

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
Instituto de Física e Matemática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática



Dissertação

Análise de sistemas biológicos com difusão e controle populacional

Daiane Frighetto Frighetto

Pelotas, 2018

Daiane Frighetto Frighetto

Análise de sistemas biológicos com difusão e controle populacional

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Molter
Coorientador: Prof. Dr. Camila Pinto da Costa

Pelotas, 2018

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas
Catalogação na Publicação

F898a Frighetto, Daiane Frighetto

Análise de sistemas biológicos com difusão e controle populacional / Daiane Frighetto Frighetto ; Alexandre Molter, orientador ; Camila Pinto da Costa, coorientadora. — Pelotas, 2018.

144 f. : il.

Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2018.

1. Equação de fisher-kolmogorov. 2. Sistema de lotka-volterra modificado com difusão. 3. Solução tipo onda viajante. 4. Controle biológico. I. Molter, Alexandre, orient. II. Costa, Camila Pinto da, coorient. III. Título.

CDD : 632.69

Daiane Frighetto Frighetto

Análise de sistemas biológicos com difusão e controle populacional

Dissertação aprovada, como requisito parcial, para obtenção do grau de Mestre em Modelagem Matemática, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas.

Data da Defesa: 01 de março de 2018

Banca examinadora:



Prof. Dr. Alexandre Molter (Orientador)
Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil



Prof. Dr. Leslie Darién Pérez Fernández
Doutor em Matemática pelo Instituto de Cibernética, Matemática e Física, Cuba



Profa. Dra. Rejane Pergher
Doutora em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil



Prof. Dr. Luiz Alberto Díaz Rodrigues
Doutor em Matemática Aplicada pela Universidade Estadual de Campinas, Brasil

**Dedico este trabalho a Deus,
aos meu familiares e amigos que me ajudaram, apoiaram e acreditaram no meu
potencial.**

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer...

A Deus, por ter iluminado meus pensamentos e me guiado em um caminho de muitas oportunidades.

Aos meus pais Marilda e Claudino pelo apoio e compreensão.

Ao meu irmão Felipe, cunhada Larissa e os meus irmãos do coração Joel e Fernanda pelo incentivo.

Aos meus familiares: *Nonna* Ilda, meus dindos, tios e primos, e a minha família do coração Fernanda, Sara e Sofia, pelo incentivo constante e pela compreensão por todos os momentos que não pude estar presente.

À Rafaela, pela amizade e companheirismo demonstrado nesse período. Por todos os momentos de angústia, de incertezas e de tensão que você esteve do meu lado e sempre com bons conselhos e atitudes, me ajudou a enfrentá-los e a superar os desafios. Por dividir os momentos felizes, de muitas risadas e diversão.

Ao meus colegas, que considero meus amigos, presentes que o mestrado me trouxe: Matheus, Jonathan, Noé, Guilherme, Marcos, Bruna, Rodrigo, Amanda e Roberto. Palavras serão superficiais para expressar o quanto vocês foram importantes. Foram provas, trabalhos, momentos de estudos “regados” com muito *mate* e algumas xícaras de café, um apoiando e incentivando o outro. Foi uma honra tê-los conhecido!

Ao Junior, Ana e Pedro, meus vizinhos, que me acolheram em Pelotas de braços abertos e com muito carinho. Em especial a Adriane (Adi) pela parceria, pelos momentos de descontração, pelas boas risadas e conselhos.

À coordenação e aos professores do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática pelos ensinamentos e atenção prestada. Em especial ao professor Leslie, pela confiança, prestatividade e amizade em todos os momentos.

Ao meu orientador Alexandre pelo voto de confiança, pela paciência e pelos ensinamentos transmitidos ao longo do mestrado.

A minha co-orientadora Camila pela confiança, dedicação prestada, pelo apoio em todos os momentos, por acreditar na minha competência e pela grande amizade.

A CAPES pelo apoio financeiro.

**“O sucesso nasce do querer,
da determinação e persistência
em se chegar a um objetivo.
Mesmo não atingindo o alvo,
quem busca e vence obstáculos,
no mínimo fará coisas admiráveis.”**

— JOSÉ DE ALENCAR

RESUMO

FRIGHETTO FRIGHETTO, Daiane. **Análise de sistemas biológicos com difusão e controle populacional**. 2018. 143 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2018.

A utilização de modelos populacionais vem crescendo nas ciências agrárias e biológicas. Um dos principais interesses no estudo desses modelos é avaliar qualitativamente e quantitativamente o impacto das interações entre diferentes populações com o seu habitat ou entre elas, como: átomos ou moléculas, neurônios, bactérias, plantas, animais e até mesmo pragas ou indivíduos infectados por exemplo. Os modelos matemáticos descrevem o crescimento dessas populações com o propósito de fazer previsões, auxiliando na tomada de decisões caso haja necessidade da aplicação de controle nesses sistemas biológicos. Neste trabalho, defende-se a utilização do controle biológico, que consiste na regulação do crescimento da população através da intervenção humana ou por inimigos naturais, podendo ser muito eficiente no controle de pragas e ao mesmo tempo diminui a utilização de agrotóxicos, se tornando menos invasivo à natureza. Tem-se como objetivo estudar dois modelos populacionais de reação-difusão: a equação de Fisher-Kolmogorov para uma espécie, e o sistema de Lotka-Volterra modificado com difusão para duas espécies, ambos unidimensionais, sem e com a aplicação do controle. Esses modelos descrevem a dispersão de indivíduos em que o crescimento da população ocorre na forma de frente de onda, avançando em uma velocidade constante para as regiões vazias até atingir a capacidade de suporte do meio, assim, admitindo solução do tipo onda viajante, o que permite a realização de uma análise qualitativa da solução através da teoria de estabilidade e o encontro de soluções aproximadas. A partir do estudo realizado em ambos os modelos sem a influência de reguladores, aplica-se a teoria de controle ótimo linear considerando sistemas biológicos que necessitam da introdução de estratégias de controle para atingirem o equilíbrio desejado ou estabilizarem abaixo dos níveis de danos econômicos e/ou biológicos. Esse procedimento, parte inovadora desse trabalho, constitui uma metodologia eficaz na aplicação de controle em sistemas biológicos, cujo comportamento é modelado pelas equações de reação-difusão, que será ilustrada através das simulações computacionais.

Palavras-chave: Equação de Fisher-Kolmogorov, Sistema de Lotka-Volterra modificado com difusão, Solução tipo onda viajante, Controle biológico.

ABSTRACT

FRIGHETTO FRIGHETTO, Daiane. **Modeling of biological systems of competition with diffusion and population control**. 2018. 143 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2018.

The use of population models is increasing in agrarian and biological sciences. One of the main interests in the study of these models is to evaluate qualitatively and quantitatively the impact of interactions between different populations with their habitat or between them, such as: atoms or molecules, neurons, bacteria, plants, animals and even pests or infected individuals for example. Mathematical models describe the growth of these populations for the purpose of making predictions, contributing in the decision making if there is need for the application of control in these biological systems. In this work, we defend the use of biological control, which consists in regulating population growth through human intervention or natural enemies, being very efficient in pest control and at the same time reducing the use of pesticides, becoming less invasive to nature. The aim of this work is to study two population reaction-diffusion models: the Fisher-Kolmogorov equation for a species, and the modified Lotka-Volterra system with diffusion for two species, both in one dimension, with and without control. These models describe the dispersion of individuals in which the population growth occurs in the form of a wavefront, advancing at a constant velocity to the empty regions until reaching the supporting capacity of the medium, thus, admitting a traveling wave type solution, which allows a qualitative analysis of the solution through the theory of stability and the finding of approximate solutions. From the study carried out on both models without the influence of regulators, the theory of linear optimal control is applied considering biological systems that need the introduction of control strategies to achieve the wanted balance or stabilize below economic and/or biological damages. This procedure, an innovative part of this work, constitutes an effective methodology in the application of control in biological systems, whose behavior is modeled by the reaction-diffusion equation, which will be illustrated through computational simulations.

Keywords: Mathematical modeling of biological systems, Control Theory, Reaction-Diffusion Models, Solution by traveling wave, Biological control.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Formulação do princípio de conservação. Fonte: adaptado (LOGAN, 2014).	27
Figura 2	Organograma da organização do trabalho.	38
Figura 3	Perfil de onda que viaja para a direita com velocidade constante c . Fonte: adaptado (LOGAN, 2008).	40
Figura 4	Onda viajante da figura 3 representada em f, x, t . Fonte: adaptado (LOGAN, 2008).	41
Figura 5	Onda viajante estacionária e em movimento descritas em: a) $t = 0$; b) $t = 1$. Fonte: adaptado (EDELSTEIN-KESHET, 1988).	42
Figura 6	Solução da equação de advecção considerando uma frente de onda que viaja para a direita com velocidade constante c . Fonte: adaptado LOGAN (2008).	43
Figura 7	Configuração de um sistema de controle moderno. Fonte: adaptado (NAIDU, 2003).	49
Figura 8	Plano de fase do sistema (4.11).	68
Figura 9	Frente de onda $W(z)$ (4.70) com diferentes declividades.	75
Figura 10	Solução aproximada (4.73) obtida pelo método de perturbação.	76
Figura 11	a) Solução aproximada (4.73) considerando t fixo; b) Solução aproximada (4.73) considerando x fixo.	76
Figura 12	Gráfico do erro da solução aproximada (4.70) na EDO (4.10) com $c = 2$	77
Figura 13	Gráfico do erro da solução aproximada (4.73) para EDP (4.6) com $c = 2$	78
Figura 14	Para o sistema (5.18) com $R = 1$, $Q = I_2$ e $\kappa = [1.0175 \ 0.3439]$ com condição inicial $W_0 = 0,2$ e $V_0 = 0,0257$ tem-se: a) função $L(y)$, positiva definida; b) trajetória para $W(z)$; c) trajetória para $V(z)$; e d) a trajetória para função de controle $u_1(z)$	86
Figura 15	Para o sistema (5.18) com $R = 1$, $Q = I_2$ e $\kappa = [1.0175 \ 0.3439]$ com condição inicial $W_0 = 0,8$ e $V_0 = 0,0257$ tem-se: a) função $L(y)$, positiva definida; b) trajetória para $W(z)$; c) trajetória para $V(z)$; e d) a trajetória para função de controle $u_1(z)$	87
Figura 16	Para o sistema (5.18) com $R = 50$, $Q = [10 \ 1; 1 \ 10]$ e $\kappa = [0.4698 \ 0.2012]$ com condição inicial $W_0 = 0,2$ e $V_0 = 0,0257$ tem-se: a) função $L(y)$, positiva definida; b) trajetória para $W(z)$; c) trajetória para $V(z)$; e d) a trajetória para função de controle $u_1(z)$	88

Figura 17	Para o sistema (5.18) com $R = 50$, $Q = \begin{bmatrix} 10 & 1; 1 & 10 \end{bmatrix}$ e $\kappa = [0.4698 \ 0.2012]$ com condição inicial $W_0 = 0,8$ e $V_0 = 0,0257$ tem-se: a) função $L(y)$, positiva definida; b) trajetória para $W(z)$; c) trajetória para $V(z)$; e d) a trajetória para função de controle $u_1(z)$	89
Figura 18	Densidade de aguapés sem aplicação de controle e com aplicação de controle.	95
Figura 19	Solução do sistema controlado (6.39) para a condição inicial $w(x, 0) = 140, 14$	101
Figura 20	Solução do sistema controlado (6.39) para a condição inicial $w(x, 0) = 560, 54$	102
Figura 21	Solução do sistema controlado (6.39) para a condição inicial não constante $w(x, 0) = x^2$	102
Figura 22	Diferentes densidades de plantas $w(x, y, t)$ (g/m^2) com a evolução do tempo t , com condição inicial $w_0 = 140$	103
Figura 23	Raízes do polinômio característico (7.40) com valores diferentes para a constante a . Foram utilizados $b = 0,5$; $c = 2$; e $a^* = 2,1$. Fonte: (SABETI, 2007) adaptado.	111
Figura 24	Aproximação oscilatória para $W(z)$ (curva clara) e $V(z)$ (curva escura) para as condições de contorno (7.28) considerando $b = 0,25$; $c = 2$ e $a > a^*$	112
Figura 25	Aproximação monótona para $W(z)$ (curva clara) e $V(z)$ (curva escura) para as condições de contorno (7.28) considerando $b = 0,25$; $c = 2$ e $a < a^*$	112
Figura 26	Aproximação oscilatória para $W(z)$ (curva clara) e $V(z)$ (curva escura) para as condições de contorno (7.29) considerando $b = 0,25$; $c = 2$ e $a > a^*$. Fonte: SABETI (2007).	114
Figura 27	Aproximação monótona para $W(z)$ (curva clara) e $V(z)$ (curva escura) para as condições de contorno (7.29) considerando $b = 0,25$; $c = 2$ e $a < a^*$. Fonte: SABETI (2007).	114
Figura 28	Para o sistema (8.11) com $R = 1$, $Q = 100 \cdot I_3$ e $\kappa = 10^3[-0.1336 \ 0.0141 \ 2.5912]$ com e $b = 0,75$ condição inicial $W_0 = 0,72$, $V_0 = 0,01$ e $Z_0 = 0$ tem-se: a) função $L(y)$, positiva definida; b) trajetória para $W(z)$; c) trajetória para $V(z)$; e d) trajetória para função de controle $u_2(z)$	119
Figura 29	Para o sistema (8.11) com $R = 1$, $Q = 100 \cdot I_3$ e $\kappa = 10^3[-0.1185 \ 0.0142 \ 3.9159]$ e $b = 0,85$ com condição inicial $W_0 = 0,83$, $V_0 = 0,01$ e $Z_0 = 0$ tem-se: a) função $L(y)$, positiva definida; b) trajetória para $W(z)$; c) trajetória para $V(z)$; e d) trajetória para função de controle $u_2(z)$	120

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Exemplos de termos fonte (F). Fonte: adaptado (KOT, 2001). . . .	28
----------	--	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EDO	Equação Diferencial Ordinária.
EDP	Equação Diferencial Parcial.
HJB	Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman.
<i>min</i>	Mínimo.
<i>grad</i>	Gradiente.
<i>det</i>	Determinante.
LQR	Controle linear quadrático (<i>Linear Quadratic Regulator</i>).
<i>cte</i>	Constante qualquer.
TFF	Transformada Finita de Fourier.
c.q.d	Como se queria demonstrar.

LISTA DE SÍMBOLOS

Caracteres gregos

β	Entrada perturbada.
γ	Raio.
ϵ	Constante.
ε	Parâmetro pequeno entre $0 < \varepsilon \ll 1$.
θ	Ângulo.
Θ	Variável auxiliar.
κ	Matriz ganho.
ν	Constante.
ξ	Variável auxiliar.
ϖ	Função auxiliar.
ϱ	Coeficiente do meio viscoso.
τ	Capacidade técnica de recolhimento de aguapés.
v	Função de Lyapunov.
$\phi(x, t)$	Fluxo.
φ	Ângulo formado entre a haste do pêndulo e a vertical.

Caracteres gregos subscritos

β_E	Excitação constante.
δ_i	Parâmetro que representa a retirada ou inclusão de indivíduos.
ϑ_i	Funções auxiliares.
λ_i	Autovalores $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots)$.
λ_M	Ponto de máximo.
λ_m	Ponto de mínimo.
ρ_i	Constantes positivas que caracterizam o peso de cada tipo de controle.
τ_i	Constantes positivas que caracterizam a condição técnica da aplicação do controle.
ψ_0	Variável adjunta da função de Hamilton.
ψ_1	Variável adjunta da função de Hamilton.

χ Variável auxiliar.

Caracteres sobrescritos

$\mathcal{C}^{-1}$ Transformada finita inversa de Fourier-cosseno.

$C^i(\mathbb{R})$ Número de vezes que a EDP é diferenciável.

$g(x^*)$ Vetor de funções contínuas no estado ótimo.

J^* Mínimo do funcional $J(u)$.

Q^* Matriz de pesos simétrica ótima.

$\mathcal{S}^{-1}$ Transformada finita inversa de Fourier-seno.

u^* Parte do controle que estabiliza o sistema em torno da órbita desejada.

x^* Trajetória ótima.

Caracteres subscritos

a_i Taxa de reprodução ou mortalidade.

a_l Número finito que indica o início do intervalo x .

A_0 Coeficiente de Fourier.

A_n Coeficiente de Fourier.

b_{ij} Taxa de predação, competição ou conversão.

b_l Número finito que indica o fim do intervalo x .

B_n Coeficiente de Fourier.

c_p Taxa que mede os efeitos de interação da presa com o predador.

c_1 Constante arbitrária.

c_2 Constante arbitrária.

D_1 Coeficiente de difusão de presas.

D_2 Coeficiente de difusão de predadores.

E_c Energia cinética.

E_P Energia potencial.

E_T Energia total.

f, f_0 Funções dependentes de x e t .

f_i Funções contínuas de variáveis x_i .

f_x, f_{xx} Derivadas parciais.

f'_0 Derivada ordinária.

$F_c(n)$ Função qualquer transformada após a aplicação da TFF-cosseno.

$F_s(n)$ Função qualquer transformada após a aplicação da TFF-seno.

$g_i(s)$ Funções que compõem a solução assintótica do problema perturbado $(g_0(s), g_1(s), g_2(s))$.

I_n Matriz identidade de ordem n .

k_i Constantes arbitrárias (k, k_1, k_2) .

K_0	Capacidade de suporte inicial do meio.
m_e	Massa do pêndulo.
N_0	População inicial de uma determinada espécie.
P_i	Pontos críticos ou pontos de equilíbrio do sistema (P_1, P_2, P_3, P_4) .
r_1	Taxa de natalidade per capita.
R_i	Fator de ponderação.
t_f	Instante de tempo final.
T_{99}	Período necessário para remover 99% das plantas.
u_c	Parte do controle que mantém o sistema controlado na trajetória desejada.
U_i	Função de controle que representa a o número de espécies retidas ou introduzidas em um sistema.
w_0	Condição inicial de $w(x, t)$.
$w_c(n, t)$	Função $w(x, t)$ transformada pela TFF-cosseno.
W_1, W_2	Funções duas vezes diferenciáveis.
x_0	Condição inicial para o vetor de estado.
x_1	Densidade de presas.
x_2	Densidade de predadores.
$x_a(t)$	Valor atual.
$x_d(t)$	Valor desejado.
$x_a(t_f)$	Valor atual no tempo final.
$x_d(t_f)$	Valor desejado no tempo final.
x_i	Densidade da espécie i no tempo t .
x_j	Densidade da espécie j no tempo t .
x_E	Ponto de equilíbrio.
z_0	Constante.

Outros caracteres

a	Taxa de crescimento intrínseco da população.
A	Matriz de estado.
b	Taxa que mede os efeitos de interação da presa com o predador.
B	Matriz de controle.
c	Velocidade ou velocidade de onda.
$\mathcal{C}$	Transformada finita de Fourier-cosseno.
$C(0, \gamma)$	Ponto em uma vizinhança da origem de raio γ .
d	Taxa de mortalidade per capita.
D	Coeficiente de difusividade.
F	Termo fonte $(F(x, t, w)$ ou $f(w))$.
$f(W, V)$	Função auxiliar.

g	Aceleração da gravidade.
$g(s)$	Função auxiliar.
$g(x)$	Vetor de funções contínuas.
$g(W, V)$	Função auxiliar.
G	Matriz semi-definida positiva.
$h(W, V)$	Função auxiliar.
H	Função Hamiltoniana ou Função de Hamilton.
$H(Y)$	Vetor que corresponde aos componentes não lineares.
$\mathcal{H}$	Princípio do máximo de Pontryagin
i	Índice referente número de presas no sistema.
I	Funcional/Índice de desempenho.
$IF(x)$	Fator integrante.
j	Índice referente número de predadores no sistema.
$J(u)$	Funcional quadrático.
$\mathcal{J}$	Matriz jacobiana.
K	Capacidade de suporte do meio.
l	Comprimento do Canal.
$\mathcal{L}$	Período da função.
m	Coeficiente determinado a partir do grau da derivada.
M	Constante obtida da aplicação da estratégia de controle na EDO.
$\bar{M}$	Função M transformada após aplicação da TFF-cosseno.
n	Número de populações consideradas no sistema.
N	População de uma determinada espécie.
O	Função erro de truncamento.
P	Matriz de pesos definida positiva.
Q	Matriz de ponderação semi-definida.
r	Raio.
R	Matriz de ponderação definida positiva.
s	Variável independente na solução assintótica.
S	Gradiente de $W(z)$.
$S(j)$	Função auxiliar.
$\mathcal{S}$	Transformada finita de Fourier-seno.
u	Função de controle.
$\bar{u}(x, t)$	Função de controle para a EDP.
U	Função de controle composta por u_c e u^* .
v	Variável auxiliar.
$V(j)$	Função auxiliar.
$V(z)$	Função auxiliar.

$W(z)$	Solução oriunda da aplicação da teoria de onda viajante em $w(x, t)$.
$w(x, t)$	Densidade populacional que varia ao longo do tempo e do espaço.
$\mathbf{x}$	Vetor de estado.
X	estado de equilíbrio desejado.
y	Desvio da trajetória do sistema.
Y	Vetor com componente de y_i .
z	Variável de onda.
Z	Variável auxiliar.

Símbolos

*	Termos no estado ótimo.
–	Termos adimensionais.
—	Mínimo.
+	Máximo.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	20
1.1	Motivação do trabalho	20
1.2	Modelos matemáticos de sistemas biológicos	22
1.3	Modelos biológicos com controle	32
1.4	Objetivos e organização do trabalho	35
2	PRELIMINARES: ALGUNS CONCEITOS BÁSICOS	39
2.1	Solução por onda viajante	39
2.1.1	Metodologia para uma solução tipo onda viajante	40
2.1.2	Exemplos de soluções de EDPs por onda viajante	43
2.2	Métodos de Perturbação	44
2.2.1	Problemas de perturbação singular	45
2.2.2	Problemas de perturbação regular	45
2.3	Transformada Finita de Fourier	45
2.4	Controle ótimo e o princípio de Pontryagin	48
2.4.1	Introdução a teoria de controle ótimo	48
2.4.2	O princípio de Pontryagin	52
3	SÍNTESE DA TEORIA DE CONTROLE PARA SISTEMAS BIOLÓGICOS COM REALIMENTAÇÃO	54
3.1	Controle ótimo linear realimentado para sistemas lineares	54
3.2	Controle ótimo linear realimentado para sistemas não lineares	57
3.3	Controle não linear realimentado utilizando o princípio do máximo	59
4	MODELO REATIVO-DIFUSIVO UNIDIMENSIONAL PARA UMA ESPÉCIE: EQUAÇÃO DE FISHER-KOLMOGOROV	64
4.1	Solução por onda viajante	64
4.2	Análise da estabilidade	66
4.3	Solução Assintótica: Método de Perturbação	69
4.4	Análise do modelo de Fisher-Kolmogorov considerando duas variáveis espaciais	78
5	CONTROLE POPULACIONAL APLICADO A EQUAÇÃO DE FISHER-KOLMOGOROV A PARTIR DA TEORIA DE SOLUÇÃO POR ONDA VIAJANTE	81
5.1	Controle ótimo linear aplicado no sistema não linear de Fisher-Kolmogorov	81

5.2	Aplicação de uma estratégia de controle a um sistema de plantas aquáticas.	84
6	CONTROLE ESPAÇO-TEMPORAL DO SISTEMA BIOLÓGICO DE PLANTAS AQUÁTICAS	90
6.1	Controle linear realimentado aplicado a um modelo de plantas aquáticas utilizando o princípio do máximo	90
6.2	Controle linear realimentado inserido diretamente na equação de Fisher-Kolmogorov aplicado a um sistema biológico de plantas aquáticas	96
6.3	Análise do modelo de Fisher-Kolmogorov controlado considerando duas variáveis espaciais	103
7	MODELO REATIVO-DIFUSIVO UNIDIMENSIONAL PARA DUAS ESPÉCIES: SISTEMA DE LOTKA-VOLTERRA MODIFICADO COM DIFUSÃO	104
7.1	Solução por onda viajante	104
7.2	Análise da estabilidade	107
8	CONTROLE POPULACIONAL APLICADO AO SISTEMA DE LOTKA-VOLTERRA MODIFICADO COM DIFUSÃO A PARTIR DA TEORIA DE SOLUÇÃO POR ONDA VIAJANTE	115
8.1	Controle ótimo linear para o sistema de Lotka-Volterra modificado com difusão	115
8.2	Aplicação de uma estratégia de controle em um sistema biológico modelado pelo sistema de Lotka-Volterra modificado com difusão	118
9	CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS	122
	REFERÊNCIAS	127
	ANEXO A TEORIA DE ESTABILIDADE GLOBAL: ESTABILIDADE DE LYAPUNOV	132
A.1	Primeiro Método de Lyapunov	132
A.2	Segundo Método de Lyapunov	133
	ANEXO B CONTROLE ÓTIMO LINEAR REALIMENTADO: TEOREMAS E DEMONSTRAÇÕES	136
	ANEXO C PRODUÇÃO CIENTÍFICA	141

1 INTRODUÇÃO

1.1 Motivação do trabalho

Nas últimas décadas, a preocupação com a preservação da biodiversidade aumentou significativamente devido ao crescimento exagerado de algumas populações¹ e a extinção de outras, contribuindo assim, para o desequilíbrio do ecossistema. Em virtude disso, pesquisadores vem estudando e desenvolvendo modelos matemáticos capazes de representar o comportamento de determinadas espécies, levando em conta alguns fatores, como a interação entre as mesmas e com o meio onde vivem, em um intervalo de tempo, tornando possível prever a dinâmica dessas populações, contribuindo no gerenciamento e na tomada de decisões e, se necessário, controlá-las.

O controle pode ser feito de diversas formas, entre as mais usuais, o controle biológico e o controle com produtos químicos. O controle biológico é um mecanismo natural que consiste na regulação do crescimento populacional de plantas ou animais pela intervenção humana ou por inimigos naturais, podendo ser muito eficiente no controle de pragas. Nesses casos, tem-se por objetivo o controle através do uso de organismos vivos, como parasitas, predadores, patógenos e outros concorrentes da praga.

A escolha da estratégia de controle requer informações sobre a fauna e a flora existentes no ambiente, devido ao possível dano ecológico que essa intervenção pode desencadear momentaneamente ou futuramente. Também são avaliadas a viabilidade, tanto biológica como financeira, da implementação do método de controle.

A técnica de controle biológico é relevante do ponto de vista da sustentabilidade pois, ao contrário do controle com produtos químicos (pesticidas e agrotóxicos), tem baixo custo de implementação, além de não causar grandes danos ao ecossistema. Outro ponto positivo é a contribuição da prática na preservação do meio ambiente, melhorando a saúde e a qualidade de vida dos seres humanos.

Modelos populacionais vem sendo utilizados em diversas áreas da ciências dentre as quais pode-se destacar as biológicas e as agrárias. É possível descrever o

¹Uma população é constituída pelo conjunto de indivíduos de uma mesma espécie que ocupam um território comum e que são capazes de interagirem entre si (PRICE, 1980).

comportamento das populações interagindo no seu habitat ou com outras espécies, através da modelagem matemática. As interações entre elas podem ser classificadas dependendo da relação existente entre as espécies e a chance de sobrevivência na convivência em ambiente. Pode-se destacar as interações: negativas, que caracterizam competição direta sobre os recursos ou predação, onde uma espécie (predador) consome a outra espécie (presa); e positivas, como o comensalismo, onde a existência de uma espécie não afeta a outra, ou o mutualismo onde as duas espécies têm benefícios uma com a outra (KOT, 2001).

Esses diferentes tipos de relações são representados por modelos matemáticos, cuja utilização permite uma avaliação qualitativa e quantitativa do impacto da interação em diferentes populações, sejam elas populações de átomos ou moléculas, neurônios, bactérias, pragas ou indivíduos infectados. Isso ressalta ainda mais a importância do estudo desses modelos.

Na Biomatemática, descrever em forma de equações diferenciais (equações diferenciais ordinárias (EDOs) e equações diferenciais parciais (EDPs)), o comportamento dinâmico e complexo de populações, resulta em questões interessantes, tanto de natureza biológica, quanto de natureza puramente matemática. Na maioria dos casos obtém-se problemas não lineares, cuja resolução possui um grau elevado de complexidade do ponto de vista matemático. Em outros casos, consegue-se formular algumas considerações sem necessariamente conhecer a solução. Isso é possível, por exemplo, realizando uma análise qualitativa do fenômeno através da teoria de estabilidade (EDELSTEIN-KESHET, 1988; KOT, 2001) e do método da perturbação (KEVORKIAN; COLE, 1981; HOLMES, 2013).

A disposição de indivíduos no espaço ao longo do tempo pode ser representada através do modelo difusivo linear, que combinado com um termo de reação (taxa de crescimento intrínseco e interação entre os indivíduos), constitui um modelo de reação-difusão. Se esse termo depende da densidade populacional e satisfaz a lei logística, obtém-se uma EDP não linear conhecida como a equação de Fisher-Kolmogorov (FISHER, 1937; KOLMOGOROV; PETROVSKY; PISKUNOV, 1937), que representa a dinâmica espaço-temporal de uma espécie. A mesma ideia se aplica para um sistema biológico com duas espécies interagindo, em que a relação entre elas é do tipo presa-predador e o único alimento do predador é a presa, que cresce até um determinado nível. Esse modelo é chamado de sistema de Lotka-Volterra modificado com difusão (MURRAY, 2001, 2003).

Dessa forma, a presente pesquisa reitera a importância do estudo desses modelos matemáticos de reação-difusão, e busca aqui analisar, de forma detalhada, as principais características desses sistemas sem e com a aplicação de controle biológico. Além disso, a metodologia proposta nesse trabalho é original, e através das simulações computacionais realizadas, mostrou-se eficaz para resolver problemas de controle po-

pulacional. Ainda pode-se acrescentar que as estratégias de controle adotadas são resultados passíveis de aplicações em ecossistemas.

1.2 Modelos matemáticos de sistemas biológicos

Segundo BASSANEZI (2002), a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real. Surge da necessidade do ser humano em compreender os fenômenos que o cercam, de modo que possa interferir, ou não, no seu processo de construção. Alia teoria e prática, auxiliando no entendimento da realidade através de aproximações e de previsões de tendências e, a partir disso, é possível buscar meios para agir sobre ela e transformá-la.

A modelagem matemática parte da interpretação de observações de fenômenos reais, sejam eles físicos, químicos ou biológicos, e sua codificação em linguagem matemática. Nesse processo, são selecionadas as variáveis essenciais do problema e formulados modelos matemáticos, que são representados por uma equação ou por um sistema de equações, cujas soluções descrevem o comportamento de um determinado fenômeno (LOGAN, 2014).

A partir disso, uma etapa muito importante dentro desse processo é a validação dos modelos, que devem ser testados, confrontando as soluções e previsões obtidas com os valores encontrados no sistema real, através dos experimentos (OTTO; DAY, 2011). Nesse momento, pode-se ainda fazer ajustes no modelo se necessário, para que represente com maior precisão o fenômeno estudado.

No entanto, duas questões muito importantes precisam ser levadas em consideração na elaboração do modelo: a representação realística do problema; e, a viabilidade da sua análise do ponto de vista matemático. Ou seja, o modelo precisa ser suficientemente detalhado para que retrate o problema físico com adequada precisão e, ao mesmo tempo, deve ser suficientemente simples para que a sua resolução seja possível. É importante ressaltar que são válidas tentativas de simplificações matemáticas, desde que não comprometam características fundamentais do modelo (MURRAY, 2001; OTTO; DAY, 2011; LOGAN, 2014).

Devido a essas simplificações e as condições que não são consideradas, o modelo não representa o fenômeno de maneira exata, em toda a sua complexidade, mas pode-se obter uma boa aproximação do que é observado na realidade.

Para a elaboração do modelo, precisa-se avaliar sob quais características será tratado o fenômeno e, a partir disso, determinar quais as variáveis que serão estudadas de forma unidimensional ou multidimensional. Há muitas maneiras de descrever uma situação real: modelos analíticos ou modelos numéricos, macroscópicos ou microscópicos, qualitativos ou quantitativos, contínuos ou discretos (OTTO; DAY, 2011).

Contudo, cada escolha determinará os recursos e ferramentas adotadas, bem como os objetivos do estudo.

De acordo com RAFIKOV (2002), em dinâmica populacional as informações biológicas são transformadas em hipóteses teóricas básicas que alimentam conceitualmente um modelo matemático, cuja finalidade é descrever a evolução temporal do sistema a partir de cada dado inicial.

Com base nessas premissas, na busca de um modelo que melhor se adequasse à situação real, por volta de 1798, Thomas Robert Malthus (1766-1834) (KOT, 2001) previu o crescimento da população em progressão geométrica, criando o chamado modelo de Malthus, ou também conhecido como modelo de crescimento/decrescimento exponencial (MALTHUS, 1798). Nesse modelo, considera-se que a taxa de variação da população em relação ao tempo é proporcional à população existente. Portanto, $N = N(t)$ determina a população no instante t , dN/dt é a taxa de variação e $(1/N)dN/dt$ é a taxa de variação per capita dessa população. Assumindo que todas as mudanças nessa população resultam de nascimentos e mortes e que a taxa de natalidade per capita r_1 e a taxa de mortalidade per capita d são constantes, tem-se:

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = r_1 - d, \quad (1.1)$$

A diferença entre as taxas de nascimento e mortalidade per capita, $r_1 - d$, é conhecida como a taxa intrínseca de crescimento, denotada por a , conforme KOT (2001). Pode-se reescrever a equação (1.3) como:

$$\frac{dN}{dt} = aN, \quad (1.2)$$

com $a = r_1 - d$. A equação (1.2) é uma EDO linear de primeira ordem, que possui solução:

$$N(t) = N_0 e^{at}, \quad (1.3)$$

onde N_0 é a população inicial, isto é, no instante inicial $t = 0$ tem-se $N(0) = N_0$. Desse modo, conclui-se que:

- Se $a > 0$, a população cresce e continua aumentando infinitamente, conforme t aumenta;
- Se $a < 0$, a população se reduzirá e tenderá a 0 ao longo do tempo, o que caracteriza a extinção da espécie.

Contudo, o modelo de Malthus não considerava fatores limitantes para esse crescimento, como a falta de recursos essenciais (por exemplo, água, alimento e espaço vital), o que comprometia o bom funcionamento do modelo com o passar do tempo.

Mais tarde, em 1838, o matemático Pierre Verhulst (1804-1849) (KOT, 2001), propôs uma generalização do modelo de Malthus que leva em conta essas restrições ambientais. O crescimento logístico, é um pouco mais complexo que o crescimento exponencial, pois nele está inserido o conceito de competição intraespecífica², conforme (EDELSTEIN-KESHET, 1988) .

Inicialmente, a população apresenta um crescimento exponencial, contudo, à medida que cresce a competição intraespecífica aumenta e a taxa de crescimento per capita diminui linearmente, e encontra-se:

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = a \left(1 - \frac{N}{K} \right). \quad (1.4)$$

Essa diminuição da taxa de crescimento per capita pode ser interpretada como uma forma simples de regulação dependente da densidade, e conseqüentemente quando ela cai para zero, a população atinge um patamar de equilíbrio, chamado de capacidade de suporte do meio, representando por K , no qual o número de mortes e nascimentos se torna constante. Pode-se acrescentar que está correlacionada com restrições de espaço, meio não propício para o desenvolvimento da espécie e até mesmo pela falta de alimento.

Esse modelo é conhecido como modelo de Verhulst, ou equação de crescimento logístico, cuja taxa de crescimento é uma função quadrática dada por $aN(1 - N/K)$ (VERHULST, 1838, 1845). Assim tem-se:

$$\frac{dN}{dt} = aN \left(1 - \frac{N}{K} \right). \quad (1.5)$$

A equação (1.5) é uma EDO não linear que possui solução analítica exata. Considerando que $N(0) = N_0$ é a população inicial, encontra-se a solução através do método de separação de variáveis ou pelo método de Bernoulli e tem-se:

$$N(t) = \frac{N_0 K}{(K - N_0) e^{-at} + N_0}. \quad (1.6)$$

Nesse modelo, é possível observar que quando $t \rightarrow \infty$ a população cresce até um determinado limite K suportável pelo ambiente em que está inserida, fazendo com que o crescimento populacional estabilize ao longo do tempo.

No início do século XX, o físico Alfred J. Lotka (1860-1949) (MURRAY, 2001) e o matemático Vito Volterra (1860-1940) (MURRAY, 2001) publicaram em 1925 e 1927, respectivamente, trabalhos diferentes sobre dinâmica populacional, no entanto, possuíam a mesma modelagem. Volterra propôs um modelo simples para a predação de uma

²A competição intraespecífica é uma interação em ecologia de populações, na qual membros da mesma espécie competem por recursos limitados (PRICE, 1980).

espécie por outra, para explicar os níveis oscilantes das capturas de peixes no mar Adriático. No mesmo período, Lotka também publicou um modelo que representava uma reação química hipotética, que poderia exibir comportamento periódico nas concentrações químicas (LOTKA, 1925; VOLTERRA, 1927).

A partir de então, não só considera-se o crescimento de uma determinada população, mas acrescenta-se ainda a interação dessa população com um eventual inimigo natural da cadeia alimentar, constituindo um modelo do tipo presa-predador. Se $x_1(t)$ é a população de presas e $x_2(t)$ a do predador, no tempo t , então o modelo de Lotka-Volterra é dado por:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(a - bx_2), \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2(c_px_1 - d) \end{cases} \quad (1.7)$$

onde a , b , c_p e d são constantes positivas, onde b e c_p são termos que medem os efeitos da interação de presas e predadores e d a taxa de mortalidade de predadores.

É possível fazer algumas considerações sobre esse modelo, conforme (MURRAY, 2001):

- A presa, na ausência de qualquer predação, ou seja $x_2 = 0$, cresce sem limites com crescimento malthusiano;
- O efeito da predação é reduzir a taxa de crescimento per capita da presa por um termo proporcional às populações de presas e predadores, que corresponde ao termo $-bx_1x_2$;
- Na ausência de qualquer presa, a taxa de mortalidade do predador resulta em uma exponencial decrescente, ou seja, o termo $-dx_2$;
- A contribuição da presa para a taxa de crescimento dos predadores é $c_px_1x_2$, ou seja, é proporcional à quantidade de presas disponível, bem como ao tamanho da população de predadores;
- Os termos x_1x_2 podem ser interpretados como a conversão de energia de uma fonte para outra, onde: bx_1x_2 é a retirada de presas e $c_px_1x_2$ é acumulado de predadores.

Pode-se considerar mais de duas espécies interagindo no sistema biológico, e assim têm-se as equações de Lotka-Volterra dadas pela forma geral:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \left(a_i - \sum_{j=1}^n b_{ij}x_j \right) \quad \text{onde } i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.8)$$

onde x_i é a densidade da espécie i no tempo t , as presas, x_j é a densidade da espécie j no tempo t , os predadores, n é o número de espécies interagindo no sistema, a_i é a taxa de crescimento intrínseco ou mortalidade e b_{ij} representa as taxas de predação (MURRAY, 2001).

Esse modelo que retrata a interação entre duas ou mais espécies é composto por EDOs não lineares de primeira ordem, que não possui solução analítica exata. É muito utilizado para descrever dinâmicas nos sistemas biológicos, principalmente quando duas espécies interagem, uma como presa e outra como predadora.

Nesse tipo de interação, nota-se a formação de um ciclo biológico, que pode ser descrito em quatro momentos: primeiro há um elevado crescimento de presas; em segundo, devido a abundância de alimento (presas), há um crescimento significativo de predadores; em terceiro, como aumentou a população de predadores, começa a escassez de alimentos (aumento da taxa de mortalidade das presas); e em quarto, devido a falta de alimento, a taxa de mortalidade do predador aumenta. E o ciclo se reinicia, pois, com a existência de poucos predadores a população de presas volta a crescer novamente.

Pode-se notar que no modelo de Lotka-Volterra (1.8), na ausência de predadores, a população de presas cresce sem restrições (infinitamente) o que não representa um sistema biológico real, pois elas enfrentarão problemas de espaço e escassez de alimento e, conseqüentemente o crescimento da população de presas acaba sendo limitado. Além disso, o modelo de Lotka-Volterra clássico é estruturalmente instável. Segundo (KOT, 2001; MURRAY, 2001), uma pequena perturbação em uma solução periódica leva a solução para outra trajetória que pode não estar próxima da original.

Portanto, consegue-se modificar o sistema de Lotka-Volterra (1.8) considerando o modelo de crescimento logístico (1.5) e obtém-se:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = ax \left(1 - \frac{x}{K}\right) - bxy, \\ \frac{dx_2}{dt} = y(-d + c_p x), \end{cases} \quad (1.9)$$

que é o sistema de Lotka-Volterra modificado (KOT, 2001).

Contudo, ambos os modelos apresentam algumas limitações, pois não descrevem por inteiro a complexa relação dos indivíduos envolvidos no meio ambiente, uma vez que não consideram nenhum outro fator externo, como condições geográficas e climáticas, por exemplo.

Com o propósito de descrever a dinâmica populacional de forma mais realística, considera-se, conforme encontra-se em KOT (2001) e EDELSTEIN-KESHET (1988), além da densidade populacional no tempo contínuo, o espalhamento dessas espécies em uma região no espaço.

Em termos matemáticos, essa situação é descrita por EDPs, cujas soluções são do tipo $w(x, t)$, se considerarmos apenas uma dimensão, $w(x, y, t)$ para duas dimensões e $w(x, y, z, t)$ para três dimensões. E ainda, modelos que utilizam EDPs podem ser independentes do tempo, mas dependentes da variável espacial, sendo então chamados de estáticos ou estacionários. Nesse trabalho, os modelos utilizados são dependentes do tempo, em um regime contínuo, e do espaço unidimensional.

Em dinâmica populacional, as EDPs utilizadas vêm do princípio de conservação, que é a formulação matemática que estabelece a taxa com a qual a quantidade de uma grandeza varia em um certo domínio, conforme é ilustrado na figura 1.

$$\left[\begin{array}{c} \text{Variação de} \\ \text{densidade} \\ \text{populacional} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Taxa de entrada} \\ \text{(imigração)} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Taxa de saída} \\ \text{(emigração)} \end{array} \right] \\ + \left[\begin{array}{c} \text{Taxa de} \\ \text{Nascimento/} \\ \text{Natalidade} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Taxa de} \\ \text{mortalidade} \end{array} \right]$$

Figura 1: Formulação do princípio de conservação. Fonte: adaptado (LOGAN, 2014).

Matematicamente, a equação diferencial básica obtida do princípio de conservação, que descreve localmente a relação entre variações em densidade e variações em fluxo é dada por:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + F, \quad (1.10)$$

para todo x e t no domínio do problema e F é o termo fonte (EDELSTEIN-KESHET, 1988).

O termo fonte pode depender das variáveis independentes, espaço e tempo, bem como da variável dependente: a densidade populacional. De fato, todas as equações de crescimento vistas até então podem ser aplicadas nesta configuração. Na tabela 1 estão alguns exemplos de fontes considerando diferentes tipos de crescimento.

Para um período suficientemente curto em que a mortalidade e a reprodução sejam insignificantes, assume-se $F = 0$ e tem-se:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (1.11)$$

Tabela 1: Exemplos de termos fonte (F). Fonte: adaptado (KOT, 2001).

Sem nascimentos/óbitos, apenas fluxo:	$F = 0$
Crescimento exponencial:	$F = aw$
Crescimento logístico:	$F = aw \left(1 - \frac{w}{K}\right)$
Crescimento logístico (com variação espacial nos parâmetros):	$F = a(x)w(x, t) \left(1 - \frac{w(x, t)}{K(x)}\right)$
Equação de Hutchinson-Wright:	$F = aw(x, t) \left(1 - \frac{w(x, t - \tau)}{K}\right)$
Efeito Allee:	$F = aw \left(\frac{w}{K_0} - 1\right) \left(1 - \frac{w}{K}\right)$

Se a população estiver sendo transportada sobre algum escoamento que se move com velocidade constante c , então o fluxo $\phi(x, t)$ será proporcional à densidade $w(x, t)$, ou seja:

$$\phi(x, t) = cw(x, t), \quad (1.12)$$

que representa a taxa de fluxo de trânsito de indivíduos em um determinado tempo e espaço. Pode-se substituir a equação (1.12) na equação (1.11) e encontra-se a equação de convecção linear:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + c \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (1.13)$$

O modelo se refere ao transporte de partículas, agentes químicos, animais, entre outros, por movimento de massa em um meio de suporte (vento, água, sangue...) caracterizado pelo movimento volumétrico. Assim, a distribuição inicial da densidade w , ou seja, a condição inicial $w(x, 0) = w_0(x)$, conserva-se ao longo do tempo, e se translada para a direita com velocidade c . Isso significa que durante um período de tempo t , cada indivíduo se move sobre uma distância ct .

Dessa forma, a solução da EDP de convecção (1.13) é dada por:

$$w(x, t) = w_0(x - ct), \quad (1.14)$$

em que $x - ct$ é uma translação da posição x por uma quantidade ct para a direita de x se $c > 0$. Esse comportamento caracteriza o avanço dos indivíduos em forma de onda que viaja sem mudar a sua forma, conhecida como solução do tipo onda viajante

(EDELSTEIN-KESHET, 1988; MURRAY, 2001; KOT, 2001; LOGAN, 2008, 2014).

Contudo, substituindo a relação constitutiva (1.12) na equação de conservação com fonte (1.10) encontra-se uma equação de convecção mais geral conhecida como equação de reação-convecção que possui a forma:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + c \frac{\partial w}{\partial x} = F, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (1.15)$$

Pode-se considerar por exemplo, que F seja um sumidouro da forma: $F = -kw(x, t)$ e tem-se:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + c \frac{\partial w}{\partial x} = -kw(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (1.16)$$

onde k é uma constante. Considerando a condição inicial $w(x, 0) = w_0(x)$ a solução da EDP de reação-convecção (1.16) é dada por:

$$w(x, t) = w_0(x - ct)e^{-kt}, \quad (1.17)$$

que corresponde a uma onda viajante amortecida representando o decaimento com o passar do tempo.

Na dinâmica de populações, além da propagação de indivíduos por advecção e reação-advecção, tem-se o transporte por difusão. Teoria clássica, fundamentada por Adolf Eugen Fick (1829-1901), modela a movimentação aleatória de matéria. É constituída na relação entre o fluxo e a densidade populacional em que se considera o movimento no sentido da concentração mais alta para a mais baixa e o fluxo vai no sentido oposto do gradiente de concentração, ou seja, o fluxo $\phi(x, t)$ é proporcional ao gradiente da densidade $w(x, t)$, dando origem a lei de Fick (EDELSTEIN-KESHET, 1988; KOT, 2001; MURRAY, 2001; LOGAN, 2014):

$$\phi(x, t) = -D \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (1.18)$$

em que D é o coeficiente de difusão e estima a intensidade que um indivíduo se movimenta em um determinado meio. O sinal negativo indica que a difusão ocorre no sentido da mais alta concentração para a mais baixa.

Na lei de conservação básica (1.11), substitui-se o fluxo de população (1.18):

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(-D \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (1.19)$$

e encontra-se a equação de difusão:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (1.20)$$

em que D é constante. Se considerado $t = 0$ e w_0 uma determinada espécie liberada em uma posição $x = x_0$, a solução é dada por:

$$w(x, t) = \frac{w_0}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-(x-x_0)^2/4Dt}. \quad (1.21)$$

Outro modelo que descreve a dinâmica populacional é a equação de convecção-difusão. Adicionando os fluxos de conservação (1.12) e a de difusão (1.18) tem-se:

$$\phi(x, t) = cw - D \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (1.22)$$

que pode ser substituída na lei de conservação (1.11) e assim encontra-se:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(cw - D \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (1.23)$$

que com c e D constantes, pode ser reescrita na forma:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + c \frac{\partial w}{\partial x} - D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (1.24)$$

conhecida como equação de convecção-difusão.

Pode-se ainda acrescentar, à dinâmica de dispersão de populações, modelos que consideram escalas de tempo no qual os indivíduos são capazes de se reproduzir caracterizando a existência de um termo fonte na equação. Assim, considera-se a lei de conservação básica com o termo fonte (1.10) e um fluxo difusivo (1.18), tem-se a equação diferencial:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + F(x, t, w). \quad (1.25)$$

Se o termo fonte for $F(x, t, w) = f(w)$, em que $f(w)$ caracteriza a cinética de reação, que correspondem as taxas de nascimento e ou reprodução (EDELSTEIN-KESHET, 1988; MURRAY, 2001), origina o modelo de reação-difusão:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w). \quad (1.26)$$

A função $f(w)$ pode conter dados como: taxas de crescimento intrínseco, imigração ou predação. Para representar o crescimento exponencial, considera-se kw , e assim tem-se a equação da difusão-crescimento:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + kw, \quad (1.27)$$

como também, pode representar a taxa de mortalidade, migração ou colheita. Considerando o termo $-kw$ para o decrescimento exponencial, obtém-se a equação da

difusão-decaimento:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - kw. \quad (1.28)$$

em que k é uma constante.

E ainda, o termo fonte pode ser não linear, do tipo logístico, conforme o modelo de Verhulst (1.5) e encontra-se a equação de Fisher-Kolmogorov (EDELSTEIN-KESHET, 1988; KOT, 2001; MURRAY, 2001; DE VRIES et al., 2006):

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw \left(1 - \frac{w}{K}\right). \quad (1.29)$$

A equação anterior foi proposta por R. A. Fisher em 1937 no trabalho FISHER (1937), para estudar a disseminação de um gene em uma população. O crescimento intrínseco é variável devido ao termo $a(1 - w/K)$ e atinge seu nível máximo quando $w = 0$ e é zero quando $w = K$. Essa equação foi estudada também por KOLMOGOROV; PETROVSKY; PISKUNOV (1937).

Pode-se reescrever a equação (1.29) da seguinte forma:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w(a - bw), \quad (1.30)$$

onde $b = a/K$ mede a competição entre os indivíduos da mesma espécie.

Os modelos compostos por EDPs analisados até aqui, consideravam apenas a interação de uma população específica em um meio ao longo de um determinado intervalo de tempo. Pode-se ainda expandir esses conceitos para a análise da interação de duas espécies entre si e com o meio. O modelo de Lotka-Volterra (1.9), que descreve esse comportamento, possui limitações e não abrange a dispersão de indivíduos.

Desse modo, acrescenta-se à modelagem desse sistema, a influência da variável espacial. Será considerado que o movimento dos indivíduos no espaço ocorre de forma aleatória, que equivale considerar que as densidades populacionais obedecem a difusão fickiana e assim, obtém-se o modelo de Lotka-Volterra modificado com difusão:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = aw \left(1 - \frac{w}{K}\right) - bwv + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = c_p wv - dv + D_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \end{cases} \quad (1.31)$$

que foi analisado anteriormente por DUNBAR (1986), EDELSTEIN-KESHET (1988), KOT (2001) e MURRAY (2003). Aqui, $w = w(x, t)$ representa as presas e $v = v(x, t)$ os predadores em função do tempo e do espaço, K é a capacidade de suporte da presa, a a taxa de crescimento intrínseco da população de presas, b e c_p são as taxas que medem os efeitos da interação de presas e predadores, d a taxa de mortalidade de predadores, D_1 é coeficiente de difusão das presas e D_2 o coeficiente de difusão de

predadores.

Pode-se destacar que nesse sistema, a única fonte de alimentação do predador é a presa. Assim quando $w = 0$, indicando ausência de presas, a população de predadores diminui e a segunda equação do sistema (1.31) torna-se a equação de difusão-decaimento (1.28).

Essa mesma análise pode ser feita considerando $v = 0$. Com a ausência de predadores as presas têm crescimento logístico e a primeira equação do sistema (1.31) se reduz a equação de Fisher-Kolmogorov (1.29) para uma espécie.

Além dos modelos apresentados anteriormente, que têm por objetivo descrever o comportamento natural de determinadas populações, ainda pode-se analisá-los sob a influência de funções de controle, com o objetivo de preservar espécies ameaçadas, bem como controlar o crescimento de populações que são prejudiciais a determinadas atividades humanas como, por exemplo, inserir uma estratégia de controle em uma lavoura para reduzir a quantidade de pragas.

Depois de mencionar os modelos anteriores e analisar algumas características importantes sobre eles, destaca-se que a equação de Fisher-Kolmogorov, que representa a interação de uma espécie com o meio onde vive, e o sistema de Lotka-Volterra modificado com difusão, que representa a interação de duas espécies do tipo presa-predador, são modelos de reação-difusão clássicos, discutidos nos principais livros de biomatemática: HASTINGS (1977); EDELSTEIN-KESHET (1988); MURRAY (2003, 2001); KOT (2001); DE VRIES et al. (2006); OTTO; DAY (2011). Devido a isso, esses modelos também serão objetos de estudo neste trabalho, com o diferencial da aplicação de controle biológico.

A próxima seção é dedicada a uma revisão bibliográfica sobre estudos importantes da teoria de controle aplicada a sistemas biológicos.

1.3 Modelos biológicos com controle

No século XX, os primeiros problemas do controle ótimo de pragas foram considerados por GOH (1969) e GOH (1980) para alguns casos particulares de modelos presa-predador. No trabalho de RAFIKOV; MALEICO (2000) foi formulado o problema de controle ótimo para sistemas generalizados presa-predador a fim de transferir o sistema biológico do estado inicial para um estado final, em que a população de pragas não cause danos econômicos. Além disso, as funções de controle entram no sistema de forma não linear e o problema foi resolvido através da aplicação do princípio do máximo de Pontryagin (PONTRYAGIN et al., 1962; NAIDU, 2003)

Nesses casos, as funções de controle são quantidades de pragas retiradas e/ou predadores introduzidos no biossistema, controlando-o e levando-o ao estado final durante um curto período de tempo, suficientemente menor que o necessário para a

praga causar danos, conseguindo atingir o estado de equilíbrio desejado.

Assim, para manter o sistema nesse ponto de equilíbrio é necessário fazer a retirada de espécies de pragas e/ou introduzir inimigos naturais em determinados momentos. FELTRIN; RAFIKOV (2002) propõem uma estratégia de controle ótimo de pragas somente através de introdução de inimigos naturais (predadores) para um caso particular do sistema de Lotka-Volterra, o que torna a prática do controle biológico mais viável.

Nesse mesmo período, formulações do problema de controle ótimo de sistemas populacionais importantes, envolvendo EDOs, foram propostas por RAFIKOV (2002), cujo trabalho propõe a aplicação de teoria de controle ótimo em dinâmica populacional para sistemas que apresentam dinâmica caótica, considerando somente uma função de controle. Nos trabalhos de RAFIKOV; BALTHAZAR (2003) e MOLTER; RAFIKOV (2004) foram consideradas várias estratégias de controle ótimo em um sistema de Lotka-Volterra de duas presas e um predador, encontrando funções de controle não lineares. Já no trabalho de TUSSET; RAFIKOV (2003) encontrou-se o controle ótimo linear para sistemas presa-predador generalizados.

No trabalho de RAFIKOV; BALTHAZAR (2004) foi proposto uma metodologia para encontrar o controle ótimo linear realimentado. Nesse estudo, foram encontradas as condições que garantem a aplicação do controle linear em sistemas não lineares. É importante ressaltar que na teoria de controle existem dois tipos de problemas: o controle de malha aberta, cuja função de controle ótimo $u(t)$ é encontrada como uma função do tempo que determina uma trajetória ótima correspondente a uma condição inicial do sistema, e o controle de malha fechada em que a função de controle ótimo $u(x, t)$ depende do tempo e da variável de estado, levando o nome de controle com realimentação, e pode ser aplicado para qualquer condição inicial.

Considerando ainda as ideias do trabalho de RAFIKOV; BALTHAZAR (2004), se as variáveis do sistema são desvios do regime desejado, o controle ótimo estabiliza o sistema em torno da trajetória desejada, minimizando o funcional que caracteriza os desvios quadráticos da trajetória e do controle do regime desejado. Fatores como o valor limiar de danos que uma praga pode causar, bem como a quantidade de predadores para controlar o crescimento de pragas, são obtidos na maioria das vezes através de dados experimentais, ou fornecidos por especialistas em controle biológico.

Em trabalhos recentes foram aplicadas técnicas de controle não linear no controle biológico de pragas. Por exemplo, os trabalhos de RAFIKOV; BALTHAZAR; VON BREMEN (2008) e o de MOLTER; RAFIKOV (2014) objetivam aplicar métodos da teoria de controle ótimo e da teoria dos sistemas dinâmicos na modelagem matemática do controle biológico de pragas, formulando um problema de controle não linear realimentado para sistemas não-lineares, a fim de obter a melhor estratégia de controle somente através da introdução de inimigos naturais.

Nos artigos de EL-GOHARY; YASSEN (2001) e EL-GOHARY; AL-RUZAIZA (2002) discute-se o problema do controle ótimo para o estado estacionário do modelo de Lotka-Volterra. As condições da estabilidade assintótica do estado estacionário deste modelo são usadas para obter as funções de controle no estado ótimo. A lei de controle ideal é obtida das condições que garantem a estabilidade assintótica do estado de equilíbrio deste modelo usando a função de Lyapunov. Nesses trabalhos, a solução geral das equações do estado perturbado é obtida em função do tempo. Além disso, o controle ótimo também é aplicado para alcançar a sincronização de estados de dois sistemas idênticos do sistema de Lotka-Volterra.

Em TANG; CHEKE (2008), tem-se uma aplicação de controle em um sistema Lotka-Volterra considerado um sistema biológico envolvendo hospedeiro-parasitóides⁴. São discutidas estratégias de controle que mantenham o nível de hospedeiro abaixo do limite econômico, e como resultado constatou-se que a modelagem usada pode ajudar no desenvolvimento de estratégias de controle apropriadas e a tomar decisões de gerenciamento, visto que através do modelo (sistema de Lotka-Volterra) resulta possível prever os efeitos de invasão da praga, por exemplo.

Quanto ao controle de sistemas biológicos com reação-difusão, ainda há poucos trabalhos que utilizam técnicas de controle específicas. Em geral, os trabalhos incluem o controle nesses modelos somente para casos lineares, como é apresentado em RAY (1981) e em LI; QI (2011). O desenvolvimento dessa técnica é denominada de sistemas com distribuição de parâmetros. Nessa metodologia é apresentado toda a teoria de controle para EDPs lineares, onde se inclui funções de controle também lineares.

Já para sistemas não lineares com reação-difusão aplicados a sistemas biológicos, pode-se destacar o trabalho de DUAN (2016), que propõe um problema de controle ótimo sob condições de contorno para a equação de Fisher-Kolmogorov estendida. No entanto, neste trabalho não há uma aplicação estabelecida, apenas a formulação e demonstração de alguns teoremas da existência de soluções ótimas do problema de controle.

Neste trabalho serão utilizadas algumas técnicas de controle linear realimentado para sistemas não lineares, que seguem, de modo geral, as ideias de RAFIKOV; BALTHAZAR (2004, 2005, 2008); RAFIKOV; BALTHAZAR; VON BREMEN (2008) para aplicação do controle.

⁴Parasitóides são seres que parasitam outros organismos impedindo-os de atingir a fase adulta de reprodução. Passa um importante período fixado à superfície ou no interior de um único hospedeiro, levando-o a óbito (PRICE, 1980).

1.4 Objetivos e organização do trabalho

O objetivo geral desse trabalho é analisar sistemas biológicos cujo comportamento dinâmico das populações envolvidas é descrito pelos modelos de reação-difusão: equação de Fisher-Kolmogorov e sistema de Lotka-Volterra modificado com difusão, e através da metodologia aqui proposta de forma inédita, aplicar estratégias de controle, a fim de levar o sistema ao equilíbrio desejado e abaixo de danos econômicos e/ou biológicos.

Os objetivos específicos são:

- Estudar modelos clássicos da biomatemática, envolvendo EDOs e EDPs, já existentes na literatura;
- Trabalhar com técnicas de controle lineares para sistemas não lineares aplicadas ao controle de populações;
- Estudar o modelo de reação-difusão para uma espécie (equação de Fisher-Kolmogorov) e para duas espécies (sistema de Lotka-Volterra modificado com difusão) e entender o comportamento das espécies envolvidas através da análise de estabilidade e de métodos de perturbação.
- Aplicar técnicas de controle nos modelos de reação-difusão, para estabilizar os sistemas nos níveis desejados e as densidades das populações abaixo dos níveis de danos econômicos e/ou biológicos;
- Apresentar simulações computacionais como resultado das estratégias de controle, considerando aplicações em ecossistemas.

Estrutura da dissertação

Esse trabalho está organizado em nove capítulos, que em síntese são apresentados da seguinte forma: introdução, conceitos e métodos preliminares, teoria de controle, estudo da equação de Fisher-Kolmogorov, estratégias de controle para a equação de Fisher-Kolmogorov, estudo do sistema de Lotka-Volterra modificado com difusão, estratégias de controle para o sistema de Lotka-Volterra modificado com difusão, considerações finais, trabalhos em andamento e perspectivas futuras. Além disso, têm-se as referências bibliográficas e os anexos A, B e C.

O capítulo 1 apresenta a motivação do trabalho retratando a importância da utilização do controle biológico para a saúde e a preservação ambiental, bem como a relevância do estudo aqui realizado no âmbito biológico e matemático. Além disso, na segunda seção encontra-se uma revisão bibliográfica da evolução dos modelos que descrevem a dinâmica populacional, e na terceira seção, essa revisão é complementada com o desenvolvimento ao longo do tempo da teoria de controle. Além disso, têm-se os objetivos do trabalho bem como a organização aqui apresentada.

Alguns conceitos básicos, teorias e métodos utilizados no estudo da equação de Fisher-Kolmogorov e do sistema de Lotka-Volterra modificado com difusão são introduzidos no capítulo 2. Mais especificamente, encontram-se as ideias fundamentais e alguns conceitos básicos da teoria de solução por onda viajante, que é a metodologia seguida nesse trabalho, bem como algumas aplicações em modelos clássicos como o de advecção e o de difusão. Além disso, têm-se: os principais conceitos do método da perturbação bem como os problemas de perturbação singular e regular; a teoria de transformada finita de Fourier (TFF); e por fim faz-se um apanhado geral da teoria de controle ótimo e enuncia-se o princípio do máximo de Pontryagin.

No capítulo 3 introduz-se alguns conceitos e definições da teoria de controle ótimo linear realimentado para sistemas lineares e não lineares, bem como a técnica de controle linear realimentado que utiliza o princípio do máximo. Esse capítulo, de cunho teórico, servirá como base para as aplicações realizadas nos capítulos 5, 6 e 8.

No capítulo 4 apresenta-se o estudo de modelo de reação-difusão para uma espécie: a equação de Fisher-Kolmogorov, que descreve a interação de uma população com o meio. Considera-se a existência de uma onda que viaja sem mudar a sua forma, que reduz a EDP para uma EDO, assim, permitindo a aplicação da teoria de estabilidade para uma análise qualitativa do comportamento das soluções e possibilitando encontrar uma solução analítica aproximada através do método da perturbação.

A aplicação do controle ótimo linear realimentado no modelo de Fisher-Kolmogorov em um sistema biológico de plantas é mostrada no capítulo 5. Utiliza-se a teoria de onda viajante e diferentes técnicas da teoria de controle linear realimentado, abordadas no capítulo 3, com o propósito de encontrar funções de controle que estabilizem o sistema biológico, levando-o para o equilíbrio desejado.

No capítulo 6 é apresentada outra estratégia de controle para o sistema biológico de plantas aquáticas, que é descrito pela equação de Fisher-Kolmogorov, considerando as ideias e a aplicação do princípio do máximo de Pontryagin desenvolvidas por COSTA et al. (2003). Nesse caso, a introdução de uma função de controle no sistema é feita da mesma forma e com a mesma estrutura da função de controle introduzida no modelo logístico.

No capítulo 7 apresenta-se o estudo do sistema de Lotka-Volterra com difusão, que descreve a interação do tipo presa-predador para duas espécies, em que a única fonte de alimento do predador é a presa. Aqui, também tem-se a presença de ondas viajantes, o que torna possível simplificar o sistema de EDPs em um sistema de EDOs e a aplicação da teoria de estabilidade para uma análise qualitativa do comportamento das soluções.

Aplicação de controle ótimo linear realimentado no sistema de Lotka-Volterra modificado com difusão encontra-se no capítulo 8. Utiliza-se o sistema de Lotka-Volterra

reduzido pela teoria de onda viajante, composto por EDOs, cujos procedimentos foram realizados no capítulo 7, para aplicação da teoria de controle ótimo linear objetivando encontrar funções de controle que estabilizem o sistema biológico, levando o sistema para o equilíbrio desejado.

E por fim, têm-se as considerações finais, bem como são mencionados os trabalhos em andamento, as perspectivas futuras, as referências utilizadas na elaboração do mesmo, e os anexos. O anexo A contém a teoria de estabilidade de Lyapunov, o anexo B dois teoremas importantes na teoria de controle utilizada, assim como suas demonstrações, e o anexo C contém uma relação de trabalhos apresentados e publicados, como um dos produtos desta pesquisa.

O organograma que segue contém uma relação dos capítulos apresentados anteriormente, com os quatro eixos principais desse estudo: o primeiro é o estudo da equação de Fisher-Kolmogorov, o segundo é a aplicação de estratégias de controle ótimo linear realimentado na equação de Fisher-Kolmogorov, o terceiro é o estudo do sistema de Lotka-Volterra modificado com difusão, e o quarto é a aplicação de uma estratégia de controle ótimo linear realimentado no sistema de Lotka-Volterra modificado com difusão.

É possível observar que os 3 blocos de contorno preto contínuo são os 3 primeiros capítulos que contêm a teoria, definições, conceitos e técnicas que dão embasamento no estudo da equação de Fisher-Kolmogorov, e conseqüentemente, na aplicação de controle populacional em sistemas biológicos (blocos com contorno cinza claro pontilhado), da mesma forma que dão suporte para o estudo do sistema de Lotka-Volterra modificado com difusão e a aplicação de controle populacional. Em ambos os casos, serão realizadas aplicações em sistemas biológicos (bloco com contorno preto e cinza). E por fim, o último bloco ressalta os resultados obtidos com esse estudo, os trabalhos que estão em andamento e enuncia os próximos passos para trabalhos futuros.

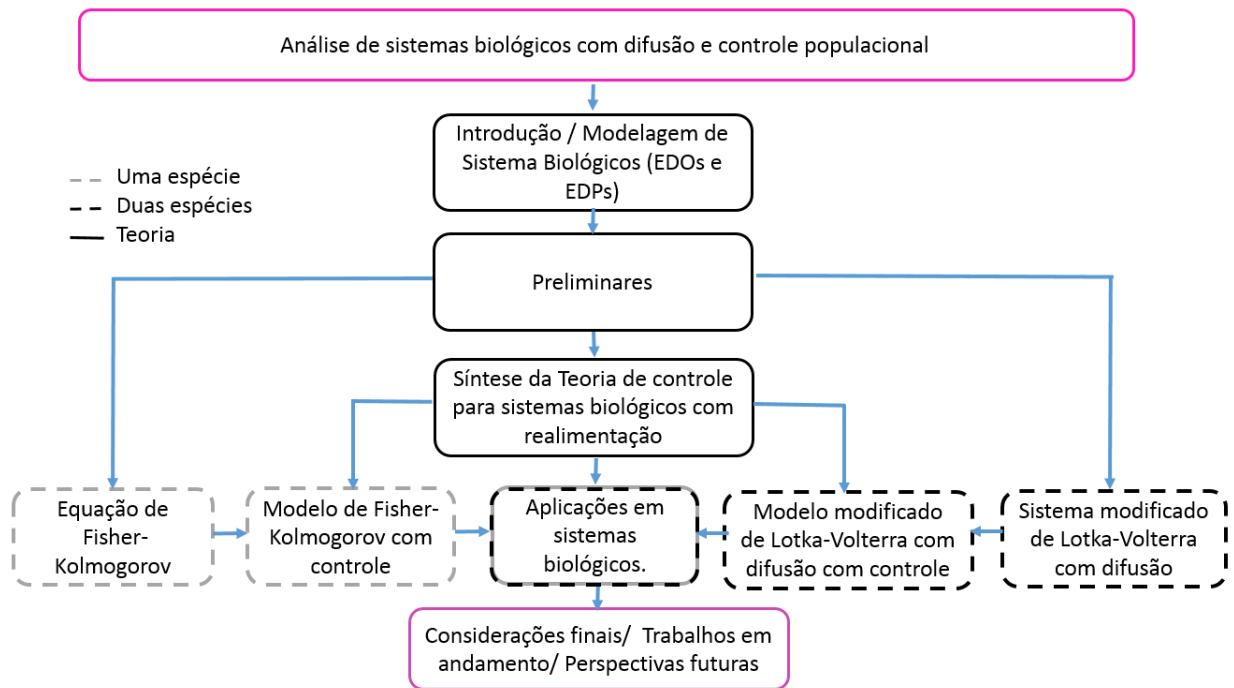


Figura 2: Organograma da organização do trabalho.

2 PRELIMINARES: ALGUNS CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo encontra-se um breve resumo de tópicos fundamentais que compõem a base deste trabalho. Apresentam-se algumas ideias e conceitos básicos da teoria de solução por onda viajante (seção 2.1), bem como alguns exemplos, e após isso discute-se o método da perturbação (seção 2.2). Também têm-se definições da transformada finita de Fourier (TFF) (seção 2.3), e por fim, aborda-se ideias fundamentais da teoria de controle com a formulação do problema de controle ótimo na forma de Mayer e a aplicação do princípio do máximo de Pontryagin (seção 2.4).

2.1 Solução por onda viajante

A propagação de ondas está presente em diversas áreas da ciência como por exemplo em mecânica dos fluidos (ondas de água, aerodinâmica e meteorologia), na acústica (ondas sonoras no ar e em líquidos), na mecânica de sólidos (ondas de tensão e terremotos), na física (óptica, eletromagnetismo, mecânica quântica), na biologia (propagação de doenças, dispersão populacional, transmissão do sinal nervoso), em meios porosos (dinâmica das águas subterrâneas, migração de contaminantes) e na química (ondas de combustão e detonação) (LOGAN, 2008).

Esses exemplos de fenômenos de propagação na forma de ondas ou frentes de onda são resolvidos matematicamente, considerando uma onda que não muda de forma e viaja com velocidade constante, o que é pouco provável na natureza. Contudo, essa simplificação representa uma aproximação daqueles problema de propagação, algumas vezes boa e outras vezes de forma grosseira.

Desse modo, a solução de onda viajante é um conceito matemático, constituindo uma solução especial(particular) da equação diferencial e não é a solução da equação diferencial em si.

Sob o olhar matemático, uma das grandes vantagens do método é converter uma EDP em uma EDO ou também uma EDO em uma função f , por exemplo. Nas próximas subseções, serão abordadas: a metodologia para uma solução do tipo onda viajante, bem como exemplos da aplicação da solução do tipo onda viajante em EDPs

clássicas (advecção, onda e difusão).

2.1.1 Metodologia para uma solução tipo onda viajante

Uma forma simples de expressar uma onda viajante através de termos matemáticos é:

$$f(x, t) = f_0(x - ct). \quad (2.1)$$

onde interpreta-se a densidade f como a força do sinal. Em $t = 0$ a onda tem a forma de $f_0(x)$, que é seu perfil inicial. Então $f_0(x - ct)$ representa o perfil de onda no tempo t , que é justamente o perfil inicial transladado para a direita ct unidades espaciais, conforme pode-se observar na Figura 3. A constante c representa a velocidade de onda que não é conhecida. Dessa forma a onda (2.1) caracteriza uma onda que viaja para a direita com velocidade c .

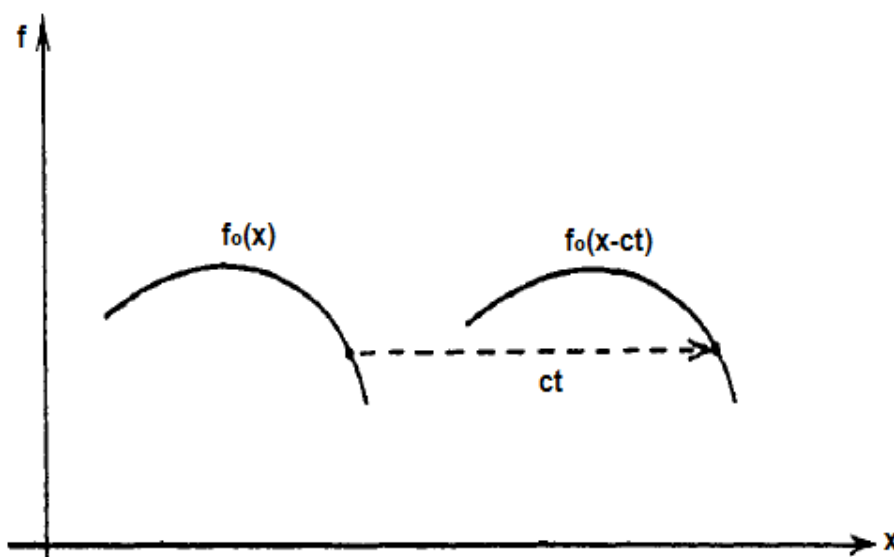


Figura 3: Perfil de onda que viaja para a direita com velocidade constante c . Fonte: adaptado (LOGAN, 2008).

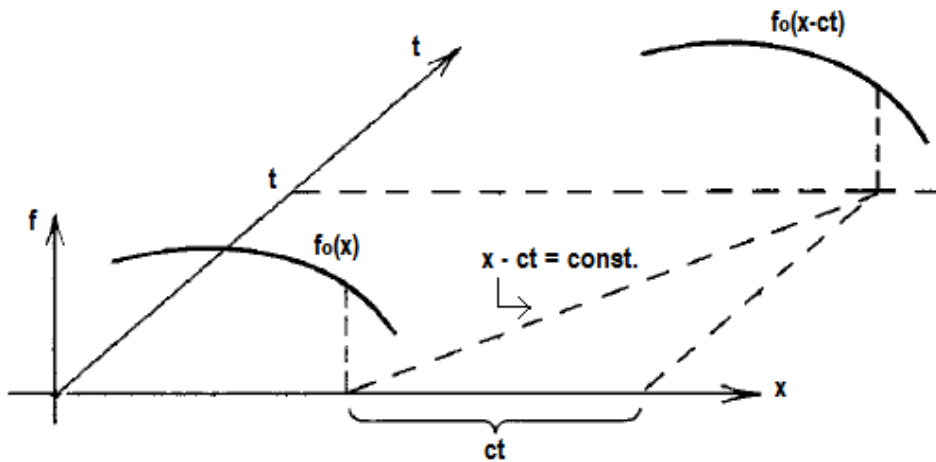


Figura 4: Onda viajante da figura 3 representada em f, x, t . Fonte: adaptado (LOGAN, 2008).

De forma similar, se $f(x, t) = f_0(x + ct)$ tem-se uma onda que se desloca para a esquerda com velocidade c . Esses tipos de ondas se propagam sem distorções ao longo de uma linha reta $x - ct = cte$, da mesma maneira que $x + ct = cte$ no tempo-espaço, onde cte é uma constante qualquer.

Uma questão pertinente a se considerar aqui é se existe uma solução do tipo onda viajante para uma dada EDP. A resposta é positiva contanto que satisfaça algumas condições. O procedimento geralmente é formulado sem considerar as condições iniciais, pois aqui o tempo é considerado usualmente como variante de $-\infty$ a $+\infty$, e assim, a onda existe para todos os tempos. Além disso, precisa satisfazer as condições de contorno dadas da forma:

$$f(-\infty, t) = cte \quad \text{e} \quad f(+\infty, t) = cte. \quad (2.2)$$

A solução por frente de onda é uma solução do tipo onda viajante, da forma $f(x, t) = f_0(x - ct)$ ou $f(x, t) = f_0(x + ct)$, sujeita às condições (2.2) constantes (não necessariamente a mesma constante). Assume-se também que a função f_0 tem o grau de suavidade necessário definido pela EDP ($C^1(\mathbb{R}), C^2(\mathbb{R}), \dots$), ou seja, a função f_0 precisa ser diferenciável quantas vezes for a ordem da EDP.

A ideia principal é substituir a forma $f(x, t) = f_0(x - ct)$ na EDP e transformá-la em uma EDO para o perfil de onda desconhecido $f_0(z)$, que é uma função de uma única variável $z = x - ct$, interpretada como uma coordenada em movimento. Na figura 5, é possível observar que a função $f(x, t)$ é uma onda viajante se existe um sistema coordenado movendo-se com velocidade constante c tal que $f(x, t) = f_0(z)$ onde $z = x - ct$.

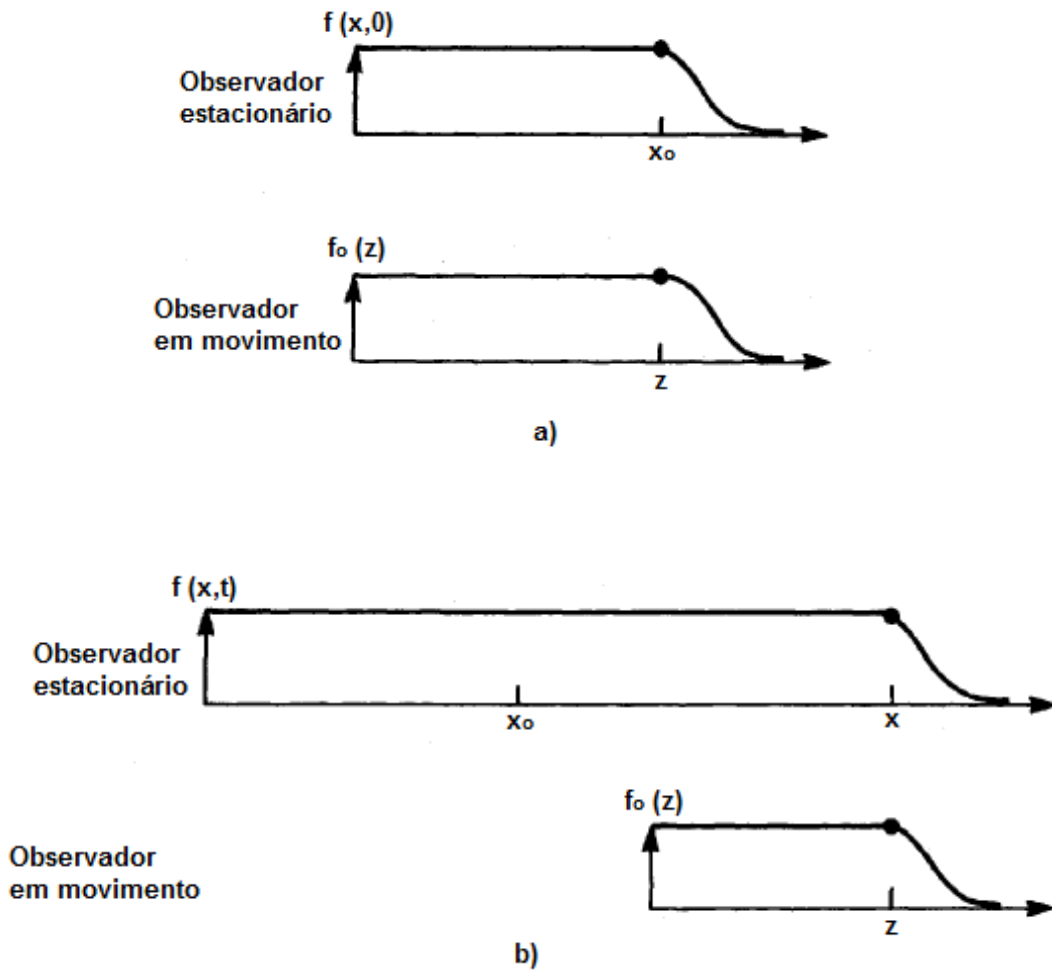


Figura 5: Onda viajante estacionária e em movimento descritas em: a) $t = 0$; b) $t = 1$.
Fonte: adaptado (EDELSTEIN-KESHET, 1988).

Para realizar a substituição, é necessário calcular as derivadas de f em relação a z através da regra da cadeia. Como por exemplo:

$$f_t = f'_0(z)z_t = -cf'_0(z), \quad (2.3)$$

$$f_x = f'_0(z)z_x = f'_0(z), \quad (2.4)$$

e assim pode-se encontrar também:

$$f_{tt} = c^2 f''_0(z), \quad (2.5)$$

e:

$$f_{xx} = f''_0(z), \quad (2.6)$$

bem como essa ideia pode ser estendida para derivadas de ordem maiores.

2.1.2 Exemplos de soluções de EDPs por onda viajante

Para melhor compreensão do método, considera-se aqui duas aplicações clássicas: a equação de advecção, a equação de onda e a equação de difusão.

2.1.2.1 Exemplo 1: Equação de advecção

A equação de advecção, que é um exemplo simples de onda, é dada pela seguinte EDP:

$$w_t + cw_x = 0, \quad (2.7)$$

e pode ser reduzida a uma EDO considerando $w(x, t) = W(z)$, onde $z = x - ct$, e as devidas em x e t são convertidas em derivadas ordinárias em z pela regra da cadeia:

$$w_t = -cW'(z) \quad \text{e} \quad w_x = W'(z). \quad (2.8)$$

Substituindo (2.8) na EDP (2.7) encontra-se que a solução é do tipo:

$$w(x, t) = W(x - ct), \quad (2.9)$$

em que é possível dizer que a frente de onda viaja no sentido positivo de x e satisfaz as condições de contorno do método, além de W ser uma função diferenciável, conforme tem-se na figura 6.

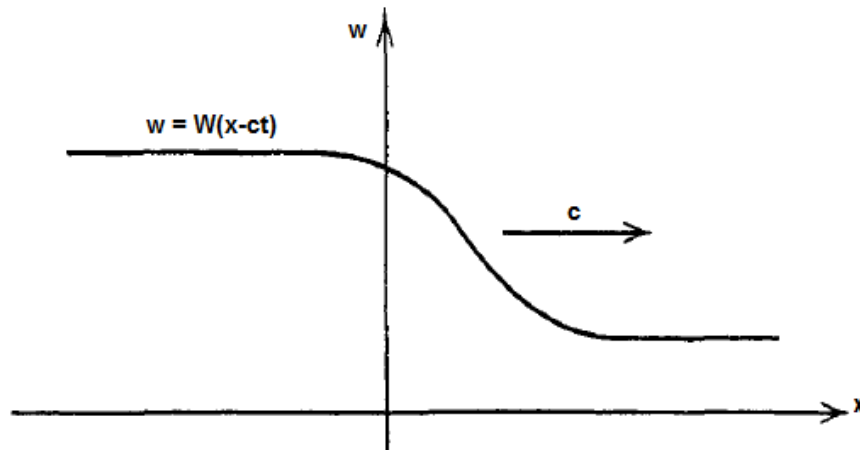


Figura 6: Solução da equação de advecção considerando uma frente de onda que viaja para a direita com velocidade constante c . Fonte: adaptado LOGAN (2008).

2.1.2.2 Exemplo 2: Equação de onda

A equação de onda é dada:

$$w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0, \quad (2.10)$$

e pode ser escrita através de uma EDO considerando $w(x, t) = W(z)$, onde $z = x - ct$ ou $z = x + ct$. Ou seja, a solução geral é a superposição de ondas viajando para a esquerda: $W_1(x - ct)$, e ondas viajando para a direita: $W_2(x + ct)$, ambas com velocidade c , isso é:

$$w(x, t) = W_1(x - ct) + W_2(x + ct), \quad (2.11)$$

para as funções W_1 e W_2 duas vezes diferenciáveis.

2.1.2.3 Exemplo 3: Equação de difusão

A equação de difusão linear é dada da forma:

$$w_t = Dw_{xx}, \quad (2.12)$$

onde D é o coeficiente de difusão. Nessa EDP não há propagação de frente de onda. Isso pode ser verificado, considerando $w = W(z)$ onde $z = x - ct$ e aplicando a regra da cadeia, obtém-se, para o perfil de onda W , a seguinte EDO:

$$-cW'(z) = DW''(z), \quad \text{com } z \in \mathbb{R}, \quad (2.13)$$

cuja solução geral é dada por:

$$W(z) = c_1 + c_2 e^{-cz/D}, \quad (2.14)$$

em que c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Analisando a solução anterior, percebe-se que a única possibilidade de $W(z)$ satisfazer as condições de contorno em $\pm\infty$ é $c_2 = 0$. Assim, não existe solução do tipo onda viajante.

2.2 Métodos de Perturbação

O método de perturbação consiste em construir a solução para um problema envolvendo um pequeno parâmetro ε , seja na equação diferencial, ou nas condições de contorno ou em ambos. A principal ferramenta matemática utilizada é uma expansão assintótica em relação a uma sequência assintótica adequada de funções de ε .

A teoria consiste em uma coleção de métodos iterativos para a obtenção das soluções aproximadas que envolvem um parâmetro pequeno $\varepsilon \ll 1$, também chamado de parâmetro de perturbação. Através desse método é possível decompor um problema complexo em um número infinito de problemas possíveis de serem resolvidos pelos métodos clássicos.

Destaca-se como uma das potencialidades do método de perturbação é o fato de que os primeiros termos da expansão assintótica formal, suposta solução, são suficientes para revelar características importantes do problema (BAKHVALOV; PANA-

SENKO, 1989). Existem dois tipos de perturbações em equações diferenciais com o parâmetro pequeno, conforme serão mencionados a seguir.

2.2.1 Problemas de perturbação singular

Conforme KEVORKIAN; COLE (1981) e HOLMES (2013), problemas de perturbação singular em equações diferenciais são muito comuns em aplicações físicas. Tais problemas podem ser divididos em duas grandes categorias: problemas de perturbação do tipo camada e problemas de perturbação cumulativos.

Em um problema de tipo camada, o pequeno parâmetro multiplica um termo na equação diferencial que se torna grande em uma camada fina perto de um limite (por exemplo, uma camada de limite) ou no interior (por exemplo, uma camada de choque). Muitas vezes, esta é a derivada de maior ordem da equação diferencial e quando $\varepsilon \rightarrow 0$, tem-se uma equação de ordem inferior que geralmente satisfaz todas as condições iniciais ou de contorno prescritas.

Já em um problema de perturbação acumulativo, o parâmetro pequeno multiplica um termo que nunca se torna grande. No entanto, seu efeito cumulativo torna-se importante para grandes valores da variável independente. Em algumas aplicações, ambas as categorias ocorrem simultaneamente e exigem o uso combinado dos dois problemas.

2.2.2 Problemas de perturbação regular

Já os problemas de perturbação regular ocorrem quando o parâmetro pequeno de perturbação ε vem multiplicando derivadas de ordem inferior ou os demais termos da equação diferencial.

Em um problema de perturbação regular, um procedimento direto leva a uma representação aproximada da solução. A precisão dessa aproximação não depende do valor da variável independente, mas sim obtém-se uma melhor aproximação para valores menores de ε (KEVORKIAN; COLE, 1981; HOLMES, 2013).

2.3 Transformada Finita de Fourier

Baseado no trabalho de MEDRANO-BALBOA (1989) essa seção traz a teoria das transformadas finitas de Fourier (TFF).

As transformadas finitas são aplicadas em problemas onde o intervalo do domínio das variáveis de interesse é finito (MEDRANO-BALBOA, 1989). Ou seja, se x for a variável sobre a qual se pretende aplicar uma transformada finita de Fourier, então: $a_l \leq x \leq b_l$, onde a_l e b_l são números finitos no espaço l e $\mathcal{L}$ é o período da função $f(x)$, que pode ou não estar definida em b_l , dependendo do domínio da função.

Dessa forma, uma função $f(x)$, definida em um intervalo $a_l \leq x \leq b_l$, pode ser

representada na forma trigonométrica, conhecida com série de Fourier:

$$f(x) \approx \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right], \quad (2.15)$$

em que A_0 , A_n e B_n são chamados de coeficientes de Fourier. Para isso, a função $f(x)$ precisa satisfazer as condições de Dirichlet (teorema da convergência da série de Fourier), que diz: para uma função $f(x)$ definida em um intervalo $a_l \leq x \leq b_l$:

- é injetora e continua exceto em um número finito de descontinuidade ordinárias dentro do período $\mathcal{L}$;
- tem um número finito de máximos e mínimos dentro do período $\mathcal{L}$;
- é absolutamente integrável, ou seja, a integral $\int_0^{\mathcal{L}} |f(x)| dt$ converge.

Assim, a função $f(x)$ pode ser expressa em série de Fourier em termos das funções cosseno para $f(x)$ par:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{b_l} x\right), \quad (2.16)$$

onde:

$$A_n = \frac{2}{b_l} \int_{a_l}^{b_l} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{b_l} x\right) dx, \quad n=1,2,3,\dots, \quad (2.17)$$

e também em termos das funções seno para $f(x)$ ímpar:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b_l} x\right), \quad (2.18)$$

onde:

$$B_n = \frac{2}{b_l} \int_{a_l}^{b_l} f(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b_l} x\right) dx, \quad n=1,2,3,\dots \quad (2.19)$$

Pode-se observar que nessas relações as integrais que fornecem os coeficientes das séries, nas equações (6.43) e (6.52), respectivamente, as características das transformadas integrais têm como núcleos $\cos\left(\frac{n\pi}{b_l} x\right)$ e $\text{sen}\left(\frac{n\pi}{b_l} x\right)$.

De fato, se estas integrais representam transformadas, então as transformadas inversas também estão relacionadas com as séries correspondentes. Assim, define-se a transformada finita de Fourier-cosseno conforme segue:

$$\mathcal{C}\{f(x)\} = F_c(n) = \int_{a_l}^{b_l} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{b_l}\right) dx, \quad \text{em que } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.20)$$

e transformada finita de Fourier-seno dada por:

$$\mathcal{S}\{f(x)\} = F_S(n) = \int_{a_l}^{b_l} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{b_l}\right) dx, \text{ em que } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.21)$$

Comparando as relações (6.43) e (6.52) com as relações (7.36) e (2.21) é possível observar que:

$$A_n = \frac{2}{b_l} F_c(n), \quad (2.22)$$

$$B_n = \frac{2}{b_l} F_S(n). \quad (2.23)$$

A partir dessas identificações obtém-se, de forma imediata, as transformadas inversas:

$$\mathcal{C}^{-1}\{(F_c(n))\} = f(x) = \frac{1}{b_l} F_c(0) + \frac{2}{b_l} \sum_{n=1}^{\infty} \left(F_c(n) \cos\left(\frac{n\pi x}{b_l}\right) \right), \quad (2.24)$$

$$\mathcal{S}^{-1}\{(F_S(n))\} = f(x) = \frac{1}{b_l} F_S(0) + \frac{2}{b_l} \sum_{n=1}^{\infty} \left(F_S(n) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{b_l}\right) \right). \quad (2.25)$$

Vale ressaltar que a diferença da transformada finita de Fourier, ou qualquer outra transformada finita, para a transformada em domínios infinitos ou semi-infinitos, é que o domínio da variável independente é finito e o parâmetro da transformada é um número inteiro.

Uma das propriedades da TFF-cosseno ou TFF-seno é a transformada da derivada. Com ela é possível resolver EDPs lineares cuja variável espacial é definida em um domínio finito. Contudo, precisa-se analisar algumas condições na EDP: se a derivada em x é de ordem par ou ímpar, e se possui condições de contorno de ordem par ou ímpar.

A transformada da derivada é apresentada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\{f^{(2m)}(x)\} &= (-1)^m \left(\frac{n\pi}{b_l}\right)^{2m} F_c(n) + \\ &+ (-1)^m \sum_{p=1}^m \left[(-1)^p \left(\frac{n\pi}{b_l}\right)^{2(m-p)+1} ((-1)^n f^{(2p-1)}(b_l) - f^{(2p-1)}(a_l)) \right], \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\{f^{(2m-1)}(x)\} &= (-1)^{m-1} \left(\frac{n\pi}{b_l}\right)^{2m-1} F_S(n) + \\ &+ (-1)^m \sum_{p=1}^m \left[(-1)^p \left(\frac{n\pi}{b_l}\right)^{2(m-p)} [(-1)^n f^{(2p-2)}(b_l) - f^{(2p-2)}(a_l)] \right], \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\mathcal{S}\{f^{(2m)}(x)\} = (-1)^m \left(\frac{n\pi}{b_l}\right)^{2m} F_S(n) + (-1)^m \sum_{p=1}^m \left[(-1)^p \left(\frac{n\pi}{b_l}\right)^{2(m-p)+1} [(-1)^n f^{(2p-2)}(b_l) - f^{(2p-2)}(a_l)] \right], \quad (2.28)$$

$$\mathcal{S}\{f^{(2m-1)}(x)\} = (-1)^m \left(\frac{n\pi}{b_l}\right)^{2m-1} F_C(n) + (1 - m_\delta) (-1)^m \sum_{p=1}^{m-1} \left[(-1)^p \left(\frac{n\pi}{b_l}\right)^{2(m-p)-1} [(-1)^n f^{(2p-1)}(b_l) - f^{(2p-1)}(a_l)] \right], \quad (2.29)$$

em que $m = 1, 2, 3, \dots$, e é determinado a partir do grau da derivada.

A escolha da transformada finita de Fourier (seno ou cosseno) se dá através da análise do grau das condições de contorno e do grau da derivada em x . Ou seja:

- Derivada em x , de ordem par, e condições de contorno de ordem ímpares, portanto utiliza-se a TFF-cosseno, equação (2.26);
- Derivada em x , de ordem ímpar, e condições de contorno de ordem par, portanto utiliza-se a TFF-seno, equação (2.27);
- Derivada em x , de ordem par, e condições de contorno de ordem par, portanto utiliza-se a TFF-cosseno, equação (2.28);
- Derivada em x , de ordem ímpar, e condições de contorno de ordem ímpar, portanto utiliza-se a TFF-seno, equação (2.29).

Uma das maiores utilidades das transformadas finitas consiste na sua aplicação à solução de equações diferenciais que tenham derivadas somente de ordem par, ou somente de ordem ímpar, e com o domínio limitado da variável independente (MEDRANO-BALBOA, 1989).

2.4 Controle ótimo e o princípio de Pontryagin

Nesta seção, encontram-se alguns conceitos básicos da teoria de controle ótimo e do princípio de Pontryagin. Foram utilizadas os livros de NAIDU (2003), FALEIROS; YOUNEYAMA (2002) e BAUMEISTER; LEITÃO (2014) para construção deste texto.

2.4.1 Introdução a teoria de controle ótimo

O principal objetivo do controle ótimo é determinar a função de controle que fará com que um processo satisfaça algumas restrições físicas e ao mesmo tempo extrene (maximize ou minimize) um critério de desempenho, ou também denominado índice de desempenho, ou ainda função custo.

Através da figura 7, que representa um sistema de malha fechada, é possível exemplificar que na teoria de controle ótimo interessa-se em encontrar um controle ótimo

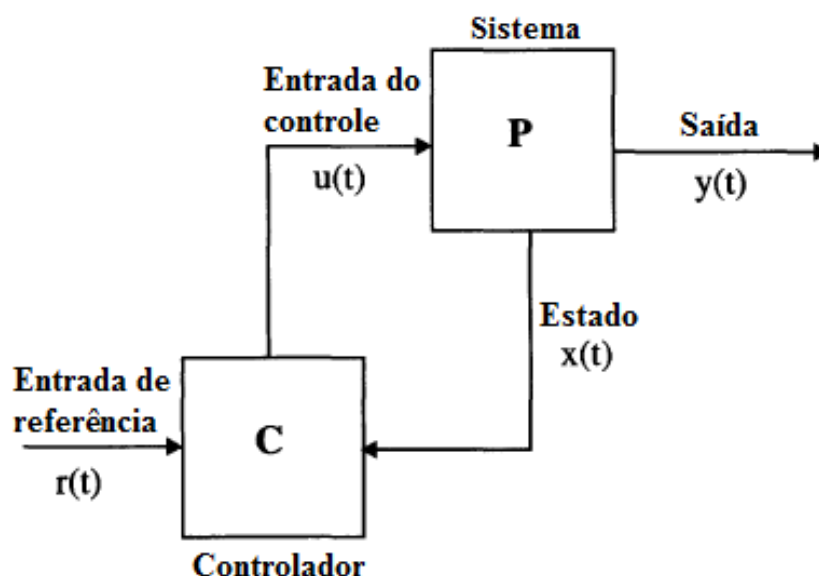


Figura 7: Configuração de um sistema de controle moderno. Fonte: adaptado (NAIDU, 2003).

u^* , em que $*$ indica condição ótima, que dirigirá ao sistema P do estado inicial para o estado final, com algumas restrições sobre os controles e os estados e, ao mesmo tempo, extremize o critério de desempenho J dado.

O problema de controle ótimo requer:

- uma descrição matemática, que corresponde aos modelos compostos por equações e que contém as variáveis de estado;
- um critério de desempenho e;
- a declaração das condições de contorno e restrições físicas dos estados e/ou controles.

2.4.1.1 Sistema

Na área de otimização, descreve-se um sistema por um conjunto de equações a diferenças ou diferenciais.

2.4.1.2 Critério de desempenho

Na teoria de controle moderno, o problema de controle ótimo é encontrar um controle que faça com que o sistema dinâmico alcance um alvo, ou seja, uma variável de estado (ou trajetória) e ao mesmo tempo extremize um critério de desempenho de maneira que assume diversas formas. Essas formas para sistema de controle ótimo serão especificadas brevemente a seguir, cada qual é proveniente de uma situação:

- **Critério de desempenho para sistema de controle ótimo para o tempo:**

Neste caso tenta-se transferir o sistema de qualquer estado inicial $x(t_0)$ para um estado final específico $x(t_f)$ em um tempo mínimo. A formulação do critério de desempenho é dada por:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0 = t^*. \quad (2.30)$$

- **Critério de desempenho para sistema de controle ótimo para combustível:**

Aqui considera-se um problema envolvendo uma espaçonave. Considerando $u(t)$ o impulso do motor do foguete e supõe-se que a magnitude $|u(t)|$ do impulso é proporcional à taxa de combustível consumido. A fim de minimizar o total de desperdício de combustível, formula-se o critério de desempenho da seguinte maneira:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} |u(t)| dt. \quad (2.31)$$

Para vários controles, pode-se escrever como:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^m R_i |u_i(t)| dt, \quad (2.32)$$

onde R_i é um fator de ponderação.

- **Critério de desempenho para sistema de controle que minimiza energia:**

Neste tipo de critério de desempenho considera-se $u_i(t)$ como a corrente no i -ésimo ciclo de uma rede elétrica. Então $\sum_{i=1}^m u_i^2(t) r_i$, onde r_i é a resistência do i -ésimo ciclo, é a potência total ou a taxa total de energia gasta na rede elétrica. Então, para minimizar o total de energia gasta, tem-se:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^m u_i^2(t) r_i dt, \quad (2.33)$$

e na forma geral:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} u^T(t) R u(t) dt, \quad (2.34)$$

onde R é uma matriz definida-positiva.

De forma similar, pode-se pensar em minimizar a integral do erro quadrado de um sistema de rastreamento:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} x^T(t) Q x(t) dt, \quad (2.35)$$

onde, $x_d(t)$ é o valor desejado, $x_a(t)$ é o valor atual, e $x(t) = x_a(t) - x_d(t)$ é o erro.

Aqui, Q é uma matriz de ponderação que pode ser semi-definida positiva.

- **Critério de desempenho para sistema de controle final:** No problema de alvo final, interessa-se em minimizar o erro entre a posição desejada $x_d(t_f)$ e a posição atual $x_a(t_f)$ no final da manobra ou do tempo final t_f . O erro final é $x(t_f) = x_a(t_f) - x_d(t_f)$. Tomando cuidado com os valores (positivo e negativo) do erro e dos fatores de ponderação, estrutura-se o funcional de custo:

$$J = x^T(t_f)Gx(t_f), \quad (2.36)$$

que é também chamado de função de custo final. Aqui, G é uma matriz semi-definida positiva.

- **Critério de desempenho para sistema de controle ótimo geral:** Da combinação das formulações acima, tem-se:

$$J = x^T(t_f)Gx(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt, \quad (2.37)$$

ou também:

$$J = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t) dt, \quad (2.38)$$

onde R é uma matriz definida-positiva, e Q e G são matrizes semi-definidas positivas, respectivamente. Além disso, $S(j) = S(x(t_f), t_f) = x^T(t_f)Gx(t_f)$ e $V(j) = V(x(t), u(t), t) = x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)$, em que as variáveis $S(j)$ e $V(j)$ são funções auxiliares. É possível notar que as matrizes Q e R podem variar com o tempo. A forma (2.37) é chamada de critério de desempenho quadrático, pois possui os termos de estado e do controle.

Os problemas que surgem no controle ótimo são classificados baseados na estrutura do critério de desempenho J . Pode-se destacar três formas:

- **Problema de Mayer:** Se o critério de desempenho (2.38) contém a função de custo final somente;
- **Problema de Lagrange:** Se o critério de desempenho (2.38) tem somente o termo de custo integral;
- **Problema de Bolza:** Se o critério de desempenho (2.38) obtiver ambos: a função de custo final e o termo de custo integral.

2.4.1.3 Restrições

Os vetores do controle $u(t)$ e o estado $x(t)$ são irrestritos ou limitados dependendo das condições físicas. Das considerações físicas, muitas vezes têm-se controles e

estados, assim como correntes e tensões em circuitos elétricos, velocidade do motor, impulso de um foguete, restrito a:

$$U_+ \leq u(t) \leq U_-, \quad \text{e} \quad X_- \leq x(t) \leq X_+, \quad (2.39)$$

onde, + e – indicam os valores máximos e mínimos que as variáveis podem atingir.

2.4.1.4 Declaração formal do sistema de controle ótimo

O problema de controle ótimo consiste em encontrar a função de controle ótimo $u^*(t)$, onde * indica extremo ou valor ótimo, que leve o sistema linear:

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.40)$$

para dada trajetória $x(t)$ que otimize ou extremize (minimize ou maximize) o critério de desempenho (2.37), ou o que leve o sistema não linear:

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t), t), \quad (2.41)$$

para dada trajetória $x(t)$, que otimize o critério de desempenho (2.38), com algumas restrições nas variáveis de controle $u(t)$ e/ou as variáveis de estado $x(t)$, dadas por (2.39).

Os sistemas de controle ótimo são estudados em basicamente três etapas:

- **Primeiro passo:** Considerar o critério de desenvolvimento da forma (2.38) e utilizar a teoria do cálculo variacional já conhecida para obter o ótimo do funcional;
- **Segundo passo:** considera-se o sistema (2.40) e tenta-se encontrar a solução do problema para encontrar a função de controle $u^*(t)$, que conduzirá o sistema e ao mesmo tempo otimizará o critério de desempenho (2.37);
- **Terceiro passo:** as restrições do controle e do estado (2.39) são consideradas juntamente com o sistema e o critério de desempenho para obter o controle ótimo.

2.4.2 O princípio de Pontryagin

De forma sucinta, os sistemas de controle são sistemas dinâmicos cuja evolução pode ser modificada visando algum objetivo: conduzir o sistema de um dado estado inicial para um dado estado final, preservar, maximizar ou minimizar alguma quantidade do sistema.

O princípio do máximo de Pontryagin foi formulado pelo matemático russo Lev Semenovich Pontryagin e seus alunos em 1962 (PONTYRAGIN et al., 1962). Constitui uma condição necessária para a estratégia de controle que maximiza ou minimiza um

dado funcional (de determinado tipo), admitindo possíveis restrições impostas sobre as variáveis de estado ou de controle. Para o caso de sistemas de controle com tempo contínuo, cuja dinâmica satisfaz certas hipóteses de regularidade, o princípio do máximo consiste de um conjunto de equações diferenciais com condições de contorno que generaliza as equações de Euler-Lagrange do Cálculo Variacional.

A seguir apresenta-se o princípio do máximo de Pontryagin de forma resumida. Dado o sistema (2.41), o critério de desempenho (2.38) e as condições de contorno:

$$x(t_0) = x_0 \text{ e } t_f, \quad x(t_f) = x_f \text{ são livres.} \quad (2.42)$$

Para encontrar o controle ótimo, formula-se a função de Pontryagin $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), \lambda(t), t) = V(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t) f(x(t), u(t), t), \quad (2.43)$$

minimize $\mathcal{H}$ com respeito a $u(t) (\leq U)$ como:

$$\mathcal{H}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \leq \mathcal{H}(x^*(t), u(t), \lambda^*(t), t), \quad (2.44)$$

e resolva o conjunto de equações de estado e co-estado ($2n$):

$$\frac{dx^*}{dt} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} \right)_* \text{ e } \frac{d\lambda^*}{dt} = - \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \right)_* \quad (2.45)$$

com as condições de contorno x_0 e:

$$\left[\mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t} \right]_{*t_f} \delta t_f + \left[\frac{\partial S}{\partial x} - \lambda \right]_{*t_f}^T \delta x_f = 0. \quad (2.46)$$

3 SÍNTESE DA TEORIA DE CONTROLE PARA SISTEMAS BIOLÓGICOS COM REALIMENTAÇÃO

Controle com realimentação é um mecanismo básico pelo qual sistemas dinâmicos mantêm seu equilíbrio, operando de forma com que a informação de saída do processo é sentida antes do controlador. De natureza intuitiva, as decisões do controle são tomadas após o distúrbio ter acontecido.

Esse tipo de controle apresenta vantagens tais como o fácil ajuste dos parâmetros de controle. Além disso, é considerado um tipo de controle robusto, que independe do tipo de perturbação. Como desvantagens, necessita que ocorra o desvio para ser aplicado e precisa de diferentes controladores para diferentes distúrbios (OGATA; MAYA; LEONARDI, 2003).

Este capítulo é destinado à síntese da teoria de controle ótimo. Na seção 3.1 serão apresentados procedimentos para o controle de sistemas lineares, na seção 3.2 para sistemas não lineares e na seção 3.3 para sistemas não lineares, aplicando o princípio do máximo.

3.1 Controle ótimo linear realimentado para sistemas lineares

O propósito da aplicação da teoria de controle é manter o sistema o mais próximo do ponto de equilíbrio desejado, durante um intervalo de tempo de interesse, de acordo com TUSSET; RAFIKOV (2003). O problema do controle ótimo do sistema linear:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ x(0) &= x_0,\end{aligned}\tag{3.1}$$

que minimiza o funcional quadrático:

$$J(u) = \int_0^{t_f} (x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u) dt,\tag{3.2}$$

denomina-se problema do regulador ótimo linear com funcional quadrático. Nesse problema $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor do estado, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor do controle, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é matriz de estado, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é a matriz de controle, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz semi-definida positiva e $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é definida positiva. Tanto Q como R são matrizes cujos valores são atribuídos empiricamente e interferem diretamente no tempo de estabilização do sistema, onde n é o número de equações de estado, que é igual ao número de espécies, e m é o número de funções de controle. Tem-se duas possibilidades para o tempo final:

- Se o tempo final t_f é finito, então o problema (3.1) - (3.2) é chamado *problema linear-quadrático do controle ótimo com horizonte finito*. Neste caso, todas as matrizes podem depender do tempo.
- Se t_f é infinito, todas as matrizes são constantes, e o problema (3.1) - (3.2) é chamado problema linear-quadrático do controle ótimo com horizonte infinito, ou regulador com tempo infinito ou ainda regulador linear-quadrático.

Esse problema pode ser resolvido através da Programação Dinâmica (BELLMAN, 2013). A equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) para o problema (3.1) - (3.2) tem a forma:

$$\min_{u(t)} [\varpi] = 0, \quad (3.3)$$

em que:

$$\varpi = \frac{\partial v}{\partial t} + (\text{grad } v)^T (A(t)x + B(t)u) + x^T Q(t)x + u^T R(t)u, \quad (3.4)$$

onde o vetor:

$$\text{grad } v = \left[\frac{\partial v}{\partial x_1} \quad \frac{\partial v}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial v}{\partial x_n} \right]. \quad (3.5)$$

Assim, busca-se a solução da equação de HJB (3.3) na forma da função de Lyapunov⁵:

$$v(x, t) = \frac{1}{2} x^T P(t) x, \quad (3.6)$$

onde $P(t)$ é a matriz peso que será determinada.

Admitindo que $\text{grad } v = P(t)x$, da condição do mínimo de (3.3) tem-se que $\frac{\partial \varpi}{\partial u} = 0$ e obtém-se o controle ótimo:

$$u = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x, \quad (3.7)$$

onde R^{-1} é a matriz inversa de R .

⁵Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918) foi matemático, mecânico e físico. Nascido na Rússia, Lyapunov é conhecido por seu desenvolvimento da teoria da estabilidade de um sistema dinâmico, bem como por suas muitas contribuições para a física matemática e a teoria da probabilidade (NAIDU, 2003).

Pode-se então, substituir a função de controle (3.7) na equação (3.3) e, admitindo que a matriz $P(t)$ é simétrica, encontra-se a equação para encontrar $P(t)$:

$$x^T \left[\frac{\partial P(t)}{\partial t} + 2A(t) - 2P(t)B(t)R^{-1}(t)B(t)P(t) + Q(t) + P(t)B(t)R^{-1}(t)B(t)P(t) \right] x = 0. \quad (3.8)$$

Dessa forma, essa equação é satisfeita para quaisquer valores de x se, e somente se, a matriz $P(t)$ satisfaz a equação matricial de Riccati ⁶:

$$\frac{dP(t)}{dt} + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) + Q(t) = 0. \quad (3.9)$$

Como por definição $v(x, t_f) = 0$, a condição final para a equação (3.9) é dada por:

$$P(t_f) = 0. \quad (3.10)$$

Para sistemas autônomos, as matrizes A, B, Q e R são constantes, pois A e B representam os coeficientes que acompanham o vetor de estado $x(t)$ e o de controle $u(t)$, respectivamente. E as matrizes Q e R são matrizes de ponderação:

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad (3.11)$$

e o funcional:

$$J(u) = \int_0^{\infty} x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)dt. \quad (3.12)$$

Para $t_f \rightarrow \infty$ a função $v(x)$ não depende do tempo. Desse modo, a equação (3.7) torna-se equação algébrica de Riccati:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0. \quad (3.13)$$

Da equação (3.13), encontra-se a uma matriz simétrica positiva definida P , e a partir de (3.7) obtém-se a lei do controle ótimo:

$$u = -R^{-1}B^T Px, \quad (3.14)$$

que fornece mínimo ao funcional (3.12):

$$J^* = \int_0^{\infty} x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)dt, \quad (3.15)$$

⁶Conde Jacopo Francesco Riccati(1676-1754) foi matemático e físico italiano que efetuou trabalhos sobre hidráulica que foram muito importantes para a cidade de Veneza. Considerou diversas classes de equações diferenciais mas é conhecido principalmente pela Equação de Riccati (BOYCE; DIPRIMA, 2015).

calculado nas trajetórias ótimas do sistema (3.11) e fornece estabilidade assintótica ao sistema (3.11) se o valor de J^* é finito.

A estabilidade assintótica do sistema (3.11) é assegurada através da condição suficiente para o mínimo dada pela positividade das matrizes Q e R , ou seja:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} & \frac{\partial^2 H}{\partial^2 u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} > 0, \quad (3.16)$$

onde H é o Hamiltoniano do problema de controle ótimo (3.1) - (3.2).

A condição suficiente para que o valor de J^* seja finito é a controlabilidade completa para a matriz A e o vetor B , isso é, a matriz de controlabilidade:

$$\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

não pode ser singular, ou seja, deverá conter n colunas linearmente independentes. Significa que precisa ter posto completo, isto é:

$$\text{posto} \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n. \quad (3.18)$$

3.2 Controle ótimo linear realimentado para sistemas não lineares

Esta seção é uma síntese dos trabalhos de RAFIKOV; BALTHAZAR (2004) e WYSE (2007). Considera-se o sistema não linear da forma (RAFIKOV; BALTHAZAR, 2004):

$$\frac{dx}{dt} = A(x)x, \quad (3.19)$$

em que $A(x)$ é uma matriz com coeficientes dependentes do estado. O sistema (3.19) pode ser reescrito como:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + g(x), \quad (3.20)$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ torna-se uma matriz constante e $g(x)$ é um vetor de funções contínuas contendo as partes não lineares do sistema.

Busca-se controlar o sistema não linear dado por (3.20) a fim de levá-lo para um determinado ponto ou trajetória desejada x^* , assim tem-se um sistema da forma:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + g(x) + U, \quad (3.21)$$

onde U é a função de controle e é definida por:

$$U = u_c + u^*, \quad (3.22)$$

em que u_c é a parte responsável por manter o sistema controlado na trajetória desejada e u^* tem a função de estabilizar o sistema em torno da trajetória desejada. Substituindo a função de controle (3.22) no sistema (3.21) e isolando u^* obtém-se:

$$u^* = \frac{dx^*}{dt} - Ax^* - g(x^*), \quad (3.23)$$

e u_c tem a forma:

$$u_c = Bu, \quad (3.24)$$

onde $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é uma matriz constante.

Considerando y como o desvio da trajetória do sistema (3.21) dado por:

$$y = x - x^*, \quad (3.25)$$

considerando os resultados para a função de controle (3.22), (3.23) e (3.24), e substituindo-as no sistema (3.21), encontra-se a equação em desvios:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + g(x) - Ax^* - g(x^*) + Bu, \quad (3.26)$$

$$\frac{d}{dt}(x - x^*) = A(x - x^*) + g(x) - g(x^*) + Bu, \quad (3.27)$$

$$\frac{dy}{dt} = Ay + g(x) - g(x^*) + Bu. \quad (3.28)$$

No sistema (3.28), a parte não linear pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$g(x) - g(x^*) = G(x, x^*)(x - x^*), \quad (3.29)$$

em que $G(x, x^*)$ é uma matriz, cujos termos são limitados, que depende de x e de x^* . Admitindo (3.29), pode-se reescrever o sistema (3.28) e assim tem-se:

$$\frac{dy}{dt} = Ay + G(x, x^*)(x - x^*) + Bu, \quad (3.30)$$

$$\frac{dy}{dt} = Ay + G(x, x^*)y + Bu. \quad (3.31)$$

Teorema 1 (RAFIKOV; BALTHAZAR, 2004). *Se existem as matrizes definidas-positivas Q e R , em que Q é uma matriz simétrica, tais que a matriz:*

$$Q^* = Q - G^T(x, x^*)P - PG(x, x^*), \quad (3.32)$$

seja definida-positiva para a matriz G , então o controle linear por realimentação:

$$u = -R^{-1}B^T P y, \quad (3.33)$$

é ótimo, para deslocar o sistema não linear (3.28) de qualquer estado inicial ao estado final:

$$y(t_f) = 0, \quad (3.34)$$

minimizando o funcional:

$$J^* = \int_0^{t_f} (y^T Q^* y + u^T R u) dt, \quad (3.35)$$

e a matriz simétrica P é obtida através da equação algébrica não linear de Riccati:

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0, \quad (3.36)$$

onde as matrizes $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ são constantes definidas positivas.

A demonstração desse teorema 1 e demais detalhes encontram-se no anexo B, no final desse trabalho.

Uma observação importante é que a matriz A no sistema (3.21) não é única, e pode intervir na funcionalidade do controlador.

Em suma, para resolver o problema de controle enunciado pelo teorema 1, é necessário resolver a equação algébrica linear de Riccati (3.36) a partir das matrizes dadas A e Q , e encontrando a matriz P . Dessa forma, consegue-se determinar a função de controle através de (3.33) e consequentemente as trajetórias ótimas, integrando o sistema (3.31) e verificando se a condição (3.32) é satisfeita. Se a condição (3.32) não for satisfeita, é preciso escolher outra matriz Q e calcular novamente a equação algébrica não linear de Riccati (3.36) e os passos posteriores.

3.3 Controle não linear realimentado utilizando o princípio do máximo

Nesta seção será apresentada uma aplicação da teoria de controle não linear, baseada no trabalho de RAFIKOV; BALTHAZAR (2005). Considera-se um modelo geral de n populações interagindo, descrito pelo sistema de equações:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \text{onde } i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.37)$$

em que $x_i(t)$ é a densidade da população i em um instante de tempo t ; $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ são funções contínuas das variáveis x_i .

O sistema de equações (3.37) descreve a dinâmica populacional sem aplicação de controle. Considerando que $U_i(t)$ é o número de espécies retiradas ou introduzidas no sistema no instante t , supõe-se que as espécies das n_1 primeiras populações são retiradas do sistema e as espécies das $n - n_1$ populações remanescentes são introduzidas no sistema. As equações que representam a dinâmica do sistema com aplicação de controle, podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\frac{dx_i}{dt} = (x_i - U_i) f_i(x_1 - U_1, x_2 - U_2, \dots, x_{n_1} - U_{n_1}, x_{n_1+1} + U_{n_1+1}, \dots, x_n + U_n) - \tau_i U_i \quad \text{se } i = 1, 2, \dots, n_1, \quad (3.38)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = (x_i + U_i) f_i(x_1 - U_1, x_2 - U_2, \dots, x_{n_1} - U_{n_1}, x_{n_1+1} + U_{n_1+1}, \dots, x_n + U_n) + \tau_i U_i \quad \text{se } i = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n, \quad (3.39)$$

onde τ_i são constantes positivas que caracterizam a condição técnica da aplicação do controle.

Pelas características do sistema, as funções de controle U_i satisfazem as condições:

$$\begin{aligned} 0 \leq U_i \leq x_i & \quad i = 1, 2, \dots, n_1, \\ 0 \leq U_i & \quad i = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Supõe-se que é desejado que o nível de população retirada fique abaixo de algum limiar para essa população, que tenha aumento do número de populações introduzidas e que tenha um baixo custo na utilização da variável de controle. Para isso, utiliza-se o índice de desempenho ponderado:

$$I = \sum_{i=1}^n \rho_i \vartheta_i(t_f), \quad (3.41)$$

onde:

$$\begin{aligned} \vartheta_i &= \tau_i \int_0^{t_f} U_i dt + x_i, \quad \text{se } i = 1, 2, \dots, n_1, \\ \vartheta_i &= \tau_i \int_0^{t_f} U_i dt - x_i, \quad \text{se } i = n_1 + 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.42)$$

e ρ_i são constantes positivas que caracterizam o peso de cada tipo de controle; $t = 0$ é o tempo inicial e t_f é o tempo final da aplicação de controle.

Minimizando o índice de desempenho (3.41), conseqüentemente, minimizam-se os valores da função de controle e da população retirada durante o período da aplicação e também é maximizada a população introduzida no ponto final.

Desse modo, o problema de controle ótimo é escolher uma estratégia de controle

admissível, que leve o sistema (3.38) - (3.39) do estado inicial:

$$x(0) = x_0, \quad (3.43)$$

para o estado final, de tal forma que minimize o índice de desempenho (3.41).

Esse problema de otimização para sistemas dinâmicos pode ser resolvido pela aplicação do princípio do máximo (PONTRYAGIN et al., 1962). Por conveniência, introduzem-se novas variáveis χ e ξ_i :

$$\chi = \sum_{i=1}^n \rho_i \vartheta_i(t), \quad (3.44)$$

$$\xi_i = \begin{cases} x_i - U_i & \text{se } i = 1, 2, \dots, n_1, \\ x_i + U_i & \text{se } i = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n. \end{cases} \quad (3.45)$$

Pode-se derivar a função χ , obtendo-se:

$$\frac{d\chi}{dt} = \sum_{i=1}^{n_1} \rho_i \xi_i f_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) - \sum_{i=n_1+1}^n \rho_i \xi_i f_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n). \quad (3.46)$$

E assim, adicionam-se as equações (3.46) ao sistema (3.38)-(3.39), obtendo-se uma nova formulação do problema de controle ótimo: escolher as variáveis de controle admissíveis U_i , que conduzirão o sistema (3.38),(3.39), (3.45), (3.46) do estado inicial (3.43) para o estado final $x(t_f)$ de modo que o índice de desempenho:

$$I = \chi(t_f), \quad (3.47)$$

seja minimizado.

Define-se então, a função hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \psi_0 \sum_{i=1}^n \rho_i \delta_i \xi_i f_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) + \sum_{i=1}^n \psi_i [\xi_i f_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) - \delta_i \tau_i U_i] \quad (3.48)$$

em que:

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 1, 2, \dots, n_1, \\ -1 & \text{se } i = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n. \end{cases} \quad (3.49)$$

e as variáveis ψ_0 e ψ_i são as variáveis auxiliares determinadas pelas equações:

$$\frac{d\psi_0}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \chi} = 0, \quad (3.50)$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}, \quad \text{onde } i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.51)$$

e condições finais:

$$\psi_0(t_f) = -1, \quad (3.52)$$

$$\psi_i(t_f) = 0, \quad \text{em que } i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.53)$$

De acordo com o princípio do máximo (PONTYAGIN et al., 1962),(NAIDU, 2003)(BAUMEISTER; LEITÃO, 2014) a função de controle ótimo maximiza a função $\mathcal{H}$. As condições necessárias para maximizar a função $\mathcal{H}$ são dadas por:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial U_i} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_i} - \tau_i \psi_i = 0, \quad \text{se } i = 1, 2, \dots, n_1, \quad (3.54)$$

e:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial U_i} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_i} + \tau_i \psi_i = 0, \quad \text{se } i = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n. \quad (3.55)$$

Da equação (3.50) tem-se que ψ_0 é constante e, admitindo a condição final (3.52), encontra-se:

$$\psi_0 = -1. \quad (3.56)$$

Para o sistema (3.54)-(3.55) obtém-se:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_i} = -\tau_i \psi_i, \quad \text{onde } i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.57)$$

E por outro lado:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_i}, \quad \text{onde } i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.58)$$

portanto a equação (3.55) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = \tau_i \psi_i, \quad \text{onde } i = 1, 2, \dots, n \quad (3.59)$$

e resolvida. Assim encontra-se a solução geral:

$$\psi_i = c_i e^{\tau_i t}, \quad (3.60)$$

e aplica-se a condição final (3.53). Daí, obtém-se que $c_i = 0$, e consequentemente que:

$$\psi_i = 0. \quad (3.61)$$

Desse modo, pode-se aplicar (3.56) e (3.61) na função de Hamilton (3.48)-(3.49) e tem-se:

$$\mathcal{H} = - \sum_{i=1}^n \rho_i \delta_i \xi_i f_i (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n). \quad (3.62)$$

Agora, das condições (3.54) e (3.55) obtém-se o sistema de n equações:

$$\sum_{i=1}^n \rho_i \delta_i \frac{\partial (\xi_i, f_i)}{\partial \xi_i} = 0, \quad \text{onde } i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.63)$$

Utilizando (3.45) e os valores de ξ_i , calcula-se, para o sistema (3.63), as funções de controle:

$$U_i(t) = \begin{cases} x_i - \xi_i & \text{se } x_i > \xi_i, \\ 0 & \text{se } x \leq \xi_i, \end{cases} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n_1, \quad (3.64)$$

$$U_i(t) = \begin{cases} \xi_i - x_i & \text{se } x_i < \xi_i, \\ 0 & \text{se } x \geq \xi_i, \end{cases} \quad \text{para } i = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n. \quad (3.65)$$

Substituindo as funções de controle (3.64) e (3.65) em (3.38) e (3.39) obtém-se um sistema de EDOs incluindo as funções de controle. A solução desse sistema é calculado considerando-se a condição inicial (3.43). Uma aplicação para essa técnica de controle será apresentada no capítulo 6.

4 MODELO REATIVO-DIFUSIVO UNIDIMENSIONAL PARA UMA ESPÉCIE: EQUAÇÃO DE FISHER-KOLMOGOROV

Na dispersão de populações, a interação de determinadas espécies com o seu habitat tem comportamento descrito pela equação de Fisher-Kolmogorov. Conforme apresentado no capítulo 1, essa equação é do tipo difusivo acrescido de um termo fonte que satisfaz a lei logística. Inicialmente os efeitos da difusão são dominantes no comportamento dinâmico das populações. Com o passar do tempo, à medida que a população alcança a capacidade de suporte, ou seja, a saturação máxima do local, a distribuição forma uma frente de invasão que se move para regiões vazias de ambos os lados, com velocidade constante. Portanto, é possível encontrar uma solução analítica aproximada particular para a equação de Fisher-Kolmogorov do tipo onda viajante, com determinadas condições iniciais e de domínio infinito.

Nesse capítulo, é utilizado a teoria de solução por onda viajante (seção 4.1), para reduzir a equação de Fisher-Kolmogorov para uma EDO e, a partir disso, aplicar a teoria de estabilidade (seção 4.2) com o propósito de obter uma interpretação qualitativa da equação através da verificação da existência de ondas viajantes entre os pontos de equilíbrio e da determinação de uma solução aproximada através do método da perturbação (seção 4.3). Por fim, na seção 4.4, faz-se a análise do modelo de Fisher-Kolmogorov considerando duas variáveis espaciais.

4.1 Solução por onda viajante

Na dinâmica unidimensional, a junção da cinética de reação e difusão pode formar ondas viajantes mais rápidas do que somente o processo difusivo. Entende-se por uma onda viajante, uma onda que viaja sem mudar a sua forma. Segundo (MURRAY, 2001) “se a solução $w(x, t)$ representa este tipo de onda, a forma da solução será sempre a mesma para todo instante de tempo e a velocidade de propagação desta forma será uma constante, a qual denota-se por c . Olhando para essa onda em um quadro em movimento com velocidade c , ela parecerá estacionária”. Matematicamente,

escreve-se isso na forma:

$$w(x, t) = w(x - ct) = W(z), \quad \text{onde } z = x - ct. \quad (4.1)$$

Assim, $w(x, t)$ é uma solução do tipo onda viajante que se move com velocidade constante c no sentido positivo de x , que representa a forma da onda, e para ser determinada, deve ser duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ (KOT, 2001; EDELSTEIN-KESHET, 1988).

A equação (1.29) pode ser simplificada utilizando a técnica de adimensionalização dos parâmetros, assim sendo possível reduzir a quantidade de parâmetros para análise. Então pode-se reescrever a equação de Fisher-Kolmogorov (1.29) de forma adimensional, admitindo a mudança de variáveis:

$$\bar{t} = a \cdot t; \quad \bar{x} = \frac{x}{\sqrt{\frac{D}{a}}}; \quad \text{e} \quad \bar{w} = \frac{w}{K}. \quad (4.2)$$

Tem-se:

$$w_t = \frac{\partial w}{\partial t} = K \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} \cdot \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} = K \cdot a \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}}, \quad (4.3)$$

$$w_x = \frac{\partial w}{\partial x} = K \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = K \cdot \sqrt{\frac{a}{D}} \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}, \quad (4.4)$$

$$w_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(K \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \cdot \sqrt{\frac{a}{D}} \right) \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = K \cdot \frac{a}{D} \cdot \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2}. \quad (4.5)$$

Substituindo (4.3) e (4.5) em (1.29) e para fins de simplicidade de notação, desconsiderando a barra, a equação de Fisher-Kolmogorov (1.29) passa a ser:

$$w_t = w_{xx} + w(1 - w). \quad (4.6)$$

Para a nova variável z , as derivadas parciais de x e t são convertidas em derivadas ordinárias em z :

$$w_t = \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{dW}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{dW}{dz} \cdot (-c) \Rightarrow w_t = -cW'; \quad (4.7)$$

$$w_x = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dW}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dW}{dz} \cdot 1 \Rightarrow w_x = W'; \quad (4.8)$$

$$w_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{d}{dz} \left(\frac{dW}{dz} \right) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d^2 W}{dz^2} \cdot 1 \Rightarrow w_{xx} = W'', \quad (4.9)$$

Substituindo as derivadas espaciais e temporal (4.7) e (4.9), respectivamente, na equação adimensional (4.6) obtém-se:

$$W'' + cW' - W^2 + W = 0, \quad (4.10)$$

que é uma EDO de segunda ordem não linear que pode ser reduzida a um sistema de duas EDOs de primeira ordem. Para isso, introduz-se uma nova variável V definida por $V = W'$ e obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} W' = V, \\ V' = -cV - W(1 - W). \end{cases} \quad (4.11)$$

Note que, para o sistema (4.11) não foi possível obter uma expressão analítica para a solução exata para $W(z)$ e $V(z)$, no entanto, consegue-se realizar uma análise qualitativa do comportamento das soluções através da teoria de estabilidade e do estudo do plano de fase.

4.2 Análise da estabilidade

A partir do sistema (4.11) pode-se realizar uma análise qualitativa da solução de onda viajante através da teoria de estabilidade local (anexo A), que é conhecida como análise do plano de fase que admite interpretações geométricas, ou seja, deduz-se o comportamento qualitativo da solução sem recorrer de fato para a solução.

O retrato de fase contém a família de trajetórias para diferentes condições iniciais, fornecendo uma visualização do padrão de comportamento do sistema. Para isso considera-se a equação dada por:

$$\frac{dV}{dW} = \frac{-cV - W(1 - W)}{V}. \quad (4.12)$$

A partir daqui, calculam-se os pontos críticos do sistema (4.11) em que $W' = 0$ e $V' = 0$ e obtém-se as equações algébricas:

$$-cV - W(1 - W) = 0 \quad \text{e} \quad V = 0. \quad (4.13)$$

Delas encontram-se $W = 0$ e $W = 1$, que combinados com $V = 0$, fornecem os pontos críticos: $P_1 = (1, 0)$ e $P_2 = (0, 0)$ que correspondem às soluções de equilíbrio do sistema (4.11).

Para entender o que acontece em torno desses pontos, pode-se olhar as aproximações lineares, linearizando o sistema (4.11) através da matriz jacobiana. Definindo:

$$f(W, V) = V, \quad (4.14)$$

$$g(W, V) = -cV - W(1 - W), \quad (4.15)$$

e tem-se:

$$\mathcal{J}(W, V) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial W} & \frac{\partial f}{\partial V} \\ \frac{\partial g}{\partial W} & \frac{\partial g}{\partial V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2W - 1 & -c \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

A partir disso, objetiva-se encontrar os autovalores da matriz jacobiana aplicada em cada ponto crítico, para determinar se esses pontos são estáveis ou não, e consequentemente o comportamento das trajetórias próximas a eles.

Para o ponto crítico $P_1 = (1, 0)$, calcula-se:

$$\det(\mathcal{J}(1, 0) - \lambda I) = \det \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -(\lambda + c) \end{vmatrix} = 0, \quad (4.17)$$

e obtém-se o polinômio, cuja equação característica é dada por:

$$\lambda^2 + c\lambda - 1 = 0, \quad (4.18)$$

onde as raízes são os autovalores:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4}}{2}. \quad (4.19)$$

Da mesma forma para o ponto crítico $P_2 = (0, 0)$, tem-se:

$$\det(\mathcal{J}(0, 0) - \lambda I) = \det \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -(\lambda + c) \end{vmatrix} = 0, \quad (4.20)$$

e o polinômio cuja equação característica é dada por:

$$\lambda^2 + c\lambda + 1 = 0, \quad (4.21)$$

onde as raízes correspondem os autovalores:

$$\lambda_{3,4} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4}}{2}. \quad (4.22)$$

Pela teoria de estabilidade local(BOYCE; DIPRIMA, 2015), tem-se que os autovalores $\lambda_{1,2}$ são reais e de sinais distintos, o que caracteriza um ponto de sela instável. E os autovalores $\lambda_{3,4}$ produzem duas situações: 1) o ponto $P_2 = (0, 0)$ é um nó assintoticamente estável se $c^2 \geq 4$, pois os autovalores são reais e negativos; 2) o ponto $P_2 = (0, 0)$ é um nó espiral assintoticamente estável se $c^2 < 4$, assim os autovalores são complexos com parte real negativa. Uma observação importante a se fazer aqui, é que em um contexto biológico, desconsidera-se o nó espiral estável na vizinhança da origem W devido ao seu comportamento oscilante ao redor do zero, isto é, a den-

sidade assumiria valores negativos.

Assim, busca-se encontrar uma solução de onda viajante (trajetória) que conecte P_1 e P_2 no plano de fase e satisfaça os limites: $\lim_{z \rightarrow \infty} W(z) = 0$ e $\lim_{z \rightarrow -\infty} W(z) = 1$. Dessa forma, existe a possibilidade de uma onda viajante “sair” próximo do ponto de equilíbrio instável $P_1 = (1, 0)$ e ir para o ponto de equilíbrio assintoticamente estável $P_2 = (0, 0)$ com $c \geq 2$, que representa uma solução por onda viajante decrescente monótona cuja trajetória no plano de fase é fechada e portanto limitada, conforme o teorema enunciado por LOGAN (2008):

Teorema 2 (LOGAN, 2008) *Para cada $c \geq 2$ existe uma única solução por onda viajante $w(x, t) = W(x - ct)$ que diminui monotonicamente em $\mathbb{R}$, considerando $W(-\infty) = 1$, $W(\infty) = 0$ e $W'(\pm\infty) = 0$.*

Na figura 8, podem ser observada várias trajetórias, contudo, a única trajetória do plano de fase que representa a onda viajante é a trajetória fechada que vai de um ponto de equilíbrio para o outro, pois precisa-se que a solução de onda viajante seja limitada, e a única que cumpre essas condições é aquela que une dois pontos de equilíbrio.

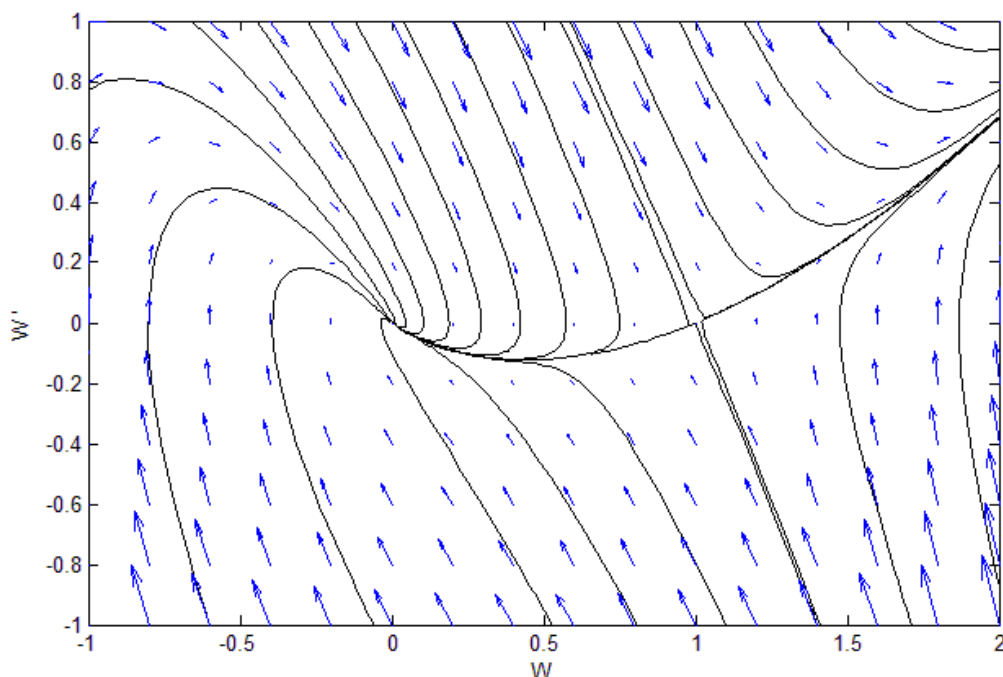


Figura 8: Plano de fase do sistema (4.11).

Na seção seguinte, mostra-se a existência de solução do tipo onda viajante considerando um argumento geométrico no plano de fase. Para isso, busca-se uma solução assintótica através de um método de perturbação.

4.3 Solução Assintótica: Método de Perturbação

Sabe-se que não é possível determinar a solução de um problema envolvendo a equação (4.10) de forma analítica para qualquer c , somente para valores de $c \geq 2$, conforme a análise de estabilidade realizada anteriormente. Contudo consegue-se aplicar um método de perturbação que permite encontrar uma solução analítica aproximada (não exata) para o problema em estudo. Segundo KEVORKIAN; COLE (1981), HINCH (1991), NAYFEH (2004), e LOGAN (2008), o método consiste em encontrar uma expansão da solução do problema em termos de uma série de potências de um parâmetro pequeno ε .

Assim, para encontrar a solução analítica aproximada da equação de Fisher-Kolmogorov, considera-se a solução de onda viajante com um argumento geométrico ε no plano de fase para obter uma solução aproximada da EDO (4.10), no caso de $c \geq 2$.

Se $W(z)$ é solução como foi mostrado nas seções anteriores, ela é invariante sob qualquer mudança de variável. Assim $W(z + z_0)$ vale para qualquer constante z_0 . Dessa forma, a curva de solução pode ser deslocada, ou seja “perturbada”, e ainda se obtém uma solução satisfatória.

O parâmetro ε é um número pequeno entre $0 < \varepsilon \ll 1$. Pode-se definir um parâmetro ε no contexto reativo-difusivo, e é indicado por:

$$\varepsilon = \frac{1}{c^2} \leq 0,25, \quad (4.23)$$

que caracteriza grandes velocidades, conforme tem-se em MURRAY (2001).

Assim, pode-se substituir (4.23) na EDO (4.10) e tem-se:

$$\sqrt{\varepsilon}W'' + W' + \sqrt{\varepsilon}W(1 - W) = 0. \quad (4.24)$$

Como ε é um parâmetro pequeno pode-se, através da teoria de perturbação, obter uma solução sob a forma de uma série de potências de ε , que seja válida nas vizinhanças da frente de onda, que aqui está em $z = 0$. Para isso, considera-se a transformação (LOGAN, 2008; MURRAY, 2001):

$$s = \sqrt{\varepsilon}z = \frac{z}{c} \quad \text{e} \quad g(s) = W\left(\frac{s}{\sqrt{\varepsilon}}\right), \quad (4.25)$$

e aplicando a regra da cadeia tem-se:

$$W' = \frac{dW}{dz} = \frac{dg}{ds} \cdot \frac{ds}{dz} = \sqrt{\varepsilon} \cdot g'; \quad (4.26)$$

$$W'' = \frac{d^2W}{dz^2} = \frac{d}{ds} \left(\sqrt{\varepsilon} \cdot g' \right) \cdot \frac{ds}{dz} = g'' \cdot \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon g''. \quad (4.27)$$

Considerando (4.25) a (4.27) e substituindo na equação (4.24), encontra-se uma equação diferencial:

$$\varepsilon g''(s) + g'(s) + g(s)(1 - g(s)) = 0, \text{ onde } 0 < \varepsilon \leq \frac{1}{c_{min}^2} = \frac{1}{4}, \quad (4.28)$$

que é a equação do problema perturbado. Observa-se que o símbolo “'” denota d/ds e que $c_{min} = 2$. A partir daqui, considera-se $c = c_{min} = 2$.

Ainda da equação (4.28), pode-se perceber que ε multiplica a derivada de maior ordem da EDO, o que caracterizaria um problema de perturbação singular. Contudo, se $\varepsilon \rightarrow 0$ encontra-se que o termo dominante é:

$$g'(s) + g(s)(1 - g(s)) = 0, \quad (4.29)$$

cujas solução é dada por:

$$g(s) = \frac{1}{1 + C_2 e^{z/c}}, \quad (4.30)$$

onde c_2 é uma constante.

Pode-se perceber que a solução (4.30) do termo dominante (4.29), quando $\varepsilon \rightarrow 0$, satisfaz as condições de contorno do problema original dadas pelo teorema 2. Dessa forma, pode-se afirmar que apesar da EDO (4.28) ser um problema de perturbação singular aparentemente, pode ser tratada como um problema de perturbação regular.

Para aplicar o método, formula-se o problema de contorno composto pela equação (4.10) e as condições de contorno:

$$W(-\infty) = 1 \text{ e } W(+\infty) = 0. \quad (4.31)$$

Observa-se que tanto a equação (4.28) como a solução de onda viajante são invariantes na translação da variável independente z , então pode-se considerar $z = 0$ para ser o ponto onde $W = 1/2$ para todo ε . Essa mesma ideia é representada na figura 5, no capítulo 2. Portanto, nas condições (4.31), pode-se acrescentar uma condição intermediária, na qual a solução de onda viajante satisfaz:

$$W(0) = \frac{1}{2}, \quad (4.32)$$

que complementa o problema de valor de contorno.

A partir dessas constatações, aplica-se o método da perturbação e tem-se que as condições de contorno e inicial do problema original serão transformadas, ou seja, transladam-se para:

$$g(-\infty) = 1, \quad g(0) = \frac{1}{2}, \quad g(+\infty) = 0. \quad (4.33)$$

Então, para encontrar uma solução aproximada da EDO (4.28) sob as condições (4.33), assume-se uma solução na forma de série conforme consta em KEVORKIAN; COLE (1981), HINCH (1991), NAYFEH (2004) e LOGAN (2008):

$$g(s, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i g_i(s), \quad (4.34)$$

que é uma expansão assintótica em função das potências do parâmetro ε e das funções $g_i(s)$ que serão determinadas.

Substituindo a solução assintótica (4.34) nas condições (4.33) encontra-se as relações:

$$g(-\infty) = 1 \Rightarrow g_0(-\infty) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i g_i(-\infty) = 1 \Rightarrow g_0(-\infty) = 1, \quad g_i(-\infty) = 0; \quad (4.35)$$

$$g(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow g_0(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i g_i(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow g_0(0) = \frac{1}{2}, \quad g_i(0) = 0; \quad (4.36)$$

$$g(+\infty) = 0 \Rightarrow g_0(+\infty) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i g_i(+\infty) = 0 \Rightarrow g_0(+\infty) = 0, \quad g_i(+\infty) = 0. \quad (4.37)$$

Pode-se notar que: $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i g_i(-\infty) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i g_i(0) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i g_i(+\infty) = 0$.

A partir disso tem-se as condições de contorno para $g_i(s)$, que podem ser escritas como:

$$g_0(-\infty) = 1, \quad g_0(0) = 1/2, \quad g_0(+\infty) = 0; \quad (4.38)$$

$$g_i(\pm\infty) = 0, \quad \text{e} \quad g_i(0) = 0 \quad \text{com} \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (4.39)$$

Por possuir infinitos termos na solução assintótica, faz-se necessário truncar a série, então considera-se somente os três primeiros termos da expansão (4.34):

$$g(s) = g_0(s) + \varepsilon g_1(s) + \varepsilon^2 g_2(s) \quad (4.40)$$

o que é suficiente para descrever a solução do problema em questão, conforme HINCH (1991) e NAYFEH (2004).

Para encontrar as funções $g_0(s)$, $g_1(s)$ e $g_2(s)$, substitui-se (4.40) na equação diferencial (4.28) e assim, é possível colocar as potências de ε em evidência:

$$\begin{aligned} & \varepsilon^0 \left(g_0'(s) + g_0(s) - g_0(s)^2 \right) + \varepsilon^1 \left(g_0''(s) + g_1'(s) + g_1(s) - 2g_1(s)g_0(s) \right) + \\ & + \varepsilon^2 \left(g_1''(s) + g_2'(s) + g_2(s) - g_1(s)^2 - 2g_2(s)g_0(s) \right) + \varepsilon^3 \left(g_2''(s) + 2g_1(s)g_0(s) \right) + \\ & + \varepsilon^4 \left(-g_2''(s)^2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Como supõe-se uma solução assintótica, ela tenderá a zero, conforme s tende para o infinito. Desse modo, cada termo que acompanha uma potência de ε na equação (4.41) é igual a zero, e assim, como ε é um valor conhecido não nulo. Desse modo constrói-se uma sequência recorrente de problemas:

$$\varepsilon^0 : g_0'(s) + g_0(s) - g_0(s)^2 = 0, \quad (4.42)$$

$$\varepsilon^1 : g_0''(s) + g_1'(s) + g_1(s) - 2g_1(s)g_0(s) = 0, \quad (4.43)$$

$$\varepsilon^2 : g_1''(s) + g_2'(s) + g_2(s) - g_1(s)^2 - 2g_2(s)g_0(s) = 0, \quad (4.44)$$

$$\varepsilon^3 : g_2''(s) + 2g_1(s)g_0(s) = 0, \quad (4.45)$$

$$\varepsilon^4 : -g_2''(s)^2 = 0, \quad (4.46)$$

sujeita às condições (4.38) e (4.39).

Desse modo, as equações anteriores (4.42) a (4.46) compõem um sistema sobredeterminado que permite desconsiderar as últimas duas equações (4.45) e (4.46). Assim, considera-se as seguintes equações e condições:

$$g_0'(s) = -g_0(s)(1 - g_0(s)), \quad g_0(-\infty) = 1, \quad g_0(0) = 1/2, \quad g_0(+\infty) = 0; \quad (4.47)$$

$$g_1'(s) = -g_1(s)(1 - 2g_0(s)) - g_0''(s), \quad g_1(-\infty) = g_1(0) = g_1(+\infty) = 0; \quad (4.48)$$

$$g_2''(s)^2 = 0, \quad g_2(-\infty) = g_2(0) = g_2(+\infty) = 0. \quad (4.49)$$

A equação (4.47) é uma EDO de primeira ordem não linear que pode ser resolvida pelo método de Bernoulli. Reorganizando a equação tem-se:

$$g_0'(s) + g_0(s) = g_0^2(s). \quad (4.50)$$

Considera-se uma mudança de variável: $v = g_0^{1-n}$, e obtém-se:

$$v = g_0^{-1} \quad \text{e} \quad v' = -g_0^{-2} \cdot g_0'. \quad (4.51)$$

Dessa forma, pode-se reescrever a equação (4.50) substituindo (4.51) e assim tem-se:

$$v' - v = -1. \quad (4.52)$$

Observa-se que com a mudança de variável obtém-se uma EDO linear, que pode ser resolvida por fator integrante: admite-se $p(x) = e^{-s}$ como fator integrante. Multiplica-se $p(x)$ em todos os termos da EDO:

$$v' e^{-s} - v e^{-s} = -e^{-s}, \quad (4.53)$$

e após, consegue-se simplificar o lado esquerdo da igualdade utilizando a regra da derivada do produto de duas funções, e tem-se:

$$\frac{d}{ds} [ve^{-s}] = -e^{-s}. \quad (4.54)$$

Integrando dos dois lados e isolando v encontra-se:

$$v = 1 + c_1 e^s, \quad (4.55)$$

onde c_1 é uma constante de integração.

Como se sabe que $g_0 = v^{-1}$, obtém-se a solução:

$$g_0 = \frac{1}{1 + c_1 e^s}. \quad (4.56)$$

Verifica-se que a equação (4.56) satisfaz as condições de contorno do problema perturbado (4.33). E ainda, quando $g_0(0) = \frac{1}{2}$, encontra-se $c_1 = 1$ e assim:

$$g_0 = \frac{1}{1 + e^s} = (1 + e^s)^{-1}. \quad (4.57)$$

Do resultado anterior (4.57), tem-se que:

$$g_0''(s) = -e^s [2e^s (1 + e^s)^{-3} - (1 + e^s)^{-2}]. \quad (4.58)$$

Pode-se substituir (4.57) e (4.58) na equação (4.48):

$$g_1'(s) + g_1(s) - 2g_1(s) (1 + e^s)^{-1} = -e^s [2e^s (1 + e^s)^{-3} - (1 + e^s)^{-2}], \quad (4.59)$$

em que reescrevendo encontra-se:

$$g_1'(s) + g_1(s) [1 - 2(1 + e^s)^{-1}] = -e^s [2e^s (1 + e^s)^{-3} - (1 + e^s)^{-2}]; \quad (4.60)$$

$$g_1'(s) + g_1(s) \frac{e^s - 1}{1 + e^s} = e^s \frac{e^s - 1}{(1 + e^s)^3}. \quad (4.61)$$

A EDO (4.61) é linear e consegue-se resolver por fator integrante, sendo $p(x) = e^{-s} (e^s + 1)^2$ que multiplica todos os termos da equação:

$$g_1'(s) e^{-s} (e^s + 1)^2 + g_1(s) \frac{e^s - 1}{e^s} (e^s + 1) = \frac{1 - e^s}{1 + e^s}. \quad (4.62)$$

Dessa forma, é possível fazer algumas simplificações utilizando a regra da derivada

do produto de duas funções:

$$\frac{d}{ds} [g_1 e^{-s} (e^s + 1)^2] = \frac{1 - e^s}{1 + e^s}. \quad (4.63)$$

Integrando dos dois lados:

$$\int \frac{d}{ds} [g_1 e^{-s} (e^s + 1)^2] ds = \int \frac{1 - e^s}{1 + e^s} ds, \quad (4.64)$$

e resolvendo as integrais encontra-se a solução para g_1 :

$$g_1 = \frac{e^s}{(1 + e^s)^2} (s - \ln(1 + e^s)^2 + c_2), \quad (4.65)$$

onde c_2 é uma constante de integração. A solução para g_1 (4.65) satisfaz as condições descritas em (4.48), e portanto, aplicando a condição $g_1(0) = 0$ encontra-se o valor da constante: $c_2 = \ln(4)$, que substituindo na equação (4.65) obtém-se:

$$g_1 = \frac{e^s}{(1 + e^s)^2} \ln \left(\frac{4e^s}{(1 + e^s)^2} \right). \quad (4.66)$$

Do problema (4.49) tem-se:

$$g_2(s) = c_3, \quad (4.67)$$

onde c_3 é uma constante de integração, que pode ser determinada através da aplicação das condições também descritas em (4.49), e assim obtém-se $c_3 = 0$, o que leva a:

$$g_2(s) = 0. \quad (4.68)$$

Conhecidos g_0 , g_1 e g_2 consegue-se encontrar a solução do problema perturbado, substituindo os resultados (4.57), (4.66) e (4.68) na solução assintótica formal (4.40):

$$g(s) = \frac{1}{1 + e^s} + \frac{e^s}{c^2(1 + e^s)^2} \ln \left(\frac{4e^s}{(1 + e^s)^2} \right). \quad (4.69)$$

Assim consegue-se encontrar a solução analítica aproximada da equação (4.10) retornando para a variável de onda z , conforme a mudança de variável (4.24). Desse modo tem-se:

$$W(z) = \frac{1}{1 + e^{z/c}} + \frac{e^{z/c}}{c^2(1 + e^{z/c})^2} \ln \left(\frac{4e^{z/c}}{(1 + e^{z/c})^2} \right) + O \left(\frac{1}{c^4} \right). \quad (4.70)$$

Pode-se utilizar a solução aproximada (4.70) para descobrir a relação entre a declividade da solução tipo onda viajante bem como a sua velocidade de propagação, conforme o trabalho de SOARES (2002), calculando o gradiente de $W(z)$ (dW/dz),

aqui denotado por S :

$$S = \frac{-e^{z/c}}{c(e^{z/c} + 1)^2} + \frac{e^{z/c}}{c^3} \left[\left(\frac{(e^{z/c} + 1) - 2}{(e^{z/c} + 1)^3} \right) \ln \left(\frac{4e^{z/c}}{(e^{z/c} + 1)^2} \right) + \left(\frac{(e^{z/c} + 1) - 4e^{z/c}}{(e^{z/c} + 1)^3} \right) \right]. \quad (4.71)$$

Pode-se notar que o gradiente da frente de onda, que avança em z no sentido crescente, é sempre negativo. E que para $z \rightarrow \pm\infty$ obtém-se $S = 0$, conforme o teorema 2 de LOGAN (2008). Isso significa que antes e depois do frente de onda não há declividade. No frente de onda, quando $z = 0$, tem-se que o gradiente (4.71) é:

$$S \approx -\frac{1}{4c}. \quad (4.72)$$

Desse resultado, pode-se concluir que quanto mais rápido for a movimentação da onda, conforme aumenta o valor de c , menos inclinada será a frente de onda, o que está ilustrado na figura 9.

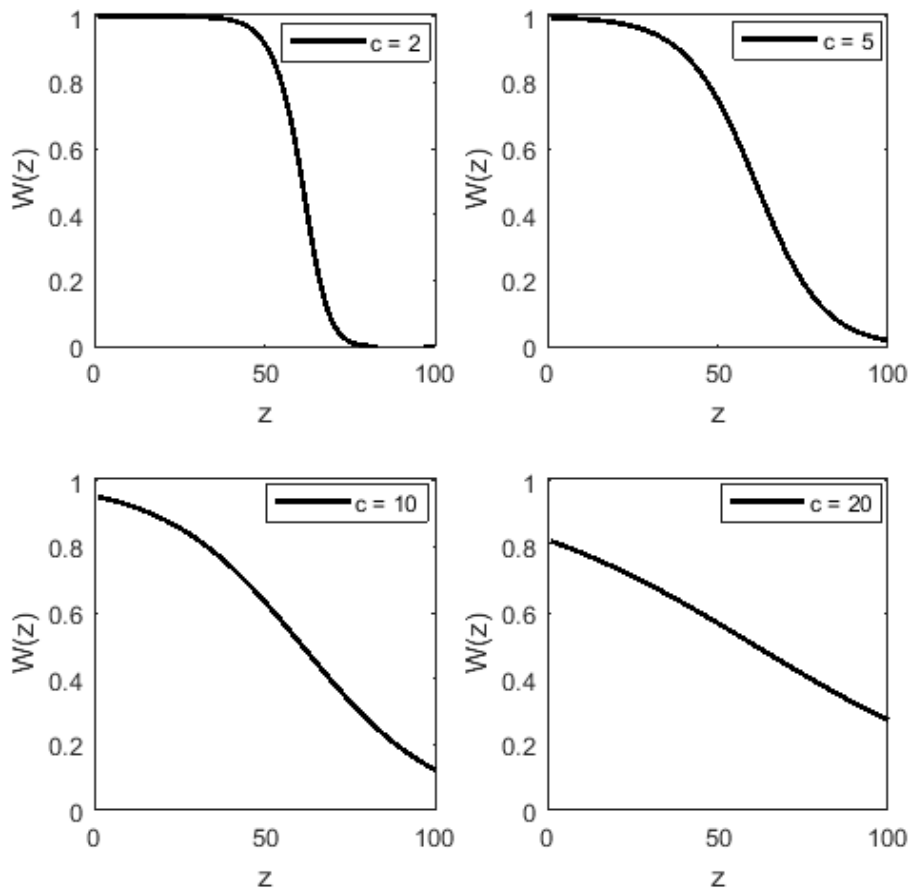


Figura 9: Frente de onda $W(z)$ (4.70) com diferentes declividades.

Como $W(z) = w(x, t)$ e $z = x - ct$, para obter a solução analítica aproximada da equação de Fisher-Kolmogorov e as condições de contorno originais, substitui-se (4.1)

na equação $W(z)$ (4.70) e encontra-se:

$$w(x, t) = \frac{1}{1 + e^{(x-ct)/c}} + \frac{e^{(x-ct)/c}}{c^2 (1 + e^{(x-ct)/c})^2} \ln \left(\frac{4e^{(x-ct)/c}}{(1 + e^{(x-ct)/c})^2} \right) + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \quad (4.73)$$

cujo comportamento pode ser ilustrado no gráfico da figura 10 em três dimensões e na figura 11 em duas dimensões através dos perfis ora fixando t e ora fixando x .

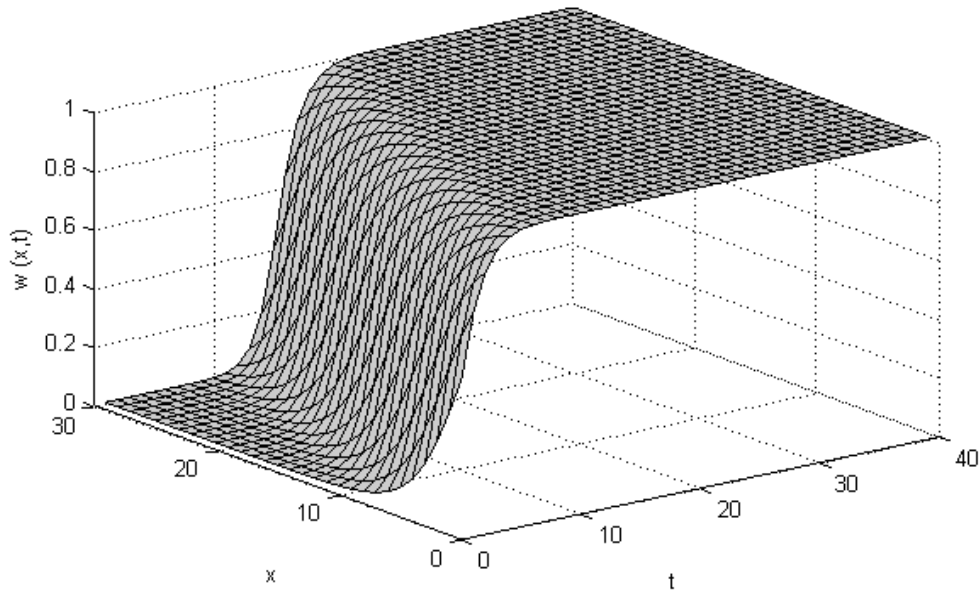


Figura 10: Solução aproximada (4.73) obtida pelo método de perturbação.

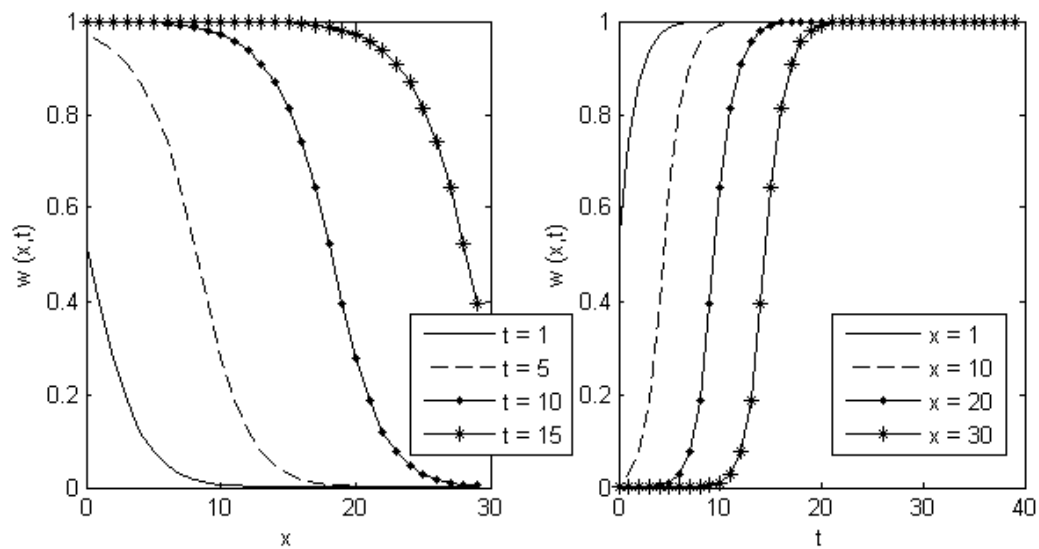


Figura 11: a) Solução aproximada (4.73) considerando t fixo; b) Solução aproximada (4.73) considerando x fixo.

Para fins de conferência, pode-se substituir a solução (4.70) encontrada pelo método de perturbação, na EDO (4.10) e obtém-se um erro (um valor próximo de zero) que é ilustrado na figura 12.

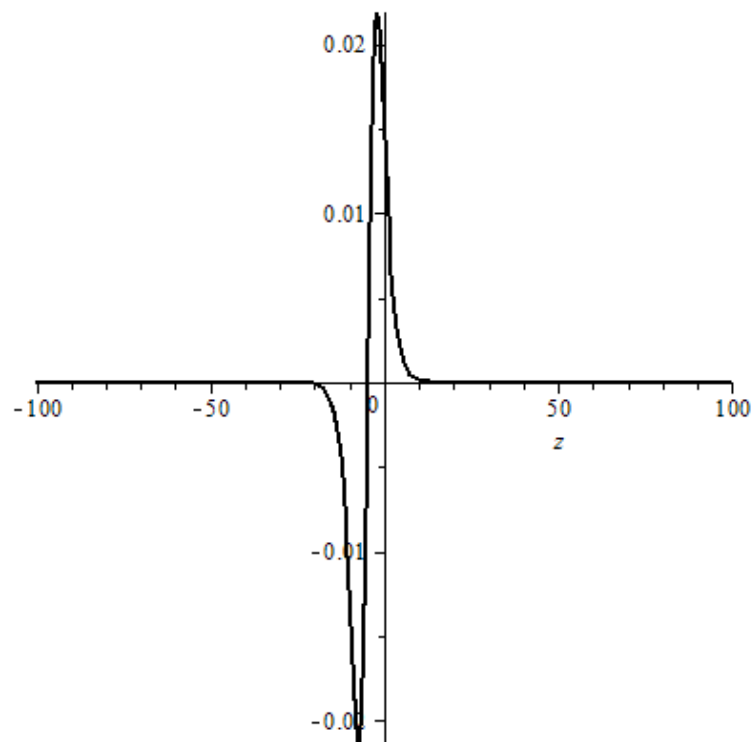


Figura 12: Gráfico do erro da solução aproximada (4.70) na EDO (4.10) com $c = 2$.

Da mesma forma, essa conferência pode ser feita para a solução (4.73), substituindo-a na EDP (4.6) e assim tem-se o erro representado pela figura 13.

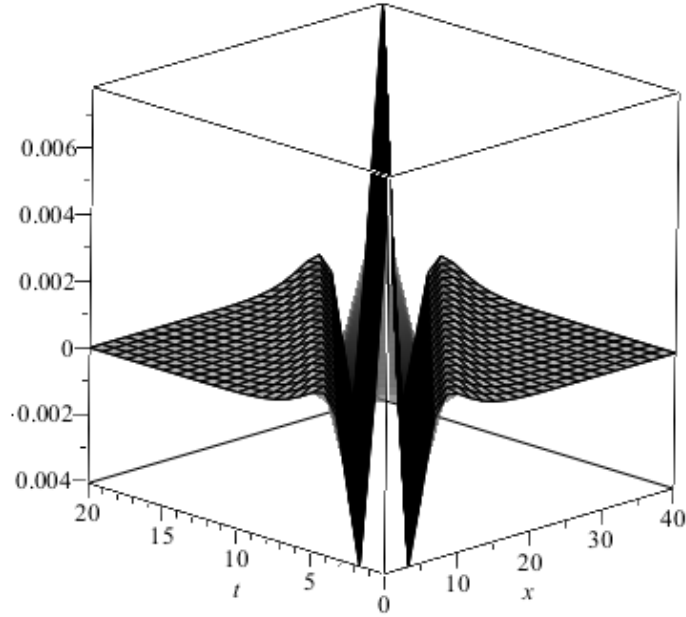


Figura 13: Gráfico do erro da solução aproximada (4.73) para EDP (4.6) com $c = 2$.

Ressalta-se que se a solução fosse exata, essa diferença seria nula, contudo pode-se perceber que na medida que x e t variam esse erro torna-se muito próximo de zero. Assim, é possível afirmar que as soluções encontradas pelo método de perturbação são boas soluções particulares aproximadas para a EDO (4.10) e para a EDP (4.6), respectivamente.

4.4 Análise do modelo de Fisher-Kolmogorov considerando duas variáveis espaciais

Da equação de Fisher-Kolmogorov unidimensional (1.30), acrescenta-se uma segunda variável espacial y , e obtém-se a equação de Fisher-Kolmogorov em duas dimensões, conforme tem-se a seguir:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + w(a - bw), \quad (4.74)$$

que pode ser reescrita em coordenadas polares considerando $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ e $\theta = \arctan(y/x)$, e tem-se para $\partial w^2 / \partial x^2$:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos(\theta) \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}, \quad (4.75)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\end{aligned}\quad (4.76)$$

Resolvendo as derivadas e agrupado os termos semelhantes, encontra-se:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \cos^2(\theta) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} + \sin^2(\theta) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\sin^2(\theta)}{r} \frac{\partial w}{\partial r}\quad (4.77)$$

Da mesma forma, faz-se para $\partial^2 w / \partial y^2$:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = \sin(\theta) \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta},\quad (4.78)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)\quad (4.79)$$

$$= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

De forma análoga, resolve-se as derivadas e agrupam-se os termos semelhantes e obtém-se:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \sin^2(\theta) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} + \cos^2(\theta) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\cos^2(\theta)}{r} \frac{\partial w}{\partial r}\quad (4.80)$$

Agora, conhecidos os termos $\partial^2 w / \partial x^2$ e $\partial^2 w / \partial y^2$, em coordenadas polares, pode-se substituir na equação (4.74) e agrupando os termos, encontra-se:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + w(a - bw).\quad (4.81)$$

Considera-se o termo $\partial^2 w / \partial \theta^2 = 0$, da equação (4.81), visto que o tamanho do r independe do posicionamento do ângulo θ . E obtém-se:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + w(a - bw).\quad (4.82)$$

Logo, busca-se uma solução $w(x, y, t) = w(\theta, r, t)$. No entanto, a equação (4.82) não possui soluções em coordenadas polares do tipo frente de onda viajante, em que uma onda se espalha com velocidade constante sem mudar a sua forma. Isso se dá por causa do termo $1/r$, cuja a equação não se torna uma equação diferencial ordinária na variável de onda $z = r - ct$.

Por outro lado, é possível observar, conforme apresentado em MURRAY (2003), que para grandes valores de r o termo $1/r (\partial w / \partial r)$ tende a zero e torna-se insignificante. Então ao desconsiderar esse termo, a solução tenderá assintoticamente a uma solução de frente de onda viajante com velocidade $c = 2$, como no caso unidimensional.

Portanto, levando em conta estas simplificações, a solução da equação (4.82), com a variável radial r , equivale à solução da equação (4.74), em duas variáveis espaciais. Além disso, mediante as simplificações sugeridas, a equação (4.82) recai na equação (1.30), em variável radial ao invés de espacial, e a variável angular θ livre.

5 CONTROLE POPULACIONAL APLICADO A EQUAÇÃO DE FISHER-KOLMOGOROV A PARTIR DA TEORIA DE SOLUÇÃO POR ONDA VIAJANTE

A equação de Fisher-Kolmogorov pode ser utilizada para descrever o comportamento de populações no tempo e no espaço. É possível introduzir funções de controle populacional nesse modelo. Uma alternativa sustentável é a aplicação do controle biológico que regula o crescimento de plantas ou animais pela intervenção humana, ou pela manipulação de indivíduos vivos, cuja utilização é defendida neste trabalho.

Neste capítulo apresenta-se uma estratégia de controle ótimo linear realimentado para um sistema biológico, cujo comportamento é descrito por um modelo de Fisher-Kolmogorov, após a aplicação da teoria de onda viajante, como o objetivo de encontrar as funções de controle que estabilizem o sistema em torno da trajetória ótima e o leve ao estado de equilíbrio desejado.

Na seção 5.1 tem-se a aplicação da teoria de controle ótimo linear para sistemas não lineares, no caso a equação de Fisher-Kolmogorov, após a redução pela teoria de solução por onda viajante e, na seção 5.2, é apresentada uma aplicação considerando o sistema biológico: plantas aquáticas em águas poluídas.

5.1 Controle ótimo linear aplicado no sistema não linear de Fisher-Kolmogorov

Nesta seção, utiliza-se a teoria de controle linear realimentado para sistemas não lineares, apresentada no capítulo 3, na seção 3.2, seguindo as ideias de RAFIKOV; BALTHAZAR; VON BREMEN (2008). Portanto, o objetivo aqui é controlar o sistema modelado pela equação de Fisher-Kolmogorov (4.6), a fim de levá-lo para o equilíbrio desejado. Para isso, acrescenta-se uma função de controle da forma: $U_i = u_i + u_i^*$,

com $i = 1, 2$, no sistema (4.11) e obtém-se:

$$\begin{cases} W' = V + U_1, \\ V' = -cV - W(1 - W) + U_2, \end{cases} \quad (5.1)$$

onde u_1^* e u_2^* são os níveis desejados do controle, e u_1 e u_2 são responsáveis por controlar o sistema, conforme RAFIKOV; BALTHAZAR; VON BREMEN (2008). Substituindo U_1 e U_2 consegue-se obter as funções que são responsáveis por estabilizar o sistema em torno da trajetória desejada no estado ótimo:

$$\begin{cases} u_1^* = W^{*'} - V^*, \\ u_2^* = V^{*'} + W^* + cV^* - W^{*2}. \end{cases} \quad (5.2)$$

Contudo, sabe-se que W^* e V^* representam os níveis desejados do sistema, ou seja, são constantes em que $W^{*'} = 0$ e $V^{*'} = 0$. Assim:

$$\begin{cases} u_1^* = -V^*, \\ u_2^* = W^* + cV^* - W^{*2}. \end{cases} \quad (5.3)$$

Pode-se ainda, substituir as relações encontradas para u_1^* e u_2^* em (5.3) no sistema (5.1) e encontra-se:

$$\begin{cases} W' = V + u_1 - V^*, \\ V' = -cV - W(1 - W) + u_2 + W^* + cV^* - W^{*2}. \end{cases} \quad (5.4)$$

Reescrevendo os termos obtém-se:

$$\begin{cases} W' = V - V^* + u_1, \\ V' = -cV - W + W^2 + u_2 + W^* + cV^* - W^{*2}. \end{cases} \quad (5.5)$$

Agora, define-se:

$$\begin{cases} W = y_1 + W^*, & \Rightarrow y_1 = W - W^*, \\ V = y_2 + V^* & \Rightarrow y_2 = V - V^*, \end{cases} \quad (5.6)$$

como as perturbações/desvios das trajetórias do sistema. Nota-se que o sistema (5.5) pode ser reescrito considerando (5.6):

$$\begin{cases} W' = V - V^* + u_1, \\ V' = -c(V - V^*) - (W - W^*) + W^2 - W^{*2}. \end{cases} \quad (5.7)$$

E assim, obtém-se:

$$\begin{cases} (y_1 + W^*)' = y_2 + u_1, \\ (y_2 + V^*)' = -cy_2 - y_1 + W^2 - W^{*2} + u_2. \end{cases} \quad (5.8)$$

Como $W^{*'} = 0$ e $V^{*'} = 0$, o sistema (5.8) pode ser reproduzido da forma:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + u_1, \\ y_2' = -cy_2 - y_1 + W^2 - W^{*2} + u_2. \end{cases} \quad (5.9)$$

Considerando que:

$$W^2 - W^{*2} = (W - W^*)^2 + 2W^*(W - W^*), \quad (5.10)$$

e substituindo no sistema (5.9):

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + u_1 + u_1^*, \\ y_2' = -cy_2 - y_1 + [(W - W^*)^2 + 2W^*(W - W^*)] + u_2 + u_2^*. \end{cases} \quad (5.11)$$

Assim, o sistema perturbado com controle terá a forma:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + u_1, \\ y_2' = (2W^* - 1)y_1 - cy_2 + y_1^2 + u_2, \end{cases} \quad (5.12)$$

que pode ser reescrito da forma $Y' = AY + H(Y) + Bu$, como:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2W^* - 1 & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

sendo que W^* é uma constante conhecida através do problema biológico estudado, A é a matriz de coeficientes constantes que acompanha os termos lineares, $H(Y)$ é um vetor dos termos não lineares e B é a matriz que acompanha as funções de controle.

Como pretende-se controlar a densidade da população, é conveniente introduzir a função de controle somente na primeira equação do sistema, pois a segunda a equação não remete uma situação biológica, ou seja, V é apenas uma variável auxiliar. Portanto, consideramos somente a função u_1 , na primeira equação.

A partir do sistema (5.12), considera-se o teorema 1, proposto por RAFIKOV; BALTHAZAR (2004), apresentado no capítulo 3, seção 3.2 e com mais detalhes no anexo B. Assim, consegue-se determinar os valores do vetor de ganho κ e, conse-

quentemente, a função de controle. De forma genérica tem-se:

$$u_1 = -[\kappa_1 \ \kappa_2][y_1 \ y_2]^T, \quad (5.14)$$

onde o sinal negativo indica que para controlar esse sistema biológico é necessário retirar indivíduos.

Agora, conhecida a função de controle (5.14), substituindo-a no sistema perturbado (5.12) encontra-se:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 - \kappa_1 y_1 - \kappa_2 y_2, \\ y_2' = (2W^* - 1)y_1 - cy_2 + y_1^2. \end{cases} \quad (5.15)$$

É possível reescrever o sistema nas variáveis originais W e V , considerando (5.6) tem-se:

$$\begin{cases} W' = (1 - \kappa_2)(V - V^*) - \kappa_1(W - W^*), \\ V' = -c(V - V^*) + W(W - 1) - W^*(W^* - 1). \end{cases} \quad (5.16)$$

Consegue-se resolver numericamente o sistema (5.16), obtendo as trajetórias temporais. Também é possível verificar se a estratégia de controle estabiliza e controla o sistema biológico no nível populacional desejado.

5.2 Aplicação de uma estratégia de controle a um sistema de plantas aquáticas.

Para verificar a eficácia da estratégia de controle mostrada na seção anterior, considera-se uma aplicação num sistema biológico de aguapés em águas poluídas. Essas plantas são exclusivamente aquáticas e tem propriedades capazes de retirar elementos tóxicos da água. Contudo, quando a densidade da população é maior de 50% da capacidade de suporte do meio, a espécie perde eficiência na remoção desses agentes e passa a ser considerada uma praga (COSTA et al., 2003).

Assim, esse sistema necessita aplicação de controle, sendo que tem sua melhor absorção de poluentes quando a quantidade de plantas atinge a metade da capacidade de suporte do meio onde está inserida, ou seja, $W^* = 0,5257$. Já o equilíbrio da variável auxiliar é determinado através da equação (5.3) e corresponde ao valor $V^* = 0,0257$, ambos no sistema na forma adimensional, conforme os resultados experimentais apresentados em KAWAI; GRIECO (1983). Com os valores de W^* e V^* conhecidos, consegue-se calcular κ e também a função de controle, obtendo-se:

$$u_1 = -[1,0175 \ 0,3439][y_1 \ y_2]^T, \quad (5.17)$$

considerando por exemplo $R = 1$, com ordem $m = 1$, pois introduziu-se somente uma

função de controle no sistema, e Q uma matriz identidade de ordem $n = 2$, devido o sistema possuir duas variáveis de estado. A partir de (5.15), pode-se voltar ao sistema nas variáveis originais W e V , considerando (5.6) e tem-se:

$$\begin{cases} W' = 0,6561 (V - V^*) - 1,0175 (W - W^*), \\ V' = -c (V - V^*) + W (W - 1) - W^* (W^* - 1) \end{cases} \quad (5.18)$$

É possível obter uma solução numérica diretamente do sistema (5.18) usando o *software Matlab*, pelo método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem e cinco estágios (BURDEN; FAIRES, 2008).

As figuras 14 a 17 apresentam os gráficos do comportamento da função $L(y)$ em a), que é definida-positiva. Os gráficos em b) representam o comportamento da trajetória $W(z)$, os gráficos em c) apresentam as trajetórias $V(z)$ desse sistema e, nos gráficos em d) têm-se as funções de controle.

Cabe aqui reiterar que a função $L(y)$, conforme o teorema 1, no capítulo 3, deve ser positiva para garantir a convergência do sistema de controle (5.18). Para isso, considera-se valores distintos para R e Q , que nesse caso R será um escalar devido a aplicação de uma única função de controle ($m = 1$), e Q é uma matriz identidade de ordem $n = 2$, pois tem-se duas variáveis dependentes no sistema. Na escolha de diferentes valores para R e Q altera-se os valores do vetor κ e consequentemente na função de controle, que influencia na velocidade com que o sistema atinge o nível de equilíbrio desejado.

É possível observar nas figuras 14 e 16, onde foi considerado uma condição inicial abaixo do nível de equilíbrio, que a função de controle assume inicialmente valores negativos. Isso ocorre pois nos primeiros momentos não há aplicação de controle, passando a atuar somente quando a densidade populacional ultrapassa a metade da capacidade de suporte e, com o passar do tempo, estabiliza na quantidade que deve ser retirada periodicamente. Funções de controle com valores inicialmente negativos também foram encontradas por SCHMID (2004).

Da mesma forma, essa análise da função de controle pode ser realizada nas figuras 15 e 17, onde considera-se que o controle é aplicado quando o número de indivíduos está acima do nível desejado. Nesse caso, o controle atua de forma a remover quantidades significativas nos primeiros momentos a fim de dirigir o sistema ao nível de equilíbrio desejado, e posteriormente torna-se constante a retirada de indivíduos.

Cabe ressaltar que este tipo de estratégia de controle parte de valores conhecidos (condição inicial) e chega em valores conhecidos (níveis ótimos), que são fornecidos através dos experimentos. Ou seja, o objetivo deste tipo de estratégia é mostrar o que acontece nesse percurso como, por exemplo: o tempo que leva para o sistema atingir

o nível desejado; e a respectiva quantidade de indivíduos que deve ser retirada em determinado tempo e espaço.

Nota-se que tanto as trajetórias em $W(z)$ como as trajetórias para $V(z)$ evoluem para os pontos de equilíbrio desejados, independente se a densidade inicial de plantas é menor ou maior da metade da capacidade de suporte, que corresponde ao nível ótimo. Assim consegue-se uma boa eficiência no tratamento da água sem causar prejuízos a natureza. Pode-se afirmar que a estratégia de controle adotada é eficaz, pois controla e estabiliza o sistema biológico de aguapés em águas poluídas, independente da condição inicial.

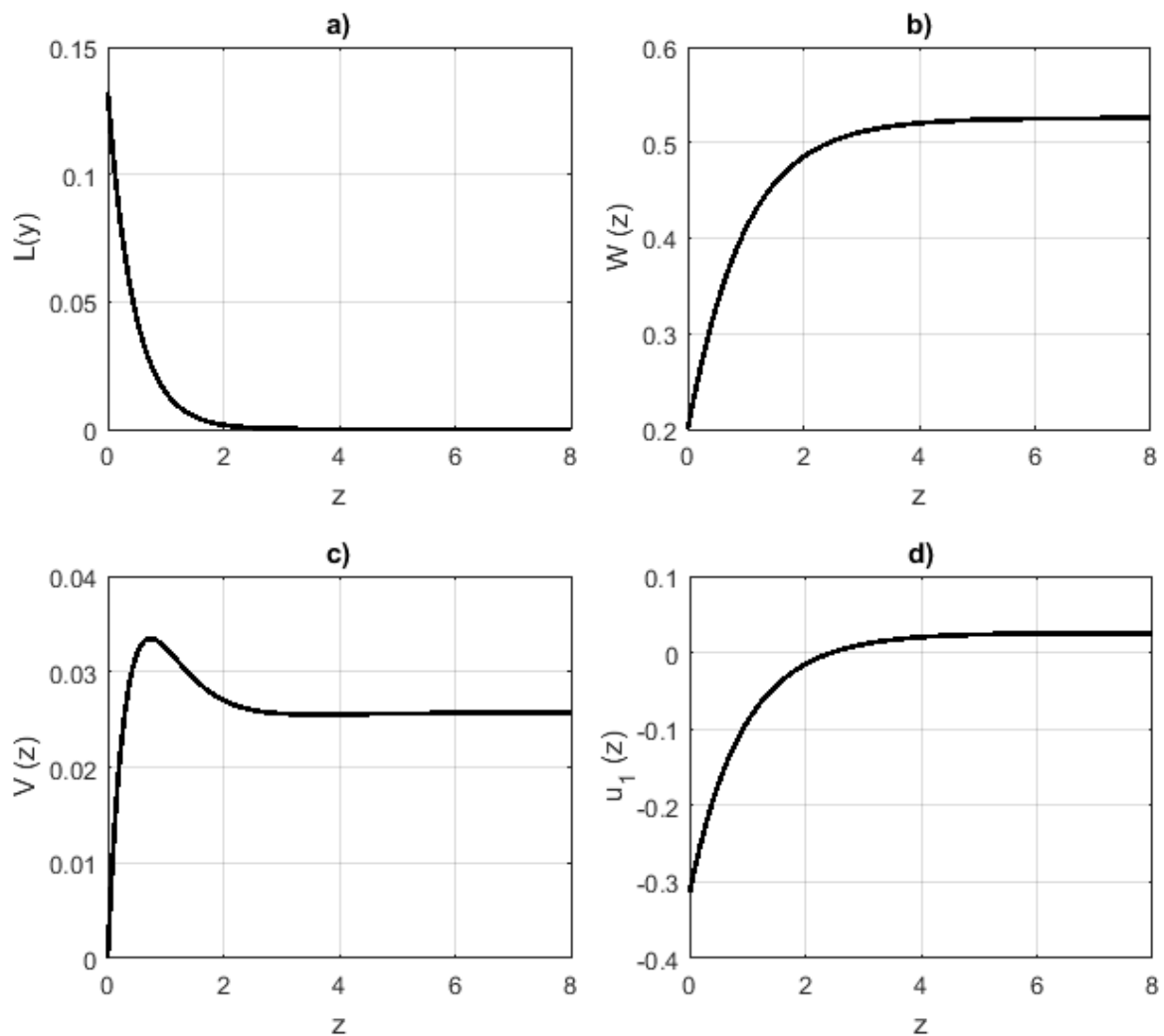


Figura 14: Para o sistema (5.18) com $R = 1$, $Q = I_2$ e $\kappa = [1.0175 \ 0.3439]$ com condição inicial $W_0 = 0,2$ e $V_0 = 0,0257$ tem-se: a) função $L(y)$, positiva definida; b) trajetória para $W(z)$; c) trajetória para $V(z)$; e d) a trajetória para função de controle $u_1(z)$.

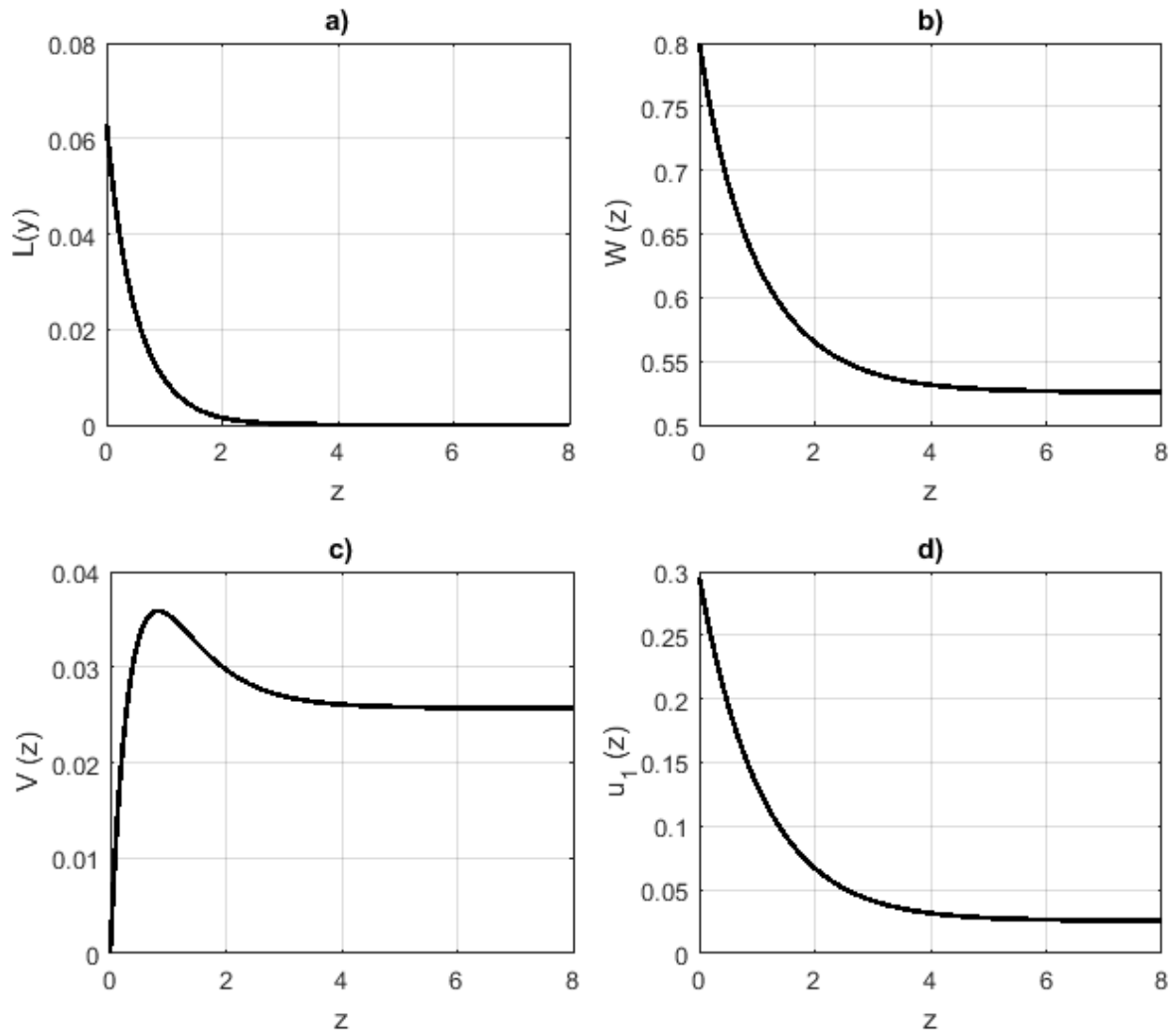


Figura 15: Para o sistema (5.18) com $R = 1$, $Q = I_2$ e $\kappa = [1.0175 \ 0.3439]$ com condição inicial $W_0 = 0,8$ e $V_0 = 0,0257$ tem-se: a) função $L(y)$, positiva definida; b) trajetória para $W(z)$; c) trajetória para $V(z)$; e d) a trajetória para função de controle $u_1(z)$.

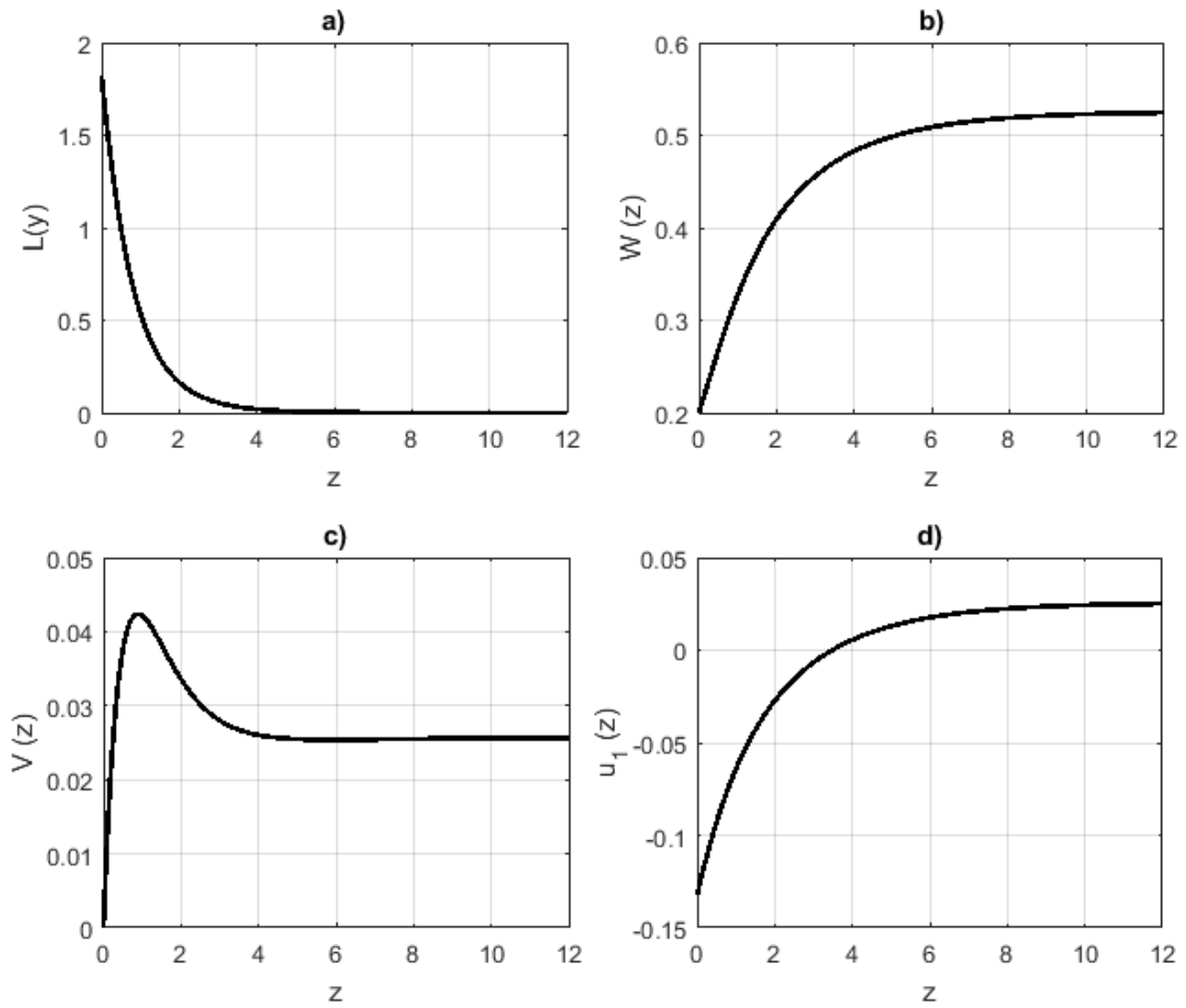


Figura 16: Para o sistema (5.18) com $R = 50$, $Q = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$ e $\kappa = [0.4698 \ 0.2012]$ com condição inicial $W_0 = 0, 2$ e $V_0 = 0, 0257$ tem-se: a) função $L(y)$, positiva definida; b) trajetória para $W(z)$; c) trajetória para $V(z)$; e d) a trajetória para função de controle $u_1(z)$.

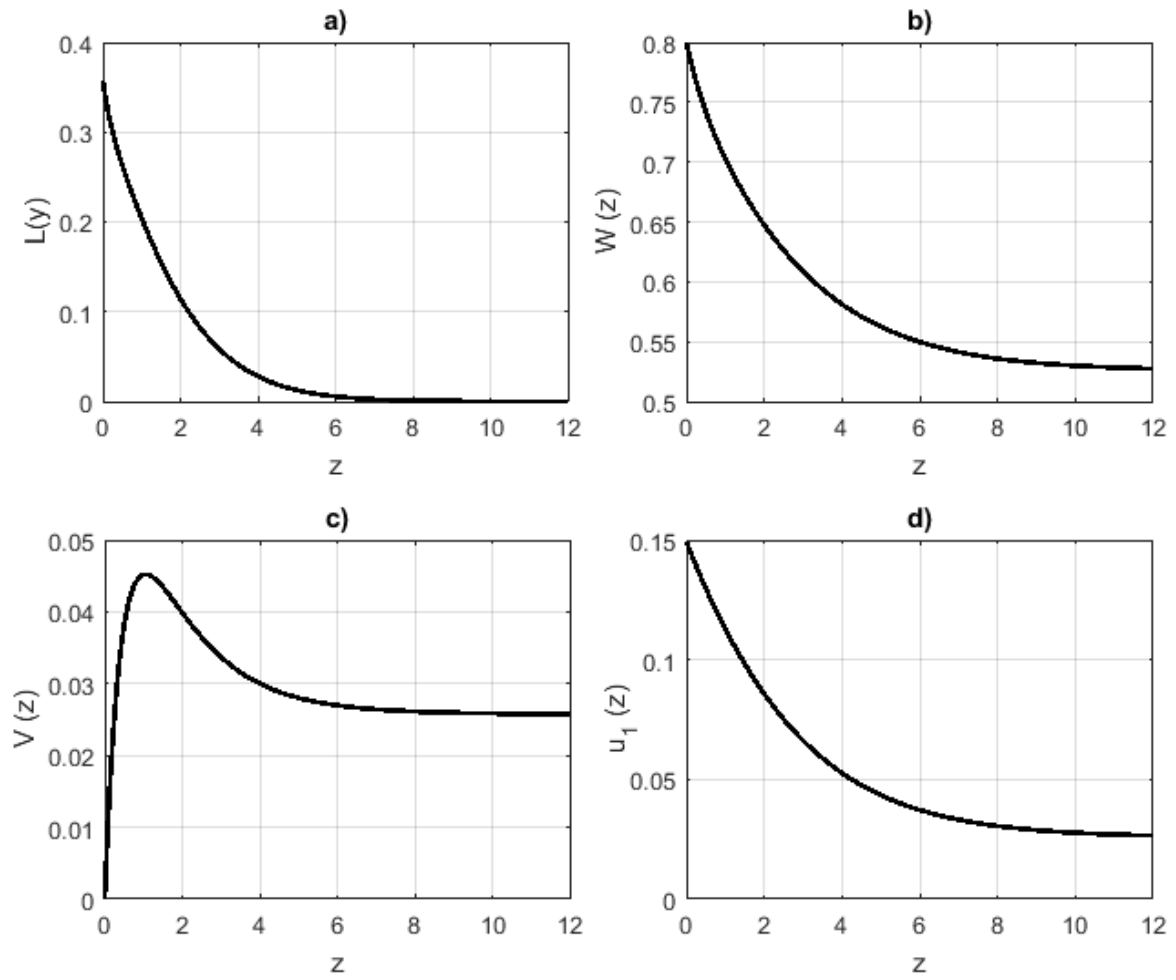


Figura 17: Para o sistema (5.18) com $R = 50$, $Q = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$ e $\kappa = [0.4698 \ 0.2012]$ com condição inicial $W_0 = 0,8$ e $V_0 = 0,0257$ tem-se: a) função $L(y)$, positiva definida; b) trajetória para $W(z)$; c) trajetória para $V(z)$; e d) a trajetória para função de controle $u_1(z)$.

6 CONTROLE ESPAÇO-TEMPORAL DO SISTEMA BIOLÓGICO DE PLANTAS AQUÁTICAS

Nesse capítulo, tem-se a aplicação de uma estratégia de controle em um sistema biológico constituído por plantas aquáticas, cuja configuração é a mesma da função de controle introduzida no modelo logístico, utilizado para descrever o mesmo processo, contudo considerando somente a variação do tempo. Essa estratégia, baseia-se na retirada de plantas através do manejo humano.

Na seção 6.1 faz-se uma revisão da metodologia e da estratégia de controle adotado por COSTA et al. (2003), cuja teoria é base para o estudo realizado na seção 6.2. A partir dessas ideias, formula-se uma função de controle que é inserida diretamente na equação de Fisher-Kolmogorov com as mesmas características da encontrada para o modelo logístico através da aplicação do princípio do máximo. Por fim, na seção 6.3, tem-se a análise do modelo de Fisher-Kolmogorov controlado considerando duas variáveis espaciais.

6.1 Controle linear realimentado aplicado a um modelo de plantas aquáticas utilizando o princípio do máximo

Nesta seção, faz-se uma revisão da estratégia de controle ótimo feita por COSTA et al. (2003), na qual a teoria adotada é o controle linear realimentado, entrado no sistema de forma não linear, com a utilização do princípio do máximo, apresentada no trabalho de RAFIKOV; BALTHAZAR (2005) e reproduzida nesse trabalho no capítulo 3, seção 3.3.

No trabalho de COSTA et al. (2003), formulou-se o problema de controle ótimo com o objetivo de determinar a quantidade de aguapés necessária para o funcionamento eficiente da lagoa de águas residuais. O crescimento populacional das plantas aquáticas em questão é descrito pelo modelo de Verhulst (1.5), conforme viu-se no capítulo 1:

$$\frac{dw}{dt} = aw - bw^2, \quad (6.1)$$

em que $w(t)$ representa a densidade de aguapés (gramas de massa seca por metro quadrado) no momento t (dias). E a caracteriza a taxa de crescimento, b é o coeficiente de competição entre as plantas de aguapés.

A formulação do problema de controle descrito aqui é apresentado no capítulo 2, seção 2.3, para a população de indivíduos de uma mesma espécie, sendo que do problema formulado naquela seção, tem-se $i = 1$ e a forma do controle recai para a parte de $i = 1 \dots n_1$, que representa a retirada de indivíduos do meio.

Considerando $u(t)$ uma função de controle que indica a retirada de indivíduos num determinado período de tempo (t), então a equação diferencial que modela o crescimento de plantas admitindo o recolhimento diário é dada por:

$$\frac{dw}{dt} = a(w - u) - b(w - u)^2 - \tau u, \quad (6.2)$$

onde τ é a capacidade técnica de recolhimento de aguapés. Sendo que o valor τ mais alto corresponde ao período mais curto para remoção de plantas da lagoa e pode ser obtido também através do modelo logístico, conforme segue:

$$N = N_0 e^{-T_{99}\tau}. \quad (6.3)$$

Considerando que N é o número de indivíduos: $N = 1$ e N_0 é a condição inicial de indivíduos: $N_0 = 100$, tem-se:

$$1 = 100 e^{-T_{99}\tau}. \quad (6.4)$$

Assim pode-se obter τ através da relação:

$$\tau = -\frac{\ln 0,01}{T_{99}}, \quad (6.5)$$

onde T_{99} é o período necessário para remover 99% das plantas. Para compreender essa equação, considera-se por exemplo $T_{99} = 1$, então as plantas serão removidas durante um dia, sendo $\tau = 4,605$.

A função de controle $u(t)$ aparece na equação de forma não linear, obedecendo a restrição:

$$0 \leq u(t) \leq w(t). \quad (6.6)$$

A função w satisfaz a condição inicial:

$$w(0) = w_0. \quad (6.7)$$

Com o propósito de formular o problema da produtividade máxima da lagoa,

escolhe-se o critério a ser maximizado (COSTA et al., 2003):

$$J = \int_0^{t_f} \tau u(t) dt + w(t_f), \quad (6.8)$$

em que o primeiro termo representa a quantidade da massa de aguapés recolhida durante o período do funcionamento da lagoa e o segundo termo indica a quantidade máxima de aguapés no momento final t_f . Assim formulando o problema da produtividade máxima da lagoa de estabilização para uma dinâmica exclusivamente temporal.

Segundo COSTA et al. (2003), a formulação do problema de controle ótimo é dada por: para a equação com controle (6.2), satisfazendo a condição inicial (6.7), quer-se encontrar a função de controle $u(t)$, com $t \in [0, t_f]$, que satisfaz as restrições (6.6) e que maximiza o funcional (6.8). Esse problema será resolvido através da aplicação do princípio do máximo de Pontryagin (PONTYAGIN et al., 1962; NAIDU, 2003). Desse modo, formula-se o problema em forma de Mayer e introduzindo a função:

$$\theta(t) = w(t) + \tau \int_{t_0}^t u(t) dt, \quad (6.9)$$

que possui derivada:

$$\frac{d\theta}{dt} = a(w - u) - b(w - u)^2, \quad (6.10)$$

e condição inicial:

$$\theta(0) = w_0. \quad (6.11)$$

Assim, é possível formular o problema de controle ótimo de aguapé da seguinte maneira: encontrar a função do controle $u(t)$ para o sistema (6.2), (6.10) com condições iniciais (6.7) e (6.11) que satisfaça as limitações (6.6) e que maximiza o funcional:

$$J = \theta(t). \quad (6.12)$$

Considerando que:

$$\xi = w - u(t), \quad (6.13)$$

tem-se a função de Hamilton em forma:

$$H = \psi_0 \xi [a - b\xi] + \psi_1 [(a - b\xi) - \tau u(t)], \quad (6.14)$$

em que ψ_0 e ψ_1 são variáveis adjuntas que satisfazem o seguinte sistema:

$$\frac{d\psi_0}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0, \quad (6.15)$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial w}, \quad (6.16)$$

e condições finais:

$$\psi_0(t_f) = 1, \quad (6.17)$$

$$\psi_1(t_f) = 0. \quad (6.18)$$

De acordo com o princípio do máximo (PONTRYAGIN et al., 1962; NAIDU, 2003), a função de controle ótimo maximiza a função H , considerando a função de controle u sem restrições. A condição necessária para maximizar a função H é dada por:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial H}{\partial \xi} - c_1 \psi_1 = 0, \quad (6.19)$$

onde c_1 é uma constante. Da equação (6.15) tem-se que ψ_0 é constante e admitindo a condição final (6.17), encontra-se:

$$\psi_0 = 1. \quad (6.20)$$

Da condição necessária para maximizar a função H (6.19) obtém-se:

$$\frac{\partial H}{\partial \xi} = -c_1 \psi_1. \quad (6.21)$$

Mas, em contrapartida:

$$\frac{\partial H}{\partial w} = \frac{\partial H}{\partial \xi}, \quad (6.22)$$

portanto a equação (6.16) pode ser reescrita:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} = c_1 \psi_1, \quad (6.23)$$

e resolvida através do método de separação de variáveis e encontra-se como solução:

$$\psi_1 = k_1 e^{c_1 t}, \quad (6.24)$$

com k_1 sendo uma constante e aplica-se a condição final (6.18). Daí obtém-se que $k_1 = 0$, e assim:

$$\psi_1 = 0. \quad (6.25)$$

Desse modo conhecidos os valores para ψ_0 em (6.20) e ψ_1 em (6.25) pode-se substituir na função de Hamilton (6.14) e tem-se:

$$H = \xi [a - b\xi], \quad (6.26)$$

e da condição (6.19) e da equação (6.26) obtém-se:

$$\xi = \frac{a}{2b}. \quad (6.27)$$

Como resultado, para valores $w(t) > \xi$ de (6.7) admite-se que $u(t) = w - \xi$. Sendo assim, a estratégia de controle ótimo que garante a maximização da massa de plantas considerando a restrição (6.6) é dada por:

$$u(t) = \begin{cases} w - \xi & \text{quando } w > \xi, \\ 0 & \text{quando } w \leq \xi. \end{cases} \quad (6.28)$$

Como a capacidade de suporte do meio que limita o crescimento de aguapés é dada pelo valor a/b , o valor de ξ em (6.27) significa que o controle é aplicado quando a quantidade de aguapés ultrapassa a metade da capacidade máxima de suporte do local, que corresponde ao nível ótimo.

Substituindo a função de controle (6.28) na equação (6.2) obtém-se:

$$\frac{dw}{dt} = \begin{cases} \frac{a^2}{4b} + \frac{a\tau}{2b} - \tau w, & \text{para } w(t) > \frac{a}{2b}, \\ w(a - bw), & \text{para } w(t) \leq \frac{a}{2b}, \end{cases} \quad (6.29)$$

que descreve a variação das plantas no meio, considerando a aplicação de controle somente quando a população de plantas ultrapassa o valor (6.27).

Das equações em (6.29) pode-se observar que quando o controle é aplicado, a EDO (1.5) torna-se linear devido as simplificações algébricas que podem ser feitas. Ambas as equação de (6.29) possuem solução analítica exata para cada instante t . Considerando a condição inicial (6.7), as soluções das equações de (6.29) são dadas por:

$$w(t) = \begin{cases} M + (w_0 - M) e^{-\tau t}, & \text{se } w(t) > \xi, \\ \frac{\frac{a}{b} w_0}{w_0 + \left(\frac{a}{b} - w_0\right) e^{-at}}, & \text{se } w(t) \leq \xi, \end{cases} \quad (6.30)$$

onde $M = a^2/4b + a\tau/2b$.

Assim, quando se tem um período suficientemente grande de funcionamento da lagoa, ou seja $t \rightarrow \infty$, as soluções de (6.30) tendem a valores constantes:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = M \quad (6.31)$$

Isso significa que quando a população está sob o efeito do controle, com o passar do tempo ela cresce somente até o nível desejado.

Nos estudos realizados por KAWAI; GRIECO (1983), foi observado que o cresci-

mento de aguapés é da forma exponencial durante um determinado período de tempo, sucedido por uma fase estacionária de crescimento. A expressão matemática que representa a curva de crescimento de aguapés, obtida através dos resultados experimentais, é dada por:

$$w(t) = \frac{700}{1 + 5,78e^{-0,103t}}, \quad (6.32)$$

de onde obtém-se os parâmetros a e b do modelo. Nota-se que a função (6.32) é solução da equação (1.5) sem controle, que é igual a segunda equação de (6.29), em que a taxa de crescimento e a taxa de competição entre as plantas correspondem a $a = 0,103$ e a $b = 0,000147$.

Assim é possível determinar o nível desejado que estabiliza o sistema biológico em $368,38g/m^2$, e sem regulação, a população cresce até a capacidade de suporte do meio que corresponde a $700,68g/m^2$.

Com essa estratégia de controle é possível determinar a quantidade de aguapés que precisa ser recolhida diariamente:

$$u^*(t) = \frac{a^2}{4\tau b}, \quad (6.33)$$

que corresponde a $u^*(t) = 18,04g/m^2$, com $\tau = 1$.

A figura 18 mostra as curvas com crescimento natural de aguapés, considerando a solução da segunda equação do sistema (6.29), e com aplicação de controle ótimo e condição inicial $w_0 = 100$, considerando a solução da primeira equação do sistema (6.29).

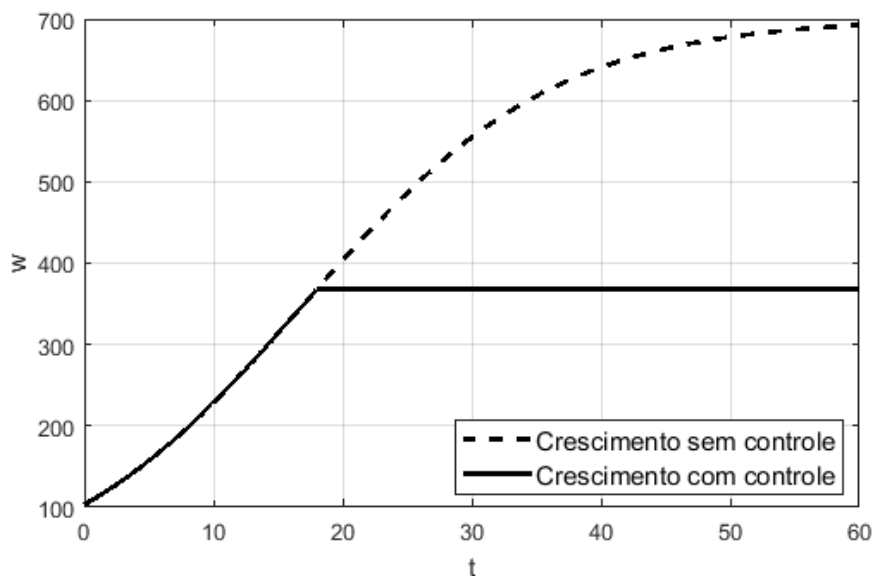


Figura 18: Densidade de aguapés sem aplicação de controle e com aplicação de controle.

A utilização da teoria de controle ótimo para o controle desse sistema, determinou a estratégia ótima de retirada de aguapés da lagoa a fim de tornar mais eficiente a limpeza de águas poluídas. Os resultados aqui apresentados da modelagem e otimização estão de acordo com trabalho de KAWAI; GRIECO (1983).

Partindo desse estudo realizado por COSTA et al. (2003) e RAFIKOV; BALTHAZAR (2005) utilizando EDOs e comparando os resultados obtidos com os experimentos de KAWAI; GRIECO (1983), na próxima seção pretende-se utilizar essas ideias e apresentar uma estratégia de controle ótimo para o mesmo sistema biológico (aguapés em águas poluídas) considerando uma função de controle $u(x, t)$ com a mesma estrutura da encontrada por COSTA et al. (2003), contudo utilizando a EDP de Fisher-Kolmogorov.

6.2 Controle linear realimentado inserido diretamente na equação de Fisher-Kolmogorov aplicado a um sistema biológico de plantas aquáticas

Uma vez determinada a função de controle para o crescimento logístico, baseado na seção anterior e nos trabalhos de KAWAI; GRIECO (1983) e COSTA et al. (2003), propõe-se agora, como parte inovadora deste trabalho, o controle para um sistema de plantas aquáticas considerando a dinâmica temporal e a dispersão espacial. Admita-se a existência de uma função de controle $u(x, t)$ que possa ser utilizada na EDP de Fisher-Kolmogorov (1.30) e satisfaça as seguintes condições:

- a função de controle representa a quantidade de aguapés recolhida por dia (t), em um determinado espaço (x);
- o espaço em questão é um canal contendo águas residuais, com início do canal em $x_0 = 0$ e comprimento $x_l = l$.
- a função de controle, no tempo e no espaço, deve levar as trajetórias do sistema biológico modelado pela equação (1.30) ao ponto de equilíbrio desejado.

Dessa forma, uma função de controle que satisfaça essas condições e inclua a dispersão de plantas no espaço, baseada na função obtida no modelo logístico, pode ser dada por:

$$u(x, t) = \begin{cases} w(x, t) - \xi, & \text{quando } w > \xi, \\ 0, & \text{quando } w \leq \xi, \end{cases} \quad (6.34)$$

onde ξ tem a mesma dimensão de w e é igual ao encontrado na aplicação de controle na equação (6.2) na seção anterior, cujo valor foi estabelecido utilizando a teoria de controle linear realimentado para sistemas não lineares, através da aplicação do

princípio do máximo, e entra na equação (1.30) da mesma forma que a equação (6.28) foi inserida em (6.2).

Substituindo a função de controle (6.34) na equação de Fisher-Kolmogorov (1.30), da mesma forma que em (6.2), obtendo-se:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (w - u)[a - b(w - u)] - \tau u, & \text{se } w > \xi, \\ \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w(a - bw), & \text{se } w \leq \xi. \end{cases} \quad (6.35)$$

Pode-se notar que a segunda equação do sistema (6.35) é a equação de Fisher-Kolmogorov estudada no capítulo 3. Já da primeira equação encontra-se uma nova EDP, incluindo a função de controle, dado por:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (w - \xi)[a - b(w - \xi)] - \tau(w - \xi), \quad (6.36)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{a}{2b} \left[a - \frac{a}{2} \right] - \tau w + \tau \frac{a}{2b}, \quad (6.37)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \tau w + \frac{a^2}{4b} + \frac{a\tau}{2b}. \quad (6.38)$$

De forma simplificada tem-se:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \tau w + M, \quad (6.39)$$

sendo τ uma constante que representa a capacidade técnica da retirada de indivíduos e $M = a^2/4b + \tau a/2b$ também é uma constante.

As condições iniciais são dadas por:

$$w(x, 0) = w_0, \quad (6.40)$$

e as condições de contorno da equação (6.39) são do tipo Neumann:

$$\frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial w(l, t)}{\partial x} = 0, \quad \text{para } t \geq 0. \quad (6.41)$$

As condições (6.41) indicam a não existência de fluxo de plantas nas bordas do canal. Isso acontece porque as plantas aquáticas dependem da água para sobreviver, e o contorno representa um limitante da água para a terra, dessa forma, impossibilitando o crescimento e o avanço fora do canal.

Pode-se notar que a equação (6.39) tem a mesma configuração da primeira equação de (6.29), considerando que $w(t)$ agora é $w(x, t)$ e que houve a inclusão

do termo difusivo, dado por w_{xx} . Além disso, a EDP (6.39) tornou-se linear com a aplicação da estratégia de controle. Portanto é possível encontrar uma solução para essa equação através de métodos amplamente encontrados na literatura, como por exemplo a transformada de Laplace, transformada de Fourier e separação de variáveis (método de Fourier).

A EDP (6.39) é definida num domínio finito de $0 \leq x \leq l$. Então pode-se utilizar a Transformada Finita de Fourier (TFF), é aplicada em problemas onde o intervalo do domínio das variáveis de interesse é finito; isto é, isto é, se x for a variável sobre a qual se pretende aplicar uma transformada finita, então: $a_l \leq x \leq b_l$, onde a_l e b_l são números finitos no espaço e $\mathcal{L}$ é o período da função, que pode ou não assumir o valor de b_l dependendo do domínio da função.

Conforme MEDRANO-BALBOA (1989), para aplicar a TFF na equação de Fisher-Kolmogorov com controle (6.39), é necessário a análise de algumas condições na EDP: a ordem da derivada com respeito a x (par ou ímpar) e a ordem das condições de contorno (par ou ímpar). Nesse caso, a equação de Fisher-Kolmogorov com controle (6.39) tem-se a derivada em x par, de ordem dois, e as condições de contorno são ímpares, de ordem um. Portanto, pode-se utilizar a TFF-cosseno.

Agora aplica-se a TFF-cosseno em todos os termos da equação de Fisher-Kolmogorov com controle (6.39) e encontra-se:

$$\mathcal{C} \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} \right\} = \mathcal{C} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} - \mathcal{C} \{w\} + \mathcal{C} \{M\}, \quad (6.42)$$

sabendo que $w = w(x, t)$ e $m = 1$, devido a derivada ser de ordem dois.

Pela propriedade da derivada (2.26):

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} &= \mathcal{C} \{w^{(2,1)}(x)\} = (-1)^1 \left(\frac{n\pi}{b_l} \right)^{2,1} w_c(n) - \\ &(-1)^1 \sum_{p=1}^1 \left[(-1)^1 \left(\frac{n\pi}{\mathcal{L}} \right)^{(2,1-1)+1} ((-1)^n w^{2,1-2}(b_l) - w^{2,1-2}(a)) \right]. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Tem-se que:

$$(-1)^1 \sum_{p=1}^1 \left[(-1)^1 \left(\frac{n\pi}{\mathcal{L}} \right)^{(2,1-1)+1} ((-1)^n w^{2,1-2}(b_l) - w^{2,1-2}(0)) \right] = 0, \quad (6.44)$$

pois $w^0(b_l)$ e $w^0(0)$ correspondem as condições de contorno (6.41), que são condições de fluxo nulo, portanto:

$$\mathcal{C} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} = \mathcal{C} \{w^{(2)}(x)\} = - \left(\frac{n\pi}{\mathcal{L}} \right)^2 w_c(n, t). \quad (6.45)$$

Aplicando a TFF na derivada em t tem-se:

$$\mathcal{C} \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} \right\} = \frac{\partial w_c}{\partial t}, \quad (6.46)$$

em $w(x, t)$:

$$\mathcal{C} \{w\} = w_c(n, t), \quad (6.47)$$

e na constante M obtém-se:

$$\mathcal{C} \{M\} = \int_0^{b_l} M \cos \left(\frac{n\pi x}{b_l} \right) dx = \bar{M}. \quad (6.48)$$

Substituindo (6.45) a (6.48) na EDP (6.39) encontra-se:

$$\frac{\partial w_c}{\partial t} = - \left(\frac{n\pi}{\mathcal{L}} \right)^2 w_c(n, t) - w_c(n, t) + \bar{M}, \quad (6.49)$$

e então tem-se a EDO:

$$\frac{w_c(n, t)}{dt} + \left[\left(\frac{n\pi}{\mathcal{L}} \right)^2 + 1 \right] w_c(n, t) = \bar{M}, \quad (6.50)$$

que pode ser resolvida por fator integrante considerando $FI(t) = e^{\left[\left(\frac{n\pi}{\mathcal{L}} \right)^2 + 1 \right] t}$ como o fator integrante. Assim, obtém-se:

$$w_c(n, t) = \frac{\bar{M}}{\left(\frac{n\pi}{\mathcal{L}} \right)^2 + 1} + C_2 e^{\left[- \left(\frac{n\pi}{\mathcal{L}} \right)^2 + 1 \right] t}, \quad (6.51)$$

considerando C_2 uma constante, obtida na integração.

Aplicando a TFF-cosseno na condição inicial (6.40) tem-se:

$$\mathcal{C} \{w(x, 0)\} = \mathcal{C} \{w_0\}, \quad (6.52)$$

$$w_c(n, 0) = \int_0^{b_l} w_0 \cos \left(\frac{n\pi x}{b_l} \right) dx. \quad (6.53)$$

Assim, através da condição inicial transformada (6.53) consegue-se determinar o valor da constante C_2 :

$$C_2 = \frac{-\bar{M}}{\left(\frac{n\pi}{\mathcal{L}} \right)^2 + 1} + \int_0^{b_l} w_0 \cos \left(\frac{n\pi x}{b_l} \right) dx, \quad (6.54)$$

e conseqüentemente pode-se reescrever a solução da EDO (6.50) da forma:

$$w_c(n, t) = \frac{\bar{M}}{\left(\frac{n\pi}{\mathcal{L}}\right)^2 + 1} + \left(\frac{\bar{M}}{\left(\frac{n\pi}{\mathcal{L}}\right)^2 + 1} + \int_0^{b_l} w_0 \cos\left(\frac{n\pi x}{b_l}\right) dx \right) e^{\left[\left(\frac{n\pi}{\mathcal{L}}\right)^2 + 1\right]t}, \quad (6.55)$$

Aplicando a TFF-cosseno Inversa em $w_c(n, t)$ tem-se:

$$\mathcal{C}^{-1}\{w_c(n, t)\} = w(x, t) = \frac{1}{b_l} w_c(0, t) + \frac{2}{b_l} \sum_{n=1}^{\infty} \left(w_c \cos\left(\frac{n\pi x}{b_l}\right) \right), \quad (6.56)$$

sendo que:

$$w_c(0, t) = (1 - e^{-t}) \int_0^{b_l} M dx + e^{-t} \int_0^{b_l} w_0 dx, \quad (6.57)$$

e assim obtém-se:

$$w(x, t) = \frac{1}{b_l} \left((1 - e^{-t}) \int_0^{b_l} M dx + e^{-t} \int_0^{b_l} w_0 dx \right) + \frac{2}{b_l} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{\bar{M}}{\left[\left(\frac{n\pi}{\mathcal{L}}\right)^2 + 1\right]} + \left(\frac{\bar{M}}{\left[\left(\frac{n\pi}{\mathcal{L}}\right)^2 + 1\right]} + \int_0^{b_l} w_0 \cos\left(\frac{n\pi x}{b_l}\right) dx \right) e^{\left[\left(\frac{n\pi}{\mathcal{L}}\right)^2 + 1\right]t} \right) \cos\left(\frac{n\pi x}{b_l}\right) \right), \quad (6.58)$$

com $n = 1, 2, 3, \dots$

Para verificar a eficácia da estratégia de controle, o gráfico da figura 19 ilustra a solução (6.58) da equação de Fisher-Kolmogorov com controle (6.39) com condição inicial com condição inicial $w(x, 0) = 140,14$ abaixo do nível desejado e o gráfico da figura 20, considerando outra condição inicial $w(x, 0) = 560,54$, acima do nível desejado. Considerando o coeficiente difusivo $D = 1,33m^2/t$, determinado a partir das informações sobre difusão de aguapés contidas no trabalho de KAWAI; GRIECO (1983).

Portanto, ao analisar as figuras 19 e 20, pode-se notar que, para cada posição em x , o crescimento das plantas ocorre da mesma forma para cada instante de tempo t . E ainda é possível perceber que independente da condição inicial, a quantidade de aguapés estabiliza com o passar do tempo na mesma quantidade equivalente a $368,38g/m^2$, ou seja, estabilizam próximo da metade da capacidade de suporte ($K = 700g/m^2$), que é o nível desejado, conforme os experimentos realizados por KAWAI; GRIECO (1983). Após a estabilização, o manejo deve ser diário para a manutenção da densidade populacional de plantas no nível desejado.

Para ilustrar melhor a eficiência do controle proposto, considera-se outros tipos de condições iniciais, buscando maior proximidade com a realidade, admitindo condições iniciais não constantes, como por exemplo $w(x, 0) = x^2$, ilustrada na figura 21. Dessa forma, tem-se que num mesmo instante inicial pode-se ter concentrações diferentes

de densidade de plantas.

Pode-se notar novamente que há uma convergência da população de plantas para o nível de equilíbrio desejado. Quando a densidade de plantas está acima do nível desejado há um decréscimo, quando está abaixo, há um acréscimo de plantas devido a reprodução.

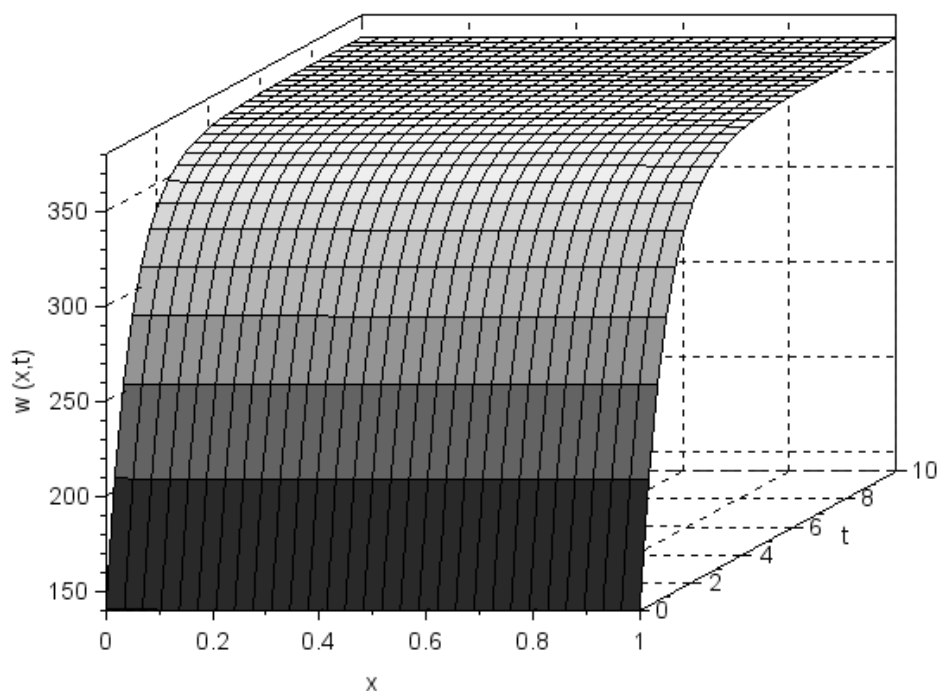


Figura 19: Solução do sistema controlado (6.39) para a condição inicial $w(x, 0) = 140, 14$.

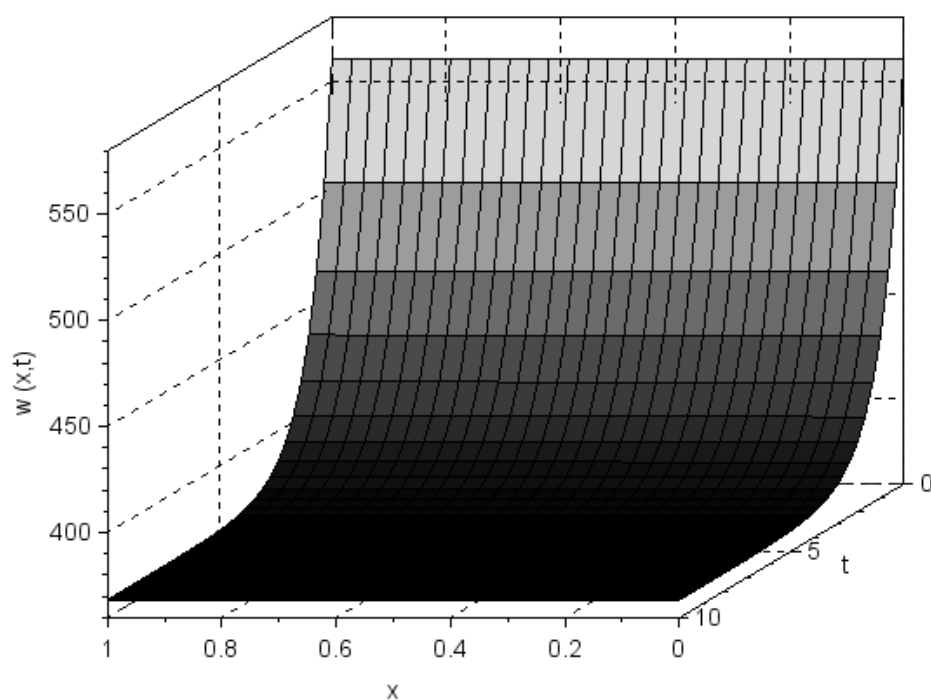


Figura 20: Solução do sistema controlado (6.39) para a condição inicial $w(x, 0) = 560, 54$.

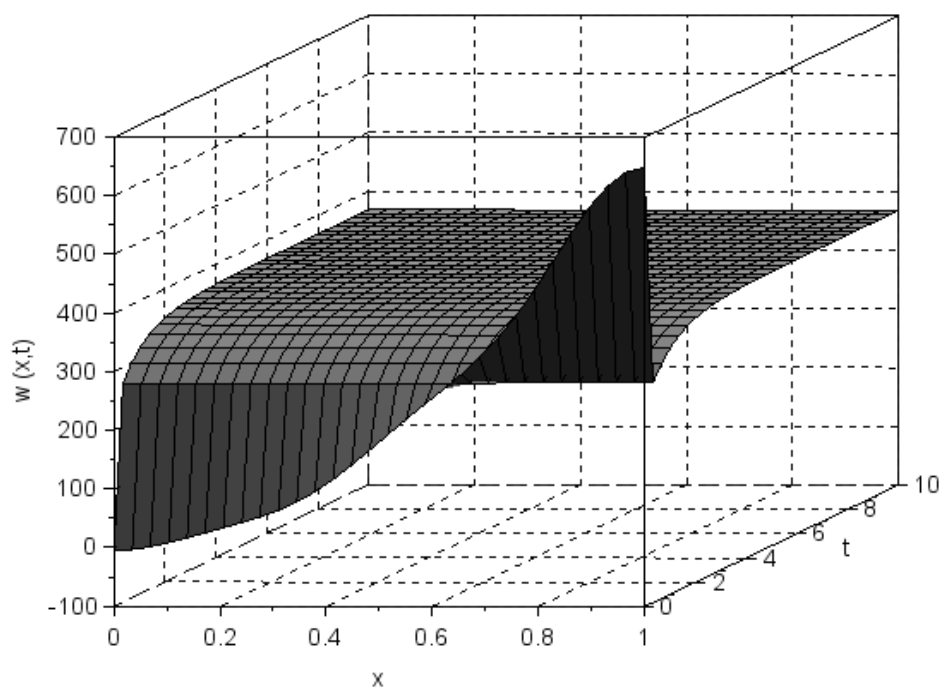


Figura 21: Solução do sistema controlado (6.39) para a condição inicial não constante $w(x, 0) = x^2$.

6.3 Análise do modelo de Fisher-Kolmogorov controlado considerando duas variáveis espaciais

A análise feita anteriormente corresponde ao estudo unidimensional do crescimento da população de plantas. Agora, será avaliado o crescimento em duas dimensões, considerando um canal com comprimento e largura ou uma lagoa. Para isso, acrescenta-se uma segunda variável espacial y , conforme foi realizado na seção 4.4. Sendo assim, em termos de solução do sistema bidimensional, pode-se considerar as densidades populacionais obtidas em (6.58) em termos radiais.

A figura 22 apresenta a evolução da densidade de plantas numa lagoa de estabilização diante da condição inicial em coordenadas polares $w(r, 0) = w_0$. Pode-se observar que a cada posição no espaço tem-se associado um tempo e uma densidade de plantas que é fixa para cada tamanho de r .

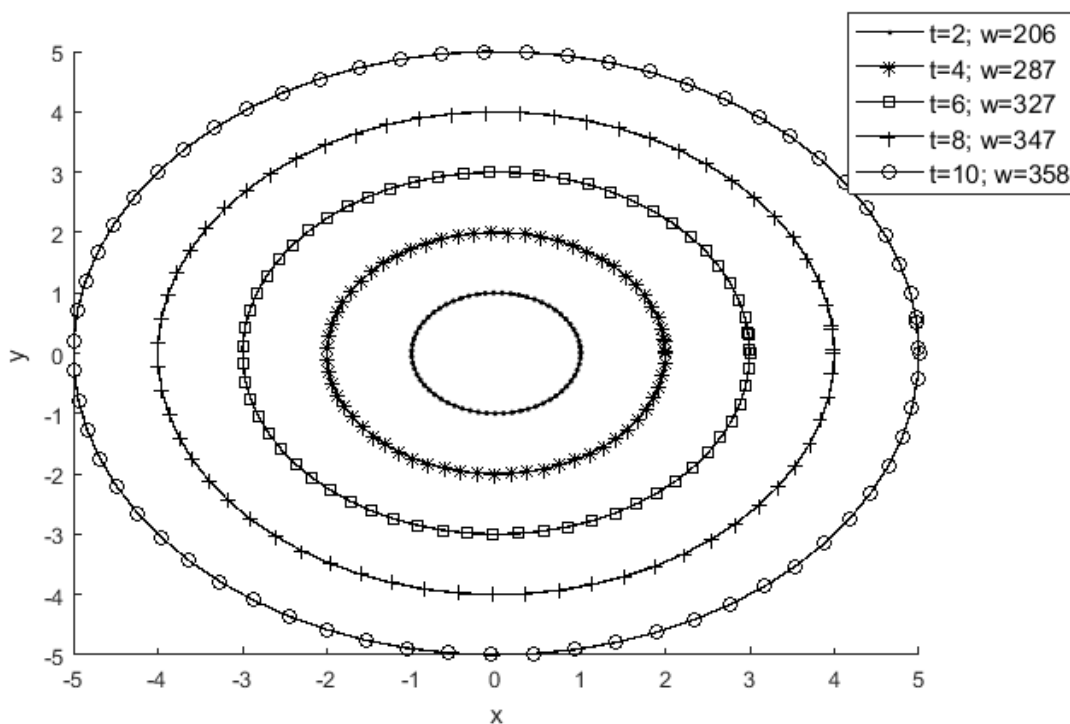


Figura 22: Diferentes densidades de plantas $w(x, y, t)$ (g/m^2) com a evolução do tempo t , com condição inicial $w_0 = 140$.

7 MODELO REATIVO-DIFUSIVO UNIDIMENSIONAL PARA DUAS ESPÉCIES: SISTEMA DE LOTKA-VOLTERRA MODIFICADO COM DIFUSÃO

A distribuição de indivíduos pode ser representada através do modelo difusivo linear, que combinado com um termo de reação que correspondem a taxa de crescimento e interação entre os indivíduos, constitui um modelo de reação-difusão. Se esse modelo representar a interação de duas espécies, cuja relação entre elas é do tipo presa-predador e o único alimento do predador é a presa, que cresce até um determinado nível, então tem-se o sistema de Lotka-Volterra modificado com difusão (DUNBAR, 1986; EDELSTEIN-KESHET, 1988; KOT, 2001; MURRAY, 2003).

Neste capítulo será analisado o modelo de Lotka-Volterra com difusão (1.31), considerando a existência de ondas viajantes (seção 7.1) que reduzem o sistema de EDPs para um sistema de EDOs e a partir disso, realiza-se a análise de estabilidade do sistema (seção 7.2), com o objetivo de fazer uma análise qualitativa do sistema através da verificação da existência de ondas viajantes entre os pontos de equilíbrio.

7.1 Solução por onda viajante

Inicialmente, pode-se adimensionalizar o sistema (1.31) definindo as novas variáveis (quantidades adimensionais) através de:

$$\bar{w} = \frac{w}{k}; \quad \bar{v} = \frac{bv}{a}; \quad \bar{t} = at; \quad \text{e} \quad \bar{x} = x \left(\frac{a}{D_2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (7.1)$$

onde

$$\bar{D} = \frac{D_1}{D_2}; \quad \bar{a} = \frac{c_p k}{a}; \quad \text{e} \quad \bar{b} = \frac{d}{c_p k}, \quad (7.2)$$

Dessa forma tem-se:

$$w_t = \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial \bar{t}} \cdot \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial w}{\partial \bar{t}} = a \left(\frac{\partial w}{\partial \bar{w}} \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} \right) = ak \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}}; \quad (7.3)$$

$$w_x = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = \sqrt{\frac{a}{D_2}} \cdot \frac{\partial w}{\partial \bar{x}} = \left(\frac{\partial w}{\partial \bar{w}} \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right) = \sqrt{\frac{a}{D_2}} \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}; \quad (7.4)$$

$$w_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{\frac{a}{D_2}} \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right) = \frac{ka}{D_2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2}; \quad (7.5)$$

$$v_t = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial \bar{t}} \cdot \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial v}{\partial \bar{t}} = a \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} \right) = \frac{a^2}{b} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}}; \quad (7.6)$$

$$v_x = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = \sqrt{\frac{a}{D_2}} \cdot \frac{\partial v}{\partial \bar{x}} = \sqrt{\frac{a}{D_2}} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{a}{D_2}} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}; \quad (7.7)$$

$$v_{xx} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a}{b} \sqrt{\frac{a}{D_2}} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right) = \frac{a}{b} \frac{a}{D_2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2}. \quad (7.8)$$

Substituindo os resultados (7.3), (7.5), (7.6), e (7.8) no sistema de EDPs (1.31) obtém-se:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = w(1 - w - v) + D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = av(w - b) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \end{cases} \quad (7.9)$$

Observa-se que para fins de simplificação de notação, a “barra” foi desconsiderada e D representa a razão entre os dois coeficientes de difusão $D = D_1/D_2$.

Considerando que o comportamento dispersivo ocorre através de “frentes de invasão”, conforme explanado na seção 2.2, admita-se então que o sistema (7.9) tenha solução por onda viajante das formas:

$$w(x, t) = W(x + ct) = W(z) \quad (7.10)$$

$$v(x, t) = V(x + ct) = V(z) \text{ onde } z = x + ct, \quad (7.11)$$

que representa a movimentação da onda viajante para o lado esquerdo de x . Cabe ressaltar que pode-se considerar soluções por onda viajante do tipo $w(x, t) = W(x - ct)$ e $v(x, t) = V(x - ct)$, cuja movimentação da onda viajante se dá para o sentido positivo de x , conforme o estudo apresentado em KOT (2001).

Aplicando a teoria de solução por onda viajante, para a nova variável z , as derivadas parciais de x e t são convertidas em derivadas ordinárias em z . Calculando as derivadas encontra-se:

$$w_t = \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{dW}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = c \cdot \frac{dW}{dz}; \quad (7.12)$$

$$w_x = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dW}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dW}{dz}; \quad (7.13)$$

$$w_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{d}{dz} \left(\frac{dW}{dz} \right) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}; \quad (7.14)$$

$$v_t = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dV}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = c \cdot \frac{dV}{dz}; \quad (7.15)$$

$$v_x = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dV}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dV}{dz}; \quad (7.16)$$

$$v_{xx} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{d}{dz} \left(\frac{dV}{dz} \right) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \quad (7.17)$$

Substituindo os resultados (7.12), (7.14), (7.15) e (7.17) no sistema (7.9) obtém-se um sistema de EDOs adimensional:

$$\begin{cases} c \frac{dW}{dz} = W(1 - W - V) + D \frac{d^2 W}{dz^2}, \\ c \frac{dV}{dz} = aV(W - b) + \frac{d^2 V}{dz^2}. \end{cases} \quad (7.18)$$

Uma simplificação que pode ser feita no sistema (7.18) é considerar um sistema biológico planctônico-herbívoro⁷, na qual somente o herbívoro se desloca, conforme encontramos em DUNBAR (1986) e MURRAY (2003). Nesse caso, o coeficiente D_1 , que representa a difusão das presas, é muito menor que o coeficiente de difusão de predadores, definido por D_2 . Desse modo, como $D = D_1/D_2$, da equação (7.2), tem-se que $D \approx 0$ e assim consegue-se simplificar o sistema (7.18) obtendo:

$$\begin{cases} c \frac{dW}{dz} = W(1 - W - V), \\ \frac{d^2 V}{dz^2} = c \frac{dV}{dz} - aV(W - b). \end{cases} \quad (7.19)$$

Segundo DUNBAR (1986), o comportamento das soluções do sistema (7.18) em que $D \neq 0$ é similar a do sistema (7.19) com $D = 0$, não influenciando significativamente na análise qualitativa.

Pode-se reescrever o sistema não linear (7.19), composto por duas EDOs de segunda ordem, em um sistema de quatro EDOs de primeira ordem. Para isso, considera-se as mudanças de variáveis:

$$Z = \frac{dV}{dz}, \quad (7.20)$$

⁷Sistema caracterizado pela interação de espécies que flutuam na superfície das águas de oceanos, mares e lagos chamados plâncton e animais que se alimentam de plantas (vegetais) (PRICE, 1980).

e assim tem-se um sistema com três equações:

$$\begin{cases} \frac{dW}{dz} = \frac{W(1-W-V)}{c}, \\ \frac{dV}{dz} = Z, \\ \frac{dZ}{dz} = cZ - aV(W-b). \end{cases} \quad (7.21)$$

O sistema (7.21) não possui solução analítica exata para $W(z)$, $V(z)$ e $Z(z)$, contudo, é possível realizar uma análise qualitativa do comportamento das soluções através da teoria de estabilidade, da mesma maneira que foi realizado para a equação de Fisher-Kolmogorov.

7.2 Análise da estabilidade

Do sistema (7.21) é possível realizar uma análise qualitativa da solução de onda viajante através da teoria de estabilidade local (anexo A), em que deduz-se o comportamento qualitativo da solução sem necessariamente conhecê-la.

Desse modo, busca-se encontrar as soluções de equilíbrio do sistema (7.21), observando as condições necessárias para estabilidade das populações nos pontos críticos e verificando a existência de ondas viajantes entre os estados de equilíbrio da mesma forma realizada no estudo da equação de Fisher-Kolmogorov.

Para isso, calcula-se os pontos críticos do sistema (7.21), considerando que a primeira derivada é nula, ou seja $dW/dz = 0$, $dV/dz = 0$ e $dZ/dz = 0$. Dessa forma, da primeira equação do sistema (7.21) tem-se:

$$W = 0 \quad \text{ou} \quad W = 1 - V; \quad (7.22)$$

da segunda:

$$Z = 0; \quad (7.23)$$

e da terceira:

$$V = 0 \quad \text{ou} \quad W = b. \quad (7.24)$$

Combinando as relações (7.22) a (7.24) encontra-se três pontos críticos seguindo a configuração (W, V, Z) :

$$P_1 = (0, 0, 0), \quad (7.25)$$

$$P_2 = (1, 0, 0), \quad (7.26)$$

e

$$P_3 = (b, 1 - b, 0). \quad (7.27)$$

Conhecidos os pontos críticos (7.25) a (7.27), admite-se a possibilidade da existência de solução por onda viajante que ligue os pontos de equilíbrio:

- $(1, 0, 0)$ e $(b, 1 - b, 0)$: em que foi introduzido o predador quando a presa possuía densidade máxima no meio e ao longo do tempo ocorre a estabilização (entram em equilíbrio), ou seja, há coexistência das populações de presas e de predadores; e
- $(0, 0, 0)$ e $(b, 1 - b, 0)$: representa a situação em que as duas espécies foram introduzidas no meio ao mesmo tempo e com densidade mínima e, posteriormente, entraram em equilíbrio.

Assim, configuram-se as soluções do sistema (7.19) como $(W(z), V(z))$, com condições de contorno:

$$W(-\infty) = 1, \quad V(-\infty) = 0, \quad W(\infty) = b \quad \text{e} \quad V(\infty) = 1 - b, \quad (7.28)$$

ou

$$W(-\infty) = 0, \quad V(-\infty) = 0, \quad W(\infty) = b \quad \text{e} \quad V(\infty) = 1 - b. \quad (7.29)$$

Busca-se agora encontrar a estabilidade dos pontos críticos no sistema (7.21) e uma solução do tipo onda viajante que satisfaça as condições de contorno (7.28) ou (7.29).

Para fazer a análise de estabilidade e entender o que acontece com as soluções em torno dos pontos de equilíbrio obtendo informações sobre a possibilidade de existência de onda viajante que liga os pontos críticos, pode-se verificar as aproximações lineares, linearizando o sistema (7.21) através da matriz Jacobiana.

Definindo as funções:

$$f(W, V) = \frac{W(1 - W - V)}{c}, \quad (7.30)$$

$$g(W, V) = Z, \quad (7.31)$$

$$h(W, V) = cZ - aV(W - b), \quad (7.32)$$

tem-se:

$$\mathcal{J}(W, V, Z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial W} & \frac{\partial f}{\partial V} & \frac{\partial f}{\partial Z} \\ \frac{\partial g}{\partial W} & \frac{\partial g}{\partial V} & \frac{\partial g}{\partial Z} \\ \frac{\partial h}{\partial W} & \frac{\partial h}{\partial V} & \frac{\partial h}{\partial Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(1 - 2W - V)}{c} & -\frac{W}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -aV & -a(W - b) & c \end{pmatrix}. \quad (7.33)$$

A partir de (7.33) calcula-se os autovalores para cada ponto crítico do sistema fazendo:

$$\det [J(W, V, Z)I - \lambda] = 0, \quad (7.34)$$

onde λ é denominado autovalor da matriz $J(W, V, Z)$.

Logo, para o ponto $P_2 = (1, 0, 0)$ que representa a existência de somente presas, calcula-se os autovalores considerando (7.34). Assim:

$$\det [J(1, 0, 0)I - \lambda] = \det \begin{bmatrix} \lambda + \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -a(1-b) & \lambda - c \end{bmatrix} = 0. \quad (7.35)$$

em que obtém-se o polinômio cuja equação característica é dada por:

$$\left[\lambda + \frac{1}{c} \right] \cdot (a(b-1) + \lambda(c-\lambda)) = 0, \quad (7.36)$$

$$\left[\lambda + \frac{1}{c} \right] \cdot (\lambda^2 - c\lambda - ab + a) = 0, \quad (7.37)$$

e assim, encontram-se os autovalores :

$$\lambda_1 = -\frac{1}{c}, \quad \lambda_2 = \frac{c + \sqrt{c^2 - 4a(1-b)}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_3 = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4a(1-b)}}{2}. \quad (7.38)$$

Pode-se observar que para todo $c > 0$ o ponto crítico P_2 é instável, mais especificamente, os autovalores λ_2 e λ_3 são reais positivos para todos $c > \sqrt{4a(1-b)}$. Dessa forma, entende-se que a onda viajante sai desse ponto de maneira monótona, sendo a solução não negativa próximo desse ponto crítico.

Já o ponto $P_3 = (b, 1-b, 0)$ representa a coexistência de presas e de predadores. Dos autovalores da matriz jacobiana (7.33) calculada nesse ponto encontra-se:

$$p(\lambda) = \det [J(b, 1-b, 0) - \lambda I] = \det \begin{bmatrix} -\lambda - \frac{b}{c} & -\frac{b}{c} & 0 \\ -\lambda & 0 & 1 \\ -a(1-b) & 0 & c - \lambda \end{bmatrix} = 0, \quad (7.39)$$

e obtém-se o polinômio cuja equação característica é dada por:

$$\lambda^3 - \lambda^2 \left(c - \frac{b}{c} \right) - \lambda b - \frac{ab(1-b)}{c} = 0, \quad (7.40)$$

que é um polinômio de terceiro grau, cuja solução não é trivial. Contudo, é possível analisá-la qualitativamente, sem necessidade de encontrá-la. Nesse caso, estuda-se

a natureza (real ou complexa) bem como quantas raízes existem de cada tipo. Desse modo, é possível conhecer essas informações a partir do comportamento dos pontos críticos do polinômio característico. Assim, deriva-se $p(\lambda)$:

$$p'(\lambda) = 3\lambda^2 - 2\lambda \left(c - \frac{b}{c} \right) - b, \quad \text{em que } p'(\lambda) = 0, \quad (7.41)$$

e resolvendo $p'(\lambda)$ em (7.41) encontram-se os pontos de máximo λ_M e de mínimo λ_m locais:

$$\lambda_M = \frac{1}{3} \left[\left(c - \frac{c}{b} \right) - \sqrt{\left(c - \frac{c}{b} \right)^2 + 3b} \right], \quad (7.42)$$

$$\lambda_m = \frac{1}{3} \left[\left(c - \frac{c}{b} \right) + \sqrt{\left(c - \frac{c}{b} \right)^2 + 3b} \right]. \quad (7.43)$$

Observa-se que λ_M e λ_m possuem sinais opostos, ou seja, $\lambda_M < 0$ e $\lambda_m > 0$, devido ao sinal da raiz. Outro detalhe importante é que são independentes da constante a .

Analisando equação característica (7.40), pode-se perceber que a constante a apenas influencia no deslocamento vertical do seu gráfico, pois aparece no termo independente, portanto, para fins de simplificação, por ora considera-se que $a = 0$. Desse modo, o equação característica (7.40) pode ser reescrito como:

$$\lambda^3 - \lambda^2 \left(c - \frac{b}{c} \right) - \lambda b = 0, \quad (7.44)$$

que assim pode ser resolvido e encontradas as suas raízes:

$$\lambda_1 = 0, \quad (7.45)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left[\left(c - \frac{b}{c} \right) + \sqrt{\left(c - \frac{c}{b} \right)^2 + 4b} \right], \quad (7.46)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2} \left[\left(c - \frac{b}{c} \right) - \sqrt{\left(c - \frac{c}{b} \right)^2 + 4b} \right]. \quad (7.47)$$

A equação característica (7.40) tem uma solução negativa e outra positiva, logo existe um valor crítico a^* de a onde a equação (7.40) possui uma raiz dupla negativa.

Pode-se observar que o valor crítico a^* é, tal que, λ_M seja raiz do polinômio (7.40). Com isso, obtém-se uma fórmula para a em função do ponto de máximo λ_M dada por:

$$p(\lambda_M) = \lambda_M^3 - \lambda_M^2 \left(c - \frac{b}{c} \right) - \lambda_M b - \frac{a^* b (1 - b)}{c} = 0, \quad (7.48)$$

e isolando a^* :

$$a^* = \frac{c}{b(1-b)} \left[\lambda_M^3 - \lambda_M^2 \left(c - \frac{b}{c} \right) - \lambda_M b \right]. \quad (7.49)$$

O gráfico mostrado na figura 23 ilustra o valor crítico de a^* e o comportamento das soluções de (7.40) quando $0 < a < a^*$.

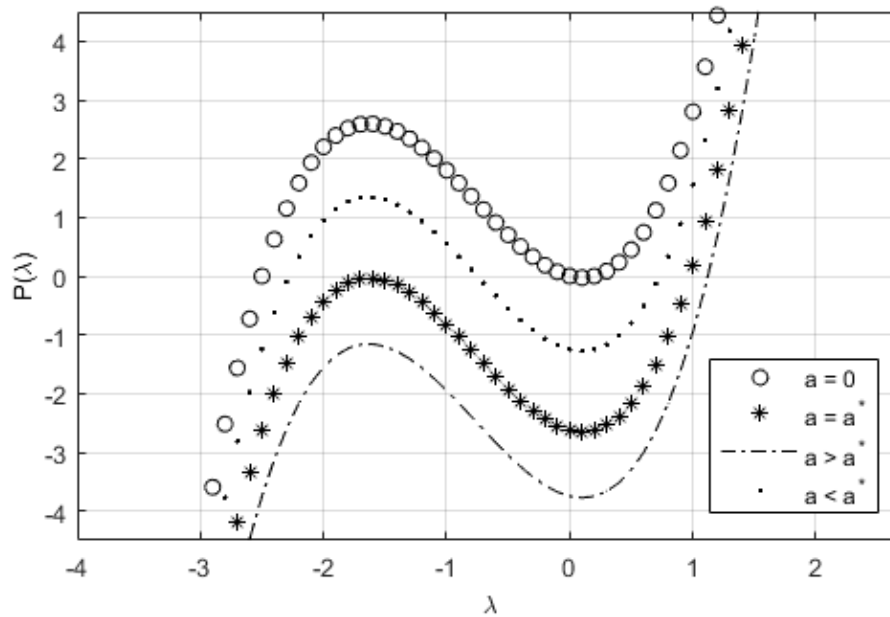


Figura 23: Raízes do polinômio característico (7.40) com valores diferentes para a constante a . Foram utilizados $b = 0,5$; $c = 2$; e $a^* = 2,1$. Fonte: (SABETI, 2007) adaptado.

Desse modo, para $0 < a < a^*$ existem duas raízes negativas e uma positiva. Para $a = a^*$ as raízes negativas são iguais enquanto que para $a > a^*$ as raízes negativas se tornam complexas com partes reais negativas. A existência do valor crítico de a^* indica que em $a > a^*$ as soluções de onda viajante (W, V) relacionadas ao sistema (7.21) e as condições de contorno (7.28), chegam ao estado de equilíbrio $(b, 1-b, 0)$ de maneira oscilatória (figura 24). E para $a < a^*$, esta aproximação ao ponto de equilíbrio $(b, 1-b, 0)$ é monótona (figura 25), de acordo com DUNBAR (1986). Ambos os casos, considera-se dispersão mínima da presa.

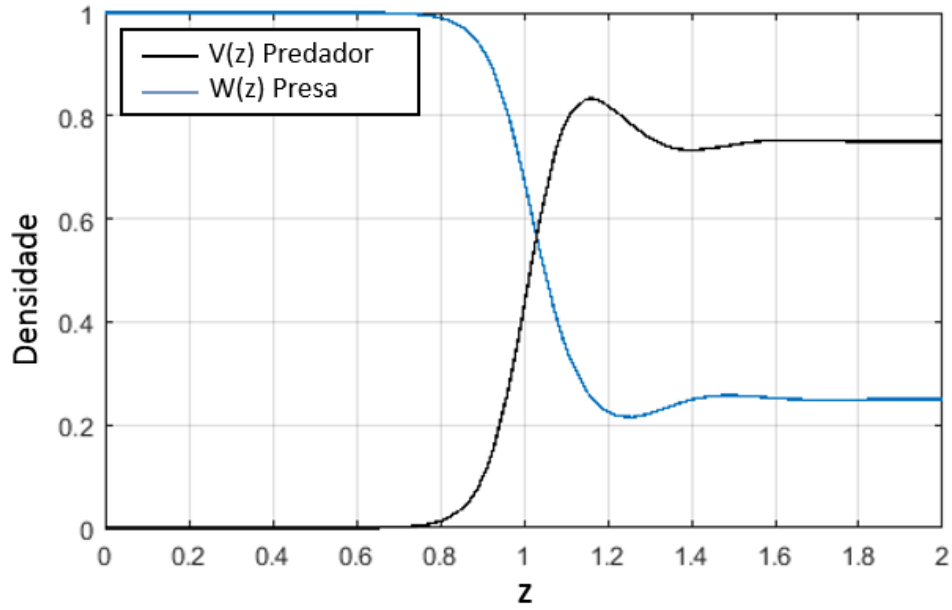


Figura 24: Aproximação oscilatória para $W(z)$ (curva clara) e $V(z)$ (curva escura) para as condições de contorno (7.28) considerando $b = 0,25$; $c = 2$ e $a > a^*$.

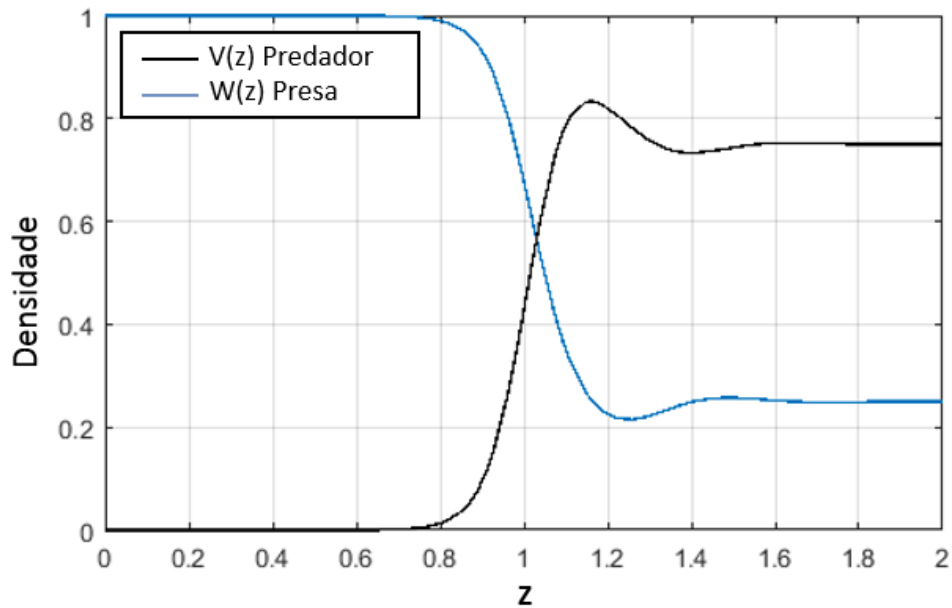


Figura 25: Aproximação monótona para $W(z)$ (curva clara) e $V(z)$ (curva escura) para as condições de contorno (7.28) considerando $b = 0,25$; $c = 2$ e $a < a^*$.

Agora considera-se a condição de contorno (7.29), onde há baixa densidade de predador e de presa no sistema (7.21) e ambas as espécies foram introduzidas ao mesmo tempo no sistema biológico.

Verifica-se as condições necessárias para existência de uma onda viajante entre os estados de equilíbrios $(0, 0, 0)$ e $(b, 1 - b, 0)$ e para isso, analisa-se o comportamento das soluções nas vizinhanças do ponto de equilíbrio $P_1 = (0, 0, 0)$. A matriz jacobiana

(7.33) calculada neste ponto crítico dada por:

$$\det [\mathcal{J}(0, 0, 0) - \lambda I] = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{c} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & ab & c - \lambda \end{bmatrix} = 0. \quad (7.50)$$

De (7.50) obtém-se o polinômio cuja equação característica é:

$$([-1 + c\lambda] \cdot [ab + (c - \lambda)]) \cdot \frac{1}{c} = 0, \quad (7.51)$$

que possui raízes (autovalores):

$$\lambda_1 = \frac{1}{c} \quad \text{e} \quad \lambda_{2,3} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 + 4ab}}{2} \quad (7.52)$$

Analisando os autovalores expressos por (7.52), têm-se dois autovalores positivos reais e um autovalor real negativo para todo $c > 0$. Portanto, o ponto equilíbrio $(0, 0, 0)$ é instável.

Esse ponto crítico é instável, então existe a possibilidade de crescimento da população nas vizinhanças deste ponto crítico. Para verificar se existe um equilíbrio no crescimento desta população, observa-se a estabilidade linear do ponto crítico $(b, 1 - b, 0)$, conforme calculou-se anteriormente as raízes da equação característica da matriz jacobiana dadas e, (7.45) que são os autovalores.

Então, para valores de $a > a^*$, as soluções de ondas viajantes (W, V) em relação a (7.21) e condições de contorno (7.29) chegam ao estado de equilíbrio $(b, 1 - b, 0)$ sob a forma oscilatória, conforme a figura 26, e para $a < a^*$ esta aproximação se dá de forma monótona como mostra a figura 27.

As trajetórias para $W(z)$ e $V(z)$ nas figuras 24 e 27 com as condições de contorno (7.28) e nas figuras 26 e 27 com condições de contorno (7.29), foram obtidas numericamente através do pacote *bvp4c* do *software Matlab*, que resolve sistema de EDOs com condições de contorno (SHAMPINE; KIERZENKA; REICHEL, 2000) através do método do *shooting*, que consiste em aproximar a solução para o problema de contorno pela utilização das soluções de uma sequência de problemas de valor inicial, sendo necessário iterações para se aproximar do “alvo” (BURDEN; FAIRES, 2008).

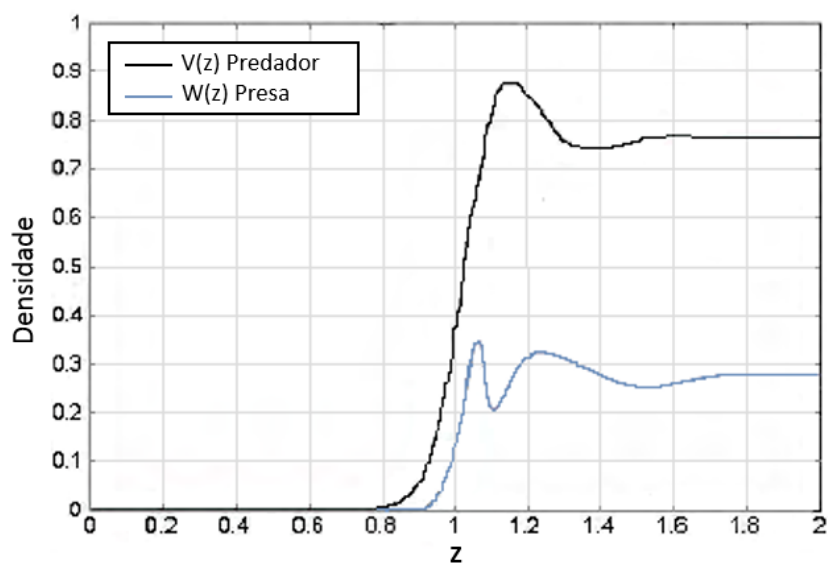


Figura 26: Aproximação oscilatória para $W(z)$ (curva clara) e $V(z)$ (curva escura) para as condições de contorno (7.29) considerando $b = 0,25$; $c = 2$ e $a > a^*$. Fonte: SABETI (2007).

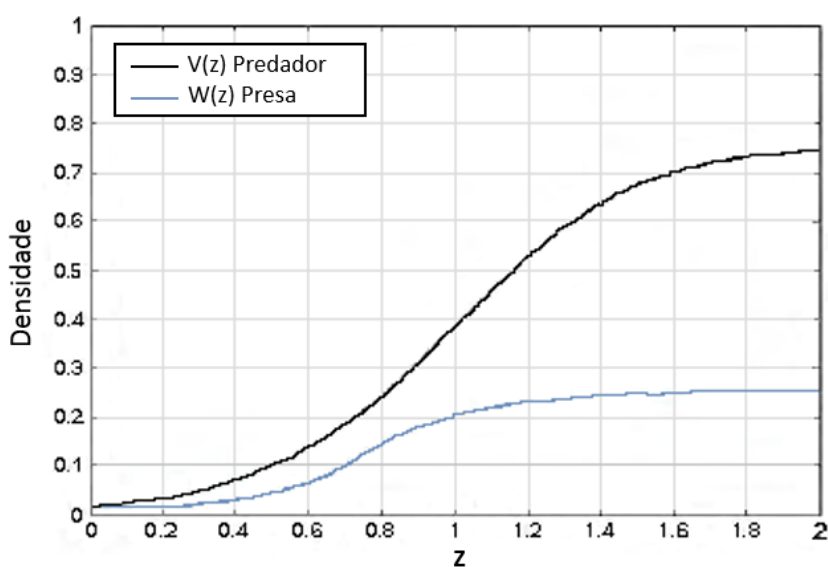


Figura 27: Aproximação monótona para $W(z)$ (curva clara) e $V(z)$ (curva escura) para as condições de contorno (7.29) considerando $b = 0,25$; $c = 2$ e $a < a^*$. Fonte: SABETI (2007).

8 CONTROLE POPULACIONAL APLICADO AO SISTEMA DE LOTKA-VOLTERRA MODIFICADO COM DIFUSÃO A PARTIR DA TEORIA DE SOLUÇÃO POR ONDA VIAJANTE

Em sistemas, cuja interação é do tipo presa-predador e, estão em desequilíbrio momentaneamente, devido algum caso atípico, ou por tempo indeterminado, é possível aplicar uma função de controle nesse sistema com o objetivo de preservar espécies ameaçadas, bem como controlar o crescimento de populações que são prejudiciais a determinadas atividades humanas. Um exemplo é o controle de pragas em uma plantação.

Para isso, neste capítulo, utiliza-se a mesma estratégia de controle adotada para a equação de Fisher-Kolmogorov no capítulo 5. Apresenta-se aqui uma estratégia de controle ótimo linear realimentado para um sistema biológico, cujo comportamento é descrito pelo sistema de Lotka-Volterra modificado com difusão após a aplicação da teoria de onda viajante, como o objetivo de encontrar as funções de controle que estabilizem o sistema em torno da trajetória ótima e o leve ao estado de equilíbrio desejado.

Na seção 8.1 tem-se a aplicação da teoria de controle ótimo linear para sistemas não lineares após a redução pela teoria de onda viajante e na seção 8.2, é apresentada uma aplicação em um sistema biológico para ilustrar a eficácia da estratégia de controle utilizada.

8.1 Controle ótimo linear para o sistema de Lotka-Volterra modificado com difusão

A partir do sistema de Lotka-Volterra modificado com difusão após redução pela teoria de solução por onda viajante (7.21), introduz-se funções de controle a fim de controlar o sistema e levá-lo para o estado de equilíbrio desejado. Para isso, utiliza-se a teoria de controle linear realimentado para sistemas não lineares, seguindo as ideias de RAFIKOV; BALTHAZAR; VON BREMEN (2008). Desse modo, acrescenta-

se uma função de controle da forma: $U_i = u_i^* + u_i$, com $i = 1, 2, 3$, no sistema (7.21), obtendo-se:

$$\begin{cases} \frac{dW}{dz} = \frac{W(1-W-V)}{c} + U_1, \\ \frac{dV}{dz} = Z + U_2, \\ \frac{dZ}{dz} = cZ - aV(W-b) + U_3, \end{cases} \quad (8.1)$$

em que u_1^*, u_2^* e u_3^* são os níveis desejados do controle, e u_1, u_2 e u_3 são responsáveis por controlar o sistema, conforme RAFIKOV; BALTHAZAR; VON BREMEN (2008). Substituindo U_1, U_2 e U_3 consegue-se obter as funções que são responsáveis por estabilizar o sistema em torno do nível ótimo desejado, dadas por:

$$\begin{cases} u_1^* = -\frac{W^*(1-W^*-V^*)}{c}, \\ u_2^* = -Z^*, \\ u_3^* = -cZ^* + aV^*(W^*-b). \end{cases} \quad (8.2)$$

Pode-se ainda, substituir as relações encontradas para u_1^*, u_2^* e u_3^* em (8.2) no sistema (8.1) e encontra-se:

$$\begin{cases} \frac{dW}{dz} = \frac{W(1-W-V)}{c} - \frac{W^*(1-W^*-V^*)}{c} + u_1, \\ \frac{dV}{dz} = Z - Z^* + u_2, \\ \frac{dZ}{dz} = cZ - aV(W-b) - cZ^* + aV^*(W^*-b) + u_3. \end{cases} \quad (8.3)$$

$$\begin{cases} \frac{dW}{dz} = \frac{W - W^* - W^2 + W^{*2} - VW + V^*W^*}{c} + u_1, \\ \frac{dV}{dz} = Z - Z^* + u_2, \\ \frac{dZ}{dz} = cZ - cZ^* - aVW + aV^*W^* + abV - abV^* + u_3. \end{cases} \quad (8.4)$$

Agora define-se:

$$\begin{aligned} W &= y_1 + W^* \rightarrow y_1 = W - W^*, \\ V &= y_2 + V^* \rightarrow y_2 = V - V^*, \\ Z &= y_3 + Z^* \rightarrow y_3 = Z - Z^*, \end{aligned} \quad (8.5)$$

como as perturbações do sistema. Nota-se que o sistema (8.4) pode ser reescrito

considerando (8.5). Assim tem-se:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dz} = \frac{y_1(1 - 2W^* - V^*) - y_1^2 - y_1y_2 - y_2W^*}{c} + u_1, \\ \frac{dy_2}{dz} = y_3 + u_2, \\ \frac{dy_3}{dz} = cy_3 - ay_2(W^* - b) - ay_1y_2 - ay_1V^* + u_3, \end{cases} \quad (8.6)$$

que pode ser reescrito na forma:

$$Y' = AY + H(Y) + Bu, \quad (8.7)$$

como:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-2W^*-V^*}{c} & \frac{-W^*}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -aV^* & -a(W^*-b) & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-y_1^2-y_1y_2}{c} \\ 0 \\ -ay_1y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad (8.8)$$

sendo que W^* e V^* são constantes conhecidas através do problema biológico estudado, A é a matriz de coeficientes constantes que acompanha os termos lineares, $H(Y)$ é um vetor dos termos não lineares e B é a matriz que acompanha as funções de controle.

A partir do sistema (8.6), considera-se o teorema 1 proposto por (RAFIKOV; BALTHAZAR; VON BREMEN, 2008), para determinar a função de controle. Dessa forma, consegue-se determinar os valores da matriz ganho κ e consequentemente, a função de controle. De forma genérica tem-se:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \kappa_{13} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \kappa_{23} \\ \kappa_{31} & \kappa_{32} & \kappa_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}. \quad (8.9)$$

Agora, conhecida a função de controle (8.9), pode-se substituí-la no sistema perturbado (8.6) e encontra-se:

$$\begin{cases} \frac{dW}{dz} = \frac{y_1(1 - 2W^* - V^*) - y_1^2 - y_1y_2 - y_2W^*}{c} - \kappa_{11}y_1 - \kappa_{12}y_2 - \kappa_{13}y_3, \\ \frac{dV}{dz} = y_3 - \kappa_{21}y_1 - \kappa_{22}y_2 - \kappa_{23}y_3, \\ \frac{dZ}{dz} = cy_3 - ay_2(W^* - b) - ay_1y_2 - ay_1V^* - \kappa_{31}y_1 - \kappa_{32}y_2 - \kappa_{33}y_3. \end{cases} \quad (8.10)$$

A estratégia de controle proposta pode ser aplicada à problemas que envolvem duas espécies cuja relação é do tipo presa-predador, portanto, os coeficientes

bem como a distribuição das funções de controle são específicos de cada problema biológico.

8.2 Aplicação de uma estratégia de controle em um sistema biológico modelado pelo sistema de Lotka-Volterra modificado com difusão

Para fins de ilustração, considera-se um sistema biológico em que haja necessidade de liberar predadores para o controle de presas, que em termos matemáticos, corresponde a introdução da função de controle somente na segunda equação do sistema, que representa efetivamente a densidade de predadores. O sistema com controle para esse caso é dado por:

$$\begin{cases} \frac{dW}{dz} = \frac{y_1(1 - 2W^* - V^*) - y_1^2 - y_1y_2 - y_2W^*}{c}, \\ \frac{dV}{dz} = y_3 - \kappa_{21}y_1 - \kappa_{22}y_2 - \kappa_{23}y_3, \\ \frac{dZ}{dz} = cy_3 - ay_2(W^* - b) - ay_1y_2 - ay_1V^*. \end{cases} \quad (8.11)$$

Considerou-se também que esse sistema biológico apresenta desequilíbrio devido a fatores ocorridos de forma incomum e momentânea. Desse modo, a estratégia de controle é aplicada inicialmente até o sistema voltar a atingir o equilíbrio desejado.

A aplicação de controle nesse sistema biológico, que trata da interação da presa, a lagarta do soja, e um predador, considera os trabalhos de RAFIKOV; BALTHAZAR; VON BREMEN (2008) e MOLTER; RAFIKOV (2014), onde foram utilizados os valores $a = 0,17$, $K = 1000$ e $c_p = 0,000085$, referentes a equação (1.31). A partir deles, calcula-se o valor de $\bar{a}$ e $\bar{b}$ adimensionais, seguindo as relações (7.2), e os níveis de equilíbrio desejados (w^*, V^*, Z^*) . Com esses dados, é possível obter uma solução numérica diretamente do sistema (8.11) usando o *software Matlab*, pelo método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem e cinco estágios (BURDEN; FAIRES, 2008).

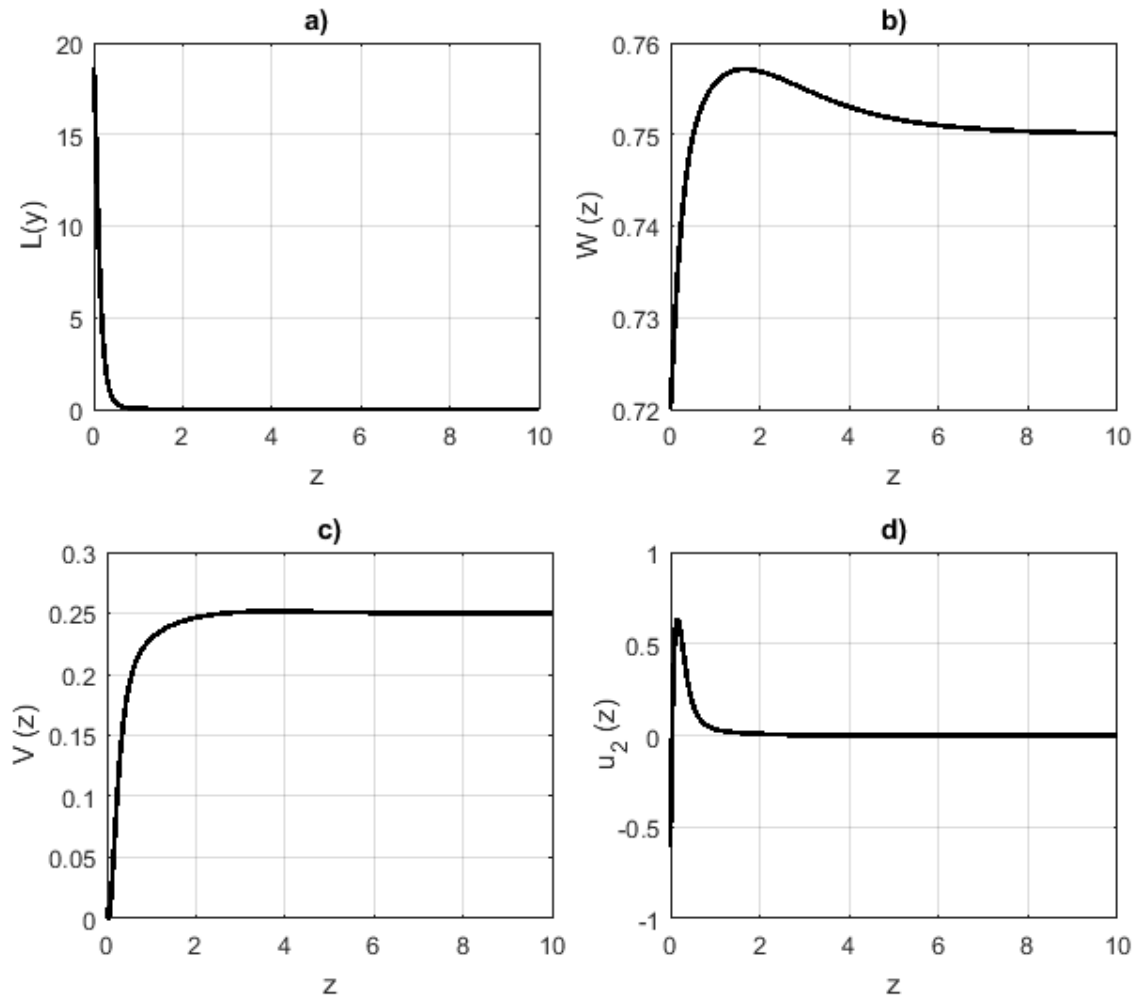


Figura 28: Para o sistema (8.11) com $R = 1$, $Q = 100 \cdot I_3$ e $\kappa = 10^3[-0.1336 \ 0.0141 \ 2.5912]$ com e $b = 0,75$ condição inicial $W_0 = 0,72$, $V_0 = 0,01$ e $Z_0 = 0$ tem-se: a) função $L(y)$, positiva definida; b) trajetória para $W(z)$; c) trajetória para $V(z)$; e d) trajetória para função de controle $u_2(z)$.

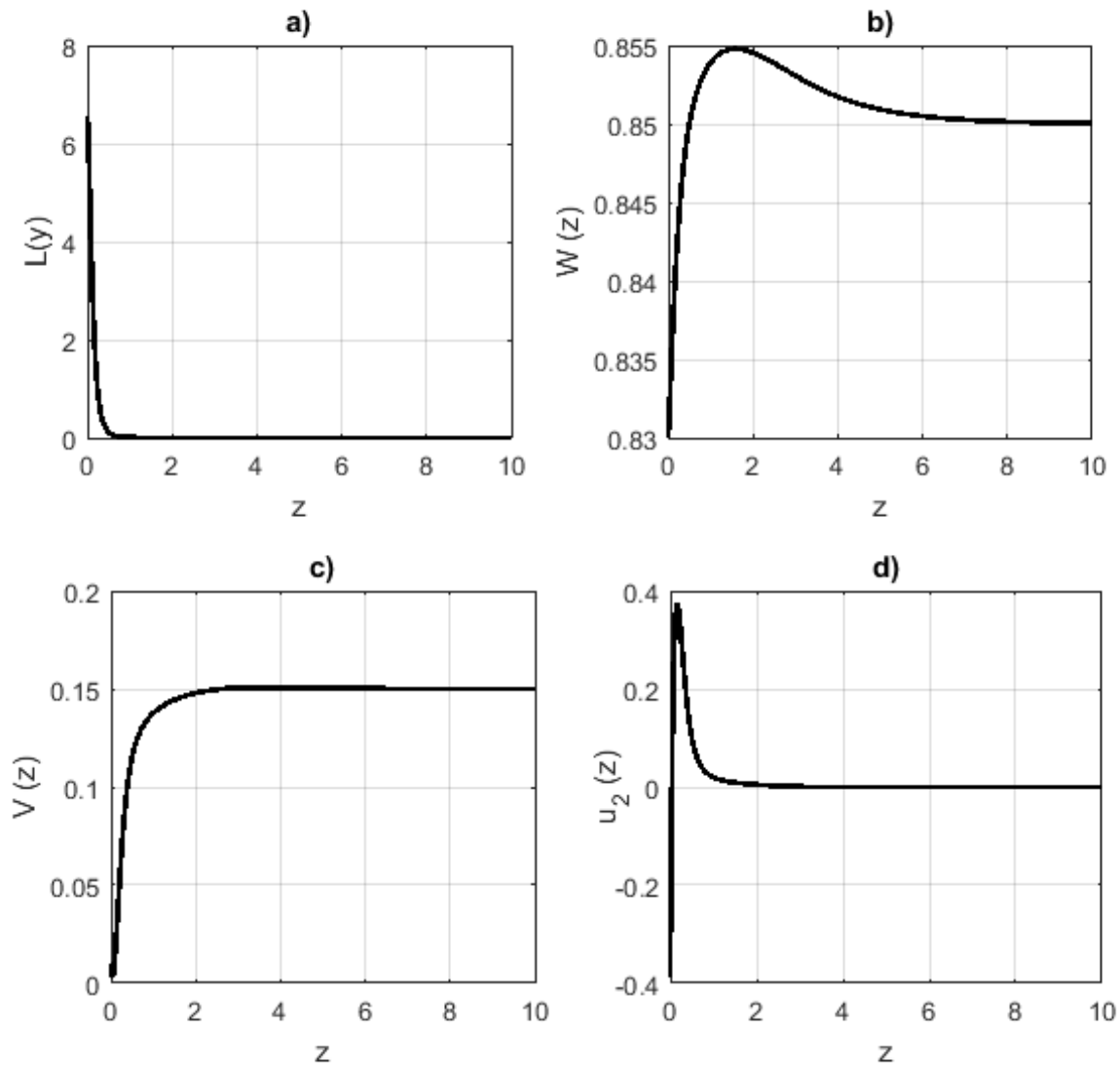


Figura 29: Para o sistema (8.11) com $R = 1$, $Q = 100 \cdot I_3$ e $\kappa = 10^3[-0.1185 \ 0.0142 \ 3.9159]$ e $b = 0,85$ com condição inicial $W_0 = 0,83$, $V_0 = 0,01$ e $Z_0 = 0$ tem-se: a) função $L(y)$, positiva definida; b) trajetória para $W(z)$; c) trajetória para $V(z)$; e d) trajetória para função de controle $u_2(z)$.

Nas figuras 28 e 29, representam-se as trajetórias do sistema controlado. Em a) tem-se a função $L(y)$, que conforme o teorema 1, no capítulo 3, é positiva para garantir a convergência do sistema de controle. Nos gráfico em b) e c) estão as trajetórias das presas $W(z)$ e dos predadores $V(z)$, respectivamente, e em d) encontra-se as funções de controle.

Para essa aplicação, considerou-se uma condição inicial abaixo do nível de equilíbrio desejado. Nota-se que, da mesma forma que ocorreu com a aplicação de controle na equação de Fisher-Kolmogorov, a função de controle assume nos primeiros momentos valores negativos. Isso ocorre pois inicialmente não há atuação do

controle, que passa a atuar somente quando a densidade populacional de presas se aproxima do nível desejado, e então é efetuada a liberação de predadores.

Cabe ressaltar que a liberação de predadores aqui não é realizada de forma periódica e contínua, mais sim ocorrerá somente no período inicial. E ainda, essa estratégia de controle define somente a presa, através dos parâmetros a que corresponde a taxa de crescimento intrínseco e c_p , que indica a taxa de sucesso de captura quando o predador encontra a presa, e a partir disso, caracteriza-se a taxa de mortalidade do predador d .

Na figura 28, considerou-se $\bar{a} = 0,5$, $\bar{b} = 0,75$ e os níveis de equilíbrio: $W^* = 0,75$, $V^* = 0,25$ e $Z^* = 0$ que caracteriza um predador cujo coeficiente de mortalidade é dado por $d = 0,06375$. E na figura 29, considerou-se $\bar{a} = 0,5$, $\bar{b} = 0,85$ e os níveis de equilíbrio: $W^* = 0,85$, $V^* = 0,15$ e $Z^* = 0$ que caracteriza um predador com coeficiente de mortalidade do predador $d = 0,07225$.

Assim, nessa estratégia, nota-se que para uma presa dada, pode-se caracterizar o predador e ainda, alterar o nível de equilíbrio desejado $(b, 1 - b)$, para outros valores. Portanto, concluí-se que essa estratégia por ser utilizada considerando outros sistemas biológicos em que se conhece alguns dados da praga (taxa de crescimento intrínseco e a taxa de sucesso da captura quando o predador encontra a presa) e, a partir deles, é possível calcular o coeficiente de mortalidade do predador e consequentemente indicar qual o predador ideal que levará o sistema biológico em questão ao nível de equilíbrio desejado.

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS

Nesse trabalho, inicialmente foram estudados alguns modelos clássicos da dinâmica populacional, como os modelos de Malthus, Verhulst e o sistema de Lotka-Volterra, que descrevem o crescimento populacional para uma ou mais espécies. Buscou-se compreendê-los a fim de identificar as suas vantagens e as suas limitações. Além do estudo da variação da densidade ao longo do tempo, foi realizado também a análise dos modelos que incluíam a variação espacial, com o propósito de obter uma representação mais realística dos sistemas biológicos. Após, organizou-se um apanhado teórico dos principais métodos e procedimentos matemáticos, bem como de algumas técnicas de controle, utilizados como base no desenvolvimento de todo o trabalho.

Apresentaram-se modelos do tipo reativo-difusivo que descrevem a dispersão de indivíduos em uma dimensão em um intervalo de tempo contínuo. Foi mostrado que a equação de Fisher-Kolmogorov representa a interação de uma espécie com o meio. A solução desta equação possui comportamento dissipativo em forma de onda, que permitiu realizar a análise de estabilidade a fim de compreender o comportamento do sistema biológico qualitativamente e encontrar uma solução analítica aproximada através do método da perturbação.

Nesse caso, apesar de ser um problema de perturbação singular, pois ε multiplica a derivada de maior grau da equação, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, tem-se que os termos dominantes constituem uma EDO de primeira ordem não linear, cuja solução é analítica e exata, e satisfaz as condições de contorno, que são valores constantes. Desse modo, foi possível encontrar uma solução tratando esse problema como uma perturbação regular. Como o objetivo era obter uma solução aproximada, buscou-se apresentar a diferença gerada da solução exata (desconhecida) substituindo-a na equação de Fisher-Kolmogorov. Foi percebido que as soluções encontradas pelo método da perturbação são boas aproximações, tanto para a EDO como para a EDP, pois conforme $z \rightarrow \pm\infty$, o erro tendia a zero.

Analizou-se também a equação de Fisher-Kolmogorov bidimensional no espaço e pôde-se constatar que a essa equação não possui solução do tipo frente de onda,

devido ao termo $1/r$, não admitindo redução de uma EDP para uma EDO na variável de onda $z = x - ct$, e ao mesmo tempo, para valores de r grande, o termo tende a zero e se torna insignificante. Logo, teria-se novamente a equação de Fisher-Kolmogorov contudo, em coordenadas polares, o que justifica o estudo mais detalhado da equação somente uma dimensão.

Além do estudo detalhado da equação de Fisher-Kolmogorov, objetivando conhecer seu comportamento sem nenhum tipo de intervenção, foi apresentado uma estratégia de controle linear aplicada na equação após redução para um sistema de duas EDOs através da teoria de solução por onda viajante. Essa estratégia de controle biológico propõe a retirada de indivíduos da espécie em questão, e necessita de dados conhecidos como: a condição inicial da população e os níveis de equilíbrio desejados abaixo de danos econômicos e ecológicos, que são obtidos a partir dos experimentos. Desse modo, essa estratégia mostra a atuação do controlador quando se inicia a aplicação de controle até a estabilização do sistema biológico nos níveis desejados.

Para ilustrar a eficácia da estratégia de controle ótimo linear para sistemas não lineares, introduzida no modelo de Fisher-Kolmogorov, considerou-se um sistema biológico composto por plantas aquáticas (aguapés) em águas poluídas, cujos dados experimentais foram retirados do trabalho de KAWAI; GRIECO (1983).

No estudo desse mesmo sistema biológico surgiu outra alternativa de aplicação de controle. Em COSTA et al. (2003), o crescimento de aguapés foi modelado pela equação logística, que considera somente a variação do tempo nesse processo. Aqui, propôs-se a descrição do crescimento da espécie ao longo do tempo e do espaço, através da equação de Fisher-Kolmogorov, e a aplicação de controle diretamente no modelo descrito pela EDP. Para isso, foram retomadas as ideias do trabalho de COSTA et al. (2003), que apresenta uma metodologia para o controle de aguapés utilizando controle ótimo no modelo logístico (EDO). A partir disso, admitiu-se a existência de uma função de controle $u(x, t)$ para o modelo em EDP com as mesmas características da função de controle $u(t)$ obtida para o modelo em EDO. Com a introdução dessa estratégia de controle no modelo em EDP, obteve-se uma equação linear cuja solução pôde ser determinada pela transformada finita de Fourier.

Além disso, justificou-se que a análise desse sistema biológico somente em uma dimensão equivale a análise em duas dimensões devido a densidade populacional ser a mesma para qualquer posição num círculo centrado na origem, num determinado instante de tempo. Através de algumas simulações, foi possível perceber que a estratégia adotada controlou o sistema biológico, levando-o aos níveis de equilíbrio desejados.

Após o estudo da equação de Fisher-Kolmogorov unidimensional e bidimensional sem a intervenção de controladores e com a aplicação de estratégias de controle,

considerou-se o sistema de Lotka-Volterra modificado com difusão, em que buscou-se, na medida do possível, estudar esse modelo com a mesma metodologia adotada para a equação de Fisher-Kolmogorov.

O sistema de Lotka-Volterra modificado com difusão representa a interação de duas espécies, cuja relação entre elas é do tipo presa-predador. Nesse modelo, assume-se que a única fonte de alimento do predador é a presa, e a mesma cresce até atingir a capacidade de suporte do meio em que está inserida. Para o estudo desse sistema sem influência de controladores, realizou-se a adimensionalização dos parâmetros e das variáveis e considerou-se a existência de ondas que viajam sem mudar a sua forma. Assim, foi possível encontrar um sistema não linear de duas EDOs. Para fins de simplificação, considerou-se o coeficiente de difusão da presa um valor muito pequeno quando comparado ao coeficiente de difusão do predador, cuja relação de $D = D_1/D_2$ é algo muito próximo a zero, e obtém-se um sistema de três equações diferenciais de primeira ordem ao invés de quatro equações. Numa situação real, essa simplificação pode ser interpretada como sendo um sistema cuja difusão dos predadores é maior que a da presa, acarretando em uma predação mais intensa, pois haveria mais contato entre predador e presa.

Para o sistema não linear de três equações diferenciais de primeira ordem não foi possível obter uma expressão analítica para a solução exata, portanto propôs-se compreender o seu comportamento a partir da análise de estabilidade. Três pontos críticos foram encontrados, dois deles instáveis e um assintoticamente estável, permitindo duas interpretações sobre esse sistema. Ou seja, existem duas soluções, nesse caso obtidas numericamente, considerando a teoria de solução por onda viajante que saem de um dos pontos instáveis e vão para o ponto assintoticamente estável. Uma delas considera que há inserção de predadores quando a presa encontra-se no nível máximo, ou seja, quando atingiu a capacidade de suporte, e a outra representa que há inserção de presa e predadores no mesmo tempo, espaço e densidade mínima.

Após esse estudo, aplicou-se as técnicas da teoria de controle ótimo linear para sistemas não lineares no sistema de Lotka-Volterra com difusão, após a redução pela teoria de solução por onda viajante e a simplificação $D \approx 0$. Nesse sistema, cuja interação entre as espécies é do tipo presa-predador, a utilização desse tipo de estratégia de controle tem por objetivo controlar a quantidade de presas através da liberação de predadores.

Para ilustrar a eficácia da estratégia de controle, considerou-se um sistema biológico que está em desequilíbrio por determinado fator, esse ocorrido de forma incomum e momentânea, em que a estratégia de controle é aplicada até o sistema voltar a atingir o equilíbrio desejado. Nesse caso, somente foi definido a presa, lagarta da soja, e caracterizado o predador como também os níveis de equilíbrio desejado.

Destaca-se que essa aplicação pode ser realizada em outros sistemas biológicos,

em que alguns dados da praga são conhecidos, como a taxa de crescimento intrínseco e a taxa de sucesso da captura quando o predador encontra a presa. Com esses valores calcula-se o coeficiente de mortalidade do predador e assim, é possível indicar qual o predador ideal, dentro daquele sistema e dos objetivos da aplicação de controle.

De modo geral, a principal contribuição deste trabalho, é de cunho metodológico, onde considerou-se o modelos de difusão-reação: equação de Fisher-Kolmogorov e o sistema modificado de Lotka-Volterra com difusão, em que foi assumido a existência de uma solução do tipo onda viajante, simplificando as EDPs em EDOs e possibilitando assim a aplicação de estratégias de controle ótimo linear realimentado. Ilustrou-se a eficácia dessas estratégias de controle através de dois sistemas biológicos: aguapés em águas poluídas e em um sistema presa predador onde a presa foi a lagarta da soja e o predador foi caracterizado. Ambas as estratégias de controle estabilizaram os sistemas biológicos nos níveis de equilíbrio desejados, de acordo com os valores dos experimentos.

Cabe ressaltar que os três primeiros capítulos deste trabalho correspondem a uma breve revisão bibliográfica, que constitui a base para o desenvolvimento dos demais capítulos. Já os capítulos 4 e 7 competem ao estudo detalhado da equação de Fisher-Kolmogorov e do sistema de Lotka-Volterra modificado com difusão, ambos sem a aplicação de reguladores. Nos capítulos 5, 6 e 8 está o grande diferencial desse trabalho. Mas especificamente, os capítulos 5 e 8 reúnem a utilização da teoria de solução por onda viajante para simplificar os modelos compostos por EDPs em EDOs, e a partir disso, torna-se possível a aplicação da teoria de controle ótimo linear para sistemas não lineares descritos por EDOs. E o capítulo 6 foi produto de um estudo mais criterioso sobre o sistema biológico: aguapés em águas poluídas, em que foi possível propor uma função de controle, com base em pesquisas anteriores, introduzida diretamente no modelo de Fisher-Kolmogorov.

Como trabalhos em andamento, têm-se: a aplicação do métodos perturbativos no sistema de Lotka-Volterra modificado com difusão, para encontrar uma solução aproximada em função de um parâmetro pequeno ε ; e o estudo de um sistema biológico que necessita, introdução de estratégias de controle, cujo comportamento é dada pelo sistema de Lotka-Volterra com difusão modificado.

Como perspectivas futuras, pretende-se analisar o crescimento populacional considerando uma espécie interagindo com seu habitat e duas espécies, cuja interação é do tipo presa predador, considerando modelos discretos, em que é possível levar em consideração características, como por exemplo, o ciclo de vida das populações, bem como a fase de maturação para a reprodução.

Por fim, esse trabalho almeja contribuir em pesquisas futuras na área da biomatemática, a partir da utilização da metodologia aqui proposta, que pode ser aplicada considerando outros sistemas biológicos cujo comportamento é descrito pelos mode-

los de reação-difusão estudados, que necessitam da aplicação de controle para que os níveis de equilíbrio desejados mantenham-se abaixo de danos econômicos e/ou biológicos.

REFERÊNCIAS

BAKHVALOV, N. S.; PANASENKO, G. **Homogenisation**: Averaging Processes in Periodic Media. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Editora Contexto, 2002.

BAUMEISTER, J.; LEITÃO, A. **Introdução à teoria de controle e programação dinâmica**. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

BELLMAN, R. **Dynamic programming**. New Jersey: Courier Corporation, 2013.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise numérica**. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

COSTA, R.; ZANOTELLI, C.; HOFFMANN, D.; BELLI FILHO, P.; PERDOMO, C.; RAFIKOV, M. Optimization of the treatment of piggery wastes in water hyacinth ponds., **Water Science and technology**, v.48, n.2, p.283–289, 2003.

DE VRIES, G.; HILLEN, T.; LEWIS, M.; MULLER, J.; SCHÓNFIŠCH, B. **A course in mathematical biology**: quantitative modeling with mathematical and computational methods. Philadelphia: Siam, 2006. v.12.

DUAN, N. Optimal control problem for the extended Fisher-Kolmogorov equation., **Proceedings-Mathematical Sciences**, v.126, n.1, p.109–123, 2016.

DUNBAR, S. R. Traveling waves in diffusive predator-prey equations: periodic orbits and point-to-periodic heteroclinic orbits., **SIAM Journal on Applied Mathematics**, v.46, n.6, p.1057–1078, 1986.

EDELSTEIN-KESHET, L. **Mathematical models in biology**. New York: SIAM - Society for Industrial and Applied Mathematics, 1988. v.46.

EL-GOHARY, A.; AL-RUZAIZA, A. Optimal control of the equilibrium state of a prey-predator model., **Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences**, v.6, n.1, p.27–36, 2002.

EL-GOHARY, A.; YASSEN, M. Optimal control and synchronization of Lotka–Volterra model., **Chaos, Solitons & Fractals**, v.12, n.11, p.2087–2093, 2001.

FALEIROS, A.; YOUNEYAMA, T. **Teoria matemática de sistemas**. São José dos Campos, ITA: Arte & Ciência, 2002.

FELTRIN, C. C.; RAFIKOV, M. Aplicação da função de Lyapunov num problema de controle ótimo de pragas., **TEMA: Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, v.3, n.2, p.83–92, 2002.

FISHER, R. A. The Wave of Advance of Advantageous Genes., **Annals of Eugenics**, v.7, p.353–369, 1937.

GOH, B. Optimal control of a fish resource., **Malayan Scientist**, v.5, p.65–70, 1969.

GOH, B. **Management and analysis of biological populations**. New York: Elsevier, 1980.

HASTINGS, A. **Population biology: concepts and models**. New York: Springer, 1977.

HINCH, E. J. **Perturbation methods**. New York: Cambridge University Press, 1991.

HOLMES, M. H. **Introduction to perturbation methods**. New York: Springer, 2013.

KAWAI, H.; GRIECO, V. M. Utilização do aguapé para tratamentos de esgoto doméstico; estabelecimento de critérios de dimensionamento de lagoa de aguapé e abordagem de alguns problemas operacionais., **Revista DAE**, v.43, n.135, p.79–80, 1983.

KEVORKIAN, J.; COLE, J. D. **Perturbation methods in applied mathematics**. New York: Springer, 1981.

KOLMOGOROV, A. N.; PETROVSKY, I.; PISKUNOV, N. A study of the equation of diffusion with increase in the quantity of matter, and its application to a biological problem., **Moscow University Mathematics Bulletin**, v.1, p.1–25, 1937.

KOT, M. **Elements of mathematical ecology**. New York: Cambridge University Press, 2001.

LI, H.-X.; QI, C. **Spatio-temporal modeling of nonlinear distributed parameter systems: a time/space separation based approach**. New York: Springer Netherlands, 2011.

- LOGAN, J. D. **An introduction to nonlinear partial differential equations**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2008.
- LOGAN, J. D. **Applied partial differential equations**. New York: Springer, 2014.
- LOTKA, A. **Elements of Physical Biology**. Baltimore: Williams and Wilkins, 1925.
- MALTHUS, T. R. **An essay on the principle of population**. New York: J.M. Dent, London and E.P. Dutton, 1798. v.1.
- MEDRANO-BALBOA, R. A. **Métodos Matemáticos Da Física VI: Transformadas Integrais**. São Paulo: Instituto de Pesquisas Espaciais (INPE), Abril, 1989.
- MOLTER, A.; RAFIKOV, M. Controle de um regime caótico do sistema Lotka-Volterra., **TEMA: Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, v.5, n.2, p.239–248, 2004.
- MOLTER, A.; RAFIKOV, M. Nonlinear optimal control of population systems: applications in ecosystems., **Nonlinear Dynamics**, v.76, n.2, p.1141–1150, 2014.
- MURRAY, J. **Mathematical Biology I: An Introduction**. New York: Springer, 2001. v.17.
- MURRAY, J. **Mathematical Biology. II Spatial Models and Biomedical Applications**. New York: Springer, 2003. v.18.
- NAIDU, D. S. **Optimal Control Systems**. New York: CRC PRESS LLC, 2003.
- NAYFEH, A. H. **Perturbation methods**. Weinheim: WILEY-VCH Verlag GmbH & Co., 2004.
- OGATA, K.; MAYA, P. I.; LEONARDI, F. **Engenharia de controle moderno**. Rio de Janeiro: Prentice Hall, 2003.
- OTTO, S. P.; DAY, T. **A biologist's guide to mathematical modeling in ecology and evolution**. New Jersey: Princeton University Press, 2011.
- PONTRYAGIN, L.; BOLTYANSKII, V.; GAMKRELIDZE, R.; MISCHENKO, E. **The Mathematical Theory of Optimal Processes**. New York: Interscience Publishers, 1962.
- PRICE, P. W. **Evolutionary biology of parasites**. New Jersey: Princeton University Press, 1980. v.15.
- RAFIKOV, M. Aplicação de teoria de controle ótimo em dinâmica populacional. In: **Anais do I Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações, SBMAC**, São Carlos, p.311–340, 2002.

RAFIKOV, M.; BALTHAZAR, J. Síntese do controle ótimo linear feedback para sistemas que exibem caos., **In: III Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações**, p.619–633, 2004.

RAFIKOV, M.; BALTHAZAR, J. M. Aplicações de funções de Lyapunov no controle ótimo de regimes caóticos de sistemas populacionais. **In: II Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicação**, São José dos Campos, v.2, p.934–955, 2003.

RAFIKOV, M.; BALTHAZAR, J. M. Optimal pest control problem in population dynamics., **Computational & Applied Mathematics**, v.24, n.1, p.65–81, 2005.

RAFIKOV, M.; BALTHAZAR, J. M. On control and synchronization in chaotic and hyper-chaotic systems via linear feedback control., **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v.13, n.7, p.1246–1255, 2008.

RAFIKOV, M.; BALTHAZAR, J. M.; VON BREMEN, H. Mathematical modeling and control of population systems: applications in biological pest control., **Applied Mathematics and Computation**, v.200, n.2, p.557–573, 2008.

RAFIKOV, M.; MALEICO, E. Controle ótimo de pragas com base no modelo generalizado de presa-predador., **TEMA: Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, v.1, n.1, p.215–222, 2000.

RAY, W. H. **Advanced process control**. New York: McGraw-Hill Companies, 1981.

SABETI, M. **Soluções de ondas viajantes em um sistema difusivo predador-presa não local**. 2007. Dissertação de mestrado — Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Curitiba, 106 p.

SCHMID, A. B. **Controle ótimo de sistemas populacionais que exibem caos**. 2004. Dissertação de mestrado — Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul - UNIJUÍ, Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Ijuí, 96 p.

SHAMPINE, L. F.; KIERZENKA, J.; REICHELT, M. W. Solving boundary value problems for ordinary differential equations in MATLAB with bvp4c., **Tutorial notes**, v.2000, p.1–27, 2000.

SOARES, M. **Solução de um problema não linear do tipo reação-difusão na modelagem dispersão de insetos. Dissertação de Mestrado**. 2002. Dissertação de mestrado — Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada. Universidade Federal do Rio Grande do Sul/RS, Porto Alegre, 182 p.

TANG, S.; CHEKE, R. A. Models for integrated pest control and their biological implications., **Mathematical Biosciences**, v.215, n.1, p.115–125, 2008.

TUSSET, A.; RAFIKOV, M. Controle ótimo de pragas com base nos modelos linearizados, minimizando o funcional quadrático., **In: Anais do II Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações**, v.2, p.1196–1205, 2003.

VERHULST, P. Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population., **Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles**, v.18, p.14–54, 1845.

VERHULST, P.-F. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. correspondance mathématique et physique publiée par a., **Quetelet**, v.10, p.113–121, 1838.

VOLTERRA, V. **Variations and Fluctuations of the Number of Individuals in Animal Species living together**. Rome: C. Ferrari, 1927.

WYSE, A. **Controle ótimo do vetor da malária para o modelo matemático sazonal**. 2007. Tese de doutorado — Laboratório Nacional de Computação Científica, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Petrópolis, Rio de Janeiro, 130 p.

ANEXO A TEORIA DE ESTABILIDADE GLOBAL: ESTABILIDADE DE LYAPUNOV

Nesse anexo apresentam-se alguns teoremas e definições da teoria de estabilidade local (primeiro método) e global (segundo método) na concepção de Lyapunov, que foi utilizada na teoria de controle no capítulo 3 e na aplicação, no capítulo 5, 6 e 8. Como referência foram utilizados BOYCE; DIPRIMA (2015).

A.1 Primeiro Método de Lyapunov

O Primeiro Método de Lyapunov também é conhecido como o método indireto ou método da linearização e permite investigar a estabilidade local de um sistema não-linear através do seu modelo linearizado. Os sistemas não lineares são aproximados por truncamento da representação em série de Taylor em torno dos pontos de equilíbrio e a sua estabilidade é estudada através dos autovalores.

Seja o sistema:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \beta), \quad (\text{A.1})$$

onde x_E é o ponto de equilíbrio de (A.1) corresponde a uma excitação constante $\beta(t) = \beta_E$:

$$f(x_E, \beta_E) = 0. \quad (\text{A.2})$$

Equivalendo a uma entrada perturbada $\beta = \beta_E + \nu$, o estado perturbado é do tipo $x = x_E + \epsilon$, atendendo ao sistema (A.1), assim tem-se:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(x_E + \epsilon)}{dt}, \quad (\text{A.3})$$

$$= \frac{dx_E}{dt} + \frac{d\epsilon}{dt}, \quad (\text{A.4})$$

onde $dx_E/dt = 0$, pois se trata da derivada no ponto de equilíbrio e de $d\epsilon/dt$ obtém-se:

$$\frac{d(x - x_E)}{dt} = \frac{dx}{dt} = f(x, \beta), \quad (\text{A.5})$$

$$= f(x_E + \epsilon, \beta_E + \nu), \quad (\text{A.6})$$

$$= f(x_E, \beta_E) + \frac{dx}{dt} f(x_E, \beta_E) \epsilon + \frac{d\beta}{dt} f(x_E, \beta_E) \nu + O(\|\epsilon\nu\|), \quad (\text{A.7})$$

em que $f(x_E, \beta_E) = 0$. Dessa forma, encontra-se o modelo linearizado dado por:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{dx}{dt} f(x_E, \beta_E) \epsilon + \frac{d\beta}{dt} f(x_E, \beta_E) \nu. \quad (\text{A.8})$$

Teorema 3 (*Primeiro Método de Lyapunov*)

(i) Se o modelo linearizado (A.8) é assintoticamente estável, então o sistema original (A.1) é assintoticamente estável em torno de x_E .

(ii) Se o modelo linearizado (A.8) é instável, então o sistema original (A.1) é instável em torno de x_E .

Pode-se observar que se o modelo linearizado (A.8) é estável, mas não assintoticamente estável, ou seja, se algum autovalor de λ se localiza sobre o eixo imaginário, então nada se pode afirmar sobre o sistema original (A.1).

A.2 Segundo Método de Lyapunov

O Segundo Método de Lyapunov, também conhecido como o método direto, é baseado em um conceito semelhante ao de energia. Para melhor compreensão, considerando-se um pêndulo simples de massa m_e e comprimento l , sob efeito de aceleração de gravidade g , uniforme na direção vertical e imerso em um meio viscoso com coeficiente ϱ , representado pela EDO:

$$m_e \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \varrho \frac{d\varphi}{dt} + m_e g \sin \varphi = 0, \quad (\text{A.9})$$

em que φ é o ângulo entre a haste do pêndulo e a vertical. As energias cinética E_c e energia potencial E_p são dadas por:

$$E_c = \frac{1}{2} m_e l^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2, \quad (\text{A.10})$$

e

$$E_p = m_e g l (1 - \cos \varphi). \quad (\text{A.11})$$

Assim, a energia total é dada por:

$$E_T = E_c + E_p, \quad (\text{A.12})$$

e se verifica por cálculos simples que:

$$\frac{dE_T}{dt} = -l \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \leq 0, \quad (\text{A.13})$$

$$-l \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = 0. \quad (\text{A.14})$$

Portanto, a energia do pêndulo decresce sempre que $d\varphi/dt \neq 0$, tendendo a E_T mínimo que, no caso ocorre para $(\varphi, d\varphi/dt) = (0, 0)$, onde também $dE_T/dt = 0$.

Definição 1 Uma função $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser definida positiva em uma vizinhança $C(0, \gamma)$ da origem com raio γ se $\forall x \in C(0, \gamma)$, $v \geq 0$ e $v = 0 \Rightarrow x = 0$.

Definição 2 Uma função $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser semi-definida positiva em uma vizinhança $C(0, \gamma)$ da origem com raio γ se $\forall x \in C(0, \gamma)$, $v \geq 0$ mas $v = 0 \nRightarrow x = 0$.

Definição 3 Uma função $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser globalmente definida positiva se é definida positiva em $C(0, \gamma)$ com $\gamma \uparrow \infty$.

Definição 4 Uma função $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser definida negativa em uma vizinhança $C(0, \gamma)$ da origem com raio γ se $-v$ é definida positiva.

Pode-se destacar que as outras definições de função com os quantificativos: positivo, negativo, globalmente e semi-definida, são obtidas por analogia, como por exemplo: globalmente semi-definida negativa.

Teorema 4 (Segundo Método de Lyapunov: Estabilidade Local para Sistema Invariante no Tempo)

O sistema de ordem n , ou seja, $x(t) \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t)), \quad (\text{A.15})$$

$$f(0) = 0, \quad (\text{A.16})$$

é estável em uma vizinhança $C(0, \gamma)$ se existe uma função contínua $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$v \text{ é definida positiva em } C(0, \gamma), \quad (\text{A.17})$$

$$v(x(t)) \text{ possui derivadas contínuas em relação a } t, \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{dv(x(t))}{dt} \text{ é semi-definida negativa em } C(0, \gamma). \quad (\text{A.19})$$

Demonstração. Um ponto de equilíbrio 0 é estável se dado $\zeta > 0$ arbitrário, $\exists \sigma(\zeta) > 0$ tal que $x_0(t_0) \in C(0, \sigma) \Rightarrow x(t) \in C(0, \zeta)$. Dado $\zeta > 0$ seja $\partial C(0, \zeta)$ a fronteira do $C(0, \zeta)$. Seja v_{min} o mínimo de $v(x)$ para $x \in \partial C(0, \zeta)$ e note que $v(x) < v_{min} \Rightarrow x \in C(0, \zeta)$. Seja σ tal que $\forall x \in C(0, \zeta), v(x) < v_{min}$. Se $x(t_0) \in C(0, \zeta)$ então $v(x(t)) < v_{min}$ para $t \geq t_0$, pois $dv(x(t))/dt \leq 0$ e $v(x(t_0)) \leq v(x(t))$ para $t \geq t_0$. Portanto $x(t) \in C(0, \zeta), \forall t \geq t_0$. c.q.d

Nota-se que uma função v que satisfaz as condições (A.17) é chamada de Função de Lyapunov.

Definição 5 Uma função: $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser radialmente ilimitada se:

$$\|x\| \uparrow \infty \Rightarrow v \uparrow \infty. \quad (\text{A.20})$$

Teorema 5 (Segundo Método de Lyapunov: Estabilidade Global para Sistema Invariante no Tempo)

O sistema de ordem n , ou seja $x(t) \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)), \quad (\text{A.21})$$

$$f(0) = 0, \quad (\text{A.22})$$

é globalmente estável se existe uma função contínua $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$v \text{ é definida positiva em } \mathbb{R}^n, \quad (\text{A.23})$$

$$v(x(t)) \text{ possui derivadas contínuas em relação a } t, \quad (\text{A.24})$$

$$\frac{dv(x(t))}{dt} \text{ é semi-definida negativa em } \mathbb{R}^n, \quad (\text{A.25})$$

$$v \text{ é radialmente ilimitada.} \quad (\text{A.26})$$

Demonstração: Similar ao caso local, Teorema 4, notando que para $\forall x(t_0) \in \mathbb{R}^n$, $v(x(t_0)) \leq v(x(t))$ em vista de $dv(x(t))/dt \leq 0$ e v ser radialmente ilimitada. c.q.d

ANEXO B CONTROLE ÓTIMO LINEAR REALIMENTADO: TEOREMAS E DEMONSTRAÇÕES

No trabalho de RAFIKOV; BALTHAZAR; VON BREMEN (2008) formulou-se uma estratégia de controle de pragas através da introdução de inimigos naturais, que tem por objetivo levar o sistema para o estado de equilíbrio:

$$X^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]^T \quad (\text{B.1})$$

em que a densidade de pragas é estabilizada sem danos econômicos, e que a população de predadores também é estabilizada em um nível suficiente para controlar a presa. Considera-se o modelo presa predador:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{B.2})$$

ou na forma de um vetor:

$$\frac{dX}{dt} = F(X). \quad (\text{B.3})$$

Pode-se supor que o a parte do lado direito de (B.3) é descrita com a soma de um termo linear e um termo não linear da seguinte forma:

$$\frac{dX}{dt} = AX + g(X), \quad (\text{B.4})$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz constante, e $g(x)$ é um vetor de funções contínuas e não lineares.

O modelo matemático que representa o sistema controlado pode ser descrito por:

$$\frac{dX}{dt} = AX + g(X) + BU, \quad (\text{B.5})$$

em que $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é o vetor de controle, e $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz constante. Nota-se que a escolha de A não é única e influencia na performance do resultado do controlador.

O vetor de controle que mantém o sistema (B.5) no estado de equilíbrio desejado (B.1) satisfaz a equação:

$$AX^* + g(X^*) + Bu^* = 0. \quad (\text{B.6})$$

De modo geral, o estado de equilíbrio (B.1) do sistema (B.4) com a constante $U = X^*$ pode ser instável. Para esse caso, a estratégia de controle é constituída em duas partes, ou seja, $U = u^* + u$. O controle por realimentação u em (B.5) de modo que o estado estacionário desejado torne-se assintoticamente estável.

Dessa forma, objetiva-se obter a equação modificada do sistema (B.5) sobre a solução no estado de equilíbrio (B.1). Para fazer isso, apresenta-se as novas variáveis:

$$y = X - X^*, \quad u = U - u^*. \quad (\text{B.7})$$

Substituindo a equação (B.7) em (B.5) e utilizando (B.6) obtém-se o sistema de erro (perturbado):

$$\frac{dy}{dt} = Ay + h(y) + Bu, \quad (\text{B.8})$$

em que:

$$h(y) = g(y + X^*) - g(X^*). \quad (\text{B.9})$$

O objetivo aqui é encontrar uma lei de controle u que conduz o sistema perturbado a um estado estável desejado. Sendo que o vetor y do sistema (B.8) pode ser considerado como o desvio da trajetória do sistema perturbado para a desejada.

No trabalho de RAFIKOV; BALTHAZAR (2008) foram apresentados resultados importantes sobre uma lei de controle que garante estabilidade para o seguinte sistema controlado não linear:

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + h(y) + Bu, \quad y(0) = y_0, \quad (\text{B.10})$$

onde $y \in \mathbb{R}^n$ é um vetor de estado $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz limitada, em que os elementos são dependentes do tempo, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é uma matriz constante, $u \in \mathbb{R}^m$ é um vetor de controle, e $h(y) \in \mathbb{R}^n$ é um vetor em que seus elementos são funções contínuas com $h(0) = 0$.

A seguir, enunciam-se e demonstram-se dois teoremas importantes conforme tem-se apresentado nos trabalhos de RAFIKOV; BALTHAZAR; VON BREMEN (2008) e RAFIKOV; BALTHAZAR (2008).

Teorema 6 (RAFIKOV; BALTHAZAR; VON BREMEN, 2008; RAFIKOV; BALTHAZAR, 2008) *Se existem as matrizes $Q(t)$ e $R(t)$, definidas positivas e Q é simétrica, tal que a função:*

$$l(y) = y^T Q y - h^T P y - y^T P h(y), \quad (\text{B.11})$$

sendo que $l(y) = y^T Q^* y$, conforme visto na seção 2.2, é definida positiva, então o controle linear realimentado:

$$u = -R^{-1} B^T P y, \quad (\text{B.12})$$

é ótimo, na medida que desloca o sistema não linear (B.10) de qualquer estado inicial ao estado final:

$$y(t_f) = 0, \quad (\text{B.13})$$

que minimiza o funcional:

$$J = \int_0^{t_f} [l(y) + u^T R u] dt, \quad (\text{B.14})$$

onde P é uma matriz simétrica definida positiva (para todo $t \in [0, t_f]$) é obtida através da matriz diferencial de Riccati:

$$P^T + P A + A^T P - P B R^{-1} B^T P + Q = 0, \quad (\text{B.15})$$

satisfaz a condição inicial:

$$P(t_f) = 0. \quad (\text{B.16})$$

Além disso, com o controle realimentado (B.12), existe uma vizinhança $\Theta_0 \subset \Theta$, $\Theta \subset R^n$, da origem tal que, se $y_0 \in \Theta_0$, a solução $y(t) = 0$, $t \geq 0$, do sistema controlado (B.10) é assintoticamente estável localmente, e $J_{min} = y_0^T P(0) y_0$.

Finalmente, se $\Theta = R^n$, então a solução $y(t) = 0$, $t \geq 0$ do sistema controlado (B.10) é assintoticamente estável globalmente.

Demonstração: Considera-se o controle linear realimentado (B.12) com a matriz P determinada pela equação algébrica de Riccati (B.15) que transfere o sistema não linear (B.10) de um estado inicial para um final (B.13), minimizando o funcional (B.14) onde a função precisa ser determinada. De acordo com regras da Programação Dinâmica sabe-se que se o mínimo do funcional (B.14) existe e v é uma função suave de condições iniciais, então satisfaz a equação de HJB dada por:

$$u_{min} \left(\frac{dv}{dt} + l(y) + u^T R u \right) = 0. \quad (\text{B.17})$$

Considerando a função de Lyapunov:

$$v = y^T P(t) y, \quad (\text{B.18})$$

em que $P(t)$ é uma matriz simétrica positiva e satisfaz a equação algébrica de Riccati

(B.15). Pode-se notar que a derivada da função v , avaliando uma trajetória ótima com controle (B.12) é:

$$v' = y'^T P(t)y + y^T P'(t)y + y^T P' y = \left[y^T A^T(t) + h^T(y) - y^T P(t)B (R^{-1})^T B^T \right] P(t)y + y^T P(t) [A(t)y + h(y) - BR^{-1}B^T P(t)y]. \quad (B.19)$$

Então substituindo na equação HJB (B.17), obtém-se:

$$y^T \left[P' + A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P \right] y + h^T P y + y^T P h(y) + l(y) = 0. \quad (B.20)$$

E conseqüentemente:

$$l(y) = y^T Q y - h^T(y) P y - y^T P h(y). \quad (B.21)$$

Pode-se observar que para a função definida positiva $l(y)$ e a matriz definida positiva R , a derivada da função (B.18) avaliada nas trajetórias ótimas do sistema (B.8) são dadas por $v' = -l(y) - u^T R u$, são negativas definidas. Dessa forma, a função de Lyapunov (B.18) controle o sistema (B.10) e é assintoticamente estável localmente. Integrando a derivada da função de Lyapunov (B.18) dada por $v' = -l(y) - u^T R u$ ao longo da trajetória ótima, obtém-se $J_{min} = y_0^T P(0) y_0$.

Por fim, se $\Theta = \mathbb{R}^n$, então a estabilidade assintótica global segue como uma consequência direta da condição radial ilimitada para a função de Lyapunov (B.15), $v(y) \rightarrow \infty$, quando $\|y\| \rightarrow \infty$.

Observa-se que de acordo com a teoria de controle ótimo de sistemas lineares com funcional quadrático, a solução da equação diferencial de Riccati (B.15) é uma matriz simétrica positiva definida para todas as matrizes simétricas positivas definidas e positivas semi-definidas, podendo concluir a prova do teorema. *c.q.d*

Considera-se ainda, em um caso particular do sistema perturbado (3.21) com matriz constante A , o problema de controle ótimo pode ser formulado em um intervalo de tempo com matrizes constantes B , Q e R . A lei de controle ótimo que garante estabilidade do sistema controlado (3.21) é determinado pelo seguinte teorema.

Teorema 7 (RAFIKOV; BALTHAZAR, 2004) *Se existem matrizes definidas positivas Q e R , em que Q é simétrica, tal que a função:*

$$l(y) = y^T Q y - h^T(y) P y - y^T P h(y), \quad (B.22)$$

é definida positiva. Então o controle realimentado linear:

$$u = -R^{-1} B^T P y, \quad (B.23)$$

é ótimo, na ordem de transferência do sistema (B.8) da condição inicial para o estado final:

$$y(\infty) = 0, \quad (\text{B.24})$$

minimizando o funcional:

$$J = \int_0^\infty [l(y) + u^T R u], \quad (\text{B.25})$$

onde P uma matriz simétrica positiva definida, é a solução da equação algébrica da equação de Riccati:

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0. \quad (\text{B.26})$$

Além do mais, com o controle realimentado (B.23), existe uma vizinhança $\Theta_0 \subset \Theta$, $\Theta \subset \mathbb{R}^n$, da origem tal que se $y_0 \in \Theta_0$, a solução $y(t) = 0$, $t \geq 0$, do sistema controlado (B.8) é assintoticamente estável localmente, e $J_{\min} = y_0^T P y_0$.

Por fim, se $\Theta = \mathbb{R}^n$, então a solução $y(t) = 0$, se o sistema controlado (B.8) é assintoticamente estável globalmente.

Do teorema (7), pode-se concluir que o sistema dinâmico de erro (B.8) controlado por um controle realimentado linear u é estável globalmente, e consequentemente, o sistema (B.5) controlado por:

$$u = U - u^*, \quad (\text{B.27})$$

tende ao estado de equilíbrio desejado (B.1).

Da teoria de controle ótimo é conhecido que o controle linear ótimo depende somente do comprimento relativo do estado e do controle ponderado da matriz Q e R do funcional quadrático. De acordo com isso, se uma escolha de Q e R não satisfaz a definição positividade de (B.22) sujeito a (B.26), valores maiores da diagonal de elementos da matriz Q com o mesmo valor de R podem ser experimentados.

ANEXO C PRODUÇÃO CIENTÍFICA

Parte do presente trabalho resultou na participação e na publicação em eventos, conforme relacionados a seguir:

- Anais de eventos com apresentação de trabalho:
 - FRIGHETTO, D. F.; LAUZ, J. B. ; JESUS, N. F. ; SEHNEM, R. ; CASTILLERO, J. B. ; FERNANDEZ, L. D. P. . Homogeneização matemática de meios micro-heterogêneos não periódicos mediante o método dos dois espaços. 2016. (Apresentação de Trabalho/Congresso). Disponível em: [http : //cti.ufpel.edu.br/siepe/arquivos/2016/CE03944.pdf](http://cti.ufpel.edu.br/siepe/arquivos/2016/CE03944.pdf).
 - JESUS, N. F. ; FRIGHETTO, D. F. ; LAUZ, J. B. ; SEHNEM, R. ; CASTILLERO, J. B. ; FERNANDEZ, L. D. P. . COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS DE DOIS ESPAÇOS E DE HOMOGENEIZAÇÃO ASSINTÓTICA EM MEIOS LOCALMENTE PERIÓDICOS.. In: XII Encontro de Pós-Graduação Universidade Federal de Pelotas, 2016, Pelotas. Anais 2016. Disponível em: [http : //cti.ufpel.edu.br/siepe/arquivos/2016/CE03421.pdf](http://cti.ufpel.edu.br/siepe/arquivos/2016/CE03421.pdf).
 - FRIGHETTO, D. F.; MOLTER, A. ; COSTA, C. P. . Solução da equação de Fisher-Kolmogorov para uma população controlada de plantas. 2016. (Apresentação de Trabalho/Congresso). In: Anais I Consosul. Disponível em: [http : //consosul.upf.br/images/anais2016/3_DaianeFrighetto.pdf](http://consosul.upf.br/images/anais2016/3_DaianeFrighetto.pdf).
 - FRIGHETTO, D. F.; MOLTER, A. ; COSTA, C. P. Técnicas analíticas de resolução de modelos Reação-Difusão. In. Congresso Nacional de Matemática Aplicada, XXXVII. São Paulo, 2017. São Paulo: UNIFESP, 2017. Disponível em: [https : //proceedings.sbmac.org.br/sbmac/issue/view/8/showToc](https://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/issue/view/8/showToc)
 - FRIGHETTO, D. F.; MOLTER, A. Controle Ótimo aplicado a um modelo de Reação-Difusão. In. Congresso Nacional de Matemática Aplicada, XXXVII. São Paulo, 2017. São Paulo: UNIFESP, 2017.

- FRIGHETTO, D. F.; MOLTER, A. ; COSTA, C. P. Controle ótimo aplicado num sistema biológico modelado pela equações de Fisher-Kolmogorov. In. Encontro Nacional de Modelagem Computacional, XX. Nova Friburgo - RJ, 2017. São Paulo: UNIFESP, 2017. Disponível em: <https://drive.google.com/open?id=1Cl8-87NNzouLJGKthL9QirzC5sDsCIC>
- FRIGHETTO, D. F.; MOLTER, A. ; COSTA, C. P. Solução aproximada para o modelo reativo-difusivo unidimensional para uma espécie: equação de Fisher-Kolmogorov. In. Encontro Nacional de Modelagem Computacional, XX. Nova Friburgo - RJ, 2017. São Paulo: UNIFESP, 2017. Disponível em: <https://drive.google.com/open?id=1Cl8-87NNzouLJGKthL9QirzC5sDsCIC>
- FRIGHETTO, D. F.; MOLTER, A. ; COSTA, C. P.; LAUZ, J. B. Aplicação de uma estratégia de controle não linear num sistema biológico modelado pela equação de Fisher-Kolmogorov. 2017. EN-POS 2017 (Apresentação de Trabalho/Congresso). Disponível em: http://consosul.upf.br/images/anais2017/FRIGHETTO_Daiane.pdf
- FRIGHETTO, D. F.; MOLTER, A. ; COSTA, C. P. Controle ótimo linear realimentado introduzido no sistema de Lotka-Volterra com difusão. 2017. II Consosul (Apresentação de Trabalho/Congresso). Disponível em: <http://cti.ufpel.edu.br/siepe/arquivos/2017/CE02998.pdf>
- Apresentação de trabalho
 - FRIGHETTO, D. F.; MOLTER, A. Controle de um sistema com reação-difusão. II Jornada de Matemática e Matemática Aplicada, Santa Maria.
- Periódico - Journal of Ecological Modelling. Situação: submetido.
 - FRIGHETTO, D. F.; MOLTER, A.; SOUZA, G. M. Spatio-temporal population control applied to management of aquatic plants. 2018;
- Periódico - Revista Mundi Engenharia, Tecnologia e Gestão (Mundi ETG). Situação: aceito para publicação.
 - FRIGHETTO, D. F.; COSTA, C. P.; MOLTER, A. Controle ótimo aplicado num sistema biológico modelado pela equação de Fisher-Kolmogorov. 2018.
 - FRIGHETTO, D. F.; COSTA, C. P.; MOLTER, A. Solução aproximada para o modelo reativo-difusivo unidimensional para uma espécie: equação de Fisher-Kolmogorov. 2018.

Análise de sistemas biológicos com difusão e controle populacional – Daiane Frighetto Frighetto



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS

Instituto de Física e Matemática

Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática



Dissertação

Análise de sistemas biológicos com difusão e controle populacional

DAIANE FRIGHETTO FRIGHETTO

Pelotas, 2018