

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
Instituto de Física e Matemática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática



Dissertação

**HOMOGENEIZAÇÃO ASSINTÓTICA COM TRANSFORMADA DE LAPLACE NA
MODELAGEM DE MEIOS MICROPERIÓDICOS**

Amanda Mallüe Ferreira

Pelotas, 2019

Amanda Mallüe Ferreira

**HOMOGENEIZAÇÃO ASSINTÓTICA COM TRANSFORMADA DE LAPLACE NA
MODELAGEM DE MEIOS MICROPERIÓDICOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática

Orientador: Prof. Dr. Camila Pinto da Costa
Coorientador: Prof. Dr. Leslie D. Pérez Fernández

Pelotas, 2019

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas
Catalogação na Publicação

F384h Ferreira, Amanda Mallüe

Homogeneização assintótica com transformada de Laplace na modelagem de meios microperiódicos / Amanda Mallüe Ferreira ; Camila Pinto da Costa, orientadora ; Leslie Darien Pérez Fernández, coorientador. — Pelotas, 2019.

125 f.

Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2019.

1. Transformada de Laplace. 2. MHA. 3. ADMM. I. Costa, Camila Pinto da, orient. II. Fernández, Leslie Darien Pérez, coorient. III. Título.

CDD : 515.723

**Homogeneização Assintótica com transformada de Laplace na modelagem de meios
microperiódicos.**

por

Amanda Mallie Ferreira

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, PPGMMat, do Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Modelagem Matemática

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Camila Pinto da Costa – Orientadora (UFPel)

Prof. Dr. Leslie Darien Pérez Fernández – Co-Orientador (UFPel)

Prof. Dr. Alexandre Molter (UFPel)

Prof. Dr. Glenio Aguiar Gonçalves (UFPel)

Profa. Dra. Rejane Pergher (UFPel)

Pelotas, 25 de abril de 2019.

**“O que sabemos não é muito. O que não sabemos é imenso”
Pierre Simon Laplace**

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus, por me conceder sabedoria nas escolhas dos melhores caminhos, coragem para acreditar, força para não desistir e proteção para me amparar, e também por ter colocado pessoas tão especiais na minha vida.

Aos meus pais por todo apoio e dedicação, pelo amor, confiança e motivação incondicional. Que sempre me impulsiona em direção às vitórias dos meus desafios. Ao meu irmão Tiago, a minha Cunhada, ao meu noivo, e minha vó. Enfim, a todos amigos e familiares que sempre se fazem presente nessa minha caminhada, aqui mais um degrau dessa longa escada do conhecimento, onde não conseguiria ter atingido minhas metas sem vocês ao meu lado.

A minha Orientadora Prof. Dra. Camila Pinto da Costa, e meu Co-orientador Prof. Dr. Leslie D. Pérez Fernández, por toda a paciência, empenho e sentido prático com que sempre me orientaram neste trabalho. Vocês foram e são referências profissionais e pessoais para meu crescimento. Obrigada por estarem ao meu lado e acreditarem em mim!

Aos meus colegas do Mestrado, que fizeram parte da minha trajetória aqui, e tornaram os momentos de estudo menos massantes, sempre apoiando, motivando e dispostos a ajudar, além disso das novas amizades que vou levar para toda vida. Agradeço também ao PPGMMat por ter me dado a oportunidade de aperfeiçoar meus conhecimentos, a todos os professores do programa pelos ensinamentos, e também as críticas construtivas que me fizeram evoluir. Agradeço, também, à CAPES pelo apoio financeiro.

**Eu tentei 99 vezes e falhei,
mas na centésima tentativa
eu consegui, nunca desista de
seus objetivos mesmo que
esses pareçam impossíveis a
última tentativa pode ser a
vitoriosa!**

— ALBERT EINSTEIN

RESUMO

MALLÛE FERREIRA, Amanda. **HOMOGENEIZAÇÃO ASSINTÓTICA COM TRANSFORMADA DE LAPLACE NA MODELAGEM DE MEIOS MICROPERIÓDICOS.** 2019. 125 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2019.

Este trabalho inicia nosso estudo sobre a combinação de transformadas integrais com homogeneização matemática em uma metodologia integradora, visando simplificar a resolução de equações diferenciais em derivadas parciais com coeficientes rapidamente oscilantes, e problemas de valores de contorno e/ou iniciais. Especificamente, foram estudadas as seguintes ferramentas matemáticas: a transformada de Laplace, o método de homogeneização assintótica (MHA) e o método multicamadas de advecção-difusão (ADMM). Primeiramente, apresentamos uma breve introdução sobre o método da transformada de Laplace, contendo: sua definição, propriedades principais e inversão de forma analítica. Ainda, é desenvolvido um exemplo no qual resolvemos um problema de valores de contorno e iniciais para a equação do calor empregando as transformadas de Laplace direta e inversa. Além disso, estudamos o algoritmo de Talbot Fixo para a inversão numérica da transformada de Laplace. Deste algoritmo, analisamos a sua precisão e a sua convergência, para o qual foram empregadas funções teste e avaliado o erro máximo absoluto para vários valores dos parâmetros relevantes. A seguir, apresentamos detalhadamente o desenvolvimento do MHA no caso de um problema de valores de contorno para a equação elíptica não homogênea com coeficiente periódico, que descreve um campo térmico estacionário. Ainda, são mostrados os resultados da combinação da transformada de Laplace com o MHA para resolver formalmente um problema de valores de contorno e inicial para a equação parabólica não homogênea com coeficiente periódico. Especificamente, a equação resultante após aplicar a transformada de Laplace é uma equação elíptica, similar à apresentada anteriormente e contendo um termo advectivo e, por isso, a aplicação do MHA é quase imediata. Logo, do ADMM é apresentado o desenvolvimento da discretização para uma camada, duas camadas e n -camadas, e sua aplicação é ilustrada mediante a um exemplo numérico. Finalmente, comparamos a aplicação pura do ADMM e a combinação com o MHA para resolver um problema de valores de contorno e inicial para a equação do calor não homogênea, com coeficientes periódicos. Um exemplo é resolvido detalhadamente, incluindo o uso do algoritmo Talbot Fixo. A precisão e o custo computacional de ambas as abordagens são aferidas.

Palavras-chave: Transformada de Laplace, MHA, ADMM.

ABSTRACT

MALLÜE FERREIRA, Amanda. **ASSYTICAL HOMOGENIZATION WITH LAPLACE TRANSFORMATION IN THE MODELING OF MICROPERIODIC MEDIA..** 2019. 125 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2019.

This work starts our study on the combination of complete transforms with homogenization in an integrative methodology aiming at simplifying the resolution of differential equations in partial derivatives with rapidly oscillating coefficients, and problems of boundary and / or initial values. Specifically, the following mathematical tools were studied: Laplace transform, the asymptotic homogenization method (MHA), and the method multilayer advection-diffusion (ADMM). First, we present a brief introduction on the Laplace transform method, containing: its definition, principal properties and analytical inversion. Furthermore, an example is developed in which we solve a problem of initial and boundary values for the heat equation using the direct and inverse Laplace transforms, and the solution obtained is validated by solving the same problem by separating variables. In addition, we studied the fixed Talbot algorithm for the numerical inversion of the Laplace transform. From this algorithm we analyze its precision and its convergence, for which test functions were employed and evaluating the absolute maximum error for several values of the relevant parameters. Next, we present in detail the development of MHA in the case of a problem of boundary values for the nonhomogeneous elliptic equation with periodic coefficient that describes a thermal field stationary. In addition, the results of the combination of Laplace transform with the MHA to formally solve a problem of initial and boundary values for the nonhomogeneous parabolic equation with periodic coefficient. Specifically, the equation resulting from applying the transform of Laplace is an elliptic equation similar to that presented previously and containing an advective term and, therefore, the application of MHA is almost immediate. Therefore, the development of discretization for one layer, two layers and n-layers is presented in the ADMM, and its application is illustrated by means of a numerical example. Finally, the pure application of the ADMM and the combination with the MHA is compared to solve a problem of initial and boundary values for the nonhomogeneous heat equation with periodic coefficients. An example is resolved in detail, including the use of the Fixed Talbot algorithm, and the accuracy and computational cost of both approaches are checked.

Keywords: Laplace transform, AHM, ADMM.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Exemplo de meio heterogêneo encontrado na natureza (osso). . . .	16
Figura 2	Fluxograma do Trabalho.	19
Figura 3	Distribuição de temperatura em duas dimensões, para $t = 0$	26
Figura 4	Distribuição de temperatura em duas dimensões para diferentes instantes de tempo.	27
Figura 5	Distribuição de temperatura em três dimensões.	27
Figura 6	Comparação entre a função original e a obtida pelo método de Talbot Fixo para $f(t) = \text{sen}(t)$	29
Figura 7	Comparação entre a função original e a obtida pelo método de Talbot Fixo para $f(t) = e^t$	30
Figura 8	Comparação entre a função original e a obtida pelo método de Talbot Fixo para $f(t) = \text{cosh}(t)$	31
Figura 9	Variação do coeficiente de condutividade, para diferentes valores de ε	46
Figura 10	Perfis espaciais de u_0 e $u^{(1)}$	47
Figura 11	Perfis espaciais para $u(x, t)$ para $N = 2$, e diferentes valores de tempo.	102
Figura 12	Perfis espaciais $u(x, t)$ para diferentes valores de N , e diferentes valores de tempo.	103
Figura 13	Oscilação rápida de $k^\varepsilon, \varepsilon \rightarrow 0^+$ e a ilustração da sua aproximação por partes.	109
Figura 14	Perfis espaciais de $u^\varepsilon(x, t)$ (5.13) e $u_0(x, t)$ (5.27) para $t = 5$ e $m = 10$, para diferentes valores de ε	110
Figura 15	Perfis temporais de $u^\varepsilon(x, t)$ (5.13) e $u_0(x, t)$ (5.27) para $x = 0.7$ e $m = 10$, para diferentes valores de ε	111

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Erro máximo absoluto entre a função original e a aproximada pelo método Talbot Fixo para $f(t) = \text{sen}(t)$	29
Tabela 2	Erro máximo absoluto entre a função original e a aproximada pelo método Talbot Fixo para $f(t) = e^t$	30
Tabela 3	Erro máximo absoluto entre a função original e a aproximada pelo método Talbot Fixo para $f(t) = \text{cosh}(t)$	30
Tabela 4	Precisão de \hat{k} com estimativas via (5.21) em comparação com o valor exato $\hat{k} = \sqrt{15/4} \approx 0.96824$	109
Tabela 5	Precisão e custo computacional dos perfis espaciais na Figura 14. .	110
Tabela 6	Precisão e custo computacional dos perfis temporais dados na Figura 15.	112

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ADMM	Método Multicamadas de Advecção-Difusão
EA	Expansão Assintótica
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial em Derivadas Parciais
GILTT	Generalização da Técnica da Transformada Integral de Laplace
MHA	Método de Homogeneização Assintótica
NC	Não Converge
PH	Problema Homogeneizado
PL	Problema Local
PVI	Problema de valor inicial
PVIC	Problema de valores iniciais e de contorno
SAF	Solução Assintótica Formal

LISTA DE SÍMBOLOS

Caracteres latinos

a^ε	Coeficiente de condutividade.
\hat{a}	Coeficiente efetivo
B_ε	Espaço normado
D_j	Derivada parcial em relação ao j -ésimo argumento.
i	Unidade imaginária $i = \sqrt{-1}$
k^ε	Coeficiente rapidamente oscilante $k^\varepsilon(x) = k(x/\varepsilon) = k(y)$
\hat{k}	Coeficiente Efetivo
k^2	Difusividade térmica
l	Comprimento característico da escala microscópica
L	Comprimento característico da escala macroscópica
m	Número de subintervalos
\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais
N_j	Solução do j -ésimo problema local
N_1	Solução do problema local.
N	Número de intervalos.
N_t	Parâmetro relevante do algoritmo de Talbot Fixo
\mathcal{O}	Ordem de uma função em B_ε
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
s	Variável no espaço de Laplace
t	Variável temporal
u_0	Solução do problema homogeneizado
u^n	Solução assintótica formal de ordem n
u_0	Solução do problema homogeneizado.
$u^{(\infty)}$	Série assintótica
x	Variável macroscópica, lenta ou global.

y	Variável microscópica, rápida ou local $y = x/\varepsilon$
y_p	Solução particular
$\langle \cdot \rangle$	Operador do valor médio $\langle \cdot \rangle = \int_0^1 (\cdot) dy$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produto escalar

Caracteres gregos

δ	Delta de Dirac
Δ	Determinante
Δx	Norma da partição
ε	Parâmetro geométrico pequeno ($\varepsilon \ll 1$)
\mathcal{L}	Transformada de Laplace
\mathcal{L}^ε	Operador diferencial
\mathcal{L}^{-1}	Transformada inversa de Laplace
Ω	Domínio ou região (conjunto aberto e conexo)

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	Estrutura do trabalho	18
1.2	Objetivos	20
2	TRANSFORMADA DE LAPLACE	21
2.1	Introdução	21
2.2	A transformada de Laplace	22
2.2.1	Notação	22
2.2.2	Convergência	22
2.2.3	Continuidade	22
2.2.4	Funções de ordem exponencial	23
2.3	Transformada de Laplace inversa	23
2.3.1	Unicidade das transformadas inversas de Laplace	24
2.3.2	Propriedade de Convolução	24
2.3.3	Aplicação	25
2.3.4	Inversão numérica utilizando o método Talbot Fixo	28
3	MÉTODO DE HOMOGENEIZAÇÃO ASSINTÓTICA	32
3.1	Introdução	32
3.2	Meios com estruturas heterogêneas	33
3.2.1	Definições preliminares	33
3.2.2	Ideia geral do MHA	35
3.2.3	Formalismo do MHA na Equação Elíptica	35
3.3	Combinação do MHA com a Transformada de Laplace na equação parabólica	42
3.3.1	Exemplo numérico	44
4	MÉTODO MULTICAMADAS DE ADVECCÃO-DIFUSÃO	48
4.1	Introdução	48
4.2	Formulação matemática de um problema de difusão em multicamadas	49
4.3	Solução do problema de difusão para uma camada	51
4.4	Solução para o problema de duas camadas	60
4.5	Solução do problema de difusão para n -camadas	81
4.5.1	Exemplo Numérico	96

5	UMA ABORDAGEM INTEGRADA ADMM-MHA	104
5.1	Formulação dos problemas original e ADMM	104
5.1.1	Problema Original	104
5.1.2	Método ADMM	105
5.2	Estratégias de resolução	105
5.2.1	Solução via ADMM	105
5.2.2	Estimativa via MHA	106
5.3	Exemplos Numéricos	108
6	CONCLUSÕES	113
	REFERÊNCIAS	115
7	ANEXOS	118
7.1	Prova do Lema 3.1	118
7.2	Prova do Lema 4.1	119
7.3	Prova do Lema 4.2	121
7.4	Prova do Lema 4.3	123
7.5	Prova do Lema 4.4	124

1 INTRODUÇÃO

Um material heterogêneo é formado por uma distribuição de domínios ocupados por diferentes materiais homogêneos chamados de fases (constituindo assim um compósito); ou do mesmo material em diferentes estados, como um policristal (TORQUATO, 2002); ou ainda um material funcionalmente graduado (SADD, 2009). Meios heterogêneos podem ser encontrados na natureza e em produtos manufaturados como por exemplo: dentre os meios naturais que apresentam heterogeneidade estão o osso (ver Figura 1), a atmosfera, o solo, o arenito, a madeira, os pulmões, os tecidos vegetais e animais, os agregados celulares, e tumores; e dentre os feitos pelo homem destacamos os diferentes tipos de compósitos (laminados, fibrosos, granulares ou particulados, e combinações destes), sólidos celulares, géis, espumas, ligas metálicas, microemulsões, cerâmicas e copolímeros em bloco (TORQUATO, 2002).

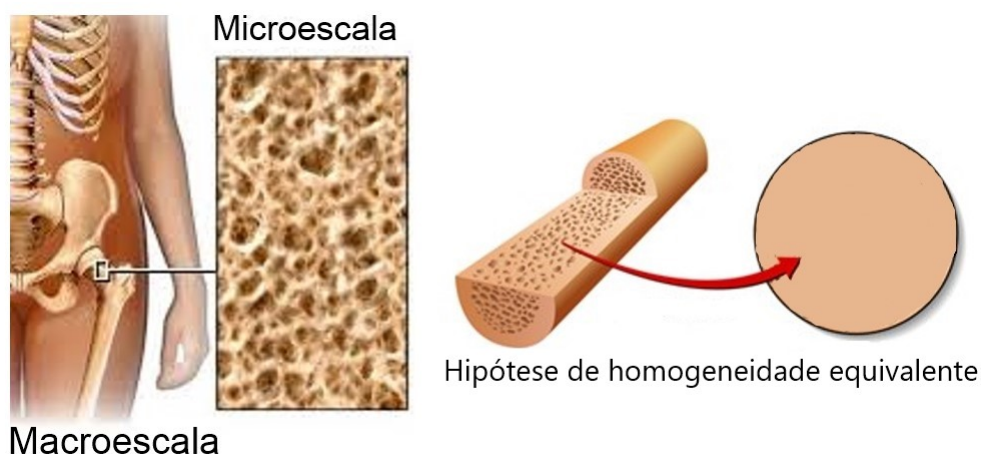


Figura 1: Exemplo de meio heterogêneo encontrado na natureza (osso).

A predição teórica das propriedades físicas de materiais heterogêneos tem uma longa história, atraindo a atenção de ícones da ciência como Maxwell, Lord Rayleigh e Einstein. Geralmente, os fenômenos físicos associados a tais propriedades ocorrem na chamada “microescala”, que pode ser da ordem de décimos de nanômetros (géis) até da ordem de metros (processos geológicos). Assim, assumimos que o comprimento característico l desta escala “microscópica” (aquela em que os domínios estão

distribuídos, ou seja, em que ocorre a heterogeneidade) é muito maior que aquele da escala molecular, mas muito menor que o comprimento L característico da escala macroscópica. Em tais situações, dizemos que o material heterogêneo apresenta separação de escalas estruturais caracterizada pelo parâmetro $\varepsilon = l/L \ll 1$. Suas propriedades variam rapidamente com relação ao compósito, e cumpre a hipótese do contínuo, ou seja, ele pode ser visto como um contínuo na escala microscópica e, portanto, propriedades macroscópicas ou efetivas podem lhe ser atribuídas (TORQUATO, 2002). Mais precisamente, a hipótese da homogeneidade equivalente estabelece que, na macroescala, o material heterogêneo é fisicamente equivalente a certo material homogêneo ideal, de maneira que as propriedades efetivas do primeiro são as propriedades do segundo (PANASENKO, 2008). Assim, ao processo de obtenção do comportamento efetivo do material heterogêneo damos o nome de “homogeneização”. Formalmente, queremos encontrar uma solução assintótica das EDPs dependentes do parâmetro pequeno ε e com coeficientes rapidamente oscilantes, que modelam o comportamento constitutivo do meio heterogêneo. Assim, a hipótese de homogeneidade equivalente será válida se a solução do problema que modela o material heterogêneo é ε -próxima (com relação a uma certa norma), da solução do problema que modela o material homogêneo equivalente (PANASENKO, 2008).

Por outro lado, problemas em várias variáveis espaciais e/ou temporais podem apresentar grande complexidade na sua resolução analítica. Neste sentido, diversos pesquisadores têm utilizado transformadas integrais, fundamentalmente as de Fourier e Laplace, para simplificar a resolução do problema a ser homogeneizado. Por exemplo, a transformada de Fourier é empregada por: BRENNER; BRAVO-CASTILLERO (2010), CAPDEVILLE; ZHAO; CUPILLARD (2015), CONCA; VANNINATHAN (2002), NGUYEN; LICHT; KWEON (2011), e WELLANDER (2009); e a transformada de Laplace é usada por: AMAR et al. (2003), HUI; OSKAY (2013), NGUYEN et al. (2016), SOLYAR (2010).

Neste trabalho, pretendemos empregar técnicas matemáticas muito usadas, como o método de homogeneização assintótica (MHA) e o método multicamadas de advecção-difusão (ADMM). O MHA (ver (BENSOUSSAN; LIONS; PAPANICOLAOU, 1978), (POBEDRYA, 1984), (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989)) consiste na procura de soluções assintóticas na forma de série de funções em potências do parâmetro ε . Assim, o método transforma um problema sobre um meio micro-heterogêneo, periódico, com coeficientes rapidamente oscilantes (problema original), em outro sobre um meio homogêneo (problema homogeneizado) assintoticamente equivalente ao heterogêneo. Tal desenvolvimento assintótico é realizado em termos de potências do parâmetro geométrico ε , cujos coeficientes são funções incógnitas que dependem da microescala. Assim, o problema original é desacoplado em uma sequência recorrente de problemas para obter cada uma das funções incógnitas que formam a série

assintótica da solução procurada. Na prática, é usual considerar somente os dois primeiros termos da série assintótica, obtendo os problemas correspondentes (o problema macroscópico ou homogeneizado para o primeiro termo, e o microscópico ou local para o segundo termo).

Por outro lado, o ADMM (COSTA et al., 2006), surgiu no contexto da modelagem da dispersão de poluentes para resolver EDPs com coeficientes continuamente variáveis. Este método é baseado em uma aproximação constante por partes dos coeficientes variáveis das equações do problema e da aplicação da transformada de Laplace. Isto é, o problema original com coeficientes contínuos é aproximado por um problema com coeficientes constantes por partes, o que facilita a provisão de estimativas da solução do problema original, e também expande o escopo das aplicações do ADMM para modelar o comportamento de qualquer meio heterogêneo. Claramente, quanto mais fina for essa aproximação, constante por partes, mais precisos serão os resultados, entretanto mais esforço computacional será necessário. No entanto, em muitas aplicações os coeficientes que modelam as propriedades físicas do meio heterogêneo são rapidamente oscilantes. Portanto, a fim de capturar essa oscilação rápida dos valores dos coeficientes, e assim obter estimativas precisas da solução, a aplicação direta do ADMM exigiria discretizações de domínio muito finas, elevando o custo computacional.

Portanto, no presente trabalho, visando diminuir o custo computacional com perda mínima de precisão quando se lida com problemas com coeficientes rapidamente oscilantes, o ADMM é combinado com o método de homogeneização assintótica.

1.1 Estrutura do trabalho

Através do Fluxograma apresentado na Figura 2, podemos observar como está organizada a estrutura do trabalho:

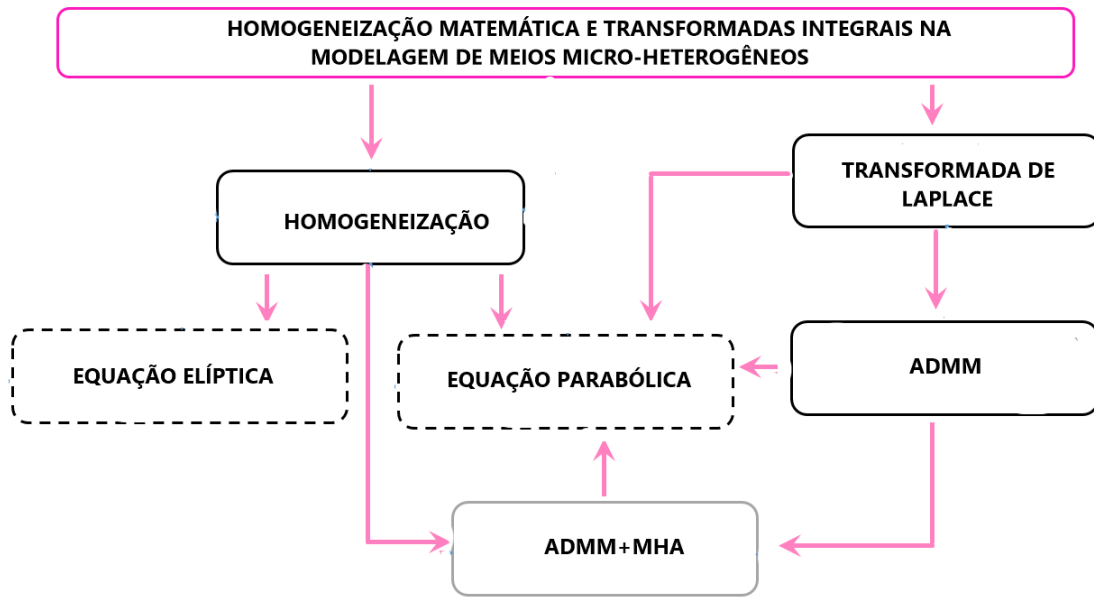


Figura 2: Fluxograma do Trabalho.

O presente trabalho está organizado em quatro capítulos, mais a presente Introdução, as Conclusões e os anexos. No Capítulo 2, mostramos um estudo da transformada de Laplace, apresentando sua definição, propriedades principais e sua inversão. Ainda, é resolvido um exemplo no qual é tomado um problema de valores de contorno e inicial para a equação do calor empregando as transformadas de Laplace direta e inversa. Além disso, estudamos o algoritmo Talbot Fixo de inversão numérica da transformada de Laplace (ABATE; VALKÓ, 2004) com relação à sua convergência e precisão.

No Capítulo 3, é apresentado detalhadamente o desenvolvimento do MHA no caso de um problema de valores de contorno para a equação elíptica não homogênea com coeficiente periódico que descreve um campo térmico estacionário. Ainda, são apresentados resultados preliminares da combinação da transformada de Laplace com o MHA para resolver formalmente um problema de valores de contorno e inicial para a equação do calor não homogênea com coeficiente periódico.

No Capítulo 4, seguindo (RODRIGO; WORTHY, 2016) detalhamos o desenvolvimento do ADMM através da discretização para uma camada, duas camadas e n -camadas, e assim obtemos a solução via transformada de Laplace inversa através de uma série de Lemas (os quais são provados nos anexos), e a partir dos resultados obtidos apresentamos o desenvolvimento de um exemplo numérico.

No Capítulo 5, comparamos a aplicação pura do ADMM e em combinação com o MHA para resolver um problema de valores de contorno e inicial para a equação do calor não homogênea com coeficientes periódicos. Um exemplo é resolvido com detalhe, incluindo o uso do algoritmo Talbot Fixo, e a análise da precisão e o custo

computacional de ambas as abordagens.

Os trabalhos desenvolvidos através do estudo e dos resultados desta dissertação, foram apresentados e publicados em eventos da área. Podemos destacar o trabalho “Homogeneização assintótica combinada com o método multicamadas de advecção-difusão para problemas de valores de contorno e iniciais com coeficientes rapidamente oscilantes”, o qual foi apresentado no 8º MCSUL e aceito para a publicação em um Special Issue do Defect and Diffusion Forum (DDF)¹. E também o trabalho apresentado no XX ENPOS, denotado por “Combinação do método da Homogeneização assintótica com a transformada de Laplace para resolver uma equação parabólica com coeficiente rapidamente oscilante”².

1.2 Objetivos

Objetivo geral:

Desenvolver uma metodologia integradora para resolver problemas de valores de contorno e/ou iniciais com EDPs que apresentam coeficientes rapidamente oscilantes e que modelam o comportamento físico de meios micro-heterogêneos periódicos mediante a combinação do MHA, a transformada de Laplace e o ADMM.

Objetivos específicos:

- Estudar a aplicação da transformada de Laplace na solução de equações diferenciais com coeficientes variáveis, incluindo estratégias numéricas de inversão.
- Estudar a aplicação do MHA para problemas dinâmicos e estáticos com coeficientes rapidamente oscilantes periódicos.
- Generalizar o método ADMM.
- Comparar as aplicações direta do MHA e em combinação com a transformada de Laplace e o ADMM para problemas dinâmicos espacialmente unidimensionais com coeficientes periódicos rapidamente oscilantes.

¹FERREIRA, A.M.; COSTA, C.; PEREZ-FERNANDEZ, L.D; BRAVO-CASTILLERO, J. Homogeneização assintótica combinada com o método multicamadas de advecção-difusão para problemas de valores de contorno e iniciais com coeficientes rapidamente oscilantes. **Anais do 8º MCSUL/VIII Semengo**, v.8, p.444-457, 2018.

²FERREIRA, A.M.; COSTA, C.; PEREZ-FERNANDEZ, L.D. Combinação do método da Homogeneização assintótica com a transformada de Laplace para resolver uma equação parabólica com coeficientes rapidamente oscilantes. **Anais do XX Encontro de Pós-graduação (Enpos/UFPEL)**,v.XX, p.CE 02102,2018.

2 TRANSFORMADA DE LAPLACE

2.1 Introdução

A teoria da transformada de Laplace, tem se tornado parte essencial da bagagem de matemáticos e engenheiros. De fato, além de ser de grande interesse teórico, a transformada de Laplace é capaz de proporcionar meios fáceis e efetivos para a solução de muitos problemas em vários campos das ciências.

Segundo SCHIFF (1999), as primeiras aparições de transformadas integrais se remontam a trabalhos pioneiros de Euler em 1763 e 1769, quem essencialmente considerou a transformada de Laplace inversa para resolver EDOs lineares de segunda ordem. Inclusive, em sua grande obra de 1812 intitulada “Théorie analytique des probabilités”, Laplace credita Euler como o criador das transformadas integrais. Logo, em 1878, foi Spitzer que chamou “de Laplace” a transformada empregada por Euler. No final do século XIX, a transformada de Laplace foi estendida a sua forma complexa por Poicaré e Pincherle, redescoberta por Petzval e estendida a duas variáveis por Picard, com pesquisas posteriores realizadas por Abel e muitos outros. Em 1910, ocorreu a primeira aplicação da forma moderna da transformada de Laplace devida a Bateman, quem transformou as equações de Rutherford para a desintegração radiativa utilizando a transformada inversa. Foi em 1920 que Bernstein introduziu a forma direta da transformada de Laplace como uma função de uma nova variável. A abordagem moderna teve grande impulso nos trabalhos de Doetsch nos anos 1920 e 1930 sobre equações diferenciais, integrais e integrodiferenciais, e que foram compilados na sua obra de 1937 intitulada “Theorie und Anwendungen der Laplace Transformation”. Ainda, no contexto da aplicação da transformada de Laplace na engenharia elétrica, Heaviside produziu uma vasta obra do que hoje é chamado de Cálculo Operacional, e que está espalhada pelos três volumes de 1894, 1899 e 1912, da sua “Electromagnetic Theory”. Dentre os esforços direcionados à formalização do Cálculo Operacional de Heaviside, Bromwich obteve a fórmula moderna da transformada inversa de Laplace que integra no plano complexo sobre uma reta localizada à direita das singularidades da função a ser invertida. Mais detalhes sobre a história da transformada de Laplace no trabalho

de TONIDANDEL; ARAÚJO (2012).

2.2 A transformada de Laplace

Suponha que f seja uma função de valor real ou complexo com relação ao tempo, a variável $t > 0$. Definimos a transformada de Laplace f como:

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^{-st} f(t) dt. \quad (2.1)$$

Dizemos que a transformada de Laplace de $f(t)$ existe, se a integral em (2.1) converge para algum valor de s , caso contrário, ela não existe (SCHIFF, 2013).

2.2.1 Notação

Se uma função de t é indicada em termos de uma letra minúscula, tal como $f(t), g(t), y(t)$, a sua transformada é denotada pela letra maiúscula correspondente, isto é, $F(s), G(s), Y(s)$, etc. Podemos utilizar também uma barra, para denotar a transformada de Laplace como por exemplo a transformada de $u(t)$ como sendo $\bar{u}(s)$. O símbolo \mathcal{L} é a transformada de Laplace, que atua sobre a função $f = f(t)$ e gera uma nova função, $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$.

2.2.2 Convergência

Embora o operador de Laplace possa ser aplicado a muitas funções, há algumas para as quais a integral em (2.1) não converge. A integral é dita convergente uniforme para s em algum domínio Ω no plano complexo se para qualquer $\varepsilon > 0$, existe algum número τ_0 tal que $\tau \geq \tau_0$, então:

$$\left| \int_{\tau}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right| < \varepsilon, \quad (2.2)$$

para todos os valores de s em Ω . E τ_0 pode ser escolhido suficientemente grande, independente do s .

2.2.3 Continuidade

Continuidade Seccional: Uma função é chamada seccionalmente contínua ou contínua por partes em um intervalo finito $\alpha \leq t \leq \beta$, se $f(t)$ é definida nesse intervalo e tal que o intervalo possa ser subdividido em um número finito de intervalos, em cada um dos quais a função é contínua e tem limites finitos quando t tende para qualquer ponto extremo do intervalo de subdivisões a partir do interior.

Definição: Uma função f é contínua por partes no intervalo $[0, \infty)$ se,

$$(i) \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0^+) \text{ e } (ii) \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = f(0^-)$$

existe e é contínua em cada intervalo finito $(0, b)$ exceto possivelmente em um número finito de pontos $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ em $(0, b)$ em que f tem uma descontinuidade de salto. Uma consequência importante da continuidade por partes é aquela que em cada sub-intervalo a função f também é delimitada, ou seja,

$$|f(t)| \leq M_i, \tau_i < \tau < \tau_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n - 1, \quad (2.3)$$

para constantes finitas M_i .

Para integrar funções contínuas por partes no intervalo de $(0, b)$, temos que integrar a função f sobre cada um dos sub-intervalos. Assim obtemos uma soma de integrais, onde cada sub-intervalo corresponde a uma integral, isto é:

$$\int_0^b f(t)dt = \int_0^{\tau_1} f(t)dt + \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t)dt + \dots + \int_{\tau_n}^b f(t)dt. \quad (2.4)$$

Isso pode ser feito uma vez que a função f é contínua e limitada em cada sub-intervalo e, portanto, em cada um desses intervalos temos uma integral.

2.2.4 Funções de ordem exponencial

Definição: A função f tem ordem exponencial α se existe uma constante $M > 0$ e α tais que para algum $t_0 \geq 0$.

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, t \geq t_0. \quad (2.5)$$

A transformada de Laplace de f irá existir se f for de ordem exponencial. A função exponencial e^{at} tem uma ordem exponencial $\alpha = a$, enquanto que t^n tem ordem exponencial α para qualquer $\alpha > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, e sejam funções limitadas como por exemplo: $\sin t$, $\cos t$, $\tan^{-1}t$, etc., tem ordem exponencial 0, enquanto que e^{-t} tem ordem -1 . Contudo e^{t^2} não possui ordem exponencial. Note que se $\beta > \alpha$, então a ordem exponencial α implica a ordem exponencial β , uma vez que $e^{\alpha t} \leq e^{\beta t}, t \geq 0$ (LOGAN, 2004).

2.3 Transformada de Laplace inversa

Ao aplicar a transformada de Laplace para conhecer a solução de equações diferenciais, é necessário obtermos a transformada de Laplace inversa. Se $\mathcal{L}(f(t)) =$

$F(s)$, então a transformada de Laplace inversa é denotada por:

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t), t \geq 0. \quad (2.6)$$

Teorema: Se $f(t)$ é contínua por partes no intervalo $0 \leq t \leq N$ e de ordem exponencial γ para $t > N$, então sua transformada de Laplace $F(s)$ existe para todo $s > \gamma$.

Teorema de inversão: Se $f(t)$ tem derivada de primeira ordem, contínua e $|f(t)| < K.e^{\gamma t}$, na qual K e γ são constantes positivas definimos:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \operatorname{Re}(s) > \gamma, \quad (2.7)$$

então uma fórmula integral da transformada inversa de Laplace, chamada de integral de Bromwich, é a fórmula da inversa de Mellin, e assim dada pela integral de linha:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds, t \geq 0, \quad (2.8)$$

a integral deve ser efetuada ao longo de uma reta, na qual a região de convergência é dada por $\operatorname{Re}(s) = c$ no plano complexo. O número real c é escolhido de modo que $\operatorname{Re}(s) = c$ esteja à esquerda de todas as singularidades de $F(s)$.

2.3.1 Unicidade das transformadas inversas de Laplace

Teorema de Lerch: Se nos restringirmos a funções $f(t)$ que sejam seccionalmente contínuas em todo intervalo finito $0 \leq t \leq N$ e de ordem exponencial para $t > N$, então a transformada inversa de Laplace de $F(s)$, isto é, $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, é única.

2.3.2 Propriedade de Convolução

Se $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ e $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t)$, então chamamos $f * g$ de convolução de f e g , e assim é chamado teorema ou propriedade de convolução. Na qual é denotado da seguinte maneira:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^t f(u)g(t-u)du = f * g. \quad (2.9)$$

2.3.3 Aplicação

Vamos considerar a equação do calor para representar a distribuição de temperatura em uma barra de material homogêneo, k^2 é a difusividade térmica, e além disso $f(x)$ será uma função conhecida. Assim formulamos o seguinte problema:

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx}, & \text{se } x \geq 0, \text{ e } t > 0 \\ u(t, 0) = 0, & \text{se } t > 0, \\ u(t, 1) = 0, & \text{se } t > 0, \\ u(0, x) = \text{sen}(\pi x), & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}, \quad (2.10)$$

esse problema será resolvido através da utilização da transformada de Laplace, reescrevendo (2.10) teremos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.11)$$

Empregando a Transformada de Laplace em (2.11), teremos:

$$\frac{1}{k^2} [s\bar{u}(x, s) - u(x, 0)] = \frac{d^2 \bar{u}(x, s)}{dx^2}. \quad (2.12)$$

Aplicando a condição inicial em (2.12), obtemos:

$$\frac{1}{k^2} [s\bar{u}(x, s) - \text{sen}(\pi x)] = \frac{d^2 \bar{u}(x, s)}{dx^2}. \quad (2.13)$$

Aplicando a transformada de Laplace nas condições de contorno (2.10), temos:

$$u(t, 0) = 0 \rightarrow \mathcal{L}\{u(t, 0)\} = \bar{u}(s, 0), \quad (2.14)$$

$$u(t, 1) = 0 \rightarrow \mathcal{L}\{u(t, 1)\} = \bar{u}(s, 1). \quad (2.15)$$

Assim a partir da equação, obtemos uma EDO de segunda ordem, não homogênea da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{u}(x, s)}{dx^2} = \frac{1}{k^2} [s\bar{u}(x, s) - \text{sen}(\pi x)] \\ \bar{u}(s, 0) = 0, \\ \bar{u}(s, 1) = 0 \end{cases}, \quad (2.16)$$

A solução geral da EDO homogênea:

$$Z = C_1 e^{\frac{\sqrt{s}}{k}x} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{s}}{k}x}. \quad (2.17)$$

A solução da EDO não homogênea é:

$$Z = \frac{1}{k^2 \pi^2 + s} \text{sen}(\pi x), \quad (2.18)$$

Agora somamos as duas soluções da EDO homogênea com a solução da EDO não homogênea (2.17) e (2.18) respectivamente:

$$u(x, s) = \frac{1}{k^2\pi^2 + s} \text{sen}(\pi x) + C_1 e^{\frac{\sqrt{s}}{k}x} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{s}}{k}x}. \quad (2.19)$$

Obtemos a solução geral no espaço de Laplace:

$$\bar{u}(x, s) = \frac{1}{k^2\pi^2 + s} \text{sen}(\pi x). \quad (2.20)$$

Para encontrar a solução geral da EDO, aplicamos a transformada inversa de Laplace em (2.20) e obtemos:

$$u(x, t) = \text{sen}(\pi x) e^{-k^2\pi^2 t}. \quad (2.21)$$

Para uma melhor compreensão do processo de transferência de calor através de uma barra, apresentamos a distribuição de temperatura em duas dimensões para diferentes instantes de tempo, Figuras 3 e 4, e também o gráfico em três dimensões apresentado na Figura 5. Os gráficos foram desenvolvidos no Software *Scilab*.

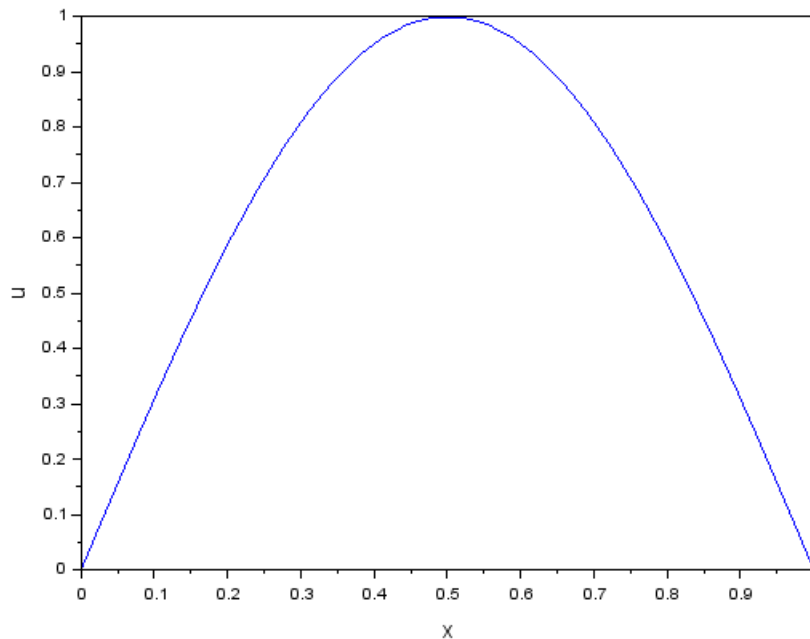


Figura 3: Distribuição de temperatura em duas dimensões, para $t = 0$.

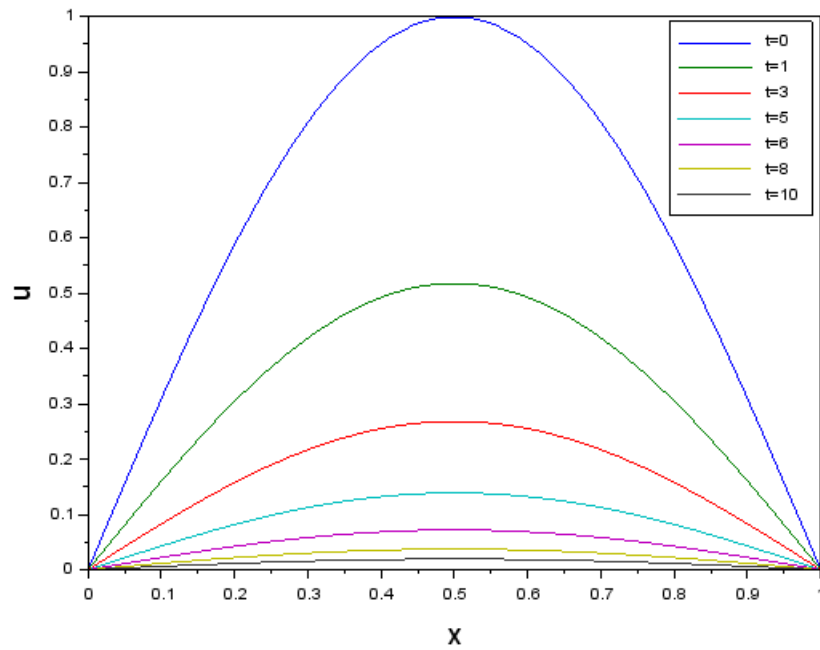


Figura 4: Distribuição de temperatura em duas dimensões para diferentes instantes de tempo.

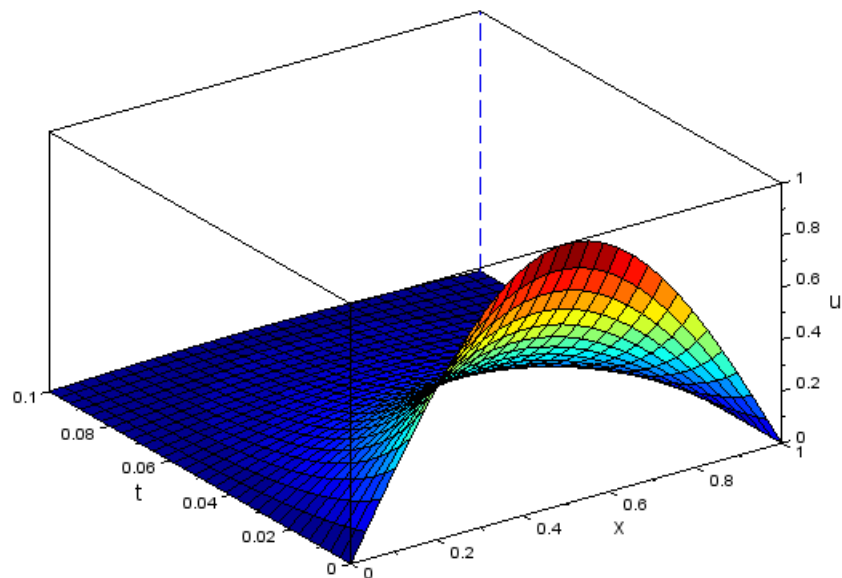


Figura 5: Distribuição de temperatura em três dimensões.

2.3.4 Inversão numérica utilizando o método Talbot Fixo

Devido a dificuldade de inverter analiticamente muitas funções, seja através de manipulações algébricas, ou até mesmo usando outros métodos analíticos, surge a necessidade de um método de inversão que seja eficaz. No entanto, quando usamos métodos numéricos se torna complicado, pois não existe um método universal para encontrar a transformada inversa de Laplace que funcione para todos os tipos de funções.

Existem muitos problemas cuja solução pode ser encontrada em termos da transformada de Laplace. Contudo, se torna bastante complicado o processo de inversão desta forma através de técnicas de análise complexa, ou seja, a dificuldade principal em aplicar a técnica da transformada de Laplace é a determinação da função original $f(t)$ a partir de sua transformada. O processo de inversão consiste em duas partes. A primeira em determinar a função $f(t)$ e a segunda verificar que essa solução é realmente a solução da equação diferencial. Assim, neste trabalho iremos abordar o método de inversão usando o algoritmo de Talbot Fixo e vamos analisar alguns critérios, como por exemplo, aplicação a uma variedade de tipos comuns de problemas de inversão e precisão numérica, comparando assim a solução original com a inversão obtida através do algoritmo.

Desde 1955, começaram a surgir muitos métodos de inversão numérica. Muitos desses métodos usam expansões de séries ortogonais ou somas ponderadas de valores da transformada em um conjunto de pontos, geralmente pontos complexos. Porém em 1979, Talbot (TALBOT, 1979) criou um método parecido com os desenvolvidos anteriormente, porém com algo que nenhum dos outros métodos havia desenvolvido, pois o número n de pontos a ser utilizado é um dos vários parâmetros arbitrários. Pouco ou nenhum trabalho computacional preliminar é necessário. O método de Talbot Fixo possui uma forma quase universal em sua aplicação, a única transformada na qual este método não é aplicável é para aqueles casos que possuem um número infinito de singularidades, e com partes imaginárias que se estendem ao infinito.

Algoritmo do método Talbot Fixo:

Quando estamos utilizando o método da transformada de Laplace, surge a dificuldade ao aplicarmos a transformada de Laplace inversa para muitas funções de forma analítica, sendo assim surge a necessidade de usar algum método numérico, neste trabalho vamos utilizar o algoritmo de inversão de Talbot Fixo.

$$f(t, M) = \frac{r}{M} \left\{ \frac{1}{2} F(r) \exp(rt) + \sum_{k=1}^{M-1} \operatorname{Re} [\exp(ts(\theta_k)) F(s(\theta_k)) (1 + i\sigma(\theta_k))] \right\}, \quad (2.22)$$

$r = \frac{2M}{N_t t}$, $i = \sqrt{-1}$, $s(\theta) = r\theta(\cot \theta + i)$, $-\pi < \theta < \pi$, $\theta_k = k\pi/M$,
 $\sigma(\theta) = \theta + (\theta \cot \theta - 1)\cot \theta$, $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Através da equação dada em (2.22) (ABATE; VALKÓ, 2004), vamos desenvolver a programação do método utilizando o software *Scilab*.

Agora, utilizando o algoritmo de Talbot Fixo, vamos apresentar algumas das funções testadas no método de inversão numérica. Escolhemos três funções, sendo uma função contínua e periódica, uma monótona e outra a função hiperbólica, e através das tabelas podemos observar o erro máximo absoluto entre a função original e a aproximada pelo método. Na qual é considerado $M = 100$ e $N_t = 7$, para todos os gráficos.

Exemplo 1) Seja a função $f(t) = \text{sen}(t)$ e sua transformada $F(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$,

Tabela 1: Erro máximo absoluto entre a função original e a aproximada pelo método Talbot Fixo para $f(t) = \text{sen}(t)$.

$M \times N_t$	5	7	9	11	15	21
20	0,0000111	0,1398327	0,3686996	0,3534506	NC	NC
40	$1,819 \times 10^{-11}$	$4,801 \times 10^{-15}$	$9,705 \times 10^{-11}$	0,0000113	0,266384	0,3904319
100	NC	0,0000058	$1,148 \times 10^{-8}$	$2,959 \times 10^{-11}$	$5,372 \times 10^{-13}$	$2,774 \times 10^{-15}$

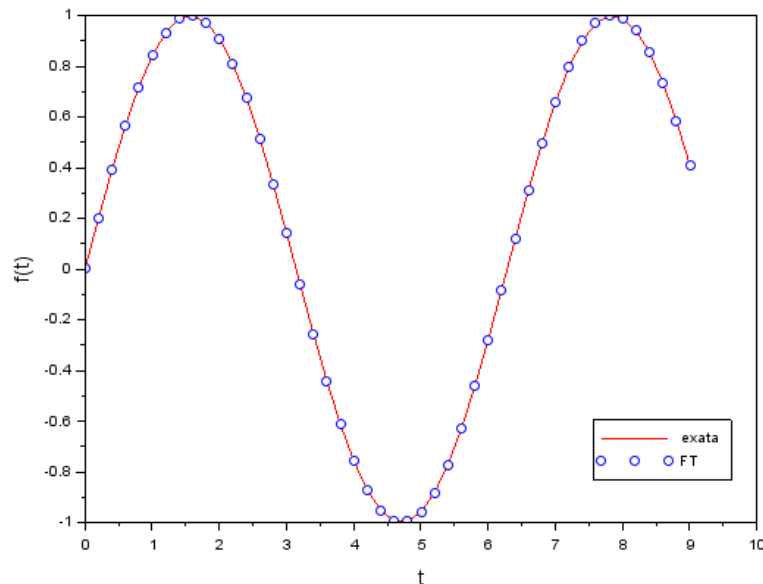


Figura 6: Comparação entre a função original e a obtida pelo método de Talbot Fixo para $f(t) = \text{sen}(t)$.

*NC é denotado para o termo que Não converge.

Exemplo 2) Seja a função $f(t) = e^t$ e sua transformada $F(s) = \frac{1}{s-1}$.

Tabela 2: Erro máximo absoluto entre a função original e a aproximada pelo método Talbot Fixo para $f(t) = e^t$.

$M \times N_t$	5	7	9	11	15	21
20	NC	NC	NC	NC	NC	NC
40	$6,420 \times 10^{-14}$	$1,12 \times 10^{-5}$	NC	NC	NC	NC
100	0,0011899	$3,214 \times 10^{-8}$	$3,088 \times 10^{-11}$	$1,416 \times 10^{-13}$	$1,558 \times 10^{-15}$	0,728097

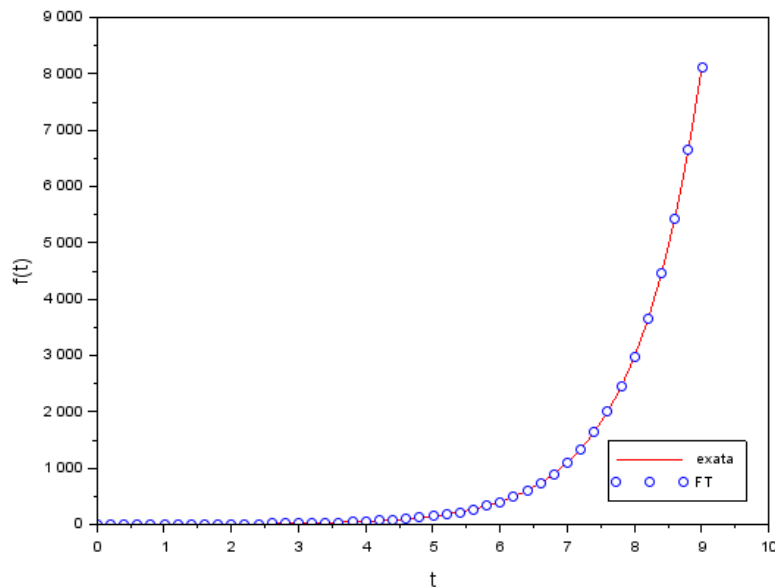


Figura 7: Comparação entre a função original e a obtida pelo método de Talbot Fixo para $f(t) = e^t$.

Exemplo 3) Seja a função $f(t) = \cosh(t)$ e sua transformada $F(s) = \frac{s}{s^2-1}$

Tabela 3: Erro máximo absoluto entre a função original e a aproximada pelo método Talbot Fixo para $f(t) = \cosh(t)$.

$M \times N_t$	5	7	9	11	15	21
20	NC	NC	NC	NC	NC	NC
40	$7,976 \times 10^{-14}$	$1,12 \times 10^{-5}$	NC	NC	NC	NC
100	0,0020204	$4,905 \times 10^{-8}$	$4,779 \times 10^{-11}$	$1,852 \times 10^{-13}$	$1,406 \times 10^{-15}$	NC

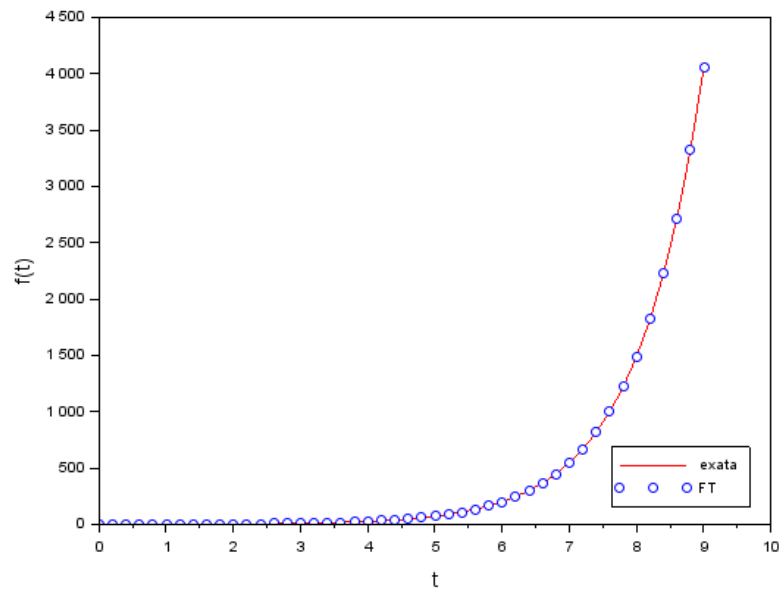


Figura 8: Comparação entre a função original e a obtida pelo método de Talbot Fixo para $f(t) = \cosh(t)$.

3 MÉTODO DE HOMOGENEIZAÇÃO ASSINTÓTICA

3.1 Introdução

O método de homogeneização assintótica (MHA, ver: BAKHVALOV; PANASENKO (1989), BENSOUSSAN; LIONS; PAPANICOLAOU (1978), POBEDRYA (1984)) permite transformar um problema sobre um meio micro-heterogêneo, periódico, cujas equações diferenciais têm coeficientes rapidamente oscilantes (problema original), em outro sobre um meio homogêneo (problema homogeneizado) assintoticamente equivalente ao heterogêneo. Os coeficientes das equações diferenciais correspondentes ao problema homogêneo são constantes e chamados de coeficientes efetivos do meio heterogêneo. A obtenção de tais coeficientes efetivos depende da solução dos chamados problemas locais, ou seja, sobre a célula básica, cuja replicação periódica gera o meio heterogêneo. Do ponto de vista matemático, é importante verificar a relação de proximidade entre as soluções dos problemas original e homogeneizado, o qual constitui a fundamentação da equivalência assintótica. Do ponto de vista prático, o MHA oferece uma metodologia para conhecer o comportamento efetivo de meios heterogêneos, o qual é útil em diversas aplicações. Especificamente, o MHA consiste em propor uma solução em série de potências em duas escalas em termos do parâmetro geométrico pequeno que caracteriza a existência da micro-heterogeneidade do meio, chamada solução assintótica formal (SAF) para o problema original. Assim, ao substituir essa solução no problema obtemos uma sequência de problemas recorrentes para encontrar os coeficientes dos termos da SAF proposta como solução. Além disso, encontramos os problemas locais, os coeficientes efetivos e o problema homogeneizado. Os problemas locais descrevem o comportamento local do meio e os coeficientes efetivos são referentes ao problema homogeneizado, que é o problema sobre o meio homogêneo ideal equivalente ao problema sobre o meio micro-heterogêneo em estudo. Além disso, é possível demonstrar que a norma das diferenças das soluções exata e assintótica do problema original e a solução do problema homogeneizado são da mesma ordem de magnitude que o parâmetro geométrico pequeno, ou seja, os problemas são equivalentes quando as soluções do problema original convergem

para a solução do problema homogeneizado para valores suficientemente pequenos do parâmetro geométrico.

3.2 Meios com estruturas heterogêneas

Um meio heterogêneo é caracterizado pela variação de suas propriedades físicas ao longo de sua estrutura. Em particular, um meio periódico é caracterizado pela composição da sua estrutura pela reprodução periódica de um elemento recorrente chamado de célula básica ou de periodicidade (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989). Seja ε um parâmetro geométrico pequeno, $0 < \varepsilon \ll 1$, o qual especifica globalmente o comprimento do elemento recorrente e indica a existência de duas escalas estruturais (micro e macroescala). A partir deste elemento é constituído uma estrutura unidimensional de comprimento unitário e ε -periódico. Como a estrutura é periódica, ao realizar o estudo do comportamento local em cada elemento recorrente, é possível estender tais resultados, para a estrutura como um todo. Definimos assim uma nova variável, $y = x/\varepsilon \in [0, \varepsilon^{-1}]$, na qual y é chamado de variável microscópica, rápida ou local, que descreve o comportamento local do meio, em contraste com a variável $x \in [0, 1]$ que é chamada de macroscópica, lenta ou global. Fenômenos que ocorrem em meios micro-heterogêneos são geralmente modelados por equações em derivadas parciais com coeficientes rapidamente oscilantes obtidas a partir de leis de conservação, relações constitutivas ou de fechamento, que satisfazem certas condições de contorno, iniciais, de contato ou periodicidade (LOGAN, 2004). Um exemplo clássico é a equação elíptica que descreve um campo térmico estacionário:

$$\frac{d}{dx} \left(a^\varepsilon(x) \frac{du^\varepsilon}{dx} \right) = f(x), \quad (3.1)$$

$a^\varepsilon(x) = a(x/\varepsilon) = a(y)$ é o coeficiente de condutividade na posição x , 1-periódico com respeito a y , positivo e limitado; $f(x)$ é a densidade de fonte de calor localizada na posição x ; e u^ε é a temperatura na posição x para cada ε fixo. A 1-periodicidade em y é verificada como segue. Temos por definição, que o coeficiente é ε -periódico. Logo $a^\varepsilon(x) = a^\varepsilon(x + \varepsilon)$, o que é equivalente a $a(y) = a(y + 1)$ por :

$$a(y) = a^\varepsilon(x) = a^\varepsilon(x + \varepsilon) = a\left(\frac{x + \varepsilon}{\varepsilon}\right) = a\left(\frac{x}{\varepsilon} + 1\right) = a(y + 1).$$

3.2.1 Definições preliminares

Ordem: Seja uma função $\varphi: \Omega \times E \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi^\varepsilon(x) = \varphi(x, \varepsilon)$, sendo $x \in \Omega \subset \mathbb{R}$ e $\varepsilon \in E \subset (0, 1)$. Considere ainda que $\varphi^\varepsilon \in B_\varepsilon(\Omega)$ um espaço normado e φ^ε definida para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. A notação $\varphi^\varepsilon = \mathcal{O}(\psi(x, \varepsilon))$, enquanto $\varepsilon \rightarrow 0^+$ na norma de $B_\varepsilon(\Omega)$, significa que existem constantes $M, \varepsilon_0 > 0$, tais que

$\|\varphi^\varepsilon\|_{B_\varepsilon(\Omega)} \leq M \|\psi^\varepsilon\|_{B_\varepsilon(\Omega)}$, para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Em particular, $\varphi^\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon^N)$ é equivalente a $\|\varphi^\varepsilon\|_{B_\varepsilon(\Omega)} \leq M\varepsilon^N$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, e $n \in \mathbb{N}$ (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

Expansão assintótica (EA) e solução assintótica formal (SAF): Seja a função φ^ε e uma série assintótica da forma $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i g_i(x, \varepsilon)$. Dizemos que esta série é uma expansão assintótica (EA) da função φ^ε , se para todo N existe um M_0 , tal que para cada $m \geq M_0$ cumpre-se, na norma de B_ε , com $\varepsilon \rightarrow 0^+$,

$$\varphi(x, \varepsilon) - \sum_{i=0}^m \varepsilon^i g_i(x, \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^N),$$

isto é, temos a igualdade assintótica $\varphi(x, \varepsilon) \approx \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i g_i(x, \varepsilon)$.

Agora, vamos considerar, para cada $\varepsilon > 0$ fixo, a equação diferencial

$$\mathcal{L}^\varepsilon u^\varepsilon = f, \quad (3.2)$$

na qual $\mathcal{L}^\varepsilon: B_{1\varepsilon} \rightarrow B_{2\varepsilon}$, $u^\varepsilon \in B_{1\varepsilon}$ e $f \in B_{2\varepsilon}$, sendo $B_{1\varepsilon}$ e $B_{2\varepsilon}$ espaços normados e \mathcal{L}^ε um operador diferencial. É chamado de solução assintótica formal (SAF) de (3.2) a assintótica,

$$u^{(\infty)}(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_i(x, \varepsilon),$$

onde $u_i \in B_{1\varepsilon}$, tal que para todo $N \in \mathbb{N}$, existe um M para que a relação,

$$\mathcal{L}^\varepsilon u^{(m)} - f = \mathcal{O}(\varepsilon^N), \quad (3.3)$$

seja satisfeita para todo $m \geq M$ com $\varepsilon \rightarrow 0^+$ na norma de $B_{2\varepsilon}$, em que $u^{(m)} = \sum_{i=0}^m \varepsilon^i u_i$.

Se \mathcal{L}^ε é um operador linear e existe uma estimativa $\|u^\varepsilon\|_{B_\varepsilon} \leq c_1 \varepsilon^{c_2} \|f\|_{B_{2\varepsilon}}$, onde $c_1 > 0$ e c_2 são constantes independentes de ε , então segue a partir, da equação (3.3), que para todo $N \in \mathbb{N}$ existem um M tal que $\|u^{(m)} - u^\varepsilon\|_{B_{1\varepsilon}} = \mathcal{O}(\varepsilon^N)$, com $\varepsilon \rightarrow 0^+$, para todo $m \geq M$, e conseqüentemente, a solução assintótica formal $u^{(\infty)}$ é uma expansão assintótica da solução exata u^ε do problema: $u^\varepsilon \approx u^{(\infty)}$ (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

Lema 3.1 Sejam $F(y)$ e $a(y) > 0$ funções diferenciáveis e 1-periódicas. Uma condição necessária e suficiente para a existência de uma solução 1-periódica N da equação $LN = F$ é que $\langle F(y) \rangle \equiv \int_0^1 F(y) dy = 0$, onde $\langle \cdot \rangle$ denota a média integral e o operador LN é dado por $LN \equiv (d/dy)(a(y)dN/dy)$. Ainda mais, tal solução 1-periódica é única salvo uma constante aditiva, ou seja, $N(y) = \tilde{N}(y) + C$, onde \tilde{N} é

uma solução 1-periódica de $LN = F$ tal que $\tilde{N}(0) = 0$, e C é uma constante arbitrária (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

3.2.2 Ideia geral do MHA

O MHA consiste em aproximar a solução exata u^ε do problema original com coeficientes rapidamente oscilantes por uma série assintótica da forma $u^{(\infty)}$ em potências de ε denominada SAF, é dado por:

$$u^{(\infty)}(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x, y), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad (3.4)$$

na qual, u_k são funções 1-periódicas em y . Substituindo a expansão dada na equação (3.4) em (3.1), levando em conta a regra da cadeia dada por:

$$\frac{d}{dx} F\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = \left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right) \Big|_{y=x/\varepsilon}. \quad (3.5)$$

Agrupando as potências de ε , igualando a zero seus coeficientes, temos uma sequência recorrente de problemas para os coeficientes das potências de ε :

$$\varepsilon^{-2} : \mathcal{L}_{yy}u_0 = 0,$$

$$\varepsilon^{-1} : \mathcal{L}_{yy}u_1 = -\mathcal{L}_{xy}u_0 - \mathcal{L}_{yx}u_0,$$

$$\varepsilon^0 : \mathcal{L}_{yy}u_2 = -\mathcal{L}_{xy}u_1 - \mathcal{L}_{yx}u_1 - \mathcal{L}_{xx}u_0 + f(x),$$

$$\varepsilon^1 : \mathcal{L}_{yy}u_3 = -\mathcal{L}_{xy}u_2 - \mathcal{L}_{yx}u_2 - \mathcal{L}_{xx}u_1,$$

Assim, sucessivamente, até obtermos para o termo n -ésimo

$$\varepsilon^n : \mathcal{L}_{yy}u_{n+2} = -\mathcal{L}_{xy}u_{n+1} - \mathcal{L}_{yx}u_{n+1} - \mathcal{L}_{xx}u_n,$$

com o operador diferencial

$$\mathcal{L}_{\alpha, \beta} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(a(y) \frac{\partial}{\partial \beta} \right), \quad \alpha, \beta \in \{x, y\}. \quad (3.6)$$

A partir destes problemas, de modo recorrente obtemos a equação do problema homogeneizado, o coeficiente efetivo e a solução do problema local, sendo estes resultados importantes para a construção da solução assintótica formal.

3.2.3 Formalismo do MHA na Equação Elíptica

Para ilustrar o MHA, considerando o problema original constituído, para ε fixo, pela equação elíptica (3.1) definida para todo $x \in \bar{\Omega} = [0, 1]$, e que satisfaz as condições de

contorno $u^\varepsilon(0) = u^\varepsilon(1) = 0$, ou seja,

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left(a^\varepsilon(x) \frac{du^\varepsilon}{dx} \right) = f(x), x \in \Omega \\ u^\varepsilon(x) = 0, x \in \partial\Omega \end{cases}, \quad (3.7)$$

o coeficiente $a^\varepsilon \in C^1(\overline{\Omega})$ é uma função ε -periódico em x , estritamente limitada, ou seja, existem $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tais que $0 < a_1 \leq a^\varepsilon \leq a_2 < +\infty$. Além disso, consideramos $f \in C(\overline{\Omega})$. Propomos uma solução assintótica da solução de (3.7) da seguinte maneira:

$$u^{(2)}(x, \varepsilon) = u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y) + \varepsilon^2 u_2(x, y), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad (3.8)$$

em que u_i são funções 1-periódicas em y . Ao substituir a assintótica (3.8) na equação do problema (3.7),

$$\frac{d}{dx} \left(a(y) \frac{d}{dx} (u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y) + \varepsilon^2 u_2(x, y)) \right) - f(x) = 0, \quad (3.9)$$

e aplicando a regra da cadeia em (3.9), obtemos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left[a(y) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} \right) (u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y) + \varepsilon^2 u_2(x, y)) \right] - f(x) = 0. \quad (3.10)$$

Desenvolvendo os termos e agrupando os de mesma potência, teremos:

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-2} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(a(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \right] + \varepsilon^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(a(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a(y) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a(y) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \\ & + \varepsilon^0 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(a(y) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(a(y) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a(y) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a(y) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) - f(x) \right] \\ & = \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Para que $u^{(2)}$ seja SAF de (3.7), devemos obter u_0 , u_1 e u_2 de tal maneira que seja satisfeita a seguinte sequência recorrente de equações:

$$\varepsilon^{-2} : \frac{\partial}{\partial y} \left(a(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) = 0, \quad (3.12)$$

$$\varepsilon^{-1} : \frac{\partial}{\partial x} \left(a(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a(y) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a(y) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = 0, \quad (3.13)$$

$$\varepsilon^0 : \frac{\partial}{\partial x} \left(a(y) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(a(y) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a(y) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a(y) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) - f(x) = 0, \quad (3.14)$$

as quais correspondem aos termos que não se anulam quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Considere agora que as variáveis x e y nas equações (3.12)-(3.14) são independentes. As equações (3.12)-(3.14) são complementadas com condições de contorno determinadas a partir da aplicação de (3.8) nas condições de contorno dadas em (3.7), ou seja:

$$u^{(2)}(0, \varepsilon) = u_0(0, 0) + \varepsilon u_1(0, 0) + \varepsilon^2 u_2(0, 0) = 0, \quad (3.15)$$

$$u^{(2)}(1, \varepsilon) = u_0\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u_1\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 u_2\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\right) = 0. \quad (3.16)$$

Assim, as condições de contorno para (3.12)-(3.14), respectivamente, são:

$$u_0(0, 0) = u_0\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\right) = 0, \quad (3.17)$$

$$u_1(0, 0) = u_1\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\right) = 0, \quad (3.18)$$

$$u_2(0, 0) = u_2\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\right) = 0. \quad (3.19)$$

Note que devido à 1-periodicidade de $u_i(x, y)$, $i = 0, 1, 2$, com relação à variável y , é correto dizer que $u_i(1, 1/\varepsilon) = u_i(1, 0)$. A partir das equações (3.12)-(3.14) complementadas das condições (3.17)-(3.19) estabelecemos os seguintes problemas recorrentes:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{yy}u_0 = 0 \\ u_0(0, 0) = u_0(1, 0) = 0 \end{cases}, \quad (3.20)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{yy}u_1 = -\mathcal{L}_{xy}u_0 - \mathcal{L}_{yx}u_0 \\ u_1(0, 0) = u_1(1, 0) = 0 \end{cases}, \quad (3.21)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{yy}u_2 = -\mathcal{L}_{xx}u_0 - \mathcal{L}_{xy}u_1 - \mathcal{L}_{yx}u_1 + f(x) \\ u_2(0, 0) = u_2(1, 0) = 0 \end{cases}. \quad (3.22)$$

Note que, para cada x fixo, os problemas (3.20)-(3.22) são da seguinte maneira:

$$\begin{cases} LN = F, y \in (0, 1) \\ N(0) = 0 \end{cases},$$

na qual $L = \mathcal{L}_{yy}$ e $N = u_k$. A existência e a unicidade das funções u_k soluções 1-periódicas em y de (3.20)-(3.22) são garantidas mediante ao Lema apresentado anteriormente.

Do problema dado em (3.20), segue que:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(a(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) = 0, \quad (3.23)$$

temos a garantia da 1-periodicidade de y pelo Lema. Assim, de integrar (3.23) resulta

que:

$$a(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} = p(x), \quad (3.24)$$

e ainda, sendo $a(y) > 0$. Isolando a derivada de u_0 , temos:

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{p(x)}{a(y)}. \quad (3.25)$$

De modo a obter $p(x)$, aplicamos a (3.25) o operador de valor médio, obtemos:

$$0 = u_0(x, 1) - u_0(x, 0) = \int_0^1 \frac{p(x)}{a(y)} dy, \quad (3.26)$$

devido à 1-periodicidade de u_0 com respeito a y . A partir disto, podemos concluir que:

$$p(x) \int_0^1 \frac{1}{a(y)} dy = 0 \Rightarrow p(x) = 0, \quad (3.27)$$

pois $\int_0^1 \frac{dy}{a(y)} > 0$. Logo, substituindo (3.27) em (3.24) resulta que:

$$a(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_0}{\partial y} = 0,$$

e assim podemos concluir que u_0 não depende da variável rápida y , teremos,

$$u_0(x, y) = u_0(x). \quad (3.28)$$

Note que a equação (3.28) também pode ser obtida diretamente do Lema. Com efeito, sejam $x \in [0, 1]$ fixo e $N(y) = u_0(x, y)$. Ao aplicar o Lema em (3.23) segue que existe $u_0(x, y)$ solução 1-periódica em y , única salvo uma constante aditiva, ou seja, $u_0(x, y) = \tilde{u}_0(x, y) + C(x)$. Em particular, observe que $\tilde{u}_0 \equiv 0$ é solução de (3.23). Logo, $u_0(x, y) = C(x)$, na qual, u_0 , não depende de y .

Dando continuidade á resolução dos problemas recorrentes, ao substituir a equação (3.28) em (3.21), obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(a(y) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = - \frac{da}{dy} \frac{du_0}{dx}. \quad (3.29)$$

A equação (3.29) complementada das condições (3.18) estabelece uma versão atualizada do problema (3.21), ou seja,

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{yy} u_1 = -\mathcal{L}_{yx} u_0 \\ u_1(0, 0) = 0, u_1(1, 0) = 0 \end{cases}. \quad (3.30)$$

Note que a partir do problema (3.30) se obtém uma solução u_1 em termos de u_0 , mas devemos garantir que esta função seja 1-periódica com respeito à variável y , e para isso o Lema deve ser aplicado. Relacionando os elementos do Lema à equação de (3.30) temos que $N = u_1$ e $F = -(da/dy)(du_0/dx)$, portanto, para garantir que u_1 seja 1-periódica, a equação

$$\left\langle \frac{da}{dy} \frac{du_0}{dx} \right\rangle = 0, \quad (3.31)$$

deve ser satisfeita. De calcular o lado esquerdo de (3.31) temos:

$$\int_0^1 \frac{da}{dy} \frac{du_0}{dx} dy = \frac{du_0}{dx} \int_0^1 \frac{da}{dy} dy = \frac{du_0}{dx} (a(1) - a(0)) = 0, \quad (3.32)$$

pois $a(y)$ é 1-periódico com respeito à y . Logo, a solução u_1 de (3.30) é 1-periódica com respeito à variação rápida y . Note que, por causa da forma de F para este problema, podemos aplicar o método de separação de variáveis (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989) e, assim, supor a solução u_1 da forma $N_1(y)(du_0/dx)$. Logo, a substituição na equação (3.30) resulta em :

$$\frac{d}{dy} \left(a(y) \frac{dN_1}{dy} \right) \frac{du_0}{dx} = - \frac{da}{dy} \frac{du_0}{dx}, \quad (3.33)$$

colocando em evidência a derivada de u_0 temos:

$$\frac{d}{dy} \left(a(y) \frac{dN_1}{dy} + a(y) \right) \frac{du_0}{dx} = 0. \quad (3.34)$$

Levando em consideração que $du_0/dx \neq 0$, a equação (3.34) satisfaz que:

$$\frac{d}{dy} \left(a(y) \frac{dN_1}{dy} + a(y) \right) = 0, \quad (3.35)$$

sendo esta a chamada equação do problema local, cuja solução 1-periódica existe, a qual segue de aplicar o Lema com $F = -da/dy$ ao ser escrita como $\mathcal{L}_{yy}N_1 = -da/dy$. Note que está sendo construída uma SAF do problema original, e para obter u_1 é necessário encontrar um $N_1(0) = 0$ estabelece o chamado problema local.

$$Pl : \begin{cases} \frac{d}{dy} \left(a(y) \frac{dN_1}{dy} + a(y) \right) = 0, y \in (0, 1) \\ N_1(0) = 0 \end{cases}. \quad (3.36)$$

O problema dado pela equação (3.36) é resolvido integrando com respeito à variável y , obtendo

$$a(y) \frac{dN_1}{dy} + a(y) = K, \quad (3.37)$$

K é uma constante. Isolando a derivada de $N_1(y)$ levando em consideração que $a(y) >$

0 temos:

$$\frac{dN_1}{dy} = \frac{K}{a(y)} - 1, \quad (3.38)$$

na qual, ao calcular a média em ambos os lados da equação (3.38), obtemos o valor de K :

$$\left\langle \frac{dN_1}{dy} \right\rangle = \left\langle \frac{K}{a(y)} - 1 \right\rangle, \quad (3.39)$$

$$N_1(1) - N_1(0) = K \left\langle \frac{1}{a(y)} - 1 \right\rangle, \quad (3.40)$$

$$0 = K \left\langle \frac{1}{a(y)} \right\rangle^{-1}, \quad (3.41)$$

na qual obtemos:

$$K = \langle a(y)^{-1} \rangle^{-1} \equiv \hat{a}, \quad (3.42)$$

sendo \hat{a} o chamado coeficiente efetivo. Da substituição de (3.42) em (3.38) e integrando ambos os lados da mesma obtemos:

$$N_1(y) - N_1(0) = \int_0^y \left(\frac{\hat{a}}{a(s)} - 1 \right) ds, \quad (3.43)$$

que, pela condição do problema dado em (3.36), a solução do problema local é dado por:

$$N_1(y) = \int_0^y \left(\frac{\hat{a}}{a(s)} - 1 \right) ds, \quad (3.44)$$

portanto, a solução u_1 é determinada como:

$$u_1(x, y) = \frac{du_0}{dx} \int_0^y \left(\frac{\hat{a}}{a(s)} - 1 \right) ds. \quad (3.45)$$

Atualizando a equação do problema (3.22) substituindo (3.28) e (3.45) observando (3.37) e (3.42), temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(a(y) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) &= -a(y) \frac{d^2 u_0}{dx^2} - a(y) \frac{dN_1}{dy} \frac{d^2 u_0}{dx^2} \\ &\quad - \frac{d}{dy} (a(y) N_1(y)) \frac{d^2 u_0}{dx^2} \\ &= -\hat{a} \frac{d^2 u_0}{dx^2} - \frac{d}{dy} (a(y) N_1(y)) \frac{d^2 u_0}{dx^2} + f(x). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Logo, ao aplicar o Lema na equação (3.46) a fim de garantir a existência da solução u_2 , 1-periódica com respeito a y . Vamos relacionar os elementos de (3.46) ao Lema, temos que $N = u_2$ e $F = -\hat{a}(d^2 u_0/dx^2) - (d/dy)(a(y)N_1(y))(d^2 u_0/dx^2) + f(x)$. Portanto, para que u_2 seja 1-periódico com relação à variável y , a seguinte condição deve ser

satisfeita:

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle -\hat{a} \frac{d^2 u_0}{dx^2} - \frac{d}{dy} (a(y) N_1(y)) \frac{du_0}{dx} + f(x) \right\rangle \\
&= - \left\langle \hat{a} \frac{d^2 u_0}{dx^2} \right\rangle - \left\langle \frac{d}{dy} (a(y) N_1(y)) \frac{d^2 u_0}{dx^2} \right\rangle + f(x) \\
&= -\hat{a} \frac{d^2 u_0}{dx^2} + f(x),
\end{aligned}$$

ou seja, a condição para que exista u_2 solução 1-periódica com relação à variável y de (3.22) é que exista u_0 solução de

$$\hat{a} \frac{d^2 u_0}{dx^2} = f(x), \quad (3.47)$$

que é chamada de equação homogeneizada. Note que a partir desta equação podemos determinar o primeiro termo u_0 da assintótica (3.8), cuja obtenção ainda não tinha sido definida explicitamente. Assim, a equação (3.47) complementada com as condições (3.17) atualizada por (3.28) estabelece o chamado problema homogeneizado,

$$\begin{cases} \hat{a} \frac{d^2 u_0}{dx^2} = f(x), x \in (0, 1) \\ u_0(0) = 0, u_0(1) = 0 \end{cases}. \quad (3.48)$$

É importante salientar a relevância do problema homogeneizado, pois este descreve o comportamento do meio homogêneo equivalente ao problema heterogêneo original, e ainda, a partir dela determinamos os demais coeficientes da EA da solução do problema original, os quais detêm informações da heterogeneidade microscópica do meio. Agora, para obtermos u_2 , vamos substituir a equação dada em (3.47) em (3.46), obtendo assim:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(a(y) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = - \frac{d}{dy} (a(y) N_1(y)) \frac{d^2 u_0}{dx^2}, \quad (3.49)$$

na qual a equação (3.49) é resolvida da mesma maneira que (3.35), logo é obtido o último termo da solução assintótica formal u_2 . Primeiramente, propomos que a solução u_2 seja da seguinte forma $N_2(y) d^2 u_0 / dx^2$. Logo, de substituir (3.49) e colocar a derivada de u_0 em evidência obtemos:

$$\frac{d}{dy} \left[a(y) \left(\frac{dN_2}{dy} + N_1(y) \right) \right] \frac{d^2 u_0}{dx^2} = 0. \quad (3.50)$$

Vamos supor que $d^2 u_0 / dx^2 \neq 0$, assim teremos o segundo problema local:

$$\begin{cases} \frac{d}{dy} \left[a(y) \left(\frac{dN_2}{dy} + N_1(y) \right) \right] = 0, \\ N_2(0) = 0 \end{cases}, \quad (3.51)$$

cuja solução 1-periódica é garantida pelo Lema ao ser escrita como $\mathcal{L}_{yy}N_2 = -(d/dy)(a(y)N_1(y))$ onde $F = -(d/dy)(a(y)N_1(y))$. Realizando os mesmos passos feitos em (3.35)-(3.44), na qual obtemos a constante:

$$K_1 = \langle N_1(y) \rangle \hat{a}, \quad (3.52)$$

obtida através do cálculo da média da condição do Lema. Assim, N_2 é dada por

$$N_2(y) = \int_0^y \left(\langle N_1(y) \rangle \frac{\hat{a}}{a(s)} - N_1(s) \right) ds, \quad (3.53)$$

e, portanto u_2 será da seguinte maneira:

$$u_2(x, y) = \frac{d^2 u_0}{dx^2} \int_0^y \left(\langle N_1(y) \rangle \frac{\hat{a}}{a(s)} - N_1(s) \right) ds. \quad (3.54)$$

Note que a equação (3.53) pode ser obtida diretamente de (7.13) identificando apropriadamente o termo independente F do Lema. Logo a solução exata do problema homogeneizado será:

$$u(x, \varepsilon) = -\varepsilon a(y) N_1(y) \frac{d^3 u_0}{dx^3}. \quad (3.55)$$

3.3 Combinação do MHA com a Transformada de Laplace na equação parabólica

Agora, vamos apresentar a resolução da equação do calor através da combinação de dois métodos: a transformada de Laplace com o MHA. Seja o problema de valores inicial e de contorno com a equação do calor dado por:

$$\begin{cases} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k^\varepsilon(x) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right) = f(t), (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+^* \\ u^\varepsilon(0, t) = u^\varepsilon(1, t) = 0, t \in \times \mathbb{R}_+^* \\ u^\varepsilon(x, 0) = 0, x \in [0, 1] \end{cases}. \quad (3.56)$$

O primeiro passo para a resolução através desse método é aplicar a transformada de Laplace $\mathcal{L}\{\cdot\}$ com relação à variável temporal em (3.56):

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right\} - \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(k^\varepsilon(x) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right) \right\} = \mathcal{L} \{ f(t) \}, \quad (3.57)$$

na qual iremos obter o seguinte resultado:

$$s\bar{u}^\varepsilon - u^\varepsilon(x, 0) - \frac{d}{dx} \left(k^\varepsilon(x) \frac{d\bar{u}^\varepsilon}{dx} \right) = \bar{f}. \quad (3.58)$$

A fim de facilitar a notação vamos usar $\bar{u}^\varepsilon = v^\varepsilon$, e aplicando a condição inicial na equação (3.58)

$$sv^\varepsilon - \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{dv^\varepsilon}{dx} \right) = \bar{f}. \quad (3.59)$$

Atualizando o problema dado em (3.56), teremos:

$$\begin{cases} sv^\varepsilon - \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{dv^\varepsilon}{dx} \right) = \bar{f} \\ v^\varepsilon(0, s) = v^\varepsilon(1, s) = 0 \end{cases}. \quad (3.60)$$

Agora através do MHA, vamos propor uma expansão assintótica da solução de (3.60) da seguinte forma:

$$v^{(2)}(x, s, \varepsilon) = v_0(x, y, s) + \varepsilon v_1(x, y, s) + \varepsilon^2 v_2(x, y, s), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad (3.61)$$

v_i , $i = 0, 1, 2$ são funções 1-periódicas com respeito a y . De maneira análoga ao que foi feito no exemplo anterior vamos substituir a equação obtida em (3.61) na equação (3.60) e aplicando a regra da cadeia, teremos uma sequência de equações recorrentes, uma para cada potência de ε ,

$$\varepsilon^{-2} : \mathcal{L}_{yy}v_0 = 0, \quad (3.62)$$

$$\varepsilon^{-1} : \mathcal{L}_{xy}v_0 + \mathcal{L}_{yx}v_0 + \mathcal{L}_{yy}v_1 = 0, \quad (3.63)$$

$$\varepsilon^0 : \mathcal{L}_{xx}v_0 + \mathcal{L}_{xy}v_1 + \mathcal{L}_{yx}v_1 + \mathcal{L}_{yy}v_2 + sv_0 - \bar{f} = 0, \quad (3.64)$$

as quais correspondem aos termos que não se anulam quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$. A partir das equações complementadas com suas condições de contorno, estabelece os seguintes problemas recorrentes:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{yy}v_0 = 0 \\ v_0(0, 0) = v_0(1, 0) = 0 \end{cases}, \quad (3.65)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{yy}v_1 + \mathcal{L}_{xy}v_0 + \mathcal{L}_{yx}v_0 = 0 \\ v_1(0, 0) = v_1(1, 0) = 0 \end{cases}, \quad (3.66)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{yy}v_2 + \mathcal{L}_{xx}v_0 + \mathcal{L}_{xy}v_1 + \mathcal{L}_{yx}v_1 + sv_0 - \bar{f} = 0 \\ v_1(0, 0) = v_1(1, 0) = 0 \end{cases}. \quad (3.67)$$

De maneira análoga à seção anterior conseguimos concluir que $v_0(x, y, s)$ não depende de y

$$v_0(x, y, s) = v_0(x, s). \quad (3.68)$$

Agora substituindo o resultado obtido em (3.68) em (3.66) teremos o nosso problema atualizado, logo a solução de v_1 será:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{yy}v_1 = -\mathcal{L}_{yx}v_0 = 0 \\ v_1(0, 0) = v_1(1, 0) = 0 \end{cases}, \quad (3.69)$$

a solução de v_1 é determinada como:

$$v_1(x, y, s) = \frac{\partial v_0}{\partial x} \int_0^y \left(\frac{\hat{k}}{k(t)} - 1 \right) dt. \quad (3.70)$$

Podemos observar que estamos em um caso similar ao encontrado pela equação (3.45), a única diferença obtida aqui é o termo para encontrar v_2 , sendo assim o desenvolvimento é análogo aos resultados encontrados anteriormente.

Logo teremos que v_0 e N são respectivamente as soluções dos problemas homogêneo e local:

$$sv_0(x, s) - \hat{k} \frac{d^2 v_0}{dx^2} = \bar{f}, \quad x \in (0, 1), \quad (3.71)$$

$$\frac{d}{dy} \left(k(y) \frac{dN}{dy} \right) = -\frac{dk}{dy}, \quad N(0) = 0, \quad (3.72)$$

na qual \hat{k} é o coeficiente efetivo e $y = x/\varepsilon$ (a variável microscópica). Porém obtemos esta solução no espaço de Laplace. Através da transformada de Laplace inversa obtemos a solução assintótica do problema original, dada por:

$$u^{(1)}(x, t, \varepsilon) = u_0(x, t) + \varepsilon N \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u_0}{\partial x}. \quad (3.73)$$

3.3.1 Exemplo numérico

A fim de avaliar o desempenho do método da homogeneização assintótica combinado com a transformada de Laplace, apresentamos resultados obtidos através de um exemplo numérico. Seja $k(y) = 1 + 0.25 \cos(2\pi y)$, e a fonte $f(t) = e^{-t}$.

Através dos resultados apresentados em (3.73), considerando a expansão assintótica de primeira ordem:

$$u^{(1)} = u_0(x, t) + \varepsilon N_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad (3.74)$$

vamos obter:

- Coeficiente efetivos:

$$\widehat{k} = \frac{\sqrt{15}}{4}. \quad (3.75)$$

- O termo N_1 será:

$$N_1(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \arctan \left(\sqrt{\frac{3}{5}} \tan(\pi y) \right) - y, & \text{se } 0 < y < 1/2 \\ 0, & \text{se } y = 1/2 \\ \frac{1}{\pi} \arctan \left(\sqrt{\frac{3}{5}} \tan(\pi y) \right) - y + 1, & \text{se } 1/2 < y < 1 \end{cases}. \quad (3.76)$$

- O termo u_0 , como:

$$u_0(x, t) = \mathcal{L}^{-1} [v_0(x, s)] \quad (3.77)$$

$$v_0 = \frac{F(s)}{s} \left[1 - \frac{\sinh \left\{ \sqrt{\frac{s}{k}} x \right\} - \sinh \left\{ \sqrt{\frac{s}{k}} (x - 1) \right\}}{\sinh \sqrt{\frac{s}{k}}} \right]. \quad (3.78)$$

Devido à dificuldade de inversão de forma analítica, utilizamos o algoritmo de inversão de Talbot Fixo, dado em (2.22) (ABATE; VALKÓ, 2004).

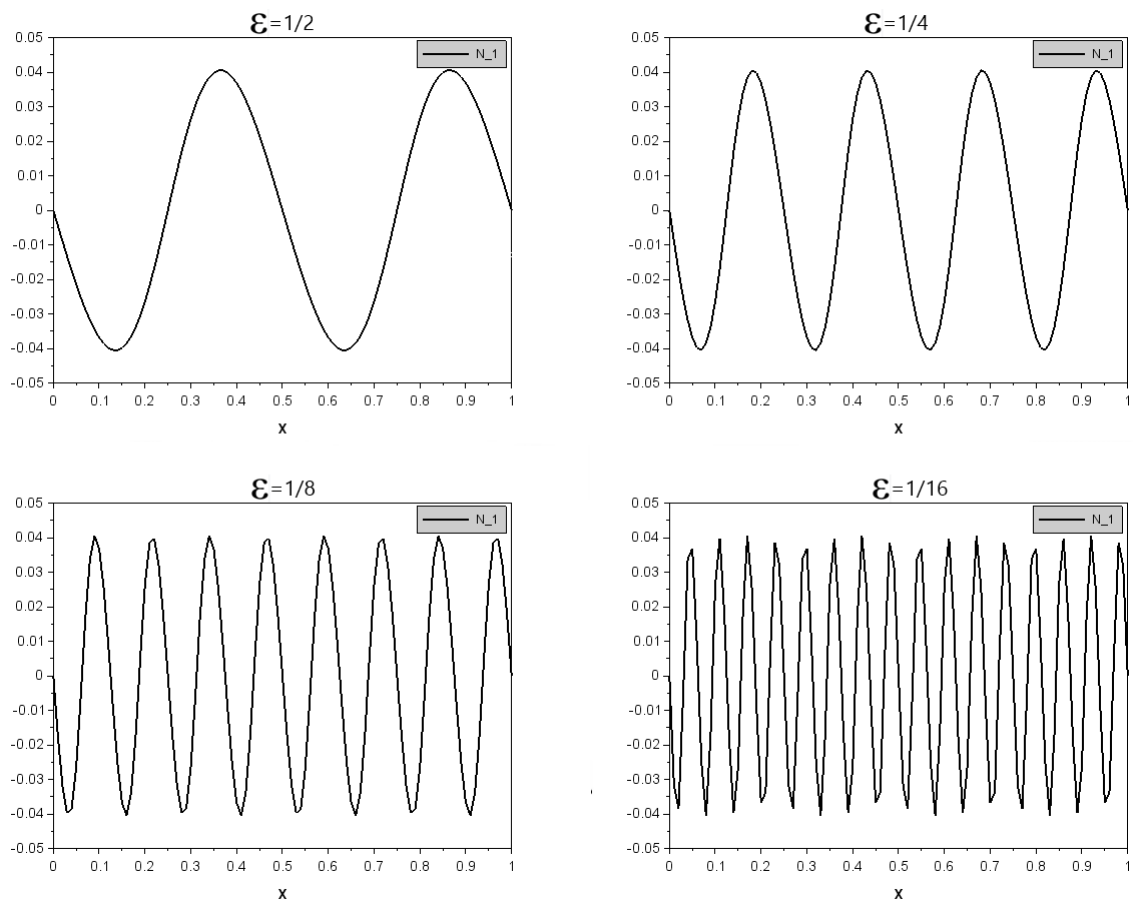


Figura 9: Variação do coeficiente de condutividade, para diferentes valores de ϵ .

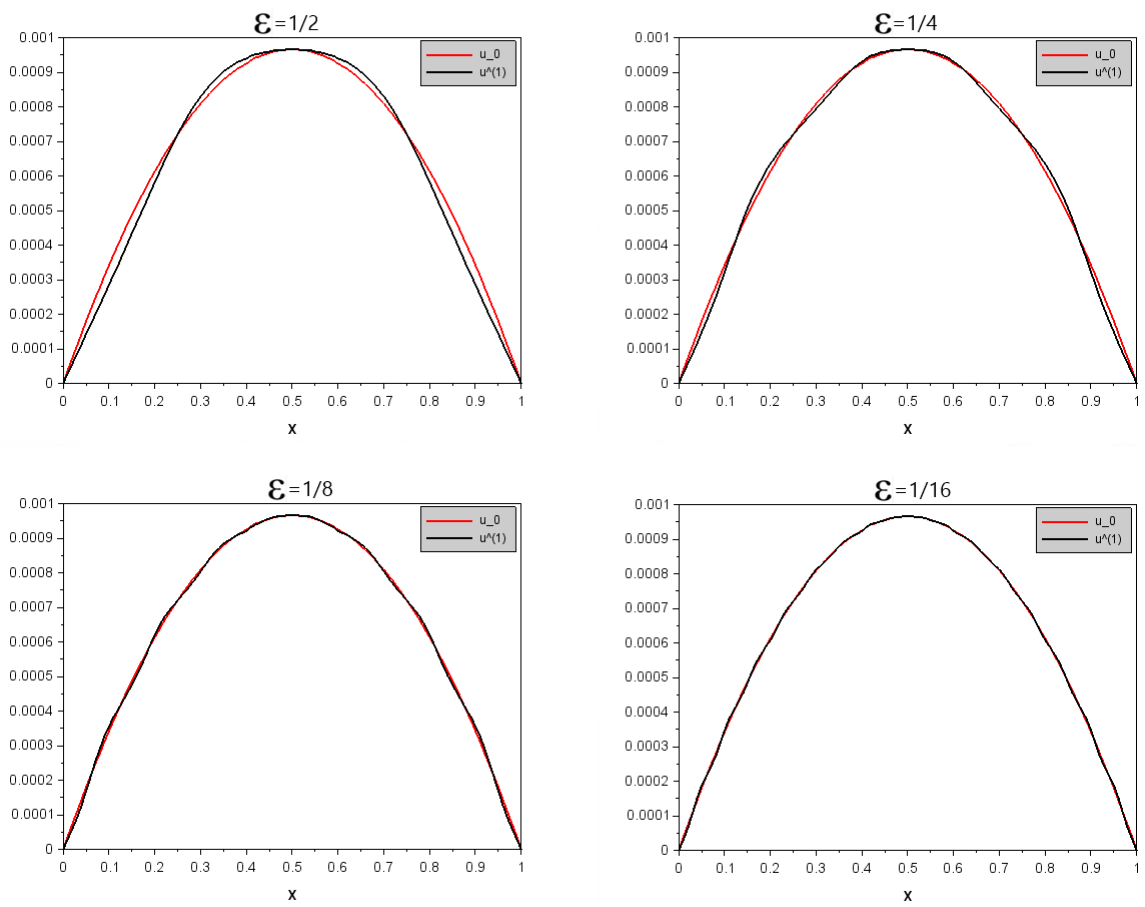


Figura 10: Perfis espaciais de u_0 e $u^{(1)}$.

4 MÉTODO MULTICAMADAS DE ADVECÇÃO-DIFUSÃO

4.1 Introdução

O método multicamadas da advecção-difusão (ADMM, ver: COSTA et al. (2006)) é um método baseado em transformadas integrais desenvolvido dentro do contexto da modelagem da dispersão de poluentes para resolver de forma semianalítica problemas com condições de valor inicial e de contorno para EDPs com coeficientes contínuos. Foi relatado por MOREIRA et al. (2010) que o ADMM produz estimativas da solução de tais problemas que são tão precisos quanto os obtidos através de outros métodos baseados em transformada integral como o GILTT (técnica da transformada integral de Laplace generalizada, de MOREIRA et al. (2009)), mas com custo computacional notavelmente menor. Esta última característica é essencial em situações da vida real que requerem estimativas rápidas (idealmente em tempo real) e precisas da solução. O ADMM é baseado em uma aproximação constante por partes dos coeficientes variáveis e da aplicação da transformada de Laplace. Então, o problema original com coeficientes contínuos é aproximado por um problema com coeficientes constantes por partes, o que facilita a provisão de estimativas da solução do problema original e também expande o escopo das aplicações do ADMM para modelar o comportamento de qualquer meio heterogêneo. Claramente, quanto mais fina for essa aproximação constante por partes, mais precisos serão os resultados, mas mais esforço computacional será necessário.

Neste capítulo, iremos apresentar um problema de difusão de multicamadas usando a transformada de Laplace. Vamos considerar o caso mais geral na qual as condições de contorno não são homogêneas e sim funções arbitrárias que variam no tempo. Seguindo o procedimento de solução sugerido em (RODRIGO; WORTHY, 2016), em vez de aplicar a transformada de Laplace a cada equação de difusão e tentar encontrar uma fórmula geral de inversão de Laplace, primeiro vamos considerar um problema de difusão de uma camada com condições de contorno que envolvem funções dependentes de tempo arbitrárias e resolver este problema completamente com a transformada de Laplace. Em seguida, expressamos o problema de difusão

em multicamadas como uma seqüência de problemas de difusão de uma camada com condições de contorno apropriadas que possuem funções arbitrárias dependentes do tempo. Usamos a solução analítica do problema de uma camada para encontrar a solução do problema de multicamada, determinando as funções dependentes do tempo através das condições de interface.

4.2 Formulação matemática de um problema de difusão em multicamadas

Um problema de difusão de multicamadas é definido da seguinte maneira. Seja $a, b \in \mathbb{R}$, na qual $a < b$, e supondo que temos uma partição,

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b,$$

no intervalo $[a, b]$. Em cada subintervalo $[x_{n-1}, x_n]$, $n = 1, \dots, N$, vamos considerar a EDP,

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = k_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in (x_{n-1}, x_n) \times \mathbb{R}_+, \quad (4.1)$$

e

$$k_n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{n-1}}^{x_n} k(x) dx, \quad (4.2)$$

para cada função u_n , $n = 1, \dots, N$. Além disso, as condições iniciais são:

$$u_n(x, 0) = f_n(x), \quad x \in [x_{n-1}, x_n], \quad (4.3)$$

para todo $n = 1, \dots, N$. E as condições de contorno são dadas por:

$$\begin{aligned} \alpha u_1(a, t) + \beta \frac{\partial u_1}{\partial x}(a, t) &= g(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \gamma u_N(b, t) + \delta \frac{\partial u_N}{\partial x}(b, t) &= h(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \end{aligned} \quad (4.4)$$

nas quais α, β, γ , e δ são constantes que satisfazem:

$$|\alpha| + |\beta| > 0, \quad |\gamma| + |\delta| > 0.$$

E teremos as seguintes condições de continuidade na interface em $x = x_n$, $n = 1, \dots, N - 1$:

$$\begin{aligned} u_n(x_n, t) &= u_{n+1}(x_n, t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ k_n \frac{\partial u_n}{\partial x}(x_n, t) &= k_{n+1} \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x}(x_n, t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Para determinadas funções f_1, \dots, f_N , g e h , queremos encontrar a solução formal do

problema (4.1)-(4.5) usando a transformada de Laplace.

O problema (4.1)-(4.5) pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = k_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, (x, t) \in (x_0, x_1) \times \mathbb{R}_+, \\ u_1(x, 0) = f_1(x), x \in [x_0, x_1], \\ \alpha u_1(x_0, t) + \beta \frac{\partial u_1}{\partial x}(x_0, t) = g_1(t), t \in \mathbb{R}_+, \\ k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}(x_1, t) = h_1(t), t \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} = k_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}, (x, t) \in (x_{n-1}, x_n) \times \mathbb{R}_+, \\ u_n(x, 0) = f_n(x), x \in [x_{n-1}, x_n], \\ k_n \frac{\partial u_n}{\partial x}(x_{n-1}, t) = g_n(t), t \in \mathbb{R}_+, (n = 2, \dots, N-1) \\ k_n \frac{\partial u_n}{\partial x}(x_n, t) = h_n(t), t \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_N}{\partial t} = k_N \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2}, (x, t) \in (x_{N-1}, x_N) \times \mathbb{R}_+, \\ u_N(x, 0) = f_N(x), x \in [x_{N-1}, x_N], \\ k_N \frac{\partial u_N}{\partial x}(x_{N-1}, t) = g_N(t), t \in \mathbb{R}_+, \\ \gamma u_N(x_N, t) + \delta \frac{\partial u_N}{\partial x}(x_N, t) = h_N(t). \end{cases} \quad (4.8)$$

As funções g_n e h_n , $n = 1, \dots, N$ são definidas como:

$$g_n(t) = \begin{cases} g(t) & \text{se } n = 1, \\ k_n \frac{\partial u_n}{\partial x}(x_{n-1}, t) & \text{se } n = 2, \dots, N, \end{cases} \quad (4.9)$$

e

$$h_n(t) = \begin{cases} k_n \frac{\partial u_n}{\partial x}(x_n, t) & \text{se } n = 1, \dots, N-1, \\ h(t) & \text{se } n = N, \end{cases} \quad (4.10)$$

respectivamente. Segue de (4.5) que:

$$g_n(t) = h_{n-1}(t) \quad (n = 2, \dots, N), \quad (4.11)$$

isto é, as funções g_n , $n = 2, \dots, N$ são especificadas uma vez que as funções h_n , $n = 1, \dots, N-1$ são determinadas. Note que $g_1(t) = g(t)$ e $h_N(t) = h(t)$ são as condições de contorno (4.4). Assim, nosso objetivo é encontrar h_n para $n = 1, \dots, N-1$ de tal forma que as condições de continuidade,

$$u_n(x_n, t) = u_{n+1}(x_n, t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (n = 1, \dots, N-1), \quad (4.12)$$

sejam satisfeitas.

Podemos ver de (4.6)-(4.8) que cada problema é da forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in (a, b) \times \mathbb{R}_+, \quad (4.13)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [a, b], \quad (4.14)$$

$$\alpha u(a, t) + \beta \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = g(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (4.15)$$

$$\gamma u(b, t) + \delta \frac{\partial u}{\partial x}(b, t) = h(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (4.16)$$

Portanto, primeiro será resolvido este problema de difusão de uma camada (4.13)-(4.16), e então sua solução será usada para resolver (4.6)-(4.8) em cada camada, com funções fixas mas desconhecidas h_n para $n = 1, \dots, N - 1$. Finalmente, serão usadas as condições de continuidade (4.12) para assim determinar essas funções desconhecidas.

4.3 Solução do problema de difusão para uma camada

Nesta seção, usaremos a transformada de Laplace para resolver o problema de difusão de uma camada.

Aplicando a transformada de Laplace (4.13) teremos:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\} = k \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\}, \quad (4.17)$$

$$s\bar{u}(x, s) - u(x, 0) = k \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2}, \quad (4.18)$$

substituindo a condição inicial (4.14) em (4.18):

$$s\bar{u}(x, s) - f(x) = k \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2}, \quad (4.19)$$

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} - \frac{s}{k} \bar{u}(x, s) = -\frac{f(x)}{k}, \quad (4.20)$$

Para resolver (4.20), vamos usar a seguinte notação:

$$Z'' = \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2}, \quad \text{e} \quad Z = \bar{u}(x, s), \quad (4.21)$$

logo, podemos reescrever (4.20) como:

$$Z'' - \frac{s}{k} Z = -\frac{f(x)}{k}, \quad (4.22)$$

Inicialmente, consideramos a equação homogênea que através do polinômio característico, fornece duas raízes reais e distintas, cuja solução geral da EDO homogênea é:

$$Z = A^* e^{\sqrt{\frac{s}{k}}x} + B^* e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}x}, \quad (4.23)$$

que pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\bar{u}_h(x, s) = A \cosh \sqrt{\frac{s}{k}}x + B \sinh \sqrt{\frac{s}{k}}x, \quad (4.24)$$

A e B são constantes arbitrárias que podem depender do parâmetro s . Através do método de variação dos parâmetros, vamos obter a solução particular:

$$y_p = -\frac{1}{\sqrt{ks}} \int_a^x f(y) \sinh \sqrt{\frac{s}{k}}(x-y) dy, \quad (4.25)$$

a solução geral é dada através da soma da solução do problema homogêneo com a solução particular:

$$\bar{u}(x, s) = A \cosh \sqrt{\frac{s}{k}}x + B \sinh \sqrt{\frac{s}{k}}x - \frac{1}{ks} \int_a^x f(y) \sinh \sqrt{\frac{s}{k}}(x-y) dy. \quad (4.26)$$

Derivando a solução geral (4.26) teremos:

$$\frac{d\bar{u}}{dx} = A \sqrt{\frac{s}{k}} \sinh \sqrt{\frac{s}{k}}x + B \sqrt{\frac{s}{k}} \cosh \sqrt{\frac{s}{k}}x \quad (4.27)$$

Por conveniência e generalização vamos introduzir uma notação vetorial e vamos utilizar $p = (\alpha, \beta)$ e $q = (\gamma, \delta)$, e através da solução geral e sua derivada reescrevemos:

$$u(y, s) = \left(\cosh \sqrt{\frac{s}{k}}y, \sqrt{\frac{s}{k}} \sinh \sqrt{\frac{s}{k}}y \right), \quad (4.28)$$

$$v(y, s) = \left(\sinh \sqrt{\frac{s}{k}}y, \sqrt{\frac{s}{k}} \cosh \sqrt{\frac{s}{k}}y \right). \quad (4.29)$$

Segue que:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(y, s) = \sqrt{\frac{s}{k}}v(y, s), \quad \frac{\partial v}{\partial y}(y, s) = \sqrt{\frac{s}{k}}u(y, s). \quad (4.30)$$

Agora vamos aplicar a transformada de Laplace na condição de contorno (4.15):

$$\alpha \mathcal{L}\{u(a, t)\} + \beta \mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}(a, t)\right\} = \mathcal{L}\{g(t)\}, \quad (4.31)$$

$$\alpha \bar{u}(a, s) + \beta \frac{d\bar{u}}{dx}(a, s) = \bar{g}(s), \quad (4.32)$$

na qual $\bar{g}(s)$ é a transformada de Laplace de g . Substituindo (4.26) na (4.32), teremos:

$$\begin{aligned} & \alpha \left(A \cosh \sqrt{\frac{s}{k}} a + B \sinh \sqrt{\frac{s}{k}} a - \frac{1}{\sqrt{ks}} \int_a^a f(y) \sinh \sqrt{\frac{s}{k}} (a-y) dy \right) \\ & + \beta \left(A \sqrt{\frac{s}{k}} \sinh \sqrt{\frac{s}{k}} a + B \sqrt{\frac{s}{k}} \cosh \sqrt{\frac{s}{k}} a - \frac{1}{\sqrt{k}} \int_a^a f(y) \cosh \sqrt{\frac{s}{k}} (a-y) dy \right) = \bar{g}(s). \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$A \left((\alpha, \beta) \left(\cosh \sqrt{\frac{s}{k}} a, \sqrt{\frac{s}{k}} \sinh \sqrt{\frac{s}{k}} a \right) \right) + B \left((\alpha, \beta) \left(\sinh \sqrt{\frac{s}{k}} a, \sqrt{\frac{s}{k}} \cosh \sqrt{\frac{s}{k}} a \right) \right) = \bar{g}(s), \quad (4.34)$$

podemos reescrever em forma vetorial como:

$$A \langle p, u(a, s) \rangle + B \langle p, v(a, s) \rangle = \bar{g}(s). \quad (4.35)$$

De maneira análoga vamos aplicar a transformada de Laplace na condição de contorno (4.16), teremos:

$$\gamma \mathcal{L} \{u(b, t)\} + \delta \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}(b, t) \right\} = \mathcal{L} \{h(t)\}, \quad (4.36)$$

$$\gamma \bar{u}(b, s) + \delta \frac{d\bar{u}}{dx}(b, s) = \bar{h}(s). \quad (4.37)$$

Através da substituição de (4.26) e (4.27) em (4.37), vamos obter:

$$A \langle q, u(b, s) \rangle + B \langle q, v(b, s) \rangle = \bar{h}(s) + \frac{1}{\sqrt{ks}} \int_a^b f(y) \langle q, v(b-y, s) \rangle dy. \quad (4.38)$$

Podemos escrever (4.35) e (4.38) em forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \langle p, u(a, s) \rangle & \langle p, v(a, s) \rangle \\ \langle q, u(b, s) \rangle & \langle q, v(b, s) \rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{g}(s) \\ \bar{h}(s) + \frac{1}{\sqrt{ks}} \int_a^b f(y) \langle q, v(b-y, s) \rangle dy \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

na qual $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto escalar usual em \mathbb{R}^2 . O determinante $\Delta(s)$ associado à matriz apresentada em (4.39) é:

$$\Delta(s) = \langle p, u(a, s) \rangle \cdot \langle q, v(b, s) \rangle - \langle p, v(a, s) \rangle \cdot \langle q, u(b, s) \rangle. \quad (4.40)$$

Através da matriz podemos escrever em forma de sistema, como:

$$\begin{cases} A \langle p, u(a, s) \rangle + B \langle p, v(a, s) \rangle = \bar{g}(s), \\ A \langle q, u(b, s) \rangle + B \langle q, v(b, s) \rangle = \bar{h}(s) + \frac{1}{\sqrt{ks}} \int_a^b f(y) \langle q, v(b-y, s) \rangle dy, \end{cases} \quad (4.41)$$

isolando B na primeira linha do sistema, teremos:

$$B = \frac{\bar{g}(s) - A \langle p, u(a, s) \rangle}{\langle p, v(a, s) \rangle}, \quad (4.42)$$

substituindo na segunda equação, teremos:

$$\begin{aligned} A \langle q, u(b, s) \rangle + \left(\frac{\bar{g}(s) - A \langle p, u(a, s) \rangle}{\langle p, v(a, s) \rangle} \right) \langle q, v(b, s) \rangle \\ = \bar{h}(s) + \frac{1}{\sqrt{ks}} \int_a^b f(y) \langle q, v(b-y, s) \rangle dy, \end{aligned} \quad (4.43)$$

podemos reescrever como:

$$\begin{aligned} A \langle q, u(b, s) \rangle \langle p, v(a, s) \rangle + \bar{g}(s) \langle q, v(b, s) \rangle - A \langle p, u(a, s) \rangle \langle q, v(b, s) \rangle \\ = \bar{h}(s) \langle p, v(a, s) \rangle + \langle p, v(a, s) \rangle \frac{1}{\sqrt{ks}} \int_a^b f(y) \langle q, v(b-y, s) \rangle dy, \end{aligned} \quad (4.44)$$

colocando A em evidência teremos:

$$\begin{aligned} A (\langle p, u(a, s) \rangle \langle q, v(b, s) \rangle - \langle q, u(b, s) \rangle \langle p, v(a, s) \rangle) \\ = \bar{g}(s) \langle q, v(b, s) \rangle - \bar{h}(s) \langle p, v(a, s) \rangle - \frac{1}{\sqrt{ks}} \int_a^b f(y) \langle p, v(a, s) \rangle \langle q, v(b-y, s) \rangle dy. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Assim teremos:

$$\begin{aligned} A \Delta(s) = \bar{g}(s) \langle q, v(b, s) \rangle - \bar{h}(s) \langle p, v(a, s) \rangle \\ - \frac{1}{\sqrt{ks}} \int_a^b f(y) \langle p, v(a, s) \rangle \langle q, v(b-y, s) \rangle dy. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Dividindo ambos os lados de (4.46), vamos obter A :

$$\begin{aligned} A = \frac{\bar{g}(s) \langle q, v(b, s) \rangle}{\Delta(s)} - \frac{\bar{h}(s) \langle p, v(a, s) \rangle}{\Delta(s)} \\ - \frac{1}{\Delta(s) \sqrt{ks}} \int_a^b f(y) \langle p, v(a, s) \rangle \langle q, v(b-y, s) \rangle dy. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Para determinarmos o valor de B basta substituir (4.47) em (4.42):

$$\begin{aligned}
B &= -\frac{\bar{g}(s) \langle q, u(b, s) \rangle}{\Delta(s)} + \frac{\bar{h}(s) \langle p, u(a, s) \rangle}{\Delta(s)} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{\Delta(s)ks}} \int_a^b f(y) \langle p, u(a, s) \rangle \langle q, v(b-y, s) \rangle dy
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Substituindo (4.47) e (4.48) na solução geral (4.26), teremos:

$$\begin{aligned}
\bar{u}(x, s) &= (\bar{g}(s) \langle q, v(b, s) \rangle - \bar{h}(s) \langle p, v(a, s) \rangle) \\
&- \frac{1}{\sqrt{ks}} \int_a^b f(y) \langle p, v(a, s) \rangle \cdot \langle q, v(b-y, s) \rangle dy \cdot \frac{1}{\Delta_1(s)} \Big) \cdot \cosh \sqrt{\frac{s}{k}} x \\
&+ (-\bar{g}(s) \langle q, u(b, s) \rangle + \bar{h}(s) \langle p, u(a, s) \rangle) \\
&+ \frac{1}{\sqrt{ks}} \int_a^b f(y) \langle p, u(a, s) \rangle \cdot \langle q, v(b-y, s) \rangle dy \frac{1}{\Delta(s)} \Big) \cdot \sinh \sqrt{\frac{s}{k}} x \\
&- \frac{1}{\sqrt{ks}} \int_a^x f(y) \sinh \sqrt{\frac{s}{k}} (x-y) dy.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Reescrevendo teremos:

$$\begin{aligned}
\bar{u}(x, s) &= \frac{\bar{g}(s) \langle q, v(b, s) \rangle \cosh \sqrt{\frac{s}{k}} x}{\Delta(s)} - \frac{\bar{h}(s) \langle p, v(a, s) \rangle \cosh \sqrt{\frac{s}{k}} x}{\Delta(s)} \\
&- \frac{1}{\Delta(s) \sqrt{ks}} \int_a^b f(y) \langle p, v(a, s) \rangle \langle q, v(b-y, s) \rangle dy \cosh \sqrt{\frac{s}{k}} x \\
&- \frac{\bar{g}(s) \langle q, u(b, s) \rangle}{\Delta(s)} \sinh \sqrt{\frac{s}{k}} x + \frac{\bar{h}(s) \langle p, u(a, s) \rangle}{\Delta(s)} \sinh \sqrt{\frac{s}{k}} x \\
&+ \frac{1}{\Delta(s) \sqrt{ks}} \int_a^b f(y) \langle p, u(a, s) \rangle \langle q, v(b-y, s) \rangle dy \sinh \sqrt{\frac{s}{k}} x \\
&- \frac{1}{\sqrt{ks}} \int_a^x f(y) \sinh \sqrt{\frac{s}{k}} (x-y) dy.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Vamos usar a seguinte propriedade:

$$\phi(x, y; s, r) = \langle r, v(y, s) \rangle \cosh \sqrt{\frac{s}{k_n}} x - \langle r, u(y, s) \rangle \sinh \sqrt{\frac{s}{k_n}} x. \tag{4.51}$$

Reescrevendo (4.50) usando a propriedade (4.51) teremos:

$$\begin{aligned}
\bar{u}(x, s) &= \frac{\bar{g}(s) \phi(x, b; s, q)}{\Delta(s)} - \frac{\bar{h}(s) \phi(x, a; s, p)}{\Delta(s)} \\
&- \frac{\phi(x, a; s, p)}{\sqrt{ks} \cdot \Delta(s)} \int_a^b f(y) \langle q, v(b-y, s) \rangle dy - \frac{1}{\sqrt{ks}} \int_a^b f(y) \sinh \sqrt{\frac{s}{k}} (x-y) dy.
\end{aligned} \tag{4.52}$$

E assim, para reduzir (4.52) vamos denotar:

$$\begin{aligned} \bar{V}(x, s) = & -\frac{\phi(x, a; s, p)}{\sqrt{ks}\Delta(s)} \int_a^b f(y) \langle q, v(b-y, s) \rangle dy \\ & -\frac{1}{\sqrt{ks}} \int_a^x f(y) \operatorname{senh} \sqrt{\frac{s}{k}}(x-y) dy, \end{aligned} \quad (4.53)$$

com isso, conseguimos reescrever (4.52) da seguinte maneira:

$$\bar{u}(x, s) = \frac{\bar{g}(s)\phi(x, b; s, q)}{\Delta(s)} - \frac{\bar{h}(s)\phi(x, a; s, p)}{\Delta(s)} + \bar{V}(x, s). \quad (4.54)$$

A inversão da transformada de Laplace (4.53) e (4.54) será obtida através de uma série de lemas (RODRIGO; WORTHY, 2016). Assumimos que existe uma sequência não nula $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ que satisfaz:

$$\Delta(s_k) = 0, \quad \Delta'(s_k) \neq 0 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (4.55)$$

Esta sequência é análoga aos autovalores quando se usa a separação de variáveis para resolver um problema homogêneo.

Lema 4.1 Seja $s, x, y \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{R}^2$. Teremos:

$$\phi(x, y; s, r) = \langle r, v(y-x, s) \rangle, \quad (4.56)$$

em que ϕ é dado em (4.51).

Aplicando o Lema 4.1, podemos reescrever (4.54) da seguinte maneira:

$$\hat{u}(x, s) = \bar{g}(s) \frac{\langle q, v(b-x, s) \rangle}{\Delta(s)} - \bar{h}(s) \frac{\langle p, v(a-x, s) \rangle}{\Delta(s)} + \bar{v}(x, s). \quad (4.57)$$

Multiplicando e dividindo por s , teremos:

$$\hat{u}(x, s) = s\bar{g}(s) \frac{\langle q, v(b-x, s) \rangle}{s\Delta(s)} - s\bar{h}(s) \frac{\langle p, v(a-x, s) \rangle}{s\Delta(s)} + \bar{v}(x, s). \quad (4.58)$$

Vamos reescrever (4.54) na forma dada em (4.58) e vamos introduzir os termos $g'(t)$ e $h'(t)$ dentro das integrais quando aplicamos o teorema da convolução (4.58). Além disso, vamos dividir as integrais em (4.53) e de aplicar o Lema 4.1, obtemos:

$$\bar{v}(x, s) = -\int_a^x f(y) \frac{\Phi(x, a; s, p)\Phi(y, b; s, q) + \Delta(s) \operatorname{senh} \sqrt{\frac{s}{k}}(x-y) dy}{\sqrt{ks}\Delta(s)}$$

$$- \int_x^b f(y) \frac{\Phi(x, a; s, p) \Phi(y, b; s, q) dy}{\sqrt{ks}} \Delta(s) dy. \quad (4.59)$$

Lema 4.2 Seja $s, x, y \in \mathbb{R}$. Então:

$$\Delta(s) \sinh \sqrt{\frac{s}{k}}(x - y) = -\phi(x, a; s, p) \phi(y, b; s, q) + \phi(y, a; s, p) \phi(x, b; s, q). \quad (4.60)$$

Aplicando o Lema 4.2 e o Lema 4.1 em (4.59), vamos obter:

$$\begin{aligned} \bar{v}(x, s) = & - \int_a^x f(y) \frac{\langle p, v(a - y, s) \rangle \langle q, v(b - x, s) \rangle}{\sqrt{ks} \Delta(s)} dy \\ & - \int_x^b f(y) \frac{\langle p, v(a - x, s) \rangle \langle q, v(b - y, s) \rangle}{\sqrt{ks} \Delta(s)} dy. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Assim podemos inverter a solução para o problema (4.13)-(4.16) encontrando as transformadas inversas de Laplace (4.58) e (4.61). Ainda, quando usamos o símbolo \mathcal{O} , queremos dizer que $s \rightarrow 0$.

Lema 4.3 Vamos supor que (4.55) é verdadeiro. Então para qualquer $x, y \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}_+$, teremos:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\langle p, v(x, s) \rangle \langle q, v(y, s) \rangle}{\sqrt{ks} \Delta(s)} \right\} = G(x, y, t),$$

em que,

$$G(x, y, t) = G_0(x, y) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{s_j t} \langle p, v(x, s_j) \rangle \langle q, v(y, s_j) \rangle}{\sqrt{ks_j} \Delta'(s_j)}, \quad (4.62)$$

e

$$G_0(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } \frac{\langle p, v(x, s) \rangle \langle q, v(y, s) \rangle}{\sqrt{ks} \Delta(s)} = \mathcal{O}(1), \\ \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{s}{k}} \frac{\langle p, v(x, s) \rangle \langle q, v(y, s) \rangle}{\Delta(s)} & \text{se } \frac{\langle p, v(x, s) \rangle \langle q, v(y, s) \rangle}{\sqrt{ks} \Delta(s)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{s}\right). \end{cases} \quad (4.63)$$

Assim, aplicando a transformada de Laplace em (4.61) e usando o Lema 4.3, teremos:

$$\begin{aligned} v(x, t) = & - \int_a^x G_0(a - y, b - x, t) f(y) dy - \int_x^b G_0(a - x, b - y, t) f(y) dy \\ = & - \int_a^x G_0(a - y, b - x) f(y) dy - \int_x^b G_0(a - x, b - y) f(y) dy \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{s_k t}}{\sqrt{ds_k} \Delta'(s_k)} \langle q, v(b - x, s_k) \rangle \int_a^x f(y) \langle p, v(a - y, s_k) \rangle dy \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{s_k t}}{\sqrt{d s_k} \Delta'(s_k)} \langle p, v(a-x, s_k) \rangle \int_x^b f(y) \langle q, v(b-y, s_k) \rangle dy.$$

Queremos que $G_0(a-y, b-x) = G_0(a-x, b-y)$. Isto é evidente quando G_0 é zero em (4.64). Através do Lema 4.2, podemos observar que:

$$\begin{aligned} \Delta(s) \operatorname{senh} \sqrt{\frac{s}{k}}(x-y) &= -\langle p, v(a-x, s) \rangle \langle q, v(b-y, s) \rangle \\ &+ \langle p, v(a-y, s) \rangle \langle q, v(b-x, s) \rangle. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Então,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{s}{k}} \frac{\langle p, v(a-y, s) \rangle \langle q, v(b-x, s) \rangle}{\Delta(s)} &= \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{s}{k}} \frac{\langle p, v(a-x, s) \rangle \langle q, v(b-y, s) \rangle}{\Delta(s)} \\ + \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{s}{k}} \operatorname{senh} \sqrt{\frac{s}{k}}(x-y) &= \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{s}{k}} \frac{\langle p, v(a-x, s) \rangle \langle q, v(b-y, s) \rangle}{\Delta(s)}, \end{aligned} \quad (4.66)$$

que completa a prova. Além disso, do Lema 4.2, juntamente com (4.55), teremos:

$$\langle p, v(a-y, s_j) \rangle \langle q, v(b-x, s_j) \rangle = \langle p, v(a-x, s_j) \rangle \langle q, v(b-y, s_j) \rangle. \quad (4.67)$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\langle p, v(a-x, s_j) \rangle \int_x^b f(y) \langle q, v(b-y, s_j) \rangle dy \\ &= \int_x^b f(y) \langle p, v(a-x, s_j) \rangle \langle q, v(b-y, s_j) \rangle dy \\ &= \int_x^b f(y) \langle p, v(a-y, s_j) \rangle \langle q, v(b-x, s_j) \rangle dy \\ &= \langle q, v(b-x, s_j) \rangle \int_x^b f(y) \langle p, v(a-y, s_j) \rangle dy. \end{aligned}$$

Portanto (4.64) é simplificada como:

$$\begin{aligned} v(x, t) &= - \int_a^b G_0(a-x, b-y) f(y) dy \\ &- \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\int_a^b f(y) \langle p, v(a-y, s_j) \rangle dy}{\sqrt{k s_j} \Delta'(s_j)} e^{s_j t} \langle q, v(b-x, s_j) \rangle. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Lema 4.4 Vamos supor que (4.55) é verdadeiro. Então para qualquer $y \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}_+$,

e $r \in \mathbb{R}^2$, teremos:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\langle r, v(y, s) \rangle}{s\Delta(s)} \right\} = F(y, t; r),$$

em que,

$$F(y, t; r) = F_0(y; r) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{s_j t} \langle r, v(y, s_j) \rangle}{s_j \Delta'(s_j)}, \quad (4.69)$$

e

$$F_0(y; r) = \begin{cases} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\langle r, v(y, s) \rangle}{\Delta(s)} & \text{se } \frac{\langle r, v(y, s) \rangle}{s\Delta(s)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{s}\right) \\ \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{s \langle r, v(y, s) \rangle}{\Delta(s)} \right] & \text{se } \frac{\langle r, v(y, s) \rangle}{s\Delta(s)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{s^2}\right). \end{cases} \quad (4.70)$$

Do Lema 4.4, temos:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\langle q, v(b-x, s) \rangle}{s\Delta(s)} \right\} = F(b-x, t; q),$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\langle p, v(a-x, s) \rangle}{s\Delta(s)} \right\} = F(a-x, t; p).$$

Assim, pelo teorema da convolução, a transformada inversa de Laplace de (4.58) é:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t F(b-x, t-\tau; q) [g'(\tau) + g(0)\delta_0(\tau)] d\tau \\ &\quad - \int_0^t F(a-x, t-\tau; p) [h'(\tau) + h(0)\delta_0(\tau)] d\tau + v(x, t), \end{aligned}$$

na qual δ_0 é o delta de Dirac, centrado em zero. Isto implica que:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t F(b-x, t-\tau; q) g'(\tau) d\tau + g(0)F(b-x, t; q) \\ &\quad - \int_0^t F(a-x, t-\tau; p) h'(\tau) d\tau - h(0)F(a-x, t; p) + v(x, t), \end{aligned}$$

através das propriedades da função delta de Dirac. Integrando por partes, teremos:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= F(b-x, 0; q)g(t) + \int_0^t D_2 F(b-x, t-\tau; q)g(\tau) d\tau \\ &\quad - F(a-x, 0; p)h(t) - \int_0^t D_2 F(a-x, t-\tau; p)h(\tau) d\tau + v(x, t), \end{aligned} \quad (4.71)$$

em que D_j denota a derivada parcial em relação ao j -ésimo argumento. De (4.69), teremos:

$$F(b-x, 0; q) = F_0(b-x; q) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\langle q, v(b-x, s_j) \rangle}{s_j \Delta'(s_j)},$$

$$F(a - x, 0; p) = F_0(a - x; p) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\langle p, v(a - x, s_j) \rangle}{s_j \Delta'(s_j)},$$

$$D_2 F(y, t; r) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{s_j t} \frac{\langle r, v(y, s_j) \rangle}{\Delta'(s_j)}.$$

Assim (4.71) pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= F_0(b - x; q)g(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g(t) + \int_0^t s_j e^{s_j(t-\tau)} g(\tau) d\tau}{s_j \Delta'(s_k)} \langle q, v(b - x, s_j) \rangle \\ &- F_0(a - x; p)h(t) - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{h(t) + \int_0^t s_j e^{s_j(t-\tau)} h(\tau) d\tau}{s_j \Delta'(s_j)} \langle p, v(a - x, s_j) \rangle + V(x, t) \\ &= F_0(b - x; q)g(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{U_j g(t)}{s_j \Delta'(s_j)} \langle q, v(b - x, s_j) \rangle \\ &- F_0(a - x; p)h(t) - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{U_j h(t)}{s_j \Delta'(s_j)} \langle p, v(a - x, s_j) \rangle + V(x, t), \end{aligned} \quad (4.72)$$

sendo U_j o operador definido por:

$$U_j \phi(t) = \phi(t) + \int_0^t s_k e^{s_k(t-\tau)} \phi(\tau) d\tau. \quad (4.73)$$

Portanto (4.72), junto com (4.68), é a solução formal do problema (4.13)-(4.16). Para uso posterior, introduzimos o operador linear T_F por:

$$T_F h(y, t; r) = F(y, 0; r)h(t) + \int_0^t D_2 F(y, t - \tau; r)h(\tau) d\tau. \quad (4.74)$$

Assim sendo, (4.72) pode ser expressa alternativamente como:

$$u(x, t) = T_F g(b - x, t; q) - T_F h(a - x, t; p) + V(x, t). \quad (4.75)$$

4.4 Solução para o problema de duas camadas

Nesta seção, usaremos o procedimento detalhado na seção anterior para resolver o problema de difusão para duas camadas. Isto é, tomando $N = 2$ em (4.6)-(4.8) vamos considerar:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = k_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in (x_0, x_1) \times \mathbb{R}_+, \quad (4.76)$$

$$u_1(x, 0) = f_1(x), \quad x \in [x_0, x_1], \quad (4.77)$$

$$\alpha u_1(x_0, t) + \beta \frac{\partial u_1}{\partial x}(x_0, t) = g_1(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (4.78)$$

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}(x_1, t) = h_1(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (4.79)$$

e

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = k_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in (x_1, x_2) \times \mathbb{R}_+, \quad (4.80)$$

$$u_2(x, 0) = f_2(x), \quad x \in [x_1, x_2], \quad (4.81)$$

$$k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}(x_1, t) = g_2(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (4.82)$$

$$\gamma u_2(x_2, t) + \delta \frac{\partial u_2}{\partial x}(x_2, t) = h_2(t). \quad (4.83)$$

Seguindo o mesmo procedimento que na seção anterior, obtemos as soluções gerais de (4.76) e (4.80):

$$\bar{u}_1(x, s) = A_1 \cosh \sqrt{\frac{s}{k_1}} x + B_1 \sinh \sqrt{\frac{s}{k_1}} x - \frac{1}{\sqrt{k_1 s}} \int_{x_0}^x f(y) \sinh \sqrt{\frac{s}{k_1}} (x - y) dy, \quad (4.84)$$

$$\bar{u}_2 = A_2 \cosh \sqrt{\frac{s}{k_2}} x + B_2 \sinh \sqrt{\frac{s}{k_2}} x - \frac{1}{\sqrt{k_2 s}} \int_x^{x_2} f(y) \sinh \sqrt{\frac{s}{k_2}} (x - y) dy. \quad (4.85)$$

Derivando (4.84) e (4.85), teremos:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}_1}{dx} &= A_1 \sqrt{\frac{s}{k_1}} \sinh \sqrt{\frac{s}{k_1}} x + B_1 \sqrt{\frac{s}{k_1}} \cosh \sqrt{\frac{s}{k_1}} x \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{k_1}} \int_{x_0}^x f(y) \cosh \sqrt{\frac{s}{k_1}} (x - y) dy. \end{aligned} \quad (4.86)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}_2}{dx}(x, s) &= A_2 \sqrt{\frac{s}{k_2}} \sinh \sqrt{\frac{s}{k_2}} x + B_2 \sqrt{\frac{s}{k_2}} \cosh \sqrt{\frac{s}{k_2}} x \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{k_2}} \int_x^{x_2} f(y) \cosh \sqrt{\frac{s}{k_2}} (x - y) dy. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Por conveniência e generalização vamos introduzir uma notação vetorial:

$$p_1 = (\alpha, \beta), \quad p_2 = (0, k_2), \quad q_1 = (0, k_1), \quad q_2 = (\gamma, \delta). \quad (4.88)$$

E assim, vamos definir as funções g_n e h_n para $n = 1, 2$.

$$g_n(t) = \begin{cases} g(t) & \text{se } n = 1 \\ k_n \frac{\partial u_n}{\partial x}(x_1, t) & \text{se } n = 2. \end{cases} \quad (4.89)$$

$$h_n(t) = \begin{cases} k_n \frac{\partial u_1}{\partial x}(x_1, t) & \text{se } n = 1. \\ h(t) & \text{se } n = 2. \end{cases} \quad (4.90)$$

E através da solução geral e sua derivada, teremos:

$$u_1(y, s) = \left(\cosh \sqrt{\frac{s}{k_1}} y, \sqrt{\frac{s}{k_1}} \sinh \sqrt{\frac{s}{k_1}} y \right), \quad (4.91)$$

$$u_2(y, s) = \left(\cosh \sqrt{\frac{s}{k_2}} y, \sqrt{\frac{s}{k_2}} \sinh \sqrt{\frac{s}{k_2}} y \right), \quad (4.92)$$

$$v_1(y, s) = \left(\sinh \sqrt{\frac{s}{k_1}} y, \sqrt{\frac{s}{k_1}} \cosh \sqrt{\frac{s}{k_1}} y \right), \quad (4.93)$$

$$v_2(y, s) = \left(\sinh \sqrt{\frac{s}{k_2}} y, \sqrt{\frac{s}{k_2}} \cosh \sqrt{\frac{s}{k_2}} y \right). \quad (4.94)$$

Agora vamos aplicar a transformada de Laplace na condição de contorno (4.78), teremos:

$$\alpha \mathcal{L} \{u_1(x_0, t)\} + \beta \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x}(x_0, t) \right\} = \mathcal{L} \{g_1(t)\}, \quad (4.95)$$

$$\alpha \bar{u}_1(x_0, s) + \beta \frac{d\bar{u}_1}{dx}(x_0, s) = \bar{g}_1(s) = \bar{g}(s), \quad (4.96)$$

Substituindo (4.84) e (4.86) em (4.96), teremos:

$$\begin{aligned} & \alpha \left(A_1 \cosh \sqrt{\frac{s}{k_1}} x_0 + B_1 \sinh \sqrt{\frac{s}{k_1}} x_0 - \frac{1}{\sqrt{k_1 s}} \int_{x_0}^{x_0} f_1(y) \sinh \sqrt{\frac{s}{k_1}} (x_0 - y) dy \right) \\ & + \beta \left(A_1 \sqrt{\frac{s}{k_1}} \sinh \sqrt{\frac{s}{k_1}} x_0 + B_1 \sqrt{\frac{s}{k_1}} \cosh \sqrt{\frac{s}{k_1}} x_0 - \frac{1}{\sqrt{k_1}} \int_{x_0}^{x_0} f_1(y) \cosh \sqrt{\frac{s}{k_1}} (x_0 - y) dy \right) \\ & = \bar{g}(s). \end{aligned} \quad (4.97)$$

$$\begin{aligned} & A_1 \left((\alpha, \beta) \left(\cosh \sqrt{\frac{s}{k_1}} x_0, \sqrt{\frac{s}{k_1}} \sinh \sqrt{\frac{s}{k_1}} x_0 \right) \right) \\ & + B_1 \left((\alpha, \beta) \left(\sinh \sqrt{\frac{s}{k_1}} x_0, \sqrt{\frac{s}{k_1}} \cosh \sqrt{\frac{s}{k_1}} x_0 \right) \right) = \bar{g}(s), \end{aligned} \quad (4.98)$$

consequimos reescrever (4.98) na forma vetorial, como:

$$A_1 \cdot \langle p_1, u_1(x_0, s) \rangle + B_1 \langle p_1, v_1(x_0, s) \rangle = \bar{g}(s). \quad (4.99)$$

Aplicando a transformada de Laplace em (4.79), teremos:

$$k_1 \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x}(x_1, t) \right\} = \mathcal{L} \{h_1(t)\}, \quad (4.100)$$

$$k_1 \frac{du_1}{dx}(x_1, s) = \bar{h}_1(s), \quad (4.101)$$

substituindo (4.86) em (4.100), teremos:

$$\begin{aligned} k_1 \left(A_1 \sqrt{\frac{s}{k_1}} \sinh \sqrt{\frac{s}{k_1}} x_1 + B_1 \sqrt{\frac{s}{k_1}} \cosh \sqrt{\frac{s}{k_1}} x_1 - \frac{1}{k_1} \int_{x_0}^{x_1} f_1(y) \cosh \sqrt{\frac{s}{k_1}}(x_1 - y) dy \right) \\ = \bar{h}_1(s), \end{aligned} \quad (4.102)$$

$$\begin{aligned} A_1 \left((0, k_1) \left(\cosh \sqrt{\frac{s}{k_1}} x_1 + \frac{s}{k_1} \sinh \sqrt{\frac{s}{k_1}} x_1 \right) \right) + B_1 \left((0, k_1) \left(\sinh \sqrt{\frac{s}{k_1}} x_1 + \frac{s}{k_1} \cosh \sqrt{\frac{s}{k_1}} x_1 \right) \right) \\ = \bar{h}_1(s) + \frac{1}{k_1} \int_{x_0}^{x_1} f_1(y) \cosh \sqrt{\frac{s}{k_1}}(x_1 - y) dy, \end{aligned} \quad (4.103)$$

consequimos reescrever (4.103), como:

$$\begin{aligned} A_1 \langle q_1, u_1(x_1, s) \rangle + B_1 \langle q_1, v_1(x_1, s) \rangle = \bar{h}_1(s) \\ + \frac{1}{\sqrt{k_1 s}} \int_{x_0}^{x_1} f_1(y) \langle q_1, v_1(x_1 - y, s) \rangle dy, \end{aligned} \quad (4.104)$$

Escrevendo em forma matricial (4.99) e (4.104) temos:

$$\begin{pmatrix} \langle p_1, u_1(x_0, s) \rangle & \langle p_1, v_1(x_0, s) \rangle \\ \langle q_1, u_1(x_1, s) \rangle & \langle q_1, v_1(x_1, s) \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{g}_1(s) \\ \bar{h}_1(s) + \frac{1}{\sqrt{k_1 s}} \int_{x_0}^{x_1} f_1(y) \langle q_1, v_1(x_1 - y, s) \rangle dy \end{pmatrix} \quad (4.105)$$

O determinante de (4.105) é:

$$\Delta_1(s) = \langle p_1, u_1(x_0, s) \rangle \langle q_1, v_1(x_1, s) \rangle - \langle p_1, v_1(x_0, s) \rangle \cdot \langle q_1, u_1(x_1, s) \rangle. \quad (4.106)$$

Aplicando a transformada de Laplace em (4.82),

$$k_2 \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial u_2}{\partial x}(x_1, t) \right\} = \mathcal{L} \{g_2(t)\}, \quad (4.107)$$

$$k_2 \frac{d\bar{u}_1}{dx}(x_1, s) = \bar{g}_2(s), \quad (4.108)$$

substituindo (4.87) em (4.108),

$$k_2 \left(A_2 \sqrt{\frac{s}{k_2}} \operatorname{senh} \sqrt{\frac{s}{k_2}} x_1 + B_2 \sqrt{\frac{s}{k_2}} \operatorname{cosh} \sqrt{\frac{s}{k_2}} x_1 - \frac{1}{k_2} \int_{x_1}^{x_1} f_2(y) \operatorname{cosh} \sqrt{\frac{s}{k_2}} (x_1 - y) dy \right) = \bar{g}_2(s), \quad (4.109)$$

$$A_2 \left((0, k_2) \cdot \left(\operatorname{cosh} \sqrt{\frac{s}{k_2}} x_1, \frac{s}{k_2} \operatorname{senh} \sqrt{\frac{s}{k_2}} x_1 \right) \right) + B_2 \left((0, k_2) \cdot \left(\operatorname{senh} \sqrt{\frac{s}{k_2}} x_1, \frac{s}{k_2} \operatorname{cosh} \sqrt{\frac{s}{k_2}} x_1 \right) \right) = \bar{g}_2(s), \quad (4.110)$$

conseguimos reescrever (4.110) na forma vetorial, como:

$$A_2 \langle p_2, u_2(x_1, s) \rangle + B_2 \langle p_2, v_2(x_1, s) \rangle = \bar{g}_2(s). \quad (4.111)$$

Agora vamos aplicar a transformada de Laplace na condição de contorno (4.83):

$$\gamma \mathcal{L} \{u_2(x_2, t)\} + \delta \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial u_2}{\partial x}(x_2, t) \right\} = \mathcal{L} \{h_2(t)\}, \quad (4.112)$$

$$\gamma \bar{u}_2(x_2, s) + \delta \frac{d\bar{u}_2}{dx}(x_2, s) = \bar{h}_2(s). \quad (4.113)$$

Substituindo (4.85) e (4.87) em (4.113), teremos:

$$\begin{aligned} & \gamma \left(A_2 \operatorname{cosh} \sqrt{\frac{s}{k_2}} x_2 + B_2 \operatorname{senh} \sqrt{\frac{s}{k_2}} x_2 - \frac{1}{\sqrt{k_2 s}} \int_{x_1}^{x_2} f_2(y) \operatorname{senh} \sqrt{\frac{s}{k_2}} (x_2 - y) dy \right) \\ & + \delta \left(A_2 \sqrt{\frac{s}{k_2}} \operatorname{senh} \sqrt{\frac{s}{k_2}} x_2 + B_2 \sqrt{\frac{s}{k_2}} \operatorname{cosh} \sqrt{\frac{s}{k_2}} x_2 - \frac{1}{k_2} \int_{x_1}^{x_2} f_2(y) \operatorname{cosh} \sqrt{\frac{s}{k_2}} (x_2 - y) dy \right) \\ & = \bar{h}_2(s), \end{aligned} \quad (4.114)$$

$$\begin{aligned} & A_2 \left[(\gamma, \delta) \left(\operatorname{cosh} \sqrt{\frac{s}{k_2}} x_2, \sqrt{\frac{s}{k_2}} \operatorname{senh} \sqrt{\frac{s}{k_2}} x_2 \right) \right] + \\ & B_2 \left[(\gamma, \delta) \left(\operatorname{senh} \sqrt{\frac{s}{k_2}} x_2, \sqrt{\frac{s}{k_2}} \operatorname{cosh} \sqrt{\frac{s}{k_2}} x_2 \right) \right] = \bar{h}_2(s) + \\ & \frac{1}{\sqrt{k_2 s}} \int_{x_1}^{x_2} f_2(y) \operatorname{senh} \sqrt{\frac{s}{k_2}} (x_2 - y) dy + \frac{1}{k_2} \int_{x_1}^{x_2} f_2(y) \operatorname{cosh} \sqrt{\frac{s}{k_2}} (x_2 - y) dy \end{aligned} \quad (4.115)$$

Logo reescrevendo em forma vetorial:

$$A_2 \langle q_2, u_2(x_2, s) \rangle + B_2 \langle q_2, v_2(x_2, s) \rangle = \bar{h}_2(s) + \frac{1}{\sqrt{k_2 s}} \int_{x_1}^{x_2} f_2(y) \langle q_2, v_2(x_2, s) \rangle dy. \quad (4.116)$$

Escrevendo (4.111) e (4.116) em forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \langle p_2, u_2(x_1, s) \rangle & \langle p_2, v_2(x_1, s) \rangle \\ \langle q_2, u_2(x_2, s) \rangle & \langle q_2, v_2(x_2, s) \rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{g}_2(s) \\ \bar{h}_2(s) + \frac{1}{\sqrt{k_2 s}} \int_{x_1}^{x_2} f_2(y) \langle q_2, v_2(x_2 - y, s) \rangle dy \end{pmatrix} \quad (4.117)$$

e o determinante de (4.117) será:

$$\Delta_2(s) = \langle p_2, u_2(x_1, s) \rangle \langle q_2, v_2(x_2, s) \rangle - \langle p_2, v_2(x_1, s) \rangle \cdot \langle q_2, u_2(x_2, s) \rangle. \quad (4.118)$$

Através da matriz (4.105) podemos escrever a matriz em forma de sistema, como:

$$\begin{cases} A_1 \langle p_1, u_1(x_0, s) \rangle + B_1 \langle p_1, v_1(x_0, s) \rangle = \bar{g}_1(s), \\ A_1 \langle q_1, u_1(x_1, s) \rangle + B_1 \langle q_1, v_1(x_1, s) \rangle = \bar{h}_1(s) + \frac{1}{\sqrt{k_1 s}} \int_{x_0}^{x_1} f_1(y) \langle q_1, v_1(x_1 - y, s) \rangle dy, \end{cases} \quad (4.119)$$

$$B_1 = \frac{\bar{g}_1(s) - A_1 \langle p_1, u_1(x_0, s) \rangle}{\langle p_1, v_1(x_0, s) \rangle}, \quad (4.120)$$

substituindo (4.120) em (4.119), teremos:

$$\begin{aligned} A_1 \langle q_1, u_1(x_1, s) \rangle + \left(\frac{\bar{g}_1(s) - A_1 \langle p_1, u_1(x_0, s) \rangle}{\langle p_1, v_1(x_0, s) \rangle} \right) \langle q_1, v_1(x_1, s) \rangle \\ = \bar{h}_1(s) + \frac{1}{\sqrt{k_1 s}} \int_{x_0}^{x_1} f_1(y) \langle q_1, v_1(x_1 - y, s) \rangle dy, \end{aligned} \quad (4.121)$$

podemos escrever como:

$$\begin{aligned} A_1 \langle q_1, u_1(x_1, s) \rangle \langle p_1, v_1(x_0, s) \rangle + (\bar{g}_1(s) - A_1 \langle p_1, u_1(x_0, s) \rangle) \langle q_1, v_1(x_1, s) \rangle \\ = \bar{h}_1(s) \langle p_1, v_1(x_0, s) \rangle + \langle p_1, v_1(x_0, s) \rangle \frac{1}{\sqrt{k_1 s}} \int_{x_0}^{x_1} f_1(y) \langle q_1, v_1(x_1 - y, s) \rangle dy. \end{aligned} \quad (4.122)$$

Colocando A_1 em evidência teremos:

$$\begin{aligned} A_1 (-\langle p_1, u_1(x_0, s) \rangle \langle q_1, v_1(x_1, s) \rangle + \langle q_1, u_1(x_1, s) \rangle) \\ = -\bar{g}_1(s) \langle q_1, v_1(x_1, s) \rangle + \bar{h}_1(s) \langle p_1, v_1(x_0, s) \rangle \\ + \langle p_1, v_1(x_0, s) \rangle \frac{1}{\sqrt{k_1 s}} \int_{x_0}^{x_1} f_1(y) \langle q_1, v_1(x_1 - y, s) \rangle dy, \end{aligned} \quad (4.123)$$

$$\begin{aligned} A_1 (\langle p_1, u_1(x_0, s) \rangle \langle q_1, v_1(x_1, s) \rangle - \langle q_1, u_1(x_1, s) \rangle) \\ = \bar{g}_1(s) - \bar{h}_1(s) \langle p_1, v_1(x_0, s) \rangle - \langle p_1, v_1(x_0, s) \rangle \\ \frac{1}{\sqrt{k_1 s}} \int_{x_0}^{x_1} f_1(y) \langle q_1, v_1(x_1 - y, s) \rangle dy, \end{aligned} \quad (4.124)$$

podemos reescrever (4.124) como:

$$\begin{aligned} A_1 \Delta_1(s) &= \bar{g}_1(s) \langle q_1, v_1(x_1, s) \rangle - \bar{h}_1(s) \langle p_1, v_1(x_0, s) \rangle \\ &- \langle p_1, v_1(x_0, s) \rangle \frac{1}{\sqrt{k_1 s}} \int_{x_0}^{x_1} f_1(y) \langle q_1, v_1(x_1 - y, s) \rangle dy. \end{aligned} \quad (4.125)$$

Para obter A_1 basta dividir ambos os lados por $\Delta_1(s)$.

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\bar{g}_1(s) \langle q_1, v_1(x_1, s) \rangle}{\Delta_1(s)} - \frac{\bar{h}_1(s) \langle p_1, v_1(x_0, s) \rangle}{\Delta_1(s)} \\ &- \langle p_1, v_1(x_0, s) \rangle \frac{1}{\Delta_1(s) \sqrt{k_1 s}} \int_{x_0}^{x_1} f_1(y) \langle q_1, v_1(x_1 - y, s) \rangle dy. \end{aligned} \quad (4.126)$$

De maneira análoga, vamos obter:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{-\bar{g}_1(s) \langle q_1, u_1(x_1, s) \rangle}{\Delta_1(s)} + \frac{\bar{h}_1(s) \langle p_1, u_1(x_0, s) \rangle}{\Delta_1(s)} \\ &+ \langle p_1, u_1(x_0, s) \rangle \frac{1}{\Delta_1(s) \sqrt{k_1 s}} \int_{x_0}^{x_1} f_1(y) \langle q_1, v_1(x_1 - y, s) \rangle dy. \end{aligned} \quad (4.127)$$

Substituindo (4.126) e (4.127) na solução geral (4.84), teremos:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1(x, s) &= (\bar{g}_1(s) \langle q_1, v_1(x_1, s) \rangle - \bar{h}_1(s) \langle p_1, v_1(x_0, s) \rangle) \\ &- \frac{1}{\sqrt{k_1 s}} \int_{x_0}^{x_1} f_1(y) \langle p_1, v_1(x_0, s) \rangle \cdot \langle q_1, v_1(x_1 - y, s) \rangle dy \left) \frac{1}{\Delta_1(s)} \cosh \sqrt{\frac{s}{k_1}} x \\ &+ (-\bar{g}_1(s) \langle q_1, u_1(x_1, s) \rangle + \bar{h}_1(s) \langle p_1, u_1(x_0, s) \rangle) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{k_1 s}} \int_{x_0}^{x_1} f_1(y) \langle p_1, u_1(x_0, s) \rangle \cdot \langle q_1, v_1(x_1 - y, s) \rangle dy \left) \frac{1}{\Delta_1(s)} \sinh \sqrt{\frac{s}{k_1}} x \\ &- \frac{1}{\sqrt{k_1 s}} \int_{x_0}^{x_1} f_1(y) \sinh \sqrt{\frac{s}{k_1}} (x - y) dy. \end{aligned} \quad (4.128)$$

Reescrevendo (4.128) teremos:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1(x, s) &= \frac{\bar{g}_1(s) \langle q_1, v_1(x_1, s) \rangle \cosh \sqrt{\frac{s}{k_1}} x - \bar{h}_1(s) \langle p_1, v_1(x_0, s) \rangle \cosh \sqrt{\frac{s}{k_1}} x}{\Delta(s)} \\ &- \frac{1}{\Delta_1(s) \sqrt{k_1 s}} \int_{x_0}^{x_1} f_1(y) \langle p_1, v_1(x_0, s) \rangle \langle q_1, v_1(x_1 - y, s) \rangle dy \cosh \sqrt{\frac{s}{k_1}} x \\ &- \frac{\bar{g}_1(s) \langle q_1, u_1(x_1, s) \rangle \sinh \sqrt{\frac{s}{k_1}} x + \bar{h}_1(s) \langle p_1, u_1(x_0, s) \rangle \sinh \sqrt{\frac{s}{k_1}} x}{\Delta_1(s)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\Delta_1(s)\sqrt{k_1s}} \int_{x_0}^{x_1} f_1(y) \langle p_1, u_1(x_0, s) \rangle \langle q_1, v_1(x_1 - y, s) \rangle dy \operatorname{senh} \sqrt{\frac{s}{k_1}} x \\
& - \frac{1}{\sqrt{k_1s}} \int_{x_0}^{x_1} f_1(y) \operatorname{senh} \sqrt{\frac{s}{k_1}} (x - y) dy.
\end{aligned} \tag{4.129}$$

Vamos reescrever (4.129) usando a seguinte propriedade:

$$\phi(x, y; s, r) = \langle r, v(y, s) \rangle \operatorname{cosh} \sqrt{\frac{s}{k_n}} x - \langle r, u(y, s) \rangle \operatorname{senh} \sqrt{\frac{s}{k_n}} x. \tag{4.130}$$

Logo teremos:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_1(x, s) &= \frac{\bar{g}_1(s)\phi(x, x_1; s, q_1)}{\Delta_1(s)} - \frac{\bar{h}_1(s)\phi(x, x_0; s, p_1)}{\Delta_1(s)} \\
& - \frac{\phi(x, x_0; s, p_1)}{\sqrt{k_1s} \cdot \Delta_1(s)} \int_{x_0}^{x_1} f_1(y) \langle q_1, v_1(x_1 - y, s) \rangle dy \\
& - \frac{1}{\sqrt{k_1s}} \int_{x_0}^{x_1} f_1(y) \operatorname{senh} \sqrt{\frac{s}{k_1}} (x - y) dy.
\end{aligned} \tag{4.131}$$

E assim, para reduzir a expressão (4.131) vamos denotar:

$$\begin{aligned}
\bar{V}_1(x, s) &= - \frac{\phi(x, x_0; s, p_1)}{\sqrt{k_1s} \cdot \Delta_1(s)} \int_{x_0}^{x_1} f_1(y) \langle q_1, v_1(x_1 - y, s) \rangle dy \\
& - \frac{1}{\sqrt{k_1s}} \int_{x_0}^{x_1} f_1(y) \operatorname{senh} \sqrt{\frac{s}{k_1}} (x - y) dy,
\end{aligned} \tag{4.132}$$

com isso, conseguimos reescrever (4.131) da seguinte maneira:

$$\bar{u}_1(x, s) = \frac{\bar{g}_1(s)\phi(x, x_1; s, q_1)}{\Delta_1(s)} - \frac{\bar{h}_1(s)\phi(x, x_0; s, p_1)}{\Delta_1(s)} + \bar{V}_1(x, s). \tag{4.133}$$

De maneira análoga ao que foi feito anteriormente, vamos encontrar A_2 e B_2 através do sistema obtido da matriz (4.117):

$$\begin{cases} A_2 \langle p_2, u_2(x_1, s) \rangle + B_2 \langle p_2, v_2(x_1, s) \rangle = \bar{g}_2(s) \\ A_2 \langle q_2, u_2(x_2, s) \rangle + B_2 \langle q_2, v_2(x_2, s) \rangle = \bar{h}_2(s) + \frac{1}{\sqrt{k_2s}} \int_{x_1}^{x_2} f_2(y) \langle q_2, v_2(x_2 - y, s) \rangle dy. \end{cases} \tag{4.134}$$

Isolando B_2 em (4.134),

$$B_2 = \frac{\bar{g}_2(s) - A_2 \langle p_2, u_2(x_1, s) \rangle}{\langle p_2, v_2(x_1, s) \rangle}, \tag{4.135}$$

logo:

$$A_2 \cdot \Delta_2(s) = \bar{g}_2(s) \langle q_2, v_2(x_2, s) \rangle - \bar{h}_2(s) \langle p_2, v_2(x_1, s) \rangle - \langle p_2, v_2(x_1, s) \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{k_2 s}} \int_{x_1}^{x_2} f_2(y) \langle q_2, v_2(x_2 - y, s) \rangle dy. \quad (4.136)$$

$$A_2 = \frac{\bar{g}_2(s) \langle q_2, v_2(x_2, s) \rangle}{\Delta_2(s)} - \frac{\bar{h}_2(s) \langle p_2, v_2(x_1, s) \rangle - \langle p_2, v_2(x_1, s) \rangle}{\Delta_2(s)} \cdot \frac{1}{\sqrt{k_2 s}} \int_{x_1}^{x_2} f_2(y) \langle q_2, v_2(x_2 - y, s) \rangle dy. \quad (4.137)$$

Da mesma maneira que foi feito anteriormente teremos:

$$B_2 \Delta_2(s) = -\bar{g}_2(s) \langle q_2, u_2(x_2, s) \rangle + \bar{h}_2(s) \langle p_2, u_2(x_1, s) \rangle + \frac{1}{\sqrt{k_2 s}} \int_{x_1}^{x_2} f_2(y) \langle p_2, u_2(x_1, s) \rangle \langle q_2, v_2(x_2 - y, s) \rangle dy. \quad (4.138)$$

$$B_2 = -\frac{\bar{g}_2(s) \langle q_2, u_2(x_2, s) \rangle}{\Delta_2(s)} + \frac{\bar{h}_2(s) \langle p_2, u_2(x_1, s) \rangle}{\Delta_2(s)} + \frac{1}{\Delta_2(s) \sqrt{k_2 s}} \int_{x_1}^{x_2} f_2(y) \langle p_2, u_2(x_1, s) \rangle \langle q_2, v_2(x_2 - y, s) \rangle dy. \quad (4.139)$$

Substituindo (4.137) e (4.139) na solução geral (4.85),

$$\begin{aligned} \bar{u}_2(x, s) &= (\bar{g}_2(s) \langle q_2, v_2(x_2, s) \rangle - \bar{h}_2(s) \langle p_2, v_2(x_1, s) \rangle \\ &- \frac{1}{\sqrt{k_2 s}} \int_{x_1}^{x_2} f_2(y) \langle p_2, v_2(x_1, s) \rangle \langle q_2, v_2(x_2 - y, s) \rangle dy) \frac{1}{\Delta_2(s)} \\ &\cosh \sqrt{\frac{s}{k_2}} x + (-\bar{g}_2(s) \langle q_2, u_2(x_2, s) \rangle + \bar{h}_2(s) \langle p_2, u_2(x_1, s) \rangle \\ &+ \frac{1}{\sqrt{k_2 s}} \int_{x_1}^{x_2} f_2(y) \langle p_2, u_2(x_1, s) \rangle \langle q_2, v_2(x_2 - y, s) \rangle dy \cdot \frac{1}{\Delta_2(s)} \cdot \text{senh} \sqrt{\frac{s}{k_2}}) \\ &- \frac{1}{\sqrt{k_2 s}} \int_{x_1}^{x_2} f_2(y) \text{senh} \sqrt{\frac{s}{k_2}} (x - y) dy. \end{aligned} \quad (4.140)$$

Reescrevendo (4.140) usando a notação apresentada pela propriedade (4.130) teremos:

$$\begin{aligned} \bar{u}_2(x, s) &= \frac{\bar{g}_2(s) \phi(x, x_2; s, q_2)}{\Delta_2(s)} - \frac{\bar{h}_2(s) \phi(x, x_1; s, p_2)}{\Delta_2(s)} \\ &- \frac{\phi(x, x_1; s, p_2)}{\sqrt{k_2 s} \cdot \Delta_2(s)} \int_{x_1}^{x_2} f_2(y) \langle q_2, v_2(x_2 - y, s) \rangle dy \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{k_2 s}} \int_{x_1}^{x_2} f_2(y) \sinh \sqrt{\frac{s}{k_2}} (x-y) dy. \quad (4.141)$$

E assim para reduzir a expressão (4.141) teremos:

$$\begin{aligned} \bar{V}_2(x, s) = & -\frac{\phi(x, x_1; s, p_2)}{\sqrt{k_2 s} \cdot \Delta_2(s)} \int_{x_1}^{x_2} f_2(y) \langle q_2, v_2(x_2 - y, s) \rangle dy \\ & -\frac{1}{\sqrt{k_2 s}} \int_{x_1}^{x_2} f_2(y) \sinh \sqrt{\frac{s}{k_2}} (x-y) dy, \end{aligned} \quad (4.142)$$

com isso, reescrevermos (4.141) como:

$$\bar{u}_2(x, s) = \frac{\bar{g}_2(s) \phi(x, x_2; s, q_2)}{\Delta_2(s)} - \frac{\bar{h}_2(s) \phi(x, x_1; s, p_2)}{\Delta_2(s)} + \bar{V}_2(x, s). \quad (4.143)$$

A inversão da transformada de Laplace será obtida através dos Lemas 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4. Vamos assumir que existe uma sequência não nula $\{s_j^{(1)}\}_{j=1}^{\infty}$ e $\{s_j^{(2)}\}_{j=1}^{\infty}$, que satisfaz:

$$\Delta_1(s_j^{(1)}) = 0, \quad \Delta_1'(s_j^{(1)}) \neq 0 \quad (4.144)$$

e

$$\Delta_2(s_j^{(2)}) = 0, \quad \Delta_2'(s_j^{(2)}) \neq 0 \text{ para } (j=1,2) \quad (4.145)$$

Aplicando o Lema 4.1, de (4.133) teremos:

$$\bar{u}_1(x, s) = \frac{\bar{g}_1(s) \langle q_1, v_1(x_1 - x, s) \rangle}{\Delta_1(s)} - \frac{\bar{h}_1(s) \langle p_1, v_1(x_0 - x, s) \rangle}{\Delta_1(s)} + \bar{V}_1(x, s), \quad (4.146)$$

E aplicando o Lema 4.1 em (4.143) teremos:

$$\bar{u}_2(x, s) = \frac{\bar{g}_2(s) \langle q_2, v_2(x_2 - x, s) \rangle}{\Delta_2(s)} - \frac{\bar{h}_2(s) \langle p_2, v_2(x_1 - x, s) \rangle}{\Delta_2(s)} + \bar{V}_2(x, s), \quad (4.147)$$

multiplicando e dividindo por s (4.146) e (4.147), teremos:

$$\bar{u}_1(x, s) = \frac{s \bar{g}_1(s) \langle q_1, v_1(x_1 - x, s) \rangle}{s \Delta_1(s)} - \frac{s \bar{h}_1(s) \langle p_1, v_1(x_0 - x, s) \rangle}{s \Delta_1(s)} + \bar{V}_1(x, s), \quad (4.148)$$

e

$$\bar{u}_2(x, s) = \frac{s \bar{g}_2(s) \langle q_2, v_2(x_2 - x, s) \rangle}{s \Delta_2(s)} - \frac{s \bar{h}_2(s) \langle p_2, v_2(x_1 - x, s) \rangle}{s \Delta_2(s)} + \bar{V}_2(x, s). \quad (4.149)$$

Agora vamos aplicar o Lema 4.1, em (4.132):

$$\bar{V}_1(x, s) = -\frac{\phi(x, x_0; s, p_1)}{\sqrt{k_1 s} \cdot \Delta_1(s)} \int_{x_0}^{x_1} f_1(y) \langle q_1, v_1(x_1 - y, s) \rangle dy$$

$$-\frac{1}{\sqrt{k_1 s}} \int_{x_0}^{x_1} f_1(y) \operatorname{senh} \sqrt{\frac{s}{k_1}} (x-y) dy, \quad (4.150)$$

podemos reescrever (4.150) como:

$$\begin{aligned} \bar{V}_1(x, s) = & - \int_{x_0}^{x_1} \frac{f_1(y) \phi(x, x_0; s, p_1) \phi(y, x_1; s, q_1) dy}{\sqrt{k_1 s} \Delta_1(s)} \\ & - \int_{x_0}^{x_1} \frac{f_1(y) \operatorname{senh} \sqrt{\frac{s}{k_1}} (x-y) dy}{\sqrt{k_1 s}}, \end{aligned} \quad (4.151)$$

logo teremos:

$$\begin{aligned} \bar{V}_1(x, s) = & - \int_{x_0}^{x_1} \frac{f_1(y) \phi(x, x_0; s, p_1) \phi(y, x_1; s, q_1) + \Delta_1(s) \operatorname{senh} \sqrt{\frac{s}{k_1}} (x-y) dy}{\sqrt{k_1 s} \Delta_1(s)} \\ & - \int_{x_0}^{x_1} \frac{f_1(y) \phi(x, x_0; s, p_1) \cdot \phi(y, x_1; s, q_1) dy}{\sqrt{k_1 s} \Delta_1(s)}. \end{aligned} \quad (4.152)$$

De maneira análoga para (4.142), teremos:

$$\begin{aligned} \bar{V}_2(x, s) = & - \int_{x_1}^{x_2} \frac{f_2(y) \phi(x, x_1; s, p_2) \phi(y, x_2; s, q_2) + \Delta_2(s) \operatorname{senh} \sqrt{\frac{s}{k_2}} (x-y) dy}{\sqrt{k_2 s} \Delta_2(s)} \\ & - \int_{x_1}^{x_2} \frac{f_2(y) \phi(x, x_1; s, p_2) \phi(y, x_2; s, q_2) dy}{\sqrt{k_2 s} \Delta_2(s)}. \end{aligned} \quad (4.153)$$

Aplicando o Lema 4.2 em (4.152) e (4.153) teremos:

$$\begin{aligned} \bar{V}_1(x, s) = & - \int_{x_0}^x \frac{f_1(y) \phi(x, x_0; s, p_1) \phi(y, x_1; s, q_1) - \phi(x, x_0; s, p_1) \phi(y, x_1; s, q_1)}{\sqrt{k_1 s} \Delta_1(s)} + \\ & \phi(y, x_0; s, p_1) \phi(x, x_1; s, q_1) \sqrt{k_1 s} \Delta_1(s) dy \\ & - \int_{x_0}^{x_1} \frac{f_1(y) \phi(x, x_0; s, p_1) \phi(y, x_1; s, q_1) dy}{\sqrt{k_1 s} \Delta_1(s)}, \end{aligned} \quad (4.154)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_1(x, s) = & - \int_{x_0}^x \frac{f_1(y) \phi(y, x_0; s, p_1) \phi(x, x_1; s, q_1)}{\sqrt{k_1 s} \Delta_1(s)} dy \\ & - \int_x^{x_1} \frac{f_1(y) \phi(x, x_0; s, p_1) \phi(y, x_1; s, q_1) dy}{\sqrt{k_1 s} \Delta_1(s)}. \end{aligned} \quad (4.155)$$

Agora vamos aplicar o Lema 4.1, em (4.155),

$$\bar{V}_1(x, s) = - \int_{x_0}^x \frac{f_1(y) \langle p_1, v_1(x_0 - y, s) \rangle \langle q_1, v_1(x_1 - x, s) \rangle}{\sqrt{k_1 s} \Delta_1(s)} dy$$

$$- \int_x^{x_1} \frac{f_1(y) \langle p_1, v_1(x_0 - x, s) \rangle \langle q_1, v_1(x_1 - y, s) \rangle}{\sqrt{k_1 s \Delta_1(s)}} dy. \quad (4.156)$$

De maneira análoga faremos para (4.153), teremos:

$$\begin{aligned} \bar{V}_2(x, s) = & - \int_{x_1}^x \frac{f_2(y) \phi(x, x_1; s, p_2) \phi(y, x_2; s, q_2)}{\sqrt{k_2 s \Delta_2(s)}} - \frac{\phi(x, x_1; s, p_2) \phi(y, x_2; s, q_2)}{\sqrt{k_2 s \Delta_2(s)}} \\ & + \frac{\phi(y, x_1; s, p_2) \phi(x, x_1; s, q_2)}{\sqrt{k_2 s \Delta_2(s)}} dy - \int_x^{x_2} \frac{f_2(y) \phi(x, x_1; s, p_2) \phi(y, x_2; s, q_2)}{\sqrt{k_2 s \Delta_2(s)}} dy. \end{aligned} \quad (4.157)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_2(x, s) = & - \int_{x_1}^x \frac{f_2(y) \phi(y, x_1; s, p_2) \phi(x, x_2; s, q_2)}{\sqrt{k_2 s \Delta_2(s)}} dy \\ & - \int_x^{x_2} \frac{f_2(y) \phi(x, x_1; s, p_2) \phi(y, x_2; s, q_2)}{\sqrt{k_2 s \Delta_2(s)}} dy. \end{aligned} \quad (4.158)$$

Agora vamos aplicar o Lema 4.1, em (4.158):

$$\begin{aligned} \bar{V}_2(x, s) = & - \int_{x_1}^x \frac{f_2(y) \langle p_2, v_2(x_1 - y, s) \rangle \langle q_2, v_2(x_2 - x, s) \rangle}{\sqrt{k_2 s \Delta_2(s)}} dy \\ & - \int_x^{x_2} \frac{f_2(y) \langle p_2, v_2(x_1 - x, s) \rangle \langle q_2, v_2(x_2 - y, s) \rangle}{\sqrt{k_2 s \Delta_2(s)}} dy. \end{aligned} \quad (4.159)$$

Assim, podemos inverter a solução para o problema (4.76)-(4.83) encontrando as transformadas de Laplace inversa das equações (4.148)-(4.153).

Aplicando a transformada de Laplace em (4.156), através do Lema 4.3 teremos:

$$\mathcal{L}^{-1} \{ \bar{V}_1(x, s) \} = V_1(x, t), \quad (4.160)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\langle p_1, v_1(x_0 - y, s) \rangle \langle q_1, v_1(x_1 - x, s) \rangle}{\sqrt{k_1 s \Delta_1(s)}} \right\} = G(x_0 - y, x_1 - x, t), \quad (4.161)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\langle p_1, v_1(x_0 - x, s) \rangle \langle q_1, v_1(x_1 - y, s) \rangle}{\sqrt{k_1 s \Delta_1(s)}} \right\} = G(x_0 - x, x_1 - y, t), \quad (4.162)$$

na qual conseguimos reescrever (4.156) como:

$$V_1(x, t) = - \int_{x_0}^x f_1(y) G(x_0 - y, x_1 - x, t) dy - \int_x^{x_1} f_1(y) G(x_0 - x, x_1 - y, t) dy. \quad (4.163)$$

Aplicando (4.62) podemos reescrever como:

$$V_1(x, t) = - \int_{x_0}^x f_1(y) \cdot \left(G_0(x_0 - y, x_1 - x) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{s_j t} \langle p_1, v_1(x_0 - y, s_j) \rangle \langle q_1, v_1(x_1 - x, s_j) \rangle}{\sqrt{k_1 s_j \Delta'(s_j)}} \right) dy$$

$$- \int_x^{x_1} f_1(y) \cdot \left(G_0(x_0 - x, x_1 - y) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{s_j t} \langle p_1, v_1(x_0 - x, s_j) \rangle \langle q_1, v_1(x_1 - y, s_j) \rangle}{\sqrt{k_1 s_j \Delta'(s_j)}} dy \right), \quad (4.164)$$

através do produto e organizando os termos de (4.164), teremos:

$$\begin{aligned} V_1(x, t) = & - \int_{x_0}^x f_1(y) G_0(x_0 - y, x_1 - x) dy - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{s_j t}}{\sqrt{k_1 s_j \Delta'(s_j)}} \langle q_1, v_1(x_1 - x, s_j) \rangle \\ & \int_{x_0}^x \langle p_1, v_1(x_0 - y, s_j) \rangle f_1(y) dy - \int_x^{x_1} G_0(x_0 - x, x_1 - y) f_1(y) dy - \\ & \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{s_j t} \langle p_1, v_1(x_0 - y, s_j) \rangle}{\sqrt{k_1 s_j \Delta'(s_j)}} \int_x^{x_1} \langle q_1, v_1(x_1 - x, s_j) \rangle f_1(y) dy. \end{aligned} \quad (4.165)$$

Reescrevendo (4.165) e organizando os termos, teremos:

$$\begin{aligned} V_1(x, t) = & \int_{x_0}^x G_0(x_0 - y, x_1 - x) f_1(y) dy - \int_x^{x_1} G_0(x_0 - x, x_1 - y) f_1(y) dy \\ & - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{s_j t}}{\sqrt{k_1 s_j \Delta'(s_j)}} \langle q_1, v_1(x_1 - x, s_j^{(1)}) \rangle \int_{x_0}^x f_1(y) \langle p_1, v_1(x_0 - y, s_j) \rangle dy \\ & - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{s_j t}}{\sqrt{k_1 s_j^{(1)} \Delta'(s_j)}} \langle p_1, v_1(x_0 - x, s_j^{(1)}) \rangle \int_x^{x_1} f_1(y) \langle q_1, v_1(x_1 - y, s_j) \rangle dy. \end{aligned} \quad (4.166)$$

Queremos provar que $G_0(x_0 - y, x_1 - x) = G_0(x_0 - x, x_1 - y)$. Isto é claro quando G_0 é não nulo em (4.63). Através do Lema 4.2 podemos ver da aplicação dos lemas que:

$$\phi(x, b; s, q) = \langle q, v(b - x, s) \rangle, \quad (4.167)$$

$$-\phi(x, a; s, p) = -\langle p, v(a - x, s) \rangle, \quad (4.168)$$

$$\phi(y, b; s, q) = \langle q, v(b - y, s) \rangle, \quad (4.169)$$

$$\phi(y, a; s, p) = \langle p, v(a - y, s) \rangle. \quad (4.170)$$

Reescrevendo os termos do Lema 4.2, teremos:

$$\begin{aligned} \Delta(s) \operatorname{senh} \sqrt{\frac{s}{k}} (x - y) = & -\langle p, v(a - x, s) \rangle \langle q, v(b - y, s) \rangle \\ & + \langle p, v(a - y, s) \rangle \langle q, v(b - x, s) \rangle \langle p, v(a - y, s) \rangle \langle q, v(b - x, s) \rangle \end{aligned}$$

$$= \langle p, v(a-x, s) \rangle \langle q, v(b-y, s) \rangle + \Delta(s) \operatorname{senh} \sqrt{\frac{s}{k}}(x-y), \quad (4.171)$$

dividindo ambos os lados da equação por $\Delta(s)$, teremos:

$$\frac{\langle p, v(a-y, s) \rangle \langle q, v(b-x, s) \rangle}{\Delta(s)} = \frac{\langle p, v(a-x, s) \rangle \langle q, v(b-y, s) \rangle}{\Delta(s)} + \operatorname{senh} \sqrt{\frac{s}{k}}(x-y). \quad (4.172)$$

Multiplicando ambos os lados de (4.172) por $\sqrt{\frac{s}{k}}$,

$$\sqrt{\frac{s}{k}} \frac{\langle p, v(a-y, s) \rangle \langle q, v(b-x, s) \rangle}{\Delta(s)} = \sqrt{\frac{s}{k}} \frac{\langle p, v(a-x, s) \rangle \langle q, v(b-y, s) \rangle}{\Delta(s)} + \sqrt{\frac{s}{k}} \operatorname{senh} \sqrt{\frac{s}{k}}(x-y), \quad (4.173)$$

calculando o limite de (4.173), teremos:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{s}{k}} \frac{\langle p, v(a-y, s) \rangle \langle q, v(b-x, s) \rangle}{\Delta(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{s}{k}} \frac{\langle p, v(a-x, s) \rangle \langle q, v(b-y, s) \rangle}{\Delta(s)} + \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{s}{k}} \operatorname{senh} \sqrt{\frac{s}{k}}(x-y), \quad (4.174)$$

logo teremos:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{s}{k}} \frac{\langle p, v(a-y, s) \rangle \langle q, v(b-x, s) \rangle}{\Delta(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{s}{k}} \frac{\langle p, v(a-x, s) \rangle \langle q, v(b-y, s) \rangle}{\Delta(s)}, \quad (4.175)$$

com isso, temos a prova de que:

$$G_0(a-y, b-x) = G_0(a-x, b-y). \quad (4.176)$$

Através do Lema 4.3, juntamente com (4.146), teremos:

$$\langle p, v(a-y, s_j) \rangle \langle q, v(b-x, s_j) \rangle = \langle p, v(a-x, s_j) \rangle \langle q, v(b-y, s_j) \rangle. \quad (4.177)$$

Agora, vamos tomar o último termo de (4.166), teremos:

$$\left\langle p_1, v_1(x_0 - x, s_j^{(1)}) \right\rangle \int_x^{x_1} f_1(y) \left\langle q_1, v_1(x_1 - y, s_j^{(1)}) \right\rangle dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_x^{x_1} f_1(y) \langle p_1, v_1(x_0 - x, s_j^{(1)}) \rangle \langle q_1, v_1(x_1 - y, s_j^{(1)}) \rangle dy \\
&= \int_x^{x_1} f_1(y) \langle p_1, v_1(x_0 - y, s_j^{(1)}) \rangle \langle q_1, v_1(x_1 - x, s_j^{(1)}) \rangle dy \\
&= \langle q_1, v_1(x_1 - x, s_j^{(1)}) \rangle \int_x^{x_1} f_1(y) \langle p_1, v_1(x_0 - y, s_j^{(1)}) \rangle dy.
\end{aligned}$$

Logo, teremos:

$$\begin{aligned}
&\langle p_1, v_1(x_0 - x, s_j^{(1)}) \rangle \int_x^{x_1} f_1(y) \langle q_1, v_1(x_1 - y, s_j^{(1)}) \rangle dy \\
&= \langle q_1, v_1(x_1 - x, s_j^{(1)}) \rangle \int_x^{x_1} f_1(y) \langle p_1, v_1(x_0 - y, s_j^{(1)}) \rangle dy. \tag{4.178}
\end{aligned}$$

Através de (4.166):

$$\begin{aligned}
V_1(x, t) &= - \int_{x_0}^x G_0(x_0 - y, x_1 - x) f_1(y) dy - \int_x^{x_1} G_0(x_0 - x, x_1 - y) f_1(y) dy \\
&\quad - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{s_j^{(1)} t}}{\sqrt{k_1 s_j^{(1)} \Delta'(s_j^{(1)})}} \langle q_1, v_1(x_1 - x, s_j^{(1)}) \rangle \int_{x_0}^x f_1(y) \langle p_1, v_1(x_0 - y, s_j^{(1)}) \rangle dy \\
&\quad - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{s_j^{(1)} t}}{\sqrt{k_1 s_j^{(1)} \Delta'(s_j^{(1)})}} \langle p_1, v_1(x_0 - x, s_j^{(1)}) \rangle \int_x^{x_1} f_1(y) \langle q_1, v_1(x_1 - y, s_j^{(1)}) \rangle dy, \tag{4.179}
\end{aligned}$$

simplificando (4.179), teremos:

$$\begin{aligned}
V_1(x, t) &= - \int_{x_0}^{x_1} G_0(x_0 - x, x_1 - y) f_1(y) dy - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\int_{x_0}^{x_1} f_1(y) \langle p_1, v_1(x_0 - y, s_j^{(1)}) \rangle dy}{\sqrt{k_1 s_j^{(1)} \Delta'(s_j^{(1)})}} \\
&\quad e^{s_j^{(1)} t} \langle q_1, v_1(x_1 - x, s_j^{(1)}) \rangle. \tag{4.180}
\end{aligned}$$

De maneira análoga ao que foi feito anteriormente, aplicando a transformada de Laplace inversa em (4.159) e usando o Lema 4.3, teremos:

$$\mathcal{L}^{-1} \{ \bar{V}_2(x, s) \} = V_2(x, t), \tag{4.181}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\langle p_2, v_2(x_1 - y, s) \rangle \langle q_2, v_2(x_2 - x, s) \rangle}{\sqrt{k_2 s \Delta_2(s)}} \right\} = G(x_1 - y, x_2 - x, t), \tag{4.182}$$

e

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\langle p_2, v_2(x_1 - x, s) \rangle \langle q_2, v_2(x_2 - y, s) \rangle}{\sqrt{k_2 s \Delta_2(s)}} \right\} = G(x_1 - x, x_2 - y, t). \tag{4.183}$$

O qual conseguimos reescrever (4.159) como:

$$V_2(x, t) = - \int_{x_1}^x f_2(y) \cdot G(x_1 - y, x_2 - x, t) dy - \int_x^{x_2} f_2(y) \cdot G(x_1 - x, x_2 - y, t) dy, \quad (4.184)$$

aplicando (4.62) podemos reescrever como:

$$V_2(x, t) = - \int_{x_1}^x f_2(y) \left(G_0(x_1 - y, x_2 - x) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{s_j t} \langle p_2, v_2(x_1 - y, s_j) \rangle \langle q_2, v_2(x_2 - x, s_j) \rangle dy}{\sqrt{k_2 s_j} \Delta'(s_j)} \right) \\ - \int_x^{x_2} f_2(y) \cdot \left(G_0(x_1 - x, x_2 - y) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{s_j t} \langle p_2, v_2(x_1 - x, s_j) \rangle \langle q_2, v_2(x_2 - y, s_j) \rangle dy}{\sqrt{k_2 s_j} \Delta'(s_j)} \right). \quad (4.185)$$

Através do produto, e organizando os termos de (4.185):

$$V_2(x, t) = - \int_{x_1}^x f_2(y) G_0(x_1 - y, x_2 - x) dy - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{s_j t}}{\sqrt{k_2 s_j} \Delta'(s_j)} \\ \langle q_2, v_2(x_2 - x, s_j) \rangle \int_{x_1}^x \langle p_2, v_2(x_1 - y, s_j) \rangle f_2(y) dy - \int_x^{x_2} G_0(x_1 - x, x_2 - y) f_2(y) dy \\ - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{s_j t} \langle p_2, v_2(x_1 - y, s_j) \rangle}{\sqrt{k_2 s_j} \Delta'(s_j)} \int_x^{x_2} \langle q_2, v_2(x_2 - x, s_j) \rangle f_2(y) dy. \quad (4.186)$$

Reescrevendo (4.186) e organizando os termos, teremos:

$$V_2(x, t) = \int_{x_1}^x G_0(x_1 - y, x_2 - x) f_2(y) dy - \int_x^{x_2} G_0(x_1 - x, x_2 - y) f_2(y) dy \\ - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{s_j t}}{\sqrt{k_2 s_j} \Delta'(s_j)} \langle q_2, v_2(x_2 - x, s_j^{(2)}) \rangle \int_{x_1}^x f_2(y) \langle p_2, v_2(x_1 - y, s_j^{(2)}) \rangle dy \\ - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{s_j t}}{\sqrt{k_2 s_j} \Delta'(s_j)} \langle p_2, v_2(x_1 - x, s_j^{(2)}) \rangle \int_x^{x_2} f_2(y) \langle q_2, v_2(x_2 - y, s_j^{(2)}) \rangle dy. \quad (4.187)$$

Através do Lema 4.3, juntamente com (4.187), teremos:

$$\langle p, v(a - y, s_j) \rangle \langle q, v(b - x, s_j) \rangle = \langle p, v(a - x, s_j) \rangle \langle q, v(b - y, s_j) \rangle, \quad (4.188)$$

agora considerando o último termo de (4.187),

$$\langle p_2, v_2(x_1 - x, s_j^{(2)}) \rangle \int_x^{x_2} f_2(y) \langle q_2, v_2(x_2 - y, s_j^{(2)}) \rangle dy \quad (4.189) \\ = \int_x^{x_2} f_2(y) \langle p_2, v_2(x_1 - x, s_j^{(2)}) \rangle \langle q_2, v_2(x_2 - y, s_j^{(2)}) \rangle dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_x^{x_2} f_2(y) \langle p_2, v_2(x_1 - y, s_j^{(2)}) \rangle \langle q_2, v_2(x_2 - x, s_j^{(2)}) \rangle dy \\
&= \langle q_2, v_2(x_2 - x, s_j^{(2)}) \rangle \int_x^{x_2} f_2(y) \langle p_2, v_2(x_1 - y, s_j^{(2)}) \rangle dy.
\end{aligned}$$

Logo teremos:

$$\begin{aligned}
&\langle p_2, v_2(x_1 - x, s_j^{(2)}) \rangle \int_x^{x_2} f_2(y) \langle q_2, v_2(x_2 - y, s_j^{(2)}) \rangle dy \\
&= \langle q_2, v_2(x_2 - x, s_j^{(2)}) \rangle \int_x^{x_2} f_2(y) \langle p_2, v_2(x_1 - y, s_j^{(2)}) \rangle dy, \quad (4.190)
\end{aligned}$$

através de (4.187),

$$\begin{aligned}
V_2(x, t) &= - \int_{x_1}^x G_0(x_1 - y, x_2 - x) f_2(y) dy - \int_x^{x_2} G_0(x_1 - x, x_2 - y) f_2(y) dy \\
&\quad - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{s_j^{(2)}}}{\sqrt{k_2 s_j^{(2)} \Delta'(s_j^{(2)})}} \langle q_2, v_2(x_2 - x, s_j^{(2)}) \rangle \int_{x_1}^x f_2(y) \langle p_2, v_2(x_1 - y, s_j^{(2)}) \rangle dy \\
&\quad - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{s_j^{(2)}}}{\sqrt{k_2 s_j^{(2)} \Delta'(s_j^{(2)})}} \langle p_2, v_2(x_1 - x, s_j^{(2)}) \rangle \int_x^{x_2} f_2(y) \langle q_2, v_2(x_2 - y, s_j^{(2)}) \rangle dy. \quad (4.191)
\end{aligned}$$

Simplificando e organizando os termos de (4.191):

$$\begin{aligned}
V_2(x, t) &= - \int_{x_1}^{x_2} G_0(x_1 - x, x_2 - y) f_2(y) dy - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\int_{x_1}^{x_2} f_2(y) \langle p_2, v_2(x_1 - y, s_j^{(2)}) \rangle dy}{\sqrt{k_2 s_j^{(2)} \Delta'(s_j^{(2)})}} \\
&\quad e^{s_j t} \langle q_2, v_2(x_2 - x, s_j^{(2)}) \rangle. \quad (4.192)
\end{aligned}$$

Através de (4.180), e usando o teorema de convolução teremos:

$$\bar{u}_1(x, s) = s \bar{g}_1(s) \frac{\langle q_1, v_1(x_1 - x, s) \rangle}{s \Delta_1(s)} - s \frac{\bar{h}_1(s) \langle p_1, v_1(x_0 - x, s) \rangle}{s \Delta_1(s)} + \bar{V}_1(x, s). \quad (4.193)$$

Usando a seguinte propriedade:

$$sF(s) - f(0) = f'(t), \quad (4.194)$$

teremos: $s.F(s) = f'(t) + f(0)$ e também:

$$\mathcal{L}^{-1} \{ \bar{u}(x, s) \} = u(x, t), \quad (4.195)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \{ \bar{V}(x, s) \} = V(x, t), \quad (4.196)$$

com isso, teremos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{s\bar{g}_1(s)F_1(s)\} &= \int_0^t g_1(\tau)F^{(1)}(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^t g_1'(\tau) + g_1(0)\delta_0(\tau)F_1(x_1-x, t-\tau; q_1)d\tau,\end{aligned}\quad (4.197)$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{s\bar{h}_1(s)F_1(s)\} &= \int_0^t h_1(\tau)F^{(1)}(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^t h_1'(\tau) + h_1(0)\delta_0(\tau)F_1(x_0-x, t-\tau; p_1)d\tau.\end{aligned}\quad (4.198)$$

Assim, reescrevendo (4.180), teremos:

$$\begin{aligned}u_1(x, t) &= \int_0^t F^{(1)}(x_1-x, t-\tau; q_1)[g_1'(\tau) + g_1(0)\delta_0(\tau)]d\tau \\ &\quad - \int_0^t F^{(1)}(x_0-x, t-\tau; p_1)[h_1'(\tau) + h_1(0)\delta_0(\tau)]d\tau + V_1(x, t).\end{aligned}\quad (4.199)$$

Na qual podemos reescrever como:

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \int_0^t F^{(1)}(x_1-x, t-\tau; q_1)g_1'(\tau)d\tau + \int_0^t F^{(1)}(x_1-x, t-\tau; q_1)g_1(0)\delta_0(\tau)d\tau \\ &\quad - \int_0^t F^{(1)}(x_0-x, t-\tau; p_1)h_1'(\tau)d\tau - \int_0^t F^{(1)}(x_0-x, t-\tau; p_1)h_1(0)\delta_0(\tau)d\tau \\ &\quad + V_1(x, t),\end{aligned}\quad (4.200)$$

isto implica que:

$$\begin{aligned}u_1(x, t) &= \int_0^t F^{(1)}(x_1-x, t-\tau; q_1)g_1'(\tau)d\tau + g_1(0)F^{(1)}(x_1-x, t; q_1) \\ &\quad - \int_0^t F^{(1)}(x_0-x, t-\tau; p_1)h_1'(\tau)d\tau - h_1(0)F^{(1)}(x_0-x, t; p_1) + V_1(x, t).\end{aligned}\quad (4.201)$$

Usando as propriedades do delta de Dirac, e integrando por partes teremos:

$$\begin{aligned}u &= F^{(1)}(x_1-x, t-\tau; q_1) \quad du = D_2^{(1)}F^{(1)}(x_1-x, t-\tau; q_1,) \\ v &= g_1(t) \quad dv = g_1'(\tau)d\tau.\end{aligned}$$

Logo integrando por partes a primeira integral da equação anterior, teremos:

$$= F^{(1)}(x_1-x, t-\tau; q_1)g_1(t) - \int_0^t D_2^{(1)}F^{(1)}(x_1-x, t-\tau; q_1)g(\tau)d\tau \quad (4.202)$$

e da segunda integral vamos denotar os termos da integral por partes como:

$$u = F^{(1)}(x_0 - x, t - \tau; p_1) \quad du = D_2^{(1)} F^{(1)}(x_0 - x, t - \tau; p_1,)$$

$$v = h_1(t) \quad dv = h_1'(\tau) d\tau.$$

Logo integrando por partes a segunda integral da equação anterior, teremos:

$$= F^{(1)}(x_0 - x, t - \tau; p_1) h_1(t) - \int_0^t D_2^{(1)} F^{(1)}(x_0 - x, t - \tau; p_1) h_1(\tau) d\tau. \quad (4.203)$$

Logo fazendo as substituições conseguimos reescrever a equação como:

$$u_1(x, t) = F^{(1)}(x_1 - x, 0; q_1) g_1(t) - \int_0^t D_2^{(1)} F(x_1 - x, t - \tau; q_1) g(\tau) d\tau$$

$$- F^{(1)}(x_0 - x, 0; p_1) h_1(t) - \int_0^t D_2^{(1)} F^{(1)}(x_0 - x, t - \tau; p_1) h_1(\tau) d\tau + V_1(x, t). \quad (4.204)$$

Na qual D_j denota a derivada parcial com respeito ao j -ésimo argumento da função. Através do Lema 4.4, teremos:

$$F^{(1)}(x_1 - x, 0; q_1) = F_0^{(1)}(x_1 - x; q_1) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\langle q_1, v_1(x_1 - x, s_j^{(1)}) \rangle}{s_j^{(1)} \Delta'(s_j^{(1)})}, \quad (4.205)$$

$$F^{(1)}(x_0 - x, 0; p_1) = F_0^{(1)}(x_0 - x; p_1) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\langle p_1, v_1(x_0 - x, s_j^{(1)}) \rangle}{s_j^{(1)} \Delta'(s_j^{(1)})}, \quad (4.206)$$

$$D_2^{(1)} F^{(1)}(x_1 - x, t - \tau; q_1) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{s_j^{(1)} t} \langle q_1, v_1(x_1 - x, s_j^{(1)}) \rangle}{\Delta'(s_j^{(1)})}, \quad (4.207)$$

$$D_2^{(1)} F^{(1)}(x_0 - x, t - \tau; p_1) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{s_j^{(1)} t} \langle p_1, v_1(x_0 - x, s_j^{(1)}) \rangle}{\Delta'(s_j^{(1)})}. \quad (4.208)$$

Substituindo os termos (4.205)-(4.208) em (4.204) teremos:

$$u_1(x, t) = \left(F_0^{(1)}(x_1 - x; q_1) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{s_j^{(1)} t} \langle q_1, v_1(x_1 - x, s_j^{(1)}) \rangle}{s_j^{(1)} \Delta'(s_j^{(1)})} \right) g_1(t)$$

$$- \int_0^t \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{s_j^{(1)} \tau} \langle q_1, v_1(x_1 - x, s_j^{(1)}) \rangle}{\Delta'(s_j^{(1)})} g(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned}
& - \left(F_0^{(1)}(x_0 - x, p_1) \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{s_j^{(1)}t} \langle p_1, v_1(x_0 - x, s_j^{(1)}) \rangle}{s_j^{(1)} \Delta'(s_j^{(1)})} \right) h_1(t) \\
& - \int_0^t \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{s_j^{(1)}\tau} \langle p_1, v_1(x_0 - x, s_j^{(1)}) \rangle}{\Delta'(s_j^{(1)})} \right) h_1(\tau) d\tau + V_1(x, t). \tag{4.209}
\end{aligned}$$

Arrumando os termos de (4.209), teremos:

$$\begin{aligned}
u_1(x, t) &= F_0^{(1)}(x_1 - x; q_1) g_1(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_1(t) + \int_0^t s_j^{(1)} e^{s_j^{(1)}(t-\tau)} g_1(\tau) d\tau}{s_j^{(1)} \Delta'(s_j^{(1)})} \langle q_1, v_1(x_1 - x, s_j^{(1)}) \rangle \\
& - F_0^{(1)}(x_0 - x; p_1) h_1(t) - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{h_1(t) + \int_0^t s_j^{(1)} e^{s_j^{(1)}(t-\tau)} h_1(\tau) d\tau}{s_j^{(1)} \Delta'(s_j^{(1)})} \langle p_1, v_1(x_0 - x, s_j^{(1)}) \rangle \\
& + V_1(x, t). \tag{4.210}
\end{aligned}$$

Vamos denotar U_j o operador denotado por:

$$U_j \phi(t) = \phi(t) + \int_0^t s_j e^{s_j(t-\tau)} \phi(\tau) d\tau, \tag{4.211}$$

conseguimos reescrever (4.210) utilizando o operador (4.211), como:

$$\begin{aligned}
u_1(x, t) &= F_0^{(1)}(x_1 - x; q_1) g_1(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{U_j^{(1)} g(t)}{s_j^{(1)} \Delta_1'(s_j^{(1)})} \langle q_1, v_1(x_1 - x, s_j^{(1)}) \rangle \\
& - F_0^{(1)}(x_0 - x; p_1) h_1(t) - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{U_j^{(1)} h_1(t)}{s_j^{(1)} \Delta_1'(s_j^{(1)})} \langle p_1, v_1(x_0 - x, s_j^{(1)}) \rangle + V_1(x, t). \tag{4.212}
\end{aligned}$$

De maneira análoga ao que foi feito para obtermos $u_1(x, t)$ será feito para $u_2(x, t)$, logo teremos:

$$\begin{aligned}
u_2(x, t) &= F_0^{(2)}(x_2 - x; q_2) h_1(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{U_j^{(2)} h_1(t)}{s_j^{(2)} \Delta_2'(s_j^{(2)})} \langle q_2, v_2(x_2 - x, s_j^{(2)}) \rangle \\
& - F_0^{(2)}(x_1 - x; p_2) h(t) - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{U_j^{(2)} h(t)}{s_j^{(2)} \Delta_2'(s_j^{(2)})} \langle p_2, v_2(x_1 - x, s_j^{(2)}) \rangle + V_2(x, t). \tag{4.213}
\end{aligned}$$

Através da generalização dos operadores $U_j^{(1)}$ e $U_j^{(2)}$ de (4.211), usando a condição $u_1(x_1, t) = K_1 u_2(x, t)$ substituindo em (4.210) teremos:

$$K_1 \left[F_0^{(2)}(x_2 - x_1; q_2) h_1(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{U_j^{(2)} h_1(t)}{s_j^{(2)} \Delta_2'(s_j^{(2)})} \langle q_2, v_2(x_2 - x_1, s_j^{(2)}) \rangle \right]$$

$$\begin{aligned}
& -F_0^{(2)}(x_1 - x_1; p_2)h(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{U_j^{(2)}h(t)}{s_j^{(2)}\Delta_2'(s_j^{(2)})} \left\langle p_2, v_2(x_1 - x_1, s_j^{(2)}) \right\rangle + V_2(x, t) \Big] \\
& = F_0^{(1)}(x_1 - x_1; q_1)g_1(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{U_j^{(1)}g(t)}{s_j^{(1)}\Delta_1'(s_j^{(1)})} \left\langle q_1, v_1(x_1 - x_1, s_j^{(1)}) \right\rangle \\
& -F_0^{(1)}(x_0 - x_1; p_1)h_1(t) - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{U_j^{(1)}h_1(t)}{s_j^{(1)}\Delta_1'(s_j^{(1)})} \left\langle p_1, v_1(x_0 - x_1, s_j^{(1)}) \right\rangle + V_1(x_1, t). \quad (4.214)
\end{aligned}$$

Reescrevendo (4.214) teremos:

$$\begin{aligned}
& \left[K_1 F_0^{(2)}(x_2 - x_1; q_2) + F_0^{(1)}(x_0 - x_1; p_1) \right] h_1(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{k_1 \left\langle q_2, v_2(x_2 - x_1, s_j^{(1)}) \right\rangle}{s_j^{(2)}\Delta_2'(s_j^{(2)})} U_j^{(2)} h_1(t) \right. \\
& \left. \frac{\left\langle p_1, v_1(x_0 - x_1, s_j^{(1)}) \right\rangle U_j^{(1)} h_1(t)}{s_j^{(1)}\Delta_1'(s_j^{(1)})} \right] = F_0^{(1)}(0; q_1)g(t) \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{U_j^{(1)}g(t)}{s_j^{(1)}\Delta_1'(s_j^{(1)})} \left\langle q_1, v_1(0, s_j^{(1)}) \right\rangle + V_1(x_1, t) + K_1 F_0^{(2)}(0; p_2)h(t) \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_1 \left\langle p_2, v_2(0, s_j^{(2)}) \right\rangle}{s_j^{(2)}\Delta_2'(s_j^{(2)})} U_j^{(2)} h(t) - K_1 V_2(x_1, t). \quad (4.215)
\end{aligned}$$

Assim, temos a equação integral linear para a função que dependem do tempo, h_1 agora vamos resolver (4.215) para h_1 . Logo podemos escrever (4.215) como:

$$h_1(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \left[a_j U_j^{(1)} h_1(t) + b_j U_j^{(2)} h_1(t) \right] = c(t) \quad (4.216)$$

na qual, os termos são dados por:

$$a_j = \frac{\left\langle p_1, v_1(x_0 - x_1, s_j^{(1)}) \right\rangle}{s_j^{(1)}\Delta_1'(s_j^{(1)}) \left[k_1 F_0^{(2)}(x_2 - x_1; q_2) + F_0^{(1)}(x_0 - x_1; p_1) \right]}, \quad (4.217)$$

$$b_j = \frac{k_1 \left\langle q_2, v_2(x_2 - x_1, s_j^{(1)}) \right\rangle}{s_j^{(2)}\Delta_2'(s_j^{(2)}) \left[k_1 F_0^{(2)}(x_2 - x_1; q_2) + F_0^{(1)}(x_0 - x_1; p_1) \right]}. \quad (4.218)$$

Aplicando a transformada de Laplace em (4.216), teremos:

$$\mathcal{L}\{h_1(t)\} + \sum_{j=1}^{\infty} \left[a_j \mathcal{L}\{U_j^{(1)} h_1(t)\} + b_j \mathcal{L}\{U_j^{(2)} h_1(t)\} \right] = \mathcal{L}\{c(t)\} \quad (4.219)$$

$$\bar{h}_1(s) + \sum_{j=1}^{\infty} \left[a_j \left(\bar{h}_1(s) + \frac{s_j^{(1)} \bar{h}_1(s)}{s - s_j^{(1)}} \right) + b_j \left(\bar{h}_1(s) + \frac{s_j^{(2)} \bar{h}_1(s)}{s - s_j^{(2)}} \right) \right] = \bar{c}(s), \quad (4.220)$$

podemos reescrever (4.220) como:

$$[1 - \phi(s)] \bar{h}_1(s) = \bar{c}(s), \quad (4.221)$$

na qual,

$$\phi(s) = - \sum_{j=1}^{\infty} \left[a_j \left(1 + \frac{s_j^{(1)}}{s - s_j^{(1)}} \right) + b_j \left(1 + \frac{s_j^{(2)}}{s - s_j^{(2)}} \right) \right] \quad (4.222)$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa, teremos:

$$\phi(t) = - \sum_{j=1}^{\infty} (a_j + b_j) \delta_0(t) - \sum_{j=1}^{\infty} (a_j s_j^{(1)} e^{s_j^{(1)} t} + b_j s_j^{(2)} e^{s_j^{(2)} t}), \quad (4.223)$$

formalmente teremos:

$$\bar{h}_1(s) = \frac{\bar{c}(s)}{1 - \phi(s)} = \bar{c}(s) [1 + \bar{\phi}(s) + \bar{\phi}^2(s) + \dots] = c(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \phi^m(s). \quad (4.224)$$

Na qual h_1 é dado pela série:

$$h_1(t) = c(t) + (\phi * c)(t) + (\phi * \phi * c)(t) + \dots = c(t) + \sum_{m=1}^{\infty} (\phi_m * c)(t). \quad (4.225)$$

para $m \geq 2$, ϕ_m é a convolução de ϕ consigo mesma m vezes. Note que definimos $\phi_1 = \phi$. Resumindo, para a solução do problema de duas camadas (4.6)-(4.8) teremos h_1 através de (4.225).

4.5 Solução do problema de difusão para n -camadas

Vamos agora retornar ao problema de difusão de multicamadas (4.6)-(4.8). Seguindo de maneira análoga a notação na seção anterior, vamos tomar as funções g_n e h_n para $n = 1, \dots, N$, da seguinte maneira:

$$g_n(t) = \begin{cases} g(t) & \text{se } n = 1, \\ k_n \frac{\partial u_n}{\partial x}(x_{n-1}, t) & \text{se } n = 2, \dots, N, \end{cases} \quad (4.226)$$

$$h_n(t) = \begin{cases} k_n \frac{\partial u_n}{\partial x}(x_n, t) & \text{se } n = 1, \dots, N - 1 \\ h(t) & \text{se } n = N. \end{cases} \quad (4.227)$$

A solução geral da EDO é obtida de forma análoga ao apresentado para uma camada. Assim de forma geral para n camadas, denotando $A = A_n$ e $B = B_n$ teremos:

$$\bar{u}_n(x, s) = A_n \cosh \sqrt{\frac{s}{k_n}} x + B_n \sinh \sqrt{\frac{s}{k_n}} x - \frac{1}{\sqrt{k_n s}} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(y) \sinh \sqrt{\frac{s}{k_n}} (x - y) dy. \quad (4.228)$$

Derivando (4.228), teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial x}(x, s) &= A_n \sqrt{\frac{s}{k_n}} \sinh \sqrt{\frac{s}{k_n}} x + B_n \sqrt{\frac{s}{k_n}} \cosh \sqrt{\frac{s}{k_n}} x \\ &\quad - \frac{1}{k_n} \int_{x_0}^x f_n(y) \cosh \sqrt{\frac{s}{k_n}} (x - y) dy \end{aligned} \quad (4.229)$$

Vamos introduzir uma notação vetorial, na qual vamos denotar:

$$p_n = \begin{cases} (\alpha, \beta) & \text{se } n = 1, \\ (0, k_n) & \text{se } n = 2, \dots, N, \end{cases} \quad q_n = \begin{cases} (0, k_n) & \text{se } n = 1, \dots, N - 1, \\ (\gamma, \delta) & \text{se } n = N. \end{cases} \quad (4.230)$$

E através da solução geral e sua derivada, teremos:

$$\begin{aligned} u_n(y, s) &= \left(\cosh \sqrt{\frac{s}{k_n}} y, \sqrt{\frac{s}{k_n}} \sinh \sqrt{\frac{s}{k_n}} y \right), \\ v_n(y, s) &= \left(\sinh \sqrt{\frac{s}{k_n}} y, \sqrt{\frac{s}{k_n}} \cosh \sqrt{\frac{s}{k_n}} y \right). \end{aligned} \quad (4.231)$$

Agora vamos aplicar a transformada de Laplace nas condições de contorno, da primeira condição teremos:

$$\alpha u_1(x_0, t) + \beta \frac{\partial u_1}{\partial x}(x_0, t) = g_1(t),$$

$$\alpha \mathcal{L} \{u_1(x_0, t)\} + \beta \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x}(x_0, t) \right\} = \mathcal{L} \{g_1(t)\},$$

$$\alpha \bar{u}_1(x_0, s) + \beta \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x}(x_0, s) = \bar{g}(s). \quad (4.232)$$

E da segunda condição, teremos:

$$\gamma u_N(x_N, t) + \delta \frac{\partial u_N}{\partial x}(x_N, t) = h_N(t).$$

Aplicando a transformada de Laplace,

$$\gamma \mathcal{L} \{u_N(x_N, t)\} + \delta \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial u_N}{\partial x}(x_N, t) \right\} = \mathcal{L} \{h_N(t)\},$$

$$\gamma \bar{u}_N(x_N, s) + \delta \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x}(x_N, s) = \bar{h}_N(s) = \bar{h}(s). \quad (4.233)$$

Substituindo a solução geral (4.228) e sua derivada em (4.232):

$$\begin{aligned} & \alpha \left(A_n \cosh \sqrt{\frac{s}{k_n}} x_0 + B_n \sinh \sqrt{\frac{s}{k_n}} x_0 - \frac{1}{\sqrt{k_n s}} \int_{x_0}^{x_0} f(y) \sinh \sqrt{\frac{s}{k_n}} (x - y) dy \right) + \\ & \beta \left(A_n \sqrt{\frac{s}{k_n}} \sinh \sqrt{\frac{s}{k_n}} x_0 + B_n \sqrt{\frac{s}{k_n}} \cosh \sqrt{\frac{s}{k_n}} x_0 - \frac{1}{k_n} \int_{x_0}^{x_0} f_n(y) \cosh \sqrt{\frac{s}{k_n}} (x - y) dy \right) \\ & = \bar{g}(s). \end{aligned} \quad (4.234)$$

Organizando os termos, conseguimos reescrever como:

$$A_n \langle p_n, u_n(x_{n-1}, s) \rangle + B_n \langle p_n, v_n(x_{n-1}, s) \rangle = \bar{g}(s). \quad (4.235)$$

E da segunda condição de contorno (4.233):

$$\begin{aligned} & \gamma \left(A_n \cosh \sqrt{\frac{s}{k_n}} x_1 + B_n \sinh \sqrt{\frac{s}{k_n}} x_1 - \frac{1}{\sqrt{k_n s}} \int_{x_0}^{x_1} f_n(y) \sinh \sqrt{\frac{s}{k_n}} (x - y) dy \right) + \\ & \delta \left(A_n \sqrt{\frac{s}{k_n}} \sinh \sqrt{\frac{s}{k_n}} x_1 + B_n \sqrt{\frac{s}{k_n}} \cosh \sqrt{\frac{s}{k_n}} x_1 - \frac{1}{k_n} \int_{x_0}^{x_1} f_n(y) \cosh \sqrt{\frac{s}{k_n}} (x - y) dy \right) \\ & = \bar{h}(s). \end{aligned} \quad (4.236)$$

Organizando os termos, podemos reescrever (4.236) como:

$$\begin{aligned} & A_n \langle q_n, u_n(x_n, s) \rangle + B_n \langle q_n, v_n(x_n, s) \rangle = \bar{h}(s) \\ & + \frac{1}{\sqrt{k_n s}} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(y) \langle q_n, v_n(x_n - y, s) \rangle dy \end{aligned} \quad (4.237)$$

Escrevendo de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \langle p_n, u_n(x_{n-1}, s) \rangle & \langle p_n, v_n(x_{n-1}, s) \rangle \\ \langle q_n, u_n(x_n, s) \rangle & \langle q_n, v_n(x_n, s) \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{g}_n(s) \\ \bar{h}_n(s) + \frac{1}{\sqrt{k_n s}} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(y) \langle q_n, v_n(x_n - y, s) \rangle dy \end{pmatrix} \quad (4.238)$$

Assim do determinante, teremos:

$$\Delta_n(s) = \langle p_n, u_n(x_{n-1}, s) \rangle \langle q_n, v_n(x_n, s) \rangle - \langle p_n, v_n(x_{n-1}, s) \rangle \langle q_n, u_n(x_n, s) \rangle$$

Agora precisamos determinar as constantes A_n e B_n , através da matriz (4.238) conseguimos escrever um sistema para encontrar as constantes,

$$\begin{pmatrix} A_n \langle p_n, u_n(x_{n-1}, s) \rangle + B_n \langle p_n, v_n(x_{n-1}, s) \rangle = \bar{g}_n(s) \\ A_n \langle q_n, u_n(x_n, s) \rangle + B_n \langle q_n, v_n(x_n, s) \rangle = \bar{h}(s) + \frac{1}{\sqrt{k_n s}} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(y) \langle q_n, v_n(x_n - y, s) \rangle dy \end{pmatrix}. \quad (4.239)$$

Isolando B_n na primeira equação, teremos:

$$B_n = \frac{\bar{g}_n(s) - A_n \langle p_n, u_n(x_{n-1}, s) \rangle}{\langle p_n, v_n(x_{n-1}, s) \rangle}, \quad (4.240)$$

substituindo B_n na segunda equação do sistema:

$$\begin{aligned} A_n \langle q_n, u_n(x_n, s) \rangle + \left(\frac{\bar{g}_n(s) - A_n \langle p_n, u_n(x_{n-1}, s) \rangle}{\langle p_n, v_n(x_{n-1}, s) \rangle} \right) \cdot \langle q_n, v_n(x_n, s) \rangle \\ = \bar{h}(s) + \frac{1}{\sqrt{k_n s}} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(y) \langle q_n, v_n(x_n - y, s) \rangle dy, \end{aligned} \quad (4.241)$$

$$\begin{aligned} A_n \langle q_n, u_n(x_n, s) \rangle + \frac{\bar{g}_n(s) \langle q_n, v_n(x_n, s) \rangle}{\langle p_n, v_n(x_{n-1}, s) \rangle} - \frac{A_n \langle p_n, u_n(x_{n-1}, s) \rangle \langle q_n, v_n(x_n, s) \rangle}{\langle p_n, v_n(x_{n-1}, s) \rangle} \\ = \bar{h}(s) + \frac{1}{\sqrt{k_n s}} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(y) \langle q_n, v_n(x_n - y, s) \rangle dy. \end{aligned} \quad (4.242)$$

Multiplicando toda a equação por $\langle p_n, v_n(x_{n-1}, s) \rangle$:

$$\begin{aligned} A_n \langle q_n, u_n(x_n, s) \rangle \langle p_n, v_n(x_{n-1}, s) \rangle + \bar{g}_n(s) \langle q_n, v_n(x_n, s) \rangle - A_n \langle p_n, u_n(x_{n-1}, s) \rangle \langle q_n, v_n(x_n, s) \rangle \\ = \bar{h}(s) \cdot \langle p_n, v_n(x_{n-1}, s) \rangle + \langle p_n, v_n(x_{n-1}, s) \rangle \frac{1}{\sqrt{k_n s}} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(y) \langle q_n, v_n(x_n - y, s) \rangle dy, \end{aligned} \quad (4.243)$$

colocando A_n em evidência:

$$\begin{aligned} A_n (\langle q_n, u_n(x_n, s) \rangle \langle p_n, v_n(x_{n-1}, s) \rangle - \langle p_n, u_n(x_{n-1}, s) \rangle \langle q_n, v_n(x_n, s) \rangle) \\ = -\bar{g}(s) \langle q_n, v_n(x_n, s) \rangle + \bar{h}(s) \langle p_n, v_n(x_{n-1}, s) \rangle + \langle p_n, v_n(x_{n-1}, s) \rangle \\ \frac{1}{\sqrt{k_n s}} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(y) \langle q_n, v_n(x_n - y, s) \rangle dy \end{aligned} \quad (4.244)$$

podemos reescrever como:

$$A_n \Delta_n(s) = \bar{g}_n(s) \langle q_n, v_n(x_n, s) \rangle - \bar{h}(s) \langle p_n, v_n(x_{n-1}, s) \rangle - \frac{1}{\sqrt{k_n s}} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(y) \langle p_n, v_n(x_{n-1}, s) \rangle \langle q_n, v_n(x_n - y, s) \rangle dy. \quad (4.245)$$

De forma análoga, para encontrar B_n seguindo do sistema (4.239), isolando o termos A_n , teremos:

$$A_n = \frac{\bar{g}(s) - B_n \langle p_n, v_n(x_{n-1}, s) \rangle}{\langle p_n, u_n(x_{n-1}, s) \rangle}, \quad (4.246)$$

substituindo A_n na segunda equação do sistema, teremos:

$$\left(A_n = \frac{\bar{g}(s) - B_n \langle p_n, v_n(x_{n-1}, s) \rangle}{\langle p_n, u_n(x_{n-1}, s) \rangle} \right) \cdot \langle q_n, u_n(x_n, s) \rangle + B_n \langle q_n, v_n(x_n, s) \rangle = \bar{h}(s) + \frac{1}{\sqrt{k_n s}} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(y) \langle q_n, v_n(x_n - y, s) \rangle dy, \quad (4.247)$$

reescrevendo a equação anterior teremos:

$$\frac{\bar{g}_n(s) \langle q_n, u_n(x_n, s) \rangle}{\langle p_n, u_n(x_{n-1}, s) \rangle} - \frac{B_n \langle p_n, v_n(x_{n-1}, s) \rangle \langle q_n, u_n(x_n, s) \rangle}{\langle p_n, u_n(x_{n-1}, s) \rangle} + B_n \langle q_n, v_n(x_n, s) \rangle = \bar{h}_n(s) + \frac{1}{\sqrt{k_n s}} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(y) \langle q_n, v_n(x_n - y, s) \rangle dy, \quad (4.248)$$

multiplicando toda a equação por $\langle p_n, u_n(x_{n-1}, s) \rangle$, podemos reescrever como:

$$\bar{g}_n(s) \langle q_n, u_n(x_n, s) \rangle - B_n \langle p_n, v_n(x_{n-1}, s) \rangle \langle q_n, u_n(x_n, s) \rangle + B_n \langle q_n, v_n(x_n, s) \rangle \langle p_n, u_n(x_{n-1}, s) \rangle = \bar{h}_n(s) \langle p_n, u_n(x_{n-1}, s) \rangle + \langle p_n, u_n(x_{n-1}, s) \rangle \frac{1}{\sqrt{k_n s}} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n y \langle q_n, v_n(x_n - y, s) \rangle dy. \quad (4.249)$$

Isolando o termo B_n teremos:

$$B_n (\langle q_n, v_n(x_n, s) \rangle \langle p_n, u_n(x_{n-1}, s) \rangle - \langle p_n, v_n(x_{n-1}, s) \rangle \langle q_n, u_n(x_n, s) \rangle) = \bar{g}_n(s) \langle q_n, u_n(x_n, s) \rangle + \bar{h}_n(s) \langle p_n, u_n(x_{n-1}, s) \rangle + \frac{1}{\sqrt{k_n s}} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(y) \langle p_n, u_n(x_{n-1}, s) \rangle \langle q_n, v_n(x_n - y, s) \rangle dy, \quad (4.250)$$

Assim:

$$B_n \Delta_n(s) = -\bar{g}_n(s) \langle q_n, u_n(x_n, s) \rangle + \bar{h}_n(s) \langle p_n, u_n(x_{n-1}, s) \rangle$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{k_n s}} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(y) \langle p_n, u_n(x_{n-1}, s) \rangle \langle q_n, v_n(x_n - y, s) \rangle dy. \quad (4.251)$$

Substituindo as constantes A_n e B_n na solução geral (4.228), obtemos:

$$\begin{aligned} \bar{u}_n(x, s) &= (\bar{g}_n(s) \langle q_n, v_n(x_n, s) \rangle - \bar{h}_n(s) \langle p_n, v_n(x_{n-1}, s) \rangle \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{k_n s}} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(y) \langle p_n, v_n(x_{n-1}, s) \rangle \langle q_n, v_n(x_n - y, s) \rangle dy) \frac{1}{\Delta_n(s)} \cosh \sqrt{\frac{s}{k_n}} x \\ &+ \left(-\bar{g}_n(s) \langle q_n, u_n(x_n, s) \rangle + \bar{h}_n(s) \langle p_n, u_n(x_{n-1}, s) \rangle + \frac{1}{\sqrt{k_n s}} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(y) \langle p_n, u_n(x_{n-1}, s) \rangle \right. \\ &\quad \left. \langle q_n, v_n(x_n - y, s) \rangle dy \right) \frac{1}{\Delta_n(s)} \sinh \sqrt{\frac{s}{k_n}} x - \frac{1}{\sqrt{k_n s}} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(y) \sinh \sqrt{\frac{s}{k_n}} (x - y) dy. \quad (4.252) \end{aligned}$$

Podemos reescrever:

$$\begin{aligned} \bar{u}_n(x, s) &= \frac{\bar{g}_n(s) \langle q_n, v_n(x_n, s) \rangle \cosh \sqrt{\frac{s}{k_n}} x}{\Delta_n(s)} - \frac{\bar{h}_n(s) \langle p_n, v_n(x_{n-1}, s) \rangle \cosh \sqrt{\frac{s}{k_n}} x}{\Delta_n(s)} \\ &\quad - \frac{1}{\Delta_n(s) \sqrt{k_n s}} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(y) \langle p_n, v_n(x_{n-1}, s) \rangle \langle q_n, v_n(x_n - y, s) \rangle dy \cosh \sqrt{\frac{s}{k_n}} x \\ &\quad - \frac{\bar{g}_n(s) \langle q_n, u_n(x_n, s) \rangle \sinh \sqrt{\frac{s}{k_n}} x}{\Delta_n(s)} + \frac{\bar{h}_n(s) \langle p_n, u_n(x_{n-1}, s) \rangle \sinh \sqrt{\frac{s}{k_n}} x}{\Delta_n(s)} \\ &\quad + \frac{1}{\Delta_n(s) \sqrt{k_n s}} \sinh \sqrt{\frac{s}{k_n}} x \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(y) \langle p_n, u_n(x_{n-1}, s) \rangle \langle q_n, v_n(x_n - y) \rangle dy \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{k_n s}} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(y) \sinh \sqrt{\frac{s}{k_n}} (x - y) dy. \quad (4.253) \end{aligned}$$

Usando a equação (4.129):

$$\begin{aligned} \bar{u}_n(x, s) &= \frac{\bar{g}_n(s) \cdot \phi(x, x_n; s, q_n)}{\Delta_n(s)} - \frac{\bar{h}_n(s) \cdot \phi(x, x_{n-1}; s, p_n)}{\Delta_n(s)} \\ &\quad - \frac{\phi(x, x_{n-1}; s, p_n)}{\sqrt{k_n(s)} \cdot \Delta_n(s)} \cdot \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(y) \langle q_n, v_n(x_n - y, s) \rangle dy - \frac{1}{\sqrt{k_n s}} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(y) \sinh \sqrt{\frac{s}{k_n}} (x - y) dy. \quad (4.254) \end{aligned}$$

Para reduzir a equação anterior vamos denotar:

$$\bar{u}_n(x, s) = \frac{\bar{g}_n(s) \phi(x, x_n; s, q_n)}{\Delta_n(s)} - \frac{\bar{h}_n(s) \phi(x, x_{n-1}; s, p_n)}{\Delta_n(s)} + \bar{V}_n(x, s). \quad (4.255)$$

Na qual $\bar{V}_n(x, s)$ é denotado por:

$$\bar{V}_n(x, s) = - \frac{\phi(x, x_{n-1}; s, p_n)}{\sqrt{k_n(s)} \Delta_n(s)} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(y) \langle q_n, v_n(x_n - y, s) \rangle dy$$

$$-\frac{1}{\sqrt{k_n s}} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(y) \operatorname{senh} \sqrt{\frac{s}{k_n}} (x-y) dy. \quad (4.256)$$

Agora vamos obter a solução da transformada de Laplace inversa através dos Lemas 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4. Assim assumimos que existe uma sequência não nula $s_j^{(n)\infty}$ para $n = 1, \dots, N$,

$$\Delta_n(s_j^{(n)}) = 0, \quad \Delta_n'(s_j^{(n)}) \neq 0 \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (4.257)$$

Aplicando o Lema 4.1, em (4.255), teremos:

$$\bar{u}_n(x, s) = \frac{\bar{g}_n(s) \langle q_n, v_n(x_n - x, s) \rangle}{\Delta_n(s)} - \frac{\bar{h}_n(s) \langle p_n, v_n(x_{n-1} - x, s) \rangle}{\Delta_n(s)} + \bar{V}_n(x, s). \quad (4.258)$$

Multiplicando e dividindo por s , teremos:

$$\bar{u}_n(x, s) = \frac{s \bar{g}_n(s) \langle q_n, v_n(x_n - x, s) \rangle}{s \Delta_n(s)} - \frac{s \bar{h}_n(s) \langle p_n, v_n(x_{n-1} - x, s) \rangle}{s \Delta_n(s)} + \bar{V}_n(x, s). \quad (4.259)$$

Agora vamos aplicar o Lema 4.1, em (4.256),

$$\begin{aligned} \bar{V}_n(x, s) &= \frac{-\phi(x, x_{n-1}; s, p_n)}{\sqrt{k_n s}} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(y) \langle q_n, v_n(x_n - y, s) \rangle dy \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{k_n s}} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(y) \operatorname{senh} \sqrt{\frac{s}{k_n}} (x-y) dy, \end{aligned} \quad (4.260)$$

pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \bar{V}_n(x, s) &= \frac{-\phi(x, x_{n-1}; s, p_n)}{\sqrt{k_n s} \Delta_n(s)} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(y) \phi(y, x; s, q_n) dy \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{k_n s}} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(y) \operatorname{senh} \sqrt{\frac{s}{k_n}} (x-y) dy. \end{aligned} \quad (4.261)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_n(x, s) &= - \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{f_n(y) \phi(x, x_{n-1}; s, p_n) \phi(y, x; s, q_n) dy}{\sqrt{k_n s} \Delta_n(s)} \\ &\quad - \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{f_n(y) \operatorname{senh} \sqrt{\frac{s}{k_n}} (x-y) dy}{\sqrt{k_n s}}. \end{aligned} \quad (4.262)$$

Logo teremos:

$$\begin{aligned} \bar{V}_n(x, s) &= - \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{f_n(y) \phi(x, x_{n-1}; s, p_n) \phi(y, x; s, q_n) dy}{\sqrt{k_n s} \Delta_n(s)} + \frac{\Delta_n(s) \operatorname{senh} \sqrt{\frac{s}{k_n}} (x-y) dy}{\sqrt{k_n s} \Delta_n(s)} \\ &\quad - \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{f_n(y) \phi(x, x_{n-1}; s, p_n) \phi(y, x; s, q_n) dy}{\sqrt{k_n s}} \Delta_n(s). \end{aligned} \quad (4.263)$$

Aplicando o Lema 4.2, reescrevemos como:

$$\begin{aligned} \bar{V}_n(x, s) = & - \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{f_n(y)\phi(x, x_{n-1}; s, p_n)\phi(y, x; s, q_n)dy}{\sqrt{k_n s \Delta_n(s)}} \\ & - \phi(x, x_{n-1}; s, p_n)\phi(y, x_n; s, q_n) + \phi(y, x_{n-1}; s, p_n)\phi(y, x_n; s, q_n) \\ & - \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{f_n(y)\phi(x, x_{n-1}; s, p_n)\phi(y, x; s, q_n)dy}{\sqrt{k_n s}} \cdot \Delta_n(s). \end{aligned} \quad (4.264)$$

Assim teremos:

$$\begin{aligned} \bar{V}_n(x, s) = & - \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{f_n(y)\phi(y, x_{n-1}; s, p_n)\phi(y, x_n; s, q_n)dy}{\sqrt{k_n s \Delta_n(s)}} \\ & - \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{f_n(y)\phi(y, x_{n-1}; s, p_n)\phi(y, x; s, q_n)dy}{\sqrt{k_n s}} \Delta_n(s). \end{aligned} \quad (4.265)$$

Agora vamos aplicar o Lema 4.1, na equação anterior,

$$\begin{aligned} \bar{V}_n(x, s) = & - \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{f_n(y) \langle p_n, v_n(x_{n-1} - y, s) \rangle \langle q_n, v_n(y - x, s) \rangle dy}{\sqrt{k_n s \Delta_n(s)}} \\ & - \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{f_n(y) \langle p_n, v_n(x_{n-1} - y, s) \rangle \langle q_n, v_n(y - x_n, s) \rangle dy}{\sqrt{k_n s \Delta_n(s)}}. \end{aligned} \quad (4.266)$$

Usando o Lema 4.3 para aplicar a transformada de Laplace inversa, teremos:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\langle p_n, v_n(x_{n-1} - y, s) \rangle \cdot \langle q_n, v_n(x_n - x, s) \rangle}{\sqrt{k_n s \Delta_n(s)}} \right\} = G(x_{n-1} - y, x_n - x, t), \quad (4.267)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\langle p_n, v_n(x_{n-1} - x, s) \rangle \langle q_n, v_n(x_n - y, s) \rangle}{\sqrt{k_n s \Delta_n(s)}} \right\} = G(x_{n-1} - x, x_n - y, t). \quad (4.268)$$

Substituindo os termos e utilizando a transformada de Laplace inversa $\mathcal{L}^{-1} \{ \bar{V}_n(x, s) \} = V_n(x, t)$ conseguimos reescrever a equação anterior como:

$$\begin{aligned} V_n(x, t) = & - \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(y) G(x_{n-1} - y, x_n - x, t) dy \\ & - \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(y) G(x_{n-1} - x, x_n - y, t) dy. \end{aligned} \quad (4.269)$$

Agora aplicando a segunda parte do Lema 4.3, teremos:

$$V_n(x, t) = - \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(y) \left(G_0(x_{n-1} - y, x_n - x) + \sum_{j=1}^{\infty} e^{s_j^{(n)}} \langle p_n, v_n(x_{n-1} - y, s_j^{(n)}) \rangle \right)$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\langle q_n, v_n(x_n - x, s_j^n) \rangle}{\sqrt{k_n s_j^n \Delta'_n(s_j^n)}} \right) dy - \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(y) (G_0(x_{n-1} - x, x_n - y) \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{s_j^n t} \langle p_n, v_n(x_{n-1} - x, s_j^n) \rangle \langle q_n, v_n(x_n - y, s_j^n) \rangle}{\sqrt{k_n s_j^n \Delta'_n(s_j^n)}}) dy. \end{aligned} \quad (4.270)$$

Podemos reescrever como:

$$\begin{aligned} V_n(x, t) &= - \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(y) G_0(x_{n-1} - y, x_n - x) dy \\ &- \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{s_j^n t}}{\sqrt{k_n s_j^n \Delta'_n(s_j^n)}} \langle p_n, v_n(x_{n-1} - y, s_j^n) \rangle \langle q_n, v_n(x_n - x, s_j^n) \rangle f_n(y) dy \\ &\quad - \int_{x_{n-1}}^{x_n} G_0(x_{n-1} - x, x_n - y) f_n(y) dy \\ &- \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{s_j^n t} \langle p_n, v_n(x_{n-1} - x, s_j^n) \rangle}{\sqrt{k_n s_j^n \Delta'_n(s_j^n)}} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \langle q_n, v_n(x_n - x, s_j^n) \rangle f_n(y) dy, \end{aligned} \quad (4.271)$$

Reescrevendo a equação e organizando os termos, teremos:

$$\begin{aligned} V_n(x, t) &= - \int_{x_{n-1}}^{x_n} G_0(x_{n-1} - y, x_n - x) f_n(y) dy - \int_{x_{n-1}}^{x_n} G_0(x_{n-1} - x, x_n - y) f_n(y) dy \\ &- \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{s_j^n t}}{\sqrt{k_n s_j^n \Delta'_n(s_j^n)}} \langle q_n, v_n(x_n - x, s_j^n) \rangle \int_{x_{n-1}}^{x_n} \langle p_n, v_n(x_{n-1} - y, s_j^n) \rangle f_n(y) dy \\ &\quad - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{s_j^n t} \langle p_n, v_n(x_{n-1} - x, s_j^n) \rangle}{\sqrt{k_n s_j^n \Delta'_n(s_j^n)}} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \langle q_n, v_n(x_n - y, s_j^n) \rangle f_n(y) dy. \end{aligned}$$

Simplificando (4.5), teremos:

$$\begin{aligned} V_n(x, t) &= - \int_{x_{n-1}}^{x_n} G_0(x_{n-1} - x, x_n - y) f_n(y) dy - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(y) \langle p_n, v_n(x_{n-1} - y, s_j^n) \rangle dy}{\sqrt{k_n s_j^n \Delta'_n(s_j^n)}} dy \\ &\quad e^{s_j^n t} \langle q_n, v_n(x_n - x, s_j^n) \rangle. \end{aligned} \quad (4.272)$$

Aplicando o Lema 4.4, podemos ver:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\langle q_n, v_n(x_n - x, s_j^n) \rangle}{s \Delta_n(s)} \right\} = F_n(x_n - x, t, q_n), \quad (4.273)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\langle p_n, v_n(x_{n-1} - x, s_j^n) \rangle}{s \Delta_n(s)} \right\} = F_n(x_{n-1} - x, t, p_n). \quad (4.274)$$

Através de (4.259), teremos:

$$\bar{u}_n(x, s) = s\bar{g}_n(s) \frac{\langle q_n, v_n(x_n - x, s) \rangle}{s_n \Delta_n(s)} - s\bar{h}_n(s) \frac{\langle p_n, v_n(x_{n-1} - x, s) \rangle}{s \Delta(s)} + \bar{V}_n(x, s). \quad (4.275)$$

Usando a seguinte propriedade:

$$sF(s) - f(0) = f'(t) \quad (4.276)$$

teremos: $s.F(s) = f'(t) + f(0)$ e usando também:

$$\mathcal{L}^{-1} \{ \bar{u}_n(x, s) \} = u_n(x, t), \quad (4.277)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \{ \bar{V}_n(x, s) \} = V_n(x, t), \quad (4.278)$$

Assim, teremos:

$$\mathcal{L}^{-1} \{ s\bar{g}_n(s)F(s) \} = \int_0^t g_n(\tau)F(t - \tau)d\tau = \int_0^t g'_n(\tau) + g_n(0)\delta_0(\tau)F(x_n - x, t - \tau; q_n)d\tau, \quad (4.279)$$

e

$$\mathcal{L}^{-1} \{ s\bar{h}_n(s)F(s) \} = \int_0^t h_n(\tau)F(t - \tau)d\tau = \int_0^t h'_n(\tau) + h_n(0)\delta_0(\tau)F(x_{n-1} - x, t - \tau; p_n)d\tau, \quad (4.280)$$

Assim, reescrevendo a equação teremos:

$$u_n(x, t) = \int_0^t F_n(x_n - x, t - \tau; q_n) [g'_n(\tau) + g_n(0)\delta_0(\tau)] d\tau - \int_0^t F_n(x_{n-1} - x, t - \tau; p_n) [h'_n(\tau) + h_n(0)\delta_0(\tau)] d\tau + V_n(x, t), \quad (4.281)$$

na qual podemos reescrever como:

$$u_n(x, t) = \int_0^t F_n(x_n - x, t - \tau; q_n)g'_n(\tau)d\tau + \int_0^t F_n(x_n - x, t - \tau; q_n)g'_n(0)\delta_0(\tau)d\tau - \int_0^t F_n(x_{n-1} - x, t - \tau; p_n)h'_n(\tau)d\tau - \int_0^t F_n(x_{n-1} - x, t - \tau; p_n)h_n(0)\delta_0(\tau)d\tau + V_n(x, t). \quad (4.282)$$

Isto implica que:

$$u_n(x, t) = \int_0^t F_n(x_n - x, t - \tau; q_n)g'_n(\tau)d\tau + g_n(0)F_n(x_n - x, t; q_n)$$

$$- \int_0^t F_n(x_{n-1} - x, t - \tau; p_n) h'_n(\tau) d\tau - h_n(0) F_n(x_{n-1} - x, t; p_n) + V_n(x, t). \quad (4.283)$$

Usando as propriedades do delta de Dirac e integrando por partes a primeira integral denotada por (I_1) em (4.283) com:

$$u = F_n(x_n - x, t - \tau; q_n) \quad du = D_2 F_n(x_n - x, t - \tau; q_n); \quad (4.284)$$

$$v = g_n(t) \quad dv = g'_n(\tau) d\tau; \quad (4.285)$$

teremos:

$$(I_1) = F_n(x_n - x, t - \tau; q_n) g_n(t) - \int_0^t D_2 F_n(x_n - x, t - \tau; q_n) g_n(\tau) d\tau \quad (4.286)$$

e integrando por partes a segunda integral denotada por (I_2) em (4.283) com:

$$u = F_n(x_{n-1} - x, t - \tau; p_n) \quad du = D_2 F_n(x_{n-1} - x, t - \tau; p_n); \quad (4.287)$$

$$v = h_n(t) \quad dv = h'_n(\tau) d\tau; \quad (4.288)$$

teremos:

$$(I_2) = F_n(x_{n-1} - x, t - \tau; p_n) h_n(t) - \int_0^t D_2 F_n(x_{n-1} - x, t - \tau; p_n) h_n(\tau) d\tau, \quad (4.289)$$

$$u_n(x, t) = F_n(x_n - x, 0; q_n) g_n(t) - \int_0^t D_2 F_n(x_n - x, t - \tau; q_n) g_n(\tau) d\tau - F_n(x_{n-1} - x, 0; p_n) h_n(t) - \int_0^t D_2 F_n(x_{n-1} - x, t - \tau; p_n) h_n(\tau) d\tau + V_n(x, t). \quad (4.290)$$

Na qual D_j denota a derivada parcial com respeito ao j -ésimo argumento da função, através de (4.69) temos:

$$F(y, t; r) = F_0(y; r) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{s_j n t} \langle r, v(y, s_j^n) \rangle}{s_j^n \Delta'_n(s_j^n)}. \quad (4.291)$$

Assim, conseguimos reescrever (4.290) da seguinte maneira:

$$F_n(x_n - x, 0; q_n) = F_0(x_n - x; q_n) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\langle q_n, v_n(x_n - x, s_j^n) \rangle}{s_j^n \Delta'_n(s_j^n)}, \quad (4.292)$$

$$F_n(x_{n-1} - x, 0; p_n) = F_0(x_{n-1} - x; p_n) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\langle p_n, v_n(x_{n-1} - x, s_j^n) \rangle}{s_j^n \Delta'_n(s_j^n)}, \quad (4.293)$$

$$D_2 F_n(x_n - x, t - \tau; q_n) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{s_j^n} \langle q_n, v_n(x_n - x, s_j^n) \rangle}{\Delta'_n(s_j^n)} \quad (4.294)$$

$$D_2 F_n(x_{n-1} - x, t - \tau; p_n) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{s_j^n} \langle p_n, v_n(x_{n-1} - x, s_j^n) \rangle}{\Delta'_n(s_j^n)}. \quad (4.295)$$

Substituindo em (4.290),

$$\begin{aligned} u_n(x, t) = & \left(F_0(x_n - x; q_n) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{s_j^n t} \langle q_n, v_n(x_n - x; s_j^n) \rangle}{s_j^n \Delta'_n(s_j^n)} \right) g_n(t) \\ & - \int_0^t \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{s_j^n \tau} \langle q_n, v_n(x_n - x, s_j^n) \rangle}{\Delta'_n(s_j^n)} g_n(\tau) d\tau \\ & - \left(F_0(x_{n-1} - x; p_n) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{s_j^n} \langle p_n, v_n(x_{n-1} - x; s_j^n) \rangle}{s_j^n \Delta'_n(s_j^n)} \right) h_n(t) \\ & - \int_0^t \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{s_j^n \tau} \langle p_n, v_n(x_{n-1} - x, s_j^n) \rangle}{\Delta'_n(s_j^n)} \right) h_n(\tau) d\tau + V_n(x, t). \end{aligned} \quad (4.296)$$

Arrumando os termos e reescrevendo a equação teremos:

$$\begin{aligned} u_n(x, t) = & F_0(x_n - x; q_n) g_n(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_n(t) + \int_0^t s_j^n e^{s_j^n(t-\tau)} g(\tau) d\tau}{s_j^n \Delta'_n(s_j)} \langle q_n, v_n(x_n - x, s_j^n) \rangle \\ & - F_0(x_{n-1} - x; p_n) h_n(t) - \sum_{j=1}^{\infty} h_n(t) + \int_0^t s_j e^{s_j(t-\tau)} h_n(\tau) d\tau \langle p_n, v_n(x_{n-1} - x, s_j) \rangle + V_n(x, t). \end{aligned} \quad (4.297)$$

Definindo o operador U_j por:

$$U_j \phi(t) = \phi(t) + \int_0^t s_j e^{s_j(t-\tau)} \phi(\tau) d\tau, \quad (4.298)$$

e assim, usando esse operador conseguimos reescrever a equação da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} u_n(x, t) = & F_0(x_n - x; q_n) g_n(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_n(t) U_j^n}{s_j \Delta'_n(s_j^n)} \langle q_n, v_n(x_n - x, s_j^n) \rangle \\ & - F_0(x_{n-1} - x; p_n) h_n(t) - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{h_n(t) U_j^n}{s_j^n \Delta'_n(s_j^n)} \langle p_n, v_n(x_{n-1} - x, s_j^n) \rangle + V_n(x, t). \end{aligned} \quad (4.299)$$

Logo teremos a solução formal de (4.13)-(4.16) como:

$$\begin{aligned}
u_n(x, t) = & F_n(x_n - x, 0; q_n)g_n(t) + \int_0^t D_2 F_n(x_n - x, t - \tau; q_n)g_n(\tau)d\tau - F_n(x_{n-1} - x, 0; p_n)h_n(t) \\
& - \int_0^t D_2 F_n(x_{n-1} - x, t - \tau; p_n)h_n(\tau)d\tau + V_n(x, t). \tag{4.300}
\end{aligned}$$

Na qual, $V_n(x, t)$ é dado por:

$$\begin{aligned}
V_n(x, t) = & - \int_{x_{n-1}}^{x_n} G_0^{(n)}(x_{n-1} - x, x_n - y)f_n(y)dy \\
& - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(y) \langle p_n, v_n(x_{n-1} - y, s_j^{(n)}) \rangle dy}{\sqrt{k_n s_j^{(n)} \Delta_n'(s_j^{(n)})}} e^{s_j^{(n)} t} \langle q_n, v_n(x_n - x, s_j^{(n)}) \rangle. \tag{4.301}
\end{aligned}$$

Usando (4.290) podemos reescrever como:

$$u_n(x, t) = T_n g_n(x_n - x, t; q_n) - T_n h_n(x_{n-1} - x, t; p_n) + V_n(x, t), \tag{4.302}$$

e assim escrevemos:

$$u_{n+1}(x, t) = T_{n+1} g_{n+1}(x_{n+1} - x, t; q_{n+1}) - T_{n+1} h_{n+1}(x_n - x, t; p_{n+1}) + V_{n+1}(x, t). \tag{4.303}$$

Através da seguinte condição:

$$u_n(x_n, t) = k_n u_{n+1}(x_n, t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (n = 1, \dots, N - 1), \tag{4.304}$$

substituindo os termos, teremos:

$$\begin{aligned}
& T_n g_n(x_n - x_n, t; q_n) - T_n h_n(x_{n-1} - x_n, t; p_n) + V_n(x_n, t) \\
= & k_n (T_{n+1} g_{n+1}(x_{n+1} - x_n, t; q_{n+1})) - T_{n+1} h_{n+1}(x_n - x_n, t; p_{n+1}) + V_{n+1}(x_n, t). \tag{4.305}
\end{aligned}$$

Reescrevendo a equação anterior:

$$\begin{aligned}
T_n g_n(0, t; q_n) - T_n h_n(x_{n-1} - x_n, t; p_n) + V_n(x_n, t) = & k_n (T_{n+1} g_{n+1}(x_{n+1} - x_n, t; q_{n+1})) \\
& - k_n T_{n+1} h_{n+1}(0, t; p_{n+1}) + k_n V_{n+1}(x_n, t). \tag{4.306}
\end{aligned}$$

Usando a condição (4.11), e fixando $n = 1$:

$$\begin{aligned}
T_1 g_1(0, t; q_1) - T_1 h_1(x_0 - x_1, t; p_1) + V_1(x_1, t) = & k_1 (T_2 g_2(x_2 - x_1, t; q_2)) \\
& - k_1 T_2 h_2(0, t; p_2) + k_1 V_2(x_1, t), \tag{4.307}
\end{aligned}$$

e usando a condição (4.11), poderemos reescrever como:

$$\begin{aligned} T_1 g_1(0, t; q_1) - T_1 h_1(x_0 - x_1, t; p_1) + V_1(x_1, t) &= k_1 T_2 h_1(x_2 - x_1, t; q_2) \\ &\quad - k_1 T_2 h_2(0, t; p_2) + k_1 V_2(x_1, t), \end{aligned} \quad (4.308)$$

Portanto para $n = 1$:

$$\begin{aligned} -T_1 h_1(x_0 - x_1, t; p_1) - k_1 T_2 h_1(x_2 - x_1, t; q_2) + k_1 T_2 h_2(0, t; p_2) \\ = -V_1(x, t) - T_1 g_1(0, t; q_1) + k_1 v_2(x_1, t). \end{aligned} \quad (4.309)$$

Agora para $n = 2, \dots, N - 2$, de forma análoga ao que foi feito para $n = 1$:

$$\begin{aligned} T_n h_{n-1}(0, t; q_n) - T_n h_n(x_{n-1} - x, t; p_n) - k_n T_{n+1} h_n(x_{n+1} - x_n, t; q_n) + k_n T_{n+1} h_{n+1}(0, t; p_{n+1}) \\ = k_n V_{n+1}(x_n, t) - V_n(x_n, t). \end{aligned} \quad (4.310)$$

E fixando $n = N - 1$ teremos:

$$\begin{aligned} T_{N-1} h_{N-2}(0, t; q_{N-1}) - T_{N-1} h_{N-1}(x_{N-2} - x_{N-1}, t; p_{N-1}) - k_{N-1} T_N h_{N-1}(x_N - x_{N-1}, t; q_N) \\ + k_{N-1} T_N h_N(0, t; p_N) = k_{N-1} V_N(x_{N-1}, t) - V_{N-1}(x_{N-1}, t). \end{aligned} \quad (4.311)$$

O sistema de equações integrais dado por (4.309)-(4.311) pode ser escrito em forma matricial como:

$$A(0)h(t) + (A' * h)(t) = b(t), \quad (4.312)$$

sendo $A(t)$ é uma $(N - 1) \times (N - 1)$ matriz tridiagonal cujas entradas ao longo da diagonal principal são da forma:

$$-F_n(x_{n-1} - x_n, t; p_n) - K_n F_n(x_{n+1} - x_n, t; q_{n+1}) \quad (n = 1, \dots, N - 1),$$

ao longo da superdiagonal da seguinte forma:

$$K_n F_{n+1}(0, t; p_{n+1}) \quad (n = 1, \dots, N - 2),$$

e ao longo da subdiagonal dado por:

$$F_n(0, t; q_n) \quad (n = 2, \dots, N - 1).$$

Os vetores $h(t)$ e $b(t)$ ($N - 1$)-dimensional, são dados por:

$$h(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ \vdots \\ h_{N-1}(t) \end{pmatrix} \quad (4.313)$$

e

$$b(t) = \begin{pmatrix} K_1 v_2(x_1, t) - v_1(x_1, t) - Tg(0, t; q_1), \\ K_2 v_3(x_2, t) - v_2(x_2, t), \\ \vdots \\ K_{N-2} v_{N-1}(x_{N-2}, t) - v_{N-2}(x_{N-2}, t) \\ K_{N-1} v_N(x_{N-1}, t) - v_{N-1}(x_{N-1}, t) - K_{N-1} T h(0, t; p_N) \end{pmatrix}, \quad (4.314)$$

respectivamente. Podemos notar que (4.312) é um sistema de equações, que podemos resolver formalmente usando a transformada de Laplace. De fato, (4.312) pode ser reescrito como:

$$h(t) = c(t) + (B * h)(t),$$

na qual,

$$c(t) = A(0)^{-1} b(t), \quad B(t) = -A(0)^{-1} A'(t), \quad (4.315)$$

e aplicando a transformada de Laplace teremos:

$$\hat{h}(s) = \hat{c}(s) + \hat{B}(s) \hat{h}(s),$$

usando o teorema de convolução. Aqui, $\hat{h}(s)$, $\hat{c}(s)$, e $\hat{B}(s)$ são as transformadas de Laplace de $h(t)$, $c(t)$, e $B(t)$, respectivamente. Teremos:

$$\hat{h}(s) = [I - \hat{B}(s)]^{-1} \hat{c}(s) = [I + \hat{B}(s) + \hat{B}(s)^2 + \dots] \hat{c}(s),$$

na qual I é a matriz identidade $(N - 1) \times (N - 1)$. Aplicando a transformada de Laplace inversa e usando o teorema de convolução, obtemos:

$$h(t) = c(t) + (B * c)(t) + (B * B * c)(t) + \dots = c(t) + \sum_{m=1}^{\infty} (B_m * c)(t), \quad (4.316)$$

na qual B_m é a convolução de B consigo mesmo m vezes. A solução formal do problema de difusão para n camadas, (4.6)-(4.8) é dada por:

$$u_n(x, t) = F_0^{(n)}(x_n - x; q_n) h_{n-1}(t) - F_0^{(n)}(x_{n-1} - x; p_n) h_n(t) \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_{n-1}(t) + \int_0^t s_k^{(n)} e^{s_k^{(n)}(t-\tau)} h_{n-1}(\tau) d\tau}{s_k^{(n)} \Delta'_n(s_k^{(n)})} \left\langle q_n, v_n(x_n - x, s_k^{(n)}) \right\rangle$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_n(t) + \int_0^t s_k^{(n)} e^{s_k^{(n)}(t-\tau)} h_n(\tau) d\tau}{s_k^{(n)} \Delta'_n(s_k^{(n)})} \left\langle p_n, v_n(x_{n-1} - x, s_k^{(n)}) \right\rangle + v_n(x, t), \quad (4.317)$$

$$v_n(x, t) = - \int_{x_{n-1}}^{x_n} G_0^{(n)}(x_{n-1} - x, x_n - y) f_n(y) dy$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(y) \left\langle p_n, v_n(x_{n-1} - y, s_k^{(n)}) \right\rangle dy}{\sqrt{d_n s_k^{(n)}} \Delta'_n(s_k^{(n)})} e^{s_k^{(n)} t} \left\langle q_n, v_n(x_n - x, s_k^{(n)}) \right\rangle \quad (4.318)$$

para todo $n = 1, \dots, N$. As funções h_1, \dots, h_{N-1} são determinadas através de (4.315), e (4.316), com $h_0(t) = g(t)$ e $h_N(t) = h(t)$.

4.5.1 Exemplo Numérico

Consideramos um problema de Dirichlet não estacionário para uma equação de difusão não homogênea e termo fonte dependente do tempo e uniformemente distribuído. Utilizando duas camadas, isto é, tomando $N = 2$ teremos:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - k_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = f(t), \quad (x, t) \in (0, 1/2) \times \mathbb{R}_+, \quad (4.319)$$

$$u_1(x, 0) = 0, \quad x \in [x_0, x_1], \quad (4.320)$$

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}(x_1, t) = h_1(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (4.321)$$

$$u_1(x_0, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (4.322)$$

e

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - k_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = f(t), \quad (x, t) \in (1/2, 1) \times \mathbb{R}_+, \quad (4.323)$$

$$u_2(x, 0) = 0, \quad x \in [x_1, x_2], \quad (4.324)$$

$$k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}(x_1, t) = g_2(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (4.325)$$

$$u_2(x_2, t) = 0. \quad (4.326)$$

A maneira de resolver este exemplo será análoga como foi desenvolvido os cálculos para duas camadas, porém definimos o termo fonte $f(t) = e^t$. Assim aplicando a transformada de Laplace em (4.319), teremos:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial t} \right\} - k_1 \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(x, t) \right\} = \mathcal{L} \{ f(t) \}, \quad (4.327)$$

logo,

$$s \bar{u}_1(x, s) - u_1(x, 0) - k_1 \frac{d^2 \bar{u}_1}{dx^2}(x, s) = \bar{f}(s), \quad (4.328)$$

Aplicando a condição inicial (4.320) em (4.328), teremos:

$$s\bar{u}_1(x, s) - k_1 \frac{d^2 \bar{u}_1}{dx^2}(x, s) = f(\bar{s}), \quad (4.329)$$

$$\frac{d^2 \bar{u}_1}{dx^2}(x, s) - \frac{s}{k_1} \bar{u}_1(x, s) = -\frac{f(\bar{s})}{k_1}. \quad (4.330)$$

A solução da EDO homogênea no espaço de Laplace é:

$$\bar{u}_{h_1}(x, s) = A_1 \cosh \sqrt{\frac{s}{k_1}} x + B_1 \sinh \sqrt{\frac{s}{k_1}} x. \quad (4.331)$$

A_1 e B_1 são constantes arbitrárias que dependem de s . Através do método de variação dos parâmetros, vamos obter a solução particular.

Vamos propor uma solução particular da seguinte maneira:

$$y_{p_1} = V_1(x)y_1(x) + V_2(x)y_2(x), \quad (4.332)$$

na qual,

$$V_1(x) = \frac{\bar{f}(s)}{\sqrt{k_1 s}} \int \sinh \sqrt{\frac{s}{k_1}} x dx, \quad (4.333)$$

$$V_2(x) = -\frac{\bar{f}(s)}{\sqrt{k_1 s}} \int \cosh \sqrt{\frac{s}{k_1}} x dx, \quad (4.334)$$

e os termos $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são obtidos através da solução do problema não homogêneo. Substituindo as equações (4.333) e (4.334) em (4.332), teremos:

$$\begin{aligned} y_p &= \left(\frac{\bar{f}(s)}{\sqrt{k_1 s}} \int \sinh \sqrt{\frac{s}{k_1}} x dx \right) \cosh \sqrt{\frac{s}{k_1}} x \\ &\quad - \left(\frac{\bar{f}(s)}{\sqrt{k_1 s}} \int \cosh \sqrt{\frac{s}{k_1}} x dx \right) \sinh \sqrt{\frac{s}{k_1}} x, \end{aligned} \quad (4.335)$$

Logo teremos a solução da seguinte maneira:

$$y_p = -\frac{\bar{f}(s)}{\sqrt{k_1 s}} \int_{x_0}^x \sinh \sqrt{\frac{s}{k_1}} (x-y) dy. \quad (4.336)$$

A solução geral da EDO não homogênea é obtida através da soma da solução geral da equação não homogênea com a solução particular, logo de (4.331) e (4.336), teremos:

$$\bar{u}_1(x, s) = A_1 \cosh \sqrt{\frac{s}{k_1}} x + B_1 \sinh \sqrt{\frac{s}{k_1}} x - \frac{\bar{f}(s)}{\sqrt{k_1 s}} \int_{x_0}^x \sinh \sqrt{\frac{s}{k_1}} (x-y) dy, \quad (4.337)$$

de maneira análoga ao que foi feito anteriormente, vamos obter:

$$\bar{u}_2(x, s) = A_2 \cosh \sqrt{\frac{s}{k_2}} x + B_2 \sinh \sqrt{\frac{s}{k_2}} x - \frac{f(\bar{s})}{\sqrt{k_2 s}} \int_x^{x_2} \sinh \sqrt{\frac{s}{k_2}} (x - y) dy, \quad (4.338)$$

Derivando (4.337) e (4.338), teremos:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}_1}{dx}(x, s) &= A_1 \sqrt{\frac{s}{k_1}} \sinh \sqrt{\frac{s}{k_1}} x + B_1 \sqrt{\frac{s}{k_1}} \cosh \sqrt{\frac{s}{k_1}} x \\ &\quad - \frac{f(\bar{s})}{\sqrt{k_1}} \int_{x_0}^x \cosh \sqrt{\frac{s}{k_1}} (x - y) dy. \end{aligned} \quad (4.339)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}_2}{dx}(x, s) &= A_2 \sqrt{\frac{s}{k_2}} \sinh \sqrt{\frac{s}{k_2}} x + B_2 \sqrt{\frac{s}{k_2}} \cosh \sqrt{\frac{s}{k_2}} x \\ &\quad - \frac{f(\bar{s})}{\sqrt{k_2}} \int_x^{x_2} \cosh \sqrt{\frac{s}{k_2}} (x - y) dy. \end{aligned} \quad (4.340)$$

Por conveniência e generalização vamos introduzir uma notação vetorial:

$$p_1 = (1, 0), \quad p_2 = (0, k_2), \quad q_1 = (0, k_1), \quad q_2 = (1, 0). \quad (4.341)$$

E assim, vamos definir as funções g_n e h_n para $n = 1, 2$.

$$g_n(t) = \begin{cases} g(t) & \text{se } n = 1 \\ k_n \frac{\partial u_n}{\partial x}(x_1, t) & \text{se } n = 2. \end{cases} \quad (4.342)$$

$$h_n(t) = \begin{cases} k_n \frac{\partial u_1}{\partial x}(x_1, t) & \text{se } n = 1. \\ h(t) & \text{se } n = 2. \end{cases} \quad (4.343)$$

E através da solução geral e sua derivada, teremos:

$$u_1(y, s) = \left(\cosh \sqrt{\frac{s}{k_1}} y, \sqrt{\frac{s}{k_1}} \sinh \sqrt{\frac{s}{k_1}} y \right), \quad (4.344)$$

$$u_2(y, s) = \left(\cosh \sqrt{\frac{s}{k_2}} y, \sqrt{\frac{s}{k_2}} \sinh \sqrt{\frac{s}{k_2}} y \right), \quad (4.345)$$

$$v_1(y, s) = \left(\sinh \sqrt{\frac{s}{k_1}} y, \sqrt{\frac{s}{k_1}} \cosh \sqrt{\frac{s}{k_1}} y \right), \quad (4.346)$$

$$v_2(y, s) = \left(\sinh \sqrt{\frac{s}{k_2}} y, \sqrt{\frac{s}{k_2}} \cosh \sqrt{\frac{s}{k_2}} y \right). \quad (4.347)$$

Agora vamos aplicar a transformada de Laplace nas condições de contorno e in-

terface e assim teremos:

$$\begin{pmatrix} \langle p_1, u_1(x_0, s) \rangle & \langle p_1, v_1(x_0, s) \rangle \\ \langle q_1, u_1(x_1, s) \rangle & \langle q_1, v_1(x_1, s) \rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{g}_1(s) \\ \bar{h}_1(s) + \frac{1}{\sqrt{k_1 s}} \int_{x_0}^{x_1} f_1(y) \langle q_1, v_1(x_1 - y, s) \rangle dy \end{pmatrix} \quad (4.348)$$

O determinante de (4.348):

$$\Delta_1(s) = \langle p_1, u_1(x_0, s) \rangle \cdot \langle q_1, v_1(x_1, s) \rangle - \langle p_1, v_1(x_0, s) \rangle \cdot \langle q_1, u_1(x_1, s) \rangle. \quad (4.349)$$

Reescrevendo (4.349) como:

$$\Delta_1(s) = k_1 \sqrt{\frac{s}{k_1}} \cosh \sqrt{\frac{s}{k_1}} \frac{1}{2}, \quad (4.350)$$

e,

$$\begin{pmatrix} \langle p_2, u_2(x_1, s) \rangle & \langle p_2, v_2(x_1, s) \rangle \\ \langle q_2, u_2(x_2, s) \rangle & \langle q_2, v_2(x_2, s) \rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{g}_2(s) \\ \bar{h}_2(s) + \frac{1}{\sqrt{k_2 s}} \int_{x_1}^{x_2} f_2(y) \langle q_2, v_2(x_2 - y, s) \rangle dy \end{pmatrix} \quad (4.351)$$

e o determinante de (4.351) será:

$$\Delta_2(s) = \langle p_2, u_2(x_1, s) \rangle \cdot \langle q_2, v_2(x_2, s) \rangle - \langle p_2, v_2(x_1, s) \rangle \cdot \langle q_2, u_2(x_2, s) \rangle. \quad (4.352)$$

que podemos reescrever como:

$$\Delta_2(s) = -k_2 \sqrt{\frac{s}{k_2}} \cosh \sqrt{\frac{s}{k_2}} \frac{1}{2}, \quad (4.353)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_1(x, s) &= -\frac{\bar{h}_1(s) \phi(x, 0; s, p_1)}{\Delta_1(s)} - \frac{\phi(x, 0; s, p_1) f(\bar{s})}{\sqrt{k_1 s} \Delta_1(s)} \int_0^{x_1} \langle q_1, v_1(1/2 - y, s) \rangle dy, \\ &\quad - \frac{f(\bar{s})}{\sqrt{k_1 s}} \int_0^x \sinh \sqrt{\frac{s}{k_1}} (x - y) dy. \end{aligned} \quad (4.354)$$

E assim, para reduzir a expressão dada em (4.354) vamos denotar:

$$\bar{u}_1(x, s) = -\frac{\bar{h}_1(s) \phi(x, 0; s, p_1)}{\Delta_1(s)} + \bar{V}_1(x, s), \quad (4.355)$$

$$\bar{V}_1(x, s) = -\frac{\phi(x, 0; s, p_1)}{\sqrt{k_1 s} \Delta_1(s)} f(\bar{s}) \int_0^{x_1} \langle q_1, v_1(1/2 - y, s) \rangle dy - \frac{f(\bar{s})}{\sqrt{k_1 s}} \int_{x_0}^{x_1} \sinh \sqrt{\frac{s}{k_1}} (x - y) dy, \quad (4.356)$$

$$\bar{u}_2(x, s) = \frac{\bar{g}_2(s)\phi(x, 1; s, q_2)}{\Delta_2(s)} + \Delta_2(s) + \bar{V}_2(x, s). \quad (4.357)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_2(x, s) = & -\frac{\phi(x, 1/2; s, p_2)}{\sqrt{k_2 s \Delta_2(s)}} f(\bar{s}) \int_{1/2}^{x_2} \langle q_2, v_2(1-y, s) \rangle dy \\ & -\frac{f(\bar{s})}{\sqrt{k_2 s}} \int_{x_1}^{x_2} \operatorname{senh} \sqrt{\frac{s}{k_2}} (x-y) dy. \end{aligned} \quad (4.358)$$

Através dos Lemas 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4 para a inversão da transformada de Laplace, vamos obter a seguinte solução:

$$u_1(x, t) = \frac{1}{k_1} h_1(t)x - \frac{4}{\pi^2 k_1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} U_j^{(1)} h_1(t)}{(2j-1)^2} \operatorname{sen}(2j-1)\pi x + V_1(x, t). \quad (4.359)$$

$$u_2(x, t) = \frac{1}{k_2} h_1(t)(x-1) + \frac{4}{\pi^2 k_2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} U_j^{(2)} h_1(t)}{(2j-1)^2} \operatorname{sen}(2j-1)\pi x + V_2(x, t). \quad (4.360)$$

Usando a condição que $u_1(1/2, t) = u_2(1/2, t)$, teremos:

$$\frac{(k_1 + k_2)}{2k_1 k_2} h_1(t) - \frac{4}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^2} \left[\frac{U_j^{(1)} h_1(t)}{k_1} + \frac{U_j^{(2)} h_1(t)}{k_2} \right] + V_1(1/2, t) - V_2(1/2, t) = 0, \quad (4.361)$$

Assim, temos a equação integral linear para a função que depende do tempo, h_1 . Logo podemos escrever (4.361) como:

$$h_1(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \left[a_j U_j^{(1)} h_1(t) + b_j U_j^{(2)} h_1(t) \right] = c(t), \quad (4.362)$$

na qual, os termos são dados por:

$$a_j = \frac{8k_2}{\pi^2(k_1 + k_2)(2j-1)^2}, \quad (4.363)$$

$$b_j = \frac{8k_1}{\pi^2(k_1 + k_2)(2j-1)^2}, \quad (4.364)$$

$$c(t) = \frac{8k_1 k_2}{(k_1 + k_2)} [V_2(1/2, t), V_1(1/2, t)]. \quad (4.365)$$

$$V_1(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[4 \int_0^{1/2} f(t) \operatorname{sen}(2j-1)\pi y dy \right] e^{-(2j-1)^2 \pi^2 k_1 t} \operatorname{sen}(2j-1)\pi x, \quad (4.366)$$

$$V_2(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[4 \int_0^{1/2} f(t) \text{sen}(2j-1)\pi y dy \right] e^{-(2j-1)^2 \pi^2 k_2 t} \text{sen}(2j-1)\pi x, \quad (4.367)$$

$$U_j h_1(t) = h_1(t) + \int_0^t s_j e^{s_j(t-\tau)} h_1(\tau) d\tau, \quad (4.368)$$

$$s_j = -(2j-1)^2 \pi^2 k_1, \quad (4.369)$$

$$\phi(t) = - \sum_{j=1}^{\infty} (a_j + b_j) \delta_0(t) - \sum_{j=1}^{\infty} (a_j s_j^{(1)} e^{s_j^{(1)} t} + b_j s_j^{(2)} e^{s_j^{(2)} t}), \quad (4.370)$$

formalmente teremos:

$$\bar{h}_1(s) = \frac{\bar{c}(s)}{1 - \phi(s)} = \bar{c}(s) [1 + \bar{\phi}(s) + \bar{\phi}^2(s) + \dots] = \bar{c}(s) + \sum_{m=1}^{\infty} \phi^m(s). \quad (4.371)$$

Na qual h_1 é dado pela série:

$$h_1(t) = c(t) + (\phi * c)(t) + (\phi * \phi * c)(t) + \dots = c(t) + \sum_{m=1}^{\infty} (\phi_m * c)(t). \quad (4.372)$$

* é usado para denotar a convolução, e para $m \geq 2$, ϕ_m é a convolução de ϕ consigo mesmo m vezes. Note que definimos $\phi_1 = \phi$. Resumindo, a solução do problema de duas camadas, teremos h_1 através de (4.372).

Nesta seção apresentamos a solução para o problema de Dirichlet não estacionário para uma equação de difusão não homogênea e termo fonte dependente do tempo e uniformemente distribuído para duas camadas ($N = 2$) e obtivemos a solução da transformada de Laplace inversa de forma analítica conforme proposto pelo (RODRIGO; WORTHY, 2016). A fim de avaliar o desempenho e precisão computacional desta solução, consideramos $k_n(x) = 1 + 0.25 \text{sen}(2\pi x)$ e termo fonte $f(t) = e^t$. Devido à dificuldade da implementação da recorrência de convoluções em (4.372), optamos por utilizar o algoritmo de Talbot Fixo para (4.337) e (4.338) com $N = 2$, $M = 100$ e $N_t = 301$ (Figura 11):

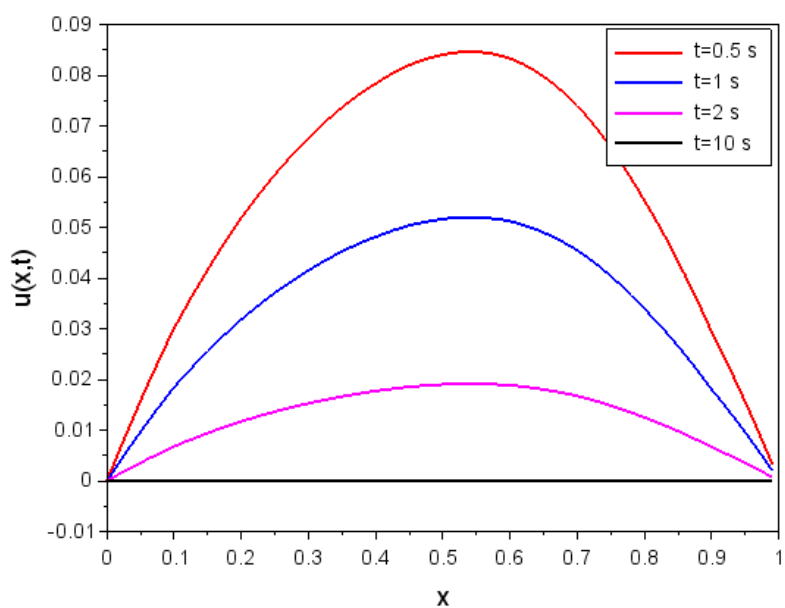


Figura 11: Perfis espaciais para $u(x,t)$ para $N = 2$, e diferentes valores de tempo.

E também generalizamos a programação e conseguimos resultados para multica-madas, ou seja, para um N qualquer (Figura 12), e usando $M = 100$ e $N_t = 301$, teremos:

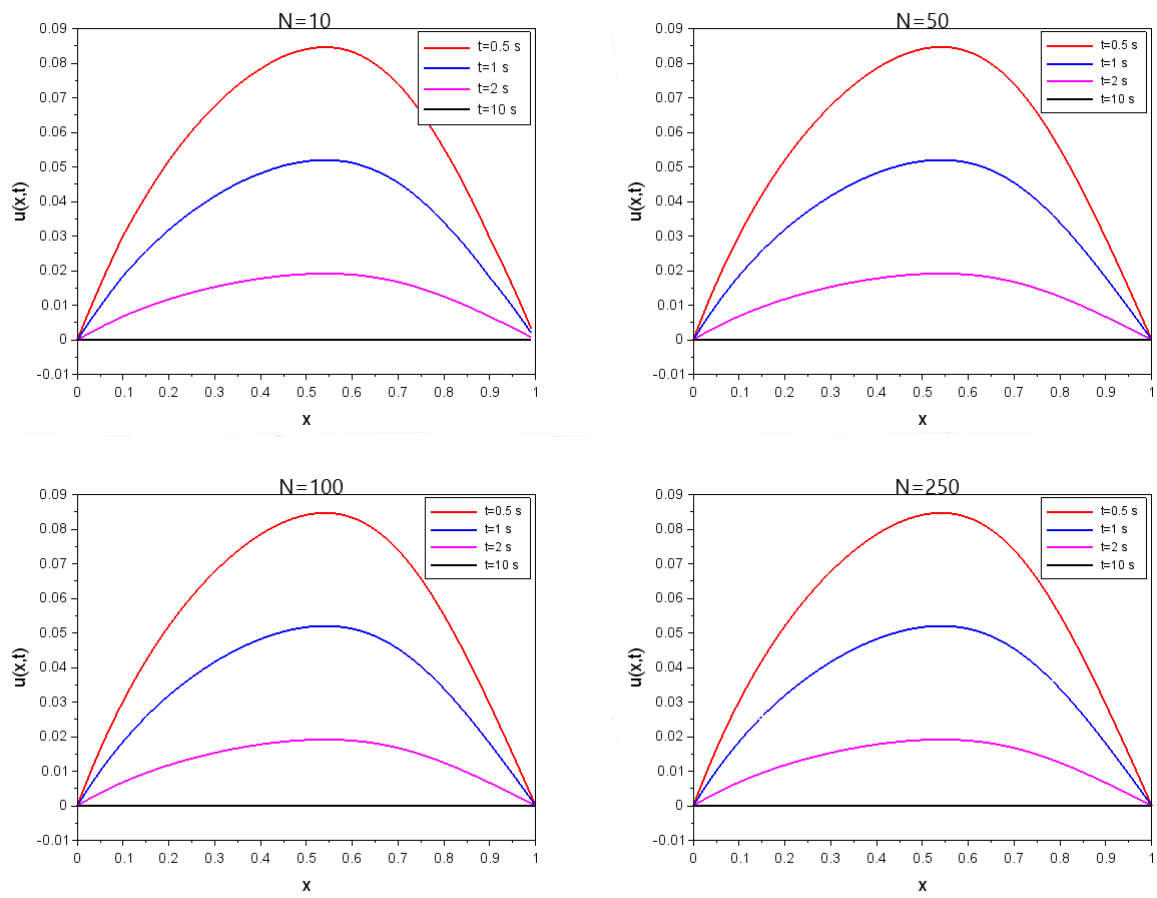


Figura 12: Perfis espaciais $u(x,t)$ para diferentes valores de N , e diferentes valores de tempo.

5 UMA ABORDAGEM INTEGRADA ADMM-MHA

Em muitas aplicações, os coeficientes que modelam as propriedades físicas de um meio heterogêneo são rapidamente oscilantes. Para capturar essa oscilação rápida dos coeficientes, e assim obter estimativas precisas da solução, a aplicação direta do ADMM exigiria discretizações de domínio muito finas, levando o custo computacional notavelmente maior. Neste capítulo, para diminuir o custo computacional com perda mínima de precisão quando se lida com problemas com coeficientes rapidamente oscilantes, o ADMM é combinado com o MHA. Especificamente, o MHA é aplicado ao problema que resulta de aplicar a transformada de Laplace após a aproximação constante por partes dos coeficientes do problema original. Assim, as estimativas de homogeneização dos coeficientes efetivos e da solução são fornecidas pelo problema ADMM no espaço de Laplace. Finalmente, a solução do problema homogeneizado no espaço de Laplace é invertida mediante o algoritmo de Talbot Fixo para termos a estimativa via MHA da solução do problema original. A fim de ilustrar a aplicação desta abordagem integradora ADMM-MHA, consideraremos um problema de Dirichlet para a equação de difusão não homogênea com coeficientes ε -periódicos e termo fonte dependente do tempo e uniformemente distribuído.

5.1 Formulação dos problemas original e ADMM

5.1.1 Problema Original

Seja ε um parâmetro pequeno, $0 < \varepsilon \ll 1$. O chamado problema original considerado aqui é da seguinte forma: obter $u^\varepsilon \in C^2([0, 1] \times \mathbb{R}_+)$ tal que:

$$c^\varepsilon(x) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[k^\varepsilon(x) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right] = f(t), (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+^* \quad (5.1)$$

$$u^\varepsilon(x, t) = 0, (x, t) \in \{0, 1\} \times \mathbb{R}_+^*, u^\varepsilon(x, t) = 0, (x, t) \in (0, 1) \times \{0\}, \quad (5.2)$$

com $c^\varepsilon \in C^0([0, 1])$ e $k^\varepsilon \in C^1([0, 1])$, ε -periódicos e positivos, e $c^\varepsilon(x) = c(x/\varepsilon)$, e $k^\varepsilon(x) = k(x/\varepsilon)$ e $f \in C^0(\mathbb{R}_+)$.

5.1.2 Método ADMM

O primeiro passo na aplicação do ADMM, é aproximar o problema original (5.1)-(5.2) através do problema definido considerando aproximações constantes dos coeficientes de (5.1). Seja $\{x_n\} \subset [0, 1]$, com $x_n = n\Delta x$ e $n = \overline{0, N}$, $n \in \mathbb{N}$, uma partição uniformemente distribuída de $[0, 1]$, com tamanho de passo Δx , $x_0 = 0$ e $x_N = 1$. Agora, consideramos a aproximação constante por partes dos coeficientes $c^\varepsilon(x)$ e $k^\varepsilon(x)$, dada pelos seus valores médios em cada intervalo (x_{n-1}, x_n) , $n = \overline{1, N}$, de comprimento Δx :

$$c_n^\varepsilon = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{n-1}}^{x_n} c^\varepsilon(x) dx, \quad k_n^\varepsilon = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{n-1}}^{x_n} k^\varepsilon(x) dx. \quad (5.3)$$

Para que as aproximações constantes por partes (5.3), consigam capturar o comportamento rapidamente oscilante dos coeficientes $c^\varepsilon(x)$ e $k^\varepsilon(x)$ a norma Δx deve ser suficientemente pequena, isto é, $\Delta x \ll \varepsilon$, e $N \gg 1$. Então o problema original dado pelas equações (5.1)-(5.2) é aproximado pelo problema ADMM a seguir:

$$c_n^\varepsilon \frac{\partial u_n^\varepsilon}{\partial t} - k_n^\varepsilon \frac{\partial^2 u_n^\varepsilon}{\partial x^2} = f(t), (x, t) \in (x_{n-1}, x_n) \times \mathbb{R}_+^*, n = \overline{1, N}, \quad (5.4)$$

$$u_n^\varepsilon(x_n, t) = u_{n+1}^\varepsilon(x_n, t), t \in \mathbb{R}_+^*, n = \overline{1, N-1}, \quad (5.5)$$

$$k_n^\varepsilon \frac{\partial u_n^\varepsilon}{\partial x} \Big|_{x=x_n} = k_{n+1}^\varepsilon \frac{\partial u_{n+1}^\varepsilon}{\partial x} \Big|_{x=x_n}, t \in \mathbb{R}_+^*, n = \overline{1, N-1}, \quad (5.6)$$

$$u_1^\varepsilon(0, t) = u_N^\varepsilon(1, t) = 0, t \in \mathbb{R}_+^*, u_n^\varepsilon(x, 0) = 0, x \in (x_{n-1}, x_n), n = \overline{1, N}, \quad (5.7)$$

em que $u_n^\varepsilon(x, t)$ é a aproximação via ADMM da solução $u^\varepsilon(x, t)$ do problema original (5.1)-(5.2) para $(x, t) \in (x_{n-1}, x_n) \times \mathbb{R}_+^*$, $n = \overline{1, N}$, e as condições (5.5)-(5.6) impõe continuidade nos pontos de partição $x = x_n$, $n = \overline{1, N-1}$, para a solução aproximada $u_n^\varepsilon(x, t)$ e o fluxo correspondente.

5.2 Estratégias de resolução

5.2.1 Solução via ADMM

A segunda etapa do método ADMM consiste em aplicar a transformada de Laplace $\mathcal{L}[\cdot]$ em relação a variável t para o problema ADMM dado em (5.4)-(5.7) com as definições dadas em (5.3). Então para cada $s \in \mathbb{C}$,

$$\frac{d^2 v_n^\varepsilon}{dx^2} - R_n^2(s) v_n^\varepsilon(x, s) = -\frac{\bar{f}(s)}{k_n^\varepsilon}, x \in (x_{n-1}, x_n), n = \overline{1, N}, \quad (5.8)$$

$$v_n^\varepsilon(x_n, s) = v_{n+1}^\varepsilon(x_n, s), n = \overline{1, N-1}, \quad (5.9)$$

$$k_n \frac{dv_n^\varepsilon}{dx} \Big|_{x=x_n} = k_{n+1} \frac{dv_{n+1}^\varepsilon}{dx} \Big|_{x=x_n}, n = \overline{1, N-1}, \quad (5.10)$$

$$v_1^\varepsilon(0, s) = v_N^\varepsilon(1, s) = 0, \quad (5.11)$$

em que $v_n^\varepsilon(x, s) = \mathcal{L}[u_n^\varepsilon(x, t)]$, $\bar{f}(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ e $R_n(s) = (C_n^\varepsilon s/k_n^\varepsilon)^{1/2}$. Então para $x \in (x_{n-1}, x_n)$, $n = \overline{1, N}$, do problema ADMM no espaço de Laplace (5.8)- (5.11) é:

$$v_n^\varepsilon(x, s) = A_n e^{R_n(s)x} + B_n e^{-R_n(s)x} + \frac{\bar{f}(s)}{k_n^\varepsilon R_n^2(s)}. \quad (5.12)$$

Os coeficientes constantes A_n e B_n em (5.12) são obtidos resolvendo o sistema de equações algébricas lineares resultantes da substituição de (5.12) nas condições de continuidade em (5.9) e (5.10), e as condições de contorno em (5.11). O passo final para obter a solução do problema ADMM (5.4)-(5.7) consiste na aplicação da transformada inversa de Laplace $\mathcal{L}^{-1}[\cdot]$ em (5.12). Podemos notar a complexidade da solução (5.12), do qual se requer a inversão numérica da transformada de Laplace, e por isso a solução final é considerada como semi-analítica. Normalmente, o algoritmo de inversão é o esquema de quadratura Gaussiana, mas aqui usaremos o algoritmo de Talbot Fixo (ABATE; VALKÓ, 2004). Assim a solução do problema ADMM (5.4)-(5.7) é:

$$u_n^\varepsilon(x, t) = \frac{r}{M} \left[\frac{1}{2} v_n^\varepsilon(x, r) e^{tr} + \sum_{k=1}^{M-1} \operatorname{Re} \left\{ e^{ts(\theta_k)} v_n^\varepsilon(x, s(\theta_k)) (1 + i\omega(\theta_k)) \right\} \right], \quad (5.13)$$

na qual $r = 2M/N_t t$ é o parâmetro com valor fixo, $i^2 = -1$, e $s(\theta_k) = r\theta_k(\cot(\theta_k) + i)$, $\omega(\theta_k) = \theta_k + (\theta_k \cot(\theta_k) - 1) \cot(\theta_k)$, e $\theta_k = k\pi/M \in (-\pi, \pi)$, (ABATE; VALKÓ, 2004).

5.2.2 Estimativa via MHA

A abordagem alternativa aqui proposta consiste em aplicar o MHA ao problema via ADMM no espaço de Laplace (5.8)-(5.11), o qual podemos reescrever como:

$$\frac{d}{dx} \left[\tilde{k}^\varepsilon(x) \frac{d\tilde{V}^\varepsilon}{dx} \right] - \tilde{c}^\varepsilon(x) s \tilde{V}^\varepsilon(x, s) = -\bar{f}(s), x \in (0, 1) - \{x_n\}_{n=\overline{1, N-1}}, \quad (5.14)$$

$$\left[\left[\tilde{V}^\varepsilon(x, s) \right] \right]_{x=x_n} = 0, n = \overline{1, N-1}, \quad (5.15)$$

$$\left[\left[\tilde{k}^\varepsilon(x) \frac{d\tilde{V}^\varepsilon}{dx} \right] \right]_{x=x_n} = 0, n = \overline{1, N-1}, \quad (5.16)$$

$$\tilde{V}^\varepsilon(x, s) = 0, x \in \{0, 1\}, \quad (5.17)$$

$\tilde{c}^\varepsilon(x) = c_n^\varepsilon$, $\tilde{k}^\varepsilon(x) = k_n^\varepsilon$ e $\tilde{V}^\varepsilon(x, s) = \tilde{V}_n^\varepsilon(x, s)$ para $x \in (x_{n-1}, x_n)$, $n = \overline{1, N}$, $[[\cdot]]$ é um operador de salto em cada ponto da partição x_n , $n = \overline{1, N-1}$, e as derivadas são entendidas no sentido generalizado. A existência de uma solução generalizada $\tilde{V}^\varepsilon(x, s)$ para o problema dado (5.14)-(5.17) (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989). O formalismo clássico do MHA fornece uma solução assintótica formal do problema (5.14)-(5.17) da seguinte maneira:

$$\tilde{V}^{(1)}(x, s, \varepsilon) = \tilde{V}_0(x, s) + \varepsilon N_1^\varepsilon(x) \frac{d\tilde{V}_0}{dx}. \quad (5.18)$$

Em (5.18), $\tilde{V}_0(x, s)$ é a solução do chamado problema homogeneizado dado por:

$$\hat{k} \frac{d^2 \tilde{V}_0}{dx^2} - \hat{c} s \tilde{V}_0(x, s) = -\bar{f}(s), x \in (0, 1), \quad (5.19)$$

$$\tilde{V}_0(x, s) = 0, x \in \{0, 1\}, \quad (5.20)$$

os coeficientes efetivos \hat{c} e \hat{k} são dados por:

$$\hat{c} = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m c_n^\varepsilon, \quad \hat{k}^{-1} = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m \frac{1}{k_n^\varepsilon} \quad (5.21)$$

sendo m , o número de subintervalos em um período, com $m\Delta x = \varepsilon$, e $N_1^\varepsilon(x) = N_1(x/\varepsilon)$ e ε -periódico é a função que resolve o chamado problema local:

$$\frac{d}{dy} \left[\tilde{k}(y) \frac{dN_1}{dy} + \tilde{k}(y) \right] = 0, y \in (0, 1) - \{y_n\}_{n=\overline{1, m-1}}, \quad (5.22)$$

$$[[N_1(y)]]_{y=y_n} = 0, n = \overline{1, m-1}, \quad (5.23)$$

$$\left[\left[\tilde{k}(y) \frac{dN_1}{dy} + \tilde{k}(y) \right] \right]_{y=y_n} = 0, n = \overline{1, m-1}, \quad (5.24)$$

$$N_1(y) = 0, y \in \{0, 1\}, \quad (5.25)$$

no qual $y = x/\varepsilon$ é a variável local. Pode ser provado, que existe uma única função $N_1(y)$, 1-periódica em y , que resolve o problema local (5.22)-(5.25). Também se pode provar através de um princípio de máximo que $\tilde{V}^\varepsilon(x, s) \rightarrow \tilde{V}^{(1)}(x, s, \varepsilon)$ e $\tilde{V}^{(1)}(x, s, \varepsilon) \rightarrow \tilde{V}_0(x, s)$ para $\varepsilon \rightarrow 0^+$, de onde $\tilde{V}^\varepsilon(x, s) \rightarrow \tilde{V}_0(x, s)$ para $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Isso significa que, para valores suficientemente pequenos de ε , a solução $\tilde{V}_0(x, s)$ do problema homogeneizado (5.19)-(5.20) com definições (5.21) é uma boa aproximação da solução $\tilde{V}^\varepsilon(x, s)$ do problema ADMM no espaço de Laplace (5.14)-(5.17). A solução do problema homogeneizado no espaço de Laplace (5.19)-(5.20) com os coeficientes

efetivos (5.21) é:

$$\tilde{V}_0(x, s) = \frac{\bar{f}(s)}{\hat{k}\hat{R}^2} \left[1 - \frac{\sinh\hat{R}(s)x - \sinh\hat{R}(s)(x-1)}{\sinh\hat{R}(s)} \right], \quad (5.26)$$

$\hat{R}(s) = (\hat{c}s/\hat{k})^{1/2}$. Então a estimativa da homogeneização da solução do problema ADMM (5.4)-(5.7) é obtida, quando aplicamos a transformada inversa de Laplace \mathcal{L}^{-1} a (5.26). Devido à complexidade da solução (5.26), a inversão numérica da transformada de Laplace é necessária, de modo que a estimativa final é considerada como semi-analítica. Como anteriormente, usaremos o algoritmo do Talbot-Fixo (ABATE; VALKÓ, 2004) para realizar a inversão. Portanto, o MHA estima a solução do problema ADMM (5.4)-(5.7) como:

$$u_0(x, t) = \frac{r}{M} \left[\frac{1}{2} \tilde{V}_0(x, r) e^{tr} + \sum_{k=1}^{M-1} Re \left\{ e^{ts(\theta_k)} \tilde{V}_0(x, s(\theta_k)) (1 + i\omega(\theta_k)) \right\} \right]. \quad (5.27)$$

$r = 2M/N_t t$ é o parâmetro com valor fixo, $i^2 = -1$, e $s(\theta_k) = r\theta_k(\cot(\theta_k) + i)$, $\omega(\theta_k) = \theta_k + (\theta_k \cot(\theta_k) - 1) \cot(\theta_k)$, e $\theta_k = k\pi/M \in (-\pi, \pi)$, (ABATE; VALKÓ, 2004).

5.3 Exemplos Numéricos

A fim de avaliar o desempenho e precisão computacional da abordagem ADMM-MHA dada por (5.27), vamos considerar o problema original (5.1)-(5.2) com coeficientes $c^\varepsilon(x) = 1$ e $k^\varepsilon(x) = 1 + 0.25\text{sen}(2\pi x/\varepsilon)$ e termo fonte $f(t) = e^{-t}$. O comportamento rapidamente oscilante de $k^\varepsilon(x)$ para ε suficientemente pequeno, é mostrado na Figura 13, bem como a aproximação por partes constantes $\tilde{k}(y)$ de $k(y)$ sobre o primeiro período. Além disso, a primeira avaliação da precisão da aproximação constante por partes de $k^\varepsilon(x)$ em (5.3) é representado na Tabela 4, que mostra o erro absoluto de \hat{k} calculado como em (5.21) com relação ao valor exato $\hat{k}^{-1} = \int_0^1 k^{-1}(y)dy$, $\hat{k} = \sqrt{15}/4 \approx 0.96824$, para vários valores de $m = \varepsilon/\Delta x$. Podemos observar que, para a aproximação por partes representada na Figura 13 correspondente a $m = 10$, o erro absoluto é de ordem $\approx 10^{-3}$.

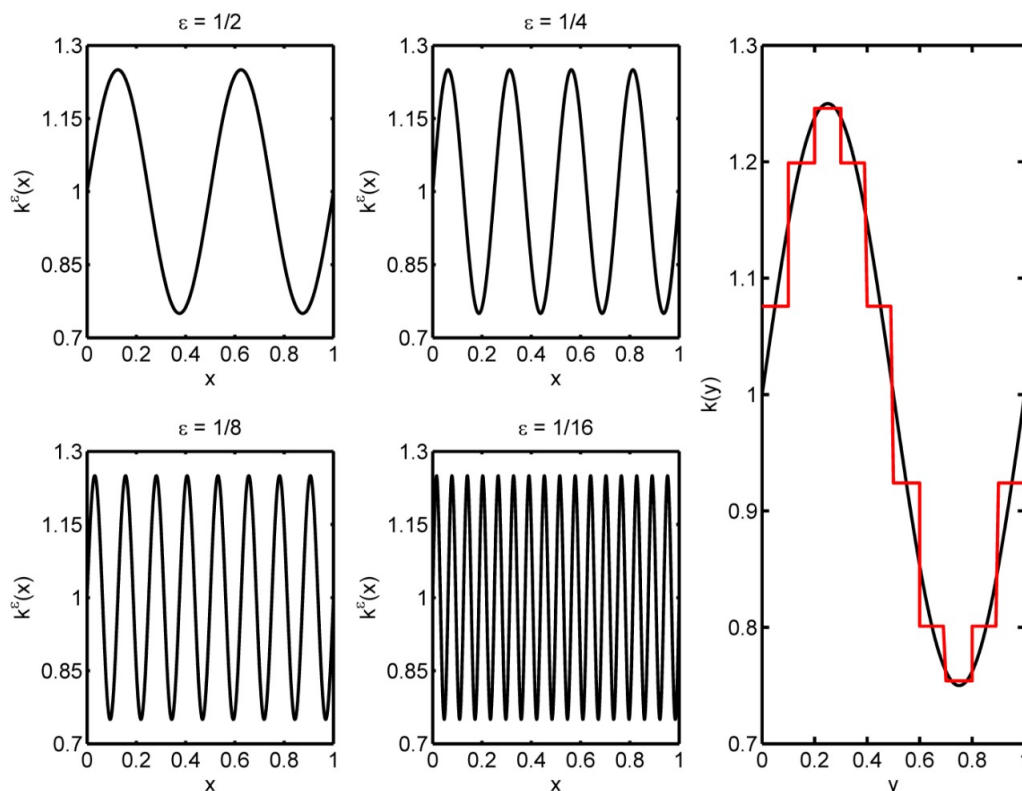


Figura 13: Oscilação rápida de k^ε , $\varepsilon \rightarrow 0^+$ e a ilustração da sua aproximação por partes.

Tabela 4: Precisão de \hat{k} com estimativas via (5.21) em comparação com o valor exato $\hat{k} = \sqrt{15/4} \approx 0.96824$.

m	$\hat{k} (\times 10^{-2})$	Precisão
10	96,929	105,646
25	96,842	17,860
50	96,829	5,154
100	96,826	1,973
200	96,825	1,176

Os perfis espaciais de $u^\varepsilon(x, t)$ (5.13) e $u_0(x, t)$ (5.27) para $t = 5$ e $m = 10$ são representados na Figura 14 para $r = 2M/101t$, $M = 100$. O comportamento esperado de $u^\varepsilon(x, t) \rightarrow u_0(x, t)$ para $\varepsilon \rightarrow 0^+$ é observado. Podemos ver através do gráfico que conforme ε se aproxima de zero as curvas se tornam quase imperceptíveis. A Tabela 5 mostra tal comportamento quantificado pela diferença máxima absoluta entre $u^\varepsilon(x, t)$ e $u_0(x, t)$ para $t = 5$, $m = 10, 100$ e vários valores de ε , bem como os tempos de execução correspondentes. Podemos observar que tais medidas de precisão são similares para ambos os valores de m , o que significa que a aproximação por partes correspondente a $m = 10$ é suficientemente precisa, para os quais os tempos de execução são aceitavelmente pequenos. No entanto, é notável que os tempos de

execução correspondentes à abordagem ADMM-MHA proposta aqui sejam de ordem $\approx 10^{-2}$ segundos para $m = 10$. Por outro lado para $m = 100$, os tempos de execução da abordagem ADMM-MHA permanecerá muito pequeno de ordem 10^{-1} segundos, já o ADMM tradicional cresce exponencialmente podendo o tempo de execução chegar a mais de 45 minutos usando $\varepsilon = 1/16$. Isto significa que, para os casos em que são necessárias aproximações mais finas dos coeficientes, a abordagem ADMM-MHA é a melhor escolha em termos de precisão e esforço computacional.

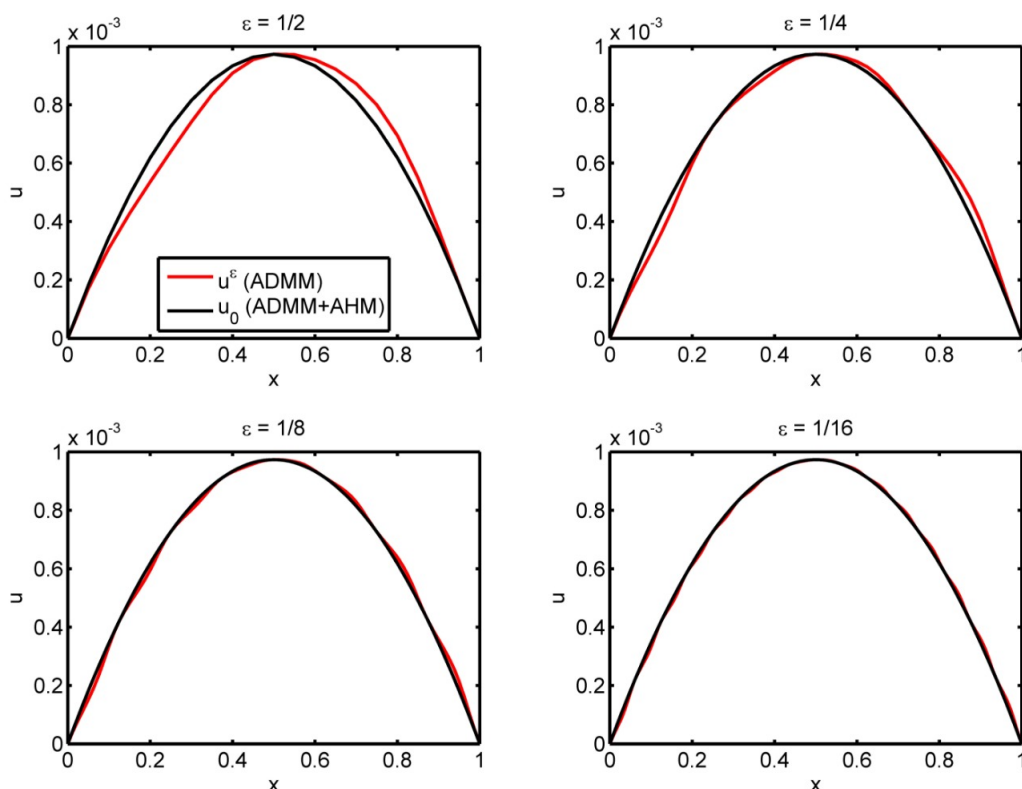


Figura 14: Perfis espaciais de $u^\varepsilon(x, t)$ (5.13) e $u_0(x, t)$ (5.27) para $t = 5$ e $m = 10$, para diferentes valores de ε .

Tabela 5: Precisão e custo computacional dos perfis espaciais na Figura 14.

ε	$m = 10$			$m = 100$		
	precisão ($\times 10^{-5}$)	tempo de execução		precisão ($\times 10^{-5}$)	tempo de execução	
	$\max_{x \in (0,1)} u^\varepsilon - u_0 $	ADMM	ADMM +MHA	$\max_{x \in (0,1)} u^\varepsilon - u_0 $	ADMM	ADMM +MHA
1/2	8,625	0,031	0,016	8,702	5,803	0,094
1/4	6,014	0,156	0,047	6,028	44,211	0,172
1/8	3,420	0,858	0,062	3,434	347,601	0,312
1/16	1,812	6,006	0,078	1,821	2740,064	0,530

Neste exemplo $m = 10$ fornece estimativas suficientemente precisas com tempos razoavelmente pequenos para os perfis espaciais de $u^\varepsilon(x, t)$ e $u_0(x, t)$. Assim, a Figura

15 mostra os perfis temporais para esse caso para $x = 0.7$ e vários valores para ε . Novamente o comportamento esperado de $u^\varepsilon(x, t) \rightarrow u_0(x, t)$ para $\varepsilon \rightarrow 0^+$ é observado, e as curvas para $\varepsilon = 1/16$ são quase imperceptíveis. Além disso a Tabela 6 mostra esse comportamento quantificado pela diferença absoluta máxima entre $u^\varepsilon(x, t)$ e $u_0(x, t)$ para $x = 0.7, m = 10$ e vários valores decrescentes de ε , bem como os tempos de execução correspondentes. Observe que a diferença absoluta máxima é de ordem $\approx 10^{-3}$. Novamente é notável que os tempos de execução correspondentes à abordagem ADMM-MHA aqui proposta sejam de ordem $\approx 10^{-2}$ segundos (exceto para $\varepsilon = 1/16$, para os quais são ligeiramente acima de 0.1 segundo), enquanto os tempos de execução correspondente ao ADMM tradicional crescem exponencialmente atingindo quase 4 minutos para $\varepsilon = 1/16$. Assim para valores suficientemente pequenos de ε , a abordagem ADMM-MHA proposta aqui é a melhor escolha em termos de precisão e esforço computacional.

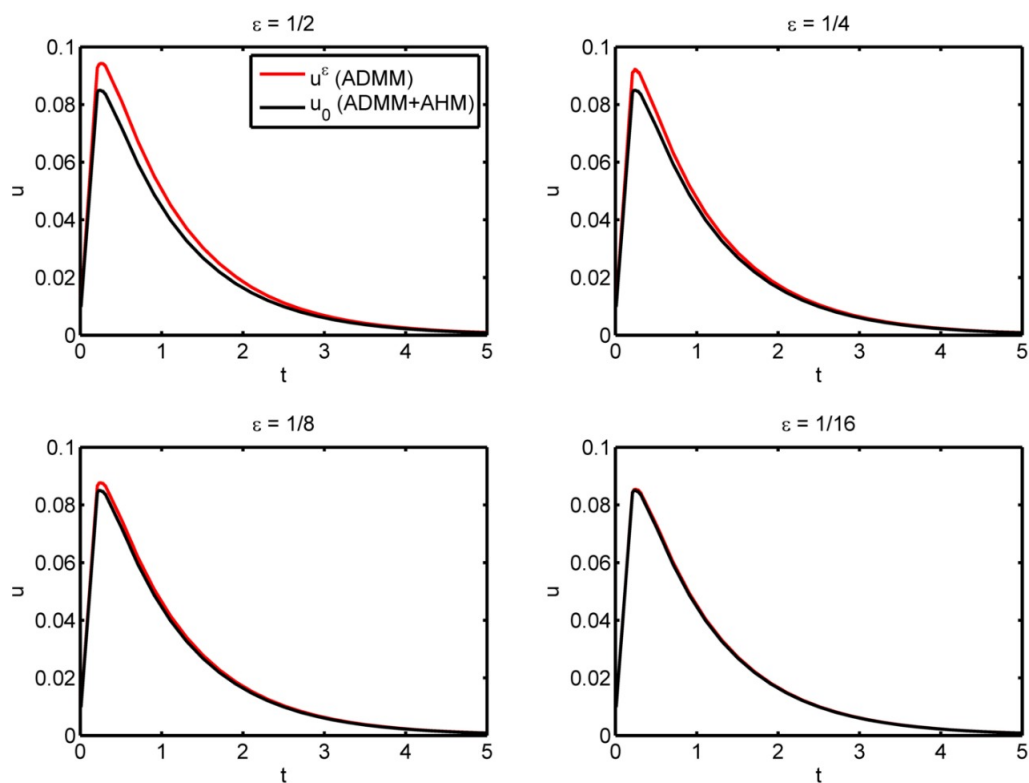


Figura 15: Perfis temporais de $u^\varepsilon(x, t)$ (5.13) e $u_0(x, t)$ (5.27) para $x = 0.7$ e $m = 10$, para diferentes valores de ε .

Tabela 6: Precisão e custo computacional dos perfis temporais dados na Figura 15.

ε	Precisão ($\times 10^{-3}$)		Tempo de execução	
	$\max_{x \in (0,1)} u^\varepsilon - u_0 $		ADMM	ADMM+MHA
1/2	9,798		0,874	0,016
1/4	7,240		4,774	0,031
1/8	2,927		30,514	0,078
1/16	0,848		219,462	0,125

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho, apresentamos uma metodologia integradora para a resolução de problemas de valores iniciais e de contorno para equações em derivadas parciais com coeficientes rapidamente oscilantes. Tal metodologia é obtida da combinação da transformada de Laplace, o método de homogeneização assintótica, e o método multicamadas de advecção-difusão.

Primeiramente a transformada de Laplace, foi utilizada para resolver um problema para a equação do calor. Devido à dificuldade de inversão de forma analítica utilizamos o algoritmo de Talbot Fixo, do qual foram avaliados sua convergência e precisão.

Após, o método de homogeneização assintótica foi aplicado a um problema de valores de contorno para a equação elíptica não homogênea com coeficientes periódicos que descreve um campo térmico estacionário. Ainda, apresentamos um exemplo resolvido da aplicação combinada com a transformada de Laplace (incluindo sua inversão numérica mediante o algoritmo Talbot Fixo), comparando a solução do problema homogeneizado e a solução assintótica.

Depois, o método multicamadas de advecção-difusão foi aplicado a um problema com condições de contorno arbitrárias dependentes do tempo. O problema para uma camada, foi resolvido de forma analítica em que a transformada de Laplace inversa se teve através de uma sequência de lemas. Seguidamente, o método foi generalizado para n -camadas. Para ilustrar esses resultados, tomamos um exemplo de um problema de Dirichlet não estacionário para uma equação de difusão não homogênea e com termo fonte dependente do tempo e uniformemente distribuído. A solução desse problema teve que ser obtida de forma semianalítica, devido à dificuldade em se implementar a recorrência de convoluções necessária para a resolução analítica. Sendo assim, apresentamos os resultados para diferentes números de camadas utilizando o algoritmo de inversão de Talbot Fixo.

Finalmente, comparamos a aplicação pura do método multicamadas de advecção-difusão e sua combinação com o método de homogeneização assintótica para resolver um problema de valores de contorno e inicial para a equação do calor não homogênea com coeficientes periódicos. Um exemplo foi resolvido detalhadamente, incluindo o

uso do algoritmo de Talbot Fixo, e a precisão e o custo computacional de ambas as abordagens foram aferidas.

O ADMM é um método amplamente aplicado no contexto da modelagem de dispersão de poluentes para resolver EDPs com coeficientes continuamente variáveis, e também pode ser aplicado para modelar o comportamento de qualquer meio heterogêneo, como foi apresentado no presente trabalho. Este método baseia-se em uma aproximação constante por partes dos coeficientes variáveis das equações do problema e da aplicação da transformada de Laplace. Claramente, quanto mais fina for essa aproximação, constante por partes, mais precisos serão os resultados, entretanto mais esforço computacional será necessário. Em muitas aplicações os coeficientes que modelam as propriedades físicas do meio heterogêneo são rapidamente oscilantes. Portanto, a fim de capturar essa oscilação rápida dos valores dos coeficientes, e assim obter estimativas precisas da solução, a aplicação direta do ADMM exigiria discretizações de domínio muito finas, elevando o custo computacional.

O objetivo principal do trabalho foi atingido, pois visando diminuir o custo computacional com perda mínima de precisão quando se lida com problemas com coeficientes rapidamente oscilantes, o ADMM foi combinado com o MHA apresentando bons resultados.

Portanto, podemos concluir que a combinação do ADMM com o MHA é o método de escolha em termos de precisão e esforço computacional para resolver problemas de valor de contorno e/ou iniciais com coeficientes rapidamente oscilantes.

REFERÊNCIAS

ABATE, J.; VALKÓ, P. P. Multi-precision Laplace transform inversion. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [S.l.], v.60, n.5, p.979–993, 2004.

AMAR, M.; ANDREUCCI, D.; BISEGNA, P.; GIANNI, R. Homogenization limit for electrical conduction in biological tissues in the radio-frequency range. **Comptes Rendus Mecanique**, [S.l.], v.331, n.7, p.503–508, 2003.

BAKHVALOV, N.; PANASENKO, G. **Averaging processes in periodic media. Mathematical problems in mechanics of composite materials**. [S.l.]: Kluwer, Dordrecht, 1989.

BENSOUSSAN, A.; LIONS, J.-L.; PAPANICOLAOU, G. **Asymptotic analysis for periodic structures Studies in Mathematics and its applications, Vol. 5**. [S.l.]: North-Holland, Amsterdam, 1978.

BRENNER, R.; BRAVO-CASTILLERO, J. Response of multiferroic composites inferred from a fast-Fourier-transform-based numerical scheme. **Smart Materials and Structures**, [S.l.], v.19, n.11, p.115004, 2010.

CAPDEVILLE, Y.; ZHAO, M.; CUPILLARD, P. Fast Fourier homogenization for elastic wave propagation in complex media. **Wave Motion**, [S.l.], v.54, p.170–186, 2015.

CONCA, C.; VANNINATHAN, M. Fourier approach to homogenization problems. **ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations**, [S.l.], v.8, p.489–511, 2002.

COSTA, C.; VILHENA, M.; MOREIRA, D.; TIRABASSI, T. Semi-analytical solution of the steady three-dimensional advection-diffusion equation in the planetary boundary layer. **Atmospheric Environment**, [S.l.], v.40, n.29, p.5659–5669, 2006.

HUI, T.; OSKAY, C. A nonlocal homogenization model for wave dispersion in dissipative composite materials. **International Journal of Solids and Structures**, [S.l.], v.50, n.1, p.38–48, 2013.

LOGAN, J. D. **Applied Partial Differential Equations**. [S.I.]: Springer Science & Business Media, 2004.

MOREIRA, D. M.; VILHENA, M. T.; TIRABASSI, T.; BUSKE, D.; COSTA, C. P. da. Comparison between analytical models to simulate pollutant dispersion in the atmosphere. **International Journal of Environment and Waste Management**, [S.I.], v.6, n.3-4, p.327–344, 2010.

MOREIRA, D.; VILHENA, M.; BUSKE, D.; TIRABASSI, T. The state-of-art of the GILTT method to simulate pollutant dispersion in the atmosphere. **Atmospheric Research**, [S.I.], v.92, n.1, p.1–17, 2009.

NGUYEN, N.-T.; LICHT, C.; KWEON, J.-H. An efficient homogenization method using the trigonometric interpolation and the fast fourier transform. **Vietnam Journal of Mechanics**, [S.I.], v.33, n.4, p.1–9, 2011.

NGUYEN, T.; NGUYEN, S.; VU, M.; VU, M. Effective viscoelastic properties of micro-cracked heterogeneous materials. **International Journal of Damage Mechanics**, [S.I.], v.25, n.4, p.557–573, 2016.

PANASENKO, G. Homogenization for periodic media: from microscale to macroscale. **Physics of Atomic Nuclei**, [S.I.], v.71, n.4, p.681–694, 2008.

POBEDRYA, B. E. Mechanics of composite materials. **Izd. Mosk. Univ., Moscow**, [S.I.], 1984.

RODRIGO, M. R.; WORTHY, A. L. Solution of multilayer diffusion problems via the Laplace transform. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, [S.I.], v.444, n.1, p.475–502, 2016.

SADD, M. H. **Elasticity**: theory, applications, and numerics. [S.I.]: Academic Press, 2009.

SCHIFF, J. L. **The Laplace Transform**: Theory and Applications. [S.I.]: Springer, 1999.

SCHIFF, J. L. **The Laplace transform**: theory and applications. [S.I.]: Springer Science & Business Media, 2013.

SOLYAR, T. Y. Determination of nonstationary temperature fields and stresses in piecewise homogeneous circular plates on the basis of a numerical-analytic Laplace inversion formula. **Journal of Mathematical Sciences**, [S.I.], v.171, n.5, p.673–681, 2010.

TALBOT, A. The accurate numerical inversion of Laplace transforms. **IMA Journal of Applied Mathematics**, [S.I.], v.23, n.1, p.97–120, 1979.

TONIDANDEL, D. A. V.; ARAÚJO, A. E. A. de. Transformada de Laplace: uma obra de engenharia. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, [S.l.], v.34, n.2, p.2601, 2012.

TORQUATO, S. Random Heterogeneous Materials: Microstructure and Macroscopic Properties. **NewYork:Springer-Verlag**, [S.l.], 2002.

WELLANDER, N. The two-scale Fourier transform approach to homogenization; periodic homogenization in Fourier space. **Asymptotic Analysis**, [S.l.], v.62, n.1-2, p.1–40, 2009.

7 ANEXOS

7.1 Prova do Lema 3.1

Lema 3.1 Sejam $F(y)$ e $a(y) > 0$ funções diferenciáveis e 1-periódicas. Uma condição necessária e suficiente para a existência de uma solução 1-periódica N da equação $LN = F$ é que $\langle F(y) \rangle \equiv \int_0^1 F(y) dy = 0$, onde $\langle \cdot \rangle$ denota a média integral e o operador LN é dado por $LN \equiv (d/dy)(a(y)dN/dy)$. Ainda mais, tal solução 1-periódica é única salvo uma constante aditiva, ou seja, $N(y) = \tilde{N}(y) + C$, onde \tilde{N} é uma solução 1-periódica de $LN = F$ tal que $\tilde{N}(0) = 0$, e C é uma constante arbitrária (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

Prova: Condição necessária, seja $N(y)$ solução 1-periódica da equação

$$LN \equiv \frac{d}{dy} \left(a(y) \frac{dN}{dy} \right) = F(y). \quad (7.1)$$

De aplicar o operador de valor médio em ambos os lados da equação (7.1), ou seja,

$$\left\langle \frac{d}{dy} \left(a(y) \frac{dN}{dy} \right) \right\rangle = \langle F(y) \rangle, \quad (7.2)$$

temos, do lado esquerdo levando em conta a 1-periodicidade de $a(y)$ e $N(y)$, que

$$\left(a(y) \frac{dN}{dy} \right) \Big|_{y=0}^{y=1} = a(1) \frac{dN}{dy} \Big|_{y=1} - a(0) \frac{dN}{dy} \Big|_{y=0} = a(0) \left(\frac{dN}{dy} \Big|_{y=1} - \frac{dN}{dy} \Big|_{y=0} \right) = 0. \quad (7.3)$$

Logo, segue de (7.2) e (7.3) que $\langle F(y) \rangle = 0$.

Condição Suficiente: Seja F tal que $\langle F(y) \rangle = 0$. De integrar (7.1), ou seja,

$$\int_0^y \frac{d}{ds} \left(a(s) \frac{dN}{ds} \right) ds = \int_0^y F(s) ds, \quad (7.4)$$

se obtém:

$$a(y) \frac{dN}{dy} - a(0) \frac{dN}{dy} \Big|_{y=0} = \int_0^y F(s) ds, \quad (7.5)$$

onde,

$$a(0) \left. \frac{dN}{dy} \right|_{y=0} = C_1, \quad (7.6)$$

é uma constante aditiva, logo:

$$a(y) \frac{dN}{dy} = \int_0^y F(s) ds + C_1 \implies \frac{dN}{dy} = \frac{1}{a(y)} \left(\int_0^y F(s) ds + C_1 \right). \quad (7.7)$$

Assim, de integrar a segunda igualdade em (7.7) teremos:

$$N(y) = \int_0^y \left(\int_0^t F(s) ds + C_1 \right) dt + C_2. \quad (7.8)$$

A fim de construir $N(y)$ 1-periódica, impomos que $N(y+1) - N(y) = 0$. Assim, para $N(y+1)$ temos:

$$N(y+1) = \int_0^{y+1} \frac{1}{a(t)} \left(\int_0^t F(s) ds + C_1 \right) dt + C_2. \quad (7.9)$$

Logo, da subtração das expressões (7.9) e (7.8) se obtém:

$$0 = N(y+1) - N(y) = \int_y^{y+1} \frac{1}{a(t)} \left(\int_0^t F(s) ds + C_1 \right) dt, \quad (7.10)$$

observe que $\int_0^t F(s) ds$ é 1-periódica, assim como $1/a(t)$ e C_1 , logo

$$\int_y^{y+1} \frac{1}{a(t)} \left(\int_0^t F(s) ds + C_1 \right) dt = \left\langle \frac{1}{a(t)} \left(\int_0^t F(s) ds \right) \right\rangle + C_1 \left\langle \frac{1}{a(t)} \right\rangle = 0, \quad (7.11)$$

de onde

$$C_1 = - \left\langle \frac{1}{a(t)} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{1}{a(t)} \int_0^t F(s) ds \right\rangle. \quad (7.12)$$

Portanto, das equações (7.8) e (7.12) segue que $N(y) = \tilde{N}(y) + C$, onde $C \equiv C_2$, teremos:

$$\tilde{N}(y) = \int_0^y \frac{1}{a(t)} \left(\int_0^t F(s) ds - \left\langle \frac{1}{a(t)} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{1}{a(t)} \int_0^t F(s) ds \right\rangle \right) dt. \quad (7.13)$$

7.2 Prova do Lema 4.1

Lema 4.1 Seja $s, x, y \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{R}^2$. Seja,

$$\phi(x, y; s, r) = \langle r, v(y-x, s) \rangle, \quad (7.14)$$

na qual ϕ é dado por:

$$\phi(x, y; s, r) = \langle r, v(y, s) \rangle \cosh \sqrt{\frac{s}{k}} x - \langle r, u(y, s) \rangle \sinh \sqrt{\frac{s}{k}} x, \quad (7.15)$$

Prova: Considerando o problema de valor inicial (PVI) dado por:

$$w''(x) - \frac{s}{k} w(x) = 0, \quad (7.16)$$

na qual,

$$\begin{aligned} w(0) &= \langle r, v(y, s) \rangle \cosh \sqrt{\frac{s}{k}}(0) - \langle r, u(y, s) \rangle \sinh \sqrt{\frac{s}{k}}(0), \\ w(0) &= \langle r, v(y, s) \rangle, \end{aligned} \quad (7.17)$$

e

$$\begin{aligned} w'(0) &= \langle r, v(y, s) \rangle \sqrt{\frac{s}{k}} \sinh \sqrt{\frac{s}{k}}(0) - \langle r, u(y, s) \rangle \sqrt{\frac{s}{k}} \cosh \sqrt{\frac{s}{k}}(0), \\ w'(0) &= -\sqrt{\frac{s}{k}} \langle r, u(y, s) \rangle. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Conseguimos reescrever (7.16) como:

$$Z'' - \frac{s}{k} Z = 0, \quad (7.19)$$

através do polinômio característico, teremos a solução geral da EDO homogênea:

$$w = A \cdot \cosh \sqrt{\frac{s}{k}} x + B \cdot \sinh \sqrt{\frac{s}{k}} x, \quad (7.20)$$

podemos ver que $x \rightarrow \cosh \sqrt{\frac{s}{k}} x$ e $x \rightarrow \sinh \sqrt{\frac{s}{k}} x$ são soluções da equação diferencial ordinária (EDO) em (7.16). Na qual a função é definida por:

$$w_1(x) = \phi(x, y; s, r) \text{ e } w_2(x) = \langle r, v(y - x, s) \rangle, \quad (7.21)$$

também são soluções desta EDO, pois são combinações lineares de $\cosh \sqrt{\frac{s}{k}} x$ e $\sinh \sqrt{\frac{s}{k}} x$. Com isso teremos que:

$$w_1(0) = \langle r, v(y, s) \rangle = w_2(0). \quad (7.22)$$

de (7.15), teremos:

$$w_1'(0) = -\sqrt{\frac{s}{k}} \langle r, u(y, s) \rangle = w_2'(0), \quad (7.23)$$

também através das derivadas das funções obtemos:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(y, s) = \sqrt{\frac{s}{k}}v(y, s), \quad \frac{\partial v}{\partial y}(y, s) = \sqrt{\frac{s}{k}}u(y, s). \quad (7.24)$$

Logo (7.15) e (7.24), temos a singularidade da solução do PVI. Assim a única solução desse problema é dada por:

$$\phi(x, y; s, r) = \langle r, v(y - x, s) \rangle. \quad (7.25)$$

para cada $s, x, y \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{R}^2$. \square

7.3 Prova do Lema 4.2

Lema 4.2 Seja $s, x, y \in \mathbb{R}$, teremos:

$$\Delta(s)\sinh\sqrt{\frac{s}{k}}(x - y) = -\phi(x, a; s, p)\phi(y, b; s, q) + \phi(y, a; s, p)\phi(x, b; s, q), \quad (7.26)$$

Prova: Seja $s, y \in \mathbb{R}$, sem perda de generalidade, podemos tomar $s \neq 0$, pois se tomarmos $s = 0$ a conclusão do lema se daria imediatamente. Sendo assim, vamos considerar o PVI, como:

$$w''(x) - \frac{s}{k}w(x) = 0, \quad (7.27)$$

na qual $w(x)$ é dado por:

$$w(x) = \Delta(s)\sinh\sqrt{\frac{s}{k}}(x - y), \quad (7.28)$$

logo,

$$w(0) = -\Delta(s)\sinh\sqrt{\frac{s}{k}}y, \quad (7.29)$$

a derivada de (7.29) é dada por:

$$w'(0) = \sqrt{\frac{s}{k}}\Delta(s)\cosh\sqrt{\frac{s}{k}}y. \quad (7.30)$$

Através do Lema 1, podemos observar que $x \rightarrow \cosh\sqrt{\frac{s}{k}}x$, $x \rightarrow \sinh\sqrt{\frac{s}{k}}x$, $x \rightarrow \phi(x, a; s, p)$, e $x \rightarrow \phi(x, b; s, q)$ são soluções da EDO. As funções são definidas por:

$$w_1(x) = a_1\cosh\sqrt{\frac{s}{k}}x + b_1\sinh\sqrt{\frac{s}{k}}x, \quad (7.31)$$

e

$$w_2(x) = a_2\phi(x, a; s, p) + b_2\phi(x, b; s, q), \quad (7.32)$$

na qual a_1, b_1, a_2 e b_2 são constantes que podem depender de s, y, p e q , também são soluções da mesma EDO. Agora vamos tomar w_1 de modo que satisfaça a condição inicial da equação na qual escolhermos a_1 e b_1 de modo que satisfaça a condição:

$$a_1 = -\Delta(s)\operatorname{senh}\sqrt{\frac{s}{k}}y, \quad (7.33)$$

$$b_1\sqrt{\frac{s}{k}} = \sqrt{\frac{s}{k}}\Delta(s)\operatorname{cosh}\sqrt{\frac{s}{d}}y, \quad (7.34)$$

logo teremos:

$$w_1(x) = a_1\operatorname{cosh}\sqrt{\frac{s}{k}}x + b_1\operatorname{senh}\sqrt{\frac{s}{k}}x, \quad (7.35)$$

$$w_1(x) = -\Delta(s)\operatorname{senh}\sqrt{\frac{s}{k}}y\operatorname{cosh}\sqrt{\frac{s}{k}}x + \Delta(s)\operatorname{cosh}\sqrt{\frac{s}{k}}y\operatorname{senh}\sqrt{\frac{s}{k}}x, \quad (7.36)$$

$$w_1(x) = \Delta(s) \left(\operatorname{cosh}\sqrt{\frac{s}{k}}y.\operatorname{senh}\sqrt{\frac{s}{k}}x - \operatorname{senh}\sqrt{\frac{s}{k}}y\operatorname{cosh}\sqrt{\frac{s}{k}}x \right), \quad (7.37)$$

$$w_1(x) = \Delta(s)\operatorname{senh}\sqrt{\frac{s}{k}}(x - y). \quad (7.38)$$

Por outro lado, para obter w_2 que satisfaça as condições iniciais, devemos tomar a_2 e b_2 , como:

$$\begin{cases} a_2\phi(0, a; s, p) + b_2\phi(0, b; s, q) = -\Delta(s)\operatorname{senh}\sqrt{\frac{s}{k}}y, \\ a_2\frac{\partial\phi}{\partial x}(0, a; s, p) + b_2\frac{\partial\phi}{\partial x}(0, b; s, q) = \sqrt{\frac{s}{k}}\Delta(s)\operatorname{cosh}\sqrt{\frac{s}{k}}y, \end{cases} \quad (7.39)$$

Para qualquer $s, y \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{R}^2$, podemos ver que:

$$\phi(0, y; s, r) = \langle r, v(y, s) \rangle, \quad (7.40)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(0, y; s, r) = -\sqrt{\frac{s}{k}}\langle r, u(y, s) \rangle. \quad (7.41)$$

Substituindo estes valores, obtemos o sistema linear algébrico:

$$\begin{cases} a_2\langle p, v(a, s) \rangle + b_2\langle q, v(b, s) \rangle = -\Delta(s)\operatorname{senh}\sqrt{\frac{s}{k}}y \\ a_2\langle p, u(a, s) \rangle + b_2\langle q, u(b, s) \rangle = -\Delta(s)\operatorname{cosh}\sqrt{\frac{s}{k}}y. \end{cases} \quad (7.42)$$

Isolando o termo a_2 na primeira linha do sistema, temos:

$$a_2 = \frac{-\Delta(s)\operatorname{senh}\sqrt{\frac{s}{k}}y - b_2\langle q, v(b, s) \rangle}{\langle p, v(a, s) \rangle}, \quad (7.43)$$

Substituindo na segunda linha do sistema teremos:

$$\left(\frac{-\Delta(s)\sinh\sqrt{\frac{s}{k}}y - b_2 \langle q, v(b, s) \rangle}{\langle p, v(a, s) \rangle} \right) \langle p, u(a, s) \rangle + b_2 \langle q, u(b, s) \rangle = -\Delta(s)\cosh\sqrt{\frac{s}{k}}y, \quad (7.44)$$

$$-\Delta(s)\sinh\sqrt{\frac{s}{k}}y \langle p, u(a, s) \rangle - b_2 \langle q, v(b, s) \rangle \langle p, u(a, s) \rangle + b_2 \langle q, u(b, s) \rangle \langle p, v(a, s) \rangle = -\Delta(s)\cosh\sqrt{\frac{s}{k}}y \langle p, v(a, s) \rangle, \quad (7.45)$$

com isso teremos:

$$b_2 (\langle q, u(b, s) \rangle \langle p, v(a, s) \rangle - \langle q, v(b, s) \rangle \langle p, u(a, s) \rangle) = -\Delta(s)\sinh\sqrt{\frac{s}{k}}y \langle p, u(a, s) \rangle - \Delta(s)\cosh\sqrt{\frac{s}{k}}y \langle p, v(a, s) \rangle. \quad (7.46)$$

Assim obtemos as soluções como:

$$b_2 = \phi(y, a; s, p). \quad (7.47)$$

e

$$a_2 = -\phi(y, b; s, q), \quad (7.48)$$

e então:

$$w_2(x) = -\phi(x, a; s, p)\phi(y, b; s, q) + \phi(y, a; s, p)\phi(x, b; s, q).$$

Logo, a única solução para o problema de valor inicial é dada por:

$$\Delta(s)\sinh\sqrt{\frac{s}{k}}(x - y) = -\phi(x, a; s, p)\phi(y, b; s, q) + \phi(y, a; s, p)\phi(x, b; s, q), \quad (7.49)$$

para todo $s, x, y \in \mathbb{R}$. \square

7.4 Prova do Lema 4.3

Lema 4.3 Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$, teremos:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\langle p, v(x, s) \rangle \langle q, v(y, s) \rangle}{\sqrt{k \cdot s} \Delta(s)} \right\} = G(x, y, t), \quad (7.50)$$

na qual:

$$G(x, y, t) = G_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{s_j t} \langle p, v(x, s_j) \rangle \langle q, v(y, s_j) \rangle}{\sqrt{k s_j} \Delta'(s_j)}, \quad (7.51)$$

e

$$G_0(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } \frac{\langle p, v(x, s) \rangle \langle q, v(y, s) \rangle}{\sqrt{k s} \Delta(s)} = \mathcal{O}(1) \\ \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\langle p, v(x, s) \rangle \langle q, v(y, s) \rangle}{\Delta(s)} & \text{se } \frac{\langle p, v(x, s) \rangle \langle q, v(y, s) \rangle}{\sqrt{k s} \Delta(s)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{s}\right) \end{cases} \quad (7.52)$$

$$\Delta(s_j) = 0, \quad \text{e } \Delta'(s_j) \neq 0 (j = 1, 2, \dots), \quad (7.53)$$

Prova: Através de (7.53) juntamente com (7.51), teremos:

$$\frac{e^{st} \langle p, v(x, s) \rangle \langle q, v(y, s) \rangle}{\sqrt{k s} \Delta(s)}, \quad (7.54)$$

é um polo simples. Logo aplicando o teorema de resíduos em (7.54), teremos:

$$\begin{aligned} \text{Res} \left(\frac{e^{st} \langle p, v(x, s) \rangle \langle q, v(y, s) \rangle}{\sqrt{k s} \Delta(s)}; s_j \right) &= \\ \lim_{s \rightarrow s_j} \frac{s - s_j}{\Delta(s)} \cdot \lim_{s \rightarrow s_j} \frac{e^{st} \langle p, v(x, s) \rangle \langle q, v(y, s) \rangle}{\sqrt{k s} \Delta(s)} &= \\ = \frac{e^{s_j t} \langle p, v(x, s_j) \rangle \langle q, v(y, s_j) \rangle}{\sqrt{k s_j} \Delta'(s_j)}. & \end{aligned} \quad (7.55)$$

Assim, vamos supor de (7.52) que $s \rightarrow 0$, isto implica que:

$$\frac{\langle p, v(x, s) \rangle \langle q, v(y, s) \rangle}{\sqrt{k s} \Delta(s)} = \mathcal{O}(1) \quad \text{ou} \quad \frac{\langle p, v(x, s) \rangle \langle q, v(y, s) \rangle}{\sqrt{k s} \Delta(s)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{s}\right)$$

Assim para $s = 0$ temos uma singularidade removível, na qual obtemos a seguinte definição através do teorema de resíduos:

$$G_0(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } \frac{\langle p, v(x, s) \rangle \langle q, v(y, s) \rangle}{\sqrt{k s} \Delta(s)} = \mathcal{O}(1) \\ \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\langle p, v(x, s) \rangle \langle q, v(y, s) \rangle}{\Delta(s)} & \text{se } \frac{\langle p, v(x, s) \rangle \langle q, v(y, s) \rangle}{\sqrt{k s} \Delta(s)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{s}\right) \end{cases}$$

7.5 Prova do Lema 4.4

Lema 4.4 Para todo $y \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}_+$, e $r \in \mathbb{R}^2$, teremos:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\langle r, v(y, s) \rangle}{s \Delta(s)} \right\} = F(y, t; r), \quad (7.56)$$

na qual,

$$F(y, t; r) = F_0(y; r) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{s_j t} \langle r, v(y, s_j) \rangle}{s_j \Delta'(s_j)}, \quad (7.57)$$

e

$$F_0(y; r) = \begin{cases} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\langle r, v(y, s) \rangle}{\Delta(s)} & \text{se } \frac{\langle r, v(y, s) \rangle}{s \Delta(s)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{s}\right) \\ \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{s \langle r, v(y, s) \rangle}{\Delta(s)} \right] & \text{se } \frac{\langle r, v(y, s) \rangle}{s \Delta(s)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{s^2}\right) \end{cases} \quad (7.58)$$

E através de (7.53) temos um polo simples na qual:

$$\frac{e^{s_j t} \langle r, v(y, s) \rangle}{s \Delta'(s)}. \quad (7.59)$$

Prova: Aplicando o teorema de resíduos em (7.59), teremos:

$$\begin{aligned} \text{Res} \left(\frac{e^{s_j t} \langle r, v(y, s) \rangle}{s \Delta'(s)}; s_j \right) &= \lim_{s \rightarrow s_j} (s - s_j) \cdot \frac{e^{s t} \langle r, v(y, s) \rangle}{s \Delta(s)} \\ &= \lim_{s \rightarrow s_j} \frac{s - s_j}{\Delta(s)} \cdot \frac{e^{s t} \langle r, v(y, s) \rangle}{s} \\ &= \frac{e^{s_j t} \langle r, v(y, s_j) \rangle}{s_j \Delta'(s_j)}. \end{aligned} \quad (7.60)$$

consideramos a possibilidade de $s \rightarrow 0$, teremos que:

$$\frac{\langle r, v(y, s) \rangle}{s \Delta(s)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{s}\right) \text{ ou } \frac{\langle r, v(y, s) \rangle}{s \Delta(s)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{s^2}\right).$$

Logo para $s = 0$ temos um polo simples através do teorema de resíduos,

$$F_0(y; r) = \text{Res} \left(\frac{e^{s \cdot t} \langle r, v(y, s) \rangle}{s \Delta(s)}; 0 \right) = \begin{cases} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\langle r, v(y, s) \rangle}{\Delta(s)} & \text{se } \frac{\langle r, v(y, s) \rangle}{s \Delta(s)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{s}\right), \\ \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{s \langle r, v(y, s) \rangle}{\Delta(s)} \right] & \text{se } \frac{\langle r, v(y, s) \rangle}{s \Delta(s)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{s^2}\right). \end{cases}$$

□