

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS**  
Instituto de Física e Matemática  
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática



Dissertação

**Homogeneização assintótica de meios microperiódicos unidimensionais com diferentes condições de contato**

**Larissa Nunes Meirelles da Luz**

Pelotas, 2020

**Larissa Nunes Meirelles da Luz**

**Homogeneização assintótica de meios microperiódicos unidimensionais com diferentes condições de contato**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática

Orientador: Prof. Dr. Leslie Darien Pérez Fernández

Pelotas, 2020

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas  
Catalogação na Publicação

L979h Luz, Larissa Nunes Meirelles da

Homogeneização assintótica de meios microperiódicos unidimensionais com diferentes condições de contato / Larissa Nunes Meirelles da Luz ; Leslie Darien Pérez Fernández, orientador. — Pelotas, 2020.

94 f. : il.

Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2020.

1. Método de homogeneização assintótica. 2. Microperiodicidade. 3. Coeficientes contínuos. 4. Coeficientes contínuos por partes. 5. Contato perfeito. I. Fernández, Leslie Darien Pérez, orient. II. Título.

CDD : 511.8

Elaborada por Ubirajara Buddin Cruz CRB: 10/901

# **HOMOGENEIZAÇÃO ASSINTÓTICA DE MEIOS MICROPERIÓDICOS UNIDIMENSIONAIS COM DIFERENTES CONDIÇÕES DE CONTATO**

por

**Larissa Nunes Meirelles da Luz**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, PPGMMat, do Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

**Mestre em Modelagem Matemática**

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Leslie Darien Pérez Fernández – Orientador (UFPel)

Profa. Dra. Camila Pinto da Costa (UFPel)

Profa. Dra. Ruth da Silva Brum (UFPel)

Profa. Dra. Rejane Pergher (UFPel)

Prof. Dr. Julián Bravo Castillero (Universidad Nacional Autónoma de México)

Pelotas, 11 de setembro de 2020.

**Dedico a quem me apoiou,  
quem me ajudou, quem me fez  
chegar até aqui e nunca desistiu de mim.  
A vocês eu agradeço de coração. Obrigado.**

## **AGRADECIMENTOS**

A todos os mestres que contribuíram com a minha formação acadêmica e profissional durante a minha vida.

Aos meus pais Luciana e Oscar que sempre me incentivaram e apoiaram em todas as áreas da minha vida.

Ao meu orientador Leslie por sua dedicação e paciência. Seus conhecimentos fizeram grande diferença na minha vida acadêmica.

Ao meu namorado Anderson que acima de tudo é um grande amigo, sempre presente nos momentos difíceis com uma palavra de incentivo. Sua mãe Vera por estar sempre me apoiando na vida e nos cuidados com a minha mãe para que eu pudesse estudar.

Aos meus tios Gladis e Everson por me apoiarem nos momentos mais necessários, permitindo assim que pudesse continuar estudando.

Sou grata à minha família pelo apoio que sempre me deram durante toda a minha vida.

Aos amigos e colegas, pelo incentivo e pelo apoio constantes.

À CAPES e FAPERGS pela bolsa proporcionada.

À Universidade Federal de Pelotas e todos os seus professores que sempre proporcionaram um ensino de alta qualidade.

**Se não puder voar, corra.  
Se não puder correr, ande.  
Se não puder andar, rasteje,  
mas continue em frente  
de qualquer jeito.  
— MARTIN LUTHER KING JR.**

## RESUMO

LUZ, Larissa Nunes Meirelles da. **Homogeneização assintótica de meios micro-periódicos unidimensionais com diferentes condições de contato**. 2020. 94 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2020.

Os métodos de homogeneização matemática permitem encontrar com grande precisão e rigor as propriedades efetivas de meios heterogêneos a partir das propriedades físicas e geométricas de seus componentes. Em particular, o método de homogeneização assintótica (MHA) é utilizado para encontrar os coeficientes que representam as propriedades efetivas de um meio com estrutura periódica. O presente trabalho tem como objetivo o estudo desta técnica matemática de homogeneização para obtenção do comportamento efetivo de meios micro-heterogêneos, e aplicar o seu formalismo matemático para construir uma solução assintótica formal de um problema unidimensional linear para os problemas elíptico, parabólico e hiperbólico para os casos com coeficientes contínuos e contínuos por partes com contato perfeito. Ainda, justificar-se-á matematicamente a proximidade entre as soluções dos problemas original e homogeneizado. E também, aplica-se o MHA no problema elíptico para o caso contínuo por partes com contato imperfeito.

**Palavras-chave:** Método de Homogeneização Assintótica, Microperiodicidade, Coeficientes contínuos, Coeficientes contínuos por partes, Contato perfeito, Equação Elíptica, Equação Parabólica, Equação Hiperbólica.



## ABSTRACT

LUZ, Larissa Nunes Meirelles da. **Asymptotic homogenization of one-dimensional microperiodic media with different contact conditions**. 2020. 94 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2020.

The methods of mathematical homogenization allow the effective properties of heterogeneous media to be found with great precision and rigor based on the physical and geometric properties of their components. In particular, the asymptotic homogenization method (AHM) is used to find the coefficients that represent the effective properties of a medium with a periodic structure. The present work aims to study this mathematical homogenization technique to obtain the effective behavior of micro-heterogeneous media, and to apply mathematical formalism to construct a formal asymptotic solution of a one-dimensional linear problem for elliptic, parabolic and hyperbolic problems for cases with continuous and piecewise-continuous coefficients with perfect contact. Also, the proximity between the solutions of the original and homogenized problems will be mathematically justified. Also, the AHM is applied to the elliptic problem for the piecewise-continuous case with imperfect contact.

**Keywords:** Asymptotic Homogenization Method, Microperiodicity, Continuous coefficients, Piecewise-continuous coefficients, Perfect contact, Elliptic Equation, Parabolic Equation, Hyperbolic Equation.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Atmosfera . . . . .	15
Figura 2	Osso humano . . . . .	15
Figura 3	Madeira . . . . .	16
Figura 4	Rocha . . . . .	16
Figura 5	Setor aeronáutico . . . . .	16
Figura 6	Compósito (da autora) . . . . .	17
Figura 7	Policristal (da autora) . . . . .	17
Figura 8	Meio funcionalmente graduado (da autora) . . . . .	17
Figura 9	Separação das escalas estruturais . . . . .	18
Figura 10	Para $\varepsilon$ suficientemente pequeno, o meio heterogêneo aproxima o comportamento macroscópico de um meio homogêneo mesmo que suas propriedades oscilem rapidamente pela separação de escalas . . . . .	19
Figura 11	Homogeneização: Processo de obtenção do material homogêneo equivalente . . . . .	19
Figura 12	Compósitos bifásicos microperiódicos: (a) um laminado, (b) um arranjo hexagonal de fibras cilíndricas em uma matriz, (c) um arranjo quadrado de fibras ortoédricas em uma matriz, e (d) uma distribuição cúbica de esferas em uma matriz . . . . .	20
Figura 13	Homogeneização assintótica: o material homogêneo equivalente é o limite da sequência de compósitos quando $\varepsilon \rightarrow 0$ . . . . .	20
Figura 14	Estrutura do trabalho . . . . .	21
Figura 15	Exemplo equação elíptica contínuo por partes com contato perfeito	47
Figura 16	Comparação dos modelos contínuo e contínuo por partes com contato perfeito(discreto) para equação do elíptica . . . . .	49
Figura 17	Exemplo caso contínuo para equação parabólica . . . . .	66

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
MHA	Método de Homogeneização Assintótica
SAF	Solução Assintótica Formal

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\varepsilon$	Parâmetro geométrico pequeno
$x$	Variável global, macroscópica, ou lenta
$y$	Variável local, microscópica, ou rápida: $y = \frac{x}{\varepsilon}$
$u^{(\infty)}$	Solução assintótica formal do problema
$u^\varepsilon$	Solução exata do problema
$\langle \cdot \rangle$	Operador de valor médio sobre o período: $\langle \cdot \rangle = \int_0^1 (\cdot) dy$
$[[\cdot]]$	Operador de salto ou contraste ao redor de um certo ponto $y = y_0$ : $[[\cdot]] = \lim_{y \rightarrow y_0^+} (\cdot) - \lim_{y \rightarrow y_0^-} (\cdot)$
$\Omega$	Domínio em $\mathbb{R}$ , um conjunto aberto e conexo
$C^n$	Espaços das funções contínuas com derivadas contínuas até ordem $n$ .
$L^2(\Omega)$	Espaço das funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de quadrado integrável com a norma $\ u\ _{L^2(\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} u^2 dx}$
$H^1(\Omega)$	Espaço das funções de $L^2(\Omega)$ cujas derivadas de primeira ordem também estão em $L^2(\Omega)$ com norma $\ u\ _{H^1(\Omega)}^2 = \ u\ _{L^2(\Omega)}^2 + \left\  \frac{du}{dx} \right\ _{L^2(\Omega)}^2$
$\beta_\varepsilon(\Omega)$	Espaço normado definido sobre $\Omega$ , parametrizado por $\varepsilon$
$a_1, a_2$	Propriedades físicas das fases de um composto bifásico
$y_1$	Ponto de interface na célula periódica na microescala $y$
$a^\varepsilon$	Propriedade física rapidamente oscilante do material microperiódico
$\hat{a}$	Propriedade macroscópica, efetiva ou global
$G^\varepsilon$	Propriedade física rapidamente oscilante do material microperiódico
$\hat{G}$	Propriedade macroscópica, efetiva ou global
$\Gamma^\varepsilon$	Conjunto dos pontos de interface de um meio bifásico microperiódico com parâmetro pequeno $\varepsilon$
$J^\varepsilon$	Propriedade física rapidamente oscilante do material microperiódico
$w^\varepsilon(x, t)$	Deslocamento Vertical (para o caso hiperbólico)
$J$	Densidade de massa
$f(x, t)$	Força do corpo (para o caso hiperbólico)

$v$  Deslocamento inicial

$q$  Velocidade inicial

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	15
1.1	Estrutura do trabalho	21
1.2	Objetivos	22
<b>2</b>	<b>PRELIMINARES</b>	23
2.1	Meio heterogêneo com estrutura periódica	23
2.2	Conceitos fundamentais	23
2.2.1	Ordem	23
2.2.2	Expansão assintótica e solução assintótica formal	24
<b>3</b>	<b>HOMOGENEIZAÇÃO DE MEIOS UNIDIMENSIONAIS MICRO-PERÍODICOS PARA A EQUAÇÃO ELÍPTICA</b>	25
3.1	Caso Contínuo	25
3.1.1	Formulação do Problema	25
3.1.2	Método de Homogeneização Assintótica	25
3.1.3	Proximidade entre as soluções	34
3.2	Caso Contínuo por Partes com Contato Perfeito	37
3.2.1	Formulação do Problema	37
3.2.2	Método de Homogeneização Assintótica	38
3.2.3	Proximidade entre as soluções	43
3.2.4	Exemplo	46
3.3	Comparação caso contínuo com o caso contínuo por partes com contato perfeito	48
3.4	Caso Contínuo por Partes com Contato Imperfeito	50
3.4.1	Formulação do Problema	50
3.4.2	Método de Homogeneização Assintótica	50
<b>4</b>	<b>HOMOGENEIZAÇÃO DE MEIOS UNIDIMENSIONAIS MICRO-PERÍODICOS PARA A EQUAÇÃO PARABÓLICA</b>	55
4.1	Caso Contínuo	55
4.1.1	Formulação do problema	55
4.1.2	Método de Homogeneização Assintótica	55
4.1.3	Proximidade entre as soluções	61
4.1.4	Exemplo	65
4.2	Caso Contínuo por Partes com Contato Perfeito	66
4.2.1	Formulação do Problema	66
4.2.2	Método de Homogeneização Assintótica	67
4.2.3	Proximidade entre as soluções	70

<b>5</b>	<b>HOMOGENEIZAÇÃO DE MEIOS UNIDIMENSIONAIS MICRO-PERÍODICOS PARA A EQUAÇÃO HIPERBÓLICA</b>	<b>73</b>
<b>5.1</b>	<b>Caso Contínuo</b>	<b>73</b>
5.1.1	Formulação do Problema	73
5.1.2	Método de Homogeneização Assintótica	73
5.1.3	Proximidade entre as soluções	78
<b>5.2</b>	<b>Caso Contínuo por Partes com Contato Perfeito</b>	<b>82</b>
5.2.1	Formulação do Problema	82
5.2.2	Método de Homogeneização Assintótica	83
5.2.3	Proximidade entre as soluções	86
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>89</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>92</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Materiais heterogêneos podem ser encontrados na natureza como atmosfera (Figura 1), osso (Figura 2), madeira (Figura 3), rocha (Figura 4), solo ou fabricados para uma determinada aplicação como os compósitos com reforços fibrosos que são muito utilizados em diversos setores industriais, como o automobilístico, aeronáutico (Figura 5), de construção civil, desportivo, eletroeletrônico, de construção de máquinas e de equipamentos médicos (SILVA, 2009).

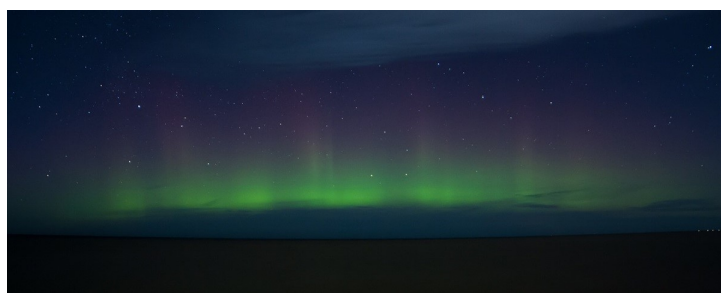


Figura 1: Atmosfera

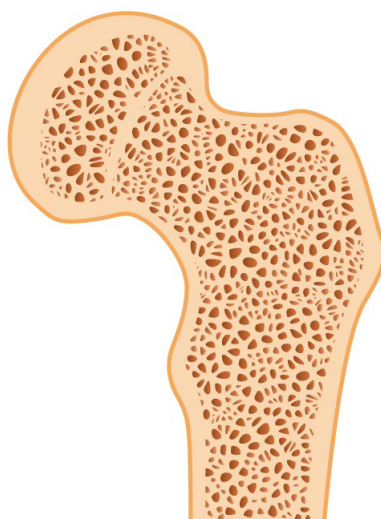


Figura 2: Osso humano





Figura 3: Madeira



Figura 4: Rocha

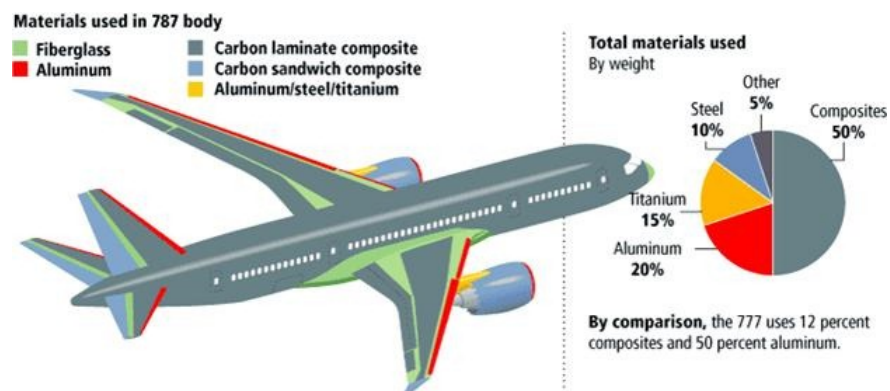


Figura 5: Setor aeronáutico

Estes materiais são caracterizados pela variação de suas propriedades físicas com relação à posição na sua estrutura interna. A forma em que tal variação é modelada permite identificar três tipos de material heterogêneo, a saber (TORQUATO, 2001; SADD, 2009).

- Compósito: distribuição de domínios ocupados por diferentes materiais homogêneos chamados de fases (propriedades constantes por partes) (Figura 6).

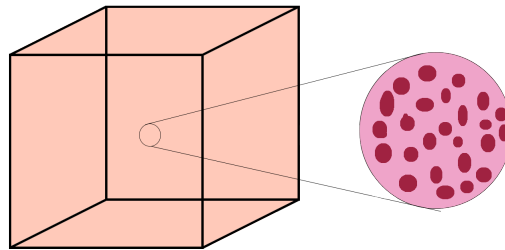


Figura 6: Compósito (da autora)

- Policristal: distribuição de domínios ocupados pelo mesmo material homogêneo com diferentes orientações (propriedades localmente iguais e globalmente diferentes)(Figura 7).

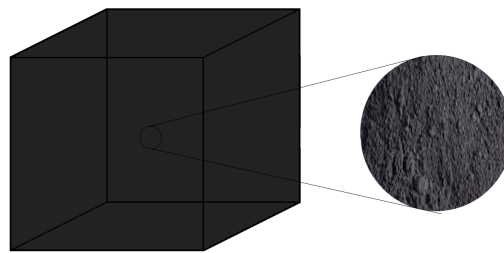


Figura 7: Policristal (da autora)

- Meio funcionalmente graduado: um domínio ocupado por um único material heterogêneo (propriedades de variação idealmente contínua)(Figura 8).

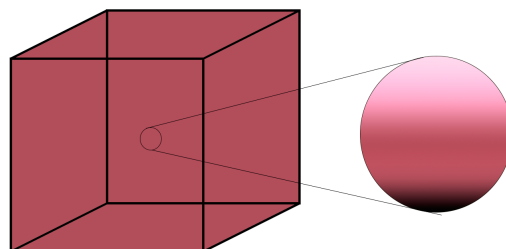


Figura 8: Meio funcionalmente graduado (da autora)

Cientistas de renome como MAXWELL (1873), RAYLEIGH (1892), e EINSTEIN (1906) já tinham interesse nas propriedades mecânicas, eletromagnéticas, e de transporte dos materiais heterogêneos. Normalmente, na microescala é onde ocorre os

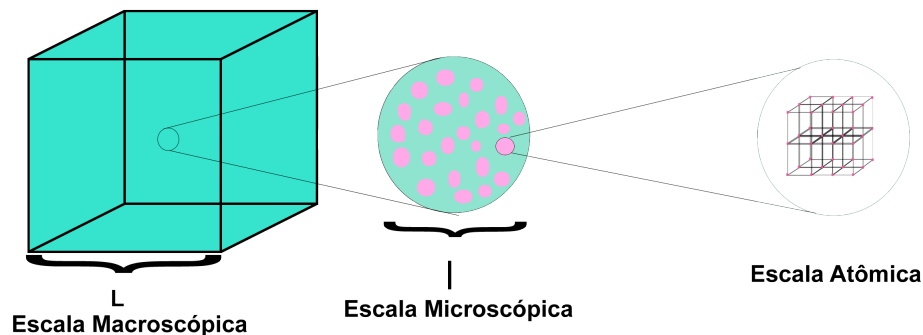


Figura 9: Separação das escalas estruturais

fenômenos físicos de interesse. Assumimos que o comprimento característico  $l$  desta escala “microscópica” (aquela em que os domínios estão distribuídos, ou seja, em que ocorre a heterogeneidade) é muito maior que aquele da escala molecular, mas muito menor que o comprimento  $L$  característico da escala macroscópica,  $l \ll L$  (LIMA, 2016). Em tais situações, dizem que o material heterogêneo apresenta separação das escalas estruturais (Figura 9) (caracterizada pelo parâmetro geométrico  $\varepsilon = l/L$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ ), suas propriedades apresentam variação rápida com relação a posição e que cumpre a hipótese do contínuo, ou seja, ele pode ser visto como um contínuo na escala microscópica e, portanto propriedades macroscópicas ou efetivas podem lhe ser atribuídas (TORQUATO, 2001). Mais precisamente, a hipótese de homogeneidade equivalente estabelece que, na macroescala, o material heterogêneo é fisicamente equivalente a um certo material homogêneo, de maneira que as propriedades efetivas do primeiro são as propriedades do segundo (PANASENKO, 2008).

Inicialmente, a teoria era de obter uma solução assintótica das equações em derivadas parciais dependentes do parâmetro pequeno  $\varepsilon$  e com coeficientes rapidamente oscilantes que modelam o comportamento constitutivo do meio heterogêneo. Assim, a hipótese de homogeneidade equivalente (Figura 10) seria válida se  $u^\varepsilon$ , solução das equações para o material heterogêneo, sujeitas a certas condições de contorno e/ou iniciais, fosse de  $u_0$ , solução das equações com coeficientes constantes que descrevem o comportamento do material homogêneo equivalente, sujeito as mesmas condições do anterior,  $\varepsilon$ -próxima para alguma norma, ou seja,  $\|u^\varepsilon - u_0\| = O(\varepsilon)$  (PANASENKO, 2008). Sob as hipóteses de separação de escalas e do contínuo, podemos especificar dois usos da homogeneização (Figure 11): a obtenção de uma boa aproximação da solução do problema original e a obtenção do comportamento efetivo do meio heterogêneo.

Em muitos casos, a heterogeneidade destes materiais é microperiódica (Figura 12), ou seja, são formados pela replicação periódica de um elemento recorrente na

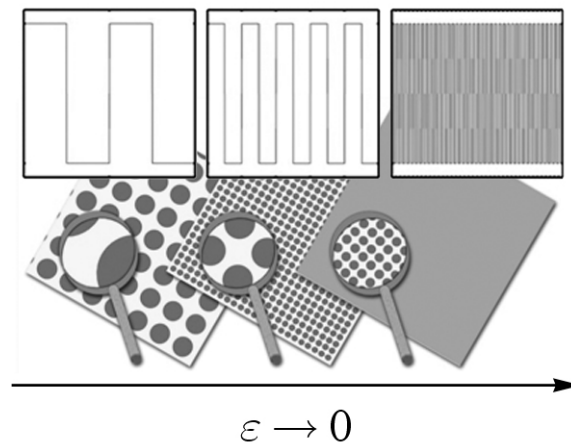


Figura 10: Para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, o meio heterogêneo aproxima o comportamento macroscópico de um meio homogêneo mesmo que suas propriedades oscilem rapidamente pela separação de escalas

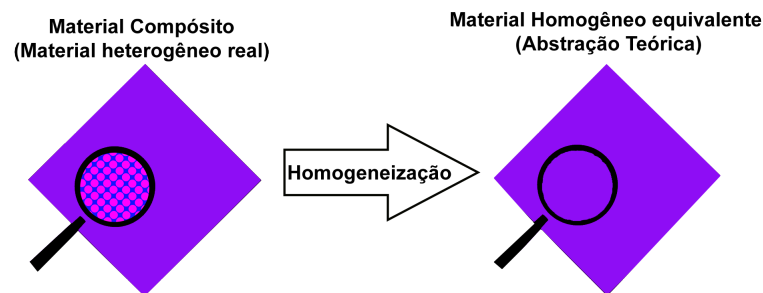


Figura 11: Homogeneização: Processo de obtenção do material homogêneo equivalente

microescala. Tal elemento recorrente é chamado de célula básica e é representativo, pois reúne todas as propriedades físicas e geométricas do material heterogêneo de interesse e possibilita o emprego de modelos matemáticos com maior eficiência. O estudo numérico direto dos problemas correspondentes, cujas equações têm coeficientes rapidamente oscilantes, não fornece expressões fechadas para as soluções destes sistemas, e requer malhas extremamente refinadas que dificultam a sua aplicação devido ao alto custo computacional e ao possível comprometimento da convergência. Além disso, a determinação das propriedades efetivas de materiais heterogêneos por meio de métodos matemáticos serve de orientação na busca experimental de novos materiais com as propriedades ótimas desejadas para alguma aplicação.

Os resultados apresentados nesta dissertação foram obtidos via o método de homogeneização assintótica (MHA) (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989). O MHA (Figura 13) permite obter uma solução assintótica formal do problema em estudo que, em presença de linearidade, é uma expansão assintótica da solução exata do problema. Mais exatamente, este método se baseia no desenvolvimento em série assintótica em

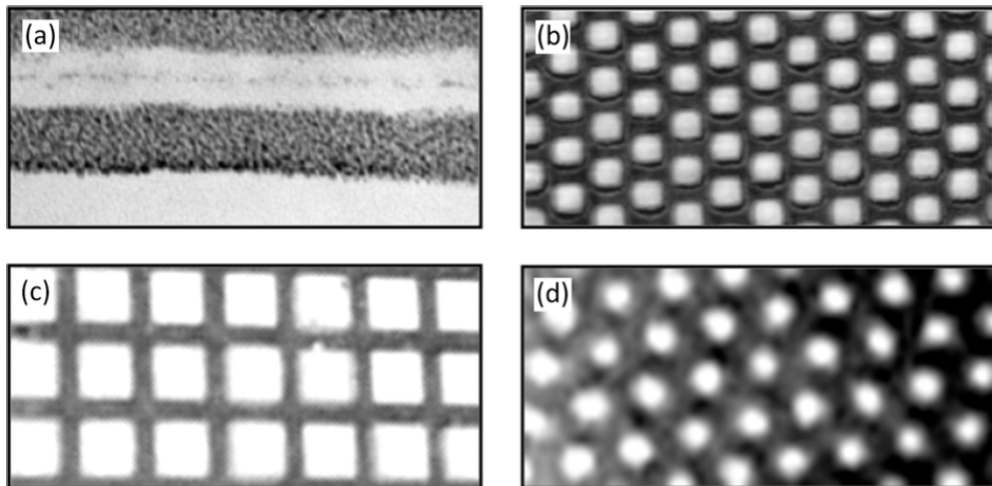


Figura 12: Compósitos bifásicos microperiódicos: (a) um laminado, (b) um arranjo hexagonal de fibras cilíndricas em uma matriz, (c) um arranjo quadrado de fibras ortoédricas em uma matriz, e (d) uma distribuição cúbica de esferas em uma matriz

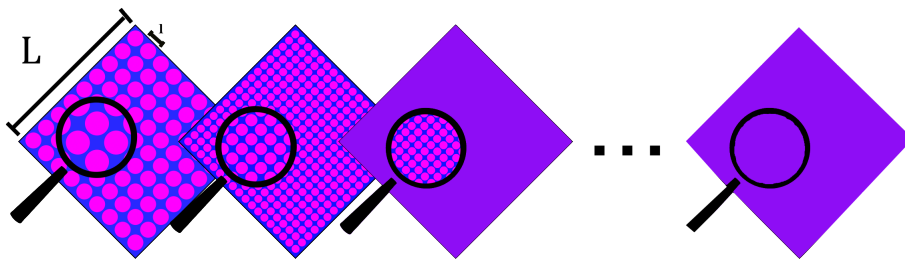


Figura 13: Homogeneização assintótica: o material homogêneo equivalente é o limite da sequência de compósitos quando  $\varepsilon \rightarrow 0$

duas escalas da solução do problema de valores de contorno e iniciais com coeficientes rapidamente oscilantes que modela o fenômeno estudado. Tal desenvolvimento assintótico é realizado em termos de potências do parâmetro geométrico pequeno que caracteriza a separação de escalas, e cujos coeficientes são funções incógnitas. Assim, o problema se desacopla em uma sequência recorrente de problemas para obter cada uma das funções incógnitas que formam a assintótica da solução procurada. Na prática, é comum considerar somente os dois primeiros termos da assintótica, obtendo-se o problema homogeneizado ou macroscópico para o primeiro termo, e o problema local ou microscópico para o segundo. Além disso, o MHA permite obter propriedades efetivas que descrevem o comportamento macroscópico do meio e são os coeficientes constantes das equações do problema homogeneizado.

## 1.1 Estrutura do trabalho

A estrutura do trabalho se dá da seguinte forma mostrada na Figura 14, que consiste em aplicar o MHA nas equações elíptica, parabólica e hiperbólica. Aplicaremos na equação elíptica o MHA, no caso contínuo e contínuo por partes e provada a proximidade das soluções do problema original  $u^\varepsilon$ , homogeneizado  $u_0$  e da Solução assintótica formal (SAF)  $u^{(2)}$ . Ainda vamos comparar o caso contínuo com o contínuo por partes com contato perfeito a partir de um exemplo ilustrativo. Teremos o início da aplicação do MHA na equação elíptica com contato imperfeito.

Aplicaremos o MHA na equação parabólica para o caso contínuo e contínuo por partes com contato perfeito, ambas com a demonstração da proximidade e um exemplo para o caso contínuo. Teremos a aplicação do MHA na equação hiperbólica também nos casos contínuo e contínuo por partes e também suas demonstrações da proximidade.

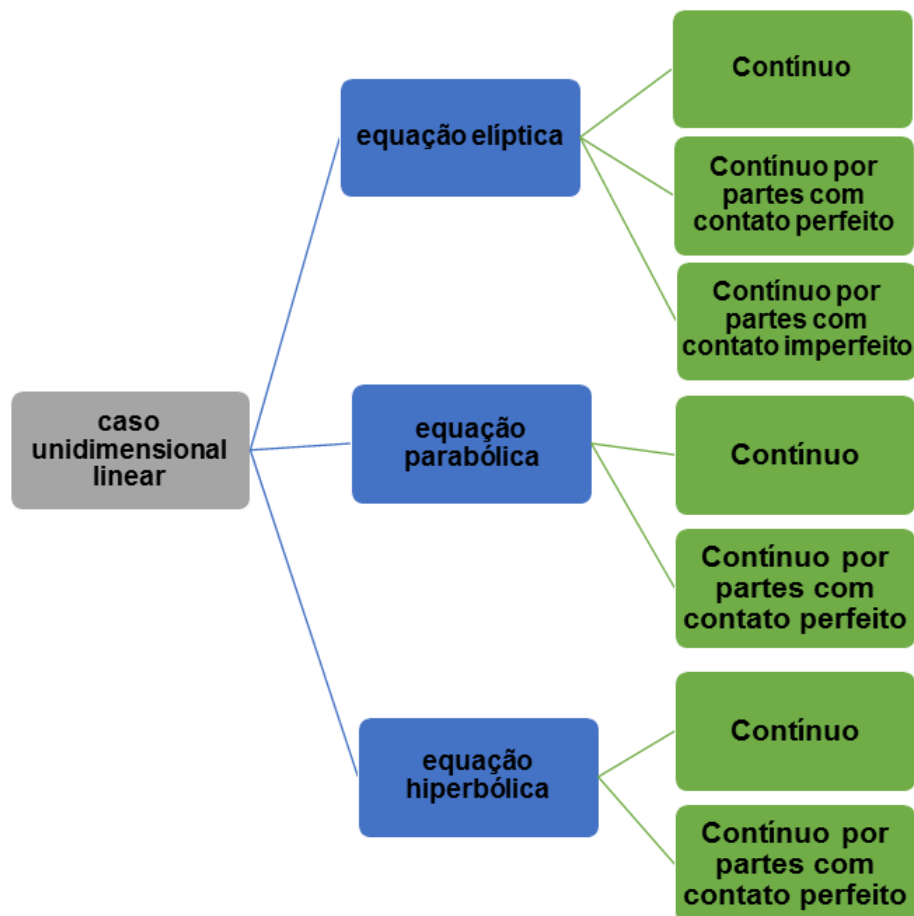


Figura 14: Estrutura do trabalho

## 1.2 Objetivos

- Construir a solução assintótica formal de problemas unidimensionais lineares elíptico, parabólico e hiperbólico com coeficientes contínuos e contínuos por partes com contato perfeito, mas também o caso contínuo por partes com contato imperfeito entre as fazes para a equação elíptica.
  - Considerar uma expansão assintótica da SAF dos problemas;
  - Substituir essa expansão no problema;
  - Desenvolver e agrupar por potências de  $\varepsilon$ ;
  - Obter uma sequência recorrentes de problemas estabelecidos a partir das equações do problema original, ou seja, os problemas elíptico, parabólico e hiperbólico juntamente com as suas condições ;
  - Notar que estes problemas tem o mesmo formato e aplicar um Lema;
  - Achar os problemas locais e o problema homogeneizado;
  - Construir a expansão assintótica da SAF.
- Mostrar matematicamente a proximidade entre as soluções dos problemas original e homogeneizado para os problemas elíptico, parabólico e hiperbólico levando em conta os casos contínuo e contínuo por partes com contato perfeito.
- Comparar para a equação elíptica os casos contínuo com o contínuo por partes com contato perfeito através de um exemplo.

## 2 PRELIMINARES

### 2.1 Meio heterogêneo com estrutura periódica

Um meio heterogêneo é caracterizado pela variação de suas propriedades físicas ao longo da sua estrutura. Em particular, um meio periódico é caracterizado pela composição da sua estrutura pela reprodução periódica de um elemento recorrente chamado de célula básica ou de periodicidade (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

Seja  $\varepsilon$  um parâmetro geométrico pequeno,  $0 < \varepsilon \ll 1$ , que especifica globalmente o comprimento do elemento recorrente e indica a existência de duas escalas estruturais (micro- e macroescala). A partir deste elemento, constituímos uma estrutura unidimensional de comprimento unitário e  $\varepsilon$ -periódica. Como a estrutura é periódica, ao realizar o estudo do comportamento local em cada elemento recorrente, é possível estender tais resultados para a estrutura como um todo. Define-se assim, uma nova variável,  $y = x/\varepsilon \in [0, \varepsilon^{-1}]$ , chamada de variável microscópica, rápida ou local, que descreve o comportamento local do meio, em contraste com a variável  $x \in [0, 1]$  que é chamada de macroscópica, lenta ou global (LIMA, 2016).

Equações diferenciais parciais com coeficientes rapidamente oscilantes modelam fenômenos em meios micro-heterogêneos e são obtidas a partir de relações constitutivas de fechamento e leis de conservação. Ainda, devem satisfazer certas condições de contato, periodicidade, contorno e/ou iniciais.

Nos próximos capítulos utilizaremos de meios micro-heterogêneos que, levando em conta sua periodicidade e rápida variação com relação a posição de suas propriedades, são homogêneos na escala macroscópica.

### 2.2 Conceitos fundamentais

#### 2.2.1 Ordem

Seja uma função  $\varphi : \Omega \times E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi^\varepsilon = \varphi(x, \varepsilon)$ , sendo  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$  e  $\varepsilon \in E \subset (0, 1)$ . Considere ainda que  $\varphi^\varepsilon \in B_\varepsilon(\Omega)$ , sendo  $B_\varepsilon(\Omega)$  um espaço normado e  $\varphi^\varepsilon$  definida para cada  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno. A notação  $\varphi^\varepsilon = O(\psi(x, \varepsilon))$ , enquanto



$\varepsilon \rightarrow 0^+$  na norma de  $B_\varepsilon(\Omega)$ , significa que existem constantes  $M, \varepsilon_0 > 0$ , tais que  $\|\varphi^\varepsilon\|_{B_\varepsilon(\Omega)} \leq M\|\psi\varepsilon\|_{B_\varepsilon(\Omega)}$ , para  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ . Em particular,  $\varphi^\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon^N)$  é equivalente á  $\|\varphi^\varepsilon\|_{B_\varepsilon(\Omega)} \leq M\varepsilon^N$  para  $\varepsilon > 0$  suficiente pequeno (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

### 2.2.2 Expansão assintótica e solução assintótica formal

Sejam a função  $\varphi^\varepsilon$  e uma série assintótica da forma  $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i g_i(x, \varepsilon)$ , não necessariamente convergente. Diz-se que esta série é uma expansão assintótica da função  $\varphi^\varepsilon$  se para todo  $N$  existe um  $M_0$ , tal que para cada  $m \geq M_0$  cumprimos, na norma de  $B_\varepsilon$ , com  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , que

$$\varphi(x, \varepsilon) - \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i g_i(x, \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^N), \quad (2.1)$$

ou seja, tem-se a igualdade assintótica  $\varphi(x, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i g_i(x, \varepsilon)$ .

Sejam  $\varepsilon > 0$  fixo, e a equação diferencial

$$\frac{d}{dx} \left( a^\varepsilon(x) \frac{du^\varepsilon}{dx} \right) = f, \quad (2.2)$$

$u^\varepsilon \in B_{1\varepsilon}$  e  $f \in B_{2\varepsilon}$ , sendo  $B_{1\varepsilon}$  e  $B_{2\varepsilon}$  espaços normados. Temos que a solução assintótica formal(SAF) de (2.2) é a série assintótica

$$u^{(\infty)}(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_i(x, \varepsilon) \quad (2.3)$$

em que  $u_i \in B_{1\varepsilon}$ , tal que para todo  $N \in \mathbb{N}$ , existe um  $M$  para que a relação

$$\frac{d}{dx} \left( a^\varepsilon(x) \frac{du^{(m)}}{dx} \right) - f = \mathcal{O}(\varepsilon^N), \quad (2.4)$$

seja satisfeita para todo  $m \geq M$  com  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  na norma de  $B_{2\varepsilon}$ , em que  $u^{(m)} = \sum_{i=0}^m \varepsilon^i u_i$ .

Se existe uma estimativa  $\|u^\varepsilon\|_{B_{1\varepsilon}} \leq c_1 \varepsilon^{c_2} \|f\|_{B_{2\varepsilon}}$ , em que  $c_1 > 0$  e  $c_2$  são constantes independentes de  $\varepsilon$ , então segue a partir de (2.4) que para todo  $N \in \mathbb{N}$  existe um  $M$  tal que  $\|u^{(m)} - u^\varepsilon\|_{B_{1\varepsilon}} = \mathcal{O}(\varepsilon^N)$ , com  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , para todo  $m \geq M$ , e conseqüentemente, a solução assintótica formal  $u^{(\infty)}$  é uma expansão assintótica da solução exata  $u^\varepsilon$  do problema:  $u^\varepsilon \sim u^{(\infty)}$  (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

## 3 HOMOGENEIZAÇÃO DE MEIOS UNIDIMENSIONAIS MICROPÉRIÓDICOS PARA A EQUAÇÃO ELÍPTICA

### 3.1 Caso Contínuo

#### 3.1.1 Formulação do Problema

Seja  $\varepsilon$  tal que  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Considere o problema da distribuição de um campo térmico estacionário sobre um meio heterogêneo  $\varepsilon$ -periódico unidimensional. A condutividade térmica  $a^\varepsilon : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  do meio é uma função positiva, limitada,  $\varepsilon$ -periódica e continuamente diferenciável. Assim, sem perda de generalidade temos que a temperatura  $u^\varepsilon$  satisfaz o problema de valor de contorno

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left( a^\varepsilon(x) \frac{du^\varepsilon}{dx} \right) = f(x), & x \in (0, 1) \\ u^\varepsilon(0) = u^\varepsilon(1) = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

em que  $a^\varepsilon(x) = a(x/\varepsilon)$  e  $f$  é a fonte de calor.

#### 3.1.2 Método de Homogeneização Assintótica

Consideramos a seguinte expansão assintótica da SAF do problema:

$$u^\varepsilon(x) \approx u^{(2)}(x, \varepsilon) = u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y) + \varepsilon^2 u_2(x, y), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad (3.2)$$

em que  $u_i$  são funções 1-periódicas em  $y$ . Ao substituir a assintótica (3.2) na equação (3.1),

$$\frac{d}{dx} \left[ a(y) \frac{d}{dx} (u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y) + \varepsilon^2 u_2(x, y)) \right] - f(x) = 0. \quad (3.3)$$

Na substituição de (3.2) no problema (3.1), utilizamos a regra da cadeia:

$$\frac{du^\varepsilon}{dx} \approx \frac{du^{(2)}}{dx} = \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial y}, \quad (3.4)$$

resulta em

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left[ a(y) \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} \right) (u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y) + \varepsilon^2 u_2(x, y)) \right] - f(x) = 0. \quad (3.5)$$

Desenvolvendo obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \varepsilon^{-2} \frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \\ + & \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \quad (3.6) \\ + & \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) - f(x) = 0. \end{aligned}$$

Agrupando a equação (3.6) por potências de  $\varepsilon$  temos

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-2} & \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \right] + \varepsilon^{-1} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \right] \\ + \varepsilon^0 & \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) - f(x) \right] \\ = & \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (3.7) \end{aligned}$$

Notamos que para  $u^{(2)}$  ser uma solução assintótica formal de (3.1) é preciso obter  $u_0$ ,  $u_1$  e  $u_2$  que

$$\varepsilon^{-2} : \frac{\partial}{\partial y} \left[ a(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right] = 0; \quad (3.8)$$

$$\varepsilon^{-1} : \frac{\partial}{\partial y} \left[ a(y) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right] = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ a(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ a(y) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right]; \quad (3.9)$$

$$\varepsilon^0 : \frac{\partial}{\partial y} \left[ a(y) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right] = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ a(y) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ a(y) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right] + f(x). \quad (3.10)$$

Consideramos  $x$  e  $y$  nas equações (3.8)-(3.10) são independentes. Aplicando nas condições de contorno obtemos

$$u^{(2)}(0, \varepsilon) = u_0(0, 0) + \varepsilon u_1(0, 0) + \varepsilon^2 u_2(0, 0) = 0, \quad (3.11)$$

$$u^{(2)}\left(1, \varepsilon\right) = u_0\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u_1\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 u_2\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\right) = 0. \quad (3.12)$$

As condições de contorno de (3.8)-(3.10), respectivamente são:

$$u_0(0, 0) = u_0\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\right) = 0, \quad (3.13)$$

$$u_1(0, 0) = u_1\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\right) = 0, \quad (3.14)$$

$$u_2(0, 0) = u_2\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\right) = 0. \quad (3.15)$$

Notamos que devido à 1-periodicidade de  $u_i(x, y)$ ,  $i = 0, 1, 2$ , com relação à variável  $y$ , é correto dizer que  $u_i\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\right) = u_i(1, 0)$ .

Teremos então os seguintes problemas recorrentes estabelecidos a partir das equações (3.8)-(3.10) juntamente com as condições (3.13)-(3.15):

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \left[ a(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right] = 0, \\ u_0(0, 0) = u_0(1, 0) = 0, \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \left[ a(y) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right] = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ a(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ a(y) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right], \\ u_1(0, 0) = u_1(1, 0) = 0, \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \left[ a(y) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right] = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ a(y) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ a(y) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right] + f(x), \\ u_2(0, 0) = u_2(1, 0) = 0. \end{cases} \quad (3.18)$$

Temos que para cada  $x$  fixo, os problemas (3.16)-(3.18) que envolvem derivadas parciais tornamos em derivadas ordinárias, são da forma

$$\begin{cases} \frac{d}{dy} \left[ a(y) \frac{dN}{dy} \right] = F, \quad y \in (0, 1), \\ N(0) = N(1) = 0, \end{cases} \quad (3.19)$$

Então utilizaremos o Lema 1, a seguir, para resolvermos os problemas (3.16)-(3.18) que são da forma (3.19).

**Lema 1.** (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989) *Sejam  $F(y)$  diferenciável e 1-periódica, e  $a(y)$  diferenciável 1-periódica, positiva e limitada. A condição necessária e suficiente para a existência de uma solução 1-periódica de (3.19) é que  $\langle F(y) \rangle = 0$ , em que  $\langle \cdot \rangle = \int_0^1 (\cdot) dy$  operador do valor médio. Tal solução 1-periódica é única salvo uma constante aditiva, ou seja,  $N(y) = \tilde{N}(y) + C$ , onde  $\tilde{N}$  é uma solução de (3.19), 1-periódica tal que  $\tilde{N}(0) = 0$ , e  $C$  é uma constante arbitrária.*

### Demonstração:

*Necessidade:* Seja  $N(y)$  solução 1-periódica de (3.19) escrita como

$$\frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{dN}{dy} \right) = F(y). \quad (3.20)$$

Aplicando o operador de valor médio em ambos os lados de (3.20) temos

$$\left\langle \frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{dN}{dy} \right) \right\rangle = \langle F(y) \rangle. \quad (3.21)$$

Considerando a 1-periodicidade de  $a(y)$  e  $N(y)$  junto com o lado esquerdo de (3.21), seguimos que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{dN}{dy} \right) \right\rangle &= \left[ a(y) \frac{dN}{dy} \right]_{y=0}^{y=1} = a(1) \frac{dN}{dy} \Big|_{y=1} - a(0) \frac{dN}{dy} \Big|_{y=0}, \\ &= a(0) \left( \frac{dN}{dy} \Big|_{y=1} - \frac{dN}{dy} \Big|_{y=0} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Portanto de (3.21) e (3.22) tem-se  $\langle F(y) \rangle = 0$ .

*Suficiência:* Seja  $F(y)$  tal que  $\langle F(y) \rangle = 0$ . Assim, de integrar (3.20) temos

$$\int_0^y F(s) ds = \int_0^y \frac{d}{ds} \left( a(s) \frac{dN}{ds} \right) ds = a(y) \frac{dN}{dy} + C_1, \quad (3.23)$$

em que

$$C_1 = a(0) \frac{dN}{dy} \Big|_{y=0}, \quad (3.24)$$

é uma constante aditiva. Assim, levando em conta (3.19), de (3.23) seguimos que

$$\frac{dN}{dy} = \frac{1}{a(y)} \left( \int_0^y F(s) ds + C_1 \right). \quad (3.25)$$

Integrando (3.25) temos que

$$N(y) = \int_0^y \frac{1}{a(t)} \left( \int_0^t F(s) ds + C_1 \right) dt + C_2. \quad (3.26)$$

Para  $N(y)$  ser 1-periódica, impomos que  $N(y+1) - N(y) = 0$ . Logo,

$$N(y+1) = \int_0^{y+1} \frac{1}{a(t)} \left( \int_0^t F(s) ds + C_1 \right) dt + C_2. \quad (3.27)$$

Assim, da subtração das expressões (3.26) e (3.27), seguimos que

$$0 = N(y+1) - N(y) = \int_y^{y+1} \frac{1}{a(t)} \left( \int_0^t F(s) ds + C_1 \right) dt. \quad (3.28)$$

Reparamos que  $\int_0^t F(s)ds$  é 1-periódica, assim como  $\frac{1}{a(t)}$  e  $C_1$ . Logo,

$$\int_y^{y+1} \frac{1}{a(t)} \left( \int_0^t F(s)ds + C_1 \right) dt = \left\langle \frac{1}{a(t)} \left( \int_0^t F(s)ds \right) \right\rangle + C_1 \left\langle \frac{1}{a(t)} \right\rangle = 0, \quad (3.29)$$

de onde,

$$C_1 = -\hat{a} \left\langle \frac{1}{a(t)} \left( \int_0^t F(s)ds \right) \right\rangle, \quad (3.30)$$

em que  $\hat{a} = \langle a^{-1}(t) \rangle^{-1}$ . Assim, de (3.27) e (3.30) temos que  $N(y) = \tilde{N}(y) + C$ , em que  $C = C_2$  e

$$\tilde{N}(y) = \int_0^y \frac{1}{a(t)} \left[ \int_0^t F(s)ds - \hat{a} \left\langle \frac{1}{a(t)} \left( \int_0^t F(s)ds \right) \right\rangle \right] dt. \square$$

De aplicar o Lema 1 em (3.8) para  $\varepsilon^{-2}$  seguimos que existe  $u_0$  solução 1-periódica. Integrando em ambos os lados com relação a  $y$  teremos

$$a(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} = k(x), \quad (3.31)$$

em que  $k$  depende somente de  $x$ . Levando em conta que  $a(y) > 0$ , temos

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{k(x)}{a(y)}. \quad (3.32)$$

Aplicando o operador do valor médio  $\langle \cdot \rangle$  em ambos os lados da igualdade, temos

$$\left\langle \frac{\partial u_0}{\partial y} \right\rangle = \left\langle \frac{k(x)}{a(y)} \right\rangle, \quad (3.33)$$

ou seja, considerando à 1-periodicidade de  $u_0$  e  $y$

$$0 = u_0(x, 1) - u_0(x, 0) = \int_0^1 \frac{k(x)}{a(y)} dy. \quad (3.34)$$

Assim, vemos que  $\int_0^1 \frac{dy}{a(y)} > 0$ ,

$$k(x) \int_0^1 \frac{dy}{a(y)} = 0 \Rightarrow k(x) = 0, \quad (3.35)$$

a partir disso, substituímos (3.35) em (3.32):

$$a(y) \frac{du_0}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{du_0}{dy} = 0. \quad (3.36)$$

Portanto,  $u_0$  não depende de  $y$ , ou seja,

$$u_0(x, y) = u_0(x). \quad (3.37)$$

Assim, utilizando o resultado acima, a equação para  $\varepsilon^{-1}$  modificamos em

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = -\frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{du_0}{dx} \right). \quad (3.38)$$

De aplicar o Lema 1 em (3.38) temos que  $N = u_1$  e  $F = -\frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{du_0}{dx} \right)$ . Assim, para garantir que  $u_1$  seja 1-periódica, temos que a equação  $\left\langle \frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{du_0}{dx} \right) \right\rangle = 0$ , deve ser satisfeita. Levando em conta a 1-periodicidade de  $a(y)$  temos que

$$\left\langle \frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{du_0}{dx} \right) \right\rangle = \frac{du_0}{dx} \int_0^1 \frac{da(y)}{dy} dy = \frac{du_0}{dx} (a(1) - a(0)) = 0. \quad (3.39)$$

Portanto, existe solução 1-periódica de  $u_1$  em relação a variável  $y$ . Por separação de variáveis (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989), supomos que  $u_1 = N_1(y) \frac{du_0}{dx}$ . Assim, de substituir  $u_1$  na equação (3.38) obtemos que

$$\frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{dN_1}{dy} \right) \frac{du_0}{dx} = -\frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{du_0}{dx} \right), \quad (3.40)$$

e colocando a derivada de  $u_0$  em evidência temos

$$\frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{dN_1}{dy} + a(y) \right) \frac{du_0}{dx} = 0. \quad (3.41)$$

Sabendo que a derivada de  $u_0$  é diferente de zero, a equação (3.41) é cumprida se

$$\frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{dN_1}{dy} + a(y) \right) = 0, \quad (3.42)$$

correspondendo a equação do problema local. Logo, inserindo a condição de unicidade  $N_1(0) = 0$ , temos o chamado problema local

$$\begin{cases} \frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{dN_1}{dy} + a(y) \right) = 0, & y \in (0, 1) \setminus \Gamma, \\ N_1(0) = 0. \end{cases} \quad (3.43)$$

Aplicando o Lema 1 podemos verificar a existência de solução 1-periódica com  $N = N_1$  e  $F = \frac{da(y)}{dy}$ , levando em conta a 1-periodicidade de  $a(y)$ , aplicando o operador do

valor médio, temos

$$\left\langle \frac{da(y)}{dy} \right\rangle = \int_0^1 \frac{da(y)}{dy} dy = a(1) - a(0) = 0. \quad (3.44)$$

Dessa maneira, tendo  $y = \frac{x}{\varepsilon}$ , então

$$u_1(x, y) = N_1(y) \frac{du_0}{dx}. \quad (3.45)$$

Resolvendo o problema local (3.43), sabendo que  $a(y) > 0$ , integramos com relação a  $y$  a parte esquerda da equação (3.42)

$$\int_0^1 \frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{dN_1}{dy} + a(y) \right) dy = \int_0^1 0 dy, \quad (3.46)$$

obtemos então

$$a(y) \frac{dN_1}{dy} + a(y) = K_1, \quad (3.47)$$

sabendo que  $a(y) > 0$ , implica em

$$\frac{dN_1}{dy} = \frac{K_1}{a(y)} - 1, \quad (3.48)$$

onde  $K_1$  é uma constante. Aplicando o operador do valor médio na equação (3.48), temos que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dN_1}{dy} \right\rangle &= \left\langle \frac{K_1}{a(y)} - 1 \right\rangle, \\ \int_0^1 \frac{dN_1}{dy} dy &= K_1 \left\langle \frac{1}{a(y)} \right\rangle - 1, \\ N_1(1) - N_1(0) &= K_1 \left\langle \frac{1}{a(y)} \right\rangle - 1, \end{aligned} \quad (3.49)$$

como  $N_1(y)$  é 1-periódica em  $y$

$$0 = K_1 \left\langle \frac{1}{a(y)} \right\rangle - 1. \quad (3.50)$$

Portanto, obtemos  $K_1$

$$K_1 = \langle a^{-1}(y) \rangle^{-1} \equiv \hat{a}, \quad (3.51)$$

em que  $\hat{a}$  é o chamado coeficiente efetivo, ou seja, é o coeficiente que descreve o comportamento homogêneo equivalente ao coeficiente do problema original, sobre o meio heterogêneo. Substituindo a equação (3.51) em (3.48) e integrando ambos os



lados, temos que

$$\begin{aligned} \int_0^y \frac{dN_1(s)}{ds} ds &= \int_0^y \left( \frac{\hat{a}}{a(s)} - 1 \right) ds, \\ N_1(y) - N_1(0) &= \int_0^y \left( \frac{\hat{a}}{a(s)} - 1 \right) ds, \end{aligned} \quad (3.52)$$

sabendo a condição de unicidade  $N_1(0) = 0$ , chegamos na solução do problema local  $N_1(y)$

$$N_1(y) = \int_0^y \left( \frac{\hat{a}}{a(s)} - 1 \right) ds, \quad (3.53)$$

e, assim substituindo  $N_1(y)$  em  $u_1$

$$u_1(x, y) = \frac{du_0}{dx} \int_0^y \left( \frac{\hat{a}}{a(s)} - 1 \right) ds. \quad (3.54)$$

Substituindo  $u_0$  e  $u_1$  no problema para encontrar  $u_2$  (3.18) ficamos

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = -a(y) \frac{d^2 u_0}{dx^2} - a(y) \frac{dN_1(y)}{dy} \frac{d^2 u_0}{dx^2} - \frac{d}{dy} (a(y) N_1(y)) \frac{d^2 u_0}{dx^2} + f(x), \quad (3.55)$$

notamos que  $\hat{a} = a(y) \frac{dN_1}{dy} + a(y)$  então

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = -\hat{a} \frac{d^2 u_0}{dx^2} - \frac{d}{dy} (a(y) N_1(y)) \frac{d^2 u_0}{dx^2} + f(x). \quad (3.56)$$

Aplicando o Lema 1 em (3.56), utilizando  $N = u_2$  e  $F = -\hat{a} \frac{d^2 u_0}{dx^2} - \frac{d}{dy} (a(y) N_1(y)) \frac{d^2 u_0}{dx^2} + f(x)$ , segue que a condição necessária e suficiente para que exista  $u_2$  solução 1-periódica é que

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle -\hat{a} \frac{d^2 u_0}{dx^2} - \frac{d}{dy} (a(y) N_1(y)) \frac{d^2 u_0}{dx^2} + f(x) \right\rangle, \\ &= - \left\langle \hat{a} \frac{d^2 u_0}{dx^2} \right\rangle - \left\langle \frac{d}{dy} (a(y) N_1(y)) \frac{d^2 u_0}{dx^2} \right\rangle + \langle f(x) \rangle, \\ &= -\hat{a} \frac{d^2 u_0}{dx^2} + f(x), \end{aligned} \quad (3.57)$$

pois  $a(y)$  e  $N_1(y)$  são 1-periódicos com respeito a  $y$  e então obtemos a equação do problema homogeneizado

$$\hat{a} \frac{d^2 u_0}{dx^2} = f(x). \quad (3.58)$$

Complementando com as condições (3.13) atualizadas por (3.37), produz o problema homogeneizado

$$\begin{cases} \hat{a} \frac{d^2 u_0}{dx^2} = f(x), & x \in (0, 1), \\ u_0(0) = u_0(1) = 0. \end{cases} \quad (3.59)$$

Em muitas situações é suficiente considerar a expansão assintótica de primeira ordem

$$u^\varepsilon(x) \approx u^{(1)}(x, \varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = u_0(x) + \varepsilon N_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{du_0}{dx}, \quad (3.60)$$

onde  $u_0(x)$  e  $N_1(y)$  são as soluções dos problemas homogeneizado (3.59) e local (3.43), respectivamente.

Considerando a equação (3.56) e (3.58) para encontrar  $u_2$ , obtemos que

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = -\frac{d}{dy} (a(y) N_1(y)) \frac{d^2 u_0}{dx^2}. \quad (3.61)$$

Supomos que

$$u_2(x, y) = N_2(y) \frac{d^2 u_0}{dx^2}. \quad (3.62)$$

E então (3.61) passa a ser

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{dN_2(y)}{dy} \right) \frac{d^2 u_0}{dx^2} &= -\frac{d}{dy} (a(y) N_1(y)) \frac{d^2 u_0}{dx^2}, \\ \frac{d}{dy} \left[ a(y) \left( \frac{dN_2(y)}{dy} + N_1(y) \right) \right] \frac{d^2 u_0}{dx^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Considerando que  $\frac{d^2 u_0}{dx^2} \neq 0$ , temos então o segundo problema local

$$\begin{cases} \frac{d}{dy} \left[ a(y) \left( \frac{dN_2(y)}{dy} + N_1(y) \right) \right] = 0, \\ N_2(0) = 0, \end{cases} \quad (3.64)$$

aplicando o Lema 1 para verificarmos a existência de solução 1-periódica, onde  $N = N_2$  e  $F = -\frac{d}{dy} (a(y) N_1(y))$ . Levando em consideração, os passos de (3.42)-(3.53), pelo cálculo da média da condição do Lema 1 obtemos a constante

$$K_2 = \langle N_1(y) \rangle \hat{a}. \quad (3.65)$$

Logo,  $N_2(y)$  será

$$N_2(y) = \int_0^y \left( \langle N_1(y) \rangle \frac{\hat{a}}{a(s)} - N_1(s) \right) ds. \quad (3.66)$$

Assim,  $u_2(x, y)$  será

$$u_2(x, y) = \frac{d^2 u_0}{dx^2} \int_0^y \left( \langle N_1(y) \rangle \frac{\hat{a}}{a(s)} - N_1(s) \right) ds. \quad (3.67)$$

Portanto, a partir das equações para  $u_1(x, y)$  e  $u_2(x, y)$  a SAF, pode ser escrita como

$$u^\varepsilon(x) \approx u^{(2)}(x, \varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon N_1 \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{du_0}{dx} + \varepsilon^2 N_2 \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{d^2 u_0}{dx^2}. \quad (3.68)$$

Construímos então a expansão assintótica  $u^{(2)}$ , sendo esta uma boa aproximação da solução exata  $u^\varepsilon$  do problema original. Provaremos, a seguir, quão boa é a proximidade entre a solução do problema original  $u^\varepsilon$  e a solução do problema homogeneizado  $u_0$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

### 3.1.3 Proximidade entre as soluções

Podemos estabelecer uma relação de proximidade entre a solução do problema original  $u^\varepsilon$  e a solução do problema homogeneizado  $u_0$  para avaliar quão boa aproximação é  $u_0$  de  $u^\varepsilon$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Especificamente, vamos provar que

$$\|u^\varepsilon - u_0\|_{C([0,1])} = \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (3.69)$$

#### Demonstração:

Primeiro, utilizando a expansão assintótica (3.60), vamos provar que

$$\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{C([0,1])} = \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (3.70)$$

Substituindo a assintótica (3.60) no problema original (3.1) temos, para cada  $\varepsilon > 0$ ,

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left( a^\varepsilon(x) \frac{du^{(1)}}{dx} \right) = f(x) - F(x, \varepsilon), & x \in (0, 1) \\ u^{(1)}(0, \varepsilon) = u^{(1)}(1, \varepsilon) = 0 \end{cases}, \quad (3.71)$$

em que  $F$  é erro de tomar  $u^{(1)}$  como solução de (3.1).

Subtraindo (3.71) de (3.1) temos, para cada  $\varepsilon > 0$ ,

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left( a^\varepsilon(x) \frac{d}{dx} (u^\varepsilon - u^{(1)}) \right) = F(x, \varepsilon), & x \in (0, 1) \\ u^\varepsilon(0) - u^{(1)}(0, \varepsilon) = 0 \\ u^\varepsilon(1) - u^{(1)}(1, \varepsilon) = 0 \end{cases} \quad (3.72)$$

Teremos que aplicar o Princípio do Máximo Generalizado para às equações elípticas contínuas (Teorema 1) em (3.72),

**Teorema 1.** (LARSSON; THOMÉE, 2008) *Seja  $u \in C^2(0, 1)$  a solução do problema de*

valor de contorno dado por

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left( a \frac{du}{dx} \right) + b \frac{du}{dx} + cu = f, x \in (0, 1), \\ u(0) = u_0, u(1) = u_1, \end{cases} \quad (3.73)$$

em que os coeficientes  $a = a(x)$ ,  $b = b(x)$  e  $c = c(x)$  são continuamente diferenciáveis, tais que  $a(x) \geq a_0 > 0$ ,  $c(x) \geq 0$  e a função  $f = f(x)$  e os valores  $u_0, u_1$  são dados. Dessa forma, a seguinte estimativa é válida

$$\|u\|_{C(0,1)} \leq \max\{|u(0)|, |u(1)|\} + c \left\| -\frac{d}{dx} \left( a \frac{du}{dx} \right) + b \frac{du}{dx} + cu \right\|_{C(0,1)}, \quad (3.74)$$

onde  $c$  depende apenas dos coeficientes de (3.73)<sub>1</sub>, mas não de  $u$ .

onde aplicando o Teorema 1 possuiremos a estimativa

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{C([0,1])} &\leq c \left\| \frac{d}{dx} \left( a^\varepsilon(x) \frac{d}{dx} (u^\varepsilon - u^{(1)}) \right) \right\|_{C([0,1])}, \\ \|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{C([0,1])} &\leq c \|F(x, \varepsilon)\|_{C([0,1])}, \end{aligned} \quad (3.75)$$

onde  $c > 0$  é uma constante. Assim, para estimar  $\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{C([0,1])}$  é necessário obter uma expressão para  $F(x, \varepsilon)$  a partir da equação do problema (3.71), ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( a^\varepsilon(x) \frac{du^{(1)}}{dx} \right) - f(x) &= \frac{d}{dx} \left( a^\varepsilon(x) \frac{d}{dx} (u_0(x) + \varepsilon u_1(x, y)) \right) - f(x), \\ &= \frac{d}{dx} \left( a^\varepsilon(x) \frac{d}{dx} \left( u_0(x) + \varepsilon N_1(y) \frac{du_0}{dx} \right) \right) - f(x), \end{aligned} \quad (3.76)$$

realizando a regra da cadeia (3.4) em (3.76) e sabendo que  $y = \frac{x}{\varepsilon}$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( a(y) \frac{du^{(1)}}{dx} \right) - f(x) &= \left( a(y) + a(y) \frac{dN_1(y)}{dy} \right) \frac{d^2 u_0}{dx^2} + \varepsilon a(y) N_1(y) \frac{d^3 u_0}{dx^3} - f(x) \\ &+ \varepsilon^{-1} \frac{d}{dy} \left( a(y) + a(y) \frac{dN_1(y)}{dy} \right) \frac{du_0}{dx} + \frac{d}{dy} (a(y) N_1(y)) \frac{d^2 u_0}{dx^2}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Considerando o problema (3.71) a equação (3.10) passa a ser

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + f(x), \\
&= -\frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \frac{du_0}{dx} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ a(y) \frac{\partial}{\partial y} \left( N_1(y) \frac{du_0}{dx} \right) \right] + f(x) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left[ a(y) \frac{\partial}{\partial x} \left( N_1(y) \frac{du_0}{dx} \right) \right], \\
&= -\frac{d}{dy} (a(y) N_1(y)) \frac{d^2 u_0}{dx^2} - a(y) \frac{dN_1(y)}{dy} \frac{d^2 u_0}{dx^2} - a(y) \frac{d^2 u_0}{dx^2} + f(x), \\
&= -\frac{d}{dy} (a(y) N_1(y)) \frac{d^2 u_0}{dx^2} - \widehat{a} \frac{d^2 u_0}{dx^2} + f(x), \\
&= -\frac{d}{dy} (a(y) N_1(y)) \frac{d^2 u_0}{dx^2}.
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Sendo assim, considerando (3.58) e (3.78) em (3.77), temos que

$$\frac{d}{dx} \left( a(y) \frac{du^{(1)}}{dx} \right) - f(x) = -\varepsilon a(y) N_1(y) \frac{d^3 u_0}{dx^3}, \tag{3.79}$$

assim com a equação (3.71), obtemos

$$F(x, \varepsilon) = -\varepsilon a(y) N_1(y) \frac{d^3 u_0}{dx^3}. \tag{3.80}$$

Logo,

$$\|F(x, \varepsilon)\|_{C([0,1])} = \max_{x \in [0,1]} |F(x, \varepsilon)| = \max_{x \in [0,1]} \left| \varepsilon a(y) N_1(y) \frac{d^3 u_0}{dx^3} \right|. \tag{3.81}$$

Assumindo que  $u_0, N_1, a \in C^3([0, 1])$ , temos que utilizar o Teorema de Weierstrass (Teorema 2) .

**Teorema 2 (Weierstrass).** (KUDRIAVTSEV, 1983) *Seja  $f : K \rightarrow R$  contínua no compacto  $K$  de  $R^n$ . Então,  $f$  assume valor máximo absoluto e valor mínimo absoluto em  $K$ .*

Então existe constantes  $A_1, A_2, A_3 > 0$  tais que para todo  $x \in [0, \varepsilon^{-1}]$ , temos

$$\left| \frac{d^3 u_0}{dx^3} \right| \leq A_1, \quad \left| N_1 \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right| \leq A_2, \quad \left| a \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right| \leq A_3. \tag{3.82}$$

E então, de (3.81) e (3.82), seguimos que

$$\|F(x, \varepsilon)\|_{C([0,1])} \leq \varepsilon A_1 A_2 A_3. \tag{3.83}$$

Consequentemente, sendo  $B$  uma constante

$$\|F(x, \varepsilon)\|_{C([0,1])} \leq \varepsilon B. \quad (3.84)$$

Portanto, de (3.75) e (3.84), seguimos que

$$\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{C([0,1])} \leq c\|F(x, \varepsilon)\|_{C([0,1])} \leq \varepsilon B, \quad (3.85)$$

ou seja,

$$\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{C([0,1])} = \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (3.86)$$

Logo, temos que quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  a solução  $u^\varepsilon(x)$  do problema original tende para a SAF  $u^{(1)}(x, \varepsilon)$ . De forma análoga, quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  a SAF  $u^{(1)}(x, \varepsilon)$  tende para a solução  $u_0(x)$  do problema homogeneizado, ou seja,

$$\|u^{(1)} - u_0\|_{C([0,1])} = \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (3.87)$$

Então, de (3.86) e (3.87), e usando desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon - u_0\|_{C([0,1])} &= \|u^\varepsilon - u^{(1)} + u^{(1)} - u_0\|_{C([0,1])}, \\ &\leq \|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{C([0,1])} + \|u^{(1)} - u_0\|_{C([0,1])}, \\ &= \mathcal{O}(\varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ &= \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (3.88)$$

de onde concluímos que

$$\|u^\varepsilon - u_0\|_{C([0,1])} = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (3.89)$$

ou seja,  $u_0$  é uma boa aproximação para  $u^\varepsilon$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .  $\square$

## 3.2 Caso Contínuo por Partes com Contato Perfeito

### 3.2.1 Formulação do Problema

Seja  $\varepsilon$  tal que  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Consideramos o problema da distribuição de um campo térmico estacionário sobre um meio heterogêneo  $\varepsilon$ -periódico unidimensional. A condutividade térmica  $a^\varepsilon : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  do meio é uma função positiva, limitada,  $\varepsilon$ -periódica e continuamente diferenciável por partes. Assim, sem perda de generalidade temos

que a temperatura  $u^\varepsilon$  satisfaz o problema de valor de contorno

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left( a^\varepsilon(x) \frac{du^\varepsilon}{dx} \right) = f(x), & x \in (0, 1), \\ \left[ \left[ a^\varepsilon(x) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right] \right] = 0, \quad \llbracket u^\varepsilon \rrbracket = 0, & x \in \Gamma^\varepsilon, \\ u^\varepsilon(0) = u^\varepsilon(1) = 0, \end{cases} \quad (3.90)$$

onde  $a^\varepsilon(x) = a(x/\varepsilon)$  e  $f$  é a fonte de calor. Ainda, consideramos aqui que há contato térmico perfeito, ou seja, que o fluxo de calor e a temperatura são contínuos, onde  $\llbracket \cdot \rrbracket$  representa o salto ao redor de cada descontinuidade  $x \in \Gamma^\varepsilon$  de  $a^\varepsilon(x)$ .

### 3.2.2 Método de Homogeneização Assintótica

A aplicação do Método de Homogeneização Assintótica ocorre de maneira semelhante que para a equação elíptica no caso contínuo dado pela equação (3.1). Iremos propor uma expansão assintótica da SAF do problema, equivalente a (3.2), ou seja,

$$u^\varepsilon(x) \approx u^{(2)}(x, \varepsilon) = u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y) + \varepsilon^2 u_2(x, y), \quad y = \frac{x}{\varepsilon} \quad (3.91)$$

em que as derivadas de  $u_1$  e  $u_2$  possuem o salto ao redor de cada descontinuidade. Ao substituir a assintótica (3.91) na equação (3.90), utilizamos a regra da cadeia (3.4), comprovamos que  $u_0(x, y) = u(x)$ . Desenvolvendo da mesma maneira que os passos (3.6)-(3.15), obtemos as equações para  $\varepsilon^{-1}$  e  $\varepsilon^0$  que são idênticas as equações (3.9) e (3.10) respectivamente, mas também as condições de contorno dadas por (3.14) e (3.15). Assim, somente falta aplicarmos as condições de contato perfeito dado pela equação (3.90)<sub>2</sub>, que diferem do caso contínuo, assim

$$\llbracket u^{(2)} \rrbracket = \varepsilon^0 \llbracket u_1 \rrbracket + \varepsilon \llbracket u_2 \rrbracket + O(\varepsilon^2), \quad (3.92)$$

e

$$\left[ \left[ a(y) \frac{du^{(2)}}{dx} \right] \right] = \varepsilon^0 \left[ \left[ a(y) \left( \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \right] + \varepsilon \left[ \left[ a(y) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right] \right] + O(\varepsilon^2), \quad (3.93)$$

que, para ser satisfeita, os coeficientes de  $\varepsilon^0$  e  $\varepsilon$  devem ser nulos, de onde:

$$\varepsilon^0 : \llbracket u_1 \rrbracket = 0, \quad \left[ \left[ a(y) \left( \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \right] = 0, \quad (3.94)$$

$$\varepsilon : \llbracket u_2 \rrbracket = 0, \quad \left[ \left[ a(y) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right] \right] = 0. \quad (3.95)$$

Estabelecidos por (3.9), (3.14) e (3.94) e, (3.10), (3.15) e (3.95), teremos então os

seguintes problemas recorrentes,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \frac{du_0}{dx} \right), \quad y \in (0, 1) \setminus \Gamma, \\ \left[ \left[ a(y) \left( \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \right] = 0, \quad y \in \Gamma, \\ \llbracket u_1 \rrbracket = 0, \quad y \in \Gamma, \\ u_1(0, 0) = u_1(1, 0) = 0, \end{array} \right. \quad (3.96)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ a(y) \left( \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + f(x), \quad y \in (0, 1) \setminus \Gamma, \\ \left[ \left[ a(y) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right] \right] = 0, \quad y \in \Gamma, \\ \llbracket u_2 \rrbracket = 0, \quad y \in \Gamma, \\ u_2(0, 0) = u_2(1, 0) = 0. \end{array} \right. \quad (3.97)$$

Temos que para cada  $x$  fixo, como dito antes tornamos as derivadas parciais em derivadas ordinárias, os problemas (3.96) e (3.97) são da forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dy} \left[ a(y) \frac{dN}{dy} \right] = F_0(y) + \frac{dF_1(y)}{dy}, \quad y \in (0, 1) \setminus \Gamma, \\ \left[ \left[ a(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right] \right] = 0 \quad y \in \Gamma, \\ \llbracket N \rrbracket = 0, \quad y \in \Gamma, \\ N(0) = N(1) = 0. \end{array} \right. \quad (3.98)$$

visto que  $N_1(y)$  é a solução 1-periódica procurada.

O Lema 2 a seguir fornece uma condição necessária e suficiente para a existência e unicidade de soluções 1-periódicas da sequência de problemas que resulta da aplicação do MHA. Ainda, note que  $\Gamma^\varepsilon \equiv \emptyset$  se  $a^\varepsilon$  for contínua, então cairemos no Lema 1. Caso contrário, consideramo-nos aqui que há contato térmico perfeito, ou seja, que o fluxo de calor e a temperatura são contínuos.

**Lema 2.** (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989) *Sejam  $F_0(y)$  e  $F_1(y)$  diferenciáveis e 1-periódicas, e  $a(y)$  diferenciável por partes, 1-periódica, positiva e limitada. A condição necessária e suficiente para a existência de uma solução 1-periódica da equação (3.98) é que  $\langle F_0(y) \rangle = 0$ , em que  $\Gamma$  é conjunto de pontos de discontinuidades de  $a(y)$  e  $\llbracket \cdot \rrbracket = (\cdot)^+ - (\cdot)^-$  e  $\langle \cdot \rangle = \int_0^1 (\cdot) dy$  são os operadores de salto nos pontos de descontinuidade de  $a(y)$  e de valor médio, respectivamente. Tal solução 1-periódica é única salvo uma constante aditiva, ou seja,  $N(y) = \tilde{N}(y) + C$ , onde  $\tilde{N}$  é uma solução 1-periódica de (3.98) tal que  $\tilde{N}(0) = 0$ , e  $C$  é uma constante arbitrária.*



**Demonstração: Necessidade:** Seja  $N(y)$  solução 1-periódica de (3.98) escrita como

$$\frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right) = F_0(y). \quad (3.99)$$

Aplicando o operador de valor médio em ambos os lados de (3.99), levando em conta que  $F_1(y)$  é 1-periódica, temos que

$$\left\langle \frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right) \right\rangle = \langle F_0(y) \rangle. \quad (3.100)$$

Considerando a 1-periodicidade de  $a(y)$ ,  $N(y)$  e  $F_1(y)$  junto com a equação (3.98)<sub>2</sub> no lado esquerdo de (3.100), sigamos que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right) \right\rangle &= \left[ a(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right]_{y=0}^{y=1} + \sum_{y \in \Gamma} \left[ a(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right] \\ &= a(1) \frac{dN}{dy} \Big|_{y=1} - a(0) \frac{dN}{dy} \Big|_{y=0} = a(0) \left( \frac{dN}{dy} \Big|_{y=1} - \frac{dN}{dy} \Big|_{y=0} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Portanto de (3.100) e (3.101) temos  $\langle F_0(y) \rangle = 0$ .

*Suficiência:* Seja  $F_0(y)$  tal que  $\langle F_0(y) \rangle = 0$ . Sejam  $y \notin \Gamma$  e  $\Gamma_y$  o conjunto de pontos de descontinuidades de  $a(y)$  menores que  $y$ . Assim, de integrar (3.99) temos

$$\begin{aligned} \int_0^y F_0(s) ds &= \int_0^y \frac{d}{ds} \left( a(s) \frac{dN}{ds} - F_1(s) \right) ds \\ &= a(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) + \sum_{y \in \Gamma_y} \left[ a(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right] + C_1, \end{aligned} \quad (3.102)$$

em que

$$C_1 = F_1(0) - a(0) \frac{dN}{dy} \Big|_{y=0} \quad (3.103)$$

é uma constante aditiva. Assim, levando em conta (3.98)<sub>2</sub>, de (3.102) sigamos que

$$\frac{dN}{dy} = \frac{1}{a(y)} \left( \int_0^y F_0(s) ds + F_1(y) + C_1 \right). \quad (3.104)$$

Integrando (3.104) temos que

$$N(y) = \int_0^y \frac{1}{a(t)} \left( \int_0^t F_0(s) ds + F_1(t) + C_1 \right) dt + C_2. \quad (3.105)$$

Para  $N(y)$  ser 1-periódica, impomos que  $N(y+1) - N(y) = 0$ . Logo,

$$N(y+1) = \int_0^{y+1} \frac{1}{a(t)} \left( \int_0^t F_0(s) ds + F_1(t) + C_1 \right) dt + C_2. \quad (3.106)$$

Assim, da subtração das expressões (3.105) e (3.106), sigamos que

$$0 = N(y+1) - N(y) = \int_y^{y+1} \frac{1}{a(t)} \left( \int_0^t F_0(s) ds + F_1(t) + C_1 \right) dt. \quad (3.107)$$

Reparemos que  $\int_0^t F_0(s) ds$  é 1-periódica, assim como  $\frac{1}{a(t)}$ ,  $F_1(t)$  e  $C_1$ . Logo,

$$\begin{aligned} \int_y^{y+1} \frac{1}{a(t)} \left( \int_0^t F_0(s) ds + F_1(t) + C_1 \right) dt \\ = \left\langle \frac{1}{a(t)} \left( \int_0^t F_0(s) ds + F_1(t) \right) \right\rangle + C_1 \left\langle \frac{1}{a(t)} \right\rangle = 0, \end{aligned} \quad (3.108)$$

de onde,

$$C_1 = -\hat{a} \left\langle \frac{1}{a(t)} \left( \int_0^t F_0(s) ds + F_1(t) \right) \right\rangle, \quad (3.109)$$

em que  $\hat{a} = \langle a^{-1}(t) \rangle^{-1}$ . Assim, de (3.105) e (3.109) temos que  $N(y) = \tilde{N}(y) + C$ , em que  $C = C_2$  e

$$\tilde{N}(y) = \int_0^y \frac{1}{a(t)} \left[ \int_0^t F_0(s) ds + F_1(t) - \hat{a} \left\langle \frac{1}{a(t)} \left( \int_0^t F_0(s) ds + F_1(t) \right) \right\rangle \right] dt. \square$$

Aplicando o Lema 2 em (3.96), tal que  $F_0(y) = 0$  então  $\langle F_0 \rangle = 0$ , obtemos que existe solução 1-periódica de  $u_1$  em relação a variável  $y$  e utilizando separação de variáveis, supomos que  $u_1 = N_1(y) \frac{du_0}{dx}$ , sabendo que  $\frac{du_0}{dx} \neq 0$ . Fazendo as devidas manipulações, como feito em (3.40)-(3.42), temos a equação do problema local. Substituindo nas condições de contato perfeito complementando o problema (3.43), temos o chamado problema local

$$\begin{cases} \frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{dN_1}{dy} \right) = -\frac{da(y)}{dy}, & y \in (0, 1) \setminus \Gamma \\ \llbracket N_1(y) \rrbracket_{y \in \Gamma} = 0, \quad \llbracket a(y) \left( \frac{dN_1(y)}{dy} + 1 \right) \rrbracket_{y \in \Gamma} = 0, \\ 0 = N_1(0) = N_1(1). \end{cases} \quad (3.110)$$

Aplicando o Lema 2 em (3.110), considerando  $N \equiv N_1$ ,  $F_0 \equiv 0$  e  $F_1 \equiv -a(y)$  podemos verificar a existência de solução 1-periódica de  $N_1$ . Levando em conta a 1-periodicidade de  $a(y)$  e sabendo que  $a(y) > 0$ , conseguindo assim a solução do

problema local  $N_1(y)$ ,

$$N_1(y) = \int_0^y \left( \frac{\widehat{a}}{a(s)} - 1 \right) ds, \quad (3.111)$$

logo substituindo  $N_1(y)$  em  $u_1$ , obtemos

$$u_1(x, y) = \frac{du_0}{dx} \int_0^y \left( \frac{\widehat{a}}{a(s)} - 1 \right) ds. \quad (3.112)$$

Assim, substituindo  $u_0$  e  $u_1$  no problema (3.97) podemos agora encontrar  $u_2$ . Fazendo manipulações e aplicando o Lema 2, sabendo que  $N \equiv u_2$ ,

$$\begin{aligned} F_0 \equiv -a(y) \left( \frac{d^2 u_0}{dx^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} \right) + f(x) &= -a(y) \left[ \frac{d^2 u_0}{dx^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{du_0}{dx} N_1(y) \right) \right] + f(x) \\ &= -a(y) \frac{d^2 u_0}{dx^2} \left( \frac{dN_1}{dy} + 1 \right) + f(x) \end{aligned}$$

e  $F_1 \equiv a(y) \frac{du_1}{dx}$ , logo para obtermos que  $\langle F_0 \rangle = 0$  fazemos os passos de (3.57)-(3.58), obtendo a mesma equação do problema homogeneizado dada por (3.59). Logo, a exigência para a existência e unicidade da solução  $u_2$  está realizada, então a equação para  $u_2$  é simplificada para

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = -\frac{d}{dy} (a(y) N_1(y)) \frac{d^2 u_0}{dx^2}. \quad (3.113)$$

Considerando os passos de (3.61)-(3.67), supondo que  $u_2(x, y) = N_2(y) \frac{d^2 u_0}{dx^2}$ , tendo em mente que  $\frac{d^2 u_0}{dx^2} \neq 0$ , temos então o segundo problema local

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{dN_2}{dy} \right) = -\frac{d}{dy} (a(y) N_1(y)), \quad y \in (0, 1) \setminus \Gamma, \\ \llbracket N_2(y) \rrbracket_{y \in \Gamma} = 0, \quad \llbracket a(y) \left( \frac{dN_2(y)}{dy} + N_1(y) \right) \rrbracket_{y \in \Gamma} = 0, \\ N_2(0) = 0. \end{array} \right. \quad (3.114)$$

Assim, aplicando o Lema 2 em (3.114), utilizando  $N \equiv N_2$ ,  $F_1 \equiv -a(y) N_1(y)$  e  $F_0 \equiv 0$ , então temos soluções de  $N_2(y)$  1-periódicas. Atentando para os passos de (3.42)-(3.53), pelo cálculo da média da condição do Lema 2 obtemos  $N_2(y)$

$$N_2(y) = \int_0^y \left( \langle N_1(y) \rangle \frac{\widehat{a}}{a(s)} - N_1(s) \right) ds. \quad (3.115)$$

Assim,  $u_2(x, y)$  será

$$u_2(x, y) = \frac{d^2 u_0}{dx^2} \int_0^y \left( \langle N_1(y) \rangle \frac{\hat{a}}{a(s)} - N_1(s) \right) ds. \quad (3.116)$$

Portanto, a partir das equação para  $u_1(x, y)$  e  $u_2(x, y)$  a SAF pode ser escrita como

$$u^\varepsilon(x) \approx u^{(2)}(x, \varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon N_1 \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{du_0}{dx} + \varepsilon^2 N_2 \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{d^2 u_0}{dx^2}. \quad (3.117)$$

Construímos então a expansão assintótica  $u^{(2)}$ , sendo esta uma boa aproximação da solução exata  $u^\varepsilon$  do problema original. Provaremos, a seguir, quão boa é a proximidade entre a solução do problema original  $u^\varepsilon$  e a solução do problema homogeneizado  $u_0$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

### 3.2.3 Proximidade entre as soluções

Podemos estabelecer uma relação de proximidade entre a solução do problema original  $u^\varepsilon$  e a solução do problema homogeneizado  $u_0$  para avaliar quão boa aproximação é  $u_0$  de  $u^\varepsilon$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Utilizaremos a expansão de primeira ordem da SAF do problema, ou seja,

$$u^\varepsilon(x) \approx u^{(1)}(x, \varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon N_1 \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{du_0}{dx}. \quad (3.118)$$

Especificamente, vamos provar que

$$\|u^\varepsilon - u_0\|_{H_0^1([0,1])} = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}). \quad (3.119)$$

onde  $H^1(\Omega)$  é o espaço das funções de  $L^2(\Omega)$  (funções de quadrado integrável) cujas derivadas de primeira ordem também são de  $L^2(\Omega)$ .

#### Demonstração:

Primeiro, utilizando a expansão assintótica (3.118), vamos provar que

$$\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H_0^1([0,1])} = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}). \quad (3.120)$$

Substituindo a assintótica (3.118) no problema original (3.90) temos, para cada  $\varepsilon > 0$ ,

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left( a^\varepsilon(x) \frac{du^{(1)}}{dx} \right) = f(x) - F(x, \varepsilon), & x \in (0, 1) \\ \llbracket u^{(1)} \rrbracket = 0, \quad \left[ \left[ a^\varepsilon(x) \frac{du^{(1)}}{dx} \right] \right] = 0, & x \in \Gamma^\varepsilon \\ u^{(1)}(0, \varepsilon) = u^{(1)}(1, \varepsilon) = 0 \end{cases}, \quad (3.121)$$

em que  $F$  é erro de tomar  $u^{(1)}$  como solução de (3.1).

Subtraindo (3.121) de (3.90) temos, para cada  $\varepsilon > 0$ ,

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left( a^\varepsilon(x) \frac{d}{dx} (u^\varepsilon - u^{(1)}) \right) = F(x, \varepsilon), & x \in (0, 1), \\ \llbracket u^\varepsilon - u^{(1)} \rrbracket = 0, \quad \left[ \left[ a^\varepsilon(x) \frac{d}{dx} (u^\varepsilon - u^{(1)}) \right] \right] = 0, & x \in \Gamma^\varepsilon, \\ u^\varepsilon(0) - u^{(1)}(0, \varepsilon) = 0, \\ u^\varepsilon(1) - u^{(1)}(1, \varepsilon) = 0, \end{cases} \quad (3.122)$$

Utilizaremos o princípio do máximo generalizado para equações elípticas, dado por

**Teorema 3.** (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989) *Seja  $u \in H_0^1(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , a solução generalizada do problema*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( A_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} (A_{ij}(x)u) + B_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + A(x)u = f(x) + \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i}, & x \in \Omega \setminus \Gamma, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (3.123)$$

*Os coeficientes  $A_{ij}$  satisfazem condições de simetria  $A_{ij}(x) = A_{ji}(x)$  e positividade  $A_{ij}(x)\eta_i\eta_j \geq \kappa\eta_i\eta_i \forall \eta \in \mathbb{R}^d$ , onde  $\kappa$  é uma constante positiva. Para esta solução a seguinte estimativa é válida:*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c \left( \|f\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^s \|f_i\|_{L^2(\Omega)} \right). \quad (3.124)$$

*onde  $c > 0$  é uma constante. Para simplificação, adotou-se a notação de Einstein para a soma por índices repetidos em um termo.*

Ao aplicarmos o Teorema 3 em (3.122), teremos a estimativa

$$\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H_0^1([0,1])} \leq c \|F\|_{L^2([0,1])} \quad (3.125)$$

onde  $c > 0$  é uma constante. Assim, para estimar  $\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H_0^1([0,1])}$  é necessário obtermos uma expressão para  $F(x, \varepsilon)$  a partir da equação do problema (3.121), ou seja,

$$F(x, \varepsilon) = f(x) - \frac{d}{dx} \left[ a^\varepsilon(x) \frac{du^{(1)}}{dx} \right]. \quad (3.126)$$

Considerando o problema (3.121) a equação (3.97) passa a ser

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + f(x), \\
&= -\frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \frac{du_0}{dx} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ a(y) \frac{\partial}{\partial y} \left( N_1(y) \frac{du_0}{dx} \right) \right] + f(x) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left[ a(y) \frac{\partial}{\partial x} \left( N_1(y) \frac{du_0}{dx} \right) \right], \\
&= -\frac{d}{dy} (a(y) N_1(y)) \frac{d^2 u_0}{dx^2} - a(y) \frac{dN_1(y)}{dy} \frac{d^2 u_0}{dx^2} - a(y) \frac{d^2 u_0}{dx^2} + f(x), \\
&= -\frac{d}{dy} (a(y) N_1(y)) \frac{d^2 u_0}{dx^2} - \hat{a} \frac{d^2 u_0}{dx^2} + f(x) \\
&= -\frac{d}{dy} (a(y) N_1(y)) \frac{d^2 u_0}{dx^2}.
\end{aligned} \tag{3.127}$$

Sendo assim, após manipulações temos

$$F(x, \varepsilon) = -\varepsilon a(y) N_1(y) \frac{d^3 u_0}{dx^3}. \tag{3.128}$$

Lembrando  $\|u\|_{L^2([0,1])}^2 = \int_0^1 u^2 dx$ , de (3.128) seguimos que

$$\|F\|_{L^2([0,1])}^2 = \varepsilon^2 \int_0^1 \left( a(y) N_1(y) \frac{d^3 u_0}{dx^3} \right)^2 dx. \tag{3.129}$$

Notamos que

$$\left( a(y) N_1(y) \frac{d^3 u_0}{dx^3} \right)^2 = \left| a(y) N_1(y) \frac{d^3 u_0}{dx^3} \right|^2 = \left( |a(y) N_1(y)| \left| \frac{d^3 u_0}{dx^3} \right| \right)^2. \tag{3.130}$$

Assumindo que  $u_0 \in L^3([0, 1])$ , tem-se pelo Teorema 2, que existe  $A_1 > 0$  tal que

$$\left| \frac{d^3 u_0}{dx^3} \right| \leq A_1. \tag{3.131}$$

Logo, de (3.130) e (3.131), segue que

$$\left( |a(y) N_1(y)| \left| \frac{d^3 u_0}{dx^3} \right| \right)^2 \leq A_1^2 |a(y) N_1(y)|^2 = A_1^2 (a(y) N_1(y))^2, \tag{3.132}$$

e de (3.129) e (3.132), temos que

$$\|F\|_{L^2([0,1])}^2 = \varepsilon^2 A_1^2 \int_0^1 N_1^2(y) a^2(y) dx. \tag{3.133}$$

Assumindo que  $N_1, a \in ([0, \varepsilon^{-1}])$ , pelo Teorema 2 temos que existem  $B_1, B_2 > 0$

tais que, para todo  $x \in [0, \varepsilon^{-1}]$ , temos

$$\left| N_1 \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right| \leq B_1, \quad \left| a \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right| \leq B_2. \quad (3.134)$$

Tomando  $B = \max\{B_1, B_2\}$  seguindo de (3.133) que

$$\|F\|_{L^2([0,1])}^2 = \varepsilon^2 A_1^2 B^4 \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} dx = \varepsilon^2 A_1^2 B^4 \frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon A_1^2 B^4. \quad (3.135)$$

Consequentemente,

$$\|F\|_{L^2([0,1])} \leq \sqrt{\varepsilon} A_1 B^2. \quad (3.136)$$

Portanto, de (3.136) com  $c = A_1 B^2$  segue que

$$\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H_0^1([0,1])} = O(\sqrt{\varepsilon}). \quad (3.137)$$

De forma análoga obtemos que

$$\|u^{(1)} - u_0\|_{H_0^1([0,1])} = O(\sqrt{\varepsilon}). \quad (3.138)$$

Então, de (3.137) e (3.138), e usando desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon - u_0\|_{H_0^1([0,1])} &= \|u^\varepsilon - u^{(1)} + u^{(1)} - u_0\|_{H_0^1([0,1])}, \\ &\leq \|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H_0^1([0,1])} + \|u^{(1)} - u_0\|_{H_0^1([0,1])}, \\ &= O(\sqrt{\varepsilon}) + O(\sqrt{\varepsilon}), \\ &= O(\sqrt{\varepsilon}), \end{aligned} \quad (3.139)$$

de onde concluímos que

$$\|u^\varepsilon - u_0\|_{H_0^1([0,1])} = O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (3.140)$$

ou seja,  $u_0$  é uma boa aproximação para  $u^\varepsilon$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .  $\square$

### 3.2.4 Exemplo

Na figura 15 apresentamos um exemplo ilustrativo do fato de que  $u^\varepsilon \rightarrow u_0$  e  $u^{(1)} \rightarrow u_0$  quando  $\varepsilon \downarrow 0$ . Sejam o sumidouro unitário uniformemente distribuído  $f(x) = -1$ , e a condutividade térmica

$$a(y) = \begin{cases} a_1, & y \in (0, 0.5 - \delta) \cup (0.5 + \delta, 1), \\ a_2, & y \in (0.5 - \delta, 0.5 + \delta), \end{cases} \quad (3.141)$$

com  $a_r > 0$ ,  $r = 1, 2$  e  $\delta \in (0, 0.05)$ . Este caso representa um compósito condutivo bifásico com fases constituintes homogêneas. Aqui  $\Gamma = \{0.5 - \delta, 0.5 + \delta\}$ . A condutividade efetiva correspondente é  $\hat{a} = \langle a^{-1} \rangle^{-1} = (c_1 a_1^{-1} + c_2 a_2^{-1})$  onde

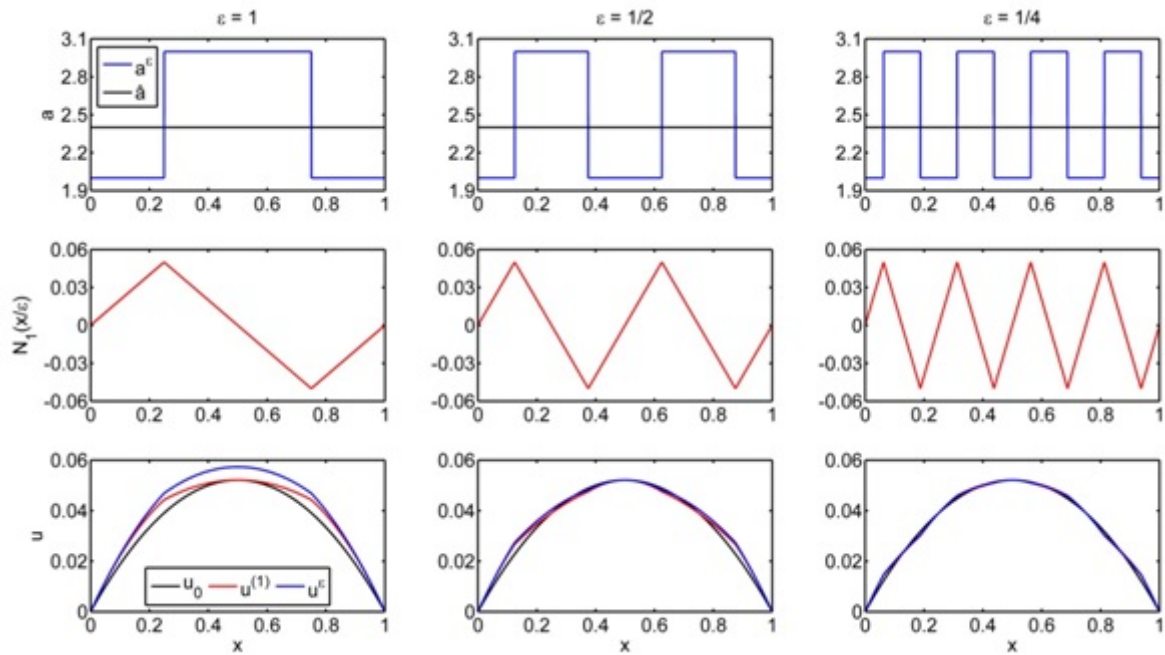


Figura 15: Exemplo equação elíptica contínuo por partes com contato perfeito

$c_2 = 2\delta = 1 - c_1$  com  $c_r$  a concentração da fase  $r$ . A solução do problema homogeneizado é  $u_0(x) = \frac{x(1-x)}{2\hat{a}}$ , enquanto a solução do problema local é

$$N_1(y) = \begin{cases} Ay, & y \in (0, 0.5 - \delta), \\ \left(\frac{a_1}{a_2}(A+1) - 1\right)y + B, & y \in (0.5 - \delta, 0.5 + \delta), \\ A(y-1), & y \in (0.5 + \delta, 1), \end{cases} \quad (3.142)$$

onde  $A$  e  $B$  são obtidos das condições de contato. De  $u_0$  e  $N_1$  dados em (3.142) se obtemos a solução assintótica  $u^{(1)}$  do problema original. A solução exata  $u_\varepsilon$  do problema original obtemos de maneira análoga a  $N_1$ , ou seja, resolvendo em cada intervalo e obtemos as constantes de integração a partir das condições de contato e de contorno. Os resultados apresentados na Figura 15, foram obtidos considerando  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 3$  e  $\delta = 0.25$ .

Na Figura 15, apresentamos na primeira linha temos coeficientes constitutivo  $a^\varepsilon$  ( $\varepsilon$ -periódico e rapidamente oscilante para  $\varepsilon$  pequeno) e efetivo  $\hat{a}$ , o coeficiente efetivo que permanece o mesmo independente do  $\varepsilon$  e temos o  $a^\varepsilon$  que a medida que  $\varepsilon \rightarrow 0$  ele oscila rapidamente. Na segunda linha temos a solução do problema local  $N_1$  correspondente para valores decrescentes de  $\varepsilon$  (evidenciando sua periodicidade). Na terceira linha a solução do problema homogeneizado  $u_0$ , a SAF truncada em  $u^{(1)}$  e a solução do problema original  $u^\varepsilon$ , vemos que quando  $\varepsilon = 1$  as  $u_0$ ,  $u^{(1)}$  e  $u^\varepsilon$  ainda são distinguíveis a medida que  $\varepsilon \rightarrow 0$  como no exemplo com  $\varepsilon = \frac{1}{4}$  as 3 soluções já se



tornam indistinguíveis (evidenciando a proximidade entre elas quando  $\varepsilon$  decresce).

### 3.3 Comparação caso contínuo com o caso contínuo por partes com contato perfeito

O objetivo desta seção é mostrar dois casos com a mesma propriedade efetiva, a saber, um compósito bifásico e um material funcionalmente graduado, ambos com microestrutura periódica. O estudo é realizado no contexto da termostática unidimensional, isto é, dado um meio heterogêneo unidimensional em equilíbrio térmico, estudar a distribuição estacionária de um campo de temperatura sobre ele nos casos em que a condutividade térmica é constante por partes com contato perfeito e continuamente diferenciável, respectivamente. Apresentamos um exemplo ilustrativo do fato de que  $u^\varepsilon \rightarrow u_0$  e  $u^{(1)} \rightarrow u_0$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  e a comparação dos casos contínuo e contínuo por partes com contato perfeito (chamado de discreto na Figura 16) considerando  $f(x) = -1$ .

O caso do contínuo com contato perfeito é um compósito condutivo bifásico com fases constituintes homogêneas. A condutividade térmica é

$$a(y) = \begin{cases} a_1, & y \in (0, 0.5 - \delta) \cup (0.5 + \delta, 1) \\ a_2, & y \in (0.5 - \delta, 0.5 + \delta) \end{cases} \quad (3.143)$$

com  $a_r > 0$ ,  $r = 1, 2$ , e  $\delta \in (0, 0.5)$ . Aqui, o conjunto de descontinuidades de  $a(y)$  na célula básica é  $\Gamma = \{0.5 - \delta, 0.5 + \delta\}$ . A condutividade efetiva correspondente é

$$\hat{a} = \langle a^{-1}(y) \rangle^{-1} = \left( \frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2}{a_2} \right)^{-1}, \quad (3.144)$$

onde  $c_2 = 2\delta = 1 - c_1$  com  $c_r$  a concentração da fase  $r$ . A solução do problema local é

$$N_1(y) = \begin{cases} Ay, & y \in (0, 0.5 - \delta) \\ \left( \frac{a_1}{a_2}(A + 1) - 1 \right) y + B, & y \in (0.5 - \delta, 0.5 + \delta) \\ A(y - 1), & y \in (0.5 + \delta, 1) \end{cases} \quad (3.145)$$

onde  $A$  e  $B$  são obtidos das condições de contato. De  $u_0$  e  $N_1$  dados acima se obtém a solução assintótica  $u^{(1)}$  do problema original. A solução exata  $u^\varepsilon$  do problema original se obtém de maneira análoga a  $N_1$ , ou seja, resolvendo em cada intervalo e obtendo as constantes de integração a partir das condições de contato e de contorno. Em particular, considera-se que  $a_1 = 1.25$ ,  $a_2 = 0.75$  e  $\delta = \frac{\sqrt{15} - 3}{4}$ .

O caso contínuo corresponde a um meio condutivo funcionalmente graduado com

a condutividade térmica  $a(y) = 1 + \frac{1}{4} \cos(2\pi y)$ . A solução do problema local é

$$N_1(y) = \int_0^y \left( \frac{\hat{a}}{a(s)} - 1 \right) ds, \quad (3.146)$$

e calculou-se a integral numericamente para cada  $y$ . Em ambos os casos condutividade efetiva correspondente é  $\hat{a} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ .

Na Figura 16, apresentamos, para ambos os casos, o comportamento da condutividade  $a^\varepsilon(x)$  (primeira linha), da função local  $N_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$  (segunda linha), e da solução  $u_0$  do problema homogeneizado juntamente com a solução assintótica  $u^{(1)}(x, \varepsilon)$  do problema original (terceira linha), para valores decrescentes de  $\varepsilon$  ( $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{4}$  para as colunas 1, 2 e 3, respectivamente). Observamos que, quando  $\varepsilon$  decresce,  $a^\varepsilon(x)$  e  $N_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$  são rapidamente oscilantes e periódicos como esperado, e que  $u^{(1)} \rightarrow u_0$ .

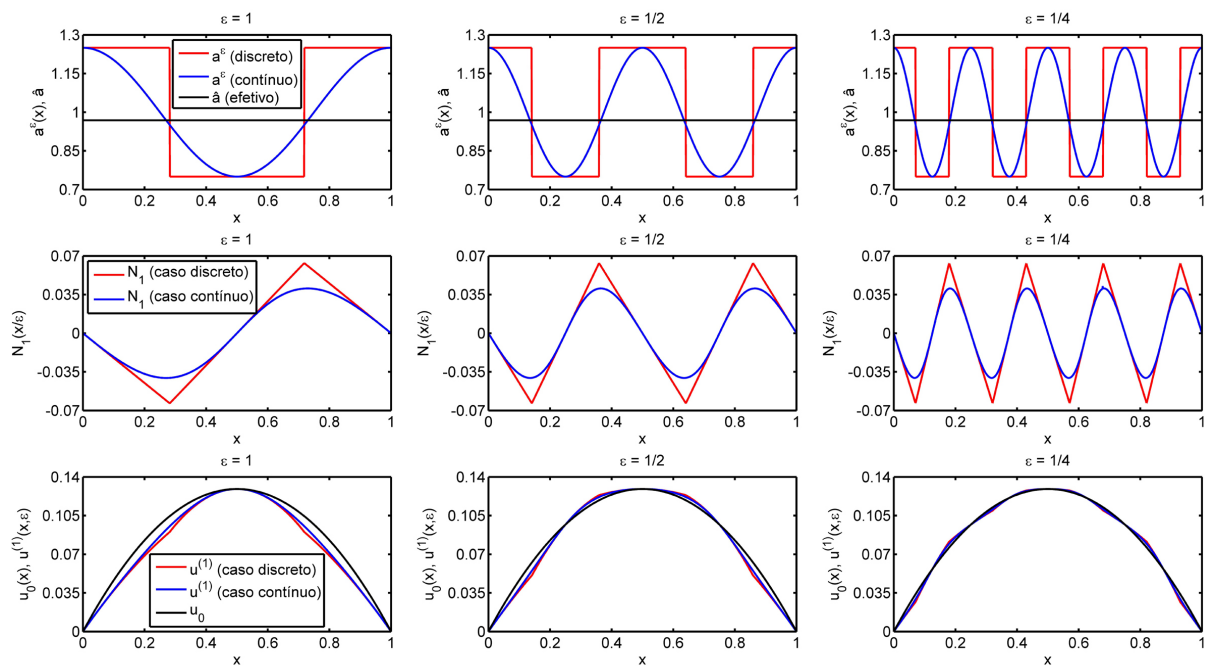


Figura 16: Comparação dos modelos contínuo e contínuo por partes com contato perfeito(discreto) para equação do elíptica

### 3.4 Caso Contínuo por Partes com Contato Imperfeito

#### 3.4.1 Formulação do Problema

Para cada  $\varepsilon$  fixo,  $0 < \varepsilon \ll 1$ , consideramos o seguinte problema de valores de contorno para a equação de calor estacionária com campo de temperatura  $u^\varepsilon$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \left[ a^\varepsilon(x) \frac{du^\varepsilon}{dx} \right] = f(x), \quad x \in (0, 1) \setminus \Gamma^\varepsilon \\ -\beta^\varepsilon \llbracket u^\varepsilon \rrbracket = a_1^\varepsilon(x) \frac{du^\varepsilon}{dx}, \quad x \in \Gamma^\varepsilon \\ a^\varepsilon(x) = \begin{cases} a_1, & x \in \Omega_1 \\ a_2, & x \in \Omega_2 \end{cases} \\ \left[ \left[ a^\varepsilon(x) \frac{du^\varepsilon}{dx} \right] \right] = 0, \quad x \in \Gamma^\varepsilon \\ u^\varepsilon|_{x=0} = h_1, \quad u^\varepsilon|_{x=1} = h_2, \quad x \in (0, 1) \end{array} \right. \quad (3.147)$$

onde  $u^\varepsilon$  é o campo de temperatura,  $a^\varepsilon(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$  é a condutividade térmica, função  $\varepsilon$ -periódica, rapidamente oscilante, continuamente diferenciável por partes, positiva e limitada;  $f$  é a fonte de calor,  $\Gamma^\varepsilon$  é o conjunto de pontos de descontinuidades de  $a^\varepsilon(x)$  que correspondem às interfaces entre as constituintes,  $\llbracket \cdot \rrbracket_{x \in \Gamma^\varepsilon}$  é o salto ao redor de cada descontinuidade de  $a^\varepsilon(x)$ , a condutância interfacial  $\beta^\varepsilon = \frac{\beta}{\varepsilon}$  estabelece a proporcionalidade entre o salto da temperatura e o fluxo de calor nos pontos de  $\Gamma^\varepsilon$  em si é contínuo nestes pontos.

#### 3.4.2 Método de Homogeneização Assintótica

A aplicação do Método de Homogeneização Assintótica ocorre de maneira semelhante do que já foi visto até aqui nos casos contínuo e contínuo por partes com contato perfeito. Assim, somente falta aplicarmos as condições de contato imperfeito dado pela equação (3.147)<sub>2</sub>, que diferem do caso com contato perfeito,

$$\llbracket u^\varepsilon \rrbracket_{y=y_1} \approx \llbracket u^{(2)} \rrbracket_{y=y_1} = \llbracket u_0(x) \rrbracket_{y=y_1} + \varepsilon^0 \llbracket u_1 \rrbracket_{y=y_1} + \varepsilon \llbracket u_2 \rrbracket_{y=y_1} = \frac{\varepsilon}{\beta} \left( a_1(y) \frac{du^{(2)}}{dx} \right). \quad (3.148)$$

Assim, aplicando a regra da cadeia (3.4)

$$\frac{du^{(2)}}{dx} = \varepsilon^0 \left( \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \varepsilon \left( \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad (3.149)$$

assim, obtemos a condição de contato imperfeito

$$\frac{du^{(2)}}{dx} = \frac{\varepsilon}{\beta} a_1(y) \left( \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \frac{\varepsilon^2}{\beta} a_1(y) \left( \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + O(\varepsilon^3). \quad (3.150)$$

Temos que  $u_0(x)$  é contínua, então  $[[u_0(x)]] = 0$ . Substituindo (3.150) em (3.148) e agrupando por potências de  $\varepsilon$ , temos que

$$\begin{aligned} a_1(y) \left( \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) &= -\beta [[u_1]]_{y=y_1}, \\ a_1(y) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) &= -\beta [[u_2]]_{y=y_1}. \end{aligned} \quad (3.151)$$

Teremos então os seguintes problemas recorrentes,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \frac{du_0}{dx} \right), \quad y \in (0, 1) \setminus \Gamma \\ a_1(y) \left( \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = -\beta [[u_1]]_{y=y_1}, \quad \beta > 0 \\ \left[ \left[ a(y) \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{du_0}{dx} \right) \right] \right]_{y=y_1} = 0, \\ u_1 = 0, \quad y \in (0, 1), \end{array} \right. \quad (3.152)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ a(y) \left( \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + f, \quad y \in (0, 1) \setminus \Gamma, \\ a_1(y) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = -\beta [[u_2]], \quad y \in \Gamma, \\ \left[ \left[ a(y) \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \right] \right] = 0, \quad y \in \Gamma, \\ u_2 = 0, \quad y \in (0, 1). \end{array} \right. \quad (3.153)$$

Temos que para cada  $x$  fixo, como dito antes tornamos as derivadas parciais em derivadas ordinárias, os problemas (3.152) e (3.153) são da forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dy} \left[ a(y) \frac{dN}{dy} \right] = F_0(y) + \frac{dF_1}{dy}, \quad y \in (0, 1) \setminus \Gamma, \\ \left[ \left[ a(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right] \right]_{y=y_1} = 0, \\ a(y) \frac{dN}{dy} - F_1 = -\beta [[N]]_{y=y_1}, \quad \beta > 0, \\ N(0) = 0, \end{array} \right. \quad (3.154)$$

visto que  $N_1(y)$  é a solução 1-periódica procurada. O Lema 3 a seguir fornece uma condição necessária e suficiente para a existência e unicidade de soluções 1-periódicas da sequência de problemas que resulta da aplicação do MHA.

**Lema 3.** (ÁLVAREZ-BORGES et al., 2018) *Sejam  $a(y)$ ,  $F_0(y)$  e  $F_1(y)$  diferenciáveis por partes, com  $a(y)$  1-periódica, positiva e limitada. Então (3.154) temos solução  $N(y)$*

1-periódica se e somente se  $\langle F_0 \rangle = 0$ . Tal solução é única salvo uma constante aditiva, tal que  $N = \tilde{N} + C$ ,  $\tilde{N}(0) = 0$

**Demonstração: Necessidade:** Seja  $N(y)$  solução 1-periódica de (3.154) escrita como

$$\frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right) = F_0(y). \quad (3.155)$$

Aplicando o operador de valor médio em ambos os lados de (3.155), levando em conta que  $F_1(y)$  é 1-periódica, temos que

$$\left\langle \frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right) \right\rangle = \langle F_0(y) \rangle. \quad (3.156)$$

Considerando a 1-periodicidade de  $a(y)$ ,  $N(y)$  e  $F_1(y)$  junto com a equação (3.154)<sub>2</sub> no lado esquerdo de (3.156), sigamos que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right) \right\rangle &= \left[ a(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right]_{y=0}^{y=1} + \sum_{y \in \Gamma} \left[ a(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right] \\ &= a(1) \frac{dN}{dy} \Big|_{y=1} - a(0) \frac{dN}{dy} \Big|_{y=0} = a(0) \left( \frac{dN}{dy} \Big|_{y=1} - \frac{dN}{dy} \Big|_{y=0} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.157)$$

Portanto de (3.156) e (3.157) temos  $\langle F_0(y) \rangle = 0$ .

**Suficiência:** Seja  $F_0(y)$  tal que  $\langle F_0(y) \rangle = 0$ . Sejam  $y \notin \Gamma$  e  $\Gamma_y$  o conjunto de pontos de descontinuidades de  $a(y)$  menores que  $y$ . Assim, de integrar (3.155) temos

$$\begin{aligned} \int_0^y F_0(s) ds &= \int_0^y \frac{d}{ds} \left( a(s) \frac{dN}{ds} - F_1(s) \right) ds \\ &= a(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) + \sum_{y=y_1} \left[ a(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right] + C_1, \end{aligned} \quad (3.158)$$

em que

$$C_1 = F_1(0) - a(0) \frac{dN}{dy} \Big|_{y=0} \quad (3.159)$$

é uma constante aditiva. Assim, levando em conta (3.154)<sub>2</sub>, de (3.158) sigamos que

$$\frac{dN}{dy} = \frac{1}{a(y)} \left( \int_0^y F_0(s) ds + F_1(y) + C_1 \right). \quad (3.160)$$

Integrando (3.160) temos que

$$N(y) + \sum_{y=y_1} \llbracket N \rrbracket - N(0) = \int_0^y \frac{1}{a(t)} \left( \int_0^t F_0(s) ds + F_1(t) + C_1 \right) dt + C_2. \quad (3.161)$$

Sabendo que  $\llbracket N \rrbracket_{y=y_1} = \frac{1}{\beta} \left( a(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right) \Big|_{y \in \Gamma_y}$  e  $N(0) = 0$ , obtemos

$$N(y) = \int_0^y \frac{1}{a(t)} \left( \int_0^t F_0(s) ds + F_1(t) + C_1 \right) dt + C_2 + \frac{1}{\beta} \left( a(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right) \Big|_{y=y_1}. \quad (3.162)$$

Para  $N(y)$  ser 1-periódica, impomos que  $N(y+1) - N(y) = 0$ . Logo,

$$0 = N(y+1) - N(y) = \int_y^{y+1} \frac{1}{a(t)} \left( \int_0^t F_0(s) ds + F_1(t) + C_1 \right) dt + \frac{1}{\beta} \left( a(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right) \Big|_{y \in \Gamma_y}. \quad (3.163)$$

Assim,

$$C_1 = -\hat{a} \left\langle \frac{1}{a(t)} \left( \int_0^t F_0(s) ds + F_1(t) \right) \right\rangle + \frac{1}{\beta} \left( a(y) \frac{dN}{dy} - F_1(y) \right) \Big|_{y \in \Gamma_y}, \quad (3.164)$$

em que  $\hat{a} = \langle a^{-1}(t) \rangle^{-1}$ .  $\square$

A aplicação do Lema 3 nos problemas (3.152) e (3.153) ocorre de maneira semelhante do que para o caso contínuo por partes com contato perfeito. Aplicando o Lema 3 em (3.152), tal que  $F_0(y) = 0$  então  $\langle F_0 \rangle = 0$ , obtemos que existe solução 1-periódica de  $u_1$  em relação a variável  $y$  e utilizando separação de variáveis, supomos que  $u_1 = N_1(y) \frac{du_0}{dx}$ , sabendo que  $\frac{du_0}{dx} \neq 0$ . Fazendo as devidas manipulações, como feito em (3.40)-(3.42), temos a equação do problema local. Substituindo nas condições de contato imperfeito complementando o problema (3.43), temos o chamado problema local

$$\begin{cases} \frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{dN_1}{dy} \right) = -\frac{da(y)}{dy}, & y \in (0, 1) \setminus \Gamma \\ -\beta \llbracket N_1(y) \rrbracket_{y=y_1} = a_1(y) \frac{dN_1}{dy} + a(y), & \left[ \left[ a(y) \left( \frac{dN_1(y)}{dy} + 1 \right) \right] \right]_{y=y_1} = 0, \\ 0 = N_1(0) = N_1(1). \end{cases} \quad (3.165)$$

Aplicando o Lema 3 em (3.165), considerando  $N \equiv N_1$ ,  $F_0 \equiv 0$  e  $F_1 \equiv -a(y)$  podemos verificar a existência de solução 1-periódica de  $N_1$ . Levando em conta a 1-periodicidade de  $a(y)$  e sabendo que  $a(y) > 0$ , conseguindo assim a solução do problema local  $N_1(y)$ , logo substituindo  $N_1(y)$  em  $u_1$ , e assim, substituindo  $u_0$  e  $u_1$  no problema (3.153) podemos encontrar  $u_2$ . Fazendo manipulações e aplicando o Lema 3, sabendo que  $N \equiv u_2$ ,

$$\begin{aligned} F_0 \equiv -a(y) \left( \frac{d^2 u_0}{dx^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} \right) + f(x) &= -a(y) \left[ \frac{d^2 u_0}{dx^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{du_0}{dx} N_1(y) \right) \right] + f(x) \\ &= -a(y) \frac{d^2 u_0}{dx^2} \left( \frac{dN_1}{dy} + 1 \right) + f(x) \end{aligned}$$

e  $F_1 \equiv a(y) \frac{du_1}{dx}$ , logo para obtermos que  $\langle F_0 \rangle = 0$  fazemos os passos de (3.57)-(3.58), obtendo a mesma equação do problema homogeneizado dada por (3.59). Logo, a exigência para a existência e unicidade da solução  $u_2$  está realizada. Considerando os passos de (3.61)-(3.67), supondo que  $u_2(x, y) = N_2(y) \frac{d^2 u_0}{dx^2}$ , tendo em mente que  $\frac{d^2 u_0}{dx^2} \neq 0$ , temos então o segundo problema local

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{dN_2}{dy} \right) = -\frac{d}{dy} (a(y) N_1(y)), \quad y \in (0, 1) \setminus \Gamma \\ -\beta \llbracket N_2(y) \rrbracket_{y=y_1} = a_1(y) \frac{dN_2}{dy} + a(y) N_1(y), \\ \llbracket a(y) \left( \frac{dN_2(y)}{dy} + N_1(y) \right) \rrbracket_{y=y_1} = 0, \\ N_2(0) = 0. \end{array} \right. \quad (3.166)$$

Assim, aplicando o Lema 3 em (3.114), utilizando  $N \equiv N_2$ ,  $F_1 \equiv -a(y) N_1(y)$  e  $F_0 \equiv 0$ , então temos soluções de  $N_2(y)$  1-periódicas. Atentando para os passos de (3.42)-(3.53), pelo cálculo da média da condição do Lema 3 obtemos  $N_2(y)$

$$N_2(y) = \int_0^y \left( \langle N_1(y) \rangle \frac{\hat{a}}{a(s)} - N_1(s) \right) ds. \quad (3.167)$$

Assim,  $u_2(x, y)$  será

$$u_2(x, y) = \frac{d^2 u_0}{dx^2} \int_0^y \left( \langle N_1(y) \rangle \frac{\hat{a}}{a(s)} - N_1(s) \right) ds. \quad (3.168)$$

Portanto, a partir das equações para  $u_1(x, y)$  e  $u_2(x, y)$  a SAF pode ser escrita como

$$u^\varepsilon(x) \approx u^{(2)}(x, \varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon N_1 \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{du_0}{dx} + \varepsilon^2 N_2 \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{d^2 u_0}{dx^2}. \quad (3.169)$$

Construímos então a expansão assintótica  $u^{(2)}$ , sendo esta uma boa aproximação da solução exata  $u^\varepsilon$  do problema original.

## 4 HOMOGENEIZAÇÃO DE MEIOS UNIDIMENSIONAIS MICROPERIÓDICOS PARA A EQUAÇÃO PARABÓLICA

### 4.1 Caso Contínuo

#### 4.1.1 Formulação do problema

Nesta seção abordamos que o problema da condução do calor em um meio unidimensional micro-heterogêneo e periódico com capacidade calorífica unitária. O problema consiste em encontrar a temperatura  $u^\varepsilon$  duas vezes continuamente diferenciável na variável espacial  $x \in [0, 1]$  e uma vez continuamente diferenciável na variável temporal  $t \in \mathbb{R}_+$ , sendo  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$  e continuamente diferenciável o parâmetro geométrico que caracteriza a micro-heterogeneidade do meio. Tal fenômeno físico é modelado por

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( G^\varepsilon(x, t) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right) = f(x, t), \quad (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+^* \\ u^\varepsilon(x, 0) = v(x), \quad x \in (0, 1) \\ u^\varepsilon(0, t) = u^\varepsilon(1, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+^*, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

onde  $v \in C^2([0, 1])$ ,  $v(0) = v(1) = 0$ , é a distribuição inicial da temperatura e  $f$  é uma função contínua que representa a fonte de calor. A condutividade térmica  $G^\varepsilon$  é uma função  $\varepsilon$ -periódica em  $x$ , positiva, limitada, e continuamente diferenciável.

#### 4.1.2 Método de Homogeneização Assintótica

Consideramos a seguinte expansão assintótica da solução do problema:

$$u^{(2)}(x, t, \varepsilon) = u_0(x, y, t) + \varepsilon u_1(x, y, t) + \varepsilon^2 u_2(x, y, t), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}. \quad (4.2)$$



Substituindo  $u^{(2)}$  (4.2) em (4.1), temos que

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( G^\varepsilon(x, t) \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} \right) - f(x, t) = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2) - \frac{\partial}{\partial x} \left[ G(y, t) \frac{\partial}{\partial x} (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2) \right] - f(x, t) = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ G(y, t) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \right] - f(x, t) = \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (4.5)$$

Empregando a regra da cadeia (3.4) e agrupando por potências de  $\varepsilon$ , obtemos uma igualdade assintótica

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-2} \frac{\partial}{\partial y} \left( G(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + \varepsilon^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[ G(y, t) \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left( G(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \right\} \\ & + \varepsilon^0 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ G(y, t) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ G(y, t) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial u_0}{\partial t} - f \right\} = \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (4.6)$$

que, para ser satisfeita, os coeficientes de  $\varepsilon^{-2}$ ,  $\varepsilon^{-1}$  e  $\varepsilon^0$  devem ser nulos, de onde:

$$\varepsilon^{-2} : \frac{\partial}{\partial y} \left( G(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) = 0 \quad (4.7)$$

$$\varepsilon^{-1} : \frac{\partial}{\partial y} \left( G(y, t) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( G(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( G(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \quad (4.8)$$

$$\varepsilon^0 : \frac{\partial}{\partial y} \left( G(y, t) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ G(y, t) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left( G(y, t) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial u_0}{\partial t} - f \quad (4.9)$$

Tais equações são complementadas por condições que resultam de substituir a assintótica  $u^{(2)}$  nas condições de contorno e iniciais do problema (4.1), isto é,

$$u^{(2)}(0, t, \varepsilon) = u_0(0, 0, t) + \varepsilon u_1(0, 0, t) + \varepsilon^2 u_2(0, 0, t) \approx 0, \quad (4.10)$$

$$u^{(2)}\left(1, t, \varepsilon\right) = u_0\left(1, \frac{1}{\varepsilon}, t\right) + \varepsilon u_1\left(1, \frac{1}{\varepsilon}, t\right) + \varepsilon^2 u_2\left(1, \frac{1}{\varepsilon}, t\right) \approx 0, \quad (4.11)$$

assim

$$u_0(0, 0, t) = u_0\left(1, \frac{1}{\varepsilon}, t\right) = 0, \quad (4.12)$$

$$u_1(0, 0, t) = u_1\left(1, \frac{1}{\varepsilon}, t\right) = 0, \quad (4.13)$$

$$u_2(0, 0, t) = u_2\left(1, \frac{1}{\varepsilon}, t\right) = 0, \quad (4.14)$$

e da condição inicial

$$u^{(2)}(x, 0, \varepsilon) = u_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, 0\right) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, 0\right) + \varepsilon^2 u_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, 0\right) \approx v(x), \quad (4.15)$$

logo temos que

$$u_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, 0\right) = v(x), \quad (4.16)$$

$$u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, 0\right) = 0, \quad (4.17)$$

$$u_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, 0\right) = 0. \quad (4.18)$$

Obtemos  $u_0$ ,  $u_1$  e  $u_2$ , respectivamente, das equações (4.7)-(4.9) juntamente com as condições alcançadas de (4.10), (4.11) e (4.15) estabelecendo assim uma sequência de problemas, dadas por

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} \left( G(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) = 0, \\ u_0(0, 0, t) = u_0\left(1, \frac{1}{\varepsilon}, t\right) = 0, \\ u_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, 0\right) = v(x), \end{array} \right. \quad (4.19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} \left( G(y, t) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( G(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( G(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right), \\ u_1(0, 0, t) = u_1\left(1, \frac{1}{\varepsilon}, t\right) = 0, \\ u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, 0\right) = 0, \end{array} \right. \quad (4.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} \left( G(y, t) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ G(y, t) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left( G(y, t) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial u_0}{\partial t} - f, \\ u_2(0, 0, t) = u_2\left(1, \frac{1}{\varepsilon}, t\right) = 0, \\ u_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, 0\right) = 0. \end{array} \right. \quad (4.21)$$

O problema (4.19) de  $u_0$  podemos seguir do mesmo modo feito em (3.31)-(3.37) obtém-se a independência da variável local  $y$  do primeiro termo da assintótica, ou seja,

$$u_0(x, y, t) = u_0(x, t). \quad (4.22)$$

Utilizando (4.22) no problema (4.20)<sub>1</sub> para obtermos  $u_1$ , temos que

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( G(y, t) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = - \frac{\partial}{\partial y} \left( G(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right). \quad (4.23)$$

Empregando o Lema 1 em (4.23) com  $a = G(y, t)$ , temos que  $N = u_1$  e  $F = -\frac{\partial}{\partial y} \left( G(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)$ . Deste modo, a equação (4.23) pode admitir uma solução  $u_1$  1-periódica com respeito a  $y$ , se e somente se,  $\left\langle \frac{\partial}{\partial y} \left( G(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right\rangle = 0$ . Assim,

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y} \left( G(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right\rangle = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \left( G(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) dy = 0, \quad (4.24)$$

sabendo que  $G(1) - G(0) = 0$ . Logo, temos que (4.20) realmente admite uma solução  $u_1$  1-periódica com respeito a  $y$ . No entanto, consideramos que  $u_1$  pela linearidade do operador seja da forma

$$u_1(x, y, t) = N_1(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial x}. \quad (4.25)$$

Então substituindo (4.25) em (4.23) temos que

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( G(y, t) \frac{\partial N_1(y, t)}{\partial y} + G(y, t) \right) \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0. \quad (4.26)$$

Conforme a hipótese, atribui-se  $\frac{\partial u_0}{\partial x} \neq 0$  para do  $x \in (0, 1)$ , então teremos a equação do problema local

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( G(y, t) \frac{\partial N_1(y, t)}{\partial y} + G(y, t) \right) = 0. \quad (4.27)$$

Complementado com a unicidade  $N_1(0, t) = 0$ , teremos o problema local:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \left( G(y, t) \frac{\partial N_1(y, t)}{\partial y} \right) = - \frac{\partial G(y, t)}{\partial y}, & y \in (0, 1), t > 0 \\ N_1(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (4.28)$$

Resolvendo de forma semelhante da feita no problema (3.43) para o problema (4.28), temos que

$$\widehat{G}(t) = \langle G^{-1}(y, t) \rangle^{-1} \quad (4.29)$$

é o chamado coeficiente efetivo e que

$$N_1(y, t) = \int_0^y \left( \frac{\widehat{G}(t)}{G(s, t)} - 1 \right) ds. \quad (4.30)$$

Portanto, a solução  $u_1$  será

$$u_1(x, y, t) = \frac{\partial u_0}{\partial x} \int_0^y \left( \frac{\widehat{G}(t)}{G(s, t)} - 1 \right) ds. \quad (4.31)$$

Substituindo  $u_0$  e  $u_1$  no problema para encontrar  $u_2$  (4.21) fica

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left( G(y, t) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = & -G(y, t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - G(y, t) \frac{\partial N_1(y, t)}{\partial y} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \\ & - \frac{\partial}{\partial y} (G(y, t) N_1(y, t)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_0}{\partial t} - f(x, t) \end{aligned} \quad (4.32)$$

note que  $\widehat{G}(t) = G(y, t) \frac{\partial N_1(y, t)}{\partial y} + G(y, t)$  então

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( G(y, t) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = -\widehat{G}(t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} (G(y, t) N_1(y, t)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_0}{\partial t} - f(x, t). \quad (4.33)$$

Aplicando o Lema 2 em (4.33), utilizando  $N = u_2$  e  $F = -\widehat{G}(t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} (G(y, t) N_1(y, t)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_0}{\partial t} - f(x, t)$ , segue que a condição necessária e suficiente para que exista  $u_2$  solução 1-periódica é que

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle -\widehat{G}(t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} (G(y, t) N_1(y, t)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_0}{\partial t} - f(x, t) \right\rangle, \\ &= - \left\langle \widehat{G}(t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial y} (G(y, t) N_1(y, t)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial u_0}{\partial t} \right\rangle - \langle f(x, t) \rangle, \\ &= - \left\langle \frac{\partial}{\partial y} (G(y, t) N_1(y, t)) \right\rangle \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \widehat{G}(t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_0}{\partial t} - f(x, t) \\ &= -\widehat{G}(t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_0}{\partial t} - f(x, t), \end{aligned} \quad (4.34)$$

pois  $G(y, t)$  e  $N_1(y, t)$  são 1-periódicos com respeito a  $y$  e  $t$ , então obtemos a equação homogeneizada

$$-\widehat{G}(t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_0}{\partial t} = f(x, t). \quad (4.35)$$

Complementando com as condições (4.12) e (4.16) atualizadas por (4.22), produz o problema homogeneizado

$$\begin{cases} -\widehat{G}(t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_0}{\partial t} = f(x, t), & x \in (0, 1), t > 0, \\ u_0(0, t) = u_0(1, t) = 0, & u_0(x, 0) = p(x). \end{cases} \quad (4.36)$$

Considerando a equação (4.33) e (4.35) para encontrar  $u_2$  e substituindo no pro-

blema (4.21), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} \left( G(y, t) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) &= \widehat{G}(t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} (G(y, t) N_1(y, t)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - G(y, t) \frac{\partial N_1(y, t)}{\partial y} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \\
&\quad - G(y, t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} \\
&= (\widehat{G}(t) - G(y, t)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - (\widehat{G}(t) - G(y, t)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial y} (G(y, t) N_1(y, t)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \\
&= - \frac{\partial}{\partial y} (G(y, t) N_1(y, t)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Supomos que

$$u_2(x, y, t) = N_2(y, t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}. \tag{4.38}$$

E então (4.37) passa a ser

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} \left( G(y, t) \frac{\partial N_2(y, t)}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} &= - \frac{\partial}{\partial y} (G(y, t) N_1(y, t)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \\
\frac{\partial}{\partial y} \left[ G(y, t) \left( \frac{\partial N_2(y, t)}{\partial y} + N_1(y, t) \right) \right] \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Considerando que  $\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \neq 0$ , temos então o segundo problema local

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \left[ G(y, t) \left( \frac{\partial N_2(y, t)}{\partial y} + N_1(y, t) \right) \right] = 0, \\ N_2(0, t) = 0, \end{cases} \tag{4.40}$$

aplicando o Lema 2 para verificarmos a existência de solução 1-periódica, onde  $N = N_2(y, t)$  e  $F = - \frac{\partial}{\partial y} (G(y, t) N_1(y, t))$ . Levando em consideração, os passos de (3.42)-(3.53), pelo cálculo da média da condição do lema obtemos a constante  $K_3 = \langle N_1(y, t) \rangle \widehat{G}(t)$ . Logo,  $N_2(y)$  será

$$N_2(y, t) = \int_0^y \left( \langle N_1(y, t) \rangle \frac{\widehat{G}(t)}{G(s, t)} - N_1(s, t) \right) ds. \tag{4.41}$$

Assim,  $u_2(x, y, t)$  será

$$u_2(x, y, t) = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \int_0^y \left( \langle N_1(y, t) \rangle \frac{\widehat{G}(t)}{G(s, t)} - N_1(s, t) \right) ds. \tag{4.42}$$

Portanto, a partir das equação para  $u_1(x, y, t)$  e  $u_2(x, y, t)$  a SAF pode ser escrita como

$$u^{(2)}(x, t, \varepsilon) = u_0(x, t) + \varepsilon N_1 \left( \frac{x}{\varepsilon}, t \right) \frac{\partial u_0}{\partial x} + \varepsilon^2 N_2 \left( \frac{x}{\varepsilon}, t \right) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}. \quad (4.43)$$

### 4.1.3 Proximidade entre as soluções

Podemos estabelecer uma relação de proximidade entre a solução do problema original  $u^\varepsilon$  e a solução do problema homogeneizado  $u_0$  para avaliar quão boa aproximação é  $u_0$  de  $u^\varepsilon$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Especificamente, vamos provar que para todo  $T > 0$  fixo, cumprimos

$$\|u^\varepsilon - u_0\|_{H_0^1([0,1] \times [0,T])} = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}), \quad (4.44)$$

onde  $H^1(\Omega)$  é o espaço das funções de  $L^2(\Omega)$  (funções de quadrado integrável) cujas derivadas de primeira ordem também são de  $L^2(\Omega)$ .

#### Demonstração:

Vamos considerar a expansão assintótica de primeira ordem do problema (4.1)

$$u^{(1)}(x, t, \varepsilon) = u_0(x, t) + \varepsilon N_1 \left( \frac{x}{\varepsilon}, t \right) \frac{\partial u_0}{\partial x}. \quad (4.45)$$

Substituindo (4.45) em (4.1) temos, para cada  $\varepsilon > 0$ , que

$$\begin{cases} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( G^\varepsilon(x, t) \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \right) = f(x, t) - F(x, t, \varepsilon), & (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+^* \\ u^{(1)}(x, 0, \varepsilon) = v(x), & x \in (0, 1), \\ u^{(1)}(0, t, \varepsilon) = u^{(1)}(1, t, \varepsilon) = 0, & t \in \mathbb{R}_+^* \end{cases} \quad (4.46)$$

em que  $F(x, t, \varepsilon)$  é erro de  $u^{(1)}$  em (4.1). Subtraindo (4.46) de (4.1) temos

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (u^\varepsilon - u^{(1)}) - \frac{\partial}{\partial x} \left( G^\varepsilon(x, t) \frac{\partial}{\partial x} (u^\varepsilon - u^{(1)}) \right) = F(x, t, \varepsilon), & (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+^* \\ u^\varepsilon(x, 0) - u^{(1)}(x, 0, \varepsilon) = 0, & x \in (0, 1), \\ u^\varepsilon(0, t) - u^{(1)}(0, t, \varepsilon) = u^\varepsilon(1, t) - u^{(1)}(1, t, \varepsilon) = 0, & t \in \mathbb{R}_+^*. \end{cases} \quad (4.47)$$

Utilizaremos o princípio do máximo generalizado para equações parabólicas.

**Teorema 4.** (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989) *Seja  $u \in H_0^1(\Omega \times (0, T))$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , solução generalizada do problema*

$$\left\{ \begin{array}{l} S(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( A_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + A_{ij}(x, t) u \right) \\ + B_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + A(x, t) u = f(x, t) + \frac{\partial f_i(x, t)}{\partial x_i}, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma, \quad t \in (0, T) \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in (0, T), \\ u(x, 0) = \psi(x), \quad \psi \in H_0^1(\Omega), \end{array} \right. \quad (4.48)$$

onde  $S(x, t) > S_0 > 0$ , tal que,  $S_0$  e uma constante. Os coeficientes  $A_{ij}$  satisfazem condições de simetria  $A_{ij}(x) = A_{ji}(x)$  e positividade  $A_{ij}(x) \eta_i \eta_j \geq \kappa \eta_i \eta_j$ ,  $\forall \eta \in \mathbb{R}^d$ , onde  $\kappa > 0$  é uma constante.

Para esta solução a seguinte estimativa é válida:

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega \times (0, T))} \leq c(T) \left( \|\psi(x)\|_{L^2(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega \times (0, T))} + \sum_{i=1}^s \|f_i\|_{L^2(\Omega \times (0, T))} \right), \quad (4.49)$$

onde  $c$  depende de  $T$ .

Ao aplicarmos o Teorema 4 em (4.47) temos, para cada  $T > 0$ ,

$$\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H_0^1([0,1] \times [0, T])} \leq c(T) \|F(x, t, \varepsilon)\|_{L^2([0,1] \times [0, T])}, \quad (4.50)$$

em que  $c(T)$  é uma constante. Teremos de (4.46) uma expressão para  $F(x, t, \varepsilon)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( G^\varepsilon(x, t) \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \right) - f(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} (u_0(x, t) + \varepsilon u_1(x, y, t)) - f(x, t) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} \left( G(y, t) \frac{\partial}{\partial x} (u_0(x, t) + \varepsilon u_1(x, y, t)) \right) \\ &= - \frac{\partial}{\partial x} \left[ G(y, t) \frac{\partial}{\partial x} \left( u_0(x, t) + \varepsilon N_1(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t} \left( u_0(x, t) + \varepsilon N_1(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) - f(x, t) \end{aligned} \quad (4.51)$$

aplicando a regra da cadeia, sabendo que  $\widehat{G}(y, t) = G(y, t) + G(y, t) \frac{\partial N_1(y, t)}{\partial y}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( G^\varepsilon(x, t) \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \right) - f(x, t) &= \frac{\partial u_0}{\partial t} + \varepsilon N_1(y, t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial x} - \varepsilon G(y, t) N_1(y, t) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} \\ &\quad - \widehat{G}(t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} (G(y, t) N_1(y, t)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - f(x, t). \end{aligned} \quad (4.52)$$

No entanto, para obtermos  $u_2$  considerando (4.9)

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( G(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( G(y, t) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( G(y, t) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) - f(x, t) + \frac{\partial u_0}{\partial t}, \\
&= -\frac{\partial}{\partial x} \left( G(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left[ G(y, t) \frac{\partial}{\partial y} \left( N_1(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right] - f(x, t) \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial y} \left[ G(y, t) \frac{\partial}{\partial x} \left( N_1(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial u_0}{\partial t}, \\
&= -\frac{\partial}{\partial y} (G(y, t) N_1(y, t)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - G(y, t) \frac{\partial N_1(y, t)}{\partial y} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - G(y, t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - f(x, t) + \frac{\partial u_0}{\partial t}, \\
&= -\frac{\partial}{\partial y} (G(y, t) N_1(y, t)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \widehat{G}(t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - f(x, t) + \frac{\partial u_0}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{4.53}$$

E então, de (4.53), temos

$$-f(x, t) + \frac{\partial u_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} (G(y, t) N_1(y, t)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \widehat{G}(t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \tag{4.54}$$

substituindo (4.54) para simplificar a equação (4.52)

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( G^\varepsilon(x, t) \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \right) - f(x, t) = \varepsilon N_1(y, t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial x} - \varepsilon G(y, t) N_1(y, t) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}, \tag{4.55}$$

ou seja,

$$F(x, t, \varepsilon) = -\varepsilon N_1(y, t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial x} + \varepsilon G(y, t) N_1(y, t) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}. \tag{4.56}$$

Assim, utilizamos a norma  $L^2$

$$\|u\|_{L^2([0,1] \times [0,T])} = \sqrt{\int_0^T \int_0^1 u^2 dx dt}, \tag{4.57}$$

para estimar  $\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{L^2([0,1] \times [0,T])}$ . Substituindo  $u$  de (4.57) por  $F(x, t, \varepsilon)$  de (4.56), sabendo que  $y = \frac{x}{\varepsilon}$ , temos que

$$\|F(x, t, \varepsilon)\|_{L^2([0,1] \times [0,T])}^2 = \varepsilon^2 \int_0^T \int_0^1 \left( G(y, t) N_1(y, t) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - N_1(y, t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial x} \right)^2 dx dt. \tag{4.58}$$

Reparemos que

$$\begin{aligned}
\left( G(y, t) N_1(y, t) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - N_1(y, t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial x} \right)^2 &= \left| G(y, t) N_1(y, t) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - N_1(y, t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial x} \right|^2 \\
&\leq \left( |G(y, t) N_1(y, t)| \left| \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} \right| + |N_1(y, t)| \left| \frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial x} \right| \right)^2.
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Assumindo que  $u_0(\cdot, t) \in C^3([0, 1])$  para todo  $t \in [0, T]$  e que  $u_0(x, \cdot) \in C^1([0, T])$



temos, pelo teorema 2, que existe constantes  $A_1, A_2 > 0$  tais que

$$\left| \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} \right| \leq A_1, \quad \left| \frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial x} \right| \leq A_2. \quad (4.60)$$

Seguindo  $A = \max\{A_1, A_2\}$  e substituindo (4.60) em (4.59), temos por consequência

$$\begin{aligned} \left( |G(y, t)N_1(y, t)| \left| \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} \right| + |N_1(y, t)| \left| \frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial x} \right| \right)^2 &\leq A^2 (|G(y, t)N_1(y, t)| + |N_1(y, t)|)^2 \\ &= A^2 (G(y, t)N_1(y, t) + N_1(y, t))^2 \\ &= A^2 N_1^2(y, t) (G(y, t) + 1)^2. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Assim, substituindo (4.61) em (4.58), com  $y = \frac{x}{\varepsilon}$

$$\begin{aligned} \|F\|_{L^2([0,1] \times [0,T])}^2 &\leq \varepsilon^2 A^2 \int_0^T \int_0^1 N_1^2(y, t) (G(y, t) + 1)^2 dx dt \\ &= \varepsilon^2 A^2 T \int_0^1 N_1^2\left(\frac{x}{\varepsilon}, t\right) \left(G\left(\frac{x}{\varepsilon}, t\right) + 1\right)^2 dx. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Veja agora que, sendo  $N_1, G \in C^1([0, \varepsilon^{-1}])$ , pelo Teorema 2, temos que existem constantes  $B_1, B_2 > 0$  tais que, para todo  $x \in [0, \varepsilon^{-1}]$ ,

$$\left| N_1\left(\frac{x}{\varepsilon}, t\right) \right| \leq B_1, \quad \left| G\left(\frac{x}{\varepsilon}, t\right) \right| \leq B_2. \quad (4.63)$$

Seja  $B = \max\{B_1, B_2\}$  e substituindo (4.63) em (4.62), temos que

$$\|F\|_{L^2([0,1] \times [0,T])}^2 \leq \varepsilon^2 A^2 B^4 T \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} dx = \varepsilon^2 A^2 B^4 T \frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon A^2 B^4 T. \quad (4.64)$$

Assim,

$$\|F\|_{L^2([0,1] \times [0,T])} \leq \sqrt{\varepsilon} AB^2 \sqrt{T}. \quad (4.65)$$

E então, a partir da equação (4.50) temos que

$$\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H_0^1([0,1] \times [0,T])} \leq c(T) \|F(x, t, \varepsilon)\|_{L^2([0,1] \times [0,T])} \leq \sqrt{\varepsilon} AB^2 \sqrt{T}, \quad (4.66)$$

onde  $c(T) = \sqrt{T}$ , para algum  $T > 0$ . Então,

$$\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H_0^1([0,1] \times [0,T])} = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}). \quad (4.67)$$

Podemos mostrar de modo análogo que

$$\|u^{(1)} - u_0\|_{H_0^1([0,1] \times [0,T])} = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}). \quad (4.68)$$

A partir desses resultados e da desigualdade triangular teremos

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon - u_0\|_{H_0^1([0,1] \times [0,T])} &\leq \|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H_0^1([0,1] \times [0,T])} + \|u^{(1)} - u_0\|_{H_0^1([0,1] \times [0,T])} \\ &= \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}) + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}) \\ &= \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}) \end{aligned} \quad (4.69)$$

o qual prova a relação de proximidade (4.44), ou seja,  $u_0$  é uma boa aproximação para  $u^\varepsilon$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .  $\square$

#### 4.1.4 Exemplo

Na figura 17 apresentamos um exemplo ilustrativo do fato de que  $u^{(1)} \rightarrow u_0$ . Sejam o sumidouro unitário uniformemente distribuído  $f(x, t) = x(1-x)\varepsilon^{-t} + \frac{\sqrt{15}}{2}$ , e a condutividade térmica  $G(y, t) = \varepsilon^{-t} \left(1 + \frac{1}{4}\cos 2\pi y\right)$ . A condutividade efetiva correspondente é  $\widehat{G}(t) = \frac{\sqrt{15}}{4}\varepsilon^{-t}$ . A solução do problema homogeneizado é  $u_0(x, t) = x(1-x)\varepsilon^t$ , enquanto a solução do problema local é

$$N_1(y, t) = \frac{\sqrt{15}}{4} \int_0^y \frac{ds}{\left(1 + \frac{1}{4}\cos 2\pi s\right)} - y \quad (4.70)$$

e a expansão assintótica

$$u^{(1)}(x, t, \varepsilon) = x(1-x)\varepsilon^t + \varepsilon \left( \frac{\sqrt{15}}{4} \int_0^{\frac{x}{\varepsilon}} \frac{ds}{\left(1 + \frac{1}{4}\cos 2\pi s\right)} - \frac{x}{\varepsilon} \right) (1-2x)\varepsilon^t. \quad (4.71)$$

Utilizamos  $t$  e  $\varepsilon$  fixos com  $t = 5$  e  $\varepsilon = \frac{1}{8}$ .

Na Figura 17, apresentamos na primeira coluna temos coeficientes constitutivo  $G(y, t)$  ( $\varepsilon$ -periódico e rapidamente oscilante para  $\varepsilon$  pequeno) e efetivo  $\widehat{G}$ . Na segunda coluna a solução do problema homogeneizado  $u_0$  e a SAF truncada em  $u^{(1)}$ . Na terceira coluna temos a solução do problema local  $N_1$  correspondente para valores decrescentes de  $\varepsilon$  (evidenciando sua periodicidade) e vemos que as  $u_0$  e  $u^{(1)}$  a medida que  $\varepsilon \rightarrow 0$  como no exemplo com  $\varepsilon = \frac{1}{8}$  as soluções já se tornam indistinguíveis (evidenciando a proximidade entre elas quando  $\varepsilon$  decresce).

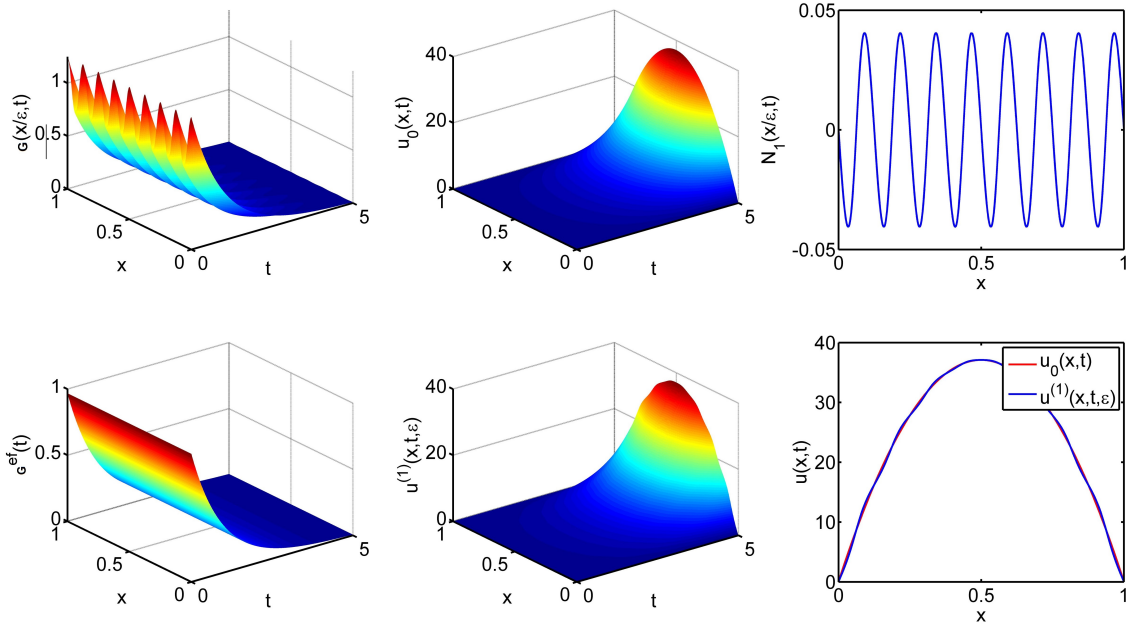


Figura 17: Exemplo caso contínuo para equação parabólica

## 4.2 Caso Contínuo por Partes com Contato Perfeito

### 4.2.1 Formulação do Problema

Nesta seção, abordamos o problema da condução do calor em um meio unidimensional micro-heterogêneo e periódico com capacidade calorífica unitária. O problema consiste em encontrar a temperatura  $u^\varepsilon$  duas vezes continuamente diferenciável na variável espacial  $x \in [0, 1]$  e uma vez continuamente diferenciável na variável temporal  $t \in \mathbb{R}_+$ , sendo  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ , o parâmetro geométrico que caracteriza a micro-heterogeneidade do meio. Tal fenômeno físico é modelado por

$$\begin{cases} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ a^\varepsilon(x, t) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right] = f(x, t), & (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+^* \\ \llbracket u^\varepsilon \rrbracket = 0, \quad \left[ \left[ G^\varepsilon(x, t) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right] \right] = 0, & (x, t) \in \Gamma^\varepsilon \times \mathbb{R}_+^* \\ u^\varepsilon(x, 0) = v(x), \quad x \in (0, 1), \quad u^\varepsilon(0, t) = u^\varepsilon(1, t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+^* \end{cases} \quad (4.72)$$

onde  $v \in C^2([0, 1])$ ,  $v(0) = v(1) = 0$ , é a distribuição inicial da temperatura. Aqui, a condutividade térmica  $G^\varepsilon$  é uma função  $\varepsilon$ -periódica em  $x$ , positiva, limitada, e continuamente diferenciável salvo em um número finito de descontinuidades reunidas em  $\Gamma^\varepsilon$ . Ainda,  $f$  é uma função contínua que representa a fonte de calor, e  $\llbracket \cdot \rrbracket$  representa o salto ao redor de  $x \in \Gamma^\varepsilon$ . Note que as duas condições de salto nulo em (4.72) indicam a continuidade da temperatura e do fluxo de calor sobre todo o domínio.

### 4.2.2 Método de Homogeneização Assintótica

A aplicação do Método de Homogeneização Assintótica ocorre de maneira semelhante que para a equação elíptica no caso contínuo dado pela equação (4.1). Iremos propor uma expansão assintótica da SAF do problema, equivalente a (4.2), ou seja,

$$u^\varepsilon(x, t) \approx u^{(2)}(x, t, \varepsilon) = u_0(x, y, t) + \varepsilon u_1(x, y, t) + \varepsilon^2 u_2(x, y, t), \quad y = x/\varepsilon. \quad (4.73)$$

Na substituição de  $u^{(2)}$  no problema (4.72), utilizamos a regra da cadeia 3.4 e obtemos a independência da variável local  $y$  do primeiro termo da assintótica, ou seja,  $u(x, y, t) = u(x, t)$ . Agrupando por potências de  $\varepsilon$  o resultado da substituição de  $u^{(2)}$  em (4.72) obtém-se uma igualdade assintótica que, para ser satisfeita, os coeficientes de  $\varepsilon^{-1}$  e  $\varepsilon^0$  devem ser nulos da mesma maneira feita em (4.8) e (4.9) e, também aplicamos as condições de contorno e iniciais, como feito em (4.10)-(4.18), então somente nos falta aplicar nas condições de contato do problema (4.72),

$$\llbracket u^{(2)} \rrbracket = \varepsilon^0 \llbracket u_1 \rrbracket + \varepsilon \llbracket u_2 \rrbracket + O(\varepsilon^2), \quad (4.74)$$

e

$$\left[ \left[ G(y, t) \frac{du^{(2)}}{dx} \right] \right] = \varepsilon^0 \left[ \left[ G(y, t) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \right] + \varepsilon \left[ \left[ G(y, t) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right] \right] + O(\varepsilon^2), \quad (4.75)$$

que, para ser satisfeita, os coeficientes de  $\varepsilon^0$  e  $\varepsilon$  devem ser nulos, de onde:

$$\varepsilon^0 : \llbracket u_1 \rrbracket = 0, \quad \left[ \left[ G(y, t) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \right] = 0, \quad (4.76)$$

$$\varepsilon : \llbracket u_2 \rrbracket = 0, \quad \left[ \left[ G(y, t) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right] \right] = 0. \quad (4.77)$$

Obtemos  $u_1$  e  $u_2$ , respectivamente, das equações (4.8), (4.11) e (4.76) e, (4.9), (4.15) e (4.77), estabelecendo assim uma sequência de problemas, dadas por

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} \left( G(y, t) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left( G(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right), \\ \llbracket u_1 \rrbracket = 0, \quad \left[ \left[ G(y, t) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \right] = 0, \\ u_1(0, 0, t) = u_1 \left( 1, \frac{1}{\varepsilon}, t \right) = 0, \\ u_1 \left( x, \frac{x}{\varepsilon}, 0 \right) = 0, \end{array} \right. \quad (4.78)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} \left( G(y, t) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ G(y, t) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left( G(y, t) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial u_0}{\partial t} - f, \\ \llbracket u_2 \rrbracket = 0, \quad \llbracket G(y, t) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \rrbracket = 0 \\ u_2(0, 0, t) = u_2 \left( 1, \frac{1}{\varepsilon}, t \right) = 0, \\ u_2 \left( x, \frac{x}{\varepsilon}, 0 \right) = 0. \end{array} \right. \quad (4.79)$$

Assim, de aplicar o Lema 2 em (4.78), tendo que  $a \equiv G(y, t)$  e  $F_0 \equiv 0$ , então  $\langle F_0 \rangle = 0$  obtemos a existência e unicidade solução 1-periódica de  $u_1$  em relação a variável  $y$  e utilizando separação de variáveis, supomos que  $u_1(x, y, t) = N_1(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial x}$ , sabendo que  $\frac{\partial u_0}{\partial x} \neq 0$  encontramos então a equação do problema local. Complementando com as condições de contato perfeito,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} \left( G(y, t) \frac{\partial N_1(y, t)}{\partial y} \right) = -\frac{\partial G(y, t)}{\partial y}, \quad y \in (0, 1) \setminus \Gamma, \quad t > 0, \\ \llbracket N_1(y, t) \rrbracket = 0, \quad \llbracket G(y, t) \left( \frac{\partial N_1(y, t)}{\partial y} + 1 \right) \rrbracket = 0, \quad y \in \Gamma, \quad t > 0, \\ 0 = N_1(0, t) = N_1(1, t), \quad t > 0. \end{array} \right. \quad (4.80)$$

Aplicando o Lema 2 em (4.80), considerando  $F_0 \equiv 0 \Rightarrow \langle F_0 \rangle = 0$ , assim podemos verificar a existência de solução 1-periódica de  $N_1(y, t)$ . Levando em conta a 1-periodicidade de  $G(y, t)$  e sabendo que  $G(y, t) > 0$ , conseguindo assim a solução do problema local  $N_1(y, t)$ ,

$$N_1(y, t) = \int_0^y \left( \frac{\widehat{G}(t)}{G(s, t)} - 1 \right) ds, \quad (4.81)$$

logo substituindo  $N_1(y, t)$  em  $u_1$ ,

$$u_1(x, y, t) = \frac{\partial u_0}{\partial x} \int_0^y \left( \frac{\widehat{G}(t)}{G(s, t)} - 1 \right) ds. \quad (4.82)$$

Assim, substituindo  $u_0$  e  $u_1$  no problema (4.79) podemos agora encontrar  $u_2$ . Fa-

zendo manipulações e aplicando o Lema 2, sabendo que  $N \equiv u_2$ ,

$$\begin{aligned} F_0 &\equiv -G(y, t) \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial u_0}{\partial t} - f(x, t), \\ &= -G(y, t) \left[ \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} N_1(y, t) \right) \right] + \frac{\partial u_0}{\partial t} - f(x, t), \\ &= -G(y, t) \frac{d^2 u_0}{dx^2} \left( \frac{\partial N_1(y, t)}{\partial y} + 1 \right) + \frac{\partial u_0}{\partial t} - f(x, t), \end{aligned}$$

e  $F_1 \equiv G(y, t) \frac{\partial u_1}{\partial x}$ , logo para obtermos que  $\langle F_0 \rangle = 0$  segue que a condição necessária e suficiente para que exista  $u_2$  solução 1-periódica é que

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle -\widehat{G}(t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} (G(y, t) N_1(y, t)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_0}{\partial t} - f(x, t) \right\rangle, \\ &= -\left\langle \widehat{G}(t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial y} (G(y, t) N_1(y, t)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial u_0}{\partial t} \right\rangle - \langle f(x, t) \rangle, \\ &= -\left\langle \frac{\partial}{\partial y} (G(y, t) N_1(y, t)) \right\rangle \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \widehat{G}(t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_0}{\partial t} - f(x, t), \\ &= -\widehat{G}(t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_0}{\partial t} - f(x, t), \end{aligned} \tag{4.83}$$

pois  $G(y, t)$  e  $N_1(y, t)$  são 1-periódicos com respeito a  $y$  e  $t$ , obtendo a mesma equação do problema homogeneizado dada por (4.36). Logo, a exigência para a existência e unicidade da solução  $u_2$  está realizada, então a equação para  $u_2$  é simplificada para

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( G(y, t) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} (G(y, t) N_1(y, t)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}. \tag{4.84}$$

Considerando os passos de (3.61)-(3.67), supondo que  $u_2(x, y, t) = N_2(y, t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}$ , tendo em mente que  $\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \neq 0$ , complementando com as condições de contato perfeito, temos então o segundo problema local

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} \left[ G(y, t) \left( \frac{\partial N_2(y, t)}{\partial y} + N_1(y, t) \right) \right] = 0, \quad y \in (0, 1) \setminus \Gamma, \quad t > 0, \\ \llbracket N_2(y, t) \rrbracket = 0, \quad \llbracket G(y, t) \left( \frac{\partial N_2(y, t)}{\partial y} + N_1(y, t) \right) \rrbracket = 0, \quad y \in \Gamma, \quad t > 0, \\ N_2(0, t) = 0, \quad t > 0. \end{array} \right. \tag{4.85}$$

Assim, aplicando o Lema 2 em (3.114), utilizando  $N \equiv N_2$ ,  $F_1 \equiv -G(y, t) N_1(y, t)$  e  $F_0 \equiv 0$ , então temos que cumprimos a exigência para a existência e unicidade de soluções de  $N_2(y, t)$  1-periódicas. Atentando para os passos de (3.42)-(3.53), pelo

cálculo da média da condição do Lema 2 obtemos  $N_2(y, t)$

$$N_2(y, t) = \int_0^y \left( \langle N_1(y, t) \rangle \frac{\widehat{G}(t)}{G(s, t)} - N_1(s, t) \right) ds. \quad (4.86)$$

Assim,  $u_2(x, y, t)$  será

$$u_2(x, y) = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \int_0^y \left( \langle N_1(y, t) \rangle \frac{\widehat{G}}{G(s, t)} - N_1(s, t) \right) ds. \quad (4.87)$$

Portanto, a partir das equação para  $u_1(x, y)$  e  $u_2(x, y)$  a SAF pode ser escrita como

$$u^\varepsilon(x) \approx u^{(2)}(x, \varepsilon, t) = u_0(x, t) + \varepsilon N_1\left(\frac{x}{\varepsilon}, t\right) \frac{\partial u_0}{\partial x} + \varepsilon^2 N_2\left(\frac{x}{\varepsilon}, t\right) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}. \quad (4.88)$$

### 4.2.3 Proximidade entre as soluções

Podemos estabelecer uma relação de proximidade entre a solução do problema original  $u^\varepsilon$  e a solução do problema homogeneizado  $u_0$  para avaliar quão boa aproximação é  $u_0$  de  $u^\varepsilon$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Especificamente, vamos provar que para todo  $T > 0$  fixo, cumprimos

$$\|u^\varepsilon - u_0\|_{H_0^1([0,1] \times [0,T])} = O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (4.89)$$

onde  $H^1(\Omega)$  é o espaço das funções de  $L^2(\Omega)$  (funções de quadrado integrável) cujas derivadas de primeira ordem também são de  $L^2(\Omega)$ .

Substituindo a expansão assintótica (4.88) truncada em  $u^{(1)}(x, \varepsilon)$  no problema original (4.72) temos, para cada  $\varepsilon > 0$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ G^\varepsilon(x, t) \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \right] = f(x, t) - F(x, t, \varepsilon), \quad (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+^* \\ \llbracket u^{(1)} \rrbracket = 0, \quad \llbracket G^\varepsilon(x, t) \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \rrbracket = 0, \quad (x, t) \in \Gamma^\varepsilon \times \mathbb{R}_+^* \\ u^{(1)}(x, 0, \varepsilon) = v(x), \quad x \in (0, 1), \quad u^{(1)}(0, t, \varepsilon) = u^{(1)}(1, t, \varepsilon) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+^* \end{array} \right. \quad (4.90)$$

onde  $F$  é o erro de tomar  $u^{(1)}$  como solução de (4.72). Subtraindo (4.90) de (4.72) temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(u^\varepsilon - u^{(1)}) - \frac{\partial}{\partial x} \left[ G^\varepsilon(x, t) \frac{\partial}{\partial x}(u^\varepsilon - u^{(1)}) \right] = F(x, t, \varepsilon), (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+^* \\ \llbracket u^\varepsilon - u^{(1)} \rrbracket = 0, \left\llbracket G^\varepsilon(x, t) \frac{\partial}{\partial x}(u^\varepsilon - u^{(1)}) \right\rrbracket = 0, (x, t) \in \Gamma^\varepsilon \times \mathbb{R}_+^* \\ u^\varepsilon(x, 0) - u^{(1)}(x, 0, \varepsilon) = 0, x \in (0, 1), \\ u^\varepsilon(0, t) - u^{(1)}(0, t, \varepsilon) = u^\varepsilon(1, t) - u^{(1)}(1, t, \varepsilon) = 0, t \in \mathbb{R}_+^* \end{array} \right. \quad (4.91)$$

Ao aplicarmos o Teorema 4 em (4.91) temos, para cada  $T > 0$ ,

$$\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H_0^1([0,1] \times [0,T])} \leq c(T) \|F\|_{L^2([0,1] \times [0,T])}, \quad (4.92)$$

onde  $c(T)$  é uma constante.

Teremos de (4.90) uma expressão para  $F(x, t, \varepsilon)$ , como obtemos em (4.51) aplicamos a regra da cadeia (3.4), sabendo que  $\widehat{G}(t) = G(y, t) + G(y, t) \frac{\partial N_1(y, t)}{\partial y}$ . No entanto, para obtermos  $u_2$  considerando (4.9), fazendo as devidas manipulações como em (4.52)-(4.54), temos

$$F(x, t, \varepsilon) = -\varepsilon N_1(y, t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial x} + \varepsilon G(y, t) N_1(y, t) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}. \quad (4.93)$$

Assim, utilizamos a norma  $L^2$  dada por (4.57) para estimar  $\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{L^2([0,1] \times [0,T])}$ . Substituindo  $u$  de (4.57) por  $F(x, t, \varepsilon)$  de (4.93), sabendo que  $y = \frac{x}{\varepsilon}$ , seguindo os mesmos passos de (4.58) e (4.59), assumindo que  $u_0(\cdot, t) \in L^3([0, 1])$  para todo  $t \in [0, T]$  e que  $u_0(x, \cdot) \in L^1([0, T])$  temos, pelo teorema 2, que existe constantes  $A_1, A_2 > 0$  tais que

$$\left| \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} \right| \leq A_1, \quad \left| \frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial x} \right| \leq A_2. \quad (4.94)$$

Seguindo  $A = \max\{A_1, A_2\}$  e os passos de (4.61)-(4.62). Veja agora que, sendo  $N_1, G \in L^1([0, \varepsilon^{-1}])$ , pelo Teorema 2, temos que existem constantes  $B_1, B_2 > 0$  tais que, para todo  $x \in [0, \varepsilon^{-1}]$ ,

$$\left| N_1 \left( \frac{x}{\varepsilon}, t \right) \right| \leq B_1, \quad \left| G \left( \frac{x}{\varepsilon}, t \right) \right| \leq B_2. \quad (4.95)$$

Seja  $B = \max\{B_1, B_2\}$  e seguindo da mesma maneira que (4.64)-(4.66), temos que

$$\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H_0^1([0,1] \times [0,T])} = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}). \quad (4.96)$$

Podemos mostrar de modo análogo que

$$\|u^{(1)} - u_0\|_{H_0^1([0,1] \times [0,T])} = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}). \quad (4.97)$$



A partir desses resultados e da desigualdade triangular teremos

$$\begin{aligned}\|u^\varepsilon - u_0\|_{H_0^1([0,1] \times [0,T])} &\leq \|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H_0^1([0,1] \times [0,T])} + \|u^{(1)} - u_0\|_{H_0^1([0,1] \times [0,T])}, \\ &= \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}) + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}), \\ &= \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}),\end{aligned}\tag{4.98}$$

o qual prova a relação de proximidade (4.44), ou seja,  $u_0$  é uma boa aproximação para  $u^\varepsilon$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .  $\square$

## 5 HOMOGENEIZAÇÃO DE MEIOS UNIDIMENSIONAIS MICROPÉRIÓDICOS PARA A EQUAÇÃO HIPERBÓLICA

### 5.1 Caso Contínuo

#### 5.1.1 Formulação do Problema

O problema consiste em encontrar o deslocamento vertical  $u^\varepsilon$  de uma corda elástica tensionada, o qual está localizado na posição  $x$  no instante de tempo  $t$  sob a ação de uma força  $f(x, t)$  e densidade de massa unitária. Assume-se que os extremos da corda estão fixos. Para cada  $\varepsilon$  fixo,  $0 < \varepsilon \ll 1$ , o fenômeno da vibração vertical da corda é descrito pela seguinte equação hiperbólica, chamada de equação da onda,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( J^\varepsilon(x, t) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right) = f(x, t), \quad x \in (0, 1), \quad t > 0 \\ u^\varepsilon(0, t) = u^\varepsilon(1, t) = 0, \quad t > 0 \\ u^\varepsilon(x, 0) = v(x), \quad x \in (0, 1) \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x, 0) = q(x), \quad x \in (0, 1), \quad t > 0 \end{array} \right. \quad (5.1)$$

onde  $J$ ,  $f$ ,  $v$  e  $q$ , são funções diferenciáveis, que representam a densidade de massa, a força do corpo, e os deslocamentos e velocidades iniciais,  $J^\varepsilon(x, t) = J\left(\frac{x}{\varepsilon}, t\right)$  é  $\varepsilon$ -periódica, positiva e limitada, e ainda, devem ser satisfeitas as condições de compatibilidade  $v(0) = v(1) = 0$ .

#### 5.1.2 Método de Homogeneização Assintótica

Consideramos a seguinte expansão assintótica da solução do problema:

$$u^{(2)}(x, t, \varepsilon) = u_0(x, y, t) + \varepsilon u_1(x, y, t) + \varepsilon^2 u_2(x, y, t), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}. \quad (5.2)$$

Substituindo  $u^{(2)}$  (5.2) em (5.1), temos

$$\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial^2 t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( J^\varepsilon(x, t) \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} \right) - f(x, t) = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 t} (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2) - \frac{\partial}{\partial x} \left[ J(y, t) \frac{\partial}{\partial x} (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2) \right] - f(x, t) = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial^2 t} + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial^2 t} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial^2 t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ J(y, t) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \right] - f = \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (5.5)$$

Empregando a regra da cadeia (3.4) e agrupando por potências de  $\varepsilon$ , obtemos uma igualdade assintótica

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-2} \frac{\partial}{\partial y} \left( J(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + \varepsilon^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[ J(y, t) \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left( J(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \right\} \\ & + \varepsilon^0 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ J(y, t) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ J(y, t) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial^2 u_0}{\partial^2 t} - f \right\} = \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (5.6)$$

que, para ser satisfeita, os coeficientes de  $\varepsilon^{-2}$ ,  $\varepsilon^{-1}$  e  $\varepsilon^0$  devem ser nulos, de onde:

$$\varepsilon^{-2} : \frac{\partial}{\partial y} \left[ J(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right] = 0 \quad (5.7)$$

$$\varepsilon^{-1} : \frac{\partial}{\partial y} \left[ J(y, t) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right] = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ J(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ J(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right] \quad (5.8)$$

$$\varepsilon^0 : \frac{\partial}{\partial y} \left[ J(y, t) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right] = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ J(y, t) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ J(y, t) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right] + \frac{\partial^2 u_0}{\partial^2 t} - f \quad (5.9)$$

Tais equações são complementadas por condições que resultam de substituir a assintótica  $u^{(2)}$  nas condições de contorno e iniciais do problema (5.1), isto é,

$$u^{(2)}(0, t, \varepsilon) = u_0(0, 0, t) + \varepsilon u_1(0, 0, t) + \varepsilon^2 u_2(0, 0, t) \approx 0, \quad (5.10)$$

$$u^{(2)}(1, t, \varepsilon) = u_0 \left( 1, \frac{1}{\varepsilon}, t \right) + \varepsilon u_1 \left( 1, \frac{1}{\varepsilon}, t \right) + \varepsilon^2 u_2 \left( 1, \frac{1}{\varepsilon}, t \right) \approx 0, \quad (5.11)$$

$$u^{(2)}(x, 0, \varepsilon) = u_0 \left( x, \frac{x}{\varepsilon}, 0 \right) + \varepsilon u_1 \left( x, \frac{x}{\varepsilon}, 0 \right) + \varepsilon^2 u_2 \left( x, \frac{x}{\varepsilon}, 0 \right) \approx v(x) \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial t}(x, 0, \varepsilon) = \frac{\partial u_0}{\partial t} \left( x, \frac{x}{\varepsilon}, 0 \right) + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial t} \left( x, \frac{x}{\varepsilon}, 0 \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial t} \left( x, \frac{x}{\varepsilon}, 0 \right) \approx q(x) \quad (5.13)$$

assim

$$\varepsilon^0 : \begin{cases} u_0(0, 0, t) = u_0 \left( 1, \frac{1}{\varepsilon}, t \right) = 0, \\ u_0 \left( x, \frac{x}{\varepsilon}, 0 \right) = v(x), \\ \frac{\partial u_0}{\partial t} \left( x, \frac{x}{\varepsilon}, 0 \right) = q(x), \end{cases} \quad (5.14)$$

$$\varepsilon^1 : \begin{cases} u_1(0, 0, t) = u_1\left(1, \frac{1}{\varepsilon}, t\right) = 0, \\ u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, 0\right) = 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial t}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, 0\right) = 0, \end{cases} \quad (5.15)$$

$$\varepsilon^2 : \begin{cases} u_2(0, 0, t) = u_2\left(1, \frac{1}{\varepsilon}, t\right) = 0, \\ u_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, 0\right) = 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, 0\right) = 0. \end{cases} \quad (5.16)$$

Obtemos  $u_0$ ,  $u_1$  e  $u_2$ , respectivamente, das equações (5.7)-(5.9) juntamente com as condições alcançadas (5.14)-(5.16) estabelecendo a SAF.

O problema, que se forma a partir das equações (5.7) e (5.14), de  $u_0$  podemos seguir do mesmo modo feito em (3.31)-(3.37) obtendo a independência da variável local  $y$  do primeiro termo da assintótica, ou seja,

$$u_0(x, y, t) = u_0(x, t). \quad (5.17)$$

Utilizando (5.17) no problema (5.8) para obtermos  $u_1$ , temos

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( J(y, t) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = - \frac{\partial}{\partial y} \left( J(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right). \quad (5.18)$$

Empregando o Lema 1 em (5.18), temos que  $N = u_1$  e  $F = - \frac{\partial}{\partial y} \left( J(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)$ . Deste modo, a equação (5.18) pode admitir uma solução  $u_1$  1-periódica com respeito a  $y$ , se e somente se,  $\left\langle \frac{\partial}{\partial y} \left( J(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right\rangle = 0$ . Logo,

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y} \left( J(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right\rangle = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \left( J(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) dy = 0, \quad (5.19)$$

sabendo que  $J(1, t) - J(0, t) = 0$ . Logo, temos que (5.18) realmente admite uma solução  $u_1$  1-periódica com respeito a  $y$ . No entanto, consideramos que  $u_1$  pela linearidade do operador seja da forma

$$u_1(x, y, t) = N_1(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial x}. \quad (5.20)$$

Então substituindo (5.20) em (5.18) temos que

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( J(y, t) \frac{\partial N_1(y, t)}{\partial y} + J(y, t) \right) \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0. \quad (5.21)$$

Conforme a hipótese, atribuímos  $\frac{\partial u_0}{\partial x} \neq 0$  para do  $x \in (0, 1)$ , então teremos a equação do problema local

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( J(y, t) \frac{\partial N_1(y, t)}{\partial y} + J(y, t) \right) = 0. \quad (5.22)$$

Complementado com a unicidade  $N_1(0) = 0$ , teremos o problema local:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \left( J(y, t) \frac{\partial N_1(y, t)}{\partial y} \right) = -\frac{\partial J(y, t)}{\partial y}, & y \in (0, 1), t > 0 \\ N_1(0) = 0. \end{cases} \quad (5.23)$$

Resolvendo de forma semelhante da feita no problema (3.43) para o problema (5.23), temos que

$$\hat{J}(t) = \langle J^{-1}(y, t) \rangle^{-1} \quad (5.24)$$

é o chamado coeficiente efetivo e que

$$N_1(y, t) = \int_0^y \left( \frac{\hat{J}(t)}{J(s, t)} - 1 \right) ds. \quad (5.25)$$

Portanto, a solução  $u_1$  será

$$u_1(x, y, t) = \frac{\partial u_0}{\partial x} \int_0^y \left( \frac{\hat{J}(t)}{J(s, t)} - 1 \right) ds. \quad (5.26)$$

Substituindo  $u_0$  e  $u_1$  no problema para encontrar  $u_2$  (5.9) fica

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left( J(y, t) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = & -J(y, t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - J(y, t) \frac{\partial N_1(y, t)}{\partial y} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \\ & - \frac{\partial}{\partial y} (J(y, t) N_1(y, t)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - f(x, t), \end{aligned} \quad (5.27)$$

note que  $\hat{J} = J(y, t) \frac{\partial N_1(y, t)}{\partial y} + J(y, t)$  então

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( J(y, t) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = -\hat{J}(t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} (J(y, t) N_1(y, t)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - f(x, t). \quad (5.28)$$

Aplicando o Lema 1 em (5.28), utilizando  $N = u_2$  e  $F = -\hat{J}(t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} (J(y, t) N_1(y, t)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - f(x, t)$ , segue que a condição necessária e suficiente

para que exista  $u_2$  solução 1-periódica é que

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle -\widehat{J}(t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} (J(y, t) N_1(y, t)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - f(x, t) \right\rangle, \\
&= - \left\langle \widehat{J}(t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial y} (J(y, t) N_1(y, t)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \right\rangle - \langle f(x, t) \rangle, \\
&= - \left\langle \frac{\partial}{\partial y} (J(y, t) N_1(y, t)) \right\rangle \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \widehat{J} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - f(x, t), \\
&= -\widehat{J}(t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - f(x, t),
\end{aligned} \tag{5.29}$$

pois  $J(y, t)$  e  $N_1(y, t)$  são 1-periódicos com respeito a  $y$  e então obtemos a equação do problema homogeneizado

$$-\widehat{J}(t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = f(x, t). \tag{5.30}$$

Temos que  $u_0$  é a solução do problema homogeneizado

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \widehat{J}(t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = f(x, t), x \in (0, 1) \\ u_0(x, 0) = v(x), \frac{\partial u_0}{\partial t}(x, 0) = q(x), x \in (0, 1) \\ u_0(0, t) = u_0(1, t) = 0, t \in \mathbb{R}_+^* \end{array} \right. \tag{5.31}$$

Considerando a equação (5.28) e (5.30) para encontrar  $u_2$  e substituindo no problema (5.9), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} \left( J(y, t) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) &= +\widehat{J}(t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} (J(y, t) N_1(y, t)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - J(y, t) \frac{\partial N_1(y, t)}{\partial y} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \\
&\quad - J(y, t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \\
&= \left( \widehat{J}(t) - J(y, t) \right) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \left( \widehat{J}(t) - J(y, t) \right) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial y} (J(y, t) N_1(y, t)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \\
&= - \frac{\partial}{\partial y} (J(y, t) N_1(y, t)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}.
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Supomos que

$$u_2(x, y, t) = N_2(y, t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}. \tag{5.33}$$

Considerando que  $\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \neq 0$ , temos então o segundo problema local

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \left[ J(y, t) \left( \frac{dN_2(y, t)}{dy} + N_1(y, t) \right) \right] = 0, \\ N_2(0) = 0, \end{cases} \quad (5.34)$$

aplicando o Lema 1 para verificarmos a existência de solução 1-periódica, onde  $N = N_2(y, t)$  e  $F = -\frac{\partial}{\partial y}(J(y, t)N_1(y, t))$ . Levando em consideração, os passos de (3.42)-(3.53), pelo cálculo da média da condição do lema obtemos a constante  $K_3 = \langle N_1(y, t) \rangle \hat{J}(t)$ . Logo,

$$N_2(y, t) = \int_0^y \left( \langle N_1(y, t) \rangle \frac{\hat{J}(t)}{J(s, t)} - N_1(s, t) \right) ds. \quad (5.35)$$

Assim,

$$u_2(x, y) = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \int_0^y \left( \langle N_1(y, t) \rangle \frac{\hat{J}(t)}{J(s, t)} - N_1(s, t) \right) ds. \quad (5.36)$$

Portanto, a partir das equação para  $u_1(x, y, t)$  e  $u_2(x, y, t)$  a SAF pode ser escrita como

$$u^{(2)}(x, t, \varepsilon) = u_0(x, t) + \varepsilon N_1 \left( \frac{x}{\varepsilon}, t \right) \frac{\partial u_0}{\partial x} + \varepsilon^2 N_2 \left( \frac{x}{\varepsilon}, t \right) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}. \quad (5.37)$$

### 5.1.3 Proximidade entre as soluções

Podemos estabelecer uma relação de proximidade entre a solução do problema original  $u^\varepsilon$  e a solução do problema homogeneizado  $u_0$  para avaliar quão boa aproximação é  $u_0$  de  $u^\varepsilon$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Especificamente, provar que para todo  $T > 0$  fixo, cumprimos

$$\|u^\varepsilon - u_0\|_{H_0^1([0,1] \times [0,T])} = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}), \quad (5.38)$$

onde  $H^1(\Omega)$  é o espaço das funções de  $L^2(\Omega)$  (funções de quadrado integrável) cujas derivadas de primeira ordem também são de  $L^2(\Omega)$ .

#### Demonstração:

Vamos considerar a expansão assintótica de primeira ordem do problema (5.1)

$$u^{(1)}(x, t, \varepsilon) = u_0(x, t) + \varepsilon N_1 \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u_0}{\partial x}. \quad (5.39)$$

Substituindo (5.39) em (5.1) temos, para cada  $\varepsilon > 0$ , que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( J^\varepsilon(x) \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \right) = f(x, t) - F(x, t, \varepsilon), \quad (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+^* \\ u^{(1)}(x, 0, \varepsilon) = v(x), \quad x \in (0, 1), \\ u^{(1)}(0, t, \varepsilon) = u^{(1)}(1, t, \varepsilon) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+^* \\ \frac{\partial}{\partial t} u^{(1)}(x, 0, \varepsilon) = q(x), \quad x \in (0, 1), \quad t \in \mathbb{R}_+^* \end{array} \right. \quad (5.40)$$

em que  $F(x, t, \varepsilon)$  é erro de  $u^{(1)}$  em (5.1). Subtraindo (5.40) de (5.1) temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u^\varepsilon - u^{(1)}) - \frac{\partial}{\partial x} \left( J^\varepsilon(x) \frac{\partial}{\partial x} (u^\varepsilon - u^{(1)}) \right) = F(x, t, \varepsilon), \quad (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+^* \\ u^\varepsilon(x, 0) - u^{(1)}(x, 0, \varepsilon) = 0, \quad x \in (0, 1), \\ u^\varepsilon(0, t) - u^{(1)}(0, t, \varepsilon) = u^\varepsilon(1, t) - u^{(1)}(1, t, \varepsilon) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+^* \\ \frac{\partial}{\partial t} (u^{(1)}(x, 0) - u^{(1)}(x, 0, \varepsilon)) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad t \in \mathbb{R}_+^* \end{array} \right. \quad (5.41)$$

Temos então que enunciar o Princípio do máximo para equações hiperbólicas, assim

**Teorema 5.** (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989) *Seja  $u \in H_0^1(\Omega \times (0, T))$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , a solução generalizada do problema*

$$\left\{ \begin{array}{l} R(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + S(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( A_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + A_{ij}(x, t) u \right) + B_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \\ + A(x, t) u = f(x, t) + \frac{\partial f_i(x, t)}{\partial x_i}, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma, \quad t \in (0, T) \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in (0, T), \\ u(x, 0) = \psi_1(x), \quad \psi_1 \in H_0^1(\Omega), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi_2(x), \quad \psi_2 \in L^2(\Omega), \end{array} \right. \quad (5.42)$$

onde  $R(x, t) > R_0 > 0$ ,  $S(x, t) > S_0 > 0$ , tais que,  $R_0$  e  $S_0$  são constantes. Os coeficientes  $A_{ij}$  satisfazem condições de simetria  $A_{ij}(x) = A_{ji}(x)$   $A_{ij}(x) \eta_i \eta_j \geq \kappa \eta_i \eta_i$ ,  $\forall \eta \in \mathbb{R}^d$ , onde  $\kappa > 0$  é uma constante. Para esta solução a seguinte estimativa é válida:

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega \times (0, T))} \leq c(T) \left( \|\psi_1(x)\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\psi_2(x)\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega \times (0, T))} + \sum_{i=1}^s \left( \|f_i\|_{L^2(\Omega \times (0, T))} + \max_{t \in [0, T]} \|f_i\|_{L^2(\Omega)} \right) \right), \quad (5.43)$$

onde  $c$  depende de  $T$ .



Ao aplicarmos o Teorema 5 em (5.41) temos, para cada  $T > 0$ ,

$$\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H_0^1([0,1] \times [0,T])} \leq c(T) \|F(x, t, \varepsilon)\|_{L^2([0,1] \times [0,T])}, \quad (5.44)$$

em que  $c(T)$  é uma constante. Teremos de (5.40) uma expressão para  $F(x, t, \varepsilon)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( J^\varepsilon(x, t) \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \right) - f(x, t) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_0(x, t) + \varepsilon u_1(x, y, t)) - f(x, t) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} \left( J(y, t) \frac{\partial}{\partial x} (u_0(x, t) + \varepsilon u_1(x, y, t)) \right) \\ &= - \frac{\partial}{\partial x} \left[ J(y, t) \frac{\partial}{\partial x} \left( u_0(x, t) + \varepsilon N_1(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right] \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( u_0(x, t) + \varepsilon N_1(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) - f(x, t) \end{aligned} \quad (5.45)$$

aplicando a regra da cadeia (3.4), sabendo que  $\widehat{J} = J(y, t) + J(y, t) \frac{\partial N_1}{\partial y}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( J^\varepsilon(x, t) \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \right) - f(x, t) &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \varepsilon N_1(y, t) \frac{\partial^3 u_0}{\partial t^2 \partial x} - \varepsilon J(y, t) N_1(y, t) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} \\ &\quad - \widehat{J}(t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} (J(y, t) N_1(y, t)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - f(x, t). \end{aligned} \quad (5.46)$$

No entanto, para obtermos  $u_2$  considerando (5.9)

$$\begin{aligned} 0 &= - \frac{\partial}{\partial x} \left( J(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( J(y, t) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( J(y, t) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) - f(x, t) + \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \\ &= - \frac{\partial}{\partial x} \left( J(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left[ J(y, t) \frac{\partial}{\partial y} \left( N_1(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right] - f(x, t) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial y} \left[ J(y, t) \frac{\partial}{\partial x} \left( N_1(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \\ &= - \frac{\partial}{\partial y} (J(y, t) N_1(y, t)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - J(y, t) \frac{\partial N_1(y, t)}{\partial y} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - J(y, t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - f(x, t) + \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \\ &= - \frac{\partial}{\partial y} (J(y, t) N_1(y, t)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \widehat{J}(t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - f(x, t) + \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

E então, de (5.47), temos

$$-f(x, t) + \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y} (J(y, t) N_1(y, t)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \widehat{J}(t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \quad (5.48)$$

substituindo (5.48) para simplificar a equação (5.46)

$$\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( J^\varepsilon(x, t) \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \right) - f(x, t) = \varepsilon N_1(y, t) \frac{\partial^3 u_0}{\partial t^2 \partial x} - \varepsilon J(y, t) N_1(y, t) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}, \quad (5.49)$$

ou seja,

$$F(x, t, \varepsilon) = -\varepsilon N_1(y, t) \frac{\partial^3 u_0}{\partial t^2 \partial x} + \varepsilon J(y, t) N_1(y, t) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}. \quad (5.50)$$

Assim, utilizamos a norma  $L^2$

$$\|u\|_{L^2([0,1] \times [0,T])} = \sqrt{\int_0^T \int_0^1 u^2 dx dt}, \quad (5.51)$$

para estimar  $\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{L^2([0,1] \times [0,T])}$ .

Substituindo  $u$  de (5.51) por  $F(x, t, \varepsilon)$  de (5.50), sabendo que  $y = \frac{x}{\varepsilon}$ , temos que

$$\|F(x, t, \varepsilon)\|_{L^2([0,1] \times [0,T])}^2 = \varepsilon^2 \int_0^T \int_0^1 \left( J(y, t) N_1(y, t) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - N_1(y, t) \frac{\partial^3 u_0}{\partial t^2 \partial x} \right)^2 dx dt. \quad (5.52)$$

Reparemos que

$$\begin{aligned} \left( J(y, t) N_1(y, t) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - N_1(y, t) \frac{\partial^3 u_0}{\partial t^2 \partial x} \right)^2 &= \left| J(y, t) N_1(y, t) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - N_1(y, t) \frac{\partial^3 u_0}{\partial t^2 \partial x} \right|^2 \\ &\leq \left( |J(y, t) N_1(y, t)| \left| \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} \right| + |N_1(y, t)| \left| \frac{\partial^3 u_0}{\partial t^2 \partial x} \right| \right)^2 \end{aligned} \quad (5.53)$$

Assumindo que  $u_0(\cdot, t) \in C^3([0, 1])$  para todo  $t \in [0, T]$  e que  $u_0(x, \cdot) \in C^1([0, T])$  temos, pelo Teorema de 2, que existe constantes  $A_1, A_2 > 0$  tais que

$$\left| \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} \right| \leq A_1, \quad \left| \frac{\partial^3 u_0}{\partial t^2 \partial x} \right| \leq A_2. \quad (5.54)$$

Veja agora que, sendo  $N_1, G \in C^1([0, \varepsilon^{-1}])$ , pelo Teorema 2, temos que existem constantes  $B_1, B_2 > 0$  tais que, para todo  $x \in [0, \varepsilon^{-1}]$ ,

$$\left| N_1\left(\frac{x}{\varepsilon}, t\right) \right| \leq B_1, \quad \left| J\left(\frac{x}{\varepsilon}, t\right) \right| \leq B_2. \quad (5.55)$$

Seguindo  $A = \max\{A_1, A_2\}$  e  $B = \max\{B_1, B_2\}$  substituindo (5.54) e (5.55) em (5.53), temos por consequência

$$\begin{aligned} \left( |J(y, t) N_1(y, t)| \left| \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} \right| + |N_1(y, t)| \left| \frac{\partial^3 u_0}{\partial t^2 \partial x} \right| \right)^2 &\leq A^2 (|J(y, t) N_1(y, t)| + |N_1(y, t)|)^2 \\ &= A^2 (J(y, t) N_1(y, t) + N_1(y, t))^2 \\ &= A^2 N_1^2(y, t) (J(y, t) + 1)^2 \\ &= A^2 B^4 \end{aligned} \quad (5.56)$$

Assim, substituindo (5.56) em (5.52), com  $y = \frac{x}{\varepsilon}$  e para todo  $x \in [0, \varepsilon^{-1}]$ ,

$$\begin{aligned} \|F\|_{L^2([0,1] \times [0,T])}^2 &\leq \varepsilon^2 A^2 B^4 T \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} dx \\ &\leq \varepsilon^2 A^2 B^4 T \frac{1}{\varepsilon} \\ &\leq \varepsilon A^2 B^4 T \end{aligned} \quad (5.57)$$

Obtemos que

$$\|F\|_{L^2([0,1] \times [0,T])} \leq \sqrt{\varepsilon} AB^2 \sqrt{T}, \quad (5.58)$$

em que  $A$  e  $B$  são constantes cuja existência é garantida pelo Teorema 2. Logo, como  $\|F\|_{L^2([0,1] \times [0,T])} = \mathcal{O}(\varepsilon)$  temos que

$$\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H_0^1([0,1] \times [0,T])} = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}). \quad (5.59)$$

Podemos mostrar de modo análogo que

$$\|u^{(1)} - u^{(0)}\|_{H_0^1([0,1] \times [0,T])} = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}). \quad (5.60)$$

A partir desses resultados e da desigualdade triangular teremos

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon - u_0\|_{H_0^1([0,1] \times [0,T])} &\leq \|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H_0^1([0,1] \times [0,T])} + \|u^{(1)} - u_0\|_{H_0^1([0,1] \times [0,T])} \\ &= \mathcal{O}(\varepsilon) + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}) \\ &= \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}) \end{aligned} \quad (5.61)$$

o qual prova a relação de proximidade (5.38), ou seja,  $u_0$  é uma boa aproximação para  $u^\varepsilon$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .  $\square$

## 5.2 Caso Contínuo por Partes com Contato Perfeito

### 5.2.1 Formulação do Problema

Temos o problema da equação da onda em um meio unidimensional microheterogêneo e microperiódico. O problema consiste em encontrar o deslocamento  $u^\varepsilon(x, t)$ , sendo  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ , o parâmetro geométrico que caracteriza a microheterogeneidade do meio. Tal fenômeno físico é modelado por

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ J^\varepsilon(x, t) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right] = f(x, t), \quad (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+^* \setminus \Gamma^\varepsilon \\ \llbracket u^\varepsilon \rrbracket = 0, \quad \left[ \left[ J^\varepsilon(x, t) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right] \right] = 0, \quad (x, t) \in \Gamma^\varepsilon \times \mathbb{R}_+^* \\ u^\varepsilon(0, t) = u^\varepsilon(1, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+^* \\ u^\varepsilon(x, 0) = v(x), \quad x \in (0, 1) \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x, 0) = q(x), \quad x \in (0, 1), \quad t \in \mathbb{R}_+^* \end{array} \right. \quad (5.62)$$

onde  $J, f, v$  e  $q$ , são funções diferenciáveis, que representam a densidade de massa, a propriedade elástica da corda, a força do corpo, e os deslocamentos e velocidades iniciais,  $J^\varepsilon(x, t)$  é  $\varepsilon$ -periódica, positiva e limitada, e ainda, devem ser satisfeitas as condições de compatibilidade  $v(0) = v(1) = 0$ . Aqui,  $J^\varepsilon$  é uma função continuamente diferenciável por partes e  $\varepsilon$ -periódica em  $x$ , positiva e limitada. O símbolo  $\llbracket \cdot \rrbracket$  representa o salto da função ao redor dos pontos de descontinuidades de  $J^\varepsilon$  reunidos em  $\Gamma^\varepsilon$ .

### 5.2.2 Método de Homogeneização Assintótica

A aplicação do MHA ocorre de maneira similar do aplicado no caso contínuo para a equação da onda(hiperbólica) dado pela equação (5.1). Vamos considerar uma expansão assintótica de segunda ordem, como feito em (5.2), da SAF do problema. Na substituição de  $u^{(2)}$  no problema (5.62), utilizamos a regra da cadeia dada por (3.4), obtemos que  $u_0(x, y, t) = u_0(x, t)$ , ou seja,  $u_0$  não depende de  $y$ . Agrupamos por potências de  $\varepsilon$  o resultado da substituição de  $u^{(2)}$  em (5.62) obtemos uma igualdade assintótica que, para ser satisfeita, os coeficientes de  $\varepsilon^{-1}$  e  $\varepsilon^0$  devem ser nulos, então teremos as equações dadas por (5.15) e (5.16), que serão complementadas com o resultado de substituir  $u^{(2)}$  nas condições de contato perfeito, ou seja,

$$\llbracket u^{(2)} \rrbracket = \varepsilon^0 \llbracket u_1 \rrbracket + \varepsilon \llbracket u_2 \rrbracket + O(\varepsilon^2), \quad (5.63)$$

e

$$\left[ \left[ J(y, t) \frac{du^{(2)}}{dx} \right] \right] = \varepsilon^0 \left[ \left[ J(y, t) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \right] + \varepsilon \left[ \left[ J(y, t) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right] \right] + O(\varepsilon^2), \quad (5.64)$$

que, para ser satisfeita, os coeficientes de  $\varepsilon^0$  e  $\varepsilon$  devem ser nulos, de onde:

$$\varepsilon^0 : \llbracket u_1 \rrbracket = 0, \quad \left[ \left[ J(y, t) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \right] = 0, \quad (5.65)$$

$$\varepsilon : \llbracket u_2 \rrbracket = 0, \quad \left[ \left[ J(y, t) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right] \right] = 0. \quad (5.66)$$

Obtemos  $u_1$  e  $u_2$ , respectivamente, e estabelecendo assim uma sequência de problemas, dadas por

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} \left[ J(y, t) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right] = -\frac{\partial}{\partial y} \left[ J(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right] \\ \llbracket u_1 \rrbracket = 0, \quad \llbracket J(y, t) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \rrbracket = 0 \\ u_1(0, 0, t) = u_1 \left( 1, \frac{1}{\varepsilon}, t \right) = 0, \\ u_1 \left( x, \frac{x}{\varepsilon}, 0 \right) = 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} \left( x, \frac{x}{\varepsilon}, 0 \right) = 0, \end{array} \right. \quad (5.67)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} \left[ J(y, t) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right] = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ J(y, t) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ J(y, t) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right] + \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - f(x, t) \\ \llbracket u_2 \rrbracket = 0, \quad \llbracket J(y, t) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \rrbracket = 0 \\ u_2(0, 0, t) = u_2 \left( 1, \frac{1}{\varepsilon}, t \right) = 0, \\ u_2 \left( x, \frac{x}{\varepsilon}, 0 \right) = 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} \left( x, \frac{x}{\varepsilon}, 0 \right) = 0. \end{array} \right. \quad (5.68)$$

Assim, de aplicar o Lema 2 em (5.67), tendo que  $a \equiv J(y, t)$  e  $F_0 \equiv 0$ , então  $\langle F_0 \rangle = 0$  obtemos a existência e unicidade solução 1-periódica de  $u_1$  em relação a variável  $y$  e utilizando separação de variáveis, supomos que  $u_1(x, y, t) = N_1(y, t) \frac{\partial u_0}{\partial x}$ , sabendo que  $\frac{\partial u_0}{\partial x} \neq 0$  encontramos então a equação do problema local. Complementando com as condições de contato perfeito,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} \left( J(y, t) \frac{\partial N_1(y, t)}{\partial y} \right) = -\frac{\partial J(y, t)}{\partial y}, \quad y \in (0, 1) \setminus \Gamma, \quad t > 0, \\ \llbracket N_1(y, t) \rrbracket = 0, \quad \llbracket J(y, t) \left( \frac{\partial N_1(y, t)}{\partial y} + 1 \right) \rrbracket = 0, \quad y \in \Gamma, \quad t > 0, \\ 0 = N_1(0, t) = N_1(1, t), \quad t > 0. \end{array} \right. \quad (5.69)$$

Aplicando o Lema 2 em (4.80), considerando  $F_0 \equiv 0 \Rightarrow \langle F_0 \rangle = 0$ , assim podemos verificar a existência de solução 1-periódica de  $N_1(y, t)$ . Levando em conta a 1-periodicidade de  $J(y, t)$  e sabendo que  $J(y, t) > 0$ , conseguindo assim a solução do problema local  $N_1(y, t)$ ,

$$N_1(y, t) = \int_0^y \left( \frac{\hat{J}(t)}{J(s, t)} - 1 \right) ds, \quad (5.70)$$

logo substituindo  $\overline{N_1(y, t)}$  em  $u_1$ ,

$$u_1(x, y, t) = \frac{\partial u_0}{\partial x} \int_0^y \left( \frac{\widehat{J}(t)}{J(s, t)} - 1 \right) ds. \quad (5.71)$$

Assim, substituindo  $u_0$  e  $u_1$  no problema (4.79) podemos agora encontrar  $u_2$ . Fazendo manipulações e aplicando o Lema 2, sabendo que  $N \equiv u_2$ ,

$$\begin{aligned} F_0 &\equiv -J(y, t) \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - f(x, t) \\ &= -J(y, t) \left[ \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} N_1(y, t) \right) \right] + \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - f(x, t) \\ &= -J(y, t) \frac{d^2 u_0}{dx^2} \left( \frac{\partial N_1(y, t)}{\partial y} + 1 \right) + \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - f(x, t) \end{aligned}$$

e  $F_1 \equiv J(y, t) \frac{\partial u_1}{\partial x}$ , logo para obtermos que  $\langle F_0 \rangle = 0$  segue que a condição necessária e suficiente para que exista  $u_2$  solução 1-periódica é que

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle -\widehat{J}(t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} (J(y, t) N_1(y, t)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - f(x, t) \right\rangle, \\ &= -\left\langle \widehat{J}(t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial y} (J(y, t) N_1(y, t)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \right\rangle - \langle f(x, t) \rangle, \\ &= -\left\langle \frac{\partial}{\partial y} (J(y, t) N_1(y, t)) \right\rangle \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \widehat{J}(t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - f(x, t) \\ &= -\widehat{J}(t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - f(x, t), \end{aligned} \quad (5.72)$$

pois  $J(y, t)$  e  $N_1(y, t)$  são 1-periódicos com respeito a  $y$  e  $t$ , obtendo a mesma equação do problema homogeneizado dada por (5.30). Logo, a exigência para a existência e unicidade da solução  $u_2$  está realizada, então a equação para  $u_2$  é simplificada, como feito em (5.32), para

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( J(y, t) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} (J(y, t) N_1(y, t)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}. \quad (5.73)$$

Considerando os passos de (3.61)-(3.67), supondo que  $u_2(x, y, t) = N_2(y, t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}$ , tendo em mente que  $\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \neq 0$ , complementando com as condições de contato per-

feito, temos então o segundo problema local

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} \left[ J(y, t) \left( \frac{\partial N_2(y, t)}{\partial y} + N_1(y, t) \right) \right] = 0, \quad y \in (0, 1) \setminus \Gamma, \quad t > 0, \\ \llbracket N_2(y, t) \rrbracket = 0, \quad \llbracket J(y, t) \left( \frac{\partial N_2(y, t)}{\partial y} + N_1(y, t) \right) \rrbracket = 0, \quad y \in \Gamma, \quad t > 0, \\ N_2(0, t) = 0, \quad t > 0. \end{array} \right. \quad (5.74)$$

Assim, aplicando o Lema 2 em (3.114), utilizando  $N \equiv N_2$ ,  $F_1 \equiv -J(y, t)N_1(y, t)$  e  $F_0 \equiv 0$ , então temos que cumprimos a exigência para a existência e unicidade de soluções de  $N_2(y, t)$  1-periódicas. Atentando para os passos de (3.42)-(3.53), pelo cálculo da média da condição do Lema 2 obtemos  $N_2(y, t)$

$$N_2(y, t) = \int_0^y \left( \langle N_1(y, t) \rangle \frac{\hat{J}(t)}{J(s, t)} - N_1(s, t) \right) ds. \quad (5.75)$$

Assim,  $u_2(x, y, t)$  será

$$u_2(x, y) = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \int_0^y \left( \langle N_1(y, t) \rangle \frac{\hat{J}}{J(s, t)} - N_1(s, t) \right) ds. \quad (5.76)$$

Portanto, a partir das equações para  $u_1(x, y)$  e  $u_2(x, y)$  a SAF pode ser escrita como

$$u^\varepsilon(x) \approx u^{(2)}(x, \varepsilon, t) = u_0(x, t) + \varepsilon N_1\left(\frac{x}{\varepsilon}, t\right) \frac{\partial u_0}{\partial x} + \varepsilon^2 N_2\left(\frac{x}{\varepsilon}, t\right) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}. \quad (5.77)$$

### 5.2.3 Proximidade entre as soluções

Podemos estabelecer uma relação de proximidade entre a solução do problema original  $u^\varepsilon$  e a solução do problema homogeneizado  $u_0$  para avaliar quão boa aproximação é  $u_0$  de  $u^\varepsilon$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Especificamente, vamos provar que para todo  $T > 0$  fixo, cumprimos

$$\|u^\varepsilon - u_0\|_{H_0^1([0,1] \times [0,T])} = O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (5.78)$$

onde  $H^1(\Omega)$  é o espaço das funções de  $L^2(\Omega)$  (funções de quadrado integrável) cujas derivadas de primeira ordem também são de  $L^2(\Omega)$ .

#### Demonstração:

Substituindo a assintótica (5.77) truncada em  $u^{(1)}$  no problema original (5.62) te-

mos, para cada  $\varepsilon > 0$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ J^\varepsilon(x, t) \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \right] = f(x, t) - F(x, t, \varepsilon), (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+^* \\ \llbracket u^{(1)} \rrbracket = 0, \left\llbracket J^\varepsilon(x, t) \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \right\rrbracket = 0, (x, t) \in \Gamma^\varepsilon \times \mathbb{R}_+^* \\ u^{(1)}(x, 0, \varepsilon) = v(x), \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t}(x, 0, \varepsilon) = q(x), x \in (0, 1), t \in \mathbb{R}_+^* \\ u^{(1)}(0, t, \varepsilon) = u^{(1)}(1, t, \varepsilon) = 0, t \in \mathbb{R}_+^* \end{array} \right. \quad (5.79)$$

onde  $F$  é erro de tomar  $u^{(1)}$  como solução de (5.62). Subtraindo (5.79) de (5.62) temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(u^\varepsilon - u^{(1)}) - \frac{\partial}{\partial x} \left[ J^\varepsilon(x, t) \frac{\partial}{\partial x}(u^\varepsilon - u^{(1)}) \right] = F(x, t, \varepsilon), (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+^* \\ \llbracket u^\varepsilon - u^{(1)} \rrbracket = 0, \left\llbracket J^\varepsilon(x, t) \frac{\partial}{\partial x}(u^\varepsilon - u^{(1)}) \right\rrbracket = 0, (x, t) \in \Gamma^\varepsilon \times \mathbb{R}_+^* \\ u^\varepsilon(x, 0) - u^{(1)}(x, 0, \varepsilon) = 0, x \in (0, 1) \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x, 0) - \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t}(x, 0, \varepsilon) = 0, (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+^* \\ u^\varepsilon(0, t) - u^{(1)}(0, t, \varepsilon) = u^\varepsilon(1, t) - u^{(1)}(1, t, \varepsilon) = 0, t \in \mathbb{R}_+^* \end{array} \right. \quad (5.80)$$

Ao aplicarmos o Teorema 5 em (5.80) temos, para cada  $T > 0$ ,

$$\|u^\varepsilon - u^{(2)}\|_{H_0^1([0,1] \times [0,T])} \leq c(T) \|F\|_{L^2([0,1] \times [0,T])}, \quad (5.81)$$

onde  $c(T)$  é uma constante.

Provamos que, fazendo os mesmos passos da proximidade no contínuo dados por (5.45)-(5.57), temos que

$$\|F\|_{L^2([0,1] \times [0,T])} \leq \varepsilon AB^2 \sqrt{T}, \quad (5.82)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes cuja existência é garantida pelo Teorema 2. Logo, como  $\|F\|_{L^2([0,1] \times [0,T])} = O(\sqrt{\varepsilon})$  temos que

$$\|u^\varepsilon - u^{(2)}\|_{H_0^1([0,1] \times [0,T])} = O(\sqrt{\varepsilon}). \quad (5.83)$$

Podemos mostrar de modo análogo que

$$\|u^{(2)} - u_0\|_{H_0^1([0,1] \times [0,T])} = O(\sqrt{\varepsilon}). \quad (5.84)$$



A partir desses resultados e da desigualdade triangular teremos

$$\begin{aligned}
 \|u^\varepsilon - u_0\|_{H_0^1([0,1] \times [0,T])} &\leq \|u^\varepsilon - u^{(2)}\|_{H_0^1([0,1] \times [0,T])} + \|u^{(2)} - u_0\|_{H_0^1([0,1] \times [0,T])}, \\
 &= O(\sqrt{\varepsilon}) + O(\sqrt{\varepsilon}), \\
 &= O(\sqrt{\varepsilon}),
 \end{aligned} \tag{5.85}$$

o qual prova a relação de proximidade (5.80), ou seja,  $u_0$  é uma boa aproximação para  $u^\varepsilon$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

## 6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Nesta dissertação aplicamos o método de homogeneização assintótica a problemas unidimensionais, provamos a proximidade entre a solução exata  $u^\varepsilon$ , assintótica formal  $u^{(1)}$  e a solução do problema homogeneizado  $u_0$  para os casos elíptico, parabólico e hiperbólico para o caso contínuo e contínuo por partes com contato perfeito e com contato imperfeito (somente para o caso elíptico). Através disso mostramos que o método é realmente eficaz, pelo fato de que  $u^\varepsilon \rightarrow u_0$  e  $u^{(1)} \rightarrow u_0$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . No Capítulo 2 damos uma breve introdução para começarmos a aplicação do MHA nas equações. No Capítulo 3 tivemos a equação elíptica aplicamos o MHA, no caso contínuo e contínuo por partes e provamos a proximidade das soluções do problema original  $u^\varepsilon$ , homogeneizado  $u_0$  e da SAF  $u^{(2)}$ . Ainda comparamos o caso contínuo com o contínuo por partes com contato perfeito a partir de um exemplo ilustrativo. Tivemos o início da aplicação do MHA na equação elíptica com contato imperfeito.

No Capítulo 4 aplicamos o MHA na equação parabólica para o caso contínuo e contínuo por partes com contato perfeito, ambas com a demonstração da proximidade e um exemplo para o caso contínuo.

No Capítulo 5 tivemos a aplicação do MHA na equação hiperbólica também nos casos contínuo e contínuo por partes e suas demonstrações da proximidade.

Os trabalhos futuros se darão de aplicar o MHA, provar e ilustrar a proximidade das soluções para os casos parabólico e hiperbólico para os casos com contato imperfeito a fim de se obter modelos o mais realistas possível.

Os resultados contidos nesta dissertação foram apresentados/publicados em diversos eventos da área. São estes:

- *Homogeneização assintótica de um problema de valor de contorno para a equação do calor estacionária unidimensional com coeficientes descontínuos e periódicos*

Apresentado e publicado no XXIV Congresso de Iniciação Científica - 21 à 26 de setembro de 2015, UFPel - Pelotas/RS

Disponível em: [http://cti.ufpel.edu.br/siepe/arquivos/2015/CE\\_02563.pdf](http://cti.ufpel.edu.br/siepe/arquivos/2015/CE_02563.pdf)

- *Sobre a condução do calor em um meio microperiódico*

Apresentado no IV Colóquio de Matemática da Região Sul - 02 à 06 de maio de 2016, FURG - Rio Grande/RS

Disponível em: <http://www.sbm.org.br/coloquio-sul-4/>
- *Homogeneização assintótica*

Apresentado e publicado no XXII Encontro Regional de estudantes de matemática do Sul (Erematsul) - 21 à 23 de julho de 2016, Uniandrade - Curitiba/PR

Disponível em: [https://www.dropbox.com/s/k6ly3g23bbuintm/CC\\_02897969032-vers%C3%A3o%20identificada.pdf?dl=0](https://www.dropbox.com/s/k6ly3g23bbuintm/CC_02897969032-vers%C3%A3o%20identificada.pdf?dl=0)
- *Homogeneização assintótica de um problema para equação do calor unidimensional com coeficiente microperiódico contínuo por partes*

Apresentado e publicado no XXII Encontro Regional de estudantes de matemática do Sul (Erematsul) - 21 à 23 de julho de 2016, Uniandrade - Curitiba/PR

Disponível em: [https://www.dropbox.com/s/3duqux10d4v359d/P0\\_02897969032-vers%C3%A3o%20identificada.pdf?dl=0](https://www.dropbox.com/s/3duqux10d4v359d/P0_02897969032-vers%C3%A3o%20identificada.pdf?dl=0)
- *Homogeneização assintótica de micro-compósitos com contacto imperfeito entre as fases constituintes*

Apresentado e publicado no XXV Congresso de Iniciação Científica - 26 à 30 de setembro de 2016, UFPel - Pelotas/RS

Disponível em: [http://cti.ufpel.edu.br/siepe/arquivos/2016/CE\\_03932.pdf](http://cti.ufpel.edu.br/siepe/arquivos/2016/CE_03932.pdf)
- *Homogeneização assintótica no estudo da evolução do comportamento efetivo de compósitos condutivos microperiódicos com contato térmico imperfeito*

Aceito no II Congresso Brasileiro de Jovens Pesquisadores em Matemática Pura e Aplicada - 5 à 7 de dezembro de 2016, Unicamp - Campinas/SP

<http://jovens.ime.unicamp.br/>
- *Homogeneização assintótica de um problema com descontinuidades de Kapitza*

Apresentado na III Jornada de Matemática e Matemática Aplicada - 5 à 7 de junho de 2017, UFSM - Santa Maria/RS
- *Homogeneização Assintótica de um problema de valor de contorno para equação hiperbólica unidimensional com coeficientes contínuos e periódicos*

Apresentado e publicado no XX Encontro de Pós-Graduação - 22 à 26 de outubro de 2018, UFPel - Pelotas/RS

Disponível em: [http://cti.ufpel.edu.br/siepe/arquivos/2018/CE\\_02444.pdf](http://cti.ufpel.edu.br/siepe/arquivos/2018/CE_02444.pdf)

- *Homogeneização Assintótica de um problema de valor de contorno para equação hiperbólica unidimensional com coeficientes microperiódicos contínuos por partes*

Apresentado no III Congresso Brasileiro de Jovens Pesquisadores em Matemática Pura, Aplicada e Estatística - 12 à 14 de dezembro de 2018, UFPR - Curitiba/PR

Disponível em: <http://jovens.ufpr.br/>

- *Influência da imperfeição no comportamento efetivo para a equação hiperbólica*

Apresentado no XXXIX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC 2019) - 16 à 20 de setembro de 2019, UFU - Uberlândia/MG.

Disponível em: <https://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/article/view/2890>

## REFERÊNCIAS

ÁLVAREZ-BORGES, F.; BRAVO-CASTILLERO, J.; CRUZ, M.; GUINOVART-DÍAZ, R.; PÉREZ-FERNÁNDEZ, L.; RODRÍGUEZ-RAMOS, R.; SABINA, F. Reiterated homogenization of a laminate with imperfect contact: gain-enhancement of effective properties. **Applied Mathematics and Mechanics**, [S.l.], v.39, n.8, p.1119–1146, 2018.

BAKHVALOV, N.; PANASENKO, N. **Homogenization**: averaging processes in periodic media: mathematical problems in the mechanics of composite materials. [S.l.]: Kluwer Academic Dordrecht, 1989.

DÉCIO JÚNIOR, R. M. S. **Homogeneização matemática de meios unidimensionais microperiódicos lineares e não lineares**. 2019. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) — Universidade Federal de Pelotas.

EINSTEIN, A. Eine neue bestimmung der moleküldimensionen. **Annalen der Physik**, [S.l.], v.324, n.2, p.289–306, 1906.

KUDRIAVTSEV, L. D. **Curso de análisis matemático**. [S.l.]: MIR, 1983.

LARSSON, S.; THOMÉE, V. **Partial differential equations with numerical methods**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2008. v.45.

LEITZKE, B. S. **Soluções assintóticas formais de segunda ordem na homogeneização assintótica de meios microperiódicos**. 2017. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) — Universidade Federal de Pelotas.

LIMA, M. P. **Homogeneização matemática de meios micro-heterogêneos com estrutura periódica**. 2016. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) — Universidade Federal de Pelotas.

MAXWELL, J. C. **A treatise on electricity and magnetism**. [S.l.]: Oxford: Clarendon Press, 1873. v.1.

PANASENKO, G. Homogenization for periodic media: from microscale to macroscale. **Physics of Atomic Nuclei**, [S.l.], v.71, n.4, p.681–694, 2008.

RAYLEIGH, L. On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, [S.l.], v.34, n.211, p.481–502, 1892.

SADD, M. H. **Elasticity**: theory, applications, and numerics. [S.l.]: Academic Press, 2009.

SILVA, U. P. **Um Estudo do Método de Homogeneização Assimptótica Visando Aplicações na Estruturas Ósseas**. 2009. Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação e Área de concentração Interunidades em Bioengenharia) — Escola de Engenharia de São Carlos, Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto e Instituto de Química de São Carlos da Universidade de São Paulo.

TORQUATO, S. **Random heterogeneous materials**: microstructure and macroscopic properties. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2001.

**Homogeneização assintótica de meios micro-  
periódicos unidimensionais com diferentes  
condições de contato – Larissa Nunes Meirelles  
da Luz**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS**  
Instituto de Física e Matemática  
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática



Dissertação

**Homogeneização assintótica de meios microperiódicos  
unidimensionais com diferentes condições de contato**

**LARISSA NUNES MEIRELLES DA LUZ**

Pelotas, 2020