA	MAP	Desvio absoluto
0,5	1,721422422	1,721018471	4E-4
1,0	1,211127415	1,211836211	7,12E-4
1,5	1,892226140	1,890710755	1,52E-3
2,0	2,521600530	2,521237319	3,6E-4
10,0	12,04710535	12,04603501	1,07E-3
100,0	68155568,88	68149693,23	5875,65

## 5.5 Inserção de Reatividade Senoidal

De acordo com (TUMELERO, 2015) que apresenta resultados para este caso de reatividade e conforme estudado nesta seção e apresentados juntamente com os resultados obtidos com o Método da Aproximação de Padé. Considera-se a reatividade senoidal com os parâmetros cinéticos da Tabela 6, com seis grupos de precursores de nêutrons atrasados e uma inserção periódica de reatividade  $\rho(t) = \rho_0 \sin(t)$ , onde  $\rho_0 = 0,0073$ . A densidade de nêutrons em  $cm^{-3}$  até  $10s$ , com passo de tempo de  $\Delta t = 0,001s$  e  $\Delta t = 0,0001s$ . Utiliza-se PCA e o método da aproximação de Padé para obter os resultados relacionados a reatividade senoidal e posteriormente comparar com estes expostos nesta obra citada acima com o intuito de encontrar resultados próximos e satisfatórios.

Tabela 18: Densidade de nêutrons em  $cm^{-3}$  para inserção de reatividade senoidal com seis precursores de nêutrons atrasados  $\rho = 0,0073 \sin(t)$ .

t(s)	PAM		Decomposição	MAP [4/4]
	$\Delta t = 0,001s$	$\Delta t = 0,0001s$		
1	1,123940559	1,123940509	1,12394	1,123670081
2	1,168889665	1,168889590	1,16884	1,168497653
3	1,074484710	1,074484703	1,07442	1,074211089
4	0,953829252	0,953829290	0,95380	0,953765537
5	0,907353445	0,907353490	0,90737	0,907447364
6	0,961539546	0,961539576	0,96158	0,961663801
7	1,087458937	1,087458911	1,08749	1,087521213
8	1,171671353	1,171671274	1,17164	1,171749763
9	1,111304463	1,111304437	1,11124	1,111233686
10	0,984680291	0,984680323	0,98464	0,984611478

O Método da Aproximação Polinomial (PAM) para densidade de nêutrons é apresentado e comparado com o Método da Decomposição presente em PETERSEN

(2011) conforme à Tabela 18 que exibe os resultados para este tipo de reatividade. Portanto, com os resultados obtidos nota-se que os valores encontrados estão próximos e comparando com os demais acima possui um desvio absoluto de  $10^{-5}$  utilizando um passo de tempo para PCA de  $\Delta t = 0,001$ .

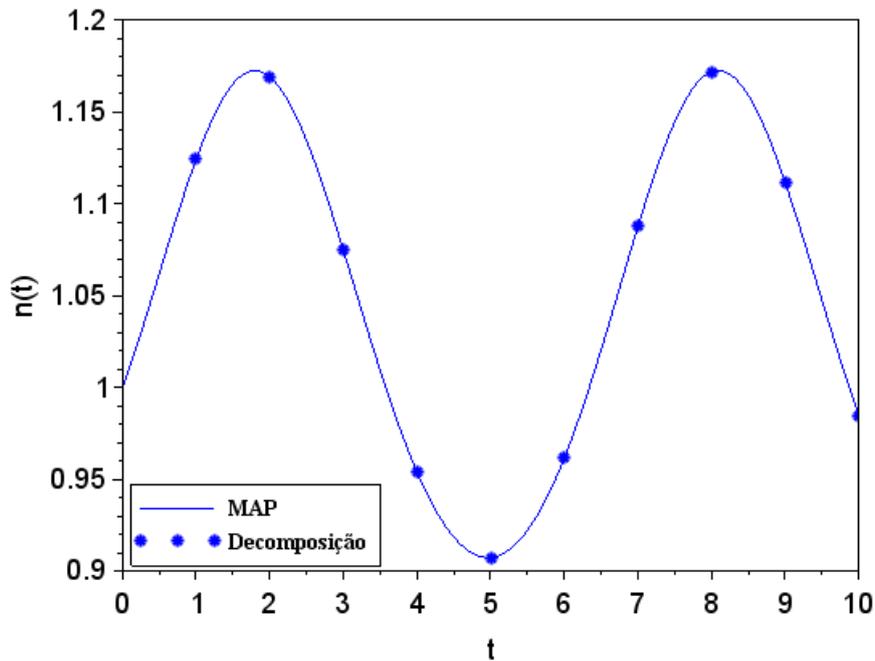


Figura 8: Densidade de nêutrons para reatividade senoidal.

Analisa-se os métodos aplicando o desvio absoluto conforme mostram as tabelas abaixo.

Tabela 19: Desvio absoluto dos métodos PAM e MAP para a inserção da reatividade senoidal.

t(s)	PAM $\Delta t = 0,001s$	MAP	Desvio Absoluto
1	1,123940559	1,123670081	2,7E-4
2	1,168889665	1,168497653	3,9E-4
3	1,074484710	1,074211089	2,7E-4
4	0,953829252	0,953765537	6,4E-5
5	0,907353445	0,907447364	9,4E-5
6	0,961539546	0,961663801	1,2E-4
7	1,087458937	1,087521213	6,2E-5
8	1,171671353	1,171749763	7,8E-5
9	1,111304463	1,111233686	7,1E-5
10	0,984680291	0,984611478	6,9E-5

Tabela 20: Desvio absoluto dos métodos Decomposição e MAP para a inserção da reatividade senoidal.

t(s)	Decomposição	MAP	Desvio Absoluto
1	1,12394	1,123670081	2,7E-4
2	1,16884	1,168497653	3,4E-4
3	1,07442	1,074211089	2,1E-4
4	0,95380	0,953765537	3,4E-5
5	0,90737	0,907447364	7,7E-5
6	0,96158	0,961663801	8,4E-5
7	1,08749	1,087521213	3,1E-5
8	1,17164	1,171749763	1,1E-4
9	1,11124	1,111233686	6,3E-6
10	0,98464	0,984611478	2,9E-5

Novamente, como nos casos estudados anteriormente, se nota que os resultados apresentados são próximos dos encontrados na literatura. Sua proximidade com os resultados dos outros métodos foram baseados através do desvio absoluto que compara e analisa cada instante de tempo.

Para todos os casos de reatividades estudados nesta dissertação foram utilizados os polinômios de quarto grau tanto para o numerador como também para o denominador dos aproximantes de Padé. O que se notou no decorrer é que se aumentarmos os graus destes polinômios os valores não apresentam mudanças significativas com relação ao MAP  $[4/4]$ .

Com o MAP  $[4/4]$  tem-se os valores aproximados para as reatividades em estudos comparados com PAM e BEFD. Mas o que se nota é que esses valores não tem alterações significativas quando se aumenta os graus do numerador e denominador dos aproximantes de Padé.

Graficamente, apresenta-se os casos de reatividades como rampa, zig-zag e senoidal com MAP  $[7/7]$  utilizando PCA ( $\Delta t = 0,001$ ) como se nota nas figuras a seguir.

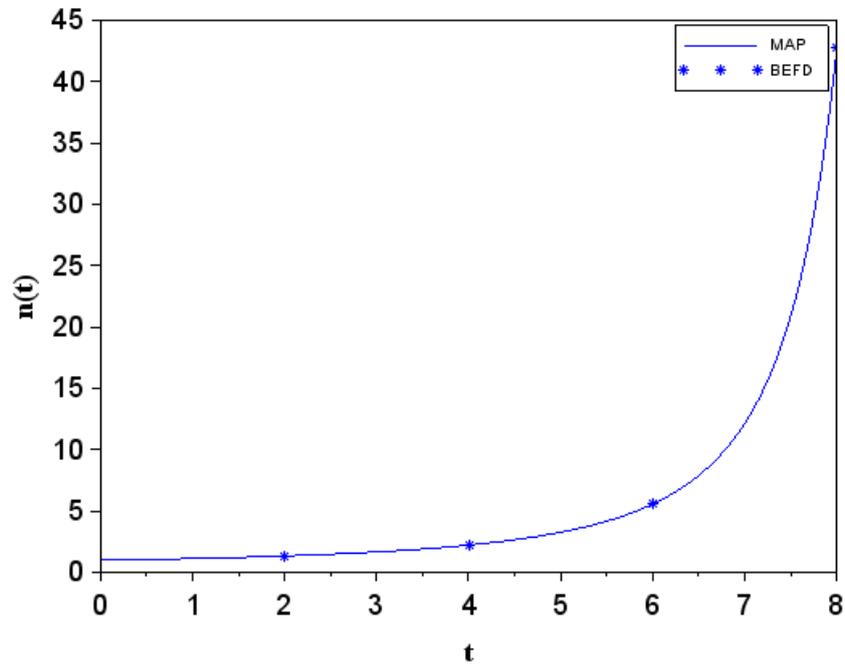


Figura 9: Densidade de nêutrons para reatividade rampa de 0 a 8 segundos.

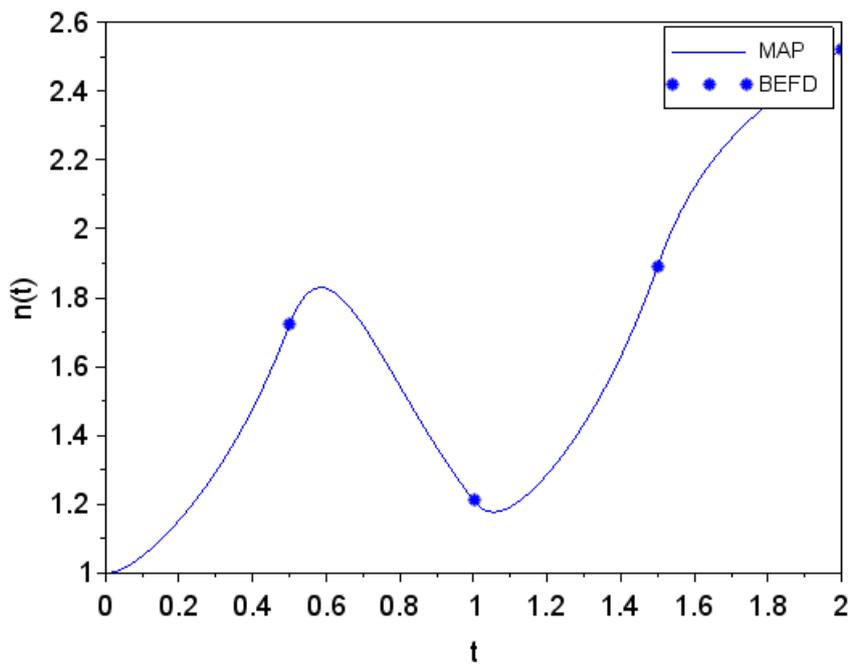


Figura 10: Densidade de nêutrons para reatividade zig-zag com MAP [7/7].

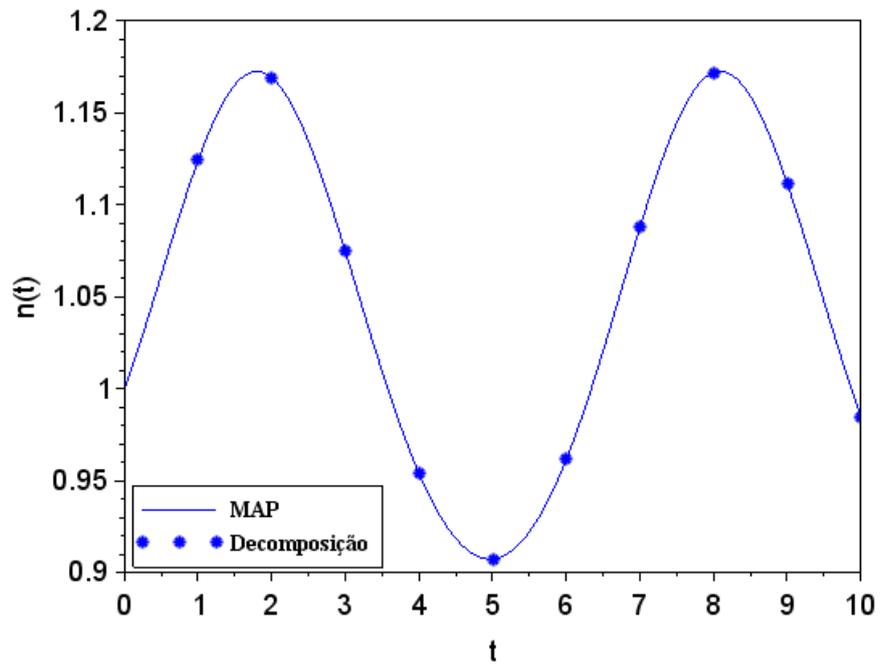


Figura 11: Densidade de nêutrons para reatividade senoidal com MAP [7/7].

## 6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Nesta dissertação, apresenta-se a solução das Equações da Cinética Pontual de Nêutrons pelo Método da Aproximação de Padé, considerando que nesta presente situação utilizou-se a inserção de reatividade constante e para reatividade dependente do tempo a inserção da reatividade rampa e senoidal.

Estudos relacionados a matriz gerada pelas Equações da Cinética Pontual de Nêutrons foram realizados e com isso, notou-se que o software acumulava erros ao longo das operações efetuadas, o que faz com que os resultados não se aproximem dos estudados aqui. Ao testar no Scilab potências de matrizes e comparar com a multiplicação de matrizes notou-se que os resultados obtidos apresentam variações sendo muitas vezes diferentes. E isso foi algo que pesou e muito nos resultados encontrados para este método.

A abordagem deste método juntamente com a incomum superação direta do problema de rigidez, causada pela grande diferença dos tempos médios de vida dos nêutrons prontos e atrasados, faz o Método de Aproximação de Padé uma boa opção para solucionar as Equações da Cinética Pontual de Nêutrons com as reatividades mais usadas.

Com as simulações numéricas, percebe-se quando comparadas com os resultados presentes na literatura, que o MAP possibilita obter resultados precisos e utilizando um reduzido tempo computacional. Este método gera resultados com o tempo computacional menor do que os encontrados até então, e é ideal para situações de controle e operação do reator nuclear.

A metodologia de resolução proposta mostra que não é necessário e nem prático utilizar um método numérico de difícil implementação computacional. O método apresentado é eficiente e preciso para resolver as Equações da Cinética Pontual de Nêutrons e supera a rigidez.

Atualmente tem sido realizados estudos com manipulações complexas para resolver as Equações da Cinética Pontual e Espacial de forma precisa. Sendo que, esta metodologia de resolução proposta mostra que para reatividades dependentes no tempo precisa utilizar outros procedimentos matemáticos para encontrar os resul-

tados e também é importante ressaltar que a implementação computacional é um pouco difícil. O Método da Aproximação de Padé é simples para resolver as ECPN superando a rigidez em se tratando de reatividade constante mas para outros tipos de reatividades precisa-se um estudo mais sofisticado.

Portanto, esta dissertação demonstrou a viabilidade do Método da Aproximação de Padé para a solução das Equações da Cinética Pontual de Nêutrons através da obtenção de resultados que simulam o comportamento de um reator nuclear.

Para trabalhos futuros utilizará as Equações de Cinética Pontual de Nêutrons aplicando o Método da Aproximação de Padé para seis grupos de precursores de nêutrons atrasados considerando a reatividade constante em um pequeno intervalo de tempo com retroalimentação de temperatura. Isso também se fará para os casos de não linearidades que abrange as reatividades do tipo: Quadrática, zig-zag e senoidal. Resolverá futuramente as ECPN sem utilizar PCA para os casos dependentes do tempo abordados nesta dissertação.

## REFERÊNCIAS

ABOANBER, A. E.; NAHLA, A. A. Generalization of the analytical inversion method for the solution of the point kinetics equations. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, v.35, n.14, p.3245, 2002.

ABOANBER, A.; NAHLA, A. Solution of the point kinetics equations in the presence of Newtonian temperature feedback by Padé approximations via the analytical inversion method. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, v.35, n.45, p.9609, 2002.

ABOANBER, A.; NAHLA, A. On padé approximations to the exponential function and application to the point kinetics equations. **Progress in Nuclear Energy**, v.44, n.4, p.347–368, 2004.

AGUILERA-NAVARRO, M. C. K.; AGUILERA-NAVARRO, V.; FERREIRA, R.; TERAMON, N. Os aproximantes de Padé. **Matemática Universitária**, v.26, p.27, 1999.

ARIOLI, M.; CODENOTTI, B.; FASSINO, C. The Padé method for computing the matrix exponential. **Linear Algebra and its Applications**, v.240, p.111–130, 1996.

BAKER, G. A.; BAKER JR, G. A.; GRAVES-MORRIS, P.; BAKER, S. S. **Padé approximants**. Cambridge University Press, 1996. v.59.

BELL, G. I.; GLASSTONE, S. **Nuclear reactor theory**. US Atomic Energy Commission, Washington, DC (United States), 1970.

DUDERSTADT, J. J.; HAMILTON, L. J. **Nuclear Reactor Analysis**. Estados Unidos da América: Wiley New York, 1976. v.84.

ESPINOSA-PAREDES, G.; DEL VALLE GALLEGOS, E.; CARRERA, A.; POLO-LABARRIOS, M.; ESPINOSA-MARTÁNEZ, E.; VÁZQUEZ-RODRÁGUEZ, A. Fractional neutron point kinetics equation with Newtonian temperature feedback effects. **Progress in Nuclear Energy**, v.73, 2014.

ESPINOSA-PAREDES, G.; POLO-LABARRIOS, M.-A.; ESPINOSA-MARTINEZ, E.-G.; VALLE-GALLEGOS, E. del. Fractional neutron point kinetics equations for nuclear reactor dynamics. **Annals of Nuclear Energy**, v.38, n.2-3, p.307–330, 2011.

GANAPOL, B. D. A highly accurate algorithm for the solution of the point kinetics equations. **Annals of Nuclear Energy**, v.62, p.564–571, 2013.

GANAPOL, B. D.; PICCA, P. A modified piecewise constant approximation for solution to the point kinetics equations. **Transactions of the American Nuclear Society**, v.113, p.1167–1170, 1 2015.

HAYES, J. G.; ALLEN, E. Stochastic point-kinetics equations in nuclear reactor dynamics. **Annals of nuclear energy**, v.32, n.6, p.572–587, 2005.

JAMES, G. D.; LYNN, J.; MICHAUDON, A.; ROWLANDS, J.; SAUSSURE, G. de. **Nuclear fission and neutron induced fission cross-sections**. Pergamon Press Oxford, 1981.

KINARD, M.; ALLEN, E. Efficient numerical solution of the point kinetics equations in nuclear reactor dynamics. **Annals of Nuclear Energy**, v.31, n.9, p.1039–1051, 2004.

LAMARSH, J. R. **Introduction to nuclear reactor theory**. Addison-Wesley Reading, Massachusetts, 1966. v.3.

LAMARSH, J. R. Introduction to Nuclear Engineering. **Addison-Wesley Publishing Company**, 1983.

LAMARSH, J. R.; BARATTA, A. J. **Introduction to nuclear engineering**. Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 2001. v.3.

LEPPANEN, J.; AUFIERO, M.; FRIDMAN, E.; RACHAMIN, R.; MARCK, S. van der. Calculation of effective point kinetics parameters in the Serpent 2 Monte Carlo code. **Annals of Nuclear Energy**, v.65, 2014.

LEWINS, J. **Nuclear reactor kinetics and control**. Elsevier, 2013.

LEWIS, E. E. **Fundamentals of nuclear reactor physics**. Elsevier, 2008.

NAHLA, A. A. Taylor's series method for solving the nonlinear point kinetics equations. **Nuclear Engineering and Design**, v.241, n.5, p.1592–1595, 2011.

NÓBREGA, J. d. A new solution of the point kinetics equations. **Nuclear Science and Engineering**, v.46, n.3, p.366–375, 1971.

OKA, Y.; SUZUKI, K. et al. **Nuclear Reactor Kinetics and Plant Control**. Springer, 2013. v.10.

PADÉ, H. **Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles**. 1892. 3-93p. v.9.

PATRA, A.; SAHA RAY, S. Numerical simulation based on Haar wavelet operational method to solve neutron point kinetics equation involving sinusoidal and pulse reactivity. **Annals of Nuclear Energy**, v.73, 2014.

PETERSEN, C. Z. **Solução Analítica das equações da Cinética Pontual e Espacial da Teoria de Difusão de Nêutrons pelas técnicas da GITT e Decomposição**. 2011. Tese de Doutorado — UFRGS, Porto Alegre/RS.

PETERSEN, C. Z.; DULLA, S.; VILHENA, M. T.; RAVETTO, P. An analytical solution of the point kinetics equations with time-variable reactivity by the decomposition method. **Progress in Nuclear Energy**, v.53, n.8, p.1091–1094, 2011.

REUSS, P. **Neutron physics**. EDP sciences, 2012.

SCHRAMM, M.; BODMANN, B.; ALVIM, A.; VILHENA, M. The neutron point kinetics equation: Suppression of fractional derivative effects by temperature feedback. **Annals of Nuclear Energy**, v.87, 2016.

STACEY, W. M. **Nuclear reactor physics**. John Wiley & Sons, 2018.

TUMELERO, F. **Solução das equações da cinética pontual de nêutrons com e sem realimentação de temperatura pelo método da aproximação polinomial**. 2015. Dissertação de Mestrado — PPGMat/UFPEL, Pelotas/RS.

WILLIAMS, W. S. Nuclear and particle physics. **Nuclear and particle physics., by Williams, WSC. Clarendon Press, Oxford (UK)**, p.398, 1991.