

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS**  
Instituto de Física e Matemática  
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática



Dissertação

**Otimização topológica baseada em confiabilidade simultânea à distribuição de atuadores piezoelétricos**

**Jonathan Brum Lauz**

Pelotas, 2018

**Jonathan Brum Lauz**

**Otimização topológica baseada em confiabilidade simultânea à distribuição de atuadores piezoelétricos**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Molter

Pelotas, 2018

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas  
Catalogação na Publicação

L366o Lauz, Jonathan Brum

Otimização topológica simultânea à distribuição de atuadores piezoelétricos baseada em confiabilidade / Jonathan Brum Lauz ; Alexandre Molter, orientador. — Pelotas, 2018.

104 f. : il.

Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2018.

1. Otimização topológica. 2. Materiais piezoelétricos. 3. Confiabilidade. 4. Projeto simultâneo. I. Molter, Alexandre, orient. II. Título.

CDD : 519.3

Jonathan Brum Lauz

Otimização topológica baseada em confiabilidade simultânea à distribuição de atuadores piezoelétricos

Dissertação aprovada, como requisito parcial, para obtenção do grau de Mestre em Modelagem Matemática, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas.

Data da Defesa: 19 de abril de 2018

Banca examinadora:



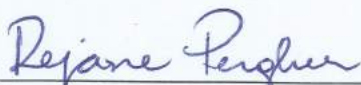
Prof. Dr. Alexandre Molter (Orientador)

Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil



Prof. Dr. Leslie Darien Pérez Fernández

Doutor em Matemática pelo Instituto de Cibernética, Matemática e Física, Cuba



Profa. Dra. Rejane Pergher

Doutora em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil



Prof. Dr. Sebastião Cícero Pinheiro Gomes

Doutor em Robótica e Automação pela École Supérieure d'Aéronautique et de l'Espace, França

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, por tudo o que tem feito por mim até o presente momento.

A minha mãe Norma, pelo incentivo e suporte nessa jornada e no decorrer de toda minha vida.

Aos meus irmãos e irmã, cunhadas e cunhado, que mesmo longe sei que tercem por mim.

A minha namorada Caroline, pelo companheirismo, carinho, incentivo, dedicação e pela paciência.

Ao meu orientador Prof. Dr. Alexandre Molter, pela dedicação e disponibilidade na realização deste trabalho, pelo incentivo e pelo conhecimento.

A coordenação e aos professores do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática (PPGMMat) pela atenção e ensinamentos.

A banca, pelos comentários e correções feitas neste trabalho.

Aos colegas do PPGMMat pelo companheirismo e amizade, por dividir os momentos bons e o conhecimento específico que cada um tem, tanto acadêmico quanto da vida.

Por fim, agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro.

## RESUMO

BRUM LAUZ, Jonathan. **Otimização topológica baseada em confiabilidade simultânea à distribuição de atuadores piezoelétricos**. 2018. 107 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2018.

O objetivo deste trabalho é integrar a análise de confiabilidade em um problema de otimização de topologia com localização de atuadores piezoelétricos. O novo modelo, no qual se introduz restrições de confiabilidade em uma formulação de otimização de topologia determinística, é chamado de Otimização Topológica Baseada em Confiabilidade. Várias aplicações mostram a importância dessa integração. Neste problema, o controle é estático e a otimização topológica é feita pela minimização da flexibilidade. A análise de sensibilidades para a obtenção das equações de equilíbrio e das derivadas da função objetivo com relação às variáveis de projeto é desenvolvida para cada etapa. Para obter os resultados numéricos, os modelos estruturais foram discretizados utilizando o Método de Elementos Finitos, e um algoritmo apropriado foi implementado em um *software*. É apresentada uma metodologia para o Critério Ótimo (OC), onde esta metodologia é considerada inovadora. O OC proposto mostrou-se vantajoso em termos de convergência, o que reduziu significativamente o tempo computacional das simulações. As simulações numéricas mostram que a metodologia utilizada neste trabalho pode produzir uma topologia estrutural bem definida, indicando o melhor posicionamento para atuadores sujeito a índices de confiabilidade.

**Palavras-chave:** Otimização topológica, materiais piezoelétricos, confiabilidade, projeto simultâneo.

## ABSTRACT

BRUM LAUZ, Jonathan. **Topology optimization problem with the location of piezoelectric actuators reliability-based**. 2018. 107 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2018.

The objective of this work is to integrate reliability analysis into topology optimization problem with the location of piezoelectric actuators. The new model, in which we introduce reliability constraints into a deterministic topology optimization formulation, is called Reliability-Based Topology Optimization. Several applications show the importance of this integration. In this problem, is used a static control and the topology optimization is done by minimizing the flexibility. The sensitivity analysis to obtain equilibrium equations and the derivatives of the objective function with respect to the project variables is developed at each stage. To obtain the numerical results, the structural models were discretized using the Finite Element Method, and an appropriate algorithm was implemented in a *software*. A methodology was introduced for the Optimality Criteria (OC), which is considered an innovative method. The proposed OC showed advantageous in terms of convergence, which means a significantly decrease of the computational simulations time. The numerical simulations show that the methodology used in this work can produce a well-defined structural topology, indicating the best positioning for actuators subjected to reliability indexes.

**Keywords:** Topology optimization, piezoelectric materials, reliability, simultaneous project.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Tipos de otimização estrutural. (a) Otimização paramétrica de uma estrutura de treliças, (b) otimização de forma e (c) otimização topológica. O domínio inicial é mostrado do lado esquerdo e a solução ótima é mostrada do lado direito. Fonte: Adaptado de BENDSØE; SIGMUND (2003), p. 2. . . . .	28
Figura 2	Representação de um domínio desconhecido $\Omega$ e uma topologia ótima $\Omega_d$ . Fonte: Silveira (2012), p. 27. . . . .	30
Figura 3	Elemento isoparamétrico bilinear. . . . .	39
Figura 4	Instabilidade do tabuleiro de xadrez. . . . .	45
Figura 5	Topologia ótima com dependência do refinamento da malha para uma viga bi-apoiada. Soluções para as discretizações com a) 2700, b) 4800 e c) 17200 elementos. Fonte: Adaptado de BENDSØE; SIGMUND (2003), p. 30. . . . .	46
Figura 6	Regiões segura e de falha no espaço físico, onde $m_{y1}$ e $m_{y2}$ são variáveis médias. . . . .	50
Figura 7	Função de densidade de probabilidade da variável aleatória normal padrão. . . . .	51
Figura 8	Regiões segura e de falha no espaço normalizado. . . . .	52
Figura 9	Fluxograma do processo de determinação das variáveis aleatórias utilizadas na otimização topológica. . . . .	58
Figura 10	(a) Viga em balanço sujeita à carga pontual $f_p$ no canto inferior direito. (b) Topologia ótima determinística correspondente ao esquema (a) onde se utilizou 60x24 elementos finitos com 50% do volume e força $f_p = -1j$ . . . . .	60
Figura 11	Resultados topológicos para diferentes índices de confiabilidade: (a) $\beta = 1$ , (b) $\beta = 2$ , (c) $\beta = 3$ , (d) $\beta = 4$ , (e) $\beta = 5$ e (f) $\beta = 6$ para o caso 1. . . . .	61
Figura 12	(a) Viga em balanço sujeita à carga pontual $f_p$ aplicada no meio da sua extremidade livre. (b) Topologia ótima determinística correspondente ao esquema (a) onde se utilizou 60x24 elementos finitos com 50% do volume e força $f_p = -1j$ . . . . .	61
Figura 13	Resultados topológicos para diferentes índices de confiabilidade: (a) $\beta = 1$ , (b) $\beta = 2$ , (c) $\beta = 3$ , (d) $\beta = 4$ , (e) $\beta = 5$ e (f) $\beta = 6$ para o caso 2. . . . .	62
Figura 14	Esquema ilustrativo para o processo de polarização de cerâmicas. Fonte: Adaptado de MOHEIMANI; FLEMING (2006), p. 12. . . . .	65



Figura 15	Reação de uma cerâmica piezoelétrica a diferentes estímulos. Fonte: Adaptado de MOHEIMANI; FLEMING (2006), p. 13. . . . .	65
Figura 16	Estrutura tridimensional onde se representa a direção de polarização em um material piezoelétrico. . . . .	72
Figura 17	(a) Esquema para viga em balanço sujeita à carga pontual. (b) Distribuição do material estrutural de densidade $\rho_u$ para $\eta_u = 0,5$ . Distribuição do material de densidade $\rho_\phi$ (em vermelho) sobre a estrutura otimizada considerando (c) $\eta_\phi = 0,02$ , (d) $\eta_\phi = 0,05$ e (e) $\eta_\phi = 0,1$ . . . . .	88
Figura 18	Convergência da função objetivo para o Caso 1 onde $\eta_\phi = 0,1$ . . . .	89
Figura 19	(a) Esquema para viga em balanço sujeita à carga pontual. (b) Distribuição do material estrutural de densidade $\rho_u$ para $\eta_u = 0,5$ . Distribuição do material de densidade $\rho_\phi$ (em vermelho) sobre a estrutura otimizada considerando (c) $\eta_\phi = 0,02$ , (d) $\eta_\phi = 0,05$ e (e) $\eta_\phi = 0,1$ . . . . .	90
Figura 20	Convergência da função objetivo para o Caso 2 onde $\eta_\phi = 0,1$ . . . .	90
Figura 21	(a) Viga em balanço sujeita à carga pontual $f_p$ no canto inferior direito. (b) Topologia ótima determinística correspondente ao esquema (a), onde se utilizou 60x24 elementos finitos com 50% do volume, 10% de densidade de material piezoelétrico e força pontual $f_p = -1 \times 10^{11} \mathbf{j}$ . . . . .	94
Figura 22	Resultados topológicos para diferentes índices de confiabilidade, que são: (a) $\beta = 1$ , (b) $\beta = 2$ , (c) $\beta = 3$ , (d) $\beta = 4$ , (e) $\beta = 5$ e (f) $\beta = 6$ para o caso 1. . . . .	95
Figura 23	(a) Viga em balanço sujeita à carga pontual $f_p$ aplicada no meio da sua extremidade livre. (b) Topologia ótima determinística correspondente ao esquema (a) onde se utilizou 60x24 elementos finitos, com 50% do volume, 10% de densidade de material piezoelétrico e força pontual $f_p = -1 \times 10^{11} \mathbf{j}$ . . . . .	95
Figura 24	Resultados topológicos para diferentes índices de confiabilidade: (a) $\beta = 1$ , (b) $\beta = 2$ , (c) $\beta = 3$ , (d) $\beta = 4$ , (e) $\beta = 5$ e (f) $\beta = 6$ para o caso 2. . . . .	96
Figura 25	(a) Viga em balanço sujeita à carga pontual $f_p$ aplicada no meio da sua extremidade livre. Em vermelho se encontra a região onde será permitida a distribuição de atuadores piezoelétricos. (b) Topologia ótima determinística correspondente ao esquema (a) onde se utilizou 60x24 elementos finitos com 50% do volume, 10% de densidade de material piezoelétrico e força pontual $f_p = -1 \times 10^{11} \mathbf{j}$ . . . . .	96
Figura 26	Resultados topológicos para diferentes índices de confiabilidade: (a) $\beta = 1$ , (b) $\beta = 2$ , (c) $\beta = 3$ , (d) $\beta = 4$ , (e) $\beta = 5$ e (f) $\beta = 6$ para o caso 3. . . . .	97
Figura 27	(a) Viga em balanço, com um furo centrado no meio (posição (30,12) e raio 8 elementos), sujeita à carga pontual $f_p$ no canto inferior direito. (b) Topologia ótima determinística correspondente ao esquema (a), onde se utilizou 60x24 elementos finitos com 50% do volume, 10% de densidade de material piezoelétrico e força pontual $f_p = -1 \times 10^{11} \mathbf{j}$ . . . . .	97

Figura 28	Resultados topológicos para diferentes índices de confiabilidade, que são: (a) $\beta = 1$ , (b) $\beta = 2$ , (c) $\beta = 3$ , (d) $\beta = 4$ , (e) $\beta = 5$ e (f) $\beta = 6$ para o caso 4. . . . .	98
-----------	---	----

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Relações aproximadas entre a probabilidade de falha e o índice de confiabilidade $\beta$ . . . . .	53
Tabela 2	Sensibilidades do desempenho estrutural com respeito às configurações propostas. . . . .	60
Tabela 3	Equivalência entre as notações tensorial e reduzida. . . . .	68
Tabela 4	Propriedades materiais do alumínio. . . . .	84
Tabela 5	Propriedades materiais do PZT5A. . . . .	85
Tabela 6	Sensibilidades do desempenho estrutural com respeito às configurações propostas. . . . .	94

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MEF	Método dos Elementos Finitos
OC	Critério Ótimo (sigla em inglês)
OT	Otimização Topológica
RBDO	Otimização de Projeto Baseada em Confiabilidade (sigla em inglês)
RBTO	Otimização Topológica Baseada em Confiabilidade (sigla em inglês)
PZT	Titanato-Zirconato de Chumbo
SIMP	Material Sólido Isotrópico com Penalização (sigla em inglês)
est	problema de otimização cuja solução é dada pela obtenção de um ponto estacionário da função (ou do funcional) de custo

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Caracteres latinos

$a, b$	grandezas físicas vetoriais
$a_c, a_c(u, v)$	forma bilinear de energia definida pelo funcional dado pelo trabalho virtual das forças internas de um corpo elástico
$a(u, \phi, u_v, \phi_v, \rho_u, \rho_\phi)$	funcional dado pela soma do trabalho virtual das forças internas de um corpo elástico relacionado ao problema de otimização topológica simultânea à localização de atuadores piezoelétricos
$A, B$	grandezas físicas tensoriais
$B_u$	derivadas das funções de interpolação com relação ao deslocamento mecânico
$B_\phi$	derivadas das funções de interpolação com relação ao potencial elétrico
$\mathcal{B}_u$	conjunto das variáveis de projeto $\rho_u(x)$ admissíveis
$\mathcal{B}_\phi$	conjunto das variáveis de projeto $\rho_\phi(x)$ admissíveis
$c$	tensor de rigidez elástica
$c_e$	rigidez elástica de um elemento finito
$c_{ijkl}^E$	componentes do tensor de rigidez elástica medidas sob campo elétrico constante
$c^E$	tensor de quarta ordem de propriedades elásticas com as suas componentes medidas sob campo elétrico constante
$c_u^E$	matriz das propriedades elásticas de um material puramente estrutural
$c_\phi^E$	matriz das propriedades elásticas do material piezoelétrico
$c^0$	tensor de rigidez elástica do material base isotrópico
$c(x)$	tensor de rigidez elástica de um material avaliado em um ponto do domínio fixo estendido
$c(\rho_1), c^E(\rho_u, \rho_\phi)$	modelos SIMP para a rigidez elástica
$C_{ad}$	conjunto dos tensores de rigidez elástica admissíveis

$\text{dist}(k, i)$	distância entre o centro do elemento $k$ e o centro de um elemento $i$
$d_t$	distância entre o estado limite ( $H(\alpha)$ ) e a origem no espaço normalizado
$D$	vetor de deslocamento elétrico
$D_i$	componentes do vetor de deslocamento elétrico
$\mathcal{D}_u$	operador diferencial para funções de interpolação relativas ao deslocamento mecânico
$\mathcal{D}_\phi$	operador diferencial para funções de interpolação relativas aos potencial elétrico
$e$	tensor de terceira ordem de propriedades piezoelétricas
$e_{ikl}$	componentes do tensor de propriedades piezoelétricas
$e_{kij}$	componentes do tensor de propriedades piezoelétricas proveniente da transposição dos índices mecânicos com o índice elétrico no tensor $e_{ikl}$
$e^T$	tensor de terceira ordem proveniente da transposição do tensor $e$
$e_\phi$	matriz das propriedades piezoelétricas
$e(\rho_u, \rho_\phi)$	modelo SIMP para as propriedades piezoelétricas
$E$	vetor de campo elétrico
$E_k$	componentes do vetor de campo elétrico
$\mathbf{E}^e$	campo elétrico de um elemento finito
$f$	vetor das forças de corpo
$f_\phi$	vetor das cargas elétricas de superfície
$f_p$	vetor de forças concentradas
$f_{p_j}$	componentes do vetor de forças concentradas
$f_p(u)$	operador linear representativo do trabalho das forças concentradas $f_{p_j}$
$f_y$	função densidade de probabilidades
$\mathbf{f}^e$	vetor de forças de corpo de um elemento finito
$\mathbf{f}_p^e$	vetor de forças concentradas de um elemento finito
$\mathbf{f}_\phi^e$	vetor de cargas elétricas de superfície de um elemento finito
$\mathbf{F}_u$	vetor global de forças
$\mathbf{F}_u^e$	vetor de forças de um elemento finito
$G$	função estado limite no espaço físico
$H$	função estado limite no espaço normalizado

$\mathcal{H}$	entalpia elétrica
$\widehat{H}_i$	fator de peso para o filtro de sensibilidades
$i, j, k, l, p, q$	índices diversos
$J(u, \rho)$	função objetivo discretizada do problema de otimização topológica
$J(u, \phi, \rho_u, \rho_\phi)$	função objetivo discretizada do problema de otimização topológica simultânea à localização de atuadores piezoelétricos
$\mathbf{k}_{uu}^e$	matriz de rigidez do material elástico estrutural do problema de otimização topológica simultânea à localização de atuadores piezoelétricos de um elemento finito
$\mathbf{k}_{u\phi}^e$	matriz de rigidez do material piezoelétrico do problema de otimização topológica simultânea à localização de atuadores piezoelétricos de um elemento finito
$K$	índice para o passo de iteração do esquema de atualização do tipo ponto fixo para a densidade $\rho$
$\mathbf{K}_{uu}$	matriz global de rigidez
$\mathbf{K}_{uu}^e$	matriz de rigidez de um elemento finito
$\mathbf{K}_{u\phi} = \mathbf{K}_{\phi u}$	matriz global de acoplamento piezoelétrico
$\mathbf{K}_{u\phi}^e = \mathbf{K}_{\phi u}^e$	matriz de acoplamento piezoelétrico de um elemento finito
$\mathbf{K}_{\phi\phi}$	matriz global de capacitância elétrica
$\mathbf{K}_{\phi\phi}^e$	matriz de capacitância elétrica de um elemento finito
$l(u), l(v)$	forma linear de carga e função objetivo dos problemas de minimização da flexibilidade e de otimização topológica simultânea à localização de atuadores proporcionais
$l(u, \phi), l(u_v, \phi_v)$	forma linear de carga e função objetivo do problema de otimização topológica simultânea à localização de atuadores piezoelétricos
$\mathcal{L}$	Lagrangiano dos problemas de otimização topológica
$\mathcal{L}_H$	Lagrangiano relativo ao Princípio de Hamilton
$m$	limite móvel no esquema de atualização de ponto fixo para a densidade $\rho$
$L^2(\Omega)$	espaço das funções reais cujo domínio é $\Omega$ e cujo quadrado é finito-integrável
$L^2(\Gamma_t)$	espaço das funções reais cujo domínio é $\Gamma_t$ e cujo quadrado é finito-integrável
$L^2(\Gamma_\phi)$	espaço das funções reais cujo domínio é $\Gamma_\phi$ e cujo quadrado é finito-integrável
$N$	número total de elementos finitos em uma malha

$N_1, N_2, N_3, N_4$	funções de interpolação de Lagrange e funções de forma
$\mathbf{N}_u$	matriz das funções de interpolação para os deslocamentos mecânicos
$\mathbf{N}_\phi$	matriz das funções de interpolação para os potenciais elétricos
$m_{y_j}$	valor médio associado a $j$ -ésima variável randômica $y_j$
$P_f$	probabilidade de falha
$P_r$	operador probabilidade
$p, p_1, p_2, p_3$	expoentes de penalização
$\tilde{p}$	número inteiro positivo utilizado para tratar o mal condicionamento de problemas eletromecânicos
$\mathcal{P}$	energia potencial de um sistema mecânico
$q_p$	vetor de cargas elétricas concentradas
$q_{p_i}$	componentes do vetor de cargas elétricas concentradas
$q_p(\phi)$	operador linear representativo do trabalho das cargas elétricas concentradas $q_{p_i}$
$\mathbf{q}_p^e$	vetor de cargas elétricas concentradas de um elemento finito
$\mathbf{Q}_\phi$	vetor global de cargas elétricas
$\mathbf{Q}_\phi^e$	vetor de cargas elétricas de um elemento finito
$r_{min}$	raio de filtragem para o filtro de sensibilidades
$S$	tensor de deformações mecânicas
$S_{kl}$	componentes do tensor de deformações mecânicas
$\mathbf{S}^e$	campo de deformações mecânicas de um elemento finito
$t$	vetor das forças de superfície
$t$	tempo
$t_0, t_f$	instantes de tempo distintos
$T_p$	operador transformação probabilística
$T$	tensor de tensões mecânicas
$T_{ij}$	componentes do tensor de tensões mecânicas
$u$	vetor de deslocamentos mecânicos
$u_l$	componentes do vetor de deslocamentos mecânicos
$\mathbf{u}^e$	vetor de deslocamentos mecânicos de um elemento finito
$\mathbf{u}_i^e$	vetor de deslocamentos mecânicos nodais de um elemento finito
$\mathbf{U}$	vetor global de deslocamentos mecânicos também chamado de vetor global de deflexão
$\mathcal{U}$	espaço dos campos de deslocamento cineticamente admissíveis



$v, u_v$	vetor de deslocamentos mecânicos virtuais
$V$	volume do domínio fixo estendido
$V^e$	volume da região do domínio fixo estendido correspondente a um elemento finito
$\mathcal{W}$	trabalho virtual das forças mecânicas externas e cargas elétricas aplicadas
$X$	grandeza física qualquer
$x_l$	eixo $l$ do sistema de coordenadas retangulares
$\mathbf{y}$	vetor de variáveis aleatórias que representam as incertezas estruturais identificadas por distribuições probabilísticas
$Y^0$	propriedade do material base
$Y(x)$	função propriedade material constitutiva

### Caracteres gregos

$\alpha$	variáveis normalizadas que relacionam as variáveis aleatórias com seus valores médios e desvio-padrão
$\beta$	índice de confiabilidade
$\beta_t$	índice de confiabilidade alvo
$\Gamma$	fronteira ou contorno do domínio fixo estendido
$\Gamma_q$	fronteira do domínio fixo estendido onde são aplicadas as cargas elétricas
$\Gamma_t$	fronteira do domínio fixo estendido onde são aplicadas as forças de superfície
$\Gamma_u$	fronteira do domínio fixo estendido onde são definidos os deslocamentos
$\Gamma_\phi$	fronteira do domínio fixo estendido onde são especificados os potenciais elétricos
$\delta$	operador de variação
$\epsilon^S$	tensor de segunda ordem de propriedades dielétricas medidas sob deformação constante
$\epsilon_{ik}^S$	componentes do tensor de propriedades dielétricas medidas sob deformação constante
$\epsilon_\phi^S$	matriz das propriedades dielétricas
$\epsilon^S(\rho_u, \rho_\phi)$	modelo SIMP para as propriedades dielétricas
$\zeta$	coeficiente de amortecimento
$\eta$	fração do volume $V$ a ser considerada no processo de otimização topológica

$\eta_u$	fração do volume $V$ a ser considerada para a parte puramente estrutural do problema de otimização topológica simultânea à localização de atuadores piezoelétricos
$\eta_\phi$	fração do volume $V$ a ser considerada para o material relativo aos atuadores do problema de otimização topológica simultânea à localização de atuadores piezoelétricos
$\lambda, \lambda_0, \lambda_1$	escalares que atuam como multiplicadores de Lagrange relacionados a restrição de volume
$\lambda_{1e}, \lambda_{u1e}, \lambda_{\phi1e}$	escalares que atuam como multiplicadores de Lagrange relacionados a restrição inferior
$\lambda_{2e}, \lambda_{u2e}, \lambda_{\phi2e}$	escalares que atuam como multiplicadores de Lagrange relacionados a restrição superior
$\Lambda^T, \Lambda_1^T, \Lambda_2^T$	vetores que atuam como multiplicadores de Lagrange
$\nu^0$	coeficiente de Poisson do material base isotrópico
$\rho$	pseudodensidade e variável de projeto
$\rho_e^{new}$	atualização da variável $\rho_e$
$\rho_{e_{min}}$	pseudodensidade mínima de um material isotrópico
$\rho(x)$	função pseudodensidade qualquer
$\rho_e, \rho_e(x)$	variável de projeto e função pseudodensidade
$\rho_{e_{min}}$	pseudodensidade mínima relativa à variável de projeto estrutural $\rho_e$
$\rho_u, \rho_u(x)$	variável de projeto e função pseudodensidade relacionada à parte puramente estrutural do problema de otimização topológica simultânea à localização de atuadores piezoelétricos
$\rho_{u_{min}}$	pseudodensidade mínima relativa à variável de projeto estrutural $\rho_u$
$\rho_{ue}$	pseudodensidade relativa à variável de projeto estrutural $\rho_u$ de um elemento finito
$\rho_{ue_{min}}$	pseudodensidade mínima relativa à variável de projeto estrutural $\rho_u$ de um elemento finito
$\rho_\phi, \rho_\phi(x)$	variável de projeto de controle e função pseudodensidade para o material relativo aos atuadores piezoelétricos
$\rho_{\phi_{min}}$	pseudodensidade mínima relativa à variável de projeto de controle $\rho_\phi$
$\rho_{\phi_e}$	pseudodensidade relativa à variável de projeto de controle $\rho_\phi$ de um elemento finito
$\rho_{\phi_{e_{min}}}$	pseudodensidade mínima relativa à variável de projeto de controle $\rho_\phi$ de um elemento finito
$\bar{\rho}$	densidade de um material

$\sigma_{y_j}$	desvio padrão associado ao valor médio $m_{y_j}$
$\Upsilon$	conjunto dos deslocamentos, potenciais elétricos e valores das variáveis de projeto admissíveis do problema de otimização topológica simultânea à localização de atuadores piezoelétricos
$\phi$	potencial elétrico
$\phi_v$	potencial elétrico virtual
$\phi^e$	potencial elétrico de um elemento finito
$\Phi$	vetor global de potenciais elétricos
$\phi_i^e$	vetor de potenciais elétricos nodais de um elemento finito
$\Phi$	espaço dos potenciais elétricos cineticamente admissíveis
$\Phi_d(\cdot)$	função de distribuição
$\phi_d(\cdot)$	função densidade de probabilidade
$\chi(x)$	função característica indicadora da fase sólida e da fase sem material
$\Omega$	domínio fixo estendido de projeto também chamado de domínio viável
$\Omega_d$	região onde há presença de material em um domínio fixo estendido
$\Omega^e$	região do domínio fixo estendido correspondente a um elemento finito

### **Outros caracteres**

$\Delta$	operador variação
$\nabla$	operador gradiente
$\partial$	operador de derivação parcial

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>21</b>
1.1	Descrição motivacional	21
1.2	Apresentação de importantes contribuições	23
1.3	Objetivos e organização do trabalho	25
<b>2</b>	<b>MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA</b>	<b>28</b>
2.1	Introdução	28
2.2	Conceitos básicos	29
2.2.1	Domínio fixo estendido	30
2.2.2	Modelo material	30
2.3	Método das densidades	31
2.4	Problema de minimização da flexibilidade	32
2.5	Discretização do problema de otimização via MEF	38
2.6	Condições de otimalidade	42
2.7	Problemas numéricos	44
2.7.1	Tabuleiro de xadrez	45
2.7.2	Dependência da malha	45
2.7.3	Mínimos locais	46
2.7.4	Filtro de sensibilidades	47
<b>3</b>	<b>OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA BASEADA EM CONFIABILIDADE</b>	<b>48</b>
3.1	Importância dos critérios de segurança	49
3.2	Probabilidade de falha	49
3.2.1	A distribuição normal	50
3.2.2	Índice de confiabilidade	52
3.3	Considerações sobre otimização topológica e variáveis aleatórias	53
3.4	O problema de otimização topológica baseada em confiabilidade	54
3.4.1	Análise de sensibilidades	56
3.4.2	Evolução do índice de confiabilidade	57
3.4.3	Processo de otimização com confiabilidade	57
3.5	Aplicações	58
3.5.1	Caso 1	60
3.5.2	Caso 2	60
3.5.3	Análise dos resultados e discussões	61

<b>4</b>	<b>OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA SIMULTÂNEA À DISTRIBUIÇÃO DE ATUADORES PIEZOELÉTRICOS</b>	<b>63</b>
4.1	Introdução	63
4.2	Materiais piezoelétricos	64
4.3	Equações constitutivas	66
4.4	Descrição dos tensores de material	67
4.5	Modelagem matemática do problema de otimização	69
4.6	Formulação variacional para problemas envolvendo materiais piezoelétricos	72
4.7	Discretização do problema de otimização via MEF	75
4.8	Simulações e resultados	83
4.8.1	Caso 1	87
4.8.2	Caso 2	89
<b>5</b>	<b>OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA COM DISTRIBUIÇÃO DE ATUADORES PIEZOELÉTRICOS CONSIDERANDO ÍNDICES DE CONFIABILIDADE</b>	<b>92</b>
5.1	Aplicações	93
5.1.1	Caso 1	94
5.1.2	Caso 2	95
5.1.3	Caso 3	96
5.1.4	Caso 4	97
5.2	Análise dos resultados e discussões	98
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS</b>	<b>100</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>102</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Descrição motivacional

No passado, os projetos nas indústrias eram, em geral, desenvolvidos com cálculos estruturais rudimentares, baseando-se fundamentalmente em experiências anteriores. Após a etapa de projetos eram então realizados os testes e validações experimentais. Porém, o crescente e incessante avanço tecnológico não só gerou um crescimento econômico acelerado e competitividade visível entre as empresas, como também a busca por melhores processos de produção e otimização dos produtos. Assim, se elevou o padrão tecnológico ao mesmo tempo em que se diminuiu o custo, possibilitando que o produto final tenha menor custo de produção e também avaliando a segurança utilizando a análise de confiabilidade.

Segundo HAFTKA; GÜRDAL; KAMAT (1992), a importância em projeto de estruturas de peso mínimo foi reconhecida pela indústria aeroespacial, onde projetos de estrutura de aeronave são geralmente controlados mais por peso do que por considerações de custo. Em outras indústrias que lidam com sistemas de engenharia civil, mecânica ou automotiva, o custo pode ser a principal consideração, embora o peso do sistema afete seu custo e desempenho. A crescente escassez de matérias-primas e o rápido esgotamento de nossas fontes convencionais de energia estão sendo traduzidas em uma demanda por estruturas leves, eficientes e de baixo custo.

O uso eficiente dos materiais é importante em diversos contextos. Citam-se os exemplos apontados por BENDSØE; SIGMUND (2003), onde afirmam que as indústrias aeroespaciais e grandes empresas automotivas aplicam dimensionamento e otimização da forma ao projeto de estruturas e elementos mecânicos e que a otimização da forma é também utilizada no projeto de dispositivos eletromagnéticos, eletroquímicos e acústicos. Em consequência de sua aplicação, tem-se observado, nas últimas décadas, uma grande quantidade de trabalhos na área de otimização estrutural. Isto foi estimulado principalmente pelo sucesso do método de distribuição de material para a geração de topologias ótimas de elementos estruturais, esse método leva o nome de otimização topológica.

A otimização topológica é um processo iterativo que, na sua formulação clássica, permite projetar a topologia ótima de estruturas segundo um determinado critério de custo de caráter mecânico, por exemplo, rigidez máxima ou volume mínimo. Basicamente, o método de otimização topológica distribui o material no interior de um domínio fixo de forma a maximizar ou minimizar uma função de custo especificada. Isto é feito, segundo BENDSØE; SIGMUND (2003), considerando que cada ponto do domínio pode variar de vazio (não há presença de material), até sólido (total presença de material) podendo assumir densidades intermediárias entre vazio e sólido, de acordo com um modelo definido.

Neste projeto são inseridos atuadores piezoelétricos, com o objetivo de encontrar um posicionamento ideal para os mesmos, em função das deformações estruturais. Estes materiais são amplamente utilizados em controle, especialmente em projetos que envolvem a dinâmica das estruturas. Em particular, mecanismos piezoelétricos são geralmente usados como atuadores para o controle de vibrações em estruturas flexíveis. Em termos da localização ideal para a colocação desses mecanismos, busca-se os locais nas estruturas com maior deformação, após aplicado um carregamento. Este problema da localização destes atuadores pode ser analisado de forma estática, uma vez que as deformações são calculadas após a aplicação de carregamentos estruturais. Um projeto de engenharia levando em conta o projeto estrutural simultaneamente com a determinação da localização ideal dos atuadores pode ser realizado através da otimização topológica.

Vários projetos da área de engenharia atingiram o aperfeiçoamento no decorrer dos anos devido à evolução e à experiência adquirida na solução de certos problemas. Na concepção de um novo projeto, objetiva-se obter o ótimo, onde geralmente se busca o menor peso e custo de fabricação, e isto só se torna possível utilizando ferramentas computacionais, métodos numéricos como o de elementos finitos e métodos de otimização. Outro objetivo que se busca com a otimização de uma estrutura é o menor consumo de matéria prima, consequência também da pressão para a conservação dos recursos naturais. O controle, por sua vez, é outro fator a ser considerado em muitos projetos que possuem como característica um certo movimento vibratório em sua dinâmica de funcionamento. Assim, além da necessidade de otimização do material, busca-se também o controle das vibrações desta estrutura. DÍAZ; KIKUCHI (1992); KANG; WANG; WANG (2009) apontam que um exemplo típico é o de elevar a menor frequência da vibração de uma estrutura, obedecendo a uma restrição de volume. MOLTER et al. (2013) apresentam uma metodologia de projeto de topologia para estruturas com controle ativo da vibração. Outros trabalhos, como os de DONOSO; SIGMUND (2009), SILVEIRA; FONSECA; SANTOS (2014), MOLTER; FONSECA; FERNANDEZ (2016) e FERNANDEZ; MOLTER; BOTELHO (2017), buscam um posicionando otimizado para atuadores na estrutura, que possam ser utilizados

como controladores em projetos de controle de vibrações.

Já a análise de confiabilidade estrutural foi posterior ao processo de otimização, onde, por diversas vezes falhas em estruturas geram análises posteriores e nos novos projetos são corrigidos estes problemas de falhas. Dentre os trabalhos que integram confiabilidade em estruturas pode-se citar os de KHARMANDA et al. (2004), AM; LIND (1974), PANTOJA (2012) e JALALPOUR; GUEST; IGUSA (2013), onde estes trabalhos buscam associar a probabilidade de falha de projetos a um índice de confiabilidade. Por fim, tem-se a otimização topológica de estruturas simultânea à localização de atuadores, considerando índices de confiabilidade estrutural. Projetos de estruturas otimizadas e controladas são de grande importância na indústria, para a fabricação de materiais mais leves tendo menor custo. A confiabilidade estrutural funciona como uma ferramenta que permite ao engenheiro quantificar as incertezas nas variáveis do seu projeto, auxiliando na tomada de decisões. Considerando a inserção de confiabilidade no processo de otimização topológica, o problema de otimização, o número de variáveis para análise aumenta. Este novo método é denominado Otimização Topológica com Confiabilidade (RBTO<sup>1</sup>) (KHARMANDA et al., 2004), e é baseado na solução simultânea da otimização e confiabilidade estrutural.

## 1.2 Apresentação de importantes contribuições

Uma importante contribuição no avanço da otimização estrutural veio com o trabalho de MICHELL (1904), sobre a otimização de treliças, com base em MAXWELL (1870), onde foi introduzido para barras. Pela complexidade dos mesmos, estes trabalhos não foram seguidos, após um longo período de tempo, quando surgem os computadores. A partir dos anos 60 foram desenvolvidas as ferramentas matemáticas básicas para a otimização com computadores: simulação estrutural pelo método dos elementos finitos (MEF), análise de sensibilidade numérica e algoritmos eficientes de programação matemática. As aplicações foram à engenharia aeronáutica, mas rapidamente se disseminou para a mecânica, civil, nuclear, química, naval, entre outras (GUILHERME, 2006). Na década de 80 aparecem os primeiros *softwares* comerciais de otimização estrutural e alguns *softwares* de elementos finitos passam a incluir módulos de otimização. Assim, se inicia o desenvolvimento na área acadêmica do método de otimização topológica.

Segundo BENDSØE e SIGMUND (2003), o objetivo da otimização topológica é encontrar a forma ideal de uma estrutura dentro de uma região especificada. As únicas quantidades conhecidas no problema são as cargas aplicadas, as possíveis condições de suporte, o volume da estrutura a ser construída e possivelmente algumas restrições adicionais de projeto, como a localização e o tamanho dos furos prescritos ou áreas

---

<sup>1</sup> Em inglês, *Reability-Based Topology Optimization*.



sólidas. Nesse problema, o tamanho físico, a forma e a conectividade da estrutura são desconhecidos (BENDSØE; SIGMUND, 2003).

Sendo a otimização topológica o objeto de estudo, ela surgiu como ferramenta que substitui tentativas a um projeto otimizado sujeito a restrições, que visa a redução de custos e deformação em relação ao próprio projeto. A questão central que surge com a aplicação deste método de otimização é distribuir o material na estrutura satisfazendo os critérios de projeto mecânico. O MEF é um dos métodos possíveis para a discretização dos problemas de otimização topológica, sendo adotado nesta dissertação para a implementação computacional e resolução dos problemas apresentados. Por isso, o MEF é abordado nesta seção e frequentemente citado em outros capítulos.

Neste trabalho também são discutidos estudos e problemáticas, voltados ao uso de materiais piezoelétricos como atuadores e sensores, e ainda a localização ótima dos atuadores e sensores nas estruturas topologicamente otimizadas (FERNANDEZ, 2015). Atuadores piezoelétricos podem representar uma melhor escolha em relação a outros atuadores, para estruturas menores, pois geram uma força de acionamento maior e apresentam tempos de resposta rápidos, o que é ideal para deslocamentos pequenos (SUN et al., 2004; MOLTER et al., 2010). Mesmo que a escolha do atuador esteja bem definida e justificada, a melhor localização para estes atuadores na estrutura não é óbvia e tem uma influência significativa no desempenho do sistema (OU; KIKUCHI, 1996; KUMAR; NARAYANAN, 2008; DONOSO; SIGMUND, 2009; SILVEIRA; FONSECA; SANTOS, 2014).

Um dos objetivos deste trabalho está na proposta da metodologia baseada no critério ótimo ( $OC^2$ ) para resolver o problema simultâneo de otimização da topologia estrutural e posicionamento ideal para atuadores piezoelétricos. Serão desenvolvidos detalhadamente as expressões matemáticas utilizadas na implementação numérica e o algoritmo de otimização baseado no OC para variáveis de projeto não-piezoelétricas e piezoelétricas baseado no código *Matlab* fornecido em (SIGMUND, 2001).

Projetos integrados de otimização de forma ou topológica com posicionamento de atuadores piezoelétricos são discutidos em diversos trabalhos (DONOSO; SIGMUND, 2009; SILVEIRA, 2012; FERNANDEZ; MOLTER; BOTELHO, 2017). Por outro lado, a integração da otimização topológica com a confiabilidade estrutural é apresentada em vários trabalhos (SILVA et al., 2010; PANTOJA, 2012; YI; ZHU; GONG, 2016) que utilizam diferentes metodologias na busca por estruturas mais confiáveis, com menor peso e que preservem suas características mecânicas.

A confiabilidade estrutural é uma ferramenta adicional que permite quantificar as incertezas nas variáveis do projeto, ou seja, auxilia o projetista (engenheiro) estrutural, na tomada de decisões com mais segurança (SAGRILO, 1994). Uma revisão geral sobre incertezas em projetos estruturais, envolvendo otimização, confiabilidade

---

<sup>2</sup>Em inglês, *Optimality Criteria*.

e robustez (no sentido de resolver uma ampla variedade de problemas em diferentes condições) é feita no trabalho de LELIÈVRE et al. (2016).

Segundo KHARMANDA et al. (2004), um método baseado em confiabilidade é a Otimização de Projeto Baseada em Confiabilidade (RBDO<sup>3</sup>), o qual permite que estruturas sejam projetadas com maior segurança. Para o modelo RBDO, o acoplamento entre modelagem geométrica, simulação mecânica, análises de confiabilidade e métodos de otimização leva a tempos de computação muito longos e a fraca estabilidade de convergência. Tradicionalmente, a solução do modelo RBDO é conseguida através da alternância de iterações de confiabilidade e otimização (abordagem sequencial). Esta abordagem leva a baixa eficiência numérica, o que é desvantajoso para aplicações de engenharia em estruturas reais (KHARMANDA et al., 2004).

No campo do RBDO, existem vários trabalhos que estudaram essa abordagem no problema de otimização (STEVENSON, 1967; CHENG; LI; CAI, 1998; AGARWAL, 2004; YI; ZHU; GONG, 2016). Ao aplicar esta abordagem à otimização topológica, o problema torna-se grande porque o tempo computacional aumentará significativamente e a análise de confiabilidade em cada iteração do procedimento de otimização topológica representará uma tarefa muito complexa. Assim, define-se uma estratégia diferente, o que implica num acoplamento entre a análise de confiabilidade e o problema de topologia ótima, sem aumentar o tempo computacional, que é o RBTO (KHARMANDA et al., 2004). Uma vantagem no modelo RBTO em termos de tempo computacional, é que, comparado ao método RBDO, é de baixo custo, uma vez que está inserido no processo de otimização determinística. Este método consiste em determinar as variáveis aleatórias, em processo separado da otimização determinística, mediante índices de confiabilidade. Uma vez obtidos os valores das variáveis aleatórias, elas serão tomadas como entradas para o processo de otimização determinística.

### 1.3 Objetivos e organização do trabalho

O objetivo geral deste trabalho é implementar, junto ao problema de otimização topológica simultânea à localização de atuadores piezoelétricos, a análise de confiabilidade.

Como objetivos específicos tem-se:

- aplicar uma metodologia que leve em conta a otimização estrutural baseada em índices de confiabilidade;
- apresentar simulações computacionais de estruturas otimizadas para diferentes índices de confiabilidade estrutural;

---

<sup>3</sup>Em inglês, *Reability-Based Design Optimization*.

- considerar o meio contínuo do domínio, discretizar o domínio por elementos finitos e utilizar a metodologia do Critério Ótimo;
- propor uma metodologia OC diferenciada, baseada em abordagens conhecidas.
- integrar a confiabilidade estrutural na otimização topológica que considere o posicionamento de atuadores piezoelétricos, com diferentes formas de engaste, carregamento e índices de confiabilidade;
- apresentar simulações computacionais de estruturas otimizadas, com distribuição de atuadores piezoelétricos.
- integrar otimização topológica, distribuição de atuadores piezoelétricos e confiabilidade estrutural num único projeto, apresentando simulações que mostrem resultados da metodologia empregada.

Este trabalho está organizado de forma a integrar a confiabilidade na otimização topológica com a distribuição de atuadores piezoelétricos. Para modelar e solucionar esse problema foi estudado o MEF, método de otimização topológica, piezoelectricidade e o equacionamento das relações constitutivas e propriedades dos materiais piezoelétricos, métodos de otimização, confiabilidade estrutural e algumas linguagens de programação para implementação computacional. O trabalho está organizado nos capítulos que seguem abaixo.

O segundo capítulo baseia-se na descrição do método de otimização topológica. Este capítulo aborda os seguintes assuntos: o modelo material, o método das densidades, o problema de mínima flexibilidade, que servirá como base na formulação dos problemas para os capítulos quatro e cinco, a condição de otimalidade e problemas numéricos.

O terceiro capítulo mostra uma metodologia para se aplicar a confiabilidade na otimização topológica, onde se apresentam os índices de confiabilidade integrados ao problema. Neste capítulo são apresentados alguns exemplos de otimização topológica considerando índices de confiabilidade.

O quarto capítulo traz a otimização topológica simultânea à distribuição de atuadores piezoelétricos, onde formula-se o problema no meio contínuo e faz-se a discretização via MEF. Utiliza-se o problema discreto para a minimização da flexibilidade. Neste capítulo será apresentado em detalhes o OC utilizado neste trabalho, o que é uma das partes inovadoras desta pesquisa. Ainda são apresentadas simulações computacionais da metodologia de otimização topológica simultânea à distribuição de atuadores piezoelétricos.

No quinto capítulo são apresentados os resultados das simulações da metodologia proposta para a otimização topológica simultânea à distribuição de atuadores piezo-

elétricos, considerando índices de confiabilidade, o que é a outra parte inovadora do trabalho.

## 2 MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Neste capítulo, são apresentados alguns conceitos básicos sobre o método de otimização topológica, onde se apresenta de forma resumida a formulação do problema de otimização topológica e aspectos da implementação computacional da metodologia apresentada.

### 2.1 Introdução

A otimização estrutural busca uma melhor distribuição de material dentro de um conjunto de soluções que satisfaçam as restrições impostas. A solução para problemas de otimização estrutural pode ser obtida de três diferentes maneiras: a otimização paramétrica, a otimização de forma e a otimização topológica, conforme mostrado na Figura 1.

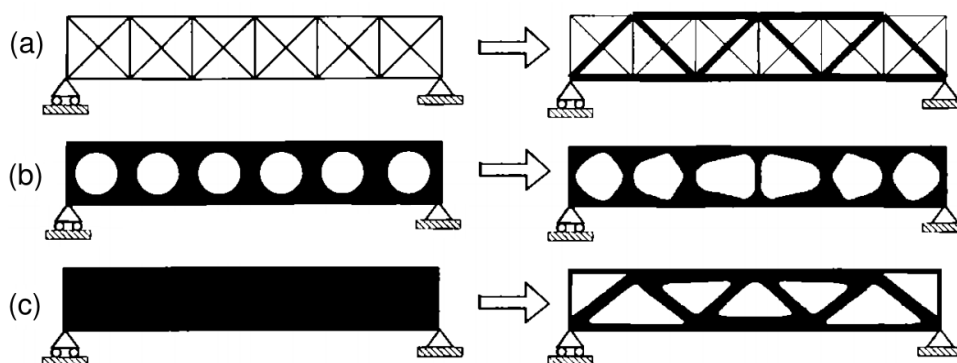


Figura 1: Tipos de otimização estrutural. (a) Otimização paramétrica de uma estrutura de treliças, (b) otimização de forma e (c) otimização topológica. O domínio inicial é mostrado do lado esquerdo e a solução ótima é mostrada do lado direito. Fonte: Adaptado de BENDSØE; SIGMUND (2003), p. 2.

A otimização denominada paramétrica não altera a forma da estrutura, apenas as suas dimensões, é assumida uma forma pré-definida para a estrutura e são escolhidas, como variáveis de projeto, algumas medidas que caracterizam a geometria dessa estrutura. Na otimização de forma, os contornos externos da estrutura podem

ser parametrizados por curvas splines e os parâmetros dessas curvas constituem as variáveis de projeto. Por fim, a otimização topológica consiste em se encontrar a distribuição ótima de material no interior da estrutura que minimize a flexibilidade, considerando a restrição de material. As variáveis de projeto são variáveis que indicam a distribuição de material em cada ponto no domínio. Essa abordagem é a mais genérica em relação às anteriores, pois a quantidade de material removido é crescente na ordem apresentada das abordagens, sendo a otimização topológica a que resulta na maior remoção de material da estrutura (BENDSØE; SIGMUND, 2003).

Especificamente sobre a otimização topológica, este método visa solucionar o problema de distribuição de uma dada quantidade de material em um domínio de projeto fixo, sujeito a carregamentos e suportes de tal forma que certa função objetivo atinja seu extremo. Um exemplo típico é o problema de minimização da flexibilidade (equivalente ao problema de máxima rigidez) com restrição de volume (BENDSØE; SIGMUND, 2003). As variáveis de projeto estão relacionadas à distribuição de material no domínio. É importante notar que o domínio de projeto é discretizado a fim de que o problema de otimização topológica possa ser resolvido por meios computacionais. Uma abordagem típica para tal discretização utiliza o MEF, visto que a forma pela qual se aproxima a distribuição do material no domínio pode fazer com que a formulação dependa da discretização é boa, pois são utilizadas formas regulares (KENO-TUNG; OLHOFF, 1982). Com a discretização, cada ponto do domínio pode assumir um valor de densidade dentro de um intervalo que a restringe, possibilitando a ausência de material (vazio, representado pela cor branca) até a total presença de material (sólido, representado pela cor preta), assumindo densidades intermediárias (representadas por uma escala de cinza) (BENDSØE; KIKUCHI, 1988; BENDSØE; SIGMUND, 2003). Nesta configuração, as regiões da estrutura menos exigidas em termos de esforços mecânicos indicam necessidade de menos material originando, assim, os buracos (regiões de densidades próximas de zero) e/ou contornos menos densos no interior da estrutura.

No método de otimização topológica, o resultado final da distribuição de material é chamado de topologia ótima. A topologia ótima pode ser compreendida como o domínio constituído de material sólido, caracterizada pela presença de buracos, com contornos bem definidos.

## **2.2 Conceitos básicos**

Nesta seção são apresentados dois conceitos fundamentais nos quais se baseia o método de otimização topológica: o domínio fixo estendido e o modelo material.

### 2.2.1 Domínio fixo estendido

O domínio fixo estendido gera uma região de trabalho estendido ( $\Omega$ ) em torno da região onde se espera que a topologia ótima ( $\Omega_d$ ) se encontre, possibilitando que o processo de otimização adicione ou retire material dentro desta região pré-determinada. Trata-se, em outras palavras, do domínio no qual o algoritmo de otimização topológica deve encontrar a estrutura ótima. Este domínio está limitado pelos pontos de apoio da estrutura e pelos pontos de aplicação de carregamento, como mostra a Figura 2.

O processo de otimização topológica consiste, então, em determinar os espaços sem material (vazios) e a conectividade da estrutura através da remoção de material no domínio fixo estendido. A obtenção da forma ótima é influenciada pelas condições de contorno, dadas pelos engastes, apoios e carregamentos, e pela quantidade de material utilizado. Diferente da otimização de forma, na otimização topológica a malha de elementos finitos do domínio não se altera durante o processo, sendo alterada somente a distribuição de material nos elementos.

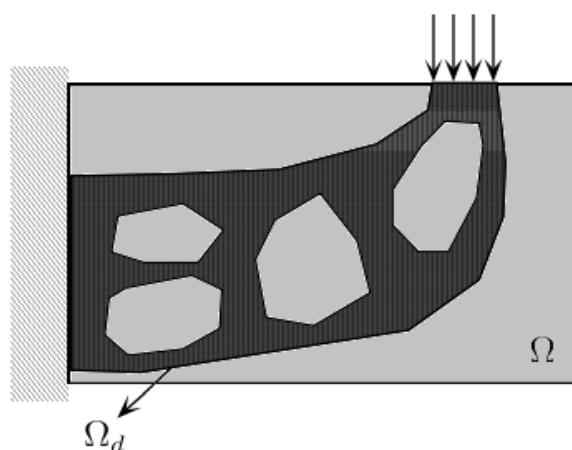


Figura 2: Representação de um domínio desconhecido  $\Omega$  e uma topologia ótima  $\Omega_d$ .  
Fonte: Silveira (2012), p. 27.

### 2.2.2 Modelo material

No método de otimização topológica geralmente dois tipos de regiões (com ou sem presença de material) são utilizados para determinar a topologia ótima da estrutura. A distribuição de material pode ser definida como um problema de otimização de parâmetros discretos ou um problema do tipo booleano, sendo 0 a ausência de material e 1 a total presença de material. Sendo assim, uma função característica  $\chi(x)$ , que

indica a fase sólida, é definida em cada ponto  $x$  do domínio  $\Omega$  da seguinte maneira:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \Omega_d, \\ 0, & \text{se } x \in \Omega \setminus \Omega_d, \end{cases} \quad (1)$$

sendo  $\Omega_d$  a região onde há presença de material, inserida no domínio  $\Omega$ .

Para materiais isotrópicos e considerando um dos materiais como vazio, certa propriedade material constitutiva (como, por exemplo, o módulo de elasticidade (BENDSØE; KIKUCHI, 1988; BENDSØE; SIGMUND, 2003)) pode ser escrita na forma:

$$Y(x) = \chi(x)Y^0, \quad (2)$$

onde  $Y^0$  é a propriedade do material base a ser distribuído.

O modelo material dado genericamente por (2) é, então, uma equação que define a mistura em microescala de dois materiais, sendo um deles vazio, permitindo que a topologia ótima tenha densidade 0 ou 1 em todos os pontos.

Em muitas aplicações, a topologia ótima de uma estrutura pode ser construída unicamente de uma variação macroscópica de um material e vazio, o que significa que a densidade da estrutura é dada por uma parametrização inteira do tipo 0 ou 1, resultando em uma topologia em preto e branco. Infelizmente, esta classe de problemas de otimização de projetos é mal-posta (BENDSØE; SIGMUND, 1999), de modo que sequências minimizantes do problema podem convergir para fora do espaço de soluções admissíveis, ou nem mesmo convergir. Segundo BENDSØE; SIGMUND (1999), a abordagem mais comumente utilizada para contornar estas situações é a de substituir as variáveis inteiras por variáveis contínuas e em seguida introduzir alguma forma de penalização que leve a solução para valores próximos de 0 e 1. Uma parte-chave dos métodos caracterizados por este tipo de abordagem é a introdução de uma função de interpolação que expressa quantidades físicas variáveis (a rigidez do material ou o custo, por exemplo) como uma função de variáveis contínuas. Dentre alguns métodos, o método de homogeneização e o método das densidades têm destaque na literatura que trata dos problemas de otimização topológica. Neste trabalho, aplica-se o segundo método, descrito a seguir.

## 2.3 Método das densidades

O modelo material SIMP<sup>1</sup> consiste em uma expressão matemática, que estabelece o valor da propriedade do material em cada ponto do domínio através de uma função pseudodensidade  $\rho(x)$  (que é considerada a variável de projeto) e a propriedade básica do material a ser distribuído. Este modelo material é utilizado em larga escala

<sup>1</sup>Em inglês, *Simple Isotropic Material with Penalization*.



na literatura, devido a sua facilidade de implementação e por não aumentar o número de variáveis do problema. Este modelo material pode ser expresso da seguinte forma (BENDSØE; SIGMUND, 1999, 2003):

$$c(x) = \rho(x)^p c^0, \quad (3)$$

de modo que  $p \geq 1$ ,  $0 < \rho(x) \leq 1$  e  $x \in \Omega$ ,  $p$  é um expoente de penalização,  $c^0$  é o tensor de rigidez elástica do material base isotrópico. No SIMP, o tensor de rigidez elástica do material  $c(x)$  em cada ponto do domínio varia com a pseudodensidade  $\rho$ , enquanto que o coeficiente de Poisson  $\nu^0$  não depende de  $\rho$ .

No SIMP, escolheremos usar  $p > 1$  para que as densidades intermediárias sejam desfavoráveis no sentido de que a rigidez obtida seja pequena em comparação com o custo (volume) do material. Em outras palavras, especificar  $p > 1$  torna “não econômico” ter densidades intermediárias no projeto ideal. Assim, a penalização é alcançada sem o uso de nenhum esquema explícito de penalização. Para problemas em que a restrição de volume está ativa, a experiência mostra que a otimização realmente resulta em tais projetos, para  $p$  suficientemente grande (para obter projetos verdadeiros “0-1”, normalmente é necessário  $p > 3$ ) (BENDSØE; SIGMUND, 2003).

BENDSØE; SIGMUND (1999) mostram que o expoente de penalização  $p$  deve satisfazer as condições:

$$p \geq \max \left\{ \frac{2}{1 - \nu^0}, \frac{4}{1 + \nu^0} \right\} \quad \text{em 2D}, \quad (4)$$

$$p \geq \max \left\{ 15 \frac{1 - \nu^0}{7 - 5\nu^0}, \frac{3}{2} \frac{1 - \nu^0}{1 - 2\nu^0} \right\} \quad \text{em 3D}, \quad (5)$$

no caso em que o tensor corresponda a um material compósito construído a partir de vazio e o material dado. Além disso, as estimativas apresentadas em (4) e (5) são válidas apenas para materiais isotrópicos.

## 2.4 Problema de minimização da flexibilidade

Nesta seção é descrito o problema de distribuição de material. Trata-se do *problema de minimização da flexibilidade*<sup>2</sup> cuja formulação se dá em termos de uma função objetivo e sob restrições de projeto simples, geralmente relacionadas com o equilíbrio mecânico e o volume do corpo elástico.

O problema de minimização da flexibilidade está descrito abaixo. Ele pode ser conceitualmente um ponto de partida natural para problemas de otimização estrutural de maior complexidade e também por refletir muitas das questões fundamentais neste

<sup>2</sup>Em inglês, *minimum compliance problem*, expressão largamente utilizada e já consolidada. Equivalente ao problema de máxima rigidez.

campo de pesquisa.

Considere o clássico problema de minimização da flexibilidade em elasticidade linear. Seja  $\Omega$  um domínio aberto e conexo com uma fronteira lipschitziana<sup>3</sup>  $\Gamma$ . A fronteira  $\Gamma$  é dividida em duas partes,  $\Gamma_t$  e  $\Gamma_u$ , referentes às fronteiras onde serão aplicadas as cargas e especificados os deslocamentos, respectivamente. O problema pode então ser formulado pela minimização do funcional  $l(u)$  sobre o conjunto  $\Psi$  da forma como apresentado abaixo:

$$\begin{aligned} & \min_{(u,\rho) \in \Psi} l(u), \\ \text{s. a: } & a(u, v, \rho) - l(v) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}, \end{aligned} \quad (6)$$

onde  $\Psi$  é o conjunto dos deslocamentos e valores das variáveis de projeto admissíveis, dado por  $\Psi = \mathcal{U} \times \mathcal{B}$ , de modo que

$$\mathcal{B} = \left\{ \rho(x) \text{ mensurável} : 0 < \rho_{\min} \leq \rho(x) \leq 1 \text{ em } \Omega \text{ e } \int_{\Omega} \rho d\Omega = \eta V \right\},$$

onde  $\mathcal{U}$  é o espaço dos campos de deslocamento cineticamente admissíveis,  $V$  é o volume total do domínio  $\Omega$  e  $\eta$  é a fração do volume que, ao ser considerada no problema, impõem restrições quanto ao uso do material de densidade  $\rho$ .

A função custo do problema é minimizada em relação à variável de projeto estrutural  $\rho$ , onde o funcional

$$l(u) = \int_{\Omega} f \cdot u d\Omega + \int_{\Gamma_t} t \cdot u d\Gamma \quad (7)$$

é o trabalho das forças externas com  $u$  sendo o vetor de deslocamentos mecânicos,  $t$  representa o vetor das forças de superfície e  $f$  o vetor das forças de corpo. Note também que  $\rho_{\min}$  diz respeito à densidade mínima relativa à variável de projeto estrutural. Além disso,

$$a(u, v, \rho) = \int_{\Omega} S(u) : c(\rho) : S(v) d\Omega, \quad (8)$$

é dado pelo trabalho virtual interno de um corpo elástico em equilíbrio (representado pelo primeiro funcional), onde  $S(u)$  é o tensor de deformação definido (utilizando a notação de Einstein) como

$$S_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}), \quad (9)$$

onde  $u_l$  é a componente  $l$  do vetor  $u$  de deslocamentos mecânicos,  $u_{k,l} = \partial u_k / \partial x_l$  e  $x_l$  é o eixo  $l$  do sistema de coordenadas retangulares empregado. Os símbolos  $\cdot$  e  $:$  denotam as contrações por um e dois índices, respectivamente; por exemplo,  $a \cdot b = a_i b_i$  e  $A : B = A_{ij} B_{ij}$ .

<sup>3</sup>Dizemos que um aberto  $\Omega$  tem fronteira lipschitziana se a mesma for de classe  $C^1$ .

O termo  $c(\rho)$  é tal que

$$c(\rho) = \rho(x)^p c^0, \quad (10)$$

onde  $c^0$  é o tensor de rigidez elástica do material base. A equação (10) define o modelo material do problema (6).

No SIMP, conforme já comentado na seção 2.3, o tensor de elasticidade  $c$  do material em cada ponto do domínio varia com a pseudodensidade  $\rho$ , enquanto que o coeficiente de Poisson  $\nu^0$ , relativo ao material, não depende de  $\rho$ .

A restrição de igualdade do problema (6) provém do Princípio dos Trabalhos Virtuais (BENDSØE; SIGMUND, 2003). As correspondentes equações, na forma forte, são dadas por

$$\nabla \cdot \sigma(u, \rho) + f = 0, \quad \text{em } \Omega; \quad (11)$$

$$\sigma(u, \rho) \cdot n = t, \quad \text{em } \Gamma_t; \quad (12)$$

$$u = (0, 0, 0), \quad \text{em } \Gamma_u; \quad (13)$$

onde  $\sigma(u, \rho) = c(\rho) : S(u)$ ,  $n$  é um vetor normal em  $\Gamma_t$  e  $t$  é uma força aplicada na fronteira  $\Gamma_t$ .

Assim sendo, o problema contínuo de distribuição ótima de material está bem definido. A resolução deste problema implica, claramente, em obter a topologia ótima condzente com as restrições de suporte e de carregamento, especificadas pelas equações (12) e (13), e restrições de material especificada pelo conjunto  $\mathcal{B}$ . Para este fim, considerar-se-á:

- o Lagrangeano  $\mathcal{L}$  do problema (6);
- as derivadas da função objetivo e das restrições com respeito à variável de projeto, etapa que será feita através do Lagrangeano;
- a discretização da função objetivo e das restrições;
- a implementação computacional baseada na discretização feita na etapa anterior.

### **Análise de sensibilidades**

A análise de sensibilidades consiste em calcular as derivadas da função objetivo e das restrições com respeito às variáveis de projeto e resolver o problema estacionário. Tais derivadas são fundamentais na implementação computacional do problema, pois fazem parte do código do otimizador que atualiza as variáveis de projeto a cada iteração. Para o problema em questão é possível calcular as sensibilidades analiticamente. Para este fim, considerar-se-á o Lagrangeano  $\mathcal{L}$  do problema (6) de onde serão obtidas as expressões das derivadas em relação à variável de projeto  $\rho$ , bem

como as equações de equilíbrio do problema por meio das variações em  $u$  e  $v$ , sendo estas variáveis de estado.

O Lagrangeano  $\mathcal{L}$  para o problema tratado nesta seção é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u, v, \rho, \Lambda, \lambda) = & l(u) - a(u, v, \rho) + l(v) \\ & + \Lambda \left( \int_{\Omega} \rho d\Omega - \eta V \right) + \int_{\Omega} \lambda_1 (\rho - 1) d\Omega + \int_{\Omega} \lambda_2 (\rho_{min} - \rho) d\Omega, \end{aligned} \quad (14)$$

onde  $v$  atua como um multiplicador de Lagrange para as restrições de equilíbrio, as quais são expressas por (11), (12) e (13), correspondendo à restrição de igualdade do problema (6) na sua forma fraca. Além disso,  $\rho \in \mathcal{B}$  representa a variável de projeto, ambas funções escalares de  $x$ ,  $\Lambda$  e  $\lambda$  representam multiplicadores de Lagrange de modo que  $\Lambda \in \mathbb{R}$  e  $\lambda$  representa as funções escalares  $\lambda_1, \lambda_2 \in L^2(\Omega)$ . Em (14), denotar-se-á:

$$w(\rho) = \Lambda \left( \int_{\Omega} \rho d\Omega - \eta V \right) + \int_{\Omega} \lambda_1 (\rho - 1) d\Omega + \int_{\Omega} \lambda_2 (\rho_{min} - \rho) d\Omega. \quad (15)$$

A fim de obter as equações de Euler-Lagrange do problema de otimização, considera-se nos cálculos abaixo uma variável real auxiliar, denotada por  $\xi$ , e  $\alpha_{\Psi} = \{\alpha_i, i \in \{1, 2, 3\}\}$  o conjunto de direções admissíveis em  $\Psi$ .

#### Variação em $u$ :

A variação do Lagrangeano  $\mathcal{L}$  com respeito à variável  $u$  na direção de  $\alpha_1$  é denotada por  $\delta_u \mathcal{L}(u, v, \rho, \Lambda, \lambda; \alpha_1)$ . Considera-se, então, a igualdade

$$\delta_u \mathcal{L}(u, v, \rho, \Lambda, \lambda; \alpha_1) = 0, \quad (16)$$

de onde segue que

$$\delta_u l(u; \alpha_1) - \delta_u a(u, v, \rho; \alpha_1) = 0. \quad (17)$$

Note que

$$\begin{aligned} \delta_u l(u; \alpha_1) &= \int_{\Omega} f \cdot \delta u d\Omega + \int_{\Gamma_t} t \cdot \delta u d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} f \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (u + \xi \alpha_1) \right]_{\xi=0} d\Omega + \int_{\Gamma_t} t \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (u + \xi \alpha_1) \right]_{\xi=0} d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} f \cdot \alpha_1 d\Omega + \int_{\Gamma_t} t \cdot \alpha_1 d\Gamma, \end{aligned} \quad (18)$$

e também que

$$\begin{aligned}
\delta_u a(u, v, \rho; \alpha_1) &= \int_{\Omega} S(\delta u) : c(\rho) : S(v) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} S \left( \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (u + \xi \alpha_1) \right]_{\xi=0} \right) : c(\rho) : S(v) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} S(\alpha_1) : c(\rho) : S(v) d\Omega.
\end{aligned} \tag{19}$$

Considerando o Teorema da Divergência,

$$\int_{\Omega} [z \nabla \cdot y + \nabla z \cdot y] d\Omega = \int_{\Gamma} zy \cdot n d\Gamma, \tag{20}$$

onde  $z$  é um campo escalar,  $y$  é um campo vetorial e  $n$  é um vetor normal à superfície  $\Gamma$ . Utilizando a versão desta identidade para tensores de segunda ordem na primeira integral da última igualdade de (19), obtém-se que

$$\int_{\Omega} S(\alpha_1) : c(\rho) : S(v) d\Omega = \int_{\Gamma_t} \alpha_1 \cdot [c(\rho) : S(v)] \cdot n d\Gamma - \int_{\Omega} \alpha_1 \cdot \nabla \cdot [c(\rho) : S(v)] d\Omega. \tag{21}$$

Escrevendo  $\sigma(v, \rho) = c(\rho) : S(v)$  em (21) e considerando os resultados de (18), (19) e (21) na equação (17), obtém-se

$$\int_{\Omega} \alpha_1 \cdot [\nabla \cdot \sigma(v, \rho) + f] d\Omega + \int_{\Gamma_t} \alpha_1 \cdot [\sigma(v, \rho) \cdot n - t] d\Gamma = 0, \tag{22}$$

para todo  $\alpha_1$  admissível. Assim, do Lema Fundamental do Cálculo de Variações, tem-se que

$$\nabla \cdot \sigma(v, \rho) + f = 0, \quad \text{em } \Omega; \tag{23}$$

$$\sigma(v, \rho) \cdot n = t, \quad \text{em } \Gamma_t; \tag{24}$$

$$v = 0, \quad \text{em } \Gamma_u. \tag{25}$$

Variação em  $v$ :

A variação do Lagrangeano  $\mathcal{L}$  com respeito à variável  $v$  na direção de  $\alpha_2$  é denotada por  $\delta_v \mathcal{L}(u, v, \rho, \Lambda, \lambda; \alpha_2)$ . Considera-se, então, a igualdade

$$\delta_v \mathcal{L}(u, v, \rho, \Lambda, \lambda; \alpha_2) = 0, \tag{26}$$

de onde segue que

$$\delta_v l(v; \alpha_2) - \delta_v a(u, v, \rho; \alpha_2) = 0. \tag{27}$$

Os cálculos para esta variação são análogos aos cálculos da variação em  $u$  e por

isso são omitidos neste texto. As equações de Euler-Lagrange obtidas são:

$$\nabla \cdot \sigma(u, \rho) + f = 0, \quad \text{em } \Omega; \quad (28)$$

$$\sigma(u, \rho) \cdot n = t, \quad \text{em } \Gamma_t; \quad (29)$$

$$u = 0, \quad \text{em } \Gamma_u. \quad (30)$$

A partir das equações (23)-(25) e (28)-(30), conclui-se que

$$u = v, \quad \text{em } \Omega. \quad (31)$$

Variação em  $\rho$ :

A variação do Lagrangeano  $\mathcal{L}$  em relação à variável de projeto  $\rho$  na direção de  $\alpha_3$  é denotada por  $\delta_\rho \mathcal{L}(u, v, \rho, \Lambda, \lambda; \alpha_3)$ . Considera-se, então, a igualdade

$$\delta_\rho \mathcal{L}(u, v, \rho, \Lambda, \lambda; \alpha_3) = 0, \quad (32)$$

de onde segue que

$$-\delta_\rho a(u, v, \rho; \alpha_3) + \delta_\rho w(\rho; \alpha_3) = 0. \quad (33)$$

Note que

$$\begin{aligned} \delta_\rho a(u, v, \rho; \alpha_3) &= \int_{\Omega} S(u) : \delta_\rho(c(\rho); \alpha_3) : S(v) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} S(u) : \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho + \xi \alpha_3)^p c^0 \right]_{\xi=0} : S(v) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} S(u) : [p(\rho + \xi \alpha_3)^{p-1} \alpha_3 c^0]_{\xi=0} : S(v) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} S(u) : [p(\rho)^{p-1} \alpha_3 c^0] : S(v) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} S(u) : \alpha_3 \frac{\partial c(\rho)}{\partial \rho} : S(v) d\Omega, \end{aligned} \quad (34)$$

e também que

$$\begin{aligned} \delta_\rho w(\rho; \alpha_3) &= \Lambda_1 \int_{\Omega} \delta \rho d\Omega + \int_{\Omega} \lambda_1 \delta \rho d\Omega - \int_{\Omega} \lambda_2 \delta \rho d\Omega \\ &= \Lambda_1 \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho + \xi \alpha_3) \right]_{\xi=0} d\Omega + \int_{\Omega} \lambda_1 \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho + \xi \alpha_3) \right]_{\xi=0} d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} \lambda_2 \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho + \xi \alpha_3) \right]_{\xi=0} d\Omega \\ &= \Lambda_1 \int_{\Omega} \alpha_3 d\Omega + \int_{\Omega} \lambda_1 \alpha_3 d\Omega - \int_{\Omega} \lambda_2 \alpha_3 d\Omega. \end{aligned} \quad (35)$$

Considerando que  $v = u$ , da equação (31), e os resultados de (34) e (35) na

equação (33), obtem-se que

$$\int_{\Omega} \alpha_3 \left[ -S(u) : \frac{\partial c(\rho)}{\partial \rho} : S(u) + \Lambda_1 + \lambda_1 - \lambda_2 \right] d\Omega = 0, \quad (36)$$

para todo  $\alpha_3$  admissível, de modo que, do Lema Fundamental do Cálculo de Variações, segue que

$$-S(u) : \frac{\partial c(\rho)}{\partial \rho} : S(u) + \Lambda_1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \quad \text{em } \Omega. \quad (37)$$

A equação (37) é equivalente a

$$-S(u) : [p\rho^{p-1}c^0] : S(u) + \Lambda_1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \quad \text{em } \Omega. \quad (38)$$

Note, contudo, que valem as seguintes condições para  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ :

$$\lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_1(\rho - 1) = 0, \quad \lambda_2(\rho_{min} - \rho) = 0, \quad (39)$$

o que indica que, para densidades intermediárias ( $\rho_{min} < \rho < 1$ ), tem-se  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . Assim, a equação (38) pode ser escrita como

$$S(u) : [p\rho^{p-1}c^0] : S(u) = \Lambda_1. \quad (40)$$

A análise de sensibilidades está completa.

As variações do Lagrangeano com respeito às variáveis de estado resultaram nas equações de equilíbrio do problema, as equações (23)-(25), onde  $u = v$ . A equação (40) obtida pela variação do Lagrangeano com respeito à variável de projeto, é fundamental para a atualização das densidades dos elementos finitos a cada iteração do algoritmo de otimização topológica e por isso serão utilizadas na forma discretizada.

## 2.5 Discretização do problema de otimização via MEF

A discretização do problema contínuo de otimização dado pelas equações (6)-(8) consiste em dividir o domínio contínuo de referência  $\Omega$  em um número finito de elementos  $\Omega^e$ . A região  $\Omega$  de volume  $V$  passa a ser composta de  $n$  subdomínios de volume  $V^e$ . Nesta configuração, o método parte de uma aproximação para as variáveis primais no nível destes subdomínios que são chamados de elementos finitos.

Em cada elemento finito  $\Omega^e$  são definidos alguns pontos, nomeados nós, onde as incógnitas (no caso deste problema, os deslocamentos mecânicos) são determinadas. Neste trabalho, os elementos finitos são limitados pelas suas arestas de modo que é o encontro de duas arestas que dá origem a um nó. Também são nos nós que as condições geométricas e mecânicas de contorno (suportes e carregamentos) são

atribuídas. Sendo assim, a discretização do domínio deve ser apropriada para representar a geometria e para receber as condições a ela impostas. O resultado desta discretização origina o que se chama de malha de elementos finitos.

A relação entre as incógnitas nodais de um elemento finito e as incógnitas de um ponto arbitrário, no mesmo elemento, são determinadas por funções de interpolação do tipo polinomiais (COOK; MALKUS; PLESHA, 1989).

Neste trabalho, considera-se como elemento mestre  $\hat{\Omega}^e$  o elemento isoparamétrico bilinear, também chamado elemento Q4. Para o elemento retangular cujos lados têm comprimento 2, com  $x = 0$  e  $y = 0$  no centro do elemento, fixa-se os eixos cartesianos  $x$  e  $y$  de modo que sejam paralelos aos lados do elemento, conforme a Figura 3. Os nós do elemento têm, portanto, coordenadas  $x = \pm 1$  e  $y = \pm 1$ . Como as discretizações nesta dissertação são feitas sob domínios retangulares, a malha de elementos finitos é formada também por elementos retangulares, não sendo necessária a abordagem que trata da transformação geométrica das coordenadas naturais para as coordenadas físicas, como geralmente é explicado na teoria de elementos finitos.

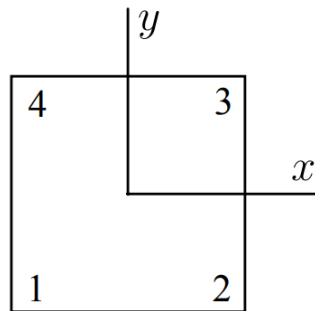


Figura 3: Elemento isoparamétrico bilinear.

Uma vez que o elemento é isoparamétrico, por definição, as mesmas funções de forma são utilizadas para interpolar tanto as coordenadas quanto os deslocamentos de um ponto dentro do elemento a partir das coordenadas e deslocamentos nodais. Disto, garante-se a continuidade dos deslocamentos entre os elementos a partir dos nós nos lados que estes elementos partilham. Assim, tem-se que

$$\begin{bmatrix} u_{x_i}^e \\ u_{y_i}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^4 N_j u_{x_i}^e \\ \sum_{j=1}^4 N_j u_{y_i}^e \end{bmatrix} = \mathbf{N}_u \mathbf{u}^e, \quad (41)$$

onde  $\mathbf{u}^e$  é o vetor de deslocamentos mecânicos de um elemento finito e o índice  $i$ , nas somas, representa um nó específico do elemento. Os termos  $u_{x_i}$  e  $u_{y_i}$  representam os deslocamentos do nó  $i$  nas direções horizontal e vertical, respectivamente;  $x_i$  e  $y_i$



representam as coordenadas do nó  $i$ . Ademais,

$$\mathbf{u}^e = \begin{bmatrix} u_{x_1}^e & u_{y_1}^e & u_{x_2}^e & u_{y_2}^e & u_{x_3}^e & u_{y_3}^e & u_{x_4}^e & u_{y_4}^e \end{bmatrix}^T, \quad (42)$$

$$\mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}, \quad (43)$$

onde  $\mathbf{N}_u$  é a matriz das funções de interpolação para os deslocamentos mecânicos.

As funções de forma  $N_i$  são as funções de interpolação de Lagrange dadas por

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} (1-x)(1-y), & N_2 &= \frac{1}{4} (1+x)(1-y), \\ N_3 &= \frac{1}{4} (1+x)(1+y), & N_4 &= \frac{1}{4} (1-x)(1+y). \end{aligned} \quad (44)$$

A partir das equações em (44), observa-se que cada  $N_i$  assume um valor unitário quando  $x$  e  $y$  assumem a coordenada do nó  $i$ , mas é zero quando  $x$  e  $y$  assumem a coordenada de qualquer outro nó.

O campo de deformações mecânicas  $\mathbf{S}^e$ , para cada elemento finito, pode ser escrito em função dos deslocamentos e das derivadas das funções de interpolação na forma

$$\mathbf{S}^e = \mathcal{D}_u \mathbf{N}_u \mathbf{u}^e = \mathbf{B}_u \mathbf{u}^e, \quad (45)$$

onde  $\mathcal{D}_u$  é um operador diferencial tal que

$$\mathbf{B}_u = \mathcal{D}_u \mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \mathbf{N}_u. \quad (46)$$

Para obter a equação matricial referente ao problema de otimização, parte-se do Princípio dos Trabalhos Virtuais, de onde tem-se que

$$\delta \left( \int_{\Omega} S(u) : c(\rho) : S(v) d\Omega - \int_{\Omega} f \cdot u d\Omega - \int_{\Gamma_t} t \cdot u d\Gamma \right) = 0. \quad (47)$$

Passando à variação em cada integral e considerando que  $v = u$ , obtém-se

$$\int_{\Omega} \delta S(u) : c(\rho) : S(u) d\Omega - \int_{\Omega} \delta f \cdot u d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta t \cdot u d\Gamma = 0. \quad (48)$$

Considerando as equações (41) e (45) na equação (48) e escrevendo os demais termos na forma matricial, a seguinte expressão é obtida:

$$\delta \mathbf{u}^{eT} \left( \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T c^0 \mathbf{B}_u d\Omega^e \right) \mathbf{u}^e - \delta \mathbf{u}^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}^e d\Omega^e - \delta \mathbf{u}^{eT} \int_{\Gamma_t^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{t}^e d\Gamma^e = 0, \quad (49)$$

onde  $\mathbf{f}^e$  e  $\mathbf{t}^e$  são os vetores das forças de corpo e das forças de superfície de um elemento finito, respectivamente.

Desta última igualdade, tem-se que

$$\delta \mathbf{u}^{eT} \left[ \left( \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T c^0 \mathbf{B}_u d\Omega^e \right) \mathbf{u}^e - \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}^e d\Omega^e - \int_{\Gamma_t^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{t}^e d\Gamma^e \right] = 0. \quad (50)$$

Uma vez que a variação  $\delta \mathbf{u}^{eT}$  é arbitrária e diferente de zero, segue da equação (50) que

$$\left( \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T c^0 \mathbf{B}_u d\Omega^e \right) \mathbf{u}^e - \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}^e d\Omega^e - \int_{\Gamma_t^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{t}^e d\Gamma^e = 0. \quad (51)$$

A equação matricial na forma de elementos finitos é dada por:

$$\mathbf{K}_{uu}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{F}_u^e, \quad (52)$$

onde

$$\mathbf{K}_{uu}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T c^0 \mathbf{B}_u d\Omega^e \quad (53)$$

e

$$\mathbf{F}_u^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}^e d\Omega^e + \int_{\Gamma_t^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{t}^e d\Gamma^e \quad (54)$$

representam a matriz de rigidez, a matriz de localização e o vetor de forças de um elemento finito, respectivamente. Além disso, em (53), tem-se que

$$c^0 = \frac{\mathcal{E}^0}{1 - (\nu^0)^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu^0 & 0 \\ \nu^0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\nu^0 \end{bmatrix}, \quad (55)$$

onde  $\mathcal{E}^0$  e  $\nu^0$  são o módulo de Young e o coeficiente de Poisson do material base isotrópico, respectivamente.

Como cada elemento da malha é conectado aos seus elementos vizinhos através dos nós e, assim, os deslocamentos mecânicos são contínuos de um elemento para outro, o Princípio dos Trabalhos Virtuais deve ser verificado para a estrutura completa através das matrizes globais obtidas a partir da contribuição de cada elemento finito (BECKER; CAREY; ODEN, 1981; COOK; MALKUS; PLESHA, 1989). A forma da equação matricial global será análoga à equação matricial elementar:

$$\mathbf{K}_{uu} \mathbf{U} = \mathbf{F}_u, \quad (56)$$

onde  $\mathbf{K}_{uu}$  é a matriz global de rigidez,  $\mathbf{U}$  é a deflexão global e  $\mathbf{F}_u$  é o vetor global de forças.

A formulação por elementos finitos está completa e pode-se, finalmente, escrever

o problema (6)-(8) na sua forma final discretizada. Note que, no membro esquerdo da equação (56), quando ambos os membros são pré-multiplicados por  $\mathbf{U}^T$ , ou seja,  $\mathbf{U}^T \mathbf{K}_{uu} \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{F}$ , aparece a forma fraca (em notação matricial) do funcional de custo dado pela equação (7), o trabalho virtual das forças externas. Assim, o membro esquerdo da equação (56) pode ser utilizado como função objetivo para o problema discretizado.

O problema de otimização discretizado para  $N$  elementos pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned}
 \min \quad & J(u, \rho) = \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{uu} \mathbf{U} = \sum_{e=1}^N (\rho_e)^p \mathbf{u}^{eT} \mathbf{K}_{uu}^e \mathbf{u}^e \\
 \text{s. a :} \quad & \mathbf{K}_{uu} \mathbf{U} = \sum_{e=1}^N (\rho_e)^p \mathbf{K}_{uu}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{F} \\
 & \sum_{e=1}^N \rho_e V^e = \eta V \\
 & 0 < \rho_{\min} \leq \rho_e \leq 1 \\
 & e = 1, 2, 3, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{57}$$

## 2.6 Condições de otimalidade

Uma abordagem clássica da solução numérica de um problema de otimização estrutural discretizada é o método do critério ótimo (OC). O OC corresponde a um método heurístico baseado na função Lagrangeana (SHUKLA; MISRA, 2013) que tem por finalidade atualizar as variáveis de projeto do problema, onde cada variável é atualizada de forma independente da atualização das outras (BENDSØE; SIGMUND, 2003). A ideia é desenvolver um método numérico que a cada iteração, considerando uma topologia previamente computada e seus deslocamentos associados, atualizem as variáveis de projeto em cada ponto (ou em cada elemento da discretização) independentemente se feitas as atualizações de outros pontos, baseados em condições necessárias de otimalidade. Para este fim, será considerado o problema discretizado por elementos finitos (57).

Enuncia-se então, o Lagrangeano  $\mathcal{L}$  do problema (57)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\rho) = \quad & \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{uu} \mathbf{U} + \lambda \left( \sum_e \rho_e V^e - \eta V \right) + \Lambda^T (\mathbf{K}_{uu} \mathbf{U} - \mathbf{F}_u) \\
 & + \lambda_{1e} (\rho_{\min} - \rho_e) + \lambda_{2e} (\rho_e - 1),
 \end{aligned} \tag{58}$$

onde  $\lambda$  é um escalar,  $\Lambda$  é um vetor e ambos são multiplicadores de Lagrange relacionados com a restrição de volume e a equação de equilíbrio, os multiplicadores escalares  $\lambda_{1e}$  e  $\lambda_{2e}$  representam as restrições laterais inferior e superior. Se irá calcular a derivada com respeito à variável  $\rho$ , impondo a condição de estacionariedade do problema

de otimização. Para isso, tem-se o cálculo da derivada do Lagrangeano a seguir para cada elemento finito:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho_e} &= \frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial \rho_e} \mathbf{K}_{uu} \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \rho_e} \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{uu} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_e} + \lambda V^e \\ &+ \Lambda^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \rho_e} \mathbf{U} + \mathbf{K}_{uu} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_e} - \frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \rho_e} \right) - \lambda_{1e} + \lambda_{2e} = 0. \end{aligned} \quad (59)$$

Como as restrições laterais inferior e superior não estão ativas e a força aplicada não depende das variáveis de projeto, tem-se  $\lambda_{1e} = \lambda_{2e} = 0$  e  $\partial \mathbf{F}_u / \partial \rho_e = 0$ .

Então, reagrupando-se os termos e colocando a derivada  $\partial \mathbf{U} / \partial \rho_e$  em evidência, tem-se

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho_e} = (2\mathbf{U}^T \mathbf{K}_{uu} + \Lambda^T \mathbf{K}_{uu}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_e} + \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \rho_e} \mathbf{U} + \Lambda^T \frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \rho_e} \mathbf{U} + \lambda V^e, \quad (60)$$

como  $\Lambda^T$  é arbitrário, pode-se substituir por  $-2\mathbf{U}^T$  de forma a eliminar a derivada  $\partial \mathbf{U} / \partial \rho_e$ , e então obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho_e} &= -\mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \rho_e} \mathbf{U} + \lambda V^e \\ &= -\mathbf{u}^{eT} \frac{\partial}{\partial \rho_e} [\rho_e^p \mathbf{K}_{uu}^e] \mathbf{u}^e + \lambda V^e \\ &= -p \rho_e^{p-1} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{K}_{uu}^e \mathbf{u}^e + \lambda V^e = 0. \end{aligned} \quad (61)$$

onde, se denotarmos,

$$q_c = \mathbf{u}^{eT} \mathbf{K}_{uu}^e \mathbf{u}^e, \quad (62)$$

então a equação (61) pode ser escrita como

$$\frac{p \rho_e^{p-1} q_c}{\lambda V_e} = 1, \quad (63)$$

A equação (63) tem sentido físico que representa a densidade de energia de deformação, que deve ser constante ao longo do domínio do projeto. Então, o multiplicador de Lagrange  $\lambda$  é atualizado de forma a deixar a energia de deformação constante.

Utiliza-se um esquema heurístico de atualização para as variáveis:

$$\rho_e^{new} = \rho_e \left( \frac{p \rho_e^{p-1} q_c}{\lambda V_e} \right)^\zeta = \rho_e (B_e)^\zeta, \quad (64)$$

onde  $\zeta$  é um expoente de amortecimento, que é geralmente igual a 0.5, podendo variar de 0 a 1. O amortecimento estabiliza as iterações. Na iteração, quando o elemento passa de vazio para sólido introduzimos um limite de movimento da variável de projeto. O método heurístico de atualização de cada variável tem o objetivo de estabilizar a

iteração, sendo formulado como

$$\rho_e^{new} = \begin{cases} \max(\rho_{min}, \rho_e - m) & \text{se } \rho_e(B_e)^\zeta \leq \max(\rho_{min}, \rho_e - m), \\ \rho_e(B_e)^\zeta & \text{se } \max(\rho_{min}, \rho_e - m) < \rho_e(B_e)^\zeta < \min(1, \rho_e + m), \\ \min(1, \rho_e + m) & \text{se } \min(1, \rho_e + m) \leq \rho_e(B_e)^\zeta, \end{cases} \quad (65)$$

onde  $m$  é um limite móvel e  $B_e$  é a condição de otimalidade vinda de (64). Valores típicos para  $\zeta$  e  $m$  são 0,5 e 0,2, respectivamente (BENDSØE; SIGMUND, 2003).

O multiplicador de Lagrange deve satisfazer a restrição de volume,

$$g(\lambda) = \sum_{e=1}^N V^e(\rho_e(\lambda)) - \eta V = 0, \quad (66)$$

então, pode-se atualizar o multiplicador de Lagrange de forma iterativa. Note que a função  $g(\lambda)$  é contínua monótona decrescente em relação ao multiplicador de Lagrange. O método da biseção pode ser utilizado, pois ao fazer  $g(\lambda) = 0$  recai na restrição de volume, assim, pode-se localizar os zeros de (66), que satisfaz a restrição.

Segundo BENDSØE; SIGMUND (2003), o tipo de algoritmo descrito acima foi utilizado em um grande número de estudos em projetos estruturais e está bem estabelecido como um método (heurístico) efetivo para a solução de problemas de larga escala. A eficiência do algoritmo vem do fato que cada variável de projeto é atualizada independentemente das outras variáveis de projeto, exceto para redimensionamentos que têm que acontecer para satisfazer a restrição de volume.

Com o exposto nesta seção e na anterior, têm-se os ingredientes básicos para a organização da implementação computacional do procedimento de distribuição de material para o projeto da topologia ótima. Ainda não foi comentado e nem mesmo apresentado com detalhes como se dá a discretização do domínio fixo estendido através do MEF, mas pode-se antecipar que esta é a primeira etapa a ser considerada no procedimento computacional, que resolverá numericamente o problema de otimização topológica dado, por exemplo, pelo problema (6). Com isso, pode-se estabelecer, um esquema do fluxo de cálculos do procedimento computacional.

## 2.7 Problemas numéricos

A otimização topológica pode não ter soluções precisas e estáveis pois segundo SIGMUND; PETERSSON (1998) existem problemas numéricos comuns que se dividem em três categorias, são elas:

- Tabuleiro de xadrez;

- Dependência da malha;
- Mínimos locais.

### 2.7.1 Tabuleiro de xadrez

A instabilidade do tabuleiro de xadrez refere-se ao problema da formação de regiões de elementos alternados em sólidos e vazios ordenados, assim como em um tabuleiro de xadrez, conforme ilustrado na Figura 4.



Figura 4: Instabilidade do tabuleiro de xadrez.

Acreditava-se anteriormente que esse comportamento representava regiões onde tem-se uma microestrutura ótima, mas artigos de DÍAZ; SIGMUND (1995) e JOG; HABER (1996), citados por SIGMUND; PETERSSON (1998), mostraram que o tabuleiro de xadrez é um problema devido à modelagem numérica incorreta da rigidez. Esses trabalhos fornecem orientações úteis de escolha dos elementos estáveis e mostram que padrões de tabuleiro de xadrez são propensos a aparecer na homogeneização e na abordagem SIMP.

A instabilidade de tabuleiro pode ser evitada pela utilização do filtro de sensibilidades apresentado na Subseção 2.7.4, este não permite o surgimento de regiões de elementos brancos em meio aos elementos pretos.

### 2.7.2 Dependência da malha

Segundo BENDSØE; SIGMUND (2003) está bem estabelecido que o problema 0-1 e o método SIMP são problemas de otimização topológica sem a existência de solução no meio contínuo. A razão disto está na introdução de mais buracos, sem mudança no volume estrutural, onde será geralmente aumentado a eficiência da estrutura, porém, no limite do processo uma variação estrutural forma microestruturas que tem um uso improvável, pois apresentam características não isotrópicas e a solução não estará dentro da gama de soluções originais isotrópicas. BENDSØE; SIGMUND (2003) explicam que, em implementações computacionais, este efeito é visto como uma instabilidade numérica onde um grande número de buracos aparece quando uma malha de elementos finitos mais fina é empregada, isto é, refinar a malha de elementos fini-

tos para o domínio de referência conduz à geração de mais padrões microestruturais internos semelhantes ao que a teoria prediz.

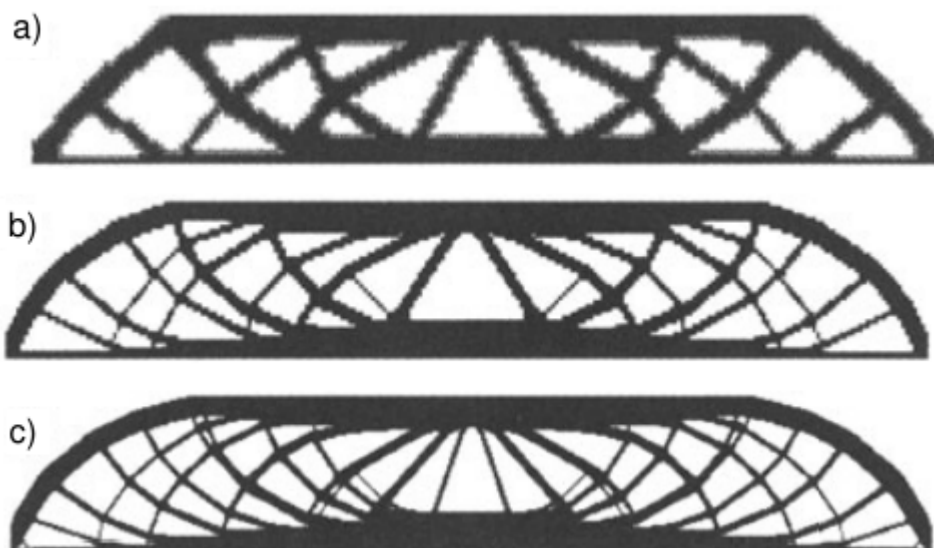


Figura 5: Topologia ótima com dependência do refinamento da malha para uma viga bi-apoiada. Soluções para as discretizações com a) 2700, b) 4800 e c) 17200 elementos. Fonte: Adaptado de BENDSØE; SIGMUND (2003), p. 30.

O tratamento para reduzir o espaço de modelos admissíveis, e consequentemente ter um problema independente da malha é, de acordo com BENDSØE; SIGMUND (2003), incluir no problema alguma restrição local ou global sobre a variação da densidade. Esta inclusão pode ser feita através da adição de restrições, de forma a reduzir o espaço de parâmetros, ou através da aplicação de filtros durante a implementação.

### 2.7.3 Mínimos locais

A não convexidade da maioria dos problemas de otimização topológica leva a possibilidade de encontrar múltiplos mínimos locais e diferentes soluções para a mesma discretização, quando são utilizados diferentes parâmetros iniciais no algoritmo de otimização (BENDSØE; SIGMUND, 2003). Para problemas não convexos, apenas é possível assegurar a convergência de pontos estacionários, que não necessariamente são mínimos globais, ao contrário que ocorre em problemas convexos, em que é possível provar a convergência dos algoritmos (SIGMUND; PETERSSON, 1998).

Métodos de continuação têm sido utilizados para tratar essa complicação, pois conduzem a bons resultados. A ideia geral destes métodos é mudar gradualmente o problema de otimização convexo, que permite regiões de densidades intermediárias, para o problema de otimização original não-convexo (do tipo 0-1), em um número de passos. Em cada passo destes métodos, um algoritmo de otimização baseado em

gradientes é utilizado a fim de buscar a convergência. Contudo, não há garantia de convergência na utilização destes métodos, o que pode acontecer, por exemplo, no caso de problemas que apresentam muitos mínimos locais para os problemas relaxados (STOLPE; SVANBERG, 2003).

#### 2.7.4 Filtro de sensibilidades

O *Filtro de Sensibilidades* (SIGMUND, 1997; SIGMUND; PETERSSON, 1998; BENDSØE; SIGMUND, 2003) é um método puramente heurístico, mas obtém resultados semelhantes aos métodos de restrição de gradientes, por exemplo. O filtro consiste em modificar a sensibilidade (taxa de variação da função objetivo ou restrições em relação a uma variável de projeto) de um elemento finito específico baseado em uma média ponderada das sensibilidades de elementos vizinhos. A experiência computacional tem mostrado que esta técnica é um meio eficiente de obter uma independência em relação à malha em otimização topológica.

A técnica funciona mediante a modificação das sensibilidades de alguma grandeza  $X$  em relação a uma pseudodensidade  $\rho_k$ , da seguinte forma:

$$\frac{\widehat{\partial X}}{\partial \rho_k} = \frac{1}{\rho_k \sum_{i=1}^N \widehat{H}_i} \sum_{i=1}^N \widehat{H}_i \rho_i \frac{\partial X}{\partial \rho_i}, \quad (67)$$

onde  $\widehat{\partial X}/\partial \rho_k$  é a nova sensibilidade,  $N$  é o número total de elementos na malha e o fator de peso  $\widehat{H}_i$  é dado por

$$\widehat{H}_i = r_{min} - \text{dist}(k, i), \quad \{i \in \mathbb{N} \mid \text{dist}(k, i) \leq r_{min}\}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (68)$$

Nesta expressão, o operador  $\text{dist}(k, i)$  é definido como a distância entre o centro do elemento  $k$  e o centro de um elemento  $i$ . O fator de peso  $\widehat{H}_i$  é zero fora da área de filtro do elemento  $k$ . De acordo com BENDSØE; SIGMUND (2003), é notável que a sensibilidade (67) converge para a sensibilidade original quando o raio de filtragem  $r_{min}$  se aproxima de zero e que todas as sensibilidades são iguais quando  $r_{min}$  cresce infinitamente.

Apesar da base teórica do método ainda não estar completamente compreendida, inúmeras aplicações dadas, por exemplo, por problemas bi e tridimensionais, problemas com até vinte restrições estruturais e também problemas envolvendo múltiplas áreas de física, são baseadas neste método de filtragem, mostrando que essa é uma ferramenta extremamente útil. Ademais, a técnica fornece resultados estáveis sob refinamento de malha e mantém um comprimento mínimo de escala, que é controlado pelo raio de filtragem  $r_{min}$  (BENDSØE; SIGMUND, 2003).



### **3 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA BASEADA EM CONFIABILIDADE**

Um projeto de estruturas e uma predição de um mal funcionamento, conduzem à verificação de uma série de regras resultantes do conhecimento da experiência física e mecânica por projetistas e construtores. Essas regras geralmente condicionam ou limitam as estruturas com respeito aos efeitos de carregamento, como tensões e deslocamentos. Cada regra representa um evento elementar e a ocorrência de vários eventos leva a um cenário de falha. O objetivo é, então, avaliar a probabilidade de falha correspondente às direções de falha. Há uma relação entre a probabilidade de falha de uma estrutura e a confiabilidade que se tem com respeito a mesma. Esta relação é dada pela função de distribuição normal e será apresentada neste capítulo.

Já a Otimização Baseada em Confiabilidade (RBDO) visa definir o melhor relação entre custo e segurança. Quando se integra a confiabilidade no dimensionamento e otimização de forma, dá-se o nome de RBDO, onde permite-se projetar estruturas que satisfazem requisitos de economia e segurança (KHARMANDA et al., 2004). Quando se integra critérios de segurança na otimização topológica, apresenta-se um novo tipo de otimização, chamado Otimização Topológica Baseada em Confiabilidade (RBTO) (KHARMANDA et al., 2004). O objetivo do RBTO é levar em consideração a aleatoriedade das cargas aplicadas e a descrição da geometria, onde se insere um índice alvo de confiabilidade que satisfaz uma função estado limite. Uma função estado limite de uma estrutura é uma função estado idealizada, de forma que se for ultrapassada, a estrutura não satisfaz as exigências estruturais ou funcionais definidas regulamentarmente.

PANTOJA (2012) afirma que valores alvo do índice de confiabilidade para estados limite são propostos pela norma do comitê JCSS (2001). Usando o modelo RBTO, obtemos topologias diferentes em comparação com o procedimento de otimização topológica determinística. As topologias resultantes dependem dos níveis de confiabilidade alvo. As estruturas resultantes apresentam uma melhor relação volume/confiabilidade do que as determinísticas.

Neste trabalho, apresentamos a análise de confiabilidade e a importância da sua in-

tegração com o problema de otimização de topologia. A formulação do modelo RBTO será apresentado a seguir. O procedimento RBTO será detalhado e serão apresentados exemplos que mostram a aplicabilidade do novo modelo.

### 3.1 Importância dos critérios de segurança

Na otimização estrutural determinística, o projetista pretende reduzir o custo da construção sem levar em conta os efeitos das incertezas quanto aos materiais, à geometria e ao carregamento. Desta forma, a configuração ótima resultante pode representar um menor nível de confiabilidade e, em seguida, levar a uma maior taxa de falha. O equilíbrio entre minimização de custos e maximização de confiabilidade é um grande desafio para o projetista. O interesse em critérios de confiabilidade na otimização do projeto é melhorar o nível de confiabilidade do sistema sem aumentar o seu volume. Mas ao integrar a confiabilidade em problemas de otimização topológica, o interesse é fornecer ao projetista uma topologia considerando a aleatoriedade das principais variáveis da estrutura.

No modelo RBTO, as variáveis aleatórias e de projeto não estão relacionadas, porque as variáveis de projeto são as densidades do material dos elementos de discretização, enquanto as variáveis aleatórias estão relacionadas a quantidades conhecidas. Portanto, temos três tipos de variáveis:

- 1) As variáveis projeto  $\rho$  da otimização topológica, que são variáveis determinísticas;
- 2) As variáveis aleatórias  $\mathbf{y}$ , que representam as incertezas estruturais, identificadas por distribuições de probabilidade. Essas variáveis podem ser dimensões geométricas, características do material ou o carregamento externo aplicado;
- 3) As variáveis normalizadas  $\alpha$ , que relacionam as variáveis aleatórias e seus valores médios e desvios-padrão.

### 3.2 Probabilidade de falha

A confiabilidade estrutural é definida como uma medida da capacidade de uma estrutura atender satisfatoriamente os requisitos de desempenho ao longo da sua vida útil. A confiabilidade de uma estrutura está relacionada com o complemento da probabilidade da estrutura falhar. A probabilidade de falha pode ser calculada por

$$P_f = P_r[G(\mathbf{y}) \leq 0] = \int_{G(\mathbf{y}) \leq 0} f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (69)$$

onde  $P_f$  é a probabilidade de falha,  $P_r[\cdot]$  é o operador probabilidade,  $f_{\mathbf{y}}$  é a função densidade de probabilidades composta pelo vetor  $\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_n\}^T$  das  $n$  variáveis

aleatórias contidas na função estado limite  $G(\mathbf{y})$ . A função de estado limite constitui a relação analítica entre as resistências e as solicitações de carga, indicando para quais combinações das variáveis a estrutura fica no domínio de segurança, ou no domínio de falha. A função de estado limite é definida de maneira que  $G(\mathbf{y}) = 0$  separe a região de falha ( $G(\mathbf{y}) \leq 0$ ) da região de segurança ( $G(\mathbf{y}) > 0$ ). Estes conceitos são ilustrados na Figura 6.

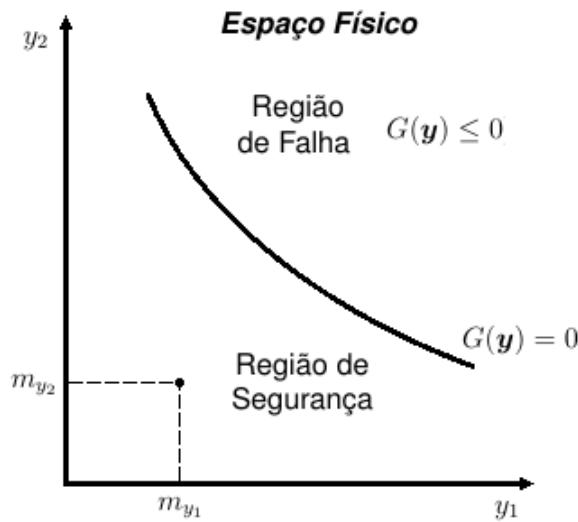


Figura 6: Regiões segura e de falha no espaço físico, onde  $m_{y_1}$  e  $m_{y_2}$  são variáveis médias.

### 3.2.1 A distribuição normal

Uma variável aleatória contínua  $\alpha_j$  tem distribuição normal padrão se a função de densidade de probabilidade, denotada por  $\phi_d(x)$ , é

$$\phi_d(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < \infty. \quad (70)$$

A média da variável aleatória padrão é zero e a variância é um. A Figura 7 mostra a função de densidade de probabilidade da variável aleatória normal padrão.

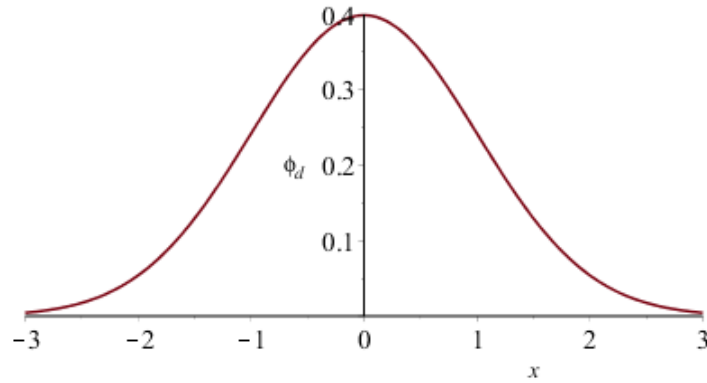


Figura 7: Função de densidade de probabilidade da variável aleatória normal padrão.

A função de distribuição de  $\alpha_j$  é denotada por  $\Phi_d(x)$  e é dada por:

$$\Phi_d(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (71)$$

Não há expressão explícita para esta integral em termos de funções elementares. Valores podem ser obtidos a partir de tabelas que são dadas em livros didáticos, obtidos a partir da integração numérica de (71). A maioria dos programas computacionais têm funções que fornecerão o valor de  $\Phi_d(x)$  para todos os  $x$  com precisão suficiente para todas as aplicações práticas.

Uma variável aleatória  $y_j$  é uma distribuição normal se for da forma  $y_j = m_{y_j} + \sigma_{y_j} \alpha_j$ , onde  $\sigma_{y_j}$  é um desvio padrão normal,  $-\infty < m_{y_j} < \infty$  e  $\sigma_{y_j} > 0$ .

No espaço normalizado, a equação (69) fica expressa como:

$$P_f = P_r[G(\mathbf{y}) \leq 0] = P_r[G(m\mathbf{y} + \sigma\mathbf{y}\boldsymbol{\alpha}) \leq 0] = P_r[H(\boldsymbol{\alpha}) \leq 0], \quad (72)$$

onde  $H(\boldsymbol{\alpha})$  é função estado limite no espaço normalizado (Figura 8) e  $\sigma\mathbf{y}$  é uma matriz diagonal, onde cada componente da diagonal é  $\sigma_{y_1}, \dots, \sigma_{y_n}$ .

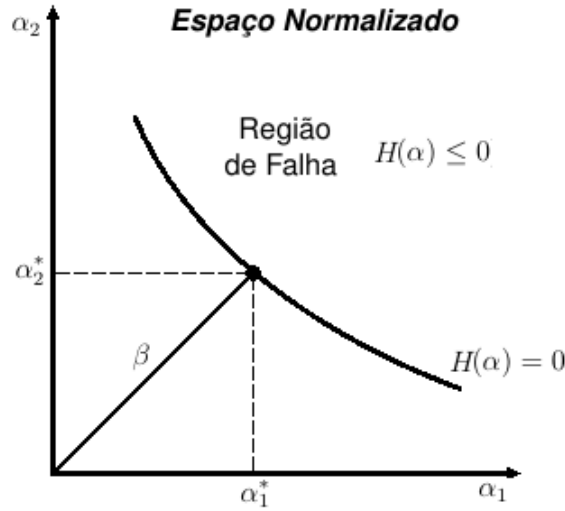


Figura 8: Regiões segura e de falha no espaço normalizado.

A transformação de cada variável física  $y_j$  para a variável normal  $\alpha_j$  é dado por:

$$\alpha_j = T_p(y_j) \quad \text{e} \quad y_j = T_p^{-1}(\alpha_j), \quad (73)$$

onde  $\alpha_j = (y_j - m_{y_j})/\sigma_{y_j}$  é a relação entre  $\alpha_j$  e  $y_j$ , o operador  $T_p(\cdot)$  é chamado de transformação probabilística. No espaço padrão, a função estado limite tem a forma:

$$H(\alpha) \equiv G(y) = 0. \quad (74)$$

### 3.2.2 Índice de confiabilidade

A probabilidade de falha é dada por:

$$P_f = P_r[H(\alpha) \leq 0] = 1 - \Phi_d(\beta) = \Phi_d(-\beta), \quad (75)$$

onde  $\Phi_d(\cdot)$  é a função de distribuição acumulada padrão e  $\beta$  é a mínima distância da origem deste espaço à função de estado limite (mostrado na Figura (8)), e que constitui o índice de confiabilidade. O sinal negativo vem pela paridade da função  $\phi_d(x)$ , onde  $1 - \Phi_d(x)$  é o complementar de  $\Phi_d(x)$ . Algumas aproximações utilizadas neste trabalho, que relacionam a probabilidade de falha com o índice de confiabilidade  $\beta$ , são dadas na Tabela 1, calculadas pelas equações (71) e (75).

Para um caso de uma variável, supõe-se que  $y$  é uma variável básica e a equação estado limite seja  $G(y) = y - y_0$ , de modo que a segurança é alcançada se  $y < y_0$ . Se  $y$  for uma variável aleatória que é aproximadamente uma distribuição normal, com variável média  $m_y$  e desvio padrão  $\sigma_y$ , pode-se escrever  $y = \sigma_y \alpha + m_y$ , onde  $\alpha$

$\beta$	1	2	3	4	5	6
$P_f$	$1,59 \times 10^{-1}$	$2,28 \times 10^{-2}$	$1,35 \times 10^{-3}$	$3,17 \times 10^{-5}$	$2,87 \times 10^{-7}$	$1,20 \times 10^{-9}$

Tabela 1: Relações aproximadas entre a probabilidade de falha e o índice de confiabilidade  $\beta$ .

corresponde a uma variável aleatória padrão, com média zero e desvio padrão um.

Substituindo  $y$  em termos de  $\alpha$  em  $G(y)$ , obtém-se uma nova equação estado limite:

$$H(\alpha) = G(\sigma_y \alpha + m_y) = \sigma_y \alpha + m_y - y_0, \quad (76)$$

e a segurança é alcançada se

$$\alpha < \frac{y_0 - m_y}{\sigma_y} = \beta. \quad (77)$$

Agora, usa-se o fato de  $y$  e  $\alpha$  serem aproximados pela distribuição normal. Assim, a probabilidade de segurança é dada por  $P_r[\alpha < \beta] \approx \Phi_d(\beta)$  onde  $\Phi_d$  é a função de distribuição da variável normal padrão. Essa probabilidade geralmente é quase uma unidade, então é usual citar a probabilidade de falha (ou seja, a probabilidade de não conseguir a segurança), que é  $P_r[y \geq 0] = 1 - \Phi_d(\beta)$ . No método do índice de confiabilidade  $\beta$ , toma-se  $\beta$  para ser uma medida de segurança. Quanto maior o  $\beta$ , mais segura é a situação. Se  $y$  é distribuído normalmente, tem-se a relação de  $\beta$  com  $P_r[y < y_0]$ .

### 3.3 Considerações sobre otimização topológica e variáveis aleatórias

Os problemas de otimização de dimensionamento, forma e topologia abordam diferentes aspectos de um problema de projeto estrutural. Em um problema de dimensionamento típico, o objetivo pode ser encontrar a distribuição de espessura ideal de uma placa linearmente elástica. A distribuição ótima da espessura minimiza (ou maximiza) uma quantidade física, como a flexibilidade (trabalho externo), o pico de tensão, a deflexão, etc., enquanto o equilíbrio e outras restrições sobre o estado e as variáveis de projeto são satisfeitas. A principal característica do problema de dimensionamento é que o domínio do modelo de projeto e as variáveis de estado são conhecidas a priori e são ajustadas ao longo do processo de otimização.

Por outro lado, em um problema de otimização de forma, o objetivo é encontrar a forma ideal desse domínio, ou seja, o problema de forma é definido em um domínio variável, pois a variável de projeto neste caso é o seu contorno.

Já a otimização topológica de estruturas envolve a determinação de características

como o número e localização de furos e a conectividade do domínio.

No entanto, a integração da análise de confiabilidade em cada etapa da otimização do projeto estrutural desempenha um papel importante, considerando a variabilidade das grandezas mais sensíveis. Essa variabilidade deve ser considerada nos processos de otimização, a fim de reduzir o volume estrutural nas regiões críticas e, portanto, produzir estruturas que são confiáveis e econômicas. As cargas aplicadas são muitas vezes consideradas como variáveis aleatórias porque participam fortemente da falha ou danos. Da mesma forma, a geometria e os materiais podem ser modelados como variáveis aleatórias. O objetivo da otimização topológica baseada em confiabilidade é encontrar a forma confiável e ótima de uma estrutura dentro de uma região específica. No problema de otimização de forma determinística, as únicas quantidades conhecidas são as cargas aplicadas, as possíveis condições de suporte, o volume da estrutura a ser construída e, possivelmente, algumas especificações de projeto adicionais, como a localização e o tamanho dos furos prescritos. Mas o tamanho e a forma física e a conectividade da estrutura são desconhecidas.

### 3.4 O problema de otimização topológica baseada em confiabilidade

Serão impostos neste projeto, critérios de segurança, onde serão inseridas variáveis de incertezas relativas aos materiais, assim se buscará melhorar o nível de confiabilidade do sistema, sem que isto represente um aumento de volume. Neste trabalho, para considerar tais incertezas, serão introduzidas as variáveis  $\mathbf{y}$  e  $\alpha$ , onde  $\mathbf{y}$  é o vetor das variáveis aleatórias que otimizará o projeto em relação ao controle dos parâmetros do sistema mecânico e do modelo probabilístico, e  $\alpha$  representará o vetor das variáveis de incerteza do projeto, determinado por distribuições probabilísticas. A fim de avaliar a probabilidade de falha com respeito a um cenário de falha escolhido, uma função estado limite é definida por  $H(\alpha)$  como condição de um bom funcionamento da estrutura. Para controlar a topologia será introduzido o índice de confiabilidade  $\beta$  com o vetor normalizado  $\alpha$ . No caso em que  $\alpha$  é uma distribuição normal, tem-se para cada  $\alpha_j$ :

$$\alpha_j = \frac{y_j - m_{y_j}}{\sigma_{y_j}}, \quad (78)$$

e então tem-se  $\beta = \min \sqrt{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_j^2 + \dots + \alpha_n^2}$  sujeito a  $H(\alpha) \leq 0$ , onde  $y_j$  é a  $j$ -ésima variável aleatória com valor médio  $m_{y_j}$  e desvio padrão  $\sigma_{y_j}$ ,  $H$  é a função estado limite e  $n$  é o número de variáveis aleatórias.

Para simplificar o procedimento de análise, considera-se o problema clássico de otimização topológica apresentado no capítulo 2, onde limita-se em um domínio de referência de projeto fixo, ou domínio de projeto  $\Omega_d \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ . O domínio de

referência  $\Omega$  é escolhido de tal forma que permita a definição de cargas aplicadas e condições de contorno.

Pode-se definir o problema de projeto ótimo como o problema de encontrar a escolha ótima do tensor constitutivo  $c$ , que é uma variável sobre o domínio. Introduzindo a forma bilinear de energia:

$$a_c(u, v) = \int_{\Omega} S(u) : c(x) : S(v) d\Omega, \quad (79)$$

com as deformações  $S(u)$  dadas por (9) e a forma linear de carga

$$l(u) = \int_{\Omega} f \cdot u d\Omega + \int_{\Gamma_t} t \cdot u d\Gamma, \quad (80)$$

o problema de minimização da flexibilidade toma a forma

$$\begin{aligned} \min_{u \in \mathcal{U}} \quad & l(u), \\ \text{s. a:} \quad & \beta(\alpha) \geq \beta_t, \\ & a_c(u, v) = l(v) \quad \forall v \in \mathcal{U}, \\ & c \in C_{ad}. \end{aligned} \quad (81)$$

Nesta formulação, a equação de equilíbrio é escrita na sua forma variacional com  $\mathcal{U}$  denotando o espaço dos campos de deslocamento cineticamente admissíveis.  $\Gamma_u \subset \Gamma \equiv \partial\Omega$  é a parte da fronteira onde são especificados os deslocamentos. Além disso,  $f$  é o vetor das forças de corpo e  $t$  é o vetor das forças de superfície aplicadas em  $\Gamma_t \subset \Gamma \equiv \partial\Omega$  do contorno.

No problema (81),  $\beta_t$  é o índice de confiabilidade alvo,  $C_{ad}$  denota o conjunto dos tensores de rigidez elástica admissíveis. O limite de recurso de material, dado por uma restrição de volume, pode ser expresso na forma

$$\int_{\Omega} \rho(x) d\Omega = \eta V \leq V, \quad (82)$$

onde  $\eta \in (0, 1]$  e  $V$  é o volume do domínio considerado. O valor escolhido para  $\eta$  limita o uso de material a ser utilizado para a geração da topologia ótima.

Seguindo a sequência do capítulo 2 será utilizada a abordagem de discretização via elementos finitos. Onde dessa vez, além do campo de interesse no problema (81) ser o deslocamento  $u$  e a rigidez  $c$ , temos a relação entre as variáveis determinísticas e a variável de incertezas  $\alpha$ . Então, escreve-se o problema pela abordagem SIMP,



conforme apresentado abaixo, na sua forma discretizada:

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{U}} \quad & J(\boldsymbol{\alpha}, u, \rho) = \mathbf{U}^T \mathbf{F}_u, \\
 \text{s. a:} \quad & \beta(\boldsymbol{\alpha}) \geq \beta_t, \\
 & \mathbf{K}_{uu} \mathbf{U} = \mathbf{F}_u, \\
 & \sum_e \rho_e V^e = \eta V, \\
 & 0 < \rho_{\min} \leq \rho_e \leq 1, \\
 & e = 1, 2, 3, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{83}$$

onde  $\mathbf{U}$  é o vetor global de deslocamentos mecânicos e  $\mathbf{F}_u$  é o vetor global de forças,  $\mathbf{K}_{uu} = \sum_{e=1}^N \mathbf{K}_{uu}^e(c_e)$  e  $\mathbf{K}_{uu}^e(c_e) = \rho_e^p \mathbf{K}_{uu}^e$ , o índice  $e$  representa a aplicação no elemento finito, sendo  $N$  o número de elementos.

Estabelecido o problema básico de minimizar a flexibilidade de uma estrutura e a sua forma discretizada, as próximas seções tratam das condições de otimalidade para a variável de projeto  $\rho$  (densidade) e do esquema de implementação computacional (padrão) para a resolução do problema via método de otimização topológica, integrado ao MEF. A implementação computacional, gera problemas de instabilidades numéricas que já foram tratadas no capítulo 2.

### 3.4.1 Análise de sensibilidades

Segundo JALALPOUR; GUEST; IGUSA (2013), para avaliar a confiabilidade estrutural, o desempenho estrutural deve ser medido em termos de efeito de carga (tensão, deflexão, etc) e uma função de estado limite ou desempenho é definida para a estrutura.

Neste trabalho seguiu-se a abordagem de análise de sensibilidades das variáveis médias de KHARMANDA et al. (2004) para se obter as direções de falha  $\alpha_j$ . A sensibilidade da função objetivo  $J$ , com respeito às variáveis médias  $m_y$ , escolhidas da geometria (número de elementos nas direções  $x$  e  $y$  e volume) e carga aplicada, pode ser calculada utilizando diferentes métodos. Um método simples é o método clássico de diferenças finitas considerando, por exemplo, uma variação  $\frac{\Delta m_{y_j}}{m_{y_j}} = 0,01$ . Utilizando a aproximação das derivadas por diferenças finitas, tem-se:

$$\frac{\partial J}{\partial m_{y_j}} \approx \frac{\Delta J}{\Delta m_{y_j}} = \frac{J(m_{y_j} + \Delta m_{y_j}) - J(m_{y_j})}{\Delta m_{y_j}}. \tag{84}$$

Essa metodologia é de fácil implementação, permitindo rápida obtenção das sensibilidades com relação às variáveis médias, e servirão para dar o sentido do gradiente da função objetivo com relação a estas variáveis.

### 3.4.2 Evolução do índice de confiabilidade

De forma similar à metodologia utilizada para o cálculo das sensibilidades, o procedimento para a obtenção do índice de confiabilidade também está baseado no trabalho de KHARMANDA et al. (2004). O cálculo para a atualização do índice de confiabilidade  $\beta$  é feito utilizando um procedimento particular. Considerando  $d_t$  a distância entre o estado limite ( $H(\alpha)$ ) e a origem no espaço normalizado, o índice  $\beta$  é a menor distância, conforme mostrado na Figura 8. A equação é dada por:

$$\min d_t(\alpha) = \sqrt{\sum_{j=1}^n \alpha_j^2} = \beta \quad \text{s.a } \beta(\alpha) \geq \beta_t. \quad (85)$$

Durante o procedimento de otimização pode-se calcular analiticamente a derivada da distância  $d$  com respeito a variável  $\alpha_j$ , onde obtém-se:

$$\frac{\partial d}{\partial \alpha_j} = \frac{\alpha_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \alpha_j^2}} = \frac{\alpha_j}{d_t(\alpha)}. \quad (86)$$

O vetor resultante  $\alpha$  da equação (85) será usado para estimar o vetor de variáveis aleatórias  $y$ , usando a equação (78) com o desvio padrão dado por  $\sigma_{y_j} = 0,1m_{y_j}$  e considerando que  $\alpha_j$  tem o sinal correspondente do gradiente  $\partial J / \partial m_{y_j}$ , pois o mesmo carrega o sentido da falha. Deseja-se que a restrição do problema (83) seja satisfeita, ou seja,  $\beta - \beta_t = s$ , onde  $0 \leq s_{min} < s$  e  $s_{min}$  é a tolerância desejada. Dessa forma a atualização é feita de acordo com a seguinte equação:

$$\alpha^{k+1} = \alpha^k + a \frac{\partial d_t}{\partial \alpha}, \quad (87)$$

onde  $a$  é uma constante de descida de busca, enquanto que  $s > s_{min}$ , atualiza-se  $a$ , dividindo-se, por exemplo, o valor de  $a$  pela metade. Ao atingir a tolerância desejada a iteração finaliza.

### 3.4.3 Processo de otimização com confiabilidade

Uma vez satisfeita a restrição (85), obtém-se os valores das variáveis aleatórias através da equação (78). Isso finaliza o procedimento de encontrar as novas variáveis utilizadas como parâmetros no processo de minimização de flexibilidade. O processo de determinação das variáveis aleatórias é ilustrado no fluxograma apresentado na Figura 9.

Primeiro, propomos um conjunto de variáveis montadas no vetor  $m_y$ , que será chamado de vetor variável médio, e que diz respeito às cargas e geometria da estrutura aplicadas. Mas, para selecionar as variáveis mais eficientes, se estuda a sensibilidade

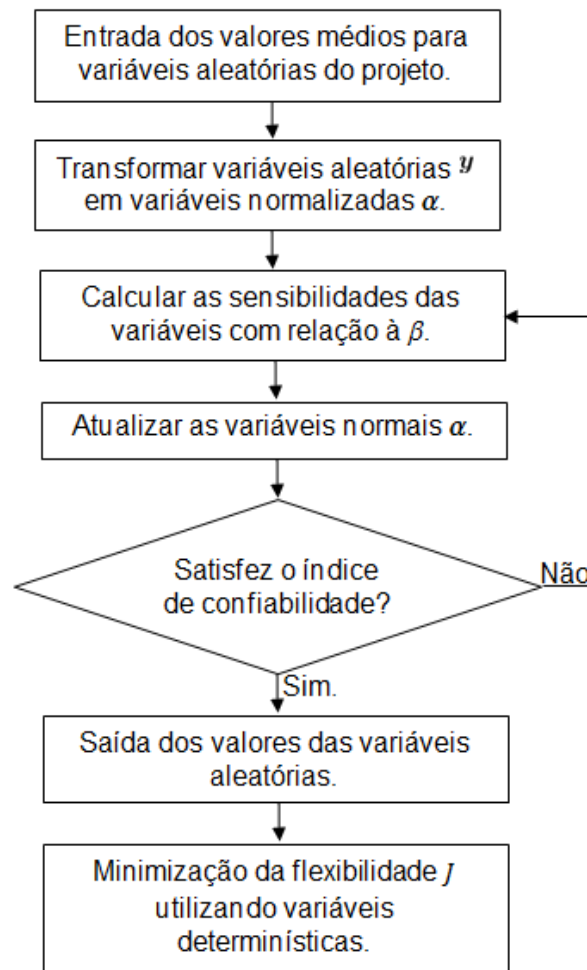


Figura 9: Fluxograma do processo de determinação das variáveis aleatórias utilizadas na otimização topológica.

da função objetivo em relação às variáveis escolhidas. As variáveis selecionadas são montadas no vetor de variáveis aleatórias  $y$ . Em seguida, o índice de confiabilidade  $\beta$  é avaliado pela restrição de confiabilidade e o vetor normalizado resultante  $\alpha$  é usado para formular o vetor de variáveis aleatórias  $y$ . Finalmente, usando o vetor resultante  $y$ , aplicamos a abordagem de otimização topológica para obter a nova topologia, incluindo índices de confiabilidade (Figura 9). Na próxima seção serão apresentados exemplos, nos quais, os conjuntos de variáveis  $m_y$ ,  $y$ ,  $\beta$  e  $\alpha$  são dados explicitamente.

### 3.5 Aplicações

Inicialmente aborda-se um exemplo ilustrativo para melhor compreensão do uso de índice de confiabilidade estrutural. Considere somente uma variável aleatória para força, de acordo com a lei de distribuição normal. Pode-se calcular a nova configura-

ção para a estrutura, com o índice de confiabilidade, através da variável normalizada

$$\alpha = \frac{F - m_F}{\sigma_F}. \quad (88)$$

Dado que  $F = 1000N$  e  $m_F = 800N$ , calcula-se o valor de  $\alpha$ , com base na confiabilidade dada por (88) e desvio padrão  $\sigma_F = 0,1m_F$ , resultando em:

$$\beta = |\alpha| = 2,5. \quad (89)$$

Agora, considera-se uma confiabilidade alvo  $\beta_t = 3$ , onde se obtém a probabilidade de falha  $P_f \approx 1 \times 10^{-3}$  (calculado pelo *software* MAPLE através da equação (71) e (75)), pode-se obter um novo valor para  $F$  calculado da equação (88). Ou seja, se  $m_F = 800N$ , com o mesmo desvio padrão, obtém-se  $F = 1040N$ .

Podemos generalizar esse caso para todas as variáveis de projeto sobre os quais atuará o índice de confiabilidade (força, número de elementos na direção  $x$ , número de elementos na direção  $y$  e fração de volume), organizadas em um vetor  $y$ . Com base no índice de confiabilidade  $\beta_t$ , e um desvio padrão  $\sigma_{y_j} = 0,1m_{y_j}$ , a atualização da variável  $y_j$  é dada na forma

$$y_j = m_{y_j}(1 + 0,1\alpha_j). \quad (90)$$

Na sequência serão apresentados dois casos em que foram realizadas simulações computacionais utilizando o *software* MATLAB, e como base, o programa de otimização estrutural dado no trabalho de SIGMUND (2001) e o cálculo dos índices de confiabilidade dados no trabalho de KHARMANDA et al. (2004).

Para a simulação dos problemas apresentados nos casos 1 e 2, de otimização topológica baseado em confiabilidade, foram considerados os índices de confiabilidade alvo como  $\beta_t = 1,2,3,4,5,6$  e também quando a confiabilidade não é considerada. Para ambos os casos utilizou-se 60x24 elementos finitos, com 50% do volume e força pontual  $f_p = -1j$ , localizada no canto inferior direito da viga (caso 1), como indicada na Figura 10(a) por  $f_p$  e uma força aplicada no meio da sua extremidade livre, como indicado na Figura 12(a) por  $f_p$ .

Na tabela 2 serão fornecidas as sensibilidades calculadas de todos os valores médios propostos, são eles:  $m_{f_p}$  a força,  $m_{nelx}$  a quantidade de elementos na direção horizontal,  $m_{nely}$  a quantidade de elementos em na direção vertical e  $m_{vol}$  o volume. Pode-se perceber, pela tabela dos gradientes, que as variáveis médias  $m_{nely}$  e  $m_{vol}$  são negativas, assim vê-se que o número de elementos na direção vertical e a fração de volume têm uma influência positiva no desempenho estrutural (ao aumentar estes dois valores, obtemos uma estrutura mais rígida). No entanto, os gradientes com relação aos valores médios  $m_F$  e  $m_{nelx}$  são positivos, logo, aumentando esses valores, se

aumenta o valor da função de custo (aumentando a flexibilidade da estrutura).

Caso	1	2
$\partial J / \partial m_{f_p}$	248,55	237,19
$\partial J / \partial m_{nelx}$	4,9188	4,7618
$\partial J / \partial m_{nely}$	-11,6678	-10,71055
$\partial J / \partial m_{vol}$	-256,14	-254,88

Tabela 2: Sensibilidades do desempenho estrutural com respeito às configurações propostas.

### 3.5.1 Caso 1

A estrutura utilizada na simulação para este caso foi uma viga como apresentado na figura 10(a).

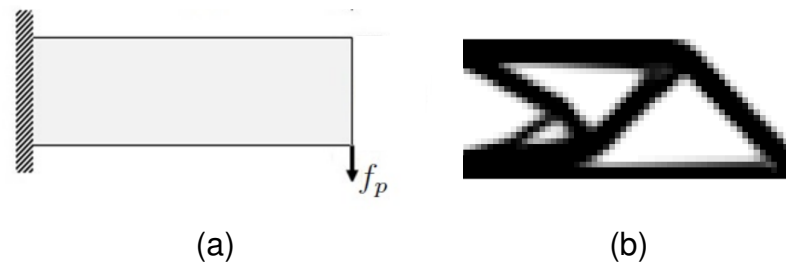


Figura 10: (a) Viga em balanço sujeita à carga pontual  $f_p$  no canto inferior direito. (b) Topologia ótima determinística correspondente ao esquema (a) onde se utilizou 60x24 elementos finitos com 50% do volume e força  $f_p = -1j$ .

Na figura 11 são apresentadas as seis topologias otimizadas com confiabilidade, onde percebe-se que para cada índice, há uma configuração final diferente.

Para o caso 1, os valores de saída das variáveis aleatórias  $y$ , após atualização com índice de confiabilidade  $\beta_t = 3$  e desvio padrão  $\sigma = 0,1m_{y_j}$ , obtidos pela equação (90), para cada componente do vetor  $y$ , são: força  $F = -1,14$ , número de elementos na direção  $x = 69$ , número de elementos na direção  $y = 20$  e fração de volume igual a 42,93%. A energia de deformação deste caso para  $\beta_t = 3$  foi aproximadamente 421 e no caso determinístico foi aproximadamente 124.

### 3.5.2 Caso 2

A estrutura utilizada na simulação para este caso está representada na figura 12(a).

Na figura 13 são apresentadas as topologias otimizadas com confiabilidade, onde percebe-se que para cada índice, há uma configuração final diferente.

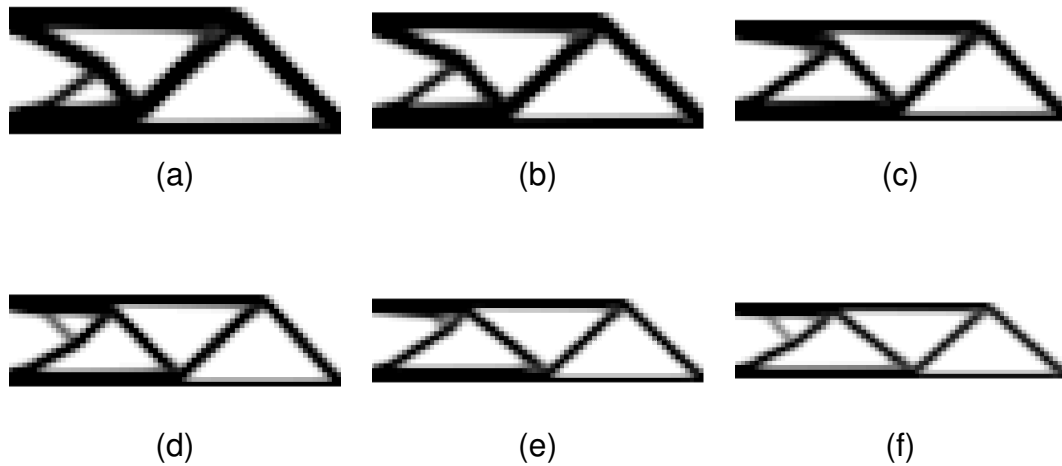


Figura 11: Resultados topológicos para diferentes índices de confiabilidade: (a)  $\beta = 1$ , (b)  $\beta = 2$ , (c)  $\beta = 3$ , (d)  $\beta = 4$ , (e)  $\beta = 5$  e (f)  $\beta = 6$  para o caso 1.

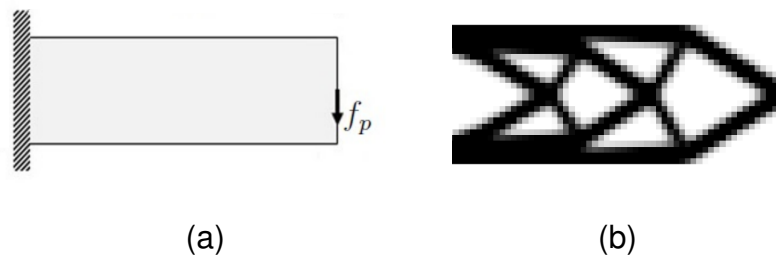


Figura 12: (a) Viga em balanço sujeita à carga pontual  $f_p$  aplicada no meio da sua extremidade livre. (b) Topologia ótima determinística correspondente ao esquema (a) onde se utilizou 60x24 elementos finitos com 50% do volume e força  $f_p = -1j$ .

### 3.5.3 Análise dos resultados e discussões

Pode-se observar pelas Figuras 11 e 13 que à medida que o valor do índice de confiabilidade  $\beta_i$  aumenta, as estruturas vão se tornando mais leves, porém a força que é imposta sobre as estruturas é aumentada, assim, suportando forças maiores em relação à otimização puramente determinística. Consequentemente, essas novas estruturas são geradas com custo de energia de deformação maior.

Em geral, uma topologia otimizada com robustez não é apropriada para uso na indústria. Então, precisa ser pós-processada usando otimização de forma. Além disso, as formas resultantes diferentes das topologias baseadas em confiabilidade, podem ser facilmente identificadas analisando as figuras 10(b) em comparação com a figura da tabela 11(c) e 11(d) e a figura 12(b) comparando com as figuras 13(c).

O modelo RBTO proposto tem como objetivo considerar aleatoriedade das quanti-

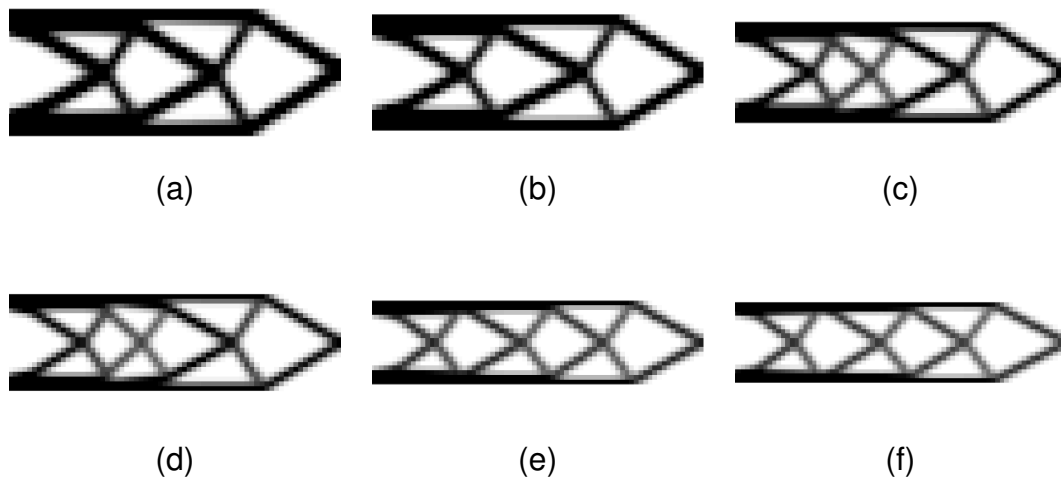


Figura 13: Resultados topológicos para diferentes índices de confiabilidade: (a)  $\beta = 1$ , (b)  $\beta = 2$ , (c)  $\beta = 3$ , (d)  $\beta = 4$ , (e)  $\beta = 5$  e (f)  $\beta = 6$  para o caso 2.

dades mais importantes de uma estrutura, como a geometria e as cargas aplicadas. A importância do modelo RBTO é reduzir o volume das estruturas sob as mesmas condições. Essa redução de volume se manifesta em otimização determinística do projeto, bem como na otimização de forma baseada em confiabilidade. A primeira vantagem do modelo RBTO é que as topologias ótimas resultantes são mais confiáveis que as topologias determinísticas para o mesmo peso da estrutura (mas associadas a maiores valores de flexibilidade). A segunda vantagem é que o RBTO apresenta uma nova estratégia para gerar diferentes topologias sujeitas a diferentes níveis de confiabilidade alvo. Também é possível implementar novas funções de estado limite para ter em conta a aleatoriedade de flexibilidade, densidades e dimensões dos elementos.

## 4 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA SIMULTÂNEA À DISTRIBUIÇÃO DE ATUADORES PIEZOELÉTRICOS

Neste capítulo são abordados fundamentos da piezoelectricidade no que diz respeito aos aspectos teóricos. A seção 4.1 apresenta um breve histórico da piezoelectricidade mostrando as origens e aplicações no meio científico. As propriedades dos materiais piezoelétricos serão revisadas na seção 4.2. As equações constitutivas piezoelétricas e a descrição dos tensores são dadas nas seções 4.3 e 4.4, respectivamente. Os materiais são considerados transversalmente isotrópicos, onde a quantidade de parâmetros a serem considerados diminuem significativamente.

A partir da seção 4.5, as seções tratarão da formulação do problema de otimização topológica com distribuição de atuadores piezoelétricos nas estruturas e da solução deste problema. O problema será discretizado utilizando o MEF. Na busca de uma topologia ótima da estrutura e posição ótima para atuadores piezoelétricos, será considerada a estratégia de otimização do Critério Ótimo (OC) e simulados dois casos que ilustram a metodologia utilizada.

### 4.1 Introdução

A primeira publicação científica descrevendo o fenômeno, mais tarde denominado como piezoelectricidade, apareceu em 1880. Foi uma co-autoria de Pierre e Jacques Curie, que estavam conduzindo experimentos em uma variedade de cristais. Nestes experimentos, eles catalogaram um número de cristais, tais como a turmalina, o quartzo, o topaz, o açúcar de cana e o sal de Rochelle, que exibiam cargas superficiais quando estavam mecanicamente tensionados (MOHEIMANI; FLEMING, 2006). Esta teoria foi então complementada pelos trabalhos de G. Lippman<sup>1</sup>, W. G. Hankel<sup>2</sup>, Lord Kelvin e W. Voigt no início do século XX (PIEFORT, 2001).

Na comunidade científica da época, esta observação foi considerada como uma descoberta significativa, e o termo piezoelectricidade surgiu para expressar este efeito.

---

<sup>1</sup> Responsável pela dedução matemática do efeito piezoelétrico inverso, confirmado experimentalmente pelos irmãos Curie em 1881.

<sup>2</sup> Introduziu o termo piezoelectricidade.



Em virtude da palavra grega *piezo* significar pressionar (ou prensar, ou apertar), piezoeletricidade vem a transmitir a ideia de eletricidade gerada a partir da pressão. Esta terminologia ajudou a distinguir piezoeletricidade de outros fenômenos de interesses relacionados na época.

De acordo com PIEFORT (2001), a primeira aplicação séria para materiais piezoelétricos apareceu durante a Primeira Guerra Mundial, na construção de um detector submarino ultrassônico cujo trabalho é creditado a Paul Langevin e seus colegas na França. O dispositivo foi utilizado para transmitir um sinal de alta frequência dentro da água e medir a profundidade cronometrando o eco de retorno. A invenção deles, contudo, não estava aperfeiçoada até o final da guerra.

Após o seu uso bem-sucedido em transdutores de sonar, cristais piezoelétricos foram empregados em muitas aplicações como microfones, acelerômetros e transdutores ultrassônicos. O desenvolvimento de materiais piezocerâmicos durante e depois da Segunda Guerra Mundial revolucionou este campo. Pesquisas significantes foram realizadas nos Estados Unidos e em outros países tais como o Japão e a antiga União Soviética que tinham como objetivo o desenvolvimento de materiais com constantes dielétricas muito altas para a construção de capacitores. Materiais piezocerâmicos foram descobertos a partir do resultado destas atividades e um número considerável de métodos foram concebidos para a sua produção em larga escala.

Introduzido o conceito de piezoeletricidade e os fatos históricos que explicam seu surgimento e sua aplicabilidade, obtidos em MOHEIMANI; FLEMING (2006), a próxima seção tem como objetivo explicar, como certas cerâmicas são preparadas a fim de que o efeito piezoelétrico presente nelas alcance maior magnitude, uma vez que esse efeito é muito pequeno em materiais naturais, levando, assim, ao desenvolvimento de materiais com propriedades melhoradas.

## 4.2 Materiais piezoelétricos

Numa cerâmica piezoelétrica, a direção da polarização entre domínios adjacentes é aleatória e a cerâmica não tem polarização global, como mostra a Figura 14(a). Para que os domínios fiquem alinhados, como mostra a Figura 14(b), esta é exposta a um forte campo elétrico contínuo, geralmente abaixo de uma temperatura denominada “temperatura de Curie”. Após este tratamento, chamado de polarização, os domínios quase alinhados com o campo expandem-se e o elemento cerâmico dilata-se na direção do campo. O campo elétrico é então removido e a maioria dos dipolos estão presos em uma configuração próxima do alinhamento (Figura 14(c)). A cerâmica tem agora, permanentemente, uma polarização e forma alongada. Esse aumento no comprimento da cerâmica é muito pequeno, geralmente dentro da faixa de micrômetros (MOHEIMANI; FLEMING, 2006).

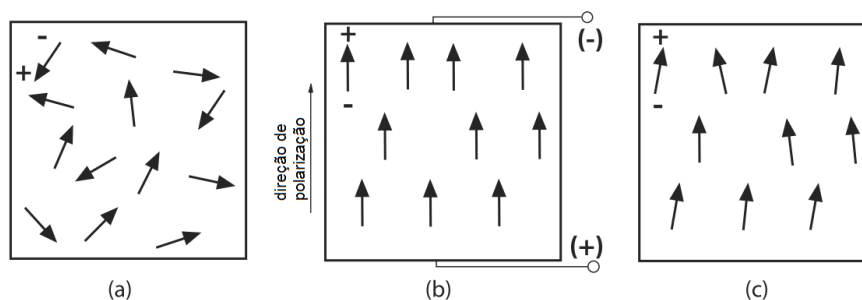


Figura 14: Esquema ilustrativo para o processo de polarização de cerâmicas. Fonte: Adaptado de MOHEIMANI; FLEMING (2006), p. 12.

As reações de uma cerâmica piezoelétrica polarizada aos estímulos nela aplicados podem ser explicadas, de acordo com MOHEIMANI; FLEMING (2006), pela Figura 15. Quando a cerâmica converte energia mecânica de compressão ou tração em energia elétrica, o dispositivo pode ser utilizado como um sensor e o efeito piezoelétrico é dito ser direto. A compressão ao longo da direção de polarização gera um diferencial de potencial elétrico com a mesma polaridade que a tensão de polarização (Figura 15(b)). Já a tração ao longo da direção de polarização gera uma mudança de potencial elétrico com sentido oposto ao da tensão de polarização (Figura 15(c)).

A cerâmica piezoelétrica pode ser utilizada como um atuador quando a energia elétrica é convertida em energia mecânica, caracterizando o efeito piezoelétrico inverso. Se um diferencial de potencial elétrico de mesma polaridade que a tensão de polarização é aplicado a um elemento cerâmico, na direção da tensão de polarização, o elemento irá alongar e seu diâmetro vai tornar-se menor (Figura 15(d)). Se um diferencial de potencial elétrico de polaridade oposta à da tensão de polarização é aplicada, a cerâmica vai se tornar mais curta e mais larga (Figura 15(e)). Pode ser observado, inclusive, movimentos de expansão e contração de forma cíclica quando um diferencial de potencial elétrico alternado é aplicado ao dispositivo piezoelétrico.

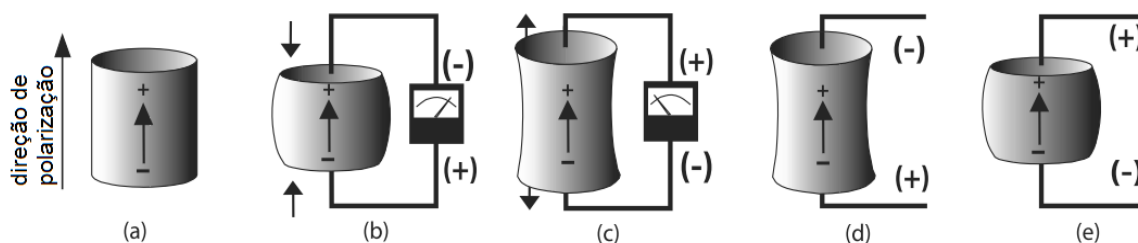


Figura 15: Reação de uma cerâmica piezoelétrica a diferentes estímulos. Fonte: Adaptado de MOHEIMANI; FLEMING (2006), p. 13.

### 4.3 Equações constitutivas

Nesta seção, as equações que descrevem as propriedades eletromecânicas dos materiais piezoelétricos, tais como as cerâmicas citadas anteriormente, serão introduzidas com base no *IEEE<sup>3</sup> Standard on Piezoelectricity* (IEEE STANDARD ON PIEZOELECTRICITY, 1988) que é amplamente aceito como sendo uma boa representação das propriedades destes materiais.

Salienta-se que o padrão IEEE assume que os materiais piezoelétricos apresentam comportamento linear. Sabe-se que sob baixos campos elétricos e baixos níveis de tensão mecânica os materiais piezoelétricos têm, de fato, comportamento linear. Contudo, eles podem apresentar considerável não linearidade se operados sob um alto campo elétrico ou alto nível de tensão mecânica. Para a maioria dos casos, inclusive para aqueles discutidos nesta dissertação, assume-se que os transdutores piezoelétricos estão sendo operados sob baixos níveis de campo elétrico e sob baixa tensão mecânica (IEEE STANDARD ON PIEZOELECTRICITY, 1988).

As equações constitutivas que descrevem a propriedade piezoelétrica são baseadas na hipótese que a deformação total no transdutor é a soma da deformação mecânica induzida pela tensão mecânica e a deformação de atuação controlável causada pela voltagem elétrica aplicada.

Nas relações abaixo apresentadas, as variáveis tensão mecânica ( $T$ ) e campo elétrico ( $E$ ) são denominadas forças a serem aplicadas nas cerâmicas piezoelétricas e a deformação mecânica ( $S$ ) e o deslocamento elétrico ( $D$ ) são os resultados diretos da aplicação dessas forças. Assim, pode-se obter uma formulação mista onde as variáveis independentes são  $E$  e  $S$  e as variáveis dependentes são  $T$  e  $D$ , relacionadas pelas equações constitutivas dadas por:

$$T_{ij} = c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k, \quad (91)$$

$$D_i = e_{ikl} S_{kl} + \epsilon_{ik}^S E_k, \quad (92)$$

onde  $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$  e utiliza-se a notação de Einstein para a soma por índices repetidos em um produto;  $T_{ij}$  são componentes do tensor de tensões mecânicas,  $S_{kl}$  são componentes do tensor de deformações mecânicas,  $D_i$  são componentes do vetor de deslocamento elétrico,  $E_k$  são componentes do vetor de campo elétrico,  $c_{ijkl}^E$  são componentes do tensor de rigidez elástica medidas sob campo elétrico constante,  $\epsilon_{ik}^S$  são componentes do tensor de propriedades dielétricas medidas sob deformação constante e  $e_{ikl}$  são componentes do tensor de propriedades piezoelétricas.

---

<sup>3</sup>Sigla para *Institute of Electrical and Electronics Engineers*. Trata-se de uma organização profissional sem fins lucrativos cuja meta é promover conhecimento no campo da engenharia elétrica, eletrônica e computação. Um de seus papéis mais importantes é o estabelecimento de padrões para formatos de computadores e dispositivos; daí a origem de suas publicações técnicas, de seus próprios periódicos, padrões e textos de membros.

As componentes do tensor de deformação  $S_{kl}$  são definidas como

$$S_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}), \quad (93)$$

onde  $u_l$  é a componente  $l$  do vetor  $u$  de deslocamentos mecânicos,  $u_{k,l} = \partial u_k / \partial x_l$  e  $x_l$  é o eixo  $l$  do sistema de coordenadas retangulares empregado.

O campo elétrico, dentro do meio piezoelétrico, é derivado de um potencial elétrico escalar, descrito pela seguinte equação:

$$E_k = -\phi_{,k}, \quad (94)$$

onde  $\phi$  é o potencial elétrico escalar e  $\phi_{,k} = \partial \phi / \partial x_k$ . O vetor de deslocamento elétrico, por sua vez, satisfaz a equação de equilíbrio eletrostático sem cargas livres, ou seja, tem-se que

$$D_{i,i} = 0. \quad (95)$$

A equação de movimento, sem considerar forças volumétricas, pode ser escrita como:

$$T_{ij,i} = \bar{\rho} \ddot{u}_j, \quad (96)$$

onde  $\bar{\rho}$  representa a densidade de massa do material e  $\ddot{u}_j = \partial^2 u_j / \partial t^2$ , sendo  $t$  o tempo.

O efeito piezoelétrico ainda pode ser descrito por outros três pares de equações de modo que dentre as variáveis  $E$ ,  $D$ ,  $S$  e  $T$ , independente da escolha de representação, duas delas serão independentes e as outras duas dependentes, desde que as variáveis independentes sejam tomadas de modo que uma seja de natureza mecânica ( $S$  ou  $T$ ) e a outra de natureza elétrica ( $E$  ou  $D$ ). Tais pares de equações são formas alternativas das equações constitutivas (91) e (92) (IEEE STANDARD ON PIEZOELECTRICITY, 1988).

A notação tensorial utilizada nas equações constitutivas da piezoeletricidade dadas por (91) e (92) pode ser apresentada de forma mais compacta, através das seguintes equações:

$$T = c^E : S - e^T \cdot E, \quad (97)$$

$$D = e : S + \epsilon^S \cdot E, \quad (98)$$

$e^T$  denota o tensor de terceira ordem proveniente da transposição do tensor  $e$ .

#### 4.4 Descrição dos tensores de material

As grandezas envolvidas nas equações (97) e (98) admitem uma redução de índices a fim de que possam ser representadas por vetores e matrizes. Tal redução

é aplicada com o intuito de facilitar o tratamento destas equações, dada a natureza tensorial das mesmas, e é feita mediante a equivalência entre as notações tensorial e reduzida, conforme Tabela 3.

Tabela 3: Equivalência entre as notações tensorial e reduzida.

$ij$ ou $kl$	$p$ ou $q$
11	1
22	2
33	3
23 ou 32	4
31 ou 13	5
12 ou 21	6

Mais especificamente, a notação reduzida consiste em substituir os índices  $ij$  e  $kl$  das equações (91) e (92) por  $p$  e  $q$ , onde  $i, j, k$  e  $l$  assumem os valores 1, 2 e 3, e os índices  $p$  e  $q$  assumem os valores 1, 2, 3, 4, 5 e 6, observando o disposto na Tabela 3.

Assim, a forma matricial das equações (97) e (98) é dada, respectivamente, por:

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & c_{14}^E & c_{15}^E & c_{16}^E \\ c_{21}^E & c_{22}^E & c_{23}^E & c_{24}^E & c_{25}^E & c_{26}^E \\ c_{31}^E & c_{32}^E & c_{33}^E & c_{34}^E & c_{35}^E & c_{36}^E \\ c_{41}^E & c_{42}^E & c_{43}^E & c_{44}^E & c_{45}^E & c_{46}^E \\ c_{51}^E & c_{52}^E & c_{53}^E & c_{54}^E & c_{55}^E & c_{56}^E \\ c_{61}^E & c_{62}^E & c_{63}^E & c_{64}^E & c_{65}^E & c_{66}^E \end{bmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \\ e_{14} & e_{24} & e_{34} \\ e_{15} & e_{25} & e_{35} \\ e_{16} & e_{26} & e_{36} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (99)$$

e

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^S & \epsilon_{12}^S & \epsilon_{13}^S \\ \epsilon_{21}^S & \epsilon_{22}^S & \epsilon_{23}^S \\ \epsilon_{31}^S & \epsilon_{32}^S & \epsilon_{33}^S \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}. \quad (100)$$

Muitas das componentes dos tensores de propriedades das equações acima são nulas ou podem ser escritas em função de outras componentes, dependendo da simetria do material. Nesta dissertação, serão considerados os materiais de classe de simetria hexagonal da família  $6mm$ , tais como os diversos tipos de titanato-zirconato

de chumbo (PZT), com direção de polarização no eixo  $z$  (IEEE STANDARD ON PIEZOELECTRICITY, 1988).

Os materiais piezoelétricos são, pelo menos, transversalmente isotrópicos. Para os materiais das classes hexagonais com anisotropia na direção 3 e, considerando os efeitos da simetria, é possível reduzir as 21 propriedades do tensor elástico, as 18 propriedades do tensor piezoelétrico e as 9 propriedades do tensor dielétrico para, 5, 3 e 2 propriedades, respectivamente. Deste modo, os tensores de propriedades elásticas  $c^E$ , de propriedades piezoelétricas  $e$  e de propriedades dielétricas  $\epsilon^S$  são dados, respectivamente, por:

$$c^E = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E \end{bmatrix}, \quad (101)$$

com  $c_{66}^E = \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E)$ ;

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (102)$$

e

$$\epsilon^S = \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11}^S & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^S \end{bmatrix}. \quad (103)$$

Os valores das propriedades elásticas, piezoelétricas e dielétricas dependem do material piezoelétrico empregado.

## 4.5 Modelagem matemática do problema de otimização

Considere o clássico problema de minimização da flexibilidade em elasticidade linear. Seja  $\Omega$  um domínio aberto e conexo com uma fronteira lipschitziana  $\Gamma$ . A fronteira  $\Gamma$ , para a parte elástica, é dividida em duas partes,  $\Gamma_t$  e  $\Gamma_u$ , referentes às fronteiras onde serão aplicadas as forças de superfície e especificados os deslocamentos, respectivamente. Outra divisão da fronteira  $\Gamma$  é considerada para a parte elétrica do problema com  $\Gamma_\phi$  e  $\Gamma_q$ , onde  $\Gamma_\phi$  é a fronteira para especificação do potencial elétrico e  $\Gamma_q$  a fronteira onde serão aplicadas as cargas elétricas. O problema pode então ser formulado pela obtenção de um valor estacionário do funcional  $l(u, \phi)$  sobre o conjunto

$\Upsilon$ , pois a energia potencial é convexa em  $u$  e côncava em  $\phi$ . Assim, o problema é dado por:

$$\begin{aligned} & \text{est} \\ & (u, \phi, \rho_u, \rho_\phi) \in \Upsilon \quad l(u, \phi), \\ & \text{s. a: } a(u, \phi, u_v, \phi_v, \rho_u, \rho_\phi) - l(u_v, \phi_v) = 0 \quad \forall u_v \in \mathcal{U}, \forall \phi_v \in \Phi, \end{aligned} \quad (104)$$

onde  $\Upsilon = \mathcal{U} \times \Phi \times \mathcal{B}_u \times \mathcal{B}_\phi$ ,

$$\mathcal{B}_u = \left\{ \rho_u(x) \text{ mensurável} : 0 < \rho_{u_{\min}} \leq \rho_u(x) \leq 1 \text{ em } \Omega \text{ e } \int_{\Omega} \rho_u(x) d\Omega = \eta_u V \right\},$$

$$\mathcal{B}_\phi = \left\{ \rho_\phi(x) \text{ mensurável} : 0 < \rho_{\phi_{\min}} \leq \rho_\phi(x) \leq 1 \text{ em } \Omega \text{ e } \int_{\Omega} \rho_\phi(x) d\Omega = \eta_\phi V \right\},$$

onde  $\mathcal{U}$  é o espaço dos deslocamentos cineticamente admissíveis e  $\Phi$  é o espaço dos potenciais elétricos cineticamente admissíveis.

O funcional de custo

$$l(u, \phi) = \int_{\Omega} f \cdot u d\Omega + \int_{\Gamma_t} t \cdot u d\Gamma - \int_{\Gamma_\phi} f_\phi \phi d\Gamma + f_p(u) - q_p(\phi) \quad (105)$$

representa o trabalho das forças externas com  $u$  sendo o vetor de deslocamentos mecânicos e  $\phi$  o potencial elétrico. Em (105),  $f$  é o vetor das forças de corpo,  $t$  é o vetor das forças de superfície e  $f_\phi \in L^2(\Gamma_\phi)$  é o vetor das cargas elétricas de superfície, onde  $L^2(\Gamma_\phi)$  é o espaço das funções reais cujo domínio é  $\Gamma_\phi$  e cujo quadrado é finito-integrável. O trabalho das forças concentradas e o trabalho das cargas elétricas concentradas são dados, respectivamente, por

$$f_p(u) = \sum_{j=1}^k f_{p_j} \cdot u(x_j), \quad (106)$$

onde  $f_{p_j} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\forall j \in \{1, \dots, k\}$  e

$$q_p(\phi) = \sum_{l=1}^m q_{p_l} \phi(x_l), \quad (107)$$

onde  $q_{p_l} \in \mathbb{R}$ ,  $\forall l \in \{1, \dots, m\}$ ,  $x_j$  e  $x_l$  denotam os pontos do domínio onde há força e carga elétrica concentrada. Note também que  $\rho_{u_{\min}}$  e  $\rho_{\phi_{\min}}$  dizem respeito às densidades mínimas relativas às variáveis de projeto estrutural de material não piezoelétrico e de material piezoelétrico, respectivamente. Ademais, na restrição de igualdade do

problema (104), tem-se que

$$\begin{aligned}
 a(u, \phi, u_v, \phi_v, \rho_u, \rho_\phi) = & \int_{\Omega} S(u) : c^E(\rho_u, \rho_\phi) : S(u_v) d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} S(u) : e^T(\rho_u, \rho_\phi) \cdot E(\phi_v) d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} E(\phi) \cdot e(\rho_u, \rho_\phi) : S(u_v) d\Omega \\
 & - \int_{\Omega} E(\phi) \cdot \epsilon^S(\rho_u, \rho_\phi) \cdot E(\phi_v) d\Omega
 \end{aligned} \tag{108}$$

representa o trabalho virtual das forças internas com  $S$  e  $E$  na forma como foram definidos em (93) e (94).  $V$  é o volume total do domínio  $\Omega$ ,  $\eta_u$  e  $\eta_\phi$  são frações que, ao serem consideradas no problema, impõem restrições quanto ao uso de material de densidade  $\rho_u$  e  $\rho_\phi$ , respectivamente.

O modelo material para otimização topológica inclui dois materiais de densidades distintas: um material elástico isotrópico e um material piezoelétrico, além do vazio. O modelo (CARBONARI; SILVA; NISHIWAKI, 2007) é dado por

$$c^E(\rho_u, \rho_\phi) = \rho_u(x)^{p_1} (\rho_\phi(x)^{p_2} c_\phi^E + (1 - \rho_\phi(x)^{p_2}) c_u^E), \tag{109}$$

$$e(\rho_u, \rho_\phi) = \rho_u(x)^{p_1} \rho_\phi(x)^{p_3} e_\phi, \tag{110}$$

$$\epsilon^S(\rho_u, \rho_\phi) = \rho_u(x)^{p_1} \rho_\phi(x)^{p_3} \epsilon_\phi^S, \tag{111}$$

onde  $c^E(\rho_u, \rho_\phi)$ ,  $e(\rho_u, \rho_\phi)$  e  $\epsilon^S(\rho_u, \rho_\phi)$  definem as propriedades resultantes da combinação dos materiais conforme indicado nas equações acima;  $e^T(\rho_u, \rho_\phi)$ , em (108), denota  $e(\rho_u, \rho_\phi)$  transposto. As matrizes  $c_\phi^E$  e  $c_u^E$  definem as propriedades elásticas do material piezoelétrico e do material não piezoelétrico, enquanto que as matrizes  $e_\phi$  e  $\epsilon_\phi^S$  definem as propriedades piezoelétricas (ou propriedades de acoplamento eletromecânico) e dielétricas do material piezoelétrico, respectivamente. O material piezoelétrico é polarizado na direção  $z$  e a expansão ou compressão do material é considerada na direção  $x$ . Mais precisamente, em uma estrutura tridimensional, os eletrodos estão na frente e atrás da estrutura, como mostra a Figura 16.



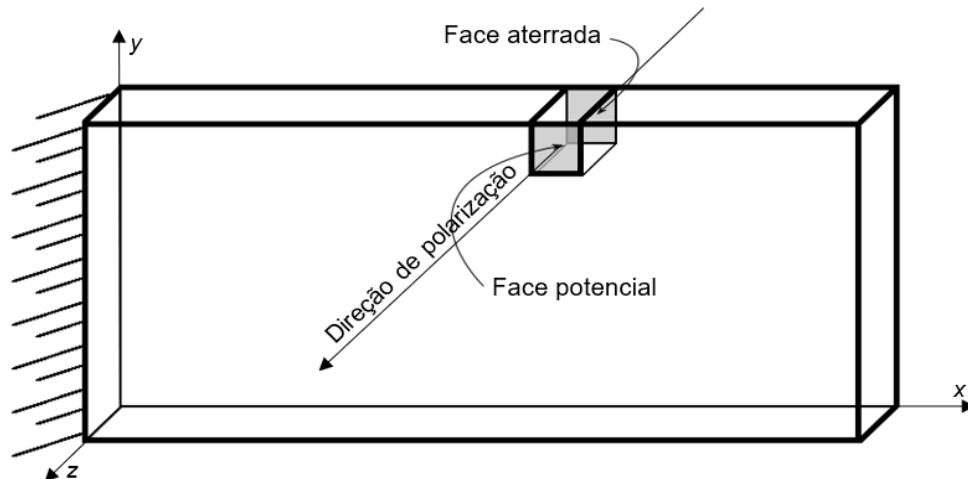


Figura 16: Estrutura tridimensional onde se representa a direção de polarização em um material piezoelétrico.

Note, analisando as equações (109), (110) e (111), que o material elástico isotrópico é obtido quando  $\rho_u = 1$  e  $\rho_\phi = 0$ , o material piezoelétrico é obtido quando  $\rho_u = \rho_\phi = 1$ , e o vazio é obtido quando  $\rho_u = \rho_\phi = 0$ . As constantes  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$  são expoentes de penalização.

Assim, modelou-se matematicamente o problema. Na busca por soluções, objetiva-se, portanto, obter duas respostas: a topologia ótima condizente com as restrições de suporte e de carregamento mecânicos e elétricos e a melhor localização para atuadores nesta topologia. Para este fim, considerar-se-á:

- a formulação variacional do problema;
- a discretização da função objetivo e de suas restrições;
- a análise de sensibilidades do problema discretizado;
- a estratégia de otimização OC.

A distribuição destes materiais na estrutura objetiva principalmente posicionar atuadores, para posteriormente utilizá-los no controle de vibrações. No entanto, este trabalho se restringe ao posicionamento ótimo dos atuadores piezoelétricos em função da energia de deformação das estruturas.

## 4.6 Formulação variacional para problemas envolvendo materiais piezoelétricos

Nesta seção, uma formulação variacional para um corpo piezoelétrico é apresentada e o Princípio de Hamilton (TZOU; TSENG, 1990) é aplicado, a fim de obter uma

expressão variacional para o problema que se deseja resolver. Para tanto, utilizar-se-á as já conhecidas equações constitutivas do efeito piezoelétrico dadas por (MOHEI-MANI; FLEMING, 2006).

A densidade de energia potencial de um material piezoelétrico inclui contribuições da densidade de energia de deformação e da densidade de energia eletrostática, ou seja, contribuições provenientes dos deslocamentos mecânicos e dos potenciais elétricos (TIERSTEN, 1967). Segundo o Princípio de Hamilton, os deslocamentos mecânicos e potenciais elétricos que realmente ocorrem no problema são aqueles que satisfazem a equação:

$$\delta \int_{t_0}^{t_f} (\mathcal{L}_H + \mathcal{W}) dt = 0, \quad (112)$$

onde  $t_0$  e  $t_f$  definem o intervalo de tempo,  $\mathcal{L}_H$  é o Lagrangeano e  $\mathcal{W}$  é o trabalho virtual das forças mecânicas externas e cargas elétricas aplicadas (PIEFORT, 2001).

O Lagrangeano é dado, conforme Piefort (2001), por

$$\mathcal{L}_H = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \bar{\rho} \dot{u}^T \dot{u} - \mathcal{H} \right) d\Omega, \quad (113)$$

onde  $\mathcal{H}$  é a entalpia elétrica,  $u$  o vetor de deslocamentos mecânicos e  $\dot{u} = \partial u / \partial t$ . Contudo, considera-se neste trabalho um problema piezoelétrico estático, ou seja, os deslocamentos  $u$  não dependem do tempo  $t$ . Sendo assim, a equação (113) assume a forma

$$\mathcal{L}_H = \int_{\Omega} (-\mathcal{H}) d\Omega. \quad (114)$$

A entalpia elétrica  $\mathcal{H}$  é dada por

$$\mathcal{H} = \mathcal{P} - E \cdot D, \quad (115)$$

onde  $\mathcal{P}$  denota a energia potencial do sistema e é dada na forma

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} S : T + \frac{1}{2} E \cdot D. \quad (116)$$

Substituindo a equação (116) na equação (115) e esta última na forma do Lagrangeano (114), obtém-se

$$\mathcal{L}_H = \int_{\Omega} \left( -\frac{1}{2} S : T + \frac{1}{2} E \cdot D \right) d\Omega, \quad (117)$$

de onde segue, pela substituição das equações (97) e (98), que

$$\mathcal{L}_H = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (-S : c^E : S + S : e^T \cdot E + E \cdot e : S + E \cdot \epsilon^S \cdot E) d\Omega. \quad (118)$$

Obtida a expressão para o Lagrangeano  $\mathcal{L}_H$ , falta expressar o trabalho virtual  $\mathcal{W}$

devido às forças mecânicas externas e às cargas elétricas aplicadas. Esta medida é dada por

$$\mathcal{W} = \int_{\Omega} f \cdot u d\Omega + \int_{\Gamma_t} t \cdot u d\Gamma - \int_{\Gamma_{\phi}} f_{\phi} \phi d\Gamma + f_p(u) - q_p(\phi). \quad (119)$$

Substituindo as equações (118) e (119) no Princípio de Hamilton (112), obtém-se

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_0}^{t_f} \left( \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left( -S : c^E : S + S : e^T \cdot E + E \cdot e : S + E \cdot \epsilon^S \cdot E \right) d\Omega \right. \\ \left. + \int_{\Omega} f \cdot u d\Omega + \int_{\Gamma_t} t \cdot u d\Gamma - \int_{\Gamma_{\phi}} f_{\phi} \phi d\Gamma + f_p(u) - q_p(\phi) \right) dt = 0, \end{aligned} \quad (120)$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} \delta \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left( -S : c^E : S + S : e^T \cdot E + E \cdot e : S + E \cdot \epsilon^S \cdot E \right) d\Omega \\ + \delta \left( \int_{\Omega} f_i u_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i u_i d\Gamma - \int_{\Gamma_{\phi}} f_{\phi} \phi d\Gamma + f_p(u) - q_p(\phi) \right) = 0. \end{aligned} \quad (121)$$

Note que

$$\begin{aligned} \delta \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left( -S : c^E : S + S : e^T \cdot E + E \cdot e : S + E \cdot \epsilon^S \cdot E \right) d\Omega \\ = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left( -\delta S : c^E : S - S : c^E : \delta S + \delta S : e^T \cdot E + S : e^T \cdot \delta E + \delta E \cdot e : S \right. \\ \left. + E \cdot e : \delta S + \delta E \cdot \epsilon^S \cdot E + E \cdot \epsilon^S \cdot \delta E \right) d\Omega \\ = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left( -2\delta S : c^E : S + 2\delta S : e^T \cdot E + 2\delta E \cdot e : S + 2\delta E \cdot \epsilon^S \cdot E \right) d\Omega \\ = \int_{\Omega} \left( -\delta S : c^E : S + \delta S : e^T \cdot E + \delta E \cdot e : S + \delta E \cdot \epsilon^S \cdot E \right) d\Omega \end{aligned} \quad (122)$$

e também que

$$\begin{aligned} \delta \left( \int_{\Omega} f \cdot u d\Omega + \int_{\Gamma_t} t \cdot u d\Gamma - \int_{\Gamma_{\phi}} f_{\phi} \phi d\Gamma + f_p(u) - q_p(\phi) \right) \\ = \int_{\Omega} \delta f \cdot u d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta t \cdot u d\Gamma - \int_{\Gamma_{\phi}} \delta f_{\phi} \phi d\Gamma + f_p(\delta u) - q_p(\delta \phi). \end{aligned} \quad (123)$$

Assim, substituindo os resultados de (122) e (123) em (121), obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( -\delta S : c^E : S + \delta S : e^T \cdot E + \delta E \cdot e : S + \delta E \cdot \epsilon^S \cdot E \right) d\Omega \\ + \int_{\Omega} \delta f \cdot u d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta t \cdot u d\Gamma - \int_{\Gamma_{\phi}} \delta f_{\phi} \phi d\Gamma + f_p(\delta u) - q_p(\delta \phi) = 0. \end{aligned} \quad (124)$$

#### 4.7 Discretização do problema de otimização via MEF

Na discretização a ser desenvolvida, assume-se a hipótese do estado plano de tensões mecânicas, permitindo o tratamento bidimensional do problema de otimização topológica simultânea à localização de atuadores piezoelétricos, e considera-se o elemento isoparamétrico bilinear, também chamado de elemento Q4. Como as discretizações são feitas sob domínios retangulares, a malha de elementos finitos é formada também por elementos retangulares, não sendo necessária a abordagem que trata da transformação geométrica das coordenadas naturais para as coordenadas físicas, como geralmente é explicado na teoria de elementos finitos.

O deslocamento  $u^e$  e o potencial elétrico  $\phi^e$ , para cada elemento finito  $\Omega^e$ , é aproximado pelos deslocamentos e potenciais nodais,  $u_i^e$  e  $\phi_i^e$ , e por funções de interpolação. Para esta discretização, a parte mecânica já foi apresentada na seção 2.4, nas equações (42)-(46). Então serão aqui apresentadas, somente as discretizações referentes ao potencial e campo elétrico.

O potencial elétrico de um elemento finito é tal que

$$\phi_i^e = \sum_{j=1}^4 N_j \phi_j^e = \mathbf{N}_{\phi} \phi^e, \quad (125)$$

onde  $\phi^e$  representa o vetor de potenciais elétricos nodais de um elemento finito dado por

$$\phi^e = \begin{bmatrix} \phi_1^e & \phi_2^e & \phi_3^e & \phi_4^e \end{bmatrix}^T. \quad (126)$$

Além disso,

$$\mathbf{N}_{\phi} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \quad (127)$$

é a matriz das funções de interpolação para os potenciais elétricos com as funções de forma dadas por (44).

O campo elétrico  $\mathbf{E}^e$ , para cada elemento finito, pode ser escrito em função dos potenciais elétricos e das derivadas das funções de interpolação para os potenciais elétricos na forma

$$\mathbf{E}^e = -\mathcal{D}_{\phi} \mathbf{N}_{\phi} \phi^e = -\mathbf{B}_{\phi} \phi^e, \quad (128)$$

onde  $\mathcal{D}_\phi$  é um operador diferencial tal que

$$\mathbf{B}_\phi = \mathcal{D}_\phi \mathbf{N}_\phi = \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{bmatrix} \mathbf{N}_\phi. \quad (129)$$

Para obter a equação matricial referente ao problema de otimização, considere-se as equações (41), (45), (125) e (128) na equação (124), obtida pelo Princípio de Hamilton na formulação variacional do problema. Sendo assim, tem-se que

$$\begin{aligned} & -\delta \mathbf{u}^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T c^E \mathbf{B}_u d\Omega^e \mathbf{u}^e - \delta \mathbf{u}^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T e^T \mathbf{B}_\phi d\Omega^e \phi^e - \delta \phi^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_\phi^T e \mathbf{B}_u d\Omega^e \mathbf{u}^e \\ & + \delta \phi^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_\phi^T \epsilon^S \mathbf{B}_\phi d\Omega^e \phi^e + \delta \mathbf{u}^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}^e d\Omega^e + \delta \mathbf{u}^{eT} \int_{\Gamma_t^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{t}^e d\Gamma^e + \delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}_p^e \\ & - \delta \phi^{eT} \int_{\Gamma_\phi^e} \mathbf{N}_\phi^T \mathbf{f}_\phi^e d\Gamma^e - \delta \phi^{eT} \mathbf{N}_\phi^T \mathbf{q}_p^e = 0, \end{aligned} \quad (130)$$

onde  $\mathbf{f}_p^e$ ,  $\mathbf{f}_\phi^e$  e  $\mathbf{q}_p^e$  são os vetores de forças concentradas, de cargas elétricas de superfície e de cargas elétricas concentradas de um elemento finito, respectivamente.

Desta última igualdade, tem-se que

$$\begin{aligned} & -\delta \mathbf{u}^{eT} \left[ \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T c^E \mathbf{B}_u d\Omega^e \mathbf{u}^e + \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T e^T \mathbf{B}_\phi d\Omega^e \phi^e \right. \\ & \quad \left. - \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}^e d\Omega^e - \int_{\Gamma_t^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{t}^e d\Gamma^e - \mathbf{N}_u^{eT} \mathbf{f}_p^e \right] \\ & - \delta \phi^{eT} \left[ \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_\phi^T e \mathbf{B}_u d\Omega^e \mathbf{u}^e - \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_\phi^T \epsilon^S \mathbf{B}_\phi d\Omega^e \phi^e + \int_{\Gamma_\phi^e} \mathbf{N}_\phi^T \mathbf{f}_\phi^e d\Gamma^e + \mathbf{N}_\phi^T \mathbf{q}_p^e \right] = 0, \end{aligned} \quad (131)$$

de onde segue que

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T c^E \mathbf{B}_u d\Omega^e \mathbf{u}^e + \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T e^T \mathbf{B}_\phi d\Omega^e \phi^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}^e d\Omega^e + \int_{\Gamma_t^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{t}^e d\Gamma^e + \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}_p^e, \quad (132)$$

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{B}_\phi^T e \mathbf{B}_u d\Omega^e \mathbf{u}^e - \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_\phi^T \epsilon^S \mathbf{B}_\phi d\Omega^e \phi^e = - \int_{\Gamma_\phi^e} \mathbf{N}_\phi^T \mathbf{f}_\phi^e d\Gamma^e - \mathbf{N}_\phi^T \mathbf{q}_p^e. \quad (133)$$

As equações (132) e (133) podem ser escritas na forma do sistema matricial

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu}^e & \mathbf{K}_{u\phi}^e \\ \mathbf{K}_{\phi u}^e & -\mathbf{K}_{\phi\phi}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \phi^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u^e \\ \mathbf{Q}_\phi^e \end{bmatrix}, \quad (134)$$

onde

$$\mathbf{K}_{uu}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T c^E \mathbf{B}_u d\Omega^e, \quad (135)$$

$$\mathbf{K}_{u\phi}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T e^T \mathbf{B}_\phi d\Omega^e, \quad (136)$$

$$\mathbf{K}_{\phi\phi}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_\phi^T \epsilon^S \mathbf{B}_\phi d\Omega^e, \quad (137)$$

são, respectivamente, as matrizes de rigidez, de acoplamento piezoelétrico e de capacitância elétrica de um elemento finito, de modo que

$$\mathbf{K}_{\phi u}^e = \mathbf{K}_{u\phi}^{eT}. \quad (138)$$

O vetor de forças e o vetor de cargas elétricas de um elemento finito são dados por

$$\mathbf{F}_u^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}^e d\Omega^e + \int_{\Gamma_t^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{t}^e d\Gamma^e + \mathbf{N}_u^T \mathbf{f}_p^e \quad (139)$$

e

$$\mathbf{Q}_\phi^e = - \int_{\Gamma_\phi^e} \mathbf{N}_\phi^T \mathbf{f}_\phi^e d\Gamma^e - \mathbf{N}_\phi^T \mathbf{q}_p^e. \quad (140)$$

Na malha de elementos finitos, cada elemento é conectado aos seus elementos vizinhos por meio dos nós de modo que os deslocamentos mecânicos e os potenciais elétricos são contínuos de um elemento para outro. Sendo assim, o Princípio de Hamilton deve ser verificado para a estrutura completa através das matrizes globais obtidas a partir da contribuição de cada elemento da malha (BECKER; CAREY; ODEN, 1981; COOK; MALKUS; PLESHA, 1989). O sistema matricial global é dado por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi u} & -\mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{Q}_\phi \end{bmatrix}, \quad (141)$$

onde  $\mathbf{K}_{uu}$ ,  $\mathbf{K}_{u\phi}$ ,  $\mathbf{K}_{\phi\phi}$  são as matrizes globais de rigidez, de acoplamento piezoelétrico e de capacitância elétrica;  $\mathbf{K}_{\phi u}$  é a matriz  $\mathbf{K}_{u\phi}$  transposta;  $\mathbf{U}$  é a deflexão global;  $\phi$  é vetor global de potenciais elétricos;  $\mathbf{F}_u$  é o vetor global de forças e  $\mathbf{Q}_\phi$  é o vetor global de cargas elétricas.

A formulação por elementos finitos está completa e pode-se, finalmente, escrever o problema (104) na sua forma final discretizada. Note que, quando a equação (141) é pré-multiplicado por  $[\mathbf{U} \ \phi]$  aparece a forma fraca do funcional de custo do problema discretizado

$$[\mathbf{U} \ \phi] \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi u} & -\mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \phi \end{bmatrix} = [\mathbf{U} \ \phi] \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{Q}_\phi \end{bmatrix}. \quad (142)$$

Então o problema discretizado é definido por

$$\begin{aligned}
 \text{est } J(u, \phi, \rho_u, \rho_\phi) &= \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{uu} \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{u\phi} \phi + \phi^T \mathbf{K}_{\phi u} \mathbf{U} - \phi^T \mathbf{K}_{\phi\phi} \phi \\
 \text{s.a. } \mathbf{K}_{uu} \mathbf{U} + \mathbf{K}_{u\phi} \phi &= \mathbf{F}_u \\
 \mathbf{K}_{\phi u} \mathbf{U} - \mathbf{K}_{\phi\phi} \phi &= \mathbf{Q}_\phi \\
 \sum_e \rho_{u_e} V^e &= \eta_u V \\
 \sum_e \rho_{\phi_e} V^e &= \eta_\phi V \\
 0 < \rho_{u_{min}} \leq \rho_{u_e} &\leq 1 \\
 0 < \rho_{\phi_{min}} \leq \rho_{\phi_e} &\leq 1 \\
 e &= 1, 2, 3, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{143}$$

Onde então se enuncia o Lagrangeano  $\mathcal{L}$  do problema (143)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\rho_u, \rho_\phi) &= \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{uu} \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{u\phi} \phi + \phi^T \mathbf{K}_{\phi u} \mathbf{U} - \phi^T \mathbf{K}_{\phi\phi} \phi + \lambda_0 \left( \sum_e \rho_{u_e} V^e - \eta_u V \right) \\
 &+ \lambda_1 \left( \sum_e \rho_{\phi_e} V^e - \eta_\phi V \right) + \Lambda_1^T (\mathbf{K}_{uu} \mathbf{U} + \mathbf{K}_{u\phi} \phi - \mathbf{F}_u) \\
 &+ \Lambda_2^T (\mathbf{K}_{\phi u} \mathbf{U} - \mathbf{K}_{\phi\phi} \phi - \mathbf{Q}_\phi) + \lambda_{u1e} (\rho_{u_{min}} - \rho_{u_e}) + \lambda_{u2e} (\rho_{u_e} - 1) \\
 &+ \lambda_{\phi1e} (\rho_{\phi_{min}} - \rho_{\phi_e}) + \lambda_{\phi2e} (\rho_{\phi_e} - 1),
 \end{aligned} \tag{144}$$

com  $\lambda_0$  e  $\lambda_1$  (escalares) são multiplicadores de Lagrange relacionados com a restrição de volume,  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_2$  (vetores) são multiplicadores de Lagrange relacionados com a equação de equilíbrio e os multiplicadores escalares  $\lambda_{u1e}$ ,  $\lambda_{u2e}$ ,  $\lambda_{\phi1e}$  e  $\lambda_{\phi2e}$  representam as restrições laterais inferior e superior.

Serão calculadas as derivadas com respeito às variáveis de  $\rho_u$  e  $\rho_\phi$ , impondo a condição de estacionariedade do problema de otimização. Para isso, tem-se os cálculos das derivadas do Lagrangeano a seguir:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho_u} &= \frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial \rho_u} \mathbf{K}_{uu} \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \rho_u} \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{uu} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_u} + \frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial \rho_u} \mathbf{K}_{u\phi} \phi + \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}_{u\phi}}{\partial \rho_u} \phi + \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{u\phi} \frac{\partial \phi}{\partial \rho_u} \\
 &+ \frac{\partial \phi^T}{\partial \rho_u} \mathbf{K}_{\phi u} \mathbf{U} + \phi^T \frac{\partial \mathbf{K}_{\phi u}}{\partial \rho_u} \mathbf{U} + \phi^T \mathbf{K}_{\phi u} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_u} - \frac{\partial \phi^T}{\partial \rho_u} \mathbf{K}_{\phi\phi} \phi - \phi^T \frac{\partial \mathbf{K}_{\phi\phi}}{\partial \rho_u} \phi - \phi^T \mathbf{K}_{\phi\phi} \frac{\partial \phi}{\partial \rho_u} \\
 &+ \lambda_0 \frac{\partial}{\partial \rho_u} \left[ \sum_e \rho_{u_e} V^e \right] + \Lambda_1^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \rho_u} \mathbf{U} + \mathbf{K}_{uu} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_u} + \frac{\partial \mathbf{K}_{u\phi}}{\partial \rho_u} \phi + \mathbf{K}_{u\phi} \frac{\partial \phi}{\partial \rho_u} \right) \\
 &+ \Lambda_2^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}_{\phi u}}{\partial \rho_u} \mathbf{U} + \mathbf{K}_{\phi u} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_u} - \frac{\partial \mathbf{K}_{\phi\phi}}{\partial \rho_u} \phi - \mathbf{K}_{\phi\phi} \frac{\partial \phi}{\partial \rho_u} \right),
 \end{aligned} \tag{145}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho_\phi} = & \frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial \rho_\phi} \mathbf{K}_{uu} \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \rho_\phi} \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{uu} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_\phi} + \frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial \rho_\phi} \mathbf{K}_{u\phi} \phi + \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}_{u\phi}}{\partial \rho_\phi} \phi + \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{u\phi} \frac{\partial \phi}{\partial \rho_\phi} \\
& + \frac{\partial \phi^T}{\partial \rho_\phi} \mathbf{K}_{\phi u} \mathbf{U} + \phi^T \frac{\partial \mathbf{K}_{\phi u}}{\partial \rho_\phi} \mathbf{U} + \phi^T \mathbf{K}_{\phi u} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_\phi} - \frac{\partial \phi^T}{\partial \rho_\phi} \mathbf{K}_{\phi\phi} \phi - \phi^T \frac{\partial \mathbf{K}_{\phi\phi}}{\partial \rho_\phi} \phi - \phi^T \mathbf{K}_{\phi\phi} \frac{\partial \phi}{\partial \rho_\phi} \\
& + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \rho_\phi} \left[ \sum_e \rho_{\phi_e} V^e \right] + \Lambda_1^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \rho_\phi} \mathbf{U} + \mathbf{K}_{uu} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_\phi} + \frac{\partial \mathbf{K}_{u\phi}}{\partial \rho_\phi} \phi + \mathbf{K}_{u\phi} \frac{\partial \phi}{\partial \rho_\phi} \right) \\
& + \Lambda_2^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}_{\phi u}}{\partial \rho_\phi} \mathbf{U} + \mathbf{K}_{\phi u} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_\phi} - \frac{\partial \mathbf{K}_{\phi\phi}}{\partial \rho_\phi} \phi - \mathbf{K}_{\phi\phi} \frac{\partial \phi}{\partial \rho_\phi} \right). \quad (146)
\end{aligned}$$

Observa-se que as derivadas de  $\mathbf{F}_u$  e  $\mathbf{Q}_\phi$  em relação as variáveis de projeto são nulas, uma vez que  $\mathbf{F}_u$  e  $\mathbf{Q}_\phi$  são consideradas constantes e também como as restrições laterais inferior e superior não estão ativas, tem-se  $\lambda_{u1e} = \lambda_{u2e} = \lambda_{\phi1e} = \lambda_{\phi2e} = 0$ . Em seguida, serão calculados as derivadas somente com relação à  $\rho_u$ , pois a derivada e os demais processos são similares para  $\rho_\phi$ . Pondo em evidência as derivadas  $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_u}$  e  $\frac{\partial \phi}{\partial \rho_u}$  tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho_u} = & \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \rho_u} \mathbf{U} + (\mathbf{K}_{uu} \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{uu} + \phi^T \mathbf{K}_{\phi u} + \mathbf{K}_{u\phi} \phi + \Lambda_1^T \mathbf{K}_{uu} + \Lambda_2^T \mathbf{K}_{\phi u}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_u} \\
& + \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}_{u\phi}}{\partial \rho_u} \phi + (\mathbf{K}_{\phi u} \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{u\phi} - \mathbf{K}_{\phi\phi} \phi - \phi^T \mathbf{K}_{\phi\phi} + \Lambda_1^T \mathbf{K}_{u\phi} - \Lambda_2^T \mathbf{K}_{\phi\phi}) \frac{\partial \phi}{\partial \rho_u} \\
& + \phi^T \frac{\partial \mathbf{K}_{\phi u}}{\partial \rho_u} \mathbf{U} - \phi^T \frac{\partial \mathbf{K}_{\phi\phi}}{\partial \rho_u} \phi + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial \rho_u} \left[ \sum_e \rho_{u_e} V^e \right] + \Lambda_1^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \rho_u} \mathbf{U} + \frac{\partial \mathbf{K}_{u\phi}}{\partial \rho_u} \phi \right) \\
& + \Lambda_2^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}_{\phi u}}{\partial \rho_u} \mathbf{U} - \frac{\partial \mathbf{K}_{\phi\phi}}{\partial \rho_u} \phi \right), \quad (147)
\end{aligned}$$

onde, se reagruparmos os termos, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho_u} = & (2\mathbf{U}^T \mathbf{K}_{uu} + 2\phi^T \mathbf{K}_{\phi u} + \Lambda_1^T \mathbf{K}_{uu} + \Lambda_2^T \mathbf{K}_{\phi u}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_u} \\
& + (2\mathbf{U}^T \mathbf{K}_{u\phi} - 2\phi^T \mathbf{K}_{\phi\phi} + \Lambda_1^T \mathbf{K}_{u\phi} - \Lambda_2^T \mathbf{K}_{\phi\phi}) \frac{\partial \phi}{\partial \rho_u} \\
& + \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \rho_u} \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}_{u\phi}}{\partial \rho_u} \phi + \phi^T \frac{\partial \mathbf{K}_{\phi u}}{\partial \rho_u} \mathbf{U} - \phi^T \frac{\partial \mathbf{K}_{\phi\phi}}{\partial \rho_u} \phi + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial \rho_u} \left[ \sum_e \rho_{u_e} V^e \right] \\
& + \Lambda_1^T \frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \rho_u} \mathbf{U} + \Lambda_1^T \frac{\partial \mathbf{K}_{u\phi}}{\partial \rho_u} \phi + \Lambda_2^T \frac{\partial \mathbf{K}_{\phi u}}{\partial \rho_u} \mathbf{U} - \Lambda_2^T \frac{\partial \mathbf{K}_{\phi\phi}}{\partial \rho_u} \phi. \quad (148)
\end{aligned}$$

Como  $\Lambda_1^T$  e  $\Lambda_2^T$  são arbitrários, pode-se substituí-los por  $-2\mathbf{U}^T$  e  $-2\phi^T$ , respectiva-



mente, e então obtém-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho_u} = & (2\mathbf{U}^T \mathbf{K}_{uu} + 2\phi^T \mathbf{K}_{\phi u} - 2\mathbf{U}^T \mathbf{K}_{uu} - 2\phi^T \mathbf{K}_{\phi u}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_u} \\
& + (2\mathbf{U}^T \mathbf{K}_{u\phi} - 2\phi^T \mathbf{K}_{\phi\phi} - 2\mathbf{U}^T \mathbf{K}_{u\phi} + 2\phi^T \mathbf{K}_{\phi\phi}) \frac{\partial \phi}{\partial \rho_u} \\
& + \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \rho_u} \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}_{u\phi}}{\partial \rho_u} \phi + \phi^T \frac{\partial \mathbf{K}_{\phi u}}{\partial \rho_u} \mathbf{U} - \phi^T \frac{\partial \mathbf{K}_{\phi\phi}}{\partial \rho_u} \phi + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial \rho_u} \left[ \sum_e \rho_{u_e} V^e \right] \\
& - 2\mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \rho_u} \mathbf{U} - 2\mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}_{u\phi}}{\partial \rho_u} \phi - 2\phi^T \frac{\partial \mathbf{K}_{\phi u}}{\partial \rho_u} \mathbf{U} + 2\phi^T \frac{\partial \mathbf{K}_{\phi\phi}}{\partial \rho_u} \phi, \quad (149)
\end{aligned}$$

para o qual, chega-se com algumas simplificações, em:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho_u} = -\mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \rho_u} \mathbf{U} - 2\mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}_{u\phi}}{\partial \rho_u} \phi + \phi^T \frac{\partial \mathbf{K}_{\phi\phi}}{\partial \rho_u} \phi + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial \rho_u} \left[ \sum_e \rho_{u_e} V^e \right]. \quad (150)$$

Levando em conta os modelos de rigidez com suas penalizações dadas nas equações (109)-(111), tem-se os seguintes formatos:  $\mathbf{K}_{uu}^e = \mathbf{k}_{u\phi u}^0(\rho_{u_e}, \rho_{\phi_e}) + \mathbf{k}_{uuu}^0(\rho_{u_e}, \rho_{\phi_e})$ ,  $\mathbf{K}_{u\phi}^e = \mathbf{K}_{u\phi}^0(\rho_u, \rho_\phi)$ ,  $\mathbf{K}_{\phi\phi}^e = \mathbf{K}_{\phi\phi}^0(\rho_{u_e}, \rho_{\phi_e})$  e  $\mathbf{K}_{\phi u}^e = \mathbf{K}_{u\phi}^{eT}$  (BENDSØE; SIGMUND, 2003), onde os índices 0 nas matrizes de rigidez indicam que os materiais são isotrópicos. Portanto, as derivadas com relação à  $\rho_u$  e  $\rho_\phi$  de cada elemento para as matrizes de rigidez da equação (150) são:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{K}_{uu}^e}{\partial \rho_{u_e}} &= \frac{\partial}{\partial \rho_{u_e}} \left[ \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T(\rho_{u_e})^{p_1} ((\rho_{\phi_e})^{p_2} c_\phi^E + (1 - (\rho_{\phi_e})^{p_2}) c_u^E) \mathbf{B}_u d\Omega^e \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \rho_{u_e}} [(\rho_{u_e})^{p_1} (\rho_{\phi_e})^{p_2}] \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T c_\phi^E \mathbf{B}_u d\Omega^e + \frac{\partial}{\partial \rho_{u_e}} [(\rho_{u_e})^{p_1} (1 - (\rho_{\phi_e})^{p_2})] \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T c_u^E \mathbf{B}_u d\Omega^e \\
&= p_1(\rho_{u_e})^{p_1-1} ((\rho_{\phi_e})^{p_2} \mathbf{k}_{u\phi u}^e + (1 - (\rho_{\phi_e})^{p_2}) \mathbf{k}_{uuu}^e), \quad (151)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{K}_{u\phi}^e}{\partial \rho_{u_e}} &= \frac{\partial}{\partial \rho_{u_e}} \left[ \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T(\rho_{u_e})^{p_1} (\rho_{\phi_e})^{p_3} e^T \mathbf{B}_\phi d\Omega^e \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \rho_{u_e}} [(\rho_{u_e})^{p_1} (\rho_{\phi_e})^{p_3}] \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T e^T \mathbf{B}_\phi d\Omega^e \\
&= p_1(\rho_{u_e})^{p_1-1} (\rho_{\phi_e})^{p_3} \mathbf{K}_{u\phi}^e, \quad (152)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{K}_{\phi\phi}^e}{\partial \rho_{u_e}} &= \frac{\partial}{\partial \rho_{u_e}} \left[ \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_\phi^T(\rho_{u_e})^{p_1} (\rho_{\phi_e})^{p_3} \epsilon^S \mathbf{B}_\phi d\Omega^e \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \rho_{u_e}} [(\rho_{u_e})^{p_1} (\rho_{\phi_e})^{p_3}] \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_\phi^T \epsilon^S \mathbf{B}_\phi d\Omega^e \\
&= p_1(\rho_{u_e})^{p_1-1} (\rho_{\phi_e})^{p_3} \mathbf{K}_{\phi\phi}^e, \quad (153)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{K}_{uu}^e}{\partial \rho_{\phi_e}} &= \frac{\partial}{\partial \rho_{\phi_e}} \left[ \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T (\rho_{u_e})^{p_1} ((\rho_{\phi_e})^{p_2} c_\phi^E + (1 - (\rho_{\phi_e})^{p_2}) c_u^E) \mathbf{B}_u d\Omega^e \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \rho_{\phi_e}} [(\rho_{u_e})^{p_1} (\rho_{\phi_e})^{p_2}] \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T c_\phi^E \mathbf{B}_u d\Omega^e + \frac{\partial}{\partial \rho_{\phi_e}} [(\rho_{u_e})^{p_1} (1 - (\rho_{\phi_e})^{p_2})] \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T c_u^E \mathbf{B}_u d\Omega^e \\
&= p_2 (\rho_{u_e})^{p_1} (\rho_{\phi_e})^{p_2-1} (\mathbf{k}_{u\phi u}^e - \mathbf{k}_{uuu}^e), \tag{154}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{K}_{u\phi}^e}{\partial \rho_{\phi_e}} &= \frac{\partial}{\partial \rho_{\phi_e}} \left[ \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T (\rho_{u_e})^{p_1} (\rho_{\phi_e})^{p_3} e^T \mathbf{B}_\phi d\Omega^e \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \rho_{\phi_e}} [(\rho_{u_e})^{p_1} (\rho_{\phi_e})^{p_3}] \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T e^T \mathbf{B}_\phi d\Omega^e \\
&= p_3 (\rho_{u_e})^{p_1} (\rho_{\phi_e})^{p_3-1} \mathbf{K}_{u\phi}^e, \tag{155}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{K}_{\phi\phi}^e}{\partial \rho_{\phi_e}} &= \frac{\partial}{\partial \rho_{\phi_e}} \left[ \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_\phi^T (\rho_{u_e})^{p_1} (\rho_{\phi_e})^{p_3} \epsilon^S \mathbf{B}_\phi d\Omega^e \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \rho_{\phi_e}} [(\rho_{u_e})^{p_1} (\rho_{\phi_e})^{p_3}] \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_\phi^T \epsilon^S \mathbf{B}_\phi d\Omega^e \\
&= p_3 (\rho_{u_e})^{p_1} (\rho_{\phi_e})^{p_3-1} \mathbf{K}_{\phi\phi}^e, \tag{156}
\end{aligned}$$

e então verifica-se que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho_{u_e}} &= -\mathbf{u}^{eT} [p_1 (\rho_{u_e})^{p_1-1} ((\rho_{\phi_e})^{p_2} \mathbf{k}_{u\phi u}^e + (1 - (\rho_{\phi_e})^{p_2}) \mathbf{k}_{uuu}^e)] \mathbf{u}^e \\
&\quad - \mathbf{u}^{eT} [p_1 (\rho_{u_e})^{p_1-1} (\rho_{\phi_e})^{p_3} \mathbf{K}_{u\phi}^e] \phi^e - \phi^{eT} [p_1 (\rho_{u_e})^{p_1-1} (\rho_{\phi_e})^{p_3} \mathbf{K}_{\phi u}^e] \mathbf{u}^e \\
&\quad + \phi^{eT} [p_1 (\rho_{u_e})^{p_1-1} (\rho_{\phi_e})^{p_3} \mathbf{K}_{\phi\phi}^e] \phi^e + \lambda_0 V_{u_e} \\
&= -p_1 (\rho_{u_e})^{p_1-1} ((\rho_{\phi_e})^{p_2} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{k}_{u\phi u}^e \mathbf{u}^e + (1 - (\rho_{\phi_e})^{p_2}) \mathbf{u}^{eT} \mathbf{k}_{uuu}^e \mathbf{u}^e) \\
&\quad - p_1 (\rho_{u_e})^{p_1-1} (\rho_{\phi_e})^{p_3} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{K}_{u\phi}^e \phi^e - p_1 (\rho_{u_e})^{p_1-1} (\rho_{\phi_e})^{p_3} \phi^{eT} \mathbf{K}_{\phi u}^e \mathbf{u}^e \\
&\quad + p_1 (\rho_{u_e})^{p_1-1} (\rho_{\phi_e})^{p_3} \phi^{eT} \mathbf{K}_{\phi\phi}^e \phi^e + \lambda_0 V_{u_e}. \tag{157}
\end{aligned}$$

Utilizando as condições estacionárias para  $\rho_u$  na equação (150), em sua forma discretizada, tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho_{u_e}} &= -p_1 (\rho_{u_e})^{p_1-1} ((\rho_{\phi_e})^{p_2} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{k}_{u\phi u}^e \mathbf{u}^e + (1 - (\rho_{\phi_e})^{p_2}) \mathbf{u}^{eT} \mathbf{k}_{uuu}^e \mathbf{u}^e) \\
&\quad - p_1 (\rho_{u_e})^{p_1-1} (\rho_{\phi_e})^{p_3} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{K}_{u\phi}^e \phi^e - p_1 (\rho_{u_e})^{p_1-1} (\rho_{\phi_e})^{p_3} \phi^{eT} \mathbf{K}_{\phi u}^e \mathbf{u}^e \\
&\quad + p_1 (\rho_{u_e})^{p_1-1} (\rho_{\phi_e})^{p_3} \phi^{eT} \mathbf{K}_{\phi\phi}^e \phi^e + \lambda_0 V_{u_e} = 0, \tag{158}
\end{aligned}$$

onde, se,

$$\begin{aligned} q_{u_e}(\rho_{u_e}, \rho_{\phi_e}) = & -p_1(\rho_{u_e})^{p_1-1}((\rho_{\phi_e})^{p_2} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{k}_{u\phi u}^e \mathbf{u}^e + (1 - (\rho_{\phi_e})^{p_2}) \mathbf{u}^{eT} \mathbf{k}_{uuu}^e \mathbf{u}^e) \\ & -p_1(\rho_{u_e})^{p_1-1}(\rho_{\phi_e})^{p_3} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{K}_{u\phi}^e \boldsymbol{\phi}^e - p_1(\rho_{u_e})^{p_1-1}(\rho_{\phi_e})^{p_3} \boldsymbol{\phi}^{eT} \mathbf{K}_{\phi u}^e \mathbf{u}^e \\ & + p_1(\rho_{u_e})^{p_1-1}(\rho_{\phi_e})^{p_3} \boldsymbol{\phi}^{eT} \mathbf{K}_{\phi\phi}^e \boldsymbol{\phi}^e, \end{aligned} \quad (159)$$

então a equação (158) pode ser escrita como

$$\frac{q_{u_e}(\rho_{u_e}, \rho_{\phi_e})}{\lambda_0 V_{u_e}} = 1, \quad (160)$$

e de forma similar aos passos (147) à (157), utiliza-se as condições estacionárias para  $\rho_{\phi}$  na equação, em sua forma discretizada, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho_{\phi_e}} = & -p_2(\rho_{u_e})^{p_1}(\rho_{\phi_e})^{p_2-1}(\mathbf{u}^{eT} \mathbf{k}_{u\phi u}^e \mathbf{u}^e - \mathbf{u}^{eT} \mathbf{k}_{uuu}^e \mathbf{u}^e) \\ & -p_3(\rho_{u_e})^{p_1}(\rho_{\phi_e})^{p_3-1} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{K}_{u\phi}^e \boldsymbol{\phi}^e - p_3(\rho_{u_e})^{p_1}(\rho_{\phi_e})^{p_3-1} \boldsymbol{\phi}^{eT} \mathbf{K}_{\phi u}^e \mathbf{u}^e \\ & + p_1(\rho_{u_e})^{p_1-1}(\rho_{\phi_e})^{p_3-1} \boldsymbol{\phi}^{eT} \mathbf{K}_{\phi\phi}^e \boldsymbol{\phi}^e + \lambda_1 V_{\phi_e} = 0, \end{aligned} \quad (161)$$

onde, se,

$$\begin{aligned} q_{\phi_e}(\rho_{u_e}, \rho_{\phi_e}) = & -p_2(\rho_{u_e})^{p_1}(\rho_{\phi_e})^{p_2-1}(\mathbf{u}^{eT} \mathbf{k}_{u\phi u}^e \mathbf{u}^e - \mathbf{u}^{eT} \mathbf{k}_{uuu}^e \mathbf{u}^e) \\ & -p_3(\rho_{u_e})^{p_1}(\rho_{\phi_e})^{p_3-1} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{K}_{u\phi}^e \boldsymbol{\phi}^e - p_3(\rho_{u_e})^{p_1}(\rho_{\phi_e})^{p_3-1} \boldsymbol{\phi}^{eT} \mathbf{K}_{\phi u}^e \mathbf{u}^e \\ & + p_1(\rho_{u_e})^{p_1}(\rho_{\phi_e})^{p_3-1} \boldsymbol{\phi}^{eT} \mathbf{K}_{\phi\phi}^e \boldsymbol{\phi}^e, \end{aligned} \quad (162)$$

temos

$$\frac{q_{\phi_e}(\rho_{u_e}, \rho_{\phi_e})}{\lambda_1 V_{\phi_e}} = 1. \quad (163)$$

As equações (160) e (163) têm sentido físico que representam a densidade de energia de deformação que deve ser constante ao longo do domínio do projeto. Então os multiplicadores de Lagrange  $\lambda_0$  e  $\lambda_1$  são atualizados de forma a deixar as energias de deformação constantes. Utiliza-se um esquema heurístico de atualização para as variáveis:

$$\rho_{u_e}^{new} = \rho_{u_e} \left( \frac{q_{u_e}(\rho_{u_e}, \rho_{\phi_e})}{\lambda_0 V_{u_e}} \right)^{\zeta} = \rho_{u_e} (B_{u_e})^{\zeta}, \quad (164)$$

e

$$\rho_{\phi_e}^{new} = \rho_{\phi_e} \left( \frac{q_{\phi_e}(\rho_{u_e}, \rho_{\phi_e})}{\lambda_1 V_{\phi_e}} \right)^{\zeta} = \rho_{\phi_e} (B_{\phi_e})^{\zeta}, \quad (165)$$

onde  $\zeta$  é um coeficiente de amortecimento, que é geralmente igual a 0,5, podendo variar de 0 a 1. Onde este amortecimento estabiliza as iterações. Na iteração, quando o elemento passa de vazio para sólido introduzimos um limite de movimento da variável

de projeto. Onde o método heurístico de atualização de cada variável, com objetivo de estabilizar a iteração, é formulado como:

$$\rho_{u_e}^{new} = \begin{cases} \max(\rho_{u_{e_{min}}}, \rho_{u_e} - m) & \text{se } \rho_{u_e}(B_{u_e})^\zeta \leq \max(\rho_{u_{e_{min}}}, \rho_{u_e} - m), \\ \rho_{u_e}(B_{u_e})^\zeta & \text{se } \max(\rho_{u_{e_{min}}}, \rho_{u_e} - m) < \rho_{u_e}(B_{u_e})^\zeta < \min(1, \rho_{u_e} + m), \\ \min(1, \rho_{u_e} + m) & \text{se } \min(1, \rho_{u_e} + m) \leq \rho_{u_e}(B_{u_e})^\zeta, \end{cases} \quad (166)$$

e

$$\rho_{\phi_e}^{new} = \begin{cases} \max(\rho_{\phi_{e_{min}}}, \rho_{\phi_e} - m) & \text{se } \rho_{\phi_e}(B_{\phi_e})^\zeta \leq \max(\rho_{\phi_{e_{min}}}, \rho_{\phi_e} - m), \\ \rho_{\phi_e}(B_{\phi_e})^\zeta & \text{se } \max(\rho_{\phi_{e_{min}}}, \rho_{\phi_e} - m) < \rho_{\phi_e}(B_{\phi_e})^\zeta < \min(1, \rho_{\phi_e} + m), \\ \min(1, \rho_{\phi_e} + m) & \text{se } \min(1, \rho_{\phi_e} + m) \leq \rho_{\phi_e}(B_{\phi_e})^\zeta, \end{cases} \quad (167)$$

onde  $m$  é um limite móvel e  $B_{u_e}$  e  $B_{\phi_e}$  são condições de otimalidade vindas de (164) e (165) respectivamente.

Os multiplicadores de Lagrange devem satisfazer as restrições de volume,

$$g_0(\lambda_0) = V_{u_e}(\rho_{u_e}(\lambda_0)) - \eta_u V, \quad (168)$$

e

$$g_1(\lambda_1) = V_{\phi_e}(\rho_{\phi_e}(\lambda_1)) - \eta_\phi V. \quad (169)$$

Então, pode-se atualizar o multiplicador de Lagrange de forma iterativa. Note que as funções  $g_0(\lambda_0)$  e  $g_1(\lambda_1)$  são contínuas monótonas decrescentes em relação aos multiplicadores de Lagrange. O método da bissecção pode ser usado para localizar os zeros de (168) e (169).

## 4.8 Simulações e resultados

Esta seção apresenta as simulações e os resultados para o problema (104), cuja forma discretizada é apresentada em (143). A metodologia proposta foi codificada no *software* MATLAB e é baseada em SIGMUND (2001).

Dois casos são apresentados para verificar o desempenho da proposta de projeto simultâneo descrita neste trabalho. Considera-se uma viga de  $1m$  de comprimento (no eixo  $x$ ) por  $0,4m$  de largura (no eixo  $y$ ), cuja discretização do domínio resultou em uma malha de 1440 ( $60 \times 24$ ) elementos finitos bilineares, que foi considerado para ambos os casos, diferenciando apenas em suportes e carregamentos. Cada elemento finito isoparamétrico tem quatro nós, dois graus de liberdade mecânicos e um grau de liberdade elétrico por nó.

Para este problema, considera-se dois materiais específicos: o alumínio, material

considerado elástico e isotrópico, que está relacionado à variável de projeto  $\rho_u$  e a cerâmica PZT5A, como material piezoelétrico, relacionado à variável de projeto  $\rho_\phi$ . As propriedades mecânicas do alumínio (SILVEIRA; FONSECA; SANTOS, 2014) são apresentadas na Tabela 4. As propriedades materiais do PZT5A, obtidas de Silveira, Fonseca e Santos (2014), são apresentadas na Tabela 5.

O projeto mecânico busca a otimização estrutural e a localização ótima para atuadores, através da minimização da flexibilidade do sistema. A otimização é feita por meio da distribuição ótima dos materiais elástico isotrópico e piezoelétrico, que são associados às variáveis de projeto estrutural,  $\rho_u$  e  $\rho_\phi$ , respectivamente. A distribuição do material piezoelétrico está representada pela cor vermelha nas respostas gráficas das simulações feitas.

Para todos os casos, manteve-se os mesmos parâmetros de otimização: o raio de filtragem para o filtro de sensibilidades é  $r_{min} = 1,2mm$  e os expoentes de penalização do modelo material são  $p_1 = p_2 = p_3 = 3$ .

A metodologia aqui utilizada para a atualização das variáveis de projeto  $\rho_u$  e  $\rho_\phi$  pode ser comparado ao método OC padrão dado por BENDSØE; SIGMUND (2003). Este método utiliza a bissecção para atualizar os  $\lambda_0$  e  $\lambda_1$ , que por sua vez, devem satisfazer as restrições de volume (168) e (169). As variáveis de projeto são atualizadas de forma heurística conforme (166) e (167).

Tabela 4: Propriedades materiais do alumínio.

ALUMÍNIO	
Módulo de Young	$71 \times 10^9 \text{ N/m}^2$
Densidade	$2700 \text{ kg/m}^3$
Coefficiente de Poisson	0,33

Tabela 5: Propriedades materiais do PZT5A.

PZT5A	
Constantes elásticas	$(10^{10} \text{ N/m}^2)$
$c_{11}^E$	12, 1
$c_{12}^E$	7, 54
$c_{13}^E$	7, 52
$c_{33}^E$	11, 1
$c_{44}^E$	2, 11
$c_{66}^E$	2, 26
Constantes piezoelétricas	$(\text{C/m}^2)$
$e_{31}$	-5, 4
$e_{33}$	15, 8
$e_{51}$	12, 3
Constantes dielétricas	$(\text{F/m})$
$\epsilon_0$	$8,85 \times 10^{-12}$
$\epsilon_{11}/\epsilon_0$	916
$\epsilon_{33}/\epsilon_0$	830
Densidade	$7750 \text{ kg/m}^3$

**Problemas eletromecânicos:** em problemas caracterizados por efeitos eletromecânicos, tais como os considerados nesta seção, o fato de que as constantes elásticas, as constantes dielétricas e as constantes piezoelétricas têm magnitudes muito diferentes tornará a matriz de rigidez mal condicionada e levará a resultados instáveis. Além disso, a magnitude dos graus de liberdade de deslocamento mecânico e de potencial elétrico são também muito distintas.

A fim de contornar o problema de condicionamento, propôs-se o escalonamento da unidade básica de força (QI; FANG; YAO, 1997). Trata-se de um procedimento onde apenas se usa um múltiplo da unidade de força:

$$1\overline{N} = 1 \times 10^{\tilde{p}} N, \quad (170)$$

onde  $\tilde{p}$  é um número inteiro positivo. Com este escalonamento, os tensores constitutivos  $c^E$  e  $\epsilon^S$  passam a ter magnitude  $\overline{c^E} = 1 \times 10^{-\tilde{p}} c^E$  e  $\overline{\epsilon^S} = 1 \times 10^{-\tilde{p}} \epsilon^S$ , solucionando o problema de condicionamento. O potencial elétrico  $\phi$ , por sua vez, passa a ter magnitude  $\overline{\phi} = 1 \times 10^{\tilde{p}} \phi$ , o que aproxima a magnitude dos deslocamentos mecânicos e potenciais elétricos.

O valor do expoente  $\tilde{p}$  depende da magnitude dos tensores constitutivos. O material piezoelétrico PZT5A (Tabela 5) tem propriedades elásticas da ordem de

$1 \times 10^{10}$ , dielétricas da ordem de  $1 \times 10^{-9}$  e piezoelétricas da ordem de  $1 \times 10^0$ . Considerando que os termos correspondentes nos blocos das matrizes  $\mathbf{K}_{uu}$ ,  $\mathbf{K}_{u\phi}$  e  $\mathbf{K}_{\phi\phi}$  tenham a mesma magnitude dos tensores constitutivos correspondentes, tem-se uma diferença da ordem de  $1 \times 10^{19}$  entre os termos da matriz global de modo a se poder assumir que o número de condicionamento será de ordem igual. Utilizando a equação (170) com  $\tilde{p} = 9$ , a diferença passa a ser  $1 \times 10^{19-2\tilde{p}}$  de modo que o número de condicionamento passa a ser de ordem  $1 \times 10^1$  (CARDOSO; FONSECA, 2004).

**Problema no coeficiente de amortecimento.** Ao elaborar o algoritmo para o esquema heurístico dado em (164) e (165) notou-se a presença de valores negativos para  $B_{\phi_e}$ , que por sua vez, geram densidades complexas ao utilizar o coeficiente de amortecimento diferente de 1. Para contornar tal problema foi utilizado o coeficiente com o valor absoluto de  $B_{\phi_e}$  e logo após resgatado o sinal do mesmo. O esquema utilizado para a correção de sinal é o seguinte:

$$\rho_{\phi_e}^{new} = \text{sign}(B_{\phi_e}) \rho_{\phi_e} (|B_{\phi_e}|)^\zeta, \quad (171)$$

onde

$$\text{sign}(B_{\phi_e}) = \begin{cases} 1 & \text{se } B_{\phi_e} \geq 0, \\ -1 & \text{se } B_{\phi_e} < 0. \end{cases} \quad (172)$$

A inserção desta etapa no algoritmo OC pode ser vista na linha 5 e 6 do algoritmo 1.

**Critério de convergência.** O critério de convergência para o método de otimização topológica implementado nesta dissertação foi baseado no número de iterações e na mudança do vetor de variáveis de projeto, ao longo do processo de otimização, conforme SIGMUND (2001). Foi imposto um número mínimo de iterações a serem feitas pelo algoritmo e também definiu-se que o algoritmo deveria parar quando a máxima mudança em módulo das variáveis de projeto fosse menor do que um determinado percentual, a saber, 3%.

---

**Algoritmo 1:** OTIMIZADOR OC PARA  $\rho_{\phi_e}$ 


---

**Entrada:**  $\rho_{\phi_e}, B_{\phi_e}$ ;

- 1 Inicialização:
- 2  $l_1 = 0; l_2 = 1 \times 10^5; m = 0, 2; \zeta = 0, 5$ ;
- 3 **enquanto**  $l_2 - l_1 > 1 \times 10^{-4}$  **faça**
- 4      $\lambda_1 = (l_1 + l_2) / 2$ ;
- 5      $\rho_{\phi_e}^{new} = \max(0, 001, \max(\rho_{\phi_e} - m, \min(1, \min(\rho_{\phi_e} + m, \dots$
- 6      $\dots \text{sign}(-B_{\phi_e})\rho_{\phi_e}(| - B_{\phi_e}|/\lambda_1)^\zeta))))$ ;
- 7     **se**  $g_1(\lambda_1) > 0$  **então**
- 8          $l_1 = \lambda_1$ ;
- 9     **senão**
- 10          $l_2 = \lambda_1$ ;
- 11     **fim**
- 12 **fim**
- 13 **fim**

**Saída:**  $\rho_{\phi_e}^{new}$

---

#### 4.8.1 Caso 1

Considerou-se uma viga em balanço sujeita à carga pontual  $f_p$  no meio da sua extremidade livre, como mostra a Figura 17(a). A força é  $f_p = -1 \times 10^{11} \text{ j}$ .

A Figura 17(b) mostra a topologia ótima da viga representada em (a) para  $\eta_u = 0, 5$ . Este valor de  $\eta_u$  manteve-se o mesmo durante todas as simulações. A topologia obtida na Figura 17(b) representa a distribuição ótima de material de forma a maximizar a rigidez da estrutura. É possível notar que há maior concentração de material próximo aos engastes da estrutura.

Para obter a melhor localização para atuadores na estrutura, considerou-se diferentes valores para  $\eta_\phi$ , constante responsável por impor a fração de volume do material de densidade  $\rho_\phi$ , relativo ao material piezoelétrico. A Figura 17(c) foi gerada com  $\eta_\phi = 0, 02$ , o que corresponde a 2% de material piezoelétrico na estrutura, ou seja, aproximadamente 29 elementos do total de elementos finitos definidos. O processo de otimização indicou duas regiões para atuadores, conforme mostra a Figura 17(c). As Figuras 17(d) e 17(e) indicam as melhores posições para alocação de atuadores ao se considerar maiores frações de volume para o material de densidade  $\rho_\phi$ . Estas frações de volume  $\eta_\phi$  foram de 0, 05 e 0, 1, respectivamente.

Em cada caso, uma força concentrada  $f_p$  é aplicada na viga. Esta força  $f_p$  é especificada no elemento finito correspondente da malha e é um componente do vetor  $F_u$ .



Por outro lado, o vetor de cargas elétricas  $Q_\phi$  é calculado por  $Q_\phi = K_{\phi u} U$  em cada caso (MOLTER; FONSECA; FERNANDEZ, 2016).

A convergência da função objetivo  $J$  pode ser analisada na Figura 18. É possível notar uma rápida convergência da função objetivo, logo que 30 iterações são computadas para o caso em que  $\eta_\phi = 0,1$ .

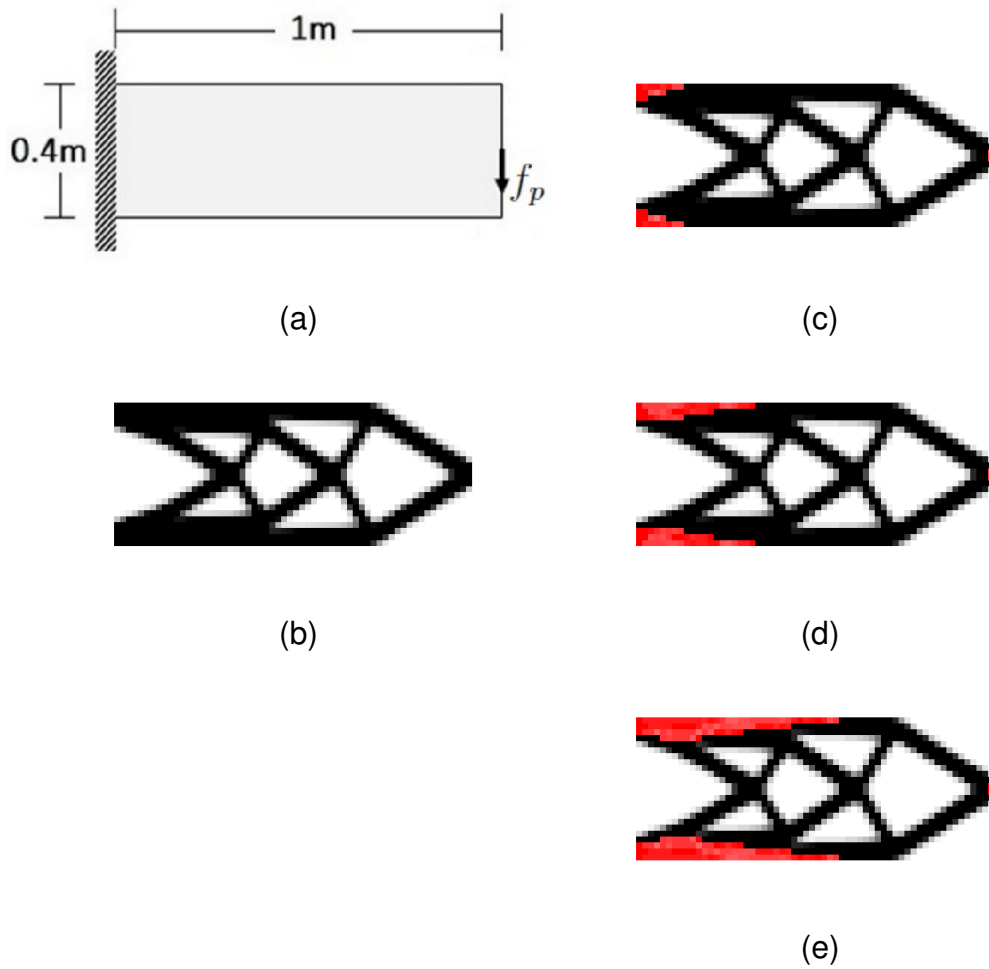


Figura 17: (a) Esquema para viga em balanço sujeita à carga pontual. (b) Distribuição do material estrutural de densidade  $\rho_u$  para  $\eta_u = 0,5$ . Distribuição do material de densidade  $\rho_\phi$  (em vermelho) sobre a estrutura otimizada considerando (c)  $\eta_\phi = 0,02$ , (d)  $\eta_\phi = 0,05$  e (e)  $\eta_\phi = 0,1$ .

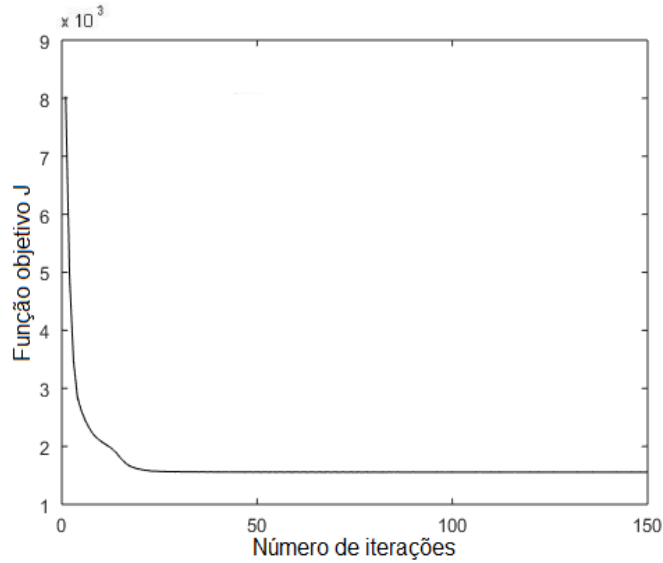


Figura 18: Convergência da função objetivo para o Caso 1 onde  $\eta_\phi = 0, 1$ .

#### 4.8.2 Caso 2

Considerou-se uma viga em balanço sujeita à carga pontual  $f_p$  no seu canto inferior direito, conforme a Figura 19(a). A força é  $f_p = -1 \times 10^{11} \mathbf{j}$ .

A Figura 19(b) mostra a topologia ótima da viga representada em (a) para  $\eta_u = 0, 5$ , valor este que se manteve o mesmo durante todas as simulações. A topologia obtida na Figura 19(b) representa a distribuição ótima de material de forma a maximizar a rigidez da estrutura.

Para obter a melhor localização para atuadores na estrutura, considerou-se diferentes valores para  $\eta_\phi$ . A Figura 19(c) foi gerada com  $\eta_\phi = 0, 02$ , ou seja, apenas 2% de material piezoelétrico está sendo considerado na estrutura, levando a indicação de duas regiões principais simultaneamente próximas aos engastes e às extremidades da viga e de uma região coincidente com o local de aplicação da força  $f_p$ . As Figuras 19(d) e 19(e) indicam as melhores posições para distribuição do material piezoelétrico ao se considerar maiores frações de volume para o material de densidade  $\rho_\phi$ . Estas frações de volume  $\eta_\phi$  foram de 0, 05 e 0, 1, respectivamente.

A convergência da função objetivo  $J$  é apresentada na Figura 20. Novamente, tal como foi no caso anterior, é possível notar a rápida convergência da função logo após a mesma quantidade de iterações computadas anteriormente, o que evidencia o bom desempenho computacional da implementação feita.

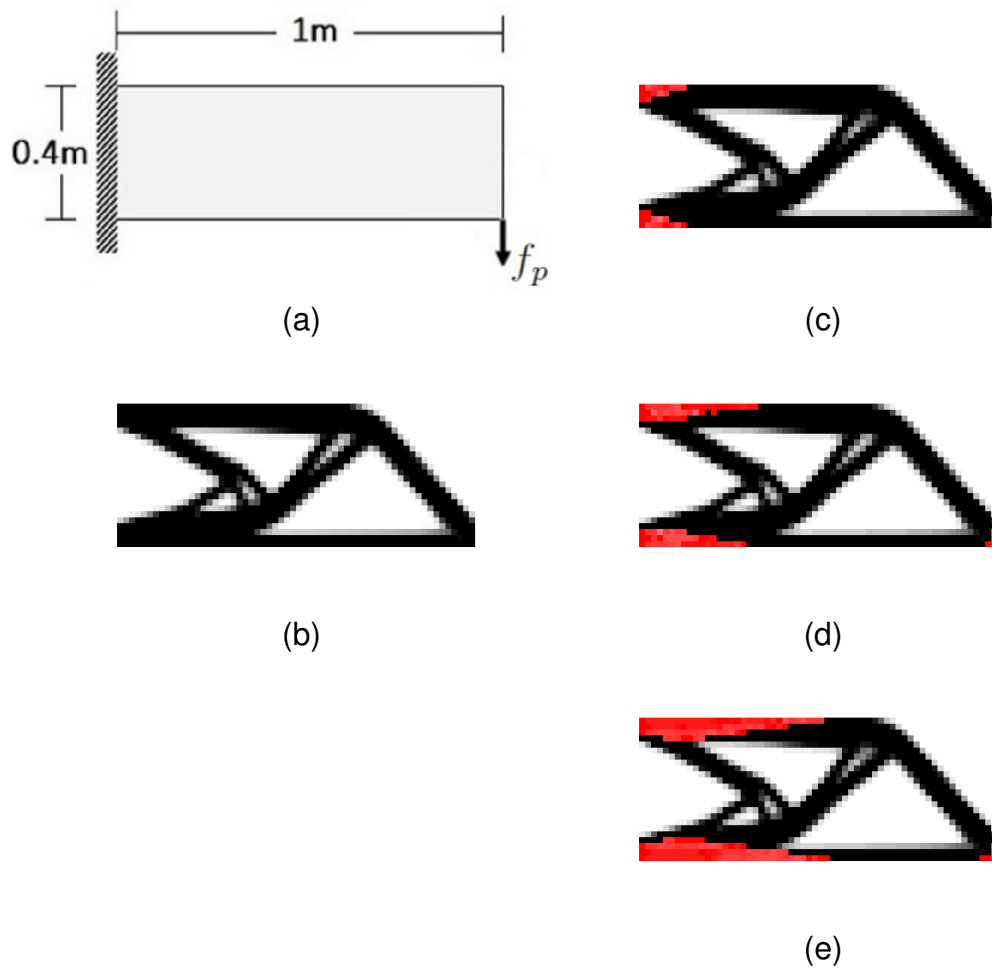


Figura 19: (a) Esquema para viga em balanço sujeita à carga pontual. (b) Distribuição do material estrutural de densidade  $\rho_u$  para  $\eta_u = 0,5$ . Distribuição do material de densidade  $\rho_\phi$  (em vermelho) sobre a estrutura otimizada considerando (c)  $\eta_\phi = 0,02$ , (d)  $\eta_\phi = 0,05$  e (e)  $\eta_\phi = 0,1$ .

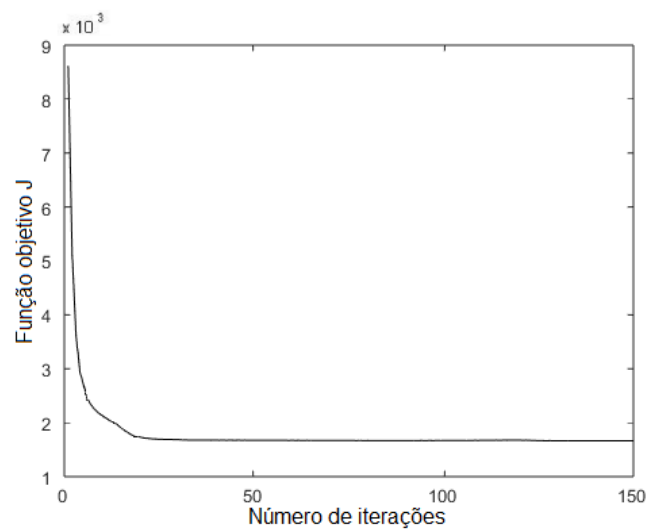


Figura 20: Convergência da função objetivo para o Caso 2 onde  $\eta_\phi = 0,1$ .

Para os casos 1 e 2, pôde-se perceber que os melhores locais para posicionar atuadores piezoelétricos são aqueles ao longo das partes superior e inferior da topologia ótima, de modo que a incidência de material piezoelétrico varia, sendo maior próximo aos engastes e menor à medida que se afasta do lado engastado.

## 5 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA COM DISTRIBUIÇÃO DE ATUADORES PIEZOELÉTRICOS CONSIDERANDO ÍNDICES DE CONFIABILIDADE

Para este problema, após considerado a inserção de material piezoelétrico, são levados em conta os mesmos passos desenvolvidos nas Seções 3.1 a 3.3, onde para este projeto, além dos critérios já adotados, será inserida uma variável de incerteza relativo ao material piezoelétrico. Para considerar tais incertezas, serão introduzidas as variáveis  $\mathbf{y}$  e  $\alpha$ , onde  $\mathbf{y}$  é o vetor das variáveis aleatórias e  $\alpha$  representará o vetor das variáveis de incerteza do projeto, determinado por distribuições probabilísticas, assim como na Seção 3.4.

A fim de avaliar a probabilidade de falha com respeito a um cenário de falha escolhido, uma função estado limite é definida por  $H(\alpha)$  como condição de um bom funcionamento da estrutura. Para controlar a topologia será introduzido o índice de confiabilidade  $\beta$  com o vetor normalizado  $\alpha$ . No caso em que  $\alpha$  é uma distribuição normal, tem-se para cada  $\alpha_j$ , a equação (78).

Para simplificar o procedimento de análise, considera-se o problema de minimização de flexibilidade com a distribuição de atuadores piezoelétricos apresentado no Capítulo 4 e as definições da Seção 4.5, que fazem parte da modelagem do mesmo. Onde o problema pode então ser formulado pela obtenção de um valor estacionário do funcional  $l(u, \phi)$ , sobre o conjunto  $\Upsilon$ , definido para equação (104). Assim, o problema é dado por:

$$\begin{aligned} & \text{est} \\ & u, \phi, \rho_u, \rho_\phi, \alpha \quad l(u, \phi), \\ & \text{s. a:} \quad \beta(\alpha) \geq \beta_t, \\ & a(u, \phi, u_v, \phi_v, \rho_u, \rho_\phi) - l(u_v, \phi_v) = 0 \quad \forall u_v \in \mathcal{U}, \forall \phi_v \in \Phi. \end{aligned} \quad (173)$$

Seguindo a sequência do capítulo 4, será utilizada a abordagem de discretização via elementos finitos. Onde, além do campo de interesse no problema (173) ser o deslocamento  $u$ , rigidez  $c^E$  e distribuição de atuadores piezoelétricos, temos a relação

entre as variáveis determinísticas e a variável de incertezas  $\alpha$ , como feito no capítulo 3. Então, o problema descrito pela abordagem SIMP, na sua forma discretizada é dado por

$$\begin{aligned}
 est \quad & J(\alpha, u, \phi, \rho_u, \rho_\phi) = \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{uu} \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \mathbf{K}_{u\phi} \phi + \phi^T \mathbf{K}_{\phi u} \mathbf{U} - \phi^T \mathbf{K}_{\phi\phi} \phi \\
 s.a. \quad & \beta(\alpha) \geq \beta_t, \\
 & \mathbf{K}_{uu} \mathbf{U} + \mathbf{K}_{u\phi} \phi = \mathbf{F}_u \\
 & \mathbf{K}_{\phi u} \mathbf{U} - \mathbf{K}_{\phi\phi} \phi = \mathbf{Q}_\phi \\
 & \sum_e \rho_{u_e} V^e = \eta_u V \\
 & \sum_e \rho_{\phi_e} V^e = \eta_\phi V \\
 & 0 < \rho_{u_{min}} \leq \rho_{u_e} \leq 1 \\
 & 0 < \rho_{\phi_{min}} \leq \rho_{\phi_e} \leq 1 \\
 & e = 1, 2, 3, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{174}$$

Onde  $\mathbf{K}_{uu}$ ,  $\mathbf{K}_{u\phi}$  e  $\mathbf{K}_{\phi\phi}$  são as matrizes globais de rigidez, de acoplamento piezo-elétrico e de capacitância elétrica, respectivamente;  $\mathbf{K}_{\phi u}$  é a matriz  $\mathbf{K}_{u\phi}$  transposta;  $\mathbf{U}$  é a deflexão global;  $\phi$  é vetor global de potenciais elétricos;  $\mathbf{F}_u$  é o vetor global de forças;  $\mathbf{Q}_\phi$  é o vetor global de cargas elétricas e  $\rho_{u_e}$  e  $\rho_{\phi_e}$  são as densidades de cada elemento dos materiais e  $e$  é o índice elemental, sendo  $N$  o número de elementos.

## 5.1 Aplicações

Na sequência serão apresentados quatro casos em que foram realizadas simulações computacionais utilizando o *software* MATLAB, e como base, o programa de otimização estrutural dado no trabalho de Sigmund (2001) e o cálculo dos índices de confiabilidade dados no trabalho de KHARMANDA et al. (2004).

Para a simulação dos problemas apresentados nos casos 1, 2 e 3 de otimização topológica baseado em confiabilidade, foram considerados os índices de confiabilidade alvo como  $\beta_t = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  e também quando a confiabilidade não é considerada. Para os três casos utilizou-se 60x24 elementos finitos com 50% de volume, 10% de densidade de material piezoelétrico e força pontual  $f_p = -1 \times 10^{11} \mathbf{j}$ , localizada no canto inferior direito da viga (caso 1), como indicada na Figura 21(a) por  $f_p$ , uma força aplicada no meio da sua extremidade livre, como indicado na Figura 23(a) (caso 2) por  $f_p$  e um caso com mesma localização de força do caso 2, porém com restrição de localização para a densidade de material piezoelétrico (caso 3), ilustrado na Figura 25(a).

Na tabela 6 são fornecidas as sensibilidades calculadas de todos os valores médios

propostos, que são os mesmos definidos anteriormente com o acréscimo da variável média  $m_{volp}$ , que representa a densidade de material piezoelétrico. Pode-se perceber, pela tabela dos gradientes, que as variáveis médias  $m_{nely}$ ,  $m_{vol}$  e  $m_{volp}$  são negativas, assim vê-se que o número de elementos na direção vertical, fração de volume e densidade de atuadores piezoelétricos têm uma influência positiva no desempenho estrutural (ao aumentar estes valores, obtemos uma estrutura mais rígida). No entanto, os gradientes com relação aos valores médios  $m_F$  e  $m_{nelx}$  são positivos, logo, aumentando esses valores, se aumenta o valor da função de custo (aumentando a flexibilidade da estrutura).

Caso	1	2	3
$\partial J / \partial m_{f_p}$	$3,34 \times 10^{-8}$	$3,12 \times 10^{-8}$	$3,2 \times 10^{-8}$
$\partial J / \partial m_{nelx}$	317,5	280,3	288,3
$\partial J / \partial m_{nely}$	-458,885	-431,23	-439,24
$\partial J / \partial m_{vol}$	-2980	-2750	-2860
$\partial J / \partial m_{volp}$	-170	-150	-90

Tabela 6: Sensibilidades do desempenho estrutural com respeito às configurações propostas.

### 5.1.1 Caso 1

A estrutura utilizada na simulação para este caso foi uma viga como apresentado na figura 21(a).

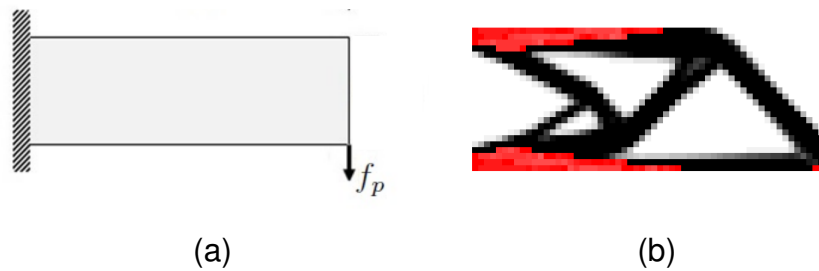


Figura 21: (a) Viga em balanço sujeita à carga pontual  $f_p$  no canto inferior direito. (b) Topologia ótima determinística correspondente ao esquema (a), onde se utilizou 60x24 elementos finitos com 50% do volume, 10% de densidade de material piezoelétrico e força pontual  $f_p = -1 \times 10^{11} \text{ j}$ .

Na figura 22 são apresentadas as seis topologias otimizadas com confiabilidade, onde percebe-se que para cada índice, há uma configuração final diferente.

Como exemplo, temos para o caso 1, os valores de saída das variáveis aleatórias  $y$ , após atualização com índice de confiabilidade  $\beta_t = 3$  e desvio padrão  $\sigma = 0,1m_{y_j}$ ,

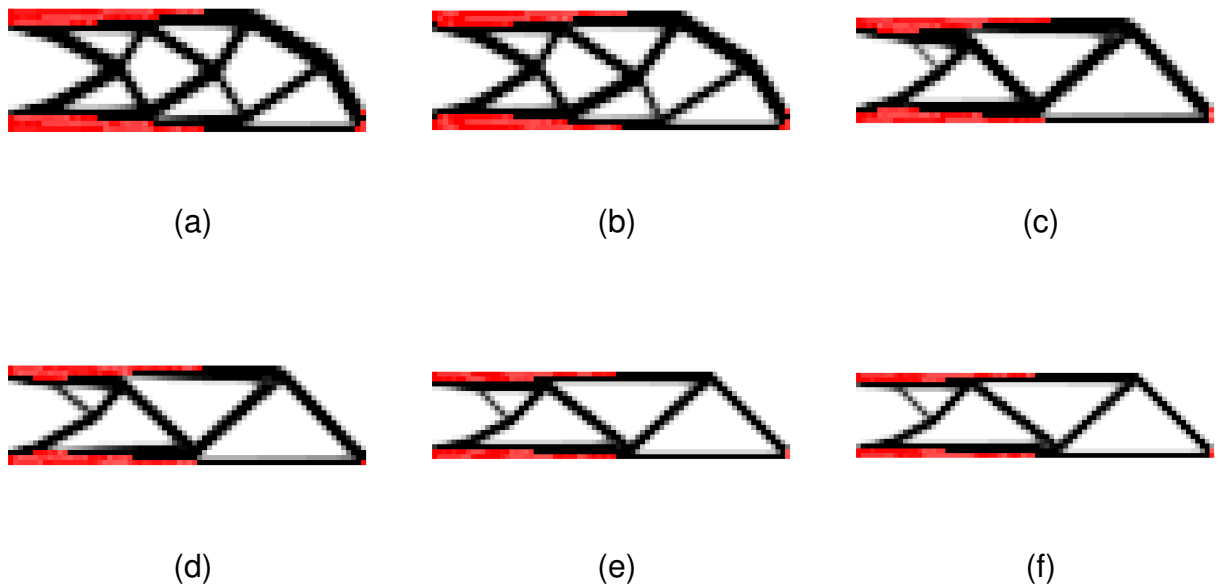


Figura 22: Resultados topológicos para diferentes índices de confiabilidade, que são: (a)  $\beta = 1$ , (b)  $\beta = 2$ , (c)  $\beta = 3$ , (d)  $\beta = 4$ , (e)  $\beta = 5$  e (f)  $\beta = 6$  para o caso 1.

obtidos pela equação (90), para cada componente do vetor  $y$ , são: força  $f_p = -1,137 \times 10^{11}$ , número de elementos na direção  $x = 68$ , número de elementos na direção  $y = 20$ , fração de volume igual a 43,11% e densidade de material piezoelétrico igual a 8,18%.

### 5.1.2 Caso 2

A estrutura utilizada na simulação para este caso está representada na figura 23(a).

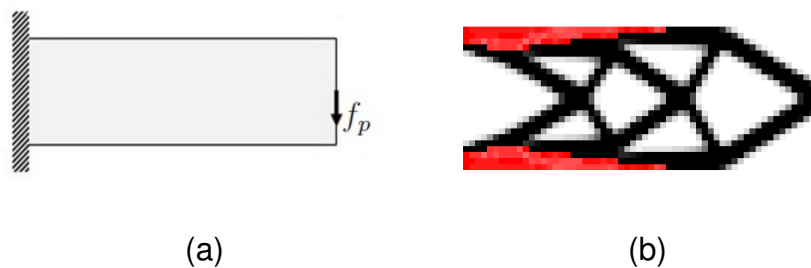


Figura 23: (a) Viga em balanço sujeita à carga pontual  $f_p$  aplicada no meio da sua extremidade livre. (b) Topologia ótima determinística correspondente ao esquema (a) onde se utilizou 60x24 elementos finitos, com 50% do volume, 10% de densidade de material piezoelétrico e força pontual  $f_p = -1 \times 10^{11} \mathbf{j}$ .

Na figura 24, assim como nos passos anteriores, são apresentadas as topologias otimizadas com confiabilidade.



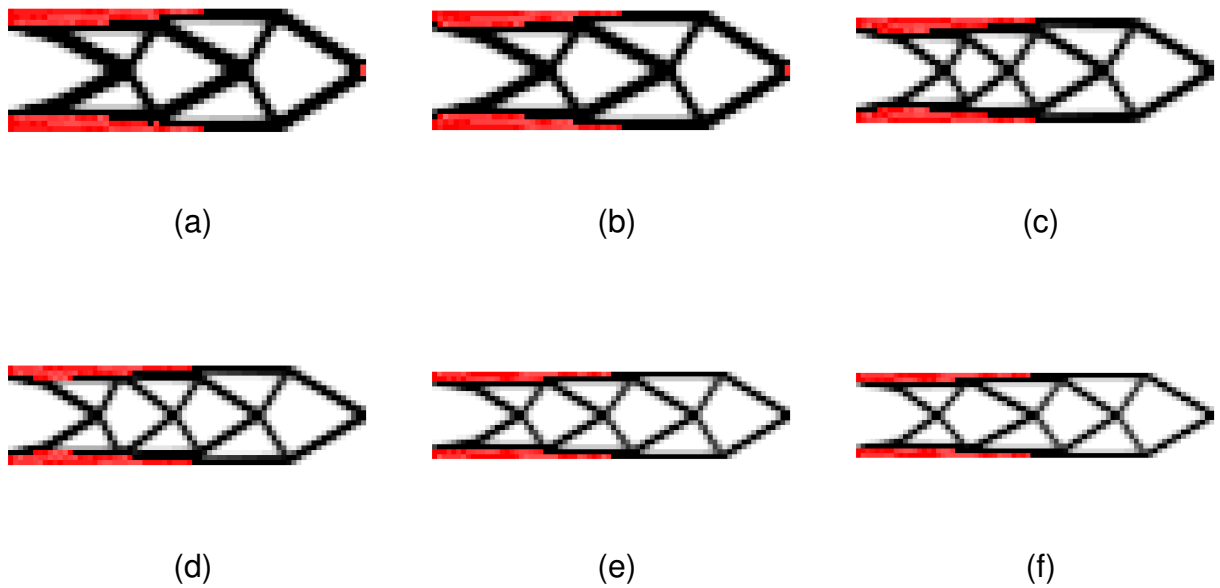


Figura 24: Resultados topológicos para diferentes índices de confiabilidade: (a)  $\beta = 1$ , (b)  $\beta = 2$ , (c)  $\beta = 3$ , (d)  $\beta = 4$ , (e)  $\beta = 5$  e (f)  $\beta = 6$  para o caso 2.

### 5.1.3 Caso 3

A estrutura utilizada na simulação para este caso está representada na figura 25(a).

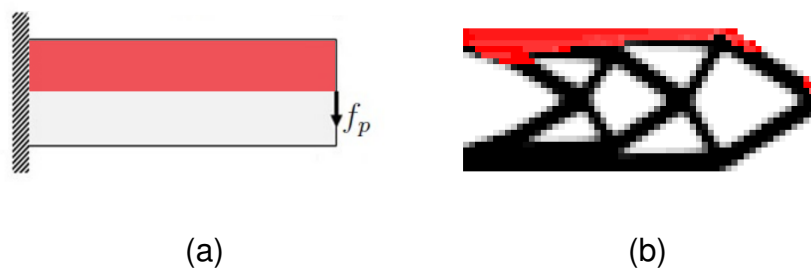


Figura 25: (a) Viga em balanço sujeita à carga pontual  $f_p$  aplicada no meio da sua extremidade livre. Em vermelho se encontra a região onde será permitida a distribuição de atuadores piezoelétricos. (b) Topologia ótima determinística correspondente ao esquema (a) onde se utilizou  $60 \times 24$  elementos finitos com 50% do volume, 10% de densidade de material piezoelétrico e força pontual  $f_p = -1 \times 10^{11} \text{ j}$ .

Na figura 26 tem-se as topologias otimizadas com confiabilidade, onde há para cada índice, uma configuração final diferente, como nos casos anteriores.

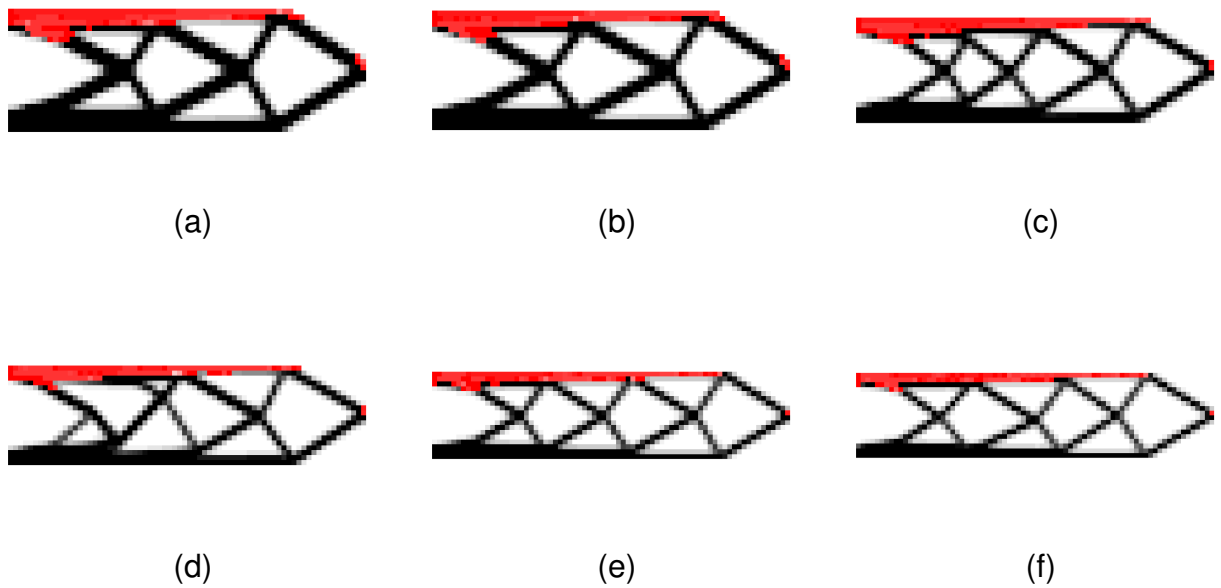


Figura 26: Resultados topológicos para diferentes índices de confiabilidade: (a)  $\beta = 1$ , (b)  $\beta = 2$ , (c)  $\beta = 3$ , (d)  $\beta = 4$ , (e)  $\beta = 5$  e (f)  $\beta = 6$  para o caso 3.

#### 5.1.4 Caso 4

A estrutura utilizada na simulação para este caso foi uma viga com um furo, como apresentado na figura 27(a).

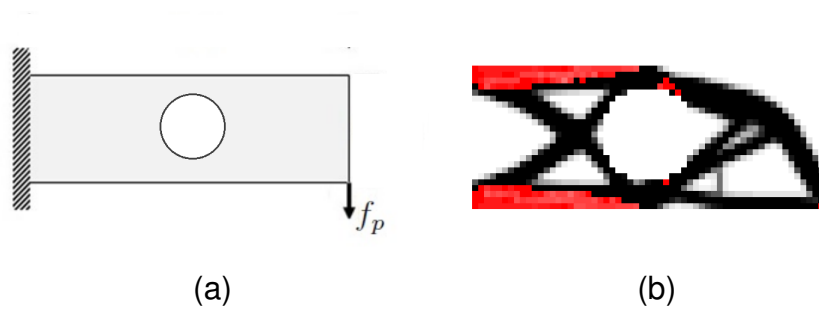


Figura 27: (a) Viga em balanço, com um furo centrado no meio (posição (30,12) e raio 8 elementos), sujeita à carga pontual  $f_p$  no canto inferior direito. (b) Topologia ótima determinística correspondente ao esquema (a), onde se utilizou 60x24 elementos finitos com 50% do volume, 10% de densidade de material piezoelétrico e força pontual  $f_p = -1 \times 10^{11} \mathbf{j}$ .

Para este caso o índice de confiabilidade foi inserido somente para a posição horizontal do furo, ou seja, o índice não altera mais frações de volume, número de elementos e força. Portanto  $\beta$  se encontra num caso de uma variável. Note que, assim como foi escolhido a posição como parâmetro, poderia se ter escolhido outros parâmetros,

como: posição vertical, raio ou num caso de uma elipse, a escolha dos semieixos. O cálculo da sensibilidade é feito somente para o valor médio  $m_{pos} = 30$ , que indica a posição do furo e desvio padrão  $\sigma_{pos} = 10\%$ . Para este caso, obtém-se  $\partial J / \partial m_{pos} = -1, 1$ , onde percebe-se, pelo valor do gradiente, que a variável média  $m_{pos}$  tem influência negativa. Assim vê-se que a posição, quanto mais a direita, menos energia gasta (ao menos localmente).

Na figura 28 são apresentadas as seis topologias otimizadas com confiabilidade.

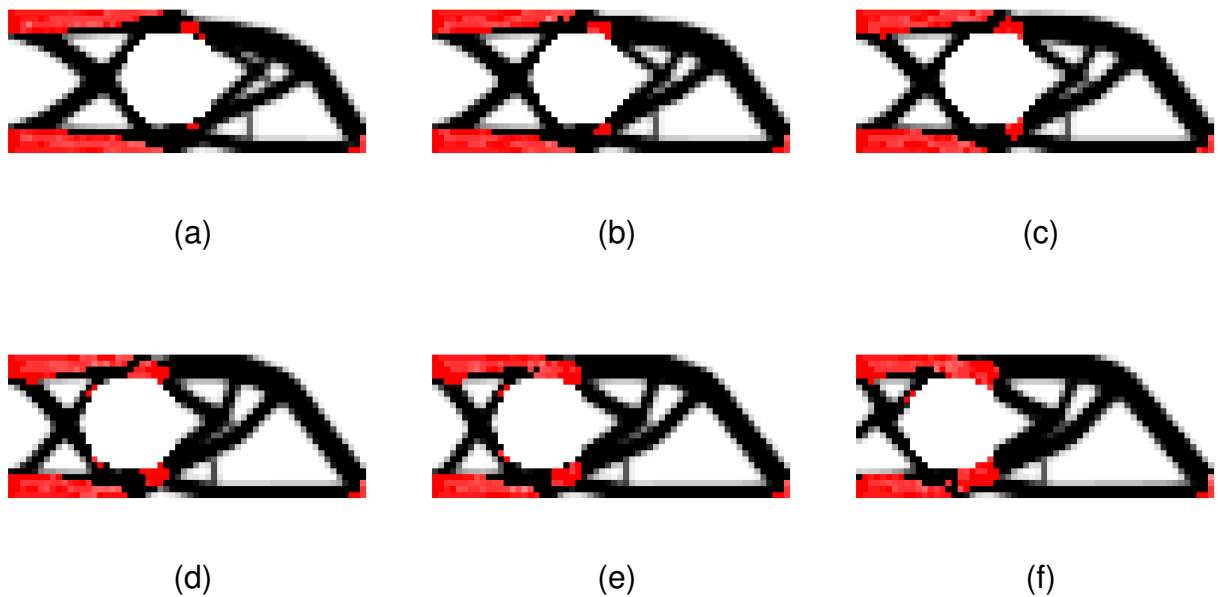


Figura 28: Resultados topológicos para diferentes índices de confiabilidade, que são: (a)  $\beta = 1$ , (b)  $\beta = 2$ , (c)  $\beta = 3$ , (d)  $\beta = 4$ , (e)  $\beta = 5$  e (f)  $\beta = 6$  para o caso 4.

Percebe-se que sendo o índice de confiabilidade  $\beta$  relacionado diretamente com a posição do furo, obtém-se uma variação significativa de estruturas, e consequentemente, uma localização bem diferente para os atuadores piezoelétricos se comparado com a topologia determinística às novas geradas considerando os novos índices  $\beta$ .

## 5.2 Análise dos resultados e discussões

Pode-se observar pelas Figuras 22, 24 e 26 que à medida que o valor do índice de confiabilidade  $\beta_t$  aumenta, as estruturas vão se tornando mais leves, porém a força que é imposta sobre as estruturas é aumentada, assim, suportando forças maiores em relação a otimização puramente determinística. Consequentemente, essas novas estruturas são geradas com custo maior, porém tomando o caso 1 como exemplo, ao comparar somente as forças aplicadas, para o caso determinístico ao caso  $\beta = 3$  que foi dado anteriormente, o aumento na força requerida por este índice foi de 13,7%,

representando um ganho estrutural.

Como foi mostrado nos casos do capítulo 3, para os casos deste capítulo também ocorrem resultados bem diferentes se compararmos a mesma configuração para índices de confiabilidades distintas. Analisando a Figura 21(b) em comparação com a Figuras 22(a) e 22(c), a Figura 23(b) comparando com a Figura 24(c), a Figura 25(b) comparando com a Figura 26(c) e a Figura 27(b) em comparação com a Figuras 28(a), 28(b), 28(c) e 28(f) .

## 6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Neste trabalho foi apresentada a piezoeletricidade como uma possibilidade de uso em materiais que sirvam como atuadores e possam ser inseridos em projetos estruturais. Mediante a otimização topológica buscou-se uma metodologia para melhor distribuição destes materiais nas estruturas.

Foi proposto considerar aleatoriedade nos parâmetros de entrada mais importantes de um problema de otimização estrutural, como a geometria e cargas. A aleatoriedade foi integrada ao problema de otimização topológica, onde também foram apresentadas simulações numéricas para mostrar o comportamento da forma que a estrutura toma, diante a índices de confiabilidade. Foi mostrado que a importância da aplicação dessa metodologia proposta, da confiabilidade estrutural, está na redução do peso da estrutura, para as mesmas dimensões.

Foram apresentadas simulações numéricas do problema de otimização topológica simultânea à localização de atuadores piezoelétricos, que mostraram a eficiência da metodologia proposta.

Foi apresentada, de forma detalhada, uma metodologia para o critério ótimo, baseada em trabalhos anteriores de SIGMUND (2001) e BENDSØE; SIGMUND (2003). Considera-se esta metodologia inovadora, uma vez que não foram identificados trabalhos científicos com esta proposta. Em comparação a Programação Linear Sequencial, utilizada nos trabalhos de MOLTER et al. (2013) e FERNANDEZ; MOLTER; BOTELHO (2017), o OC proposto mostrou-se vantajoso em termos de convergência, o que reduziu significativamente o tempo computacional das simulações.

O objetivo do modelo apresentado foi o de obter topologias ótimas mais confiáveis que o determinístico, gerando assim diferentes topologias para cada alvo de confiabilidade desejado, onde também pode-se trabalhar com a otimização de forma.

Apresentou-se a relação entre a probabilidade de falha de uma estrutura e o índice de confiabilidade, e a partir desta relação pôde-se utilizar diferentes índices de confiabilidade de uma estrutura e indicar a probabilidade de falha, ou vice-versa.

Mostrou-se que, de fato, ao considerar índices de confiabilidade, as estruturas foram mudando sua forma e tornaram-se mais leves. No entanto, mantiveram as propri-

edades mecânicas e puderam ser submetidas a solicitações maiores.

Como proposta de continuidade deste trabalho pretende-se integrar a otimização topológica com outras metodologias de análise de confiabilidade. Isto pode ser feito através da inserção do índice de confiabilidade no contexto da simulação estrutural, e não à parte, como foi feito neste trabalho; ou ainda, utilizando outros métodos de análise, como o Monte Carlo. Além disto, a otimização foi feita do ponto de vista estacionário, sendo que seria interessante fazê-la agora considerando a dinâmica estrutural, inclusive inserindo na modelagem o controle de vibrações.

## REFERÊNCIAS

AGARWAL, H. **Reliability based design optimization**: Formulations and methodologies. 2004. Tese — University of Notre Dame.

AM, H.; LIND, N. An Exact and Invariant First Order Reliability Format. **ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division**., v.100, p.111–121, 01 1974.

BECKER, E. B.; CAREY, G. F.; ODEN, J. T. **Finite Elements, An Introduction**: Volume I. Prentice Hall, 1981. 258p.

BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.71, n.2, p.197–224, 1988.

BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. Material interpolation schemes in topology optimization. **Archive of Applied Mechanics**, v.69, n.9, p.635–654, 1999.

BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology optimization**: theory, methods, and applications. Springer Science & Business Media, 2003.

CARBONARI, R. C.; SILVA, E. C.; NISHIWAKI, S. Optimum placement of piezoelectric material in piezoactuator design. **Smart Materials and Structures**, v.16, n.1, p.207–220, 2007.

CARDOSO, E. L.; FONSECA, J. S. O. An incremental Lagrangian formulation to the analysis of piezoelectric bodies subjected to geometric non-linearities. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.59, n.7, p.963–987, 2004.

CHENG, G.; LI, G.; CAI, Y. Reliability-based structural optimization under hazard loads. **Structural Optimization**, v.16, n.2-3, p.128–135, 1998.

COOK, R.; MALKUS, D.; PLESHA, M. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. John Wiley & Sons, 1989.

DÍAZ, A. R.; KIKUCHI, N. Solutions to shape and topology eigenvalue optimization problems using a homogenization method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.35, n.7, p.1487–1502, 1992.

DÍAZ, A.; SIGMUND, O. Checkerboard patterns in layout optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.10, n.1, p.40–45, 1995.

DONOSO, A.; SIGMUND, O. Optimization of piezoelectric bimorph actuators with active damping for static and dynamic loads. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.38, n.2, p.171–183, 2009.

FERNANDEZ, L. S. **Otimização topológica simultanea à localização de atuadores em estruturas**. 2015. Dissertação — UFPel.

FERNANDEZ, L. S.; MOLTER, A.; BOTELHO, F. S. Simultaneous topology optimization and proportional actuators localization. **SeMA Journal**, v.74, n.4, p.385–409, 2017.

GUILHERME, C. E. M. **Otimização topológica e cálculo do gradiente de forma para estruturas submetidas à restrição de fadiga**. 2006. Tese — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, UFRGS.

HAFTKA, R. T.; GÜRDAL, Z.; KAMAT, M. **Elements of structural optimization**. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992.

IEEE Standard on Piezoelectricity. **ANSI/IEEE Std 176–1987**, 1988.

JALALPOUR, M.; GUEST, J. K.; IGUSA, T. Reliability-based topology optimization of trusses with stochastic stiffness. **Structural Safety**, v.43, p.41–49, 2013.

JCSS, P. M. C. Joint Committee on Structural Safety. **Zurich, Switzerland**, 2001.

JOG, C. S.; HABER, R. B. Stability of finite element models for distributed-parameter optimization and topology design. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.130, n.3-4, p.203–226, 1996.

KANG, Z.; WANG, X.; WANG, R. Topology optimization of space vehicle structures considering attitude control effort. **Finite Elements in Analysis and Design**, v.45, n.6-7, p.431–438, 2009.

KENO-TUNG, C.; OLHOFF, N. Regularized formulation for optimal design of axisymmetric plates. **International Journal of Solids and Structures**, v.18, n.2, p.153–169, 1982.



KHARMANDA, G.; OLHOFF, N.; MOHAMED, A.; LEMAIRE, M. Reliability-based topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.26, n.5, p.295–307, 2004.

KUMAR, K. R.; NARAYANAN, S. Active vibration control of beams with optimal placement of piezoelectric sensor/actuator pairs. **Smart Materials and Structures**, v.17, n.5, p.055008, 2008.

LELIÈVRE, N.; BEAUREPAIRE, P.; MATTRAND, C.; GAYTON, N.; OTSMANE, A. On the consideration of uncertainty in design: optimization-reliability-robustness. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.54, n.6, p.1423–1437, 2016.

MAXWELL, J. C. On Reciprocal Figures, Frames, and Diagrams of Forces. **Transactions of the Royal Society of Edinburgh**, v.26, n.1, p.1–40, 1870.

MICHELL, A. G. M. The limits of economy of material in frame-structures. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, v.8, n.47, p.589–597, 1904.

MOHEIMANI, S. R.; FLEMING, A. J. **Piezoelectric transducers for vibration control and damping**. Springer Science & Business Media, 2006.

MOLTER, A.; FONSECA, J. S. O.; FERNANDEZ, L. S. Simultaneous topology optimization of structure and piezoelectric actuators distribution. **Applied Mathematical Modelling**, v.40, n.9-10, p.5576–5588, 2016.

MOLTER, A.; SILVEIRA, O. A. A.; BOTTEGA, V.; FONSECA, J. S. O. Integrated topology optimization and optimal control for vibration suppression in structural design. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.47, n.3, p.389–397, Mar 2013.

MOLTER, A.; SILVEIRA, O. A. A.; FONSECA, J. S. O.; BOTTEGA, V. Simultaneous piezoelectric actuator and sensor placement optimization and control design of manipulators with flexible links using SDRE method. **Mathematical Problems in Engineering**, v.2010, p.1–23, 2010.

OU, J.-S.; KIKUCHI, N. Integrated optimal structural and vibration control design. **Structural optimization**, v.12, n.4, p.209–216, 1996.

PANTOJA, J. C. **Geração automática via otimização topológica e avaliação de segurança de modelos de bielas e tirantes**. 2012. Tese — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, PUC-Rio.

PIEFORT, V. **Finite element modelling of piezoelectric active structures**. 2001. Tese — Université Libre de Bruxelles.

QI, H.; FANG, D.; YAO, Z. FEM analysis of electro-mechanical coupling effect of piezo-electric materials. **Computational Materials Science**, v.8, n.4, p.283–290, 1997.

SAGRILLO, L. V. S. **Análise de confiabilidade estrutural utilizando os métodos analíticos FORM e SORM**. 1994. Tese — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

SHUKLA, A.; MISRA, A. Review of Optimality Criterion Approach Scope, Limitation and Development in Topology Optimization. **International Journal of Advances in Engineering & Technology**, v.6, n.4, p.1886–1889, 2013.

SIGMUND, O. On the design of compliant mechanisms using topology optimization. **Journal of Structural Mechanics**, v.25, n.4, p.493–524, 1997.

SIGMUND, O. A 99 line topology optimization code written in Matlab. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.21, n.2, p.120–127, Apr 2001.

SIGMUND, O.; PETERSSON, J. Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.16, n.1, p.68–75, 1998.

SILVA, M.; TORTORELLI, D. A.; NORATO, J. A.; HA, C.; BAE, H.-R. Component and system reliability-based topology optimization using a single-loop method. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.41, n.1, p.87–106, 2010.

SILVEIRA, O. A. A. **Projeto simultâneo de otimização topológica e controle para redução de vibrações utilizando material piezelétrico**. 2012. Tese — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, UFRGS.

SILVEIRA, O. A. A.; FONSECA, J. S. O.; SANTOS, I. F. Actuator topology design using the controllability Gramian. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.51, n.1, p.145–157, 2014.

STEVENSON, J. D. Reliability analysis and optimum design of structural systems with applications to rigid frames. **Division of Solid Mechanics and Structures**, v.14, 1967.

STOLPE, M.; SVANBERG, K. Modelling topology optimization problems as linear mixed 0–1 programs. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.57, n.5, p.723–739, 2003.

SUN, D.; MILLS, J. K.; SHAN, J.; TSO, S. A PZT actuator control of a single-link flexible manipulator based on linear velocity feedback and actuator placement. **Mechatronics**, v.14, n.4, p.381–401, 2004.

TIERSTEN, H. Hamilton's principle for linear piezoelectric media. **Proceedings of the IEEE**, v.55, n.8, p.1523–1524, 1967.

TZOU, H.; TSENG, C. Distributed piezoelectric sensor/actuator design for dynamic measurement/control of distributed parameter systems: a piezoelectric finite element approach. **Journal of sound and vibration**, v.138, n.1, p.17–34, 1990.

YI, P.; ZHU, Z.; GONG, J. An approximate sequential optimization and reliability assessment method for reliability-based design optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.54, n.6, p.1367–1378, 2016.