

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
Instituto de Física e Matemática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática



Dissertação

Homogeneização matemática de meios micro-heterogêneos com estrutura periódica

Marcos Pinheiro de Lima

Pelotas, 2016

Marcos Pinheiro de Lima

**Homogeneização matemática de meios micro-heterogêneos com estrutura
periódica**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática

Orientador: Prof. Dr. Leslie Darien Pérez Fernández
Coorientador: Prof. Dr. Julián Bravo Castillero

Pelotas, 2016

Dados de catalogação na fonte:
Maria Beatriz Vaghetti Vieira – CRB 10/1032
Biblioteca de Ciência & Tecnologia - UFPel

L732h Lima, Marcos Pinheiro de
Homogeneização matemática de meios micro-heterogêneos com estrutura periódica / Marcos Pinheiro de Lima. – 141f. : il. – Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática. Universidade Federal de Pelotas. Instituto de Física e Matemática, 2016. – Orientador Leslie Darien Pérez Fernández ; coorientador Julián Bravo Castillero.
1.Meios micro-heterogêneos e periódicos. 2.Métodos assintóticos. 3.Variacionais de homogeneização.
4.Comportamento efetivo. I.Fernández, Leslie Darien Pérez. II.Castillero, Julián Bravo. III.Título.

CDD: 511.8

Marcos Pinheiro de Lima

Homogeneização matemática de meios micro-heterogêneos com estrutura periódica

Dissertação aprovada, como requisito parcial, para obtenção do grau de Mestre em Modelagem Matemática, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas.

Data da Defesa: 29 de fevereiro de 2016

Banca examinadora:


Prof. Dr. Leslie Darien Perez Fernández (Orientador)
Doutor em Matemática pelo Instituto de Cibernética, Matemática e Física, Cuba


Prof. Dr. Valdecir Bottega (PPGMMat/UFPel)
Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil


Prof. Dr. Claudio Zen Petersen (PPGMMat/UFPel)
Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil


Prof. Dr. Mário Lúcio Moreira (PPGFIS/UFPel)
Doutor em Química pela Universidade Federal de São Carlos, Brasil


Prof. Dr. Julio Cesar Ruiz Claeyssen (PPGMap/UFRGS)
Doutor em Matemática Aplicada pela Brown University, Estados Unidos

Dedico este trabalho a minha família que tem me apoiado durante toda minha trajetória acadêmica e de vida, a todos professores que contribuiram para minha formação, especialmente aos meus orientadores que confiaram a mim este rico trabalho.

AGRADECIMENTOS

Aos meus amados pais, Roberto e Inês que sempre estiveram me apoiando e incentivando.

Ao meu orientador Dr. Leslie, pela orientação, paciência, confiança, apoio e amizade.

Ao meu co-orientador Dr. Julián, pela amizade, sabedoria e inestimável ajuda.

À paciente Luana pelo companheirismo nos momentos bons e ruins.

Ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática que me oportunizou esta experiência.

E a Deus, por despertar me força, tranquilidade e sabedoria para encarar os momentos de dificuldade.

RESUMO

LIMA, Marcos Pinheiro de. **Homogeneização matemática de meios micro-heterogêneos com estrutura periódica.** 2016. 141 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2016.

O método de homogeneização assintótica permite transformar um problema sobre um meio micro-heterogêneo, periódico, caracterizado por coeficientes rapidamente oscilantes (problema original), em outro sobre um meio homogêneo (problema homogeneizado) assintoticamente equivalente ao heterogêneo. Os coeficientes das equações diferenciais correspondentes ao problema homogêneo são chamados coeficientes efetivos do meio heterogêneo. A obtenção de tais coeficientes efetivos depende da solução dos chamados problemas locais, ou seja, sobre a célula básica cuja replicação periódica gera o meio heterogêneo. Do ponto de vista matemático, é importante verificar a relação de proximidade entre as soluções dos problemas original e homogeneizado, o qual constitui a fundamentação da equivalência. De um ponto de vista prático, o método de homogeneização assintótica oferece uma metodologia para conhecer o comportamento macroscópico de meios heterogêneos, o qual é útil em diversas aplicações. O presente trabalho tem como objetivo o estudo desta técnica matemática de homogeneização para obtenção do comportamento efetivo de meios micro-heterogêneos, e aplicar o formalismo matemático que permite construir uma solução assintótica formal de problemas unidimensionais lineares, não lineares com coeficientes contínuos e contínuos por partes, assim como, justificar matematicamente a proximidade entre as soluções dos problemas original e homogeneizado. A fim de ilustrar os resultados teóricos, são estudados exemplos a partir de diferentes técnicas analíticas e numéricas. Além disso, para o caso em que o meio heterogêneo é um compósito, isto é, os coeficientes são constantes por partes, os resultados da homogeneização assintótica são comparados com aqueles obtidos a partir da abordagem alternativa da homogeneização variacional. Especificamente, esta abordagem, desenvolvida aqui para meios com comportamento constitutivo não linear, produz cotas para a energia efetiva e a lei efetiva de tal compósito.

Palavras-chave: Meios micro-heterogêneos e periódicos, Métodos assintóticos e variacionais de homogeneização, Comportamento efetivo.

ABSTRACT

LIMA, Marcos Pinheiro de. **Mathematic homogenization of micro-heterogeneous media with periodic structure.** 2016. 141 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2016.

The asymptotic homogenization method allows to transform a problem over a periodic micro-heterogeneous medium exhibiting rapidly oscillating properties (original problem), into another over a homogeneous medium (homogenized problem) asymptotically equivalent to the heterogeneous one. The coefficients of the differential equations corresponding to the homogeneous problem are called effective coefficients of the heterogeneous medium. Obtaining such effective coefficients depends on the solution of the so-called local problems over a basic cell, whose periodic replication generates the heterogeneous medium. From the mathematical point of view, it is important to verify the proximity between the solutions of the original and homogenized problems, which is the basis for the aforementioned equivalence. From the practical point of view, the asymptotic homogenization method offers a methodology to obtain the macroscopic behavior of heterogeneous media, which is useful in various applications. The present work aims at studying this mathematical homogenization technique for obtaining the effective behavior of micro-heterogeneous media, and apply the mathematical formalism that allows to construct a formal asymptotic solution of linear and nonlinear one-dimensional problems with continuous and piecewise-continuous coefficients, as well as to mathematically justify the proximity between the solutions of the original and homogenized problems. In order to illustrate the theoretical results, examples are studied by means of different analytical and numerical techniques. Furthermore, for the case in which the heterogeneous medium is a composite, that is, the coefficients are piecewise-constant, results from asymptotic homogenization are compared to those obtained from the alternative approach of variational homogenization. Specifically, this approach, developed here for media with nonlinear constitutive behavior, produces bounds for the effective energy and the effective law of such a composite.

Keywords: Micro-heterogeneous and periodics media, Asymptotic and variational methods of homogenization, Effective behavior.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Exemplo de materiais heterogêneos naturais.	12
Figura 2	Exemplo de materiais heterogêneos manufaturados.	13
Figura 3	Estrutura metodológica do trabalho.	18
Figura 4	Coeficiente de condutividade rapidamente oscilante limitado pelas constantes b e c , para algum ε pequeno.	20
Figura 5	Comportamento do coeficiente k^ε	49
Figura 6	Soluções u_0 , u^ε e $u^{(1)}$, para $\varepsilon = \frac{1}{16}$, e proximidade entre elas para $\varepsilon = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$	49
Figura 7	Solução do problema original ilustrado sob diversas perspectivas. . .	54
Figura 8	Solução do problema homogeneizado ilustrado sob diversas perspectivas.	55
Figura 9	Proximidade entre as soluções do problema original e do homogeneizado.	55
Figura 10	Caráter rapidamente oscilante do coeficiente a^ε para $n = 1$ e $t = 0$. .	64
Figura 11	Comportamento do coeficiente a^ε para diferentes valores de n	65
Figura 12	Comportamento do coeficiente efetivo $\hat{a}(t)$ para diferentes valores de n	69
Figura 13	Proximidade entre soluções u_0 , u^ε e $u^{(1)}$ para $t = 0.5$	70
Figura 14	Coeficiente continuamente diferenciável, positivo, limitado e rapidamente oscilante ($\varepsilon \rightarrow 0^+$) para o problema linear elíptico tridimensional.	83
Figura 15	Discretização da região Y para todo y_3 fixo.	84
Figura 16	Distribuição de pontos na malha.	86
Figura 17	Soluções dos problemas locais N_1 e N_2 , sendo $N_3 = 0$	87
Figura 18	Soluções assintótica (esquerda) e homogeneizada (direita).	90
Figura 19	Diferença entre as soluções assintótica e homogeneizada para $\varepsilon = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$	90
Figura 20	Compósito bifásico unidimensional de comprimento unitário e ε -periódico para $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$	107
Figura 21	Estimativas para a energia efetiva normalizada.	115
Figura 22	Cotas para a lei efetiva normalizada com relação a energia da fase linear.	117

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ε	parâmetro geométrico pequeno
x	variável global (macroscópica) ou lenta
y	variável local (microscópica) ou rápida: $y = \frac{x}{\varepsilon}$
D	domínio em \mathbb{R} , um conjunto aberto e conexo
$\varepsilon Y, Y$	região ocupada pela célula de periodicidade em x e y , respectivamente
\mathcal{Y}	região ocupada pela célula periódica geral em x , em particular, $\mathcal{Y} = \varepsilon Y$
∂D	contorno do domínio D
\overline{D}	fecho de D , isto é, $\overline{D} = D \cup \partial D$
$ D $	medida de D (volume, área, comprimento)
$u^{(\infty)}$	solução assintótica formal do problema
u^ε	solução exata do problema
\mathcal{L}	operador diferencial
e.a.	expansão assintótica
s.a.f.	solução assintótica formal
MHA	Método de Homogeneização Assintótica
$\langle \cdot \rangle$	operador de valor médio em D , isto é, $\langle \cdot \rangle = \frac{1}{ D } \int_D (\cdot) dx$
$L^2(D)$	espaço das funções $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ de quadrado integrável com a norma $\ u\ _{L^2(D)} = \sqrt{\int_D u^2 dx}$
$H^1(D)$	espaço das funções $L^2(D)$ cujas derivadas de primeira ordem também estão em $L^2(D)$ com norma $\ u\ _{H^1(D)} = \ u\ _{L^2(D)} + \left\ \frac{du}{dx} \right\ _{L^2(D)}$
$H_0^1(D)$	espaço das funções $H^1(D)$ que se anulam em ∂D
$C_{per}^\infty(D)$	espaço das funções D -periódicas infinitamente continuamente diferenciáveis
$H_{per}^1(D)$	fechamento de $C_{per}^\infty(D)$ com a norma de $H^1(D)$
$H^{-1}(D)$	espaço dual de $H_0^1(D)$

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
2 PRELIMINARES	19
2.1 Meios com estruturas heterogêneas e periódicas	19
2.2 Conceitos Fundamentais	20
2.2.1 Ordem	20
2.2.2 Expansão assintótica e solução assintótica formal	20
2.3 Método de homogeneização assintótica	21
2.3.1 Formalismo matemático do MHA	22
2.3.2 Relação de proximidade entre soluções	32
3 HOMOGENEIZAÇÃO DE MEIOS UNIDIMENSIONAIS CONTINUAMENTE MICROPERIÓDICOS	37
3.1 Equação de difusão	37
3.1.1 Formulação do problema	37
3.1.2 Aplicação do MHA	37
3.1.3 Relação de proximidade	45
3.1.4 Exemplo	48
3.2 Equação da onda	51
3.2.1 Formulação do problema	51
3.2.2 Aplicação do MHA	52
3.2.3 Relação de proximidade	53
3.2.4 Exemplo	54
3.3 Problema não linear	56
3.3.1 Equação de difusão com fluxo não linear	56
3.3.2 Exemplo	63
3.4 Alguns comentários sobre problemas com fluxo e fonte explicitamente dependentes da incógnita	70
4 HOMOGENEIZAÇÃO DE MEIOS MULTIDIMENSIONAIS CONTINUAMENTE MICROPERIÓDICOS	73
4.1 Formulação do problema	73
4.2 Aplicação do MHA	73
4.3 Relação de proximidade	77
4.4 Conservação da simetria	80
4.5 Conservação do caráter definido positivo	82
4.6 Exemplo	83

5 COTAS VARIACIONAIS PARA A ENERGIA EFETIVA E A LEI EFETIVA DE MEIOS MICROPERIÓDICOS HOMOGÊNEOS POR PARTES	92
5.1 Formulação do problema	92
5.2 Teoremas básicos	94
5.3 Homogeneização variacional	98
5.3.1 Princípios variacionais e cotas para a energia efetiva	98
5.3.2 Cotas para a lei efetiva	103
5.4 O MHA aplicada a compósitos unidimensionais	106
5.5 Um exemplo integrador	110
6 CONCLUSÕES	118
REFERÊNCIAS	121
ANEXO A PRINCÍPIOS DO MÁXIMO	128
A.1 Princípio do máximo generalizado para equações elípticas	128
A.2 Princípio do máximo generalizado para equações parabólicas	128
A.3 Princípio do máximo generalizado para equações hiperbólicas	129
ANEXO B MÉTODOS APLICADOS	130
B.1 Método dos Trapézios	130
B.2 Método de Simpson - Regra do 1/3	131
B.2.1 Unidimensional	131
B.2.2 Bidimensional	131
B.3 Método de Diferenças Finitas	133
B.3.1 Crank-Nicolson	133
B.3.2 Diferenças centradas	135
B.4 Método de Fourier para resolução do problema homogeneizado - Equação do Calor	136
ANEXO C PRODUÇÃO CIENTÍFICA	139

1 INTRODUÇÃO

Um material heterogêneo é formado por uma distribuição de domínios ocupados: (a) por diferentes materiais homogêneos chamados de fases, constituindo assim um compósito; ou (b) do mesmo material em diferentes estados, como um policristal (TORQUATO, 2002) ou um material funcionalmente graduado (SADD, 2005). Meios heterogêneos abundam na natureza e em produtos manufaturados. Por exemplo: dentre os meios naturais que apresentam heterogeneidade estão o osso - Figura 1(a), a atmosfera - Figura 1(b), o solo - Figura 1(c), o arenito, a madeira, os pulmões, os tecidos vegetais e animais, os agregados celulares, tumores; e dentre os feitos pelo homem destacam-se os diferentes tipos de compósito (laminados - Figura 2(a), granulares ou particulados - Figura 2(b), fibrosos, e combinações destes), sólidos celulares, géis, espumas, ligas metálicas, microemulsões, cerâmica - Figura 2(c) e copolímeros em bloco (TORQUATO, 2002).

A predição teórica das propriedades mecânicas, eletromagnéticas, e de transporte dos materiais heterogêneos tem uma longa e venerável história, atraindo a atenção de ícones da ciência, incluindo MAXWELL (1873), RAYLEIGH (1892), e EINSTEIN (1906). Geralmente, os fenômenos físicos de interesse associados a tais propriedades ocorrem na "microescala", chamada genericamente assim, pois pode ser da ordem de décimos de nanômetros (géis) até da ordem de metros (processos geológicos). Assim, assume-se que o comprimento característico l desta escala "microscópica" (aquele em que os domínios estão distribuídos, ou seja, em que ocorre a heterogeneidade) é muito maior que aquele da escala molecular, mas muito menor que o comprimento

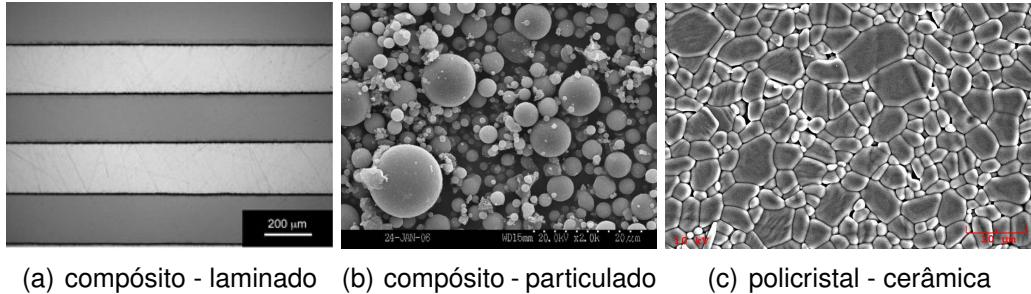


(a) osso humano

(b) atmosfera

(c) solo

Figura 1: Exemplo de materiais heterogêneos naturais.



(a) compósito - laminado (b) compósito - particulado (c) policristal - cerâmica

Figura 2: Exemplo de materiais heterogêneos manufaturados.

L característico da escala macroscópica, $l \ll L$. Em tais situações, dizemos que o material heterogêneo apresenta separação das escalas estruturais (caracterizada pelo parâmetro geométrico $\varepsilon = l/L$, $0 < \varepsilon \ll 1$), suas propriedades apresentam variação rápida com relação a posição e que cumpre a hipótese do contínuo, ou seja, ele pode ser visto como um contínuo na escala microscópica e, portanto propriedades macroscópicas ou efetivas podem lhe ser atribuídas (TORQUATO, 2002). Mais precisamente, a hipótese de homogeneidade equivalente estabelece que, na macro-escala, o material heterogêneo é fisicamente equivalente a certo material homogêneo, de maneira que as propriedades efetivas do primeiro são as propriedades do segundo (PANASENKO, 2008). Assim, ao processo de obtenção do comportamento efetivo do material heterogêneo dá-se o nome de “homogeneização”. Nos anos 1960s e 1970s apareceram as primeiras teorias matemáticas de homogeneização. A ideia inicial era encontrar uma solução assintótica das equações em derivadas parciais dependentes do parâmetro pequeno ε e com coeficientes rapidamente oscilantes que modelam o comportamento constitutivo do meio heterogêneo. Assim, a hipótese de homogeneidade equivalente seria válida se u^ε , solução das equações para o material heterogêneo, sujeitas a certas condições de contorno e/ou iniciais, fosse de u_0 , solução das equações com coeficientes constantes que descrevem o comportamento do material homogêneo equivalente, sujeito as mesmas condições do anterior, ε -próximo para alguma norma, ou seja, $\|u^\varepsilon - u_0\| = \mathcal{O}(\varepsilon)$ (PANASENKO, 2008).

Sob as hipóteses de separação de escalas e do contínuo, podemos especificar dois usos da homogeneização: a obtenção de uma boa aproximação da solução do problema original e a obtenção do comportamento efetivo do meio heterogêneo. Nos primeiros capítulos este trabalho enfoca o primeiro uso, enquanto no último capítulo está dedicado ao segundo uso. A primeira abordagem é o estudo da resposta do meio quando submetido a ação de influências externas que podem ser de naturezas mecânicas (carregamentos, trações), térmicas (fonte de calor), eletromagnéticas (campos elétricos ou magnéticos aplicados). Enquanto a segunda abordagem é a obtenção das propriedades intrínsecas do meio heterogêneo, ou seja, suas características próprias independentes das influências externas e que serão as res-

ponsáveis em estabelecer a resposta do meio a estas determinadas influências.

Trabalhos pioneiros na história da homogeneização são os de SANCHEZ-PALENCE (1970, 1980), DE GIORGI; SPAGNOLO (1973), MARCHENKO; KH-RUSLOV (1974), BAKHVALOV (1974, 1975a,b), OLEINIK (1975), BERDICHEVSKY (1975), BABUSKA (1976a,b,c), BENSOUSSAN; LIONS; PAPANICOLAU (1978), CH-RISTENSEN (1979), e BAKHVALOV; PANASENKO (1989). Desde então, devido à riqueza e diversidade de problemas fundamentais, assim como às múltiplas aplicações tecnológicas, o número de publicações nesta área tem crescido enormemente, por exemplo, OLEINIK; SHAMAEV; YOSIFIAN (1992), JIKOV; KOZLOV; OLEINIK (1994), MURAT; TARTAR (1998), CIORANESCU; DONATO (1999), CHERKAEV (2000), MILTON (2002), TORQUATO (2002), SAHIMI (2003), PANASENKO (2005), PAVLIOTIS; STUART (2008). Dentre as diversas aplicações da teoria de homogeneização, podemos citar, por exemplo: obtenção de propriedades acopladas inexistentes nos constituintes (magnetoelétrica: BENVENISTE (1995); piroelétrica e piromagnética: BRAVO-CASTILLERO et al. (2015)); otimização topológica: BENDSOE; SIGMUND (2003); projeto ótimo de materiais heterogêneos: TORQUATO (2010); biomecânica do osso: PARSELL; GRIMAL (2009), predição de falhas estruturais: PÉREZ-FERNÁNDEZ; BECK (2014); propagação de ondas sísmicas: CAPDEVILLE; GUILLOT; MARIGO (2010a,b); física de reatores nucleares: ALLAIRE; BAL (1999); transporte de uma espécie química: NG (2006).

Neste trabalho, destaca-se sobretudo o método de homogeneização assintótica (MHA), o qual permite obter uma aproximação da solução exata do problema em estudo. Este método baseia-se no desenvolvimento em série assintótica em duas escalas da solução do problema de valores de contorno e iniciais com coeficientes rapidamente oscilantes que modela o fenômeno estudado. Tal desenvolvimento assintótico é realizado em termos de potências do parâmetro geométrico ε cujos coeficientes são funções incógnitas que dependem da microescala. Assim, o problema é desacoplado em uma sequência recorrente de problemas para obter cada uma das funções incógnitas que formam a série assintótica da solução procurada. Na sua formulação clássica, o MHA fornece soluções que são válidas somente em regiões afastadas do contorno. Assim, na prática, é usual considerar somente os dois primeiros termos da série assintótica, obtendo-se os problemas correspondentes (o problema macroscópico ou homogeneizado para o primeiro termo, e o microscópico ou local para o segundo termo). Além disso, o MHA permite obter propriedades efetivas que descrevem o comportamento macroscópico do meio, ou seja, características próprias independentes das influências externas. Por exemplo: BRAVO-CASTILLERO et al. (2001), GUINOVART-DÍAZ et al. (2001), RODRÍGUEZ-RAMOS et al. (2001), SABINA et al. (2001) obtiveram fórmulas fechadas para os coeficientes efetivos de compósitos reforçados por fibras cilíndricas com periodicidade quadrada e hexago-

nal, e fases transversalmente isotrópicas no contexto da elasticidade e a piezoelectricidade; SABINA et al. (2002) e BRAVO-CASTILLERO et al. (2006) obtiveram fórmulas fechadas para as propriedades efetivas de compósitos elásticos com fases isotrópicas, reforçadas por fibras circulares distribuídas em esquemas quadrados e hexagonais, incluindo os casos limite de fibras vazias ou infinitamente rígidas e se prova que estão contidas no intervalo definido pelas cotas lineares de BRUNO (1991). Com relação à linearidade, o material é dito linear se suas relações constitutivas são lineares, isto é, as variáveis do tipo fluxo são combinação linear das variáveis dos tipos gradiente e/ou potencial (PÉREZ-FERNÁNDEZ et al., 2009), caso contrário, são não lineares. Alguns materiais demonstram comportamento linear apenas para valores pequenos das variáveis de tipo gradiente. À medida que esses gradientes aumentam, o comportamento constitutivo torna-se não linear. Outros materiais exibem comportamento não linear mesmo com pequenos gradientes.

Uma abordagem alternativa ao MHA é o uso dos princípios variacionais que constituem a formulação fraca do problema e que permitem obter estimativas ou cotas para a lei efetiva e energia efetiva. Estudos deste outro tipo, geralmente são realizados sob meios que apresentam geometrias complexas, tais como em materiais compósitos. Por outro lado, obter o comportamento efetivo de compósitos não lineares de tipo matriz-inclusão, por exemplo, é geralmente difícil, pois dependem da forma da micro-estrutura, a qual é conhecida com pouca precisão. O mais comum é que a informação disponível sobre o material esteja limitada às concentrações de suas fases constituintes, às formas médias das inclusões e a certas correlações espaciais. Partindo dessas informações, um dos caminhos para obter uma aproximação da resposta efetiva de um compósito não linear baseia-se em limitar, sobre todas a microgeometrias consistentes com tal informação, o intervalo das possíveis respostas. Do ponto de vista matemático, este intervalo toma a forma de cotas que incluem a informação dada e que, portanto, não serão aplicáveis a todo tipo de comportamento constitutivo, ou seja, a todo tipo de compósito. Muitos esforços têm sido encaminhados à tarefa de melhorar estas cotas através de diferentes enfoques. Um destes, a generalização dos princípios variacionais de HASHIN; SHTRIKMAN (1962a,b, 1963) à não linearidade na obtenção de cotas para a energia, originou-se no trabalho de WILLIS (1983). Os princípios não lineares de Hashin-Shtrikman se baseiam na introdução de um material de comparação de comportamento linear. Estes princípios foram rigorosamente sistematizados em seguida em TALBOT; WILLIS (1985). Uma alternativa introduzida por PONTE CASTANEDA (1991) consiste em considerar um compósito de comparação linear com a mesma microgeometria que o compósito não linear em estudo. Este enfoque foi incorporado a metodologia variacional de Hashin-Shtrikman em TALBOT; WILLIS (1992). A vantagem da linearidade do comportamento do material de comparação selecionado consiste em que suas propriedades efetivas estarão contidas em qual-

quer cota para o compósito não linear obtida por esta via. Segundo esta metodologia, em TALBOT (1999) se utilizam as cotas lineares de BRUNO (1991) nas cotas não lineares para um compósito dielétrico com inclusões esféricas, enquanto que em TALBOT (2000) se aplicam as cotas lineares de (BRUNO; LEO, 1993) nas cotas não lineares para compósitos incompressíveis reforçados por fibras ou esferas. Em ambos casos, o compósito não linear consiste em uma fase linear e uma não linear e de alternar estes papéis para a matriz e a inclusão, se obtém cotas particulares: uma cota superior e uma inferior para uma matriz linear com inclusões não lineares e uma cota inferior para uma matriz não linear com inclusões lineares. Um enfoque alternativo é combinar as cotas variacionais para a energia efetiva do compósito não linear com aproximações assintóticas para as propriedades efetivas do compósito linear de comparação, por exemplo, em PÉREZ-FERNÁNDEZ; LEÓN-MECÍAS; BRAVO-CASTILLERO (2005); PÉREZ-FERNÁNDEZ et al. (2007a,b) se utilizam as aproximações pelo MHA relatadas em RODRÍGUEZ-RAMOS et al. (2001) e GUINOVART-DÍAZ et al. (2001) para melhorar e generalizar os resultados de TALBOT (1999, 2000) para compósitos dielétricos e elásticos incompressíveis não lineares reforçados por fibras com distribuições quadrada e hexagonal; e em LEÓN-MECÍAS et al. (2005, 2007, 2008) o MHA se combina com o método de elementos finitos para melhorar as cotas não lineares de TALBOT (1999, 2000) para compósitos reforçados por esferas distribuídas segundo um esquema cúbico. Por outro lado, para obtenção de melhores cotas para a lei efetiva, baseando-se nos princípios de Hashin-Shtrikman, MILTON; SERKOV (2000) apresentam uma forma de representação para a relação constitutiva que permite obter ambas cotas, inferior e superior (TALBOT; WILLIS, 2004), (PEIGNEY, 2005). Contudo, estas cotas podem ser melhorados empregando as aproximações das propriedades efetivas do material de comparação obtidas pelo MHA (PÉREZ-FERNÁNDEZ et al., 2008).

Objetivos

Objetivo Geral:

Estudar técnicas assintóticas e variacionais de homogeneização matemática para obtenção de comportamento efetivo de meios micro-heterogêneos com estrutura periódica e formas de controlar tais resultados.

Objetivos Específicos:

- Construir a solução assintótica formal de problemas unidimensionais lineares, não lineares com coeficientes contínuos e contínuos por partes.
- Mostrar matematicamente a proximidade entre as soluções dos problemas original e homogeneizado.

- Ilustrar a partir de exemplos as relações de proximidade acima mencionadas e o comportamento efetivo de meios heterogêneos lineares e não lineares, estático e dinâmico.
- Buscar, a partir de princípios variacionais, cotas para a energia e a lei efetivas derivadas do processo de homogeneização assintótica.
- Ilustrar, a partir de exemplos, a relação entre as cotas variacionais e as estimativas por homogeneização assintótica.

Estrutura da dissertação

Além da presente introdução, este trabalho é composto por quatro capítulos, conclusões e anexos.

No capítulo 2 introduzem-se algumas definições, como os conceitos de ordem, expansão assintótica e solução assintótica formal; é ilustrada a formulação do problema estático linear unidimensional e a aplicação do MHA sobre ele. No desenvolvimento do MHA são apontados os principais resultados, tais como: o problema local, o coeficiente efetivo e a equação do problema homogeneizado. Em seguida, demonstra-se uma relação de proximidade entre as soluções dos problemas original e homogeneizado.

No capítulo 3, a aplicação do MHA é estendida a problemas dinâmicos unidimensionais lineares e não lineares, contínuos, onde o desenvolvimento é ilustrado a partir de problemas de interesse, tais como o de difusão e de onda, sendo que para os problemas lineares se demonstram relações de proximidade entre as soluções dos problemas originais e homogeneizados correspondentes, mediante princípios de máximo generalizados (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989). Para o caso não linear, o desenvolvimento é apresentado apenas para o problema de difusão, onde a não linearidade está presente no termo de fluxo. E para ilustrar os resultados obtidos via MHA, exemplos são resolvidos através de diferentes técnicas analíticas e numéricas, como o método de Fourier e de diferenças finitas.

A generalização do MHA a problemas multidimensionais é desenvolvida no capítulo 4 para a equação elíptica linear com coeficientes continuamente diferenciáveis, assim como é demonstrada a proximidade entre as soluções dos problemas original e homogeneizado. Além disso, os resultados importantes da conservação da simetria e do caráter definido positivo dos coeficientes efetivos são demonstrados. Por fim, um exemplo ilustrativo é apresentado.

No capítulo 5, o MHA é aplicado sobre problemas de valores de contorno com coeficientes constantes por partes, os quais descrevem, em particular, o comportamento não linear de materiais compósitos microperiódicos. Para ser mais exato, neste capítulo, descreve-se um compósito do ponto de vista físico e geométrico, e

formula-se fortemente e fracamente o problema. A partir destes problemas, busca-se a aproximação via MHA, assim como, cotas através de princípios variacionais, respectivamente, para a lei e a energia efetivas do compósito. Finalmente, um exemplo integrador é apresentado.

Por último, as conclusões do trabalho são apresentadas, seguidas das referências e dos anexos.

No seguinte organograma, apresenta-se a estrutura metodológica do trabalho, sendo que a raiz corresponde ao capítulo 2, e os ramos da esquerda, do centro e da direita correspondem, respectivamente, aos capítulos 3, 4 e 5. Ainda, as cores empregadas indicam a abordagem utilizada em cada situação.

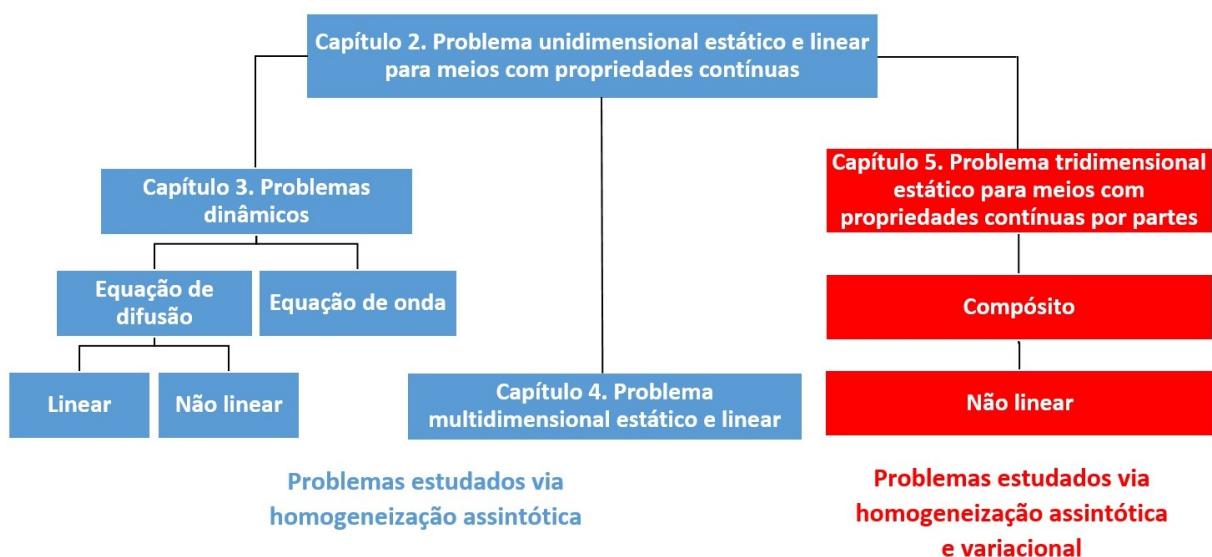


Figura 3: Estrutura metodológica do trabalho.

2 PRELIMINARES

2.1 Meios com estruturas heterogêneas e periódicas

Em suma, um meio heterogêneo é caracterizado pela variação de suas propriedades físicas ao longo da sua estrutura. Em particular, um meio periódico é caracterizado pela composição da sua estrutura pela reprodução periódica de um elemento recorrente chamado de célula básica ou de periodicidade (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

O presente trabalho explora especificamente fenômenos sobre meios microscópicamente heterogêneos, periódicos e macroscopicamente homogêneos, os quais são caracterizados pela rápida variação com relação a posição de suas propriedades.

Seja ε um parâmetro geométrico pequeno, $0 < \varepsilon \ll 1$, o qual especifica globalmente o comprimento do elemento recorrente e indica a existência de duas escalas estruturais (micro e macroescala). A partir deste elemento, constitui-se uma estrutura unidimensional de comprimento unitário e ε -periódica. Como a estrutura é periódica, ao realizar o estudo do comportamento local em cada elemento recorrente, é possível estender tais resultados para a estrutura como um todo. Define-se assim, uma nova variável, $y = \frac{x}{\varepsilon} \in [0, \varepsilon^{-1}]$, onde y é chamada de variável microscópica, rápida ou local, que descreve o comportamento local do meio, em contraste com a variável $x \in [0, 1]$ que é chamada de macroscópica, lenta ou global.

Fenômenos que ocorrem em meios micro-heterogêneos são geralmente modelados por equações em derivadas parciais com coeficientes rapidamente oscilantes obtidas a partir de leis de conservação, relações constitutivas ou de fechamento, que satisfazem certas condições de contorno, iniciais, de contato e/ou periodicidade. Um exemplo clássico é a equação elíptica que descreve um campo térmico estacionário:

$$\frac{d}{dx} \left(a^\varepsilon(x) \frac{du^\varepsilon}{dx} \right) = f(x), \quad (2.1)$$

onde $a^\varepsilon(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = a(y)$ é o coeficiente de condutividade na posição x , 1-periódico com respeito a y , positivo e limitado; $f(x)$ é a densidade de fonte de calor localizada na

posição x ; e u^ε é a temperatura na posição x para cada ε fixo. Neste capítulo, assume-se que $a^\varepsilon(x)$ e $f(x)$ são diferenciáveis e contínuas. A Figura 4 ilustra o comportamento da condutividade $a^\varepsilon(x)$ para algum ε pequeno.

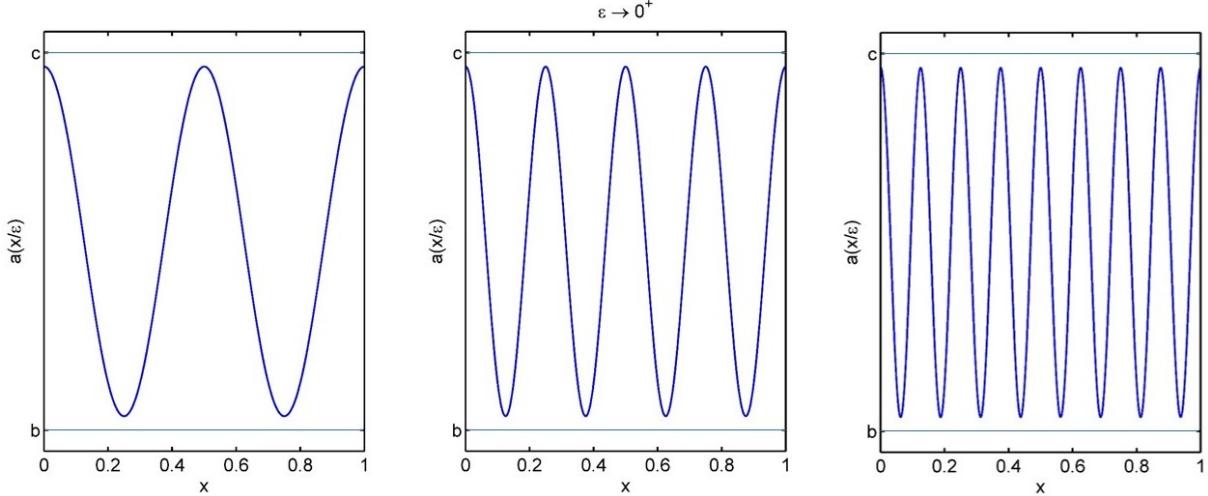


Figura 4: Coeficiente de condutividade rapidamente oscilante limitado pelas constantes b e c , para algum ε pequeno.

A 1-periodicidade em y verifica-se da seguinte maneira. Por definição, o coeficiente é ε -periódico. Logo, $a^\varepsilon(x) = a^\varepsilon(x + \varepsilon)$, o que é equivalente a $a(y) = a(y + 1)$ por

$$a(y) = a^\varepsilon(x) = a^\varepsilon(x + \varepsilon) = a\left(\frac{x + \varepsilon}{\varepsilon}\right) = a\left(\frac{x}{\varepsilon} + 1\right) = a(y + 1).$$

2.2 Conceitos Fundamentais

2.2.1 Ordem

Seja uma função $\varphi : \Omega \times E \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi^\varepsilon = \varphi(x, \varepsilon)$, sendo $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ e $\varepsilon \in E \subset (0, 1)$. Considere ainda que $\varphi^\varepsilon \in B_\varepsilon(\Omega)$, sendo $B_\varepsilon(\Omega)$ um espaço normado e φ^ε definida para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. A notação $\varphi^\varepsilon = \mathcal{O}(\psi(x, \varepsilon))$, enquanto $\varepsilon \rightarrow 0^+$ na norma de $B_\varepsilon(\Omega)$, significa que existem constantes $M, \varepsilon_0 > 0$, tais que $\|\varphi^\varepsilon\|_{B_\varepsilon(\Omega)} \leq M\|\psi^\varepsilon\|_{B_\varepsilon(\Omega)}$, para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Em particular, $\varphi^\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon^N)$ é equivalente a $\|\varphi^\varepsilon\|_{B_\varepsilon(\Omega)} \leq M\varepsilon^N$ para $\varepsilon > 0$ suficiente pequeno (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

2.2.2 Expansão assintótica e solução assintótica formal

Sejam a função φ^ε e uma série assintótica da forma $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i g_i(x, \varepsilon)$, não necessariamente convergente. Diz-se que esta série é uma expansão assintótica (e.a.) da função φ^ε se para todo N existe um M_0 , tal que para cada $m \geq M_0$ cumpre-se, na

norma de B_ε , com $\varepsilon \rightarrow 0^+$, que

$$\varphi(x, \varepsilon) - \sum_{i=0}^m \varepsilon^i g_i(x, \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^N).$$

Isto é, tem-se a igualdade assintótica $\varphi(x, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i g_i(x, \varepsilon)$.

Agora, considere, para cada $\varepsilon > 0$ fixo, a equação diferencial

$$\mathcal{L}^\varepsilon u^\varepsilon = f, \quad (2.2)$$

onde $\mathcal{L}^\varepsilon : B_{1\varepsilon} \rightarrow B_{2\varepsilon}$, $u^\varepsilon \in B_{1\varepsilon}$ e $f \in B_{2\varepsilon}$, sendo $B_{1\varepsilon}$, $B_{2\varepsilon}$ espaços normados e \mathcal{L}^ε um operador diferencial. Chama-se de solução assintótica formal (s.a.f.) de (2.2) a assintótica

$$u^{(\infty)}(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_i(x, \varepsilon),$$

onde $u_i \in B_{1\varepsilon}$, tal que para todo $N \in \mathbb{N}$, existe um M para que a relação

$$\mathcal{L}^\varepsilon u^{(m)} - f = \mathcal{O}(\varepsilon^N), \quad (2.3)$$

seja satisfeita para todo $m \geq M$ com $\varepsilon \rightarrow 0^+$ na norma de $B_{2\varepsilon}$, em que $u^{(m)} = \sum_{i=0}^m \varepsilon^i u_i$.

Se \mathcal{L}^ε é um operador linear e existe uma estimativa $\|u^\varepsilon\|_{B_{1\varepsilon}} \leq c_1 \varepsilon^{c_2} \|f\|_{B_{2\varepsilon}}$, onde $c_1 > 0$ e c_2 são constantes independentes de ε , então segue a partir de (2.3) que para todo $N \in \mathbb{N}$ existe um M tal que $\|u^{(m)} - u^\varepsilon\|_{B_{1\varepsilon}} = \mathcal{O}(\varepsilon^N)$, com $\varepsilon \rightarrow 0^+$, para todo $m \geq M$, e consequentemente, a solução assintótica formal $u^{(\infty)}$ é uma expansão assintótica da solução exata u^ε do problema: $u^\varepsilon \sim u^{(\infty)}$ (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

2.3 Método de homogeneização assintótica

O MHA consiste em aproximar a solução exata u^ε do problema original por uma série assintótica $u^{(\infty)}$ em potências de ε denominada solução assintótica formal:

$$u^{(\infty)}(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x, y), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad (2.4)$$

onde u_k são funções 1-periódicas em y . Substituindo a expansão (2.4) em (2.1), levando em conta a regra da cadeia dada por

$$\frac{d}{dx} F\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = \left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right) \Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}}. \quad (2.5)$$

Agrupam-se as potências de ε igualando a zero seus coeficientes, tem-se uma sequência recorrente de problemas para os coeficientes das potências de ε :

$$\begin{aligned}\varepsilon^{-2} &: \mathcal{L}_{yy}u_0 = 0, \\ \varepsilon^{-1} &: \mathcal{L}_{yy}u_1 = -\mathcal{L}_{xy}u_0 - \mathcal{L}_{yx}u_0, \\ \varepsilon^0 &: \mathcal{L}_{yy}u_2 = -\mathcal{L}_{xy}u_1 - \mathcal{L}_{yx}u_1 - \mathcal{L}_{xx}u_0 + f(x), \\ \varepsilon^1 &: \mathcal{L}_{yy}u_3 = -\mathcal{L}_{xy}u_2 - \mathcal{L}_{yx}u_2 - \mathcal{L}_{xx}u_1, \\ \vdots &: \vdots \\ \varepsilon^n &: \mathcal{L}_{yy}u_{n+2} = -\mathcal{L}_{xy}u_{n+1} - \mathcal{L}_{yx}u_{n+1} - \mathcal{L}_{xx}u_n, \\ \vdots &: \vdots\end{aligned}$$

com o operador diferencial

$$\mathcal{L}_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(a(y) \frac{\partial}{\partial\beta} \right), \quad \alpha, \beta \in \{x, y\}. \quad (2.6)$$

A partir destes problemas, de modo recorrente obtém-se a equação do problema homogeneizado, o coeficiente efetivo e a solução do problema local, sendo estes resultados importantes para a construção da solução assintótica formal.

2.3.1 Formalismo matemático do MHA

Para ilustrar o formalismo do MHA, considera-se o problema original constituído, para cada ε fixo, pela equação elíptica (2.1) definida para todo $x \in \bar{\Omega} = [0, 1]$, e que satisfaz as condições de contorno $u^\varepsilon(0) = u^\varepsilon(1) = 0$, ou seja,

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left(a^\varepsilon(x) \frac{du^\varepsilon}{dx} \right) = f(x), & x \in \Omega, \\ u^\varepsilon(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.7)$$

O coeficiente $a^\varepsilon \in C^1(\bar{\Omega})$ é uma função ε -periódica em x , estritamente limitada, ou seja, existem $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+$ tais que $0 < a_1 \leq a^\varepsilon \leq a_2 < +\infty$ (ver Figura 4). Além disso, considera-se $f \in C(\bar{\Omega})$.

Propõe-se uma expansão assintótica da solução de (2.7) da forma

$$u^{(2)}(x, \varepsilon) = u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y) + \varepsilon^2 u_2(x, y), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad (2.8)$$

em que u_i são funções 1-periódicas em y . Ao substituir a assintótica (2.8) na equação de (2.7),

$$\frac{d}{dx} \left(a(y) \frac{d}{dx} (u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y) + \varepsilon^2 u_2(x, y)) \right) - f(x) = 0, \quad (2.9)$$

e aplicar a regra da cadeia $\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y}$ em (2.9) obtém-se

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left[a(y) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} \right) (u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y) + \varepsilon^2 u_2(x, y)) \right] - f(x) = 0, \quad (2.10)$$

e ao desenvolver resulta em

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(a(y) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} \left(a(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} \left(a(y) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(a(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \\ & + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(a(y) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(a(y) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a(y) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} \left(a(y) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \\ & + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(a(y) \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(a(y) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \left(a(y) \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a(y) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) - f(x) = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Ao agrupar a equação (2.11) em potências de ε tem-se

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-2} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(a(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \right] + \varepsilon^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(a(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a(y) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a(y) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \\ & + \varepsilon^0 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(a(y) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(a(y) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a(y) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a(y) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) - f(x) \right] \\ & = \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Para que $u^{(2)}$ seja uma solução assintótica formal da equação de (2.7), devem-se obter u_0 , u_1 e u_2 de tal maneira que seja satisfeita a seguinte sequência recorrente de equações:

$$\varepsilon^{-2} : \frac{\partial}{\partial y} \left(a(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) = 0, \quad (2.13)$$

$$\varepsilon^{-1} : \frac{\partial}{\partial x} \left(a(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a(y) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a(y) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = 0, \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 : & \frac{\partial}{\partial x} \left(a(y) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(a(y) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a(y) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(a(y) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) - f(x) = 0, \end{aligned} \quad (2.15)$$

as quais correspondem aos termos que não se anulam quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Isto é justificado pelo conceito de solução assintótica formal, como será visto a seguir.

Demonstração: Considere a equação elíptica unidimensional (2.7) na forma operacional (2.2) com $\mathcal{L}^\varepsilon = \frac{d}{dx} \left(a^\varepsilon(x) \frac{d}{dx} \right)$. Agora, propõe-se a solução desta equação na forma de uma série assintótica de potências de ε , idêntica a (2.4). Mas para construir uma solução assintótica formal considera-se uma soma finita de $m+1$ termos, ou seja,

$$u^\varepsilon(x) \sim u^{(m)}(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^m \varepsilon^i u_i(x, y), \quad y = \frac{x}{\varepsilon} \quad (2.16)$$

que corresponde a considerar $u_i \equiv 0$ para $i > m+1$ em (2.4). Logo, substituindo (2.16) na equação (2.7), aplicando a regra da cadeia e utilizando a notação (2.6) na forma operacional, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\varepsilon u^{(m)} - f(x) &= \varepsilon^{-2} \mathcal{L}_{yy} u_0 + \varepsilon^{-1} (\mathcal{L}_{yy} u_1 + \mathcal{L}_{yx} u_0 + \mathcal{L}_{xy} u_0) \\ &\quad + \varepsilon^0 (\mathcal{L}_{yy} u_2 + \mathcal{L}_{yx} u_1 + \mathcal{L}_{xy} u_1 + \mathcal{L}_{xx} u_0 - f(x)) \\ &\quad + \dots + \varepsilon^i (\mathcal{L}_{yy} u_{i+2} + \mathcal{L}_{yx} u_{i+1} + \mathcal{L}_{xy} u_{i+1} + \mathcal{L}_{xx} u_i) \\ &\quad + \dots + \varepsilon^{m-2} (\mathcal{L}_{yy} u_m + \mathcal{L}_{yx} u_{m-1} + \mathcal{L}_{xy} u_{m-1} + \mathcal{L}_{xx} u_{m-2}) \\ &\quad + \varepsilon^{m-1} (\mathcal{L}_{yx} u_m + \mathcal{L}_{xy} u_m + \mathcal{L}_{xx} u_{m-1}) + \varepsilon^m \mathcal{L}_{xx} u_m \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathcal{L}^\varepsilon u^{(m)} - f(x) = \mathcal{O}(\varepsilon^{m-1}),$$

onde os termos de ordens $\varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-1}, \dots, \varepsilon^{m-2}$ devem ser nulos para que $u^{(m)}$ seja uma s.a.f.. Portanto, pela definição tem-se que $N = m - 1$ e $m = N + 1 \Rightarrow M(N) = N + 1$. Assim,

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists M = N + 1 : \forall m \geq N + 1 \Rightarrow \mathcal{L}^\varepsilon u^{(m)} - f(x) = \mathcal{O}(\varepsilon^{m-1}).$$

□

Note que a escolha de uma assintótica de ordem $\mathcal{O}(\varepsilon^m)$, $m > 2$, para esta ser uma s.a.f., não só devem anular-se os termos que não tendem a zero quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, senão também, aqueles até a ordem $\mathcal{O}(\varepsilon^{m-2})$ que resultam da substituição da assintótica na equação do problema original.

Considere agora que as variáveis x e y nas equações (2.13)-(2.15) são independentes. As equações (2.13)-(2.15) são complementadas com condições de contorno determinadas a partir da aplicação de (2.8) nas condições de contorno em (2.7), ou seja,

$$u^{(2)}(0, \varepsilon) = u_0(0, 0) + \varepsilon u_1(0, 0) + \varepsilon^2 u_2(0, 0) = 0, \quad (2.17)$$

$$u^{(2)}(1, \varepsilon) = u_0\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u_1\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 u_2\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\right) = 0. \quad (2.18)$$

Assim, as condições de contorno para (2.13)-(2.15), respectivamente, são:

$$u_0(0, 0) = u_0\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\right) = 0, \quad (2.19)$$

$$u_1(0, 0) = u_1\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\right) = 0, \quad (2.20)$$

$$u_2(0, 0) = u_2\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\right) = 0. \quad (2.21)$$

Note que devido à 1-periodicidade de $u_i(x, y)$, $i = 0, 1, 2$, com relação à variável y , é correto dizer que $u_i\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\right) = u_i(1, 0)$.

A partir das equações (2.13)-(2.15) complementadas das condições (2.19)-(2.21) estabelece-se os seguintes problemas recorrentes:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{yy}u_0 = 0, \\ u_0(0, 0) = u_0(1, 0) = 0, \end{cases} \quad (2.22)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{yy}u_1 = -\mathcal{L}_{xy}u_0 - \mathcal{L}_{yx}u_0, \\ u_1(0, 0) = u_1(1, 0) = 0, \end{cases} \quad (2.23)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{yy}u_2 = -\mathcal{L}_{xx}u_0 - \mathcal{L}_{xy}u_1 - \mathcal{L}_{yx}u_1 + f(x), \\ u_2(0, 0) = u_2(1, 0) = 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

Note que, para cada x fixo, os problemas (2.22)-(2.24) são da forma

$$\begin{cases} LN = F, \quad y \in (0, 1) \\ N(0) = 0, \end{cases}$$

onde $L = \mathcal{L}_{yy}$ e $N = u_k$. Garante-se a existência e a unicidade das funções u_k soluções 1-periódicas em y de (2.22)-(2.24) mediante o seguinte Lema:

Lema 2.3.1. *Sejam $F(y)$ e $a(y) > 0$ funções diferenciáveis e 1-periódicas. Uma condição necessária e suficiente para a existência de uma solução 1-periódica N da equação $LN = F$ é que $\langle F(y) \rangle \equiv \int_0^1 F(y) dy = 0$, onde $\langle \cdot \rangle$ denota a média integral. Ainda mais, tal solução 1-periódica é única salvo uma constante aditiva, ou seja, $N(y) = \tilde{N}(y) + C$, onde \tilde{N} é uma solução 1-periódica de $LN = F$ tal que $\tilde{N}(0) = 0$, e C é uma constante arbitrária (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).*

Demonstração: Necessidade: Seja $N(y)$ solução 1-periódica da equação

$$LN \equiv \frac{d}{dy} \left(a(y) \frac{dN}{dy} \right) = F(y). \quad (2.25)$$

De aplicar o operador de valor médio em ambos os lados de (2.25), ou seja,

$$\left\langle \frac{d}{dy} \left(a(y) \frac{dN}{dy} \right) \right\rangle = \langle F(y) \rangle, \quad (2.26)$$

tem-se, do lado esquerdo, levando em conta a 1-periodicidade de $a(y)$ e $N(y)$, que

$$\left(a(y) \frac{dN}{dy} \right) \Big|_{y=0}^{y=1} = a(1) \frac{dN}{dy} \Big|_{y=1} - a(0) \frac{dN}{dy} \Big|_{y=0} = a(0) \left(\frac{dN}{dy} \Big|_{y=1} - \frac{dN}{dy} \Big|_{y=0} \right) = 0. \quad (2.27)$$

Logo, segue de (2.26) e (2.27) que $\langle F(y) \rangle = 0$.

Suficiência: Seja F tal que $\langle F(y) \rangle = 0$. De integrar (2.25), ou seja,

$$\int_0^y \frac{d}{ds} \left(a(s) \frac{dN}{ds} \right) ds = \int_0^y F(s) ds, \quad (2.28)$$

se obtém

$$a(y) \frac{dN}{dy} - a(0) \frac{dN}{dy} \Big|_{y=0} = \int_0^y F(s) ds, \quad (2.29)$$

onde

$$a(0) \frac{dN}{dy} \Big|_{y=0} = C_1 \quad (2.30)$$

é uma constante aditiva. Logo,

$$a(y) \frac{dN}{dy} = \int_0^y F(s) ds + C_1 \Rightarrow \frac{dN}{dy} = \frac{1}{a(y)} \left(\int_0^y F(s) ds + C_1 \right). \quad (2.31)$$

Assim, de integrar a segunda igualdade em (2.31) tem-se que

$$N(y) = \int_0^y \frac{1}{a(t)} \left(\int_0^t F(s) ds + C_1 \right) dt + C_2. \quad (2.32)$$

A fim de se construir $N(y)$ 1-periódica, impõe-se que $N(y+1) - N(y) = 0$. Assim, para $N(y+1)$ tem-se

$$N(y+1) = \int_0^{y+1} \frac{1}{a(t)} \left(\int_0^t F(s) ds + C_1 \right) dt + C_2. \quad (2.33)$$

Logo, da subtração das expressões (2.33) e (2.32) se obtém

$$0 = N(y+1) - N(y) = \int_y^{y+1} \frac{1}{a(t)} \left(\int_0^t F(s) ds + C_1 \right) dt. \quad (2.34)$$

Observe que $\int_0^t F(s)ds$ é 1-periódica, assim como $1/a(t)$ e C_1 . Logo,

$$\int_y^{y+1} \frac{1}{a(t)} \left(\int_0^t F(s)ds + C_1 \right) dt = \left\langle \frac{1}{a(t)} \left(\int_0^t F(s)ds \right) \right\rangle + C_1 \left\langle \frac{1}{a(t)} \right\rangle = 0, \quad (2.35)$$

de onde

$$C_1 = - \left\langle \frac{1}{a(t)} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{1}{a(t)} \int_0^t F(s)ds \right\rangle. \quad (2.36)$$

Portanto, de (2.32) e (2.36) segue que $N(y) = \tilde{N}(y) + C$, onde $C \equiv C_2$ e

$$\tilde{N}(y) = \int_0^y \frac{1}{a(t)} \left(\int_0^t F(s)ds - \left\langle \frac{1}{a(t)} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{1}{a(t)} \int_0^t F(s)ds \right\rangle \right) dt. \quad (2.37)$$

□

Dando continuidade à construção da s.a.f., do problema (2.22) sabe-se que

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(a(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) = 0, \quad (2.38)$$

para a qual o Lema 2.3.1 garante que tem solução 1-periódica em y . Assim, de integrar (2.38) resulta que

$$a(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} = p(x), \quad (2.39)$$

e ainda, sendo $a(y) > 0$, pode-se isolar a derivada de u_0 :

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{p(x)}{a(y)}. \quad (2.40)$$

De modo a obter $p(x)$, aplica-se a (2.40) o operador de valor médio, obtendo-se

$$0 = u_0(x, 1) - u_0(x, 0) = \int_0^1 \frac{p(x)}{a(y)} dy, \quad (2.41)$$

devido à 1-periodicidade de u_0 com respeito a y . A partir disto, pode-se concluir que

$$p(x) \int_0^1 \frac{1}{a(y)} dy = 0 \Rightarrow p(x) = 0, \quad (2.42)$$

pois $\int_0^1 \frac{dy}{a(y)} > 0$. Logo, substituindo (2.42) em (2.39) resulta que

$$a(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_0}{\partial y} = 0,$$

e assim, conclui-se que u_0 não depende da variável rápida y , ou seja,

$$u_0(x, y) = u_0(x). \quad (2.43)$$

Note que (2.43) também pode ser obtida diretamente do Lema 2.3.1. Com efeito, sejam $x \in [0, 1]$ fixo e $N(y) = u_0(x, y)$. Ao aplicar o Lema em (2.38) segue que existe $u_0(x, y)$ solução 1-periódica em y , única salvo uma constante aditiva, ou seja, $u_0(x, y) = \tilde{u}_0(x, y) + C(x)$. Em particular, observe que $\tilde{u}_0 \equiv 0$ é solução de (2.38). Logo, $u_0(x, y) = C(x)$, ou seja, u_0 não depende de y .

Dando sequência à resolução dos problemas recorrentes, ao substituir (2.43) em (2.23), se obtém

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(a(y) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = -\frac{da}{dy} \frac{du_0}{dx}. \quad (2.44)$$

A equação (2.44) complementada das condições (2.20) estabelece uma versão atualizada do problema (2.23), ou seja,

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{yy} u_1 = -\mathcal{L}_{yx} u_0, \\ u_1(0, 0) = 0, u_1(1, 0) = 0. \end{cases} \quad (2.45)$$

Note que a partir do problema (2.45) se obtém uma solução u_1 em termos de u_0 , mas deve-se garantir que esta solução seja 1-periódica com respeito a variável y , e para isso o Lema 2.3.1 deve ser aplicado.

Relacionando os elementos do Lema 2.3.1 à equação de (2.45) tem-se que $N = u_1$ e $F = -\frac{da}{dy} \frac{du_0}{dx}$. Portanto, para garantir que u_1 seja 1-periódica, a equação

$$\left\langle \frac{da}{dy} \frac{du_0}{dx} \right\rangle = 0, \quad (2.46)$$

deve ser satisfeita. De calcular o lado esquerdo de (2.46) tem-se

$$\int_0^1 \frac{da}{dy} \frac{du_0}{dx} dy = \frac{du_0}{dx} \int_0^1 \frac{da}{dy} dy = \frac{du_0}{dx} (a(1) - a(0)) = 0, \quad (2.47)$$

pois $a(y)$ é 1-periódico com respeito a y . Logo, a solução u_1 de (2.45) é 1-periódica com respeito à variável rápida y .

Note que, por causa da forma do F para este problema, pode-se aplicar o método de separação de variáveis (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989) e, assim, supor a solução u_1 da forma $N_1(y) \frac{du_0}{dx}$. Logo, a substituição na equação (2.45) resulta em

$$\frac{d}{dy} \left(a(y) \frac{dN_1}{dy} \right) \frac{du_0}{dx} = -\frac{da}{dy} \frac{du_0}{dx}, \quad (2.48)$$

e ao colocar em evidência a derivada de u_0 tem-se

$$\frac{d}{dy} \left(a(y) \frac{dN_1}{dy} + a(y) \right) \frac{du_0}{dx} = 0. \quad (2.49)$$

Levando em consideração que $\frac{du_0}{dx} \neq 0$, (2.49) é satisfeita se

$$\frac{d}{dy} \left(a(y) \frac{dN_1}{dy} + a(y) \right) = 0, \quad (2.50)$$

sendo esta a chamada equação do problema local, cuja solução 1-periódica existe, o qual segue de aplicar o Lema 2.3.1 com $F = -\frac{da}{dy}$ ao ser escrita com $\mathcal{L}_{yy} N_1 = -\frac{da}{dy}$. Note que está sendo construída uma s.a.f. do problema original, e para obter u_1 é necessário encontrar um $N_1(y)$ que satisfaça (2.50). A equação (2.50) complementada à condição de unicidade $N_1(0) = 0$ estabelece o chamado problema local

$$\mathcal{P}_L : \begin{cases} \frac{d}{dy} \left(a(y) \frac{dN_1}{dy} + a(y) \right) = 0, & y \in (0, 1), \\ N_1(0) = 0. \end{cases} \quad (2.51)$$

O problema (2.51) é resolvido integrando com respeito a variável y , obtendo

$$a(y) \frac{dN_1}{dy} + a(y) = K, \quad (2.52)$$

onde K é uma constante. Isolando a derivada de $N_1(y)$ levando em consideração que $a(y) > 0$ tem-se

$$\frac{dN_1}{dy} = \frac{K}{a(y)} - 1, \quad (2.53)$$

de onde, ao calcular a média em ambos os lados de (2.53), obtém-se o valor de K , ou seja,

$$\left\langle \frac{dN_1}{dy} \right\rangle = \left\langle \frac{K}{a(y)} - 1 \right\rangle, \quad (2.54)$$

$$N_1(1) - N_1(0) = K \left\langle \frac{1}{a(y)} \right\rangle - 1, \quad (2.55)$$

$$0 = K \left\langle \frac{1}{a(y)} \right\rangle - 1, \quad (2.56)$$

de onde

$$K = \langle a(y)^{-1} \rangle^{-1} \equiv \hat{a}, \quad (2.57)$$

sendo \hat{a} o chamado coeficiente efetivo. Da substituição de (2.57) em (2.53) e inte-

grando ambos os lados da mesma se obtém

$$N_1(y) - N_1(0) = \int_0^y \left(\frac{\hat{a}}{a(s)} - 1 \right) ds, \quad (2.58)$$

que, pela condição do problema (2.51), a solução do problema local é dada por

$$N_1(y) = \int_0^y \left(\frac{\hat{a}}{a(s)} - 1 \right) ds \quad (2.59)$$

e, portanto, a solução u_1 é determinada como

$$u_1(x, y) = \frac{du_0}{dx} \int_0^y \left(\frac{\hat{a}}{a(s)} - 1 \right) ds. \quad (2.60)$$

Atualizando a equação do problema (2.24) substituindo (2.43) e (2.60) observando (2.52) e (2.57), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(a(y) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) &= -a(y) \frac{d^2 u_0}{dx^2} - a(y) \frac{dN_1}{dy} \frac{d^2 u_0}{dx^2} \\ &\quad - \frac{d}{dy} (a(y) N_1(y)) \frac{d^2 u_0}{dx^2} + f(x), \\ &= -\hat{a} \frac{d^2 u_0}{dx^2} - \frac{d}{dy} (a(y) N_1(y)) \frac{d^2 u_0}{dx^2} + f(x). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Logo, aplica-se o Lema 2.3.1 na equação (2.61) a fim de garantir a existência da solução u_2 , 1-periódica com respeito a y . Ao relacionar os elementos de (2.61) ao Lema 2.3.1, tem-se que $N = u_2$ e $F = -\hat{a} \frac{d^2 u_0}{dx^2} - \frac{d}{dy} (a(y) N_1(y)) \frac{d^2 u_0}{dx^2} + f(x)$. Portanto, para que u_2 seja 1-periódico com relação a variável y , deve-se satisfazer a seguinte condição

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle -\hat{a} \frac{d^2 u_0}{dx^2} - \frac{d}{dy} (a(y) N_1(y)) \frac{du_0}{dx} + f(x) \right\rangle \\ &= -\left\langle \hat{a} \frac{d^2 u_0}{dx^2} \right\rangle - \left\langle \frac{d}{dy} (a(y) N_1(y)) \frac{d^2 u_0}{dx^2} \right\rangle + \langle f(x) \rangle \\ &= -\hat{a} \frac{d^2 u_0}{dx^2} + f(x), \end{aligned}$$

ou seja, a condição para que exista u_2 solução 1-periódica com relação a variável y de (2.24) é que exista u_0 , solução de

$$\hat{a} \frac{d^2 u_0}{dx^2} = f(x), \quad (2.62)$$

que é a chamada equação homogeneizada. Note que a partir desta equação pode-se determinar o primeiro termo u_0 da assintótica (2.8), cuja obtenção ainda não tinha sido

definida explicitamente. Assim, a equação (2.62) complementada com as condições (2.19) atualizadas por (2.43) estabelece o chamado problema homogeneizado

$$\mathcal{P}_H : \begin{cases} \hat{a} \frac{d^2 u_0}{dx^2} = f(x), & x \in (0, 1) \\ u_0(0) = 0, \quad u_0(1) = 0. \end{cases} \quad (2.63)$$

É importante salientar a relevância da solução do problema homogeneizado, pois esta descreve o comportamento do meio homogêneo equivalente ao problema heterogêneo original, e ainda, a partir dela determinam-se os demais coeficientes da expansão assintótica da solução do problema original, os quais detêm informações da heterogeneidade microscópica do meio.

Agora, para obter u_2 , substitui-se (2.62) em (2.61), obtendo-se assim

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(a(y) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = -\frac{d}{dy} (a(y) N_1(y)) \frac{d^2 u_0}{dx^2}. \quad (2.64)$$

A equação (2.64) é resolvida da mesma maneira que (2.50), de onde é obtido o último termo da solução assintótica formal u_2 . Primeiramente, propõe-se que a solução u_2 seja da forma $N_2(y) \frac{d^2 u_0}{dx^2}$. Logo, de substituí-la em (2.64) e colocar a derivada de u_0 em evidência obtém-se

$$\frac{d}{dy} \left[a(y) \left(\frac{dN_2}{dy} + N_1(y) \right) \right] \frac{d^2 u_0}{dx^2} = 0. \quad (2.65)$$

Supondo $\frac{d^2 u_0}{dx^2} \neq 0$, estabelece-se o segundo problema local

$$\begin{cases} \frac{d}{dy} \left[a(y) \left(\frac{dN_2}{dy} + N_1(y) \right) \right] = 0, \\ N_2(0) = 0, \end{cases} \quad (2.66)$$

cuja solução 1-periódica é garantida pelo Lema 2.3.1, ao ser escrita como $\mathcal{L}_{yy} N_2 = -\frac{d}{dy} (a(y) N_1(y))$ onde $F = -\frac{d}{dy} (a(y) N_1(y))$. Realizando os mesmos passos feitos em (2.50)-(2.59), se obtém a constante

$$K_1 = \langle N_1(y) \rangle \hat{a}, \quad (2.67)$$

obtida do cálculo da média da condição do lema. Assim, N_2 é dada por

$$N_2(y) = \int_0^y \left(\langle N_1(s) \rangle \frac{\hat{a}}{a(s)} - N_1(s) \right) ds \quad (2.68)$$

e, portanto, u_2 será da forma

$$u_2(x, y) = \frac{d^2 u_0}{dx^2} \int_0^y \left(\langle N_1(y) \rangle \frac{\hat{a}}{a(s)} - N_1(s) \right) ds. \quad (2.69)$$

Note que (2.59) e (2.68) podem ser obtidos diretamente de (2.37) identificando apropriadamente o termo independente F do lema.

Conclui-se assim a construção da expansão assintótica $u^{(2)}$, sendo esta uma boa aproximação da solução exata u^ε do problema original, o qual será verificado formalmente na próxima seção por meio da relação de proximidade entre a solução do problema original u^ε e a solução do problema homogeneizado u_0 .

2.3.2 Relação de proximidade entre soluções

Ao expressar a solução do problema original da forma dada por (2.4), nota-se que quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ a solução $u^{(\infty)} \rightarrow u_0$, ou seja, a s.a.f. $u^{(\infty)}$ do problema original tende para a solução u_0 do problema homogeneizado. Neste caso é possível estabelecer a seguinte relação de proximidade entre a solução u^ε do problema original e a solução u_0 do problema homogeneizado:

$$\|u^\varepsilon - u_0\|_{H_0^1([0,1])} = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}), \quad (2.70)$$

que será demonstrada a seguir. De fato, a relação correspondente ao caso de coeficientes continuamente diferenciáveis é $\|u^\varepsilon - u_0\|_{C([0,1])} = \mathcal{O}(\varepsilon)$, que pode ser encontrada na página 27 da obra de LARSSON; THOMÉE (2003), mas será empregada a forma (2.70), pois mais adiante são estudados casos com coeficientes descontínuos, aos quais ela corresponde. Assim, a presente seção dedica-se a obtenção de (2.70).

Demonstração: Para mostrar que (2.70) é válido, será utilizado o princípio do máximo generalizado para equações elípticas dado pelo teorema 1 na página 6 de BAKHVALOV; PANASENKO (1989), (ver anexo A.1).

Inicialmente, considera-se a expansão assintótica da solução de (2.7) da forma

$$u^{(1)}(x, \varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x, y), \quad y = \frac{x}{\varepsilon} \quad (2.71)$$

para estimar

$$\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H_0^1([0,1])}. \quad (2.72)$$

Para isso, consideram-se dois problemas: o problema original (2.7) e o problema obtido ao considerar $u^{(1)}$ como solução de (2.7). Assim, reescrevendo o problema (2.7)

na forma operacional, o problema \mathcal{P}_1 é estabelecido como

$$\mathcal{P}_1 : \begin{cases} \mathcal{L}^\varepsilon u^\varepsilon = f(x), & x \in (0, 1), \\ u^\varepsilon(0) = u^\varepsilon(1) = 0, \end{cases} \quad (2.73)$$

e da mesma maneira para $u^{(1)}$, o problema \mathcal{P}_2 como

$$\mathcal{P}_2 : \begin{cases} \mathcal{L}^\varepsilon u^{(1)} = f(x) - F(x, \varepsilon), & x \in (0, 1), \\ u^{(1)}(0, \varepsilon) = u^{(1)}(1, \varepsilon) = 0, \end{cases} \quad (2.74)$$

onde $F(x, \varepsilon)$ é a função que descreve o erro incorrido ao considerar (2.71) como solução de (2.7).

Subtraindo \mathcal{P}_2 de \mathcal{P}_1 , obtém-se o problema \mathcal{P}_3 :

$$\mathcal{P}_3 : \begin{cases} \mathcal{L}^\varepsilon(u^\varepsilon - u^{(1)}) = F(x, \varepsilon), & x \in (0, 1), \\ u^\varepsilon(0) - u^{(1)}(0, \varepsilon) = 0, \\ u^\varepsilon(1) - u^{(1)}(1, \varepsilon) = 0. \end{cases} \quad (2.75)$$

Aplicando o princípio do máximo (ver anexo A.1) ao problema (2.75), a seguinte estimativa é obtida:

$$\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H_0^1([0,1])} \leq c \|F\|_{L^2([0,1])} \quad (2.76)$$

onde $c > 0$ é uma constante. Logo, para estimar $\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H_0^1([0,1])}$ é preciso obter uma expressão para $F(x, \varepsilon)$ a partir de $\mathcal{L}^\varepsilon u^{(1)} = f(x)$, sendo assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\varepsilon u^{(1)} - f(x) &= \frac{d}{dx} \left(a(y) \frac{d}{dx} (u_0(x) + \varepsilon u_1(x, y)) \right) - f(x), \\ &= \frac{d}{dx} \left(a(y) \frac{d}{dx} \left(u_0(x) + \varepsilon N_1(y) \frac{du_0}{dx} \right) \right) - f(x), \end{aligned} \quad (2.77)$$

de onde, realizando a regra da cadeia, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\varepsilon u^{(1)} - f(x) &= a(y) \frac{d^2 u_0}{dx^2} + \varepsilon a(y) N_1(y) \frac{d^3 u_0}{dx^3} + a(y) \frac{dN_1}{dy} \frac{d^2 u_0}{dx^2} - f(x) \\ &\quad + \varepsilon^{-1} \frac{d}{dy} \left(a(y) + a(y) \frac{dN_1}{dy} \right) \frac{du_0}{dx} + \frac{d}{dy} (a(y) N_1(y)) \frac{d^2 u_0}{dx^2}, \end{aligned} \quad (2.78)$$

que, simplificando ao considerar $\hat{a} = a(y) + a(y) \frac{dN_1}{dy}$ obtida de (2.59), resulta em

$$\mathcal{L}^\varepsilon u^{(1)} - f(x) = \varepsilon a(y) N_1(y) \frac{d^3 u_0}{dx^3} + \frac{d}{dy} (a(y) N_1(y)) \frac{d^2 u_0}{dx^2}. \quad (2.79)$$

Por outro lado, considere a equação (2.15). Ao admitir inicialmente que a solução

assintótica é $u^{(1)}$, é evidente que u_2 será nulo. Logo, de (2.15)

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(a(y) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(y) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(y) \frac{du_0}{dx} \right) + f(x), \\
&= -\frac{\partial}{\partial y} \left(a(y) \frac{\partial}{\partial x} \left(N_1(y) \frac{du_0}{dx} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(y) \frac{\partial}{\partial y} \left(N_1(y) \frac{du_0}{dx} \right) \right) \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(y) \frac{du_0}{dx} \right) + f(x), \\
&= -\frac{d}{dy} (a(y) N_1(y)) \frac{d^2 u_0}{dx^2} - a(y) \frac{dN_1}{dy} \frac{d^2 u_0}{dx^2} - a(y) \frac{d^2 u_0}{dx^2} + f(x), \\
&= -\frac{d}{dy} (a(y) N_1(y)) \frac{d^2 u_0}{dx^2}.
\end{aligned} \tag{2.80}$$

Substituindo (2.80) e (2.62) em (2.79):

$$\mathcal{L}^\varepsilon u^{(1)} - f(x) = -\varepsilon a(y) N_1(y) \frac{d^3 u_0}{dx^3}, \tag{2.81}$$

ou seja,

$$F(x, \varepsilon) = -\varepsilon a(y) N_1(y) \frac{d^3 u_0}{dx^3}. \tag{2.82}$$

É possível agora estimar $\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H_0^1([0,1])}$. Lembrando que $\|u\|_{L^2([0,1])}^2 = \int_0^1 u^2 dx$, de (2.82), segue que

$$\|F\|_{L^2([0,1])}^2 = \varepsilon^2 \int_0^1 \left(a(y) N_1(y) \frac{d^3 u_0}{dx^3} \right)^2 dx. \tag{2.83}$$

Note que

$$\left(a(y) N_1(y) \frac{d^3 u_0}{dx^3} \right)^2 = \left| a(y) N_1(y) \frac{d^3 u_0}{dx^3} \right|^2 = \left(|a(y) N_1(y)| \left| \frac{d^3 u_0}{dx^3} \right| \right)^2. \tag{2.84}$$

Assumindo que $u_0 \in C^3([0, 1])$ tem-se pelo Teorema de Weierstrass (KUDRIAVTSEV, 1983, Teorema 1, p. 140), que existe $A_1 > 0$ tal que

$$\left| \frac{d^3 u_0}{dx^3} \right| \leq A_1. \tag{2.85}$$

Considerando (2.85) em (2.84), obtém-se que

$$\left(|a(y) N_1(y)| \left| \frac{d^3 u_0}{dx^3} \right| \right)^2 \leq A_1^2 |a(y) N_1(y)|^2 = A_1^2 (a(y) N_1(y))^2. \tag{2.86}$$

De (2.83) e (2.86), tem-se que

$$\|F\|_{L^2([0,1])}^2 \leq \varepsilon^2 A_1^2 \int_0^1 N_1^2(y) a^2(y) dx. \quad (2.87)$$

Note agora que sendo $N_1, a \in \mathcal{C}^1([0, 1/\varepsilon])$ tem-se, novamente pelo Teorema de Weierstrass, que existem $B_1, B_2 > 0$ tais que, para todo $x \in [0, \varepsilon^{-1}]$, tem-se

$$\left|N_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right| \leq B_1, \quad \left|a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right| \leq B_2. \quad (2.88)$$

Considerando $B = \max\{B_1, B_2\}$ segue de (2.87) que

$$\|F\|_{L^2([0,1])}^2 \leq \varepsilon^2 A_1^2 B^4 \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} dx = \varepsilon^2 A_1^2 B^4 \frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon A_1^2 B^4. \quad (2.89)$$

Portanto,

$$\|F\|_{L^2([0,1])} \leq \sqrt{\varepsilon} A_1 B^2. \quad (2.90)$$

Conclui-se assim, que

$$\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H_0^1([0,1])} = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}). \quad (2.91)$$

De modo análogo se obtém que

$$\|u^{(1)} - u_0\|_{H_0^1([0,1])} = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}). \quad (2.92)$$

Assim, de (2.70), (2.91) e (2.92), com uso da desigualdade triangular, segue que

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon - u_0\|_{H_0^1([0,1])} &= \|u^\varepsilon - u^{(1)} + u^{(1)} - u_0\|_{H_0^1([0,1])}, \\ &\leq \|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H_0^1([0,1])} + \|u^{(1)} - u_0\|_{H_0^1([0,1])}, \\ &= \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}) + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}), \\ &= \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|u^\varepsilon - u_0\|_{H_0^1([0,1])} = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}).$$

□

Nos próximos capítulos o MHA será desenvolvido para modelos matemáticos unidimensionais de interesse sob meios continuamente microperiódicos, sendo estes, os modelos difusivos linear e não-linear, o modelo de onda linear, assim como suas respectivas relações de proximidade para os casos lineares. Ainda, distribuição de um campo térmico estacionário sobre um meio multidimensional continuamente micro-

periódico será estudado mediante aplicação do MHA. Para o problema elíptico que modela tal fenômeno, mostra-se também a relação de proximidade, a conservação de simetria e positividade no coeficiente efetivo, e inclui-se um exemplo ilustrativo. Neste exemplo, os resultados do MHA são comparados com cotas variacionais, cuja teoria será desenvolvida no último capítulo para meios não lineares multidimensionais microperiódicos, com propriedades constantes por partes, isto é, compósitos.

3 HOMOGENEIZAÇÃO DE MEIOS UNIDIMENSIONAIS CONTINUAMENTE MICROPERIÓDICOS

3.1 Equação de difusão

3.1.1 Formulação do problema

Nesta seção aborda-se o problema que descreve um processo de difusão do calor em um meio micro-heterogêneo e periódico modelado pela equação do calor. O problema consiste em encontrar a temperatura $u^\varepsilon(x, t)$ dependente das variáveis espacial x e temporal t , sendo o fenômeno físico descrito pela seguinte equação parabólica

$$c\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}\right) = f(x, t), \quad x \in (0, 1), \quad t > 0, \quad (3.1)$$

com condições de contorno e condição inicial dadas por, respectivamente,

$$u^\varepsilon(0, t) = 0, \quad u^\varepsilon(1, t) = 0, \quad t > 0, \quad (3.2)$$

$$u^\varepsilon(x, 0) = \psi(x), \quad x \in (0, 1). \quad (3.3)$$

As funções c , k , f e ψ , que representam, respectivamente, a capacidade calorífica, a condutividade térmica, a fonte de calor, e a distribuição inicial da temperatura, são diferenciáveis, sendo c e k ε -periódicas, positivas e limitadas, e ψ é tal que

$$\psi(0) = \psi(1) = 0. \quad (3.4)$$

3.1.2 Aplicação do MHA

Inicialmente, propõe-se a solução de (3.1) como uma solução assintótica formal a partir da expansão assintótica $u^{(2)}$, ou seja,

$$u^{(2)}(x, t, \varepsilon) = u_0(x, y, t) + \varepsilon u_1(x, y, t) + \varepsilon^2 u_2(x, y, t), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad (3.5)$$

onde u_i , $i = 0, 1, 2$, são funções 1-periódicas com respeito a y .

Substituindo (3.5) em (3.1), obtém-se

$$c\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x}\right) - f(x, t) = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (3.6)$$

$$c(y)\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial t} + \varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(y)\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial x} + \varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)\right) - f(x, t) = \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (3.7)$$

Aplicando a regra da cadeia e organizando em potências de ε segue de (3.7)

$$\begin{aligned} c(y)\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial t} + \varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial t}\right) - \varepsilon^{-2}\mathcal{L}_{yy}u_0 - \varepsilon^{-1}(\mathcal{L}_{yx}u_0 + \mathcal{L}_{xy}u_0 + \mathcal{L}_{yy}u_1) \\ - (\mathcal{L}_{xx}u_0 + \mathcal{L}_{yx}u_1 + \mathcal{L}_{xy}u_1 + \mathcal{L}_{yy}u_2) - f(x, t) = \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde $\mathcal{L}_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(k(y)\frac{\partial}{\partial\beta}\right)$. Assim, de (3.8) obtém-se uma sequência de equações recorrentes, uma para cada potência de ε :

$$\varepsilon^{-2} : \mathcal{L}_{yy}u_0 = 0, \quad (3.9)$$

$$\varepsilon^{-1} : \mathcal{L}_{yy}u_1 = -\mathcal{L}_{yx}u_0 - \mathcal{L}_{xy}u_0, \quad (3.10)$$

$$\varepsilon^0 : \mathcal{L}_{yy}u_2 = c(y)\frac{\partial u_0}{\partial t} - \mathcal{L}_{xx}u_0 - \mathcal{L}_{yx}u_1 - \mathcal{L}_{xy}u_1 - f(x, t). \quad (3.11)$$

A sequência de equações (3.9)-(3.11) devem ser complementadas com as condições de contorno e iniciais obtidas ao aplicar (3.5) em (3.2) e (3.3), ou seja, de

$$u^{(2)}(0, t, \varepsilon) = u_0(0, 0, t) + \varepsilon u_1(0, 0, t) + \varepsilon^2 u_2(0, 0, t) \approx 0, \quad (3.12)$$

segue que

$$u_0(0, 0, t) = 0, \quad (3.13)$$

$$u_1(0, 0, t) = 0, \quad (3.14)$$

$$u_2(0, 0, t) = 0, \quad (3.15)$$

e de

$$u^{(2)}(1, t, \varepsilon) = u_0\left(1, \frac{1}{\varepsilon}, t\right) + \varepsilon u_1\left(1, \frac{1}{\varepsilon}, t\right) + \varepsilon^2 u_2\left(1, \frac{1}{\varepsilon}, t\right) \approx 0, \quad (3.16)$$

segue que

$$u_0\left(1, \frac{1}{\varepsilon}, t\right) = 0, \quad (3.17)$$

$$u_1\left(1, \frac{1}{\varepsilon}, t\right) = 0, \quad (3.18)$$

$$u_2\left(1, \frac{1}{\varepsilon}, t\right) = 0, \quad (3.19)$$

e, por último, da condição inicial

$$u^{(2)}(x, 0, \varepsilon) = u_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, 0\right) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, 0\right) + \varepsilon^2 u_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, 0\right) \approx \psi(x), \quad (3.20)$$

temos que

$$u_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, 0\right) = \psi(x), \quad (3.21)$$

$$u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, 0\right) = 0, \quad (3.22)$$

$$u_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, 0\right) = 0. \quad (3.23)$$

Assim das equações (3.9), (3.10) e (3.11) complementadas com as condições obtidas de (3.12), (3.16), (3.20) determinam-se u_0 , u_1 e u_2 , respectivamente, sendo estes os termos que compõem a solução assintótica formal.

Do problema definido por (3.9), (3.13) e (3.17), seguindo o procedimento realizado em (2.38)-(2.43) obtém-se que u_0 não depende da variável rápida y , ou seja, $u_0(x, y, t) = u_0(x, t)$. Note que este resultado também pode ser obtido diretamente do Lema 2.3.1. Com efeito, sejam $x \in [0, 1]$ e $t > 0$ fixos, e $N(y) = u_0(x, y, t)$. De aplicar o Lema 2.3.1 em (3.9) com $a(y) = k(y)$, segue que existe $u_0(x, y, t)$ solução 1-periódica em y , única salvo uma constante aditiva, ou seja, $u_0(x, y, t) = \tilde{u}_0(x, y, t) + C(x, t)$. Observe que $\tilde{u}_0(x, y, t) \equiv 0$ é solução. Logo, $u_0(x, y, t) = C(x, t)$, ou seja, u_0 não depende de y .

A seguir, para determinar u_1 a partir da equação (3.10), considere o resultado anterior, onde $u_0 = u_0(x, t)$. Assim, de (3.10), tem-se que

$$\mathcal{L}_{yy}u_1 = -\mathcal{L}_{yx}u_0 \quad (3.24)$$

pois $u_0(x, t)$ não depende da variável y . Aplicando-se o Lema 2.3.1 em (3.24) e comparando os elementos do Lema com tal equação, temos que $L = \mathcal{L}_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(k(y) \frac{\partial}{\partial y} \right)$, $N = u_1$ e $F = -\mathcal{L}_{yx}u_0$. A partir disto, a equação (3.24) assume uma solução u_1 1-periódica com respeito a y se, e somente se, $\langle \mathcal{L}_{yx}u_0 \rangle = 0$. De fato, isso ocorre

$$\langle \mathcal{L}_{yx}u_0 \rangle = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \left(k(y) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) dy = \frac{\partial u_0}{\partial x} \int_0^1 \frac{\partial k}{\partial y} dy = 0, \quad (3.25)$$

pois $k(1) - k(0) = 0$. Portanto, (3.10) admite a solução u_1 , 1-periódica com respeito a variável rápida y . Por outro lado, supõe que u_1 seja da forma

$$u_1(x, y, t) = N_1(y) \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad (3.26)$$

pela linearidade do operador. Assim, quando (3.26) for substituída em (3.24), tem-se

$$\frac{d}{dy} \left(k(y) \frac{dN_1}{dy} + k(y) \right) \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0.$$

Como hipótese, assume-se que $\frac{\partial u_0}{\partial x} \neq 0$ para todo $x \in (0, 1)$. Logo,

$$\frac{d}{dy} \left(k(y) \frac{dN_1}{dy} + k(y) \right) = 0. \quad (3.27)$$

Note que (3.27) é a chamada equação do problema local. Ao considerar a condição $N_1(0) = 0$ para unicidade da solução, a qual resulta de aplicar (3.26) em (3.14), estabelece-se o problema local dado por

$$\mathcal{P}_L : \begin{cases} \frac{d}{dy} \left(k(y) \frac{dN_1}{dy} + k(y) \right) = 0, & y \in (0, 1), \\ N_1(0) = 0. \end{cases} \quad (3.28)$$

A solução do problema (3.28) é encontrado de forma análoga ao do problema (2.51), ou seja, seguindo os processos de (2.51)-(2.57) obtém-se o coeficiente efetivo

$$\hat{k} = \left(\int_0^1 \frac{1}{k(y)} dy \right)^{-1} = \langle k^{-1}(y) \rangle^{-1}, \quad (3.29)$$

e que

$$N_1(y) = \int_0^y \left(\frac{\hat{k}}{k(s)} - 1 \right) ds. \quad (3.30)$$

Portanto, a solução u_1 será da forma

$$u_1(x, y, t) = \frac{\partial u_0}{\partial x} \int_0^y \left(\frac{\hat{k}}{k(s)} - 1 \right) ds. \quad (3.31)$$

Agora, para determinar u_2 , solução 1-periódica em y de (3.11), deve-se aplicar o Lema 2.3.1, com $L = \mathcal{L}_{yy}$, $N = u_2$ e $F = c(y) \frac{\partial u_0}{\partial t} - \mathcal{L}_{xx}u_0 - \mathcal{L}_{yx}u_1 - \mathcal{L}_{xy}u_1 - f(x, t)$, de onde segue a condição

$$\langle F \rangle = \left\langle c(y) \frac{\partial u_0}{\partial t} - \mathcal{L}_{xx}u_0 - \mathcal{L}_{yx}u_1 - \mathcal{L}_{xy}u_1 - f(x, t) \right\rangle = 0, \quad (3.32)$$

em que, de simplificar, obtém-se

$$0 = \left\langle -\frac{\partial}{\partial y} (k(y)N_1(y)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \hat{k} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + c(y) \frac{\partial u_0}{\partial t} - f(x, t) \right\rangle. \quad (3.33)$$

Da linearidade do operador de valor médio tem-se

$$0 = \left\langle -\frac{\partial}{\partial y} (k(y)N_1(y)) \right\rangle \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \hat{k} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \langle c(y) \rangle \frac{\partial u_0}{\partial t} - f(x, t), \quad (3.34)$$

e, como k e N_1 são 1-periódicas em y , tem-se que $k(1)N_1(1) - k(0)N_1(0) = 0$.

Logo, (3.34) se resume a

$$\langle c(y) \rangle \frac{\partial u_0}{\partial t} - \hat{k} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = f(x, t), \quad (3.35)$$

sendo esta a chamada equação do problema homogeneizado, cuja solução u_0 faz satisfazer a condição necessária e suficiente para a existência de u_2 , solução 1-periódica de (3.11). Para obter u_2 explicitamente, substitui-se $f(x, t)$ de (3.35) em (3.11), de onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(k(y) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) &= -k(y) \frac{dN_1}{dy} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{d}{dy} (k(y)N_1(y)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - k(y) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \\ &\quad + \hat{k} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + c(y) \frac{\partial u_0}{\partial t} - \langle c(y) \rangle \frac{\partial u_0}{\partial t}, \\ &= -(\hat{k} - k(y)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{d}{dy} (k(y)N_1(y)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \\ &\quad - k(y) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \hat{k} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + c(y) \frac{\partial u_0}{\partial t} - \langle c(y) \rangle \frac{\partial u_0}{\partial t}, \\ &= -\frac{d}{dy} (k(y)N_1(y)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (c(y) - \langle c(y) \rangle) \frac{\partial u_0}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Considera-se que a equação (3.36) assuma uma solução u_2 da forma

$$u_2(x, y, t) = u_{2a}(x, y, t) + u_{2b}(x, y, t) = N_2(y) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + M(y) \frac{\partial u_0}{\partial t}. \quad (3.37)$$

Note que, em virtude da linearidade do operador \mathcal{L}_{yy} , cumpre-se o princípio de superposição, e ao assumir u_2 na forma da equação (3.37) em (3.36), é possível obter dois problemas desacoplados dados pelas equações:

$$\mathcal{P}_{2a} : \mathcal{L}_{yy} u_{2a} = \frac{\partial}{\partial y} \left[k(y) \frac{\partial}{\partial y} \left(N_2(y) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) \right] = -\frac{d}{dy} (k(y)N_1(y)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \quad (3.38)$$

e

$$\mathcal{P}_{2b} : \mathcal{L}_{yy} u_{2b} = \frac{\partial}{\partial y} \left[k(y) \frac{\partial}{\partial y} \left(M(y) \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) \right] = (c(y) - \langle c(y) \rangle) \frac{\partial u_0}{\partial t}. \quad (3.39)$$

Para o problema \mathcal{P}_{2a} tem-se que:

$$\frac{d}{dy} \left[k(y) \frac{dN_2}{dy} + k(y)N_1(y) \right] \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = 0. \quad (3.40)$$

Considerando $\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \neq 0$ tem-se

$$\frac{d}{dy} \left(k(y) \frac{dN_2}{dy} \right) = -\frac{d}{dy} (k(y) N_1(y)), \quad (3.41)$$

para a qual o Lema 2.3.1 garante que existe N_2 solução 1-periódica.

Logo, de integrar tem-se

$$\frac{dN_2}{dy} + N_1(y) = \frac{p}{k(y)}, \quad (3.42)$$

onde p é uma constante real que deve ser encontrada. Para isso, calcula-se a média de (3.42), considerando que $N_2(y)$ é uma função 1-periódica. Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dN_2}{dy} dy + \int_0^1 N_1(y) dy &= \int_0^1 \frac{p}{k(y)} dy \Rightarrow \langle N_1(y) \rangle = p \langle k^{-1}(y) \rangle, \\ \Rightarrow p &= \langle N_1(y) \rangle \langle k^{-1}(y) \rangle^{-1} = \langle N_1(y) \rangle \widehat{k}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Agora, ao substituir p obtido em (3.43) na equação (3.42) se obtém

$$\frac{dN_2}{dy} = \frac{\widehat{k}}{k(y)} \langle N_1(y) \rangle - N_1(y). \quad (3.44)$$

Integrando (3.44) de 0 a y resulta que

$$N_2(y) - N_2(0) = \int_0^y \left(\frac{\widehat{k} \langle N_1(s) \rangle}{k(s)} - N_1(s) \right) ds, \quad (3.45)$$

e impondo a condição $N_2(0) = 0$, obtém-se a solução explícita de $N_2(y)$, expressa por

$$N_2(y) = \int_0^y \left(\frac{\widehat{k} \langle N_1(s) \rangle}{k(s)} - N_1(s) \right) ds. \quad (3.46)$$

Note que $N_2(y)$ é uma função 1-periódica, ou seja, cumpre que $N_2(y+1) - N_2(y) = 0$.

Demonstração: Com efeito,

$$\begin{aligned}
N_2(s)|_{s=y}^{s=y+1} &= \widehat{k}\langle N_1(y) \rangle \int_0^{y+1} \frac{ds}{k(s)} - \int_0^{y+1} N_1(s)ds - \widehat{k}\langle N_1(y) \rangle \int_0^y \frac{ds}{k(s)} + \int_0^y N_1(s)ds \\
&= \widehat{k}\langle N_1(y) \rangle \left(\int_0^{y+1} \frac{ds}{k(s)} - \int_0^y \frac{ds}{k(s)} \right) - \left(\int_0^{y+1} N_1(s)ds - \int_0^y N_1(s)ds \right) \\
&= \widehat{k}\langle N_1(y) \rangle \int_y^{y+1} \frac{ds}{k(s)} - \int_y^{y+1} N_1(s)ds \\
&= \widehat{k}\langle N_1(y) \rangle \int_0^1 \frac{ds}{k(s)} - \int_0^1 N_1(s)ds \\
&= \langle k^{-1}(y) \rangle^{-1} \langle N_1(y) \rangle \langle k^{-1}(y) \rangle - \langle N_1(y) \rangle \\
&= \langle N_1(y) \rangle - \langle N_1(y) \rangle \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

□

Agora, para resolver o problema \mathcal{P}_{2b} , considere a equação (3.39):

$$\frac{d}{dy} \left(k(y) \frac{dM}{dy} \right) \frac{\partial u_0}{\partial t} = (c(y) - \langle c(y) \rangle) \frac{\partial u_0}{\partial t}, \tag{3.48}$$

de onde tem-se,

$$\frac{d}{dy} \left(k(y) \frac{dM}{dy} \right) = c(y) - \langle c(y) \rangle. \tag{3.49}$$

Observe que a existência de $M(y)$, solução 1-periódica de (3.49), é garantida mediante a aplicação do Lema 2.3.1. Portanto, de integrar (3.49) e isolar o termo da derivada de $M(y)$ obtém-se que

$$\frac{dM}{dy} = \frac{1}{k(y)} \int_0^y (c(s) - \langle c(y) \rangle) ds - \frac{q}{k(y)}, \tag{3.50}$$

onde q é uma constante que, para ser obtida, calcula-se a média em (3.50). Logo,

$$M(1) - M(0) = \int_0^1 \frac{1}{k(y)} \int_0^y (c(s) - \langle c(y) \rangle) ds dy - \int_0^1 \frac{q}{k(y)} dy, \tag{3.51}$$

e pela 1-periodicidade de $M(y)$ resulta

$$0 = \int_0^1 \frac{1}{k(y)} \int_0^y (c(s) - \langle c(y) \rangle) ds dy - \left\langle \frac{1}{k(y)} \right\rangle q. \tag{3.52}$$

Portanto, a constante q é dada por

$$q = \hat{k} \int_0^1 \frac{1}{k(y)} \int_0^y (c(s) - \langle c(y) \rangle) ds dy. \quad (3.53)$$

Assim, de integrar (3.50) obtém-se que

$$M(y) - M(0) = \int_0^y \frac{1}{k(w)} \left[\int_0^w (c(s) - \langle c(y) \rangle) ds - q \right] dw, \quad (3.54)$$

da qual, impondo que $M(0) = 0$, tem-se que

$$M(y) = \int_0^y \frac{1}{k(w)} \left[\int_0^w (c(s) - \langle c(y) \rangle) ds - q \right] dw \quad (3.55)$$

em que a constante q é dada por (3.53). A demonstração da 1-periodicidade de $M(y)$ dada por (3.55) é análoga àquela realizada para $N_2(y)$, ou seja, deve cumprir-se a igualdade $M(y+1) - M(y) = 0$.

Demonstração: Com efeito,

$$\begin{aligned} M(y+1) - M(y) &= \int_0^1 \frac{1}{k(w)} \left[\int_0^w (c(s) - \langle c(s) \rangle) ds - q \right] dw, \\ &= \int_0^1 \frac{1}{k(w)} \int_0^w (c(s) - \langle c(y) \rangle) ds dw - q \int_0^1 \frac{1}{k(w)} dw, \\ &= \int_0^1 \frac{1}{k(w)} \int_0^w (c(s) - \langle c(y) \rangle) ds dw - q \hat{k}^{-1}, \\ &= \int_0^1 \frac{1}{k(w)} \int_0^w (c(s) - \langle c(y) \rangle) ds dw \\ &\quad - \hat{k}^{-1} \hat{k} \int_0^1 \frac{1}{k(w)} \int_0^w (c(s) - \langle c(y) \rangle) ds dw = 0. \end{aligned} \quad (3.56)$$

□

Portanto u_2 é definido por

$$u_2(x, y, t) = u_{2a}(x, y, t) + u_{2b}(x, y, t) = N_2(y) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + M(y) \frac{\partial u_0}{\partial t}, \quad (3.57)$$

onde N_2 , \hat{k} , M e q são obtidos por (3.46), (3.29), (3.55) e (3.53), respectivamente. E assim, a s.a.f. do problema original é

$$u^{(2)}(x, t, \varepsilon) = u_0(x, t) + \varepsilon N_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u_0}{\partial x} + \varepsilon^2 \left(N_2 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + M \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u_0}{\partial t} \right). \quad (3.58)$$

3.1.3 Relação de proximidade

Nesta seção, prova-se que para todo $T > 0$ fixo, cumpre-se a relação

$$\|u^\varepsilon - u_0\|_{H_0^1([0,1] \times [0,T])} = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}). \quad (3.59)$$

Para mostrar que (3.59) é válida, utiliza-se o princípio do máximo generalizado para equações parabólicas (ver anexo A.2) (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

Demonstração: Considere uma expansão assintótica do problema (3.1)-(3.3) da forma

$$u^{(1)}(x, t, \varepsilon) = u_0(x, t) + \varepsilon u_1(x, y, t), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}. \quad (3.60)$$

Agora, deve-se procurar uma estimativa para $\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H_0^1([0,1] \times [0,T])}$. Para isso, considere dois problemas: o problema dado por (3.1)-(3.3) e o problema respectivo para $u^{(1)}$. Além disso, define-se o operador diferencial \mathcal{L}^ε por

$$\mathcal{L}^\varepsilon = c \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial}{\partial x} \right). \quad (3.61)$$

Ao reescrever o problema (3.1)-(3.3) utilizando (3.61), tem-se o problema

$$\mathcal{P}_1 : \begin{cases} \mathcal{L}^\varepsilon u^\varepsilon = f(x, t), \quad x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ u^\varepsilon(0, t) = u^\varepsilon(1, t) = 0, \quad t > 0, \\ u^\varepsilon(x, 0) = \psi(x), \quad x \in (0, 1), \end{cases}$$

e para o problema (3.1)-(3.3) com $u^{(1)}$, obtém-se o problema

$$\mathcal{P}_2 : \begin{cases} \mathcal{L}^\varepsilon u^{(1)} = f(x, t) - F(x, t, \varepsilon), \quad x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ u^{(1)}(0, t, \varepsilon) = u^{(1)}(1, t, \varepsilon) = 0, \quad t > 0, \\ u^{(1)}(x, 0, \varepsilon) = \psi(x), \quad x \in (0, 1), \end{cases}$$

onde F é o erro de assumir (3.60) como solução de \mathcal{P}_1 . De subtrair \mathcal{P}_2 de \mathcal{P}_1 , tem-se

$$\mathcal{P}_3 : \begin{cases} \mathcal{L}^\varepsilon(u^\varepsilon - u^{(1)}) = F(x, t, \varepsilon), \quad x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ u^\varepsilon(0, t) - u^{(1)}(0, t, \varepsilon) = 0, \quad t > 0, \\ u^\varepsilon(1, t) - u^{(1)}(1, t, \varepsilon) = 0, \quad t > 0, \\ u^\varepsilon(x, 0) - u^{(1)}(x, 0, \varepsilon) = 0, \quad x \in (0, 1). \end{cases}$$

Ao aplicar o princípio do máximo ao problema \mathcal{P}_3 , tem-se que a solução deste existe e é única, e ainda, que para esta solução, a seguinte estimativa é válida:

$$\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H_0^1([0,1] \times [0,T])} \leq c(T) \|F\|_{L^2([0,1] \times [0,T])}. \quad (3.62)$$

A estimativa (3.62) depende de se ter uma expressão para $F(x, t, \varepsilon)$. Assim, de \mathcal{P}_2 :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^\varepsilon u^{(1)} - f(x, t) &= c(y) \frac{\partial}{\partial t} (u_0(x, t) + \varepsilon u_1(x, y, t)) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} \left(k(y) \frac{\partial}{\partial x} (u_0(x, t) + \varepsilon u_1(x, y, t)) \right) - f(x, t), \\ &= c(y) \frac{\partial}{\partial t} \left(u_0(x, t) + \varepsilon N_1(y) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} \left(k(y) \frac{\partial}{\partial x} \left(u_0(x, t) + \varepsilon N_1(y) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right) - f(x, t), \quad (3.63)\end{aligned}$$

e de aplicar a regra da cadeia se obtém

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^\varepsilon u^{(1)} - f(x, t) &= c(y) \frac{\partial u_0}{\partial t} + \varepsilon c(y) N_1(y) \frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial x} - \hat{k} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \\ &\quad - \frac{d}{dy} (k(y) N_1(y)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \varepsilon k(y) N_1(y) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - f(x, t), \quad (3.64)\end{aligned}$$

onde $\hat{k} = k(y) + k(y) \frac{dN_1}{dy}$, considerando (3.30).

Por outro lado, considere (3.11) para este caso no qual $u_2 = 0$. Assim, tem-se que

$$\begin{aligned}0 &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(k(y) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(k(y) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(k(y) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) - f(x, t) + c(y) \frac{\partial u_0}{\partial t}, \\ &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(k(y) \frac{\partial}{\partial x} \left(N_1(y) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(k(y) \frac{\partial}{\partial y} \left(N_1(y) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(k(y) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \\ &\quad - f(x, t) + c(y) \frac{\partial u_0}{\partial t}, \\ &= -\frac{d}{dy} (k(y) N_1(y)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - k(y) \frac{dN_1}{dy} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - k(y) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - f(x, t) + c(y) \frac{\partial u_0}{\partial t}, \\ &= -\frac{d}{dy} (k(y) N_1(y)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \hat{k} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - f(x, t) + c(y) \frac{\partial u_0}{\partial t}. \quad (3.65)\end{aligned}$$

De (3.65) é possível extrair o seguinte termo:

$$-f(x, t) + c(y) \frac{\partial u_0}{\partial t} = \frac{d}{dy} (k(y) N_1(y)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \hat{k} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \quad (3.66)$$

de modo a simplificar a expressão (3.64). Logo, ao substituir (3.66) em (3.64) resulta em

$$\mathcal{L}^\varepsilon u^{(1)} - f(x, t) = \varepsilon c(y) N_1(y) \frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial x} - \varepsilon k(y) N_1(y) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} = -F(x, t, \varepsilon), \quad (3.67)$$

ou seja,

$$F(x, t, \varepsilon) = -\varepsilon c(y) N_1(y) \frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial x} + \varepsilon k(y) N_1(y) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}. \quad (3.68)$$

Logo, a estimativa de $\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H_0^1([0,1] \times [0,T])}$ é calculada pela norma L^2

$$\|u\|_{L^2([0,1] \times [0,T])} = \sqrt{\int_0^T \int_0^1 u^2 dx dt}. \quad (3.69)$$

Substituindo u de (3.69) por $F(x, t, \varepsilon)$ de (3.68), segue, com $y = \frac{x}{\varepsilon}$, que

$$\|F\|_{L^2([0,1] \times [0,T])}^2 = \varepsilon^2 \int_0^T \int_0^1 \left(k(y) N_1(y) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - c(y) N_1(y) \frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial x} \right)^2 dx dt. \quad (3.70)$$

Note que

$$\begin{aligned} \left(k(y) N_1(y) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - c(y) N_1(y) \frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial x} \right)^2 &= \left| k(y) N_1(y) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - c(y) N_1(y) \frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial x} \right|^2 \\ &\leq \left(|k(y) N_1(y)| \left| \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} \right| + |c(y) N_1(y)| \left| \frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial x} \right| \right)^2. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Assumindo que $u_0(\cdot, t) \in C^3([0, 1])$ para todo $t \in [0, T]$ e que $u_0(x, \cdot) \in C^1([0, T])$ para todo $x \in [0, 1]$ tem-se, pelo Teorema de Weierstrass, que existem constantes $A_1, A_2 > 0$ tais que

$$\left| \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} \right| \leq A_1 \text{ e } \left| \frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial x} \right| \leq A_2. \quad (3.72)$$

Adotando $A = \max\{A_1, A_2\}$ e substituindo (3.72) em (3.71) resulta que

$$\begin{aligned} \left(|k(y) N_1(y)| \left| \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} \right| + |c(y) N_1(y)| \left| \frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial x} \right| \right)^2 &\leq A^2 (|k(y) N_1(y)| + |c(y) N_1(y)|)^2 \\ &= A^2 (k(y) N_1(y) + c(y) N_1(y))^2 \\ &= A^2 N_1^2(y) (k(y) + c(y))^2. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Logo, de substituir (3.73) em (3.70) obtém-se, com $y = \frac{x}{\varepsilon}$, que

$$\begin{aligned} \|F\|_{L^2([0,1] \times [0,T])}^2 &\leq \varepsilon^2 A^2 \int_0^T \int_0^1 N_1^2(y) (k(y) + c(y))^2 dx dt, \\ &= \varepsilon^2 A^2 T \int_0^1 N_1^2(y) (k(y) + c(y))^2 dx, \\ &= \varepsilon^2 A^2 T \int_0^1 N_1^2 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \left(c \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) + k \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right)^2 dx. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Note agora que, sendo $N_1, c, k \in C^1([0, \varepsilon^{-1}])$, tem-se novamente pelo Teorema de Weierstrass, que existem constantes $B_1, B_2, B_3 > 0$ tais que, para todo $x \in [0, \varepsilon^{-1}]$,

$$\left| N_1 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right| \leq B_1, \quad \left| c \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right| \leq B_2 \text{ e } \left| k \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right| \leq B_3, \quad (3.75)$$

Adotando $B = \max\{B_1, B_2, B_3\}$ e substituindo (3.75) em (3.74) resulta que

$$\|F\|_{L^2([0,1]\times[0,T])}^2 \leq 4\varepsilon^2 A^2 TB^4 \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} dx = 4\varepsilon^2 A^2 TB^4 \frac{1}{\varepsilon} = 4\varepsilon A^2 TB^4. \quad (3.76)$$

Logo,

$$\|F\|_{L^2([0,1]\times[0,T])} \leq 2\sqrt{\varepsilon} AB^2 \sqrt{T}. \quad (3.77)$$

e de considerar tal estimativa em (3.62), tem-se

$$\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H_0^1([0,1]\times[0,T])} \leq c(T) \|F\|_{L^2([0,1]\times[0,T])} \leq 2\sqrt{\varepsilon} AB^2 \sqrt{T}, \quad (3.78)$$

onde pode-se assumir que $c(T) = \sqrt{T}$, para algum $T > 0$. Portanto, conclui-se que

$$\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H_0^1([0,1]\times[0,T])} = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}). \quad (3.79)$$

De maneira análoga, a seguinte proximidade é obtida:

$$\|u^{(1)} - u_0\|_{H_0^1([0,1]\times[0,T])} = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}). \quad (3.80)$$

Assim, de (3.59), (3.79) e (3.80), com uso da desigualdade triangular, segue que

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon - u_0\|_{H_0^1([0,1]\times[0,T])} &= \|u^\varepsilon - u^{(1)} + u^{(1)} - u_0\|_{H_0^1([0,1]\times[0,T])}, \\ &\leq \|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H_0^1([0,1]\times[0,T])} + \|u^{(1)} - u_0\|_{H_0^1([0,1]\times[0,T])}, \\ &= \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}) + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}), \\ &= \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}). \end{aligned} \quad (3.81)$$

□

3.1.4 Exemplo

Para ilustrar os resultados obtidos anteriormente, propõe-se o seguinte exemplo que contempla todas as condições enunciadas, tal como a diferenciabilidade, positividade, caráter limitado e periodicidade dos coeficientes, assim como condições contornos de Dirichlet homogêneas e condições de compatibilidade. Para isso, é necessário resolver quatro problemas, respectivamente: o do coeficiente efetivo, o problema homogeneizado, os problemas locais para determinar u_1 e u_2 , obtendo assim, todos os termos da assintótica, e por último o problema original. Neste exemplo, assume-se em (3.1)-(3.4) que $c\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = 1$, $k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = 1 + \frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{\varepsilon}\right)$, $\psi(x) = 0$ e $f(x, t) = e^{-t}$, os quais satisfazem as condições mencionadas acima. Tais características do coeficiente k^ε , inclusive o caráter rapidamente oscilante, podem-se observar na Figura 5.

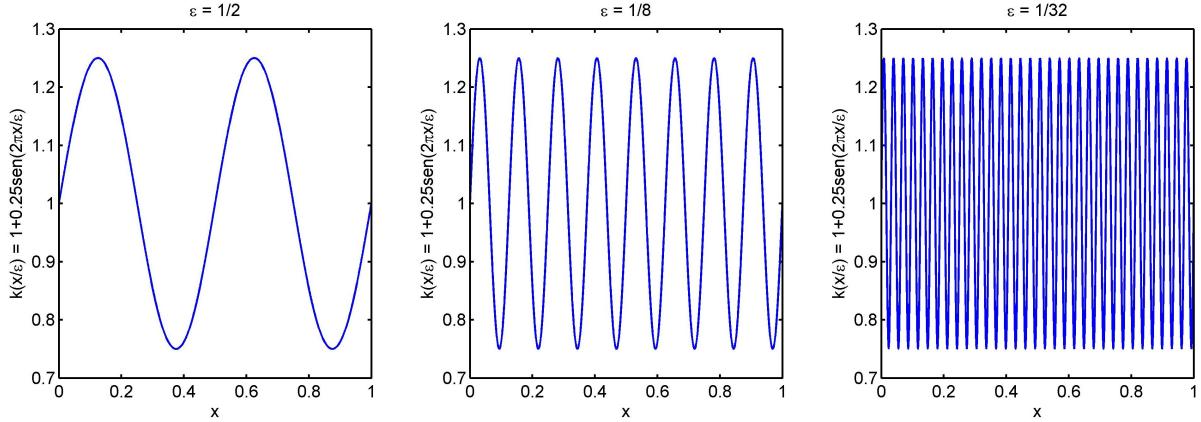


Figura 5: Comportamento do coeficiente k^ε .

Na Figura 6 apresentam-se (a) a solução u^ε do problema original, (b) a solução u_0 do problema homogeneizado, e (c) a solução assintótica $u^{(1)}$, para $\varepsilon = \frac{1}{16}$. E ainda, em (d), (e) e (f), destes resultados podem-se observar a convergência da solução u^ε do problema original e da solução assintótica $u^{(1)}$ para a solução u_0 do problema homogeneizado quando o parâmetro pequeno decresce para zero, $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

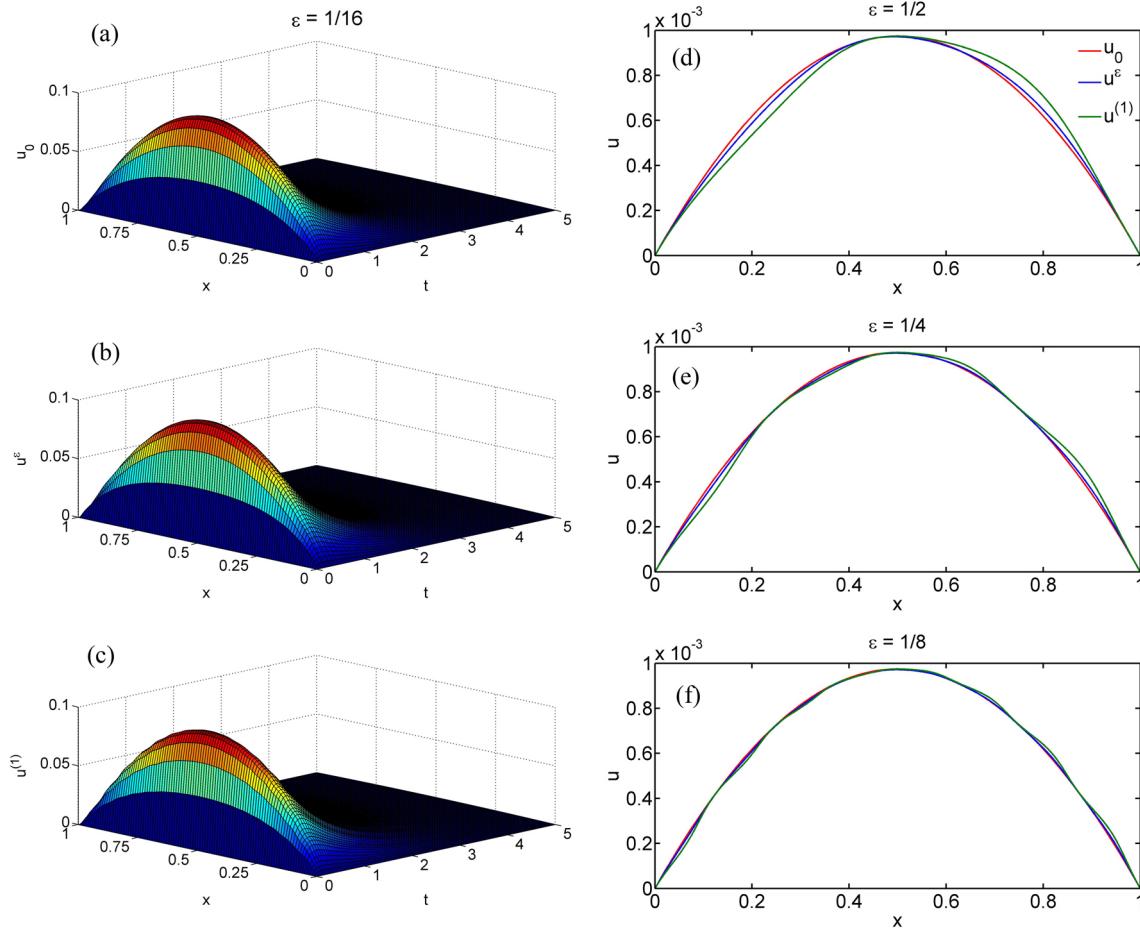


Figura 6: Soluções u_0 , u^ε e $u^{(1)}$, para $\varepsilon = \frac{1}{16}$, e proximidade entre elas para $\varepsilon = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$.

A seguir, descreve-se a obtenção dos resultados apresentados na Figura 6.

1. Coeficiente efetivo

O coeficiente efetivo é o coeficiente da equação do problema homogeneizado e é determinado por (3.29). Em particular, de (3.29) tem-se

$$\hat{k} = \left[\int_0^1 \left(1 + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2\pi y) \right)^{-1} dy \right]^{-1}, \quad (3.82)$$

que é resolvida pelo método dos trapézios (ver anexo B.1), de onde $\hat{k} \approx 0.968$.

2. Problema homogeneizado

Obtidos o coeficiente efetivo \hat{k} e a média de $c(y)$, sendo $\langle c \rangle = 1$ e $\hat{k} \approx 0.968$, o problema homogeneizado se estabelece como

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial t} - \hat{k} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = e^{-t}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ u_0(0, t) = 0, u_0(1, t) = 0, & t > 0, \\ u_0(x, 0) = 0, & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (3.83)$$

A solução do problema (3.83) é determinada mediante a aplicação do Princípio de Duhamel (COURANT; HILBERT, 1989, p. 202), como

$$u_0(x, t) = \int_0^t v_0^{(\tau)}(x, t - \tau) d\tau, \quad (3.84)$$

onde $v_0^{(\tau)}$ é solução do problema

$$\mathcal{P}^{(\tau)} : \begin{cases} \frac{\partial v_0^{(\tau)}}{\partial t} - \hat{k} \frac{\partial^2 v_0^{(\tau)}}{\partial x^2} = 0, & x \in (0, 1), t > 0, \\ v_0^{(\tau)}(0, t) = 0, v_0^{(\tau)}(1, t) = 0, & t > 0, \\ v_0^{(\tau)}(x, 0) = e^{-\tau}, & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (3.85)$$

Deste desenvolvimento (ver anexo B.4) obtém-se a solução de (3.83):

$$u_0(x, t) = 4 \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp \left\{ -(2n-1)^2 \pi^2 \hat{k} (t-\tau) - \tau \right\}}{(2n-1)\pi} \operatorname{sen}((2n-1)\pi x) d\tau. \quad (3.86)$$

3. Problema local

A fórmula (3.30) fornece a solução $N_1(y)$ do problema local. Assim,

$$N_1(y) = \int_0^y \left[\hat{k} \left(1 + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2\pi s) \right)^{-1} - 1 \right] ds. \quad (3.87)$$

Como a solução local $N_1(y)$ está definida no intervalo $[0, 1]$, então, para cada ponto fixo $y_i \in [0, 1]$, $N_1(y_i)$ calcula-se numericamente pelo método dos trapézios mediante a fórmula

$$N_1(y_i) \approx \sum_{j=0}^n I_j = \sum_{j=0}^n \left(\frac{f_{i+1} + f_i}{2} \right) h, \quad (3.88)$$

onde $h = \frac{y_i}{n}$, $f_j = \frac{\hat{k}}{1 + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2\pi s)} - 1$ e $y_i = hj$, $j = 0, \dots, n = 10000$.

4. Problema original

Neste caso, o problema (3.1)-(3.4) se escreve da forma

$$\begin{cases} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 + \frac{1}{4} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi x}{\varepsilon} \right) \right) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right] = e^{-t}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ u^\varepsilon(0, t) = 0, u^\varepsilon(1, t) = 0, & t > 0, \\ u^\varepsilon(x, 0) = 0, & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (3.89)$$

Este problema foi resolvido numéricamente pelo método de diferenças finitas (Crank-Nicolson) (ver anexo B.3.1), sendo tal escolha justificada devido a equação do problema ser do tipo parabólica.

3.2 Equação da onda

3.2.1 Formulação do problema

O problema consiste em encontrar o deslocamento vertical u^ε de um ponto material de uma corda elástica tensionada, o qual está localizado na posição x no instante de tempo t sob a ação de uma força $f(x, t)$ e densidade de massa unitária. Assume-se que os extremos da corda estão fixos. Assim, o fenômeno da vibração vertical da corda é descrito pela seguinte equação hiperbólica, chamada de equação da onda,

$$\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(E \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right) = f(x, t), \quad x \in (0, 1), t > 0, \quad (3.90)$$

sujeita às condições de contorno (extremos imóveis)

$$u^\varepsilon(0, t) = u^\varepsilon(1, t) = 0, \quad t > 0, \quad (3.91)$$

e às condições iniciais (deslocamentos e velocidades iniciais)

$$u^\varepsilon(x, 0) = p(x), \quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x, 0) = q(x), \quad x \in (0, 1), \quad (3.92)$$

onde E , f , p e q são funções diferenciáveis, que representam a densidade de massa, a propriedade elástica (módulo de Young) da corda, a força de corpo, e os deslocamentos e velocidades iniciais, E é ε -periódica, positiva e limitada, e ainda, devem ser satisfeitas as condições de compatibilidade $p(0) = p(1) = 0$.

3.2.2 Aplicação do MHA

O processo de homogeneização assintótica do problema (3.90)-(3.92) é realizado de forma análoga ao da equação de calor. A diferença agora é a segunda derivada com respeito a t e uma condição inicial extra. No processo, obtém-se a partir da substituição da solução assintótica aproximada de $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ dada por (3.5) a seguinte sequência de problemas recorrentes:

$$\varepsilon^{-2} : \mathcal{L}_{yy}u_0 = 0, \quad (3.93)$$

$$\varepsilon^{-1} : \mathcal{L}_{yx}u_0 + \mathcal{L}_{xy}u_0 + \mathcal{L}_{yy}u_1 = 0, \quad (3.94)$$

$$\varepsilon^0 : \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \mathcal{L}_{xx}u_0 - \mathcal{L}_{yy}u_2 - \mathcal{L}_{yx}u_1 - \mathcal{L}_{xy}u_1 - f(x, t) = 0, \quad (3.95)$$

onde $\mathcal{L}_{\alpha\beta}$ é o operador linear definido por

$$\mathcal{L}_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(E(y) \frac{\partial}{\partial \beta} \right), \quad \alpha, \beta \in \{x, y\}. \quad (3.96)$$

De substituir (3.5) nas condições (3.91) e (3.92) e separar por potências de ε tem-se que

$$\varepsilon^0 : \begin{cases} u_0(0, 0, t) = 0, \\ u_0(1, \frac{1}{\varepsilon}, t) = 0, \\ u_0(x, \frac{x}{\varepsilon}, 0) = p(x), \\ \frac{\partial u_0}{\partial t}(x, \frac{x}{\varepsilon}, 0) = q(x). \end{cases} \quad \varepsilon^1 : \begin{cases} u_1(0, 0, t) = 0, \\ u_1(1, \frac{1}{\varepsilon}, t) = 0, \\ u_1(x, \frac{x}{\varepsilon}, 0) = 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial t}(x, \frac{x}{\varepsilon}, 0) = 0. \end{cases} \quad \varepsilon^2 : \begin{cases} u_2(0, 0, t) = 0, \\ u_2(1, \frac{1}{\varepsilon}, t) = 0, \\ u_2(x, \frac{x}{\varepsilon}, 0) = 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t}(x, \frac{x}{\varepsilon}, 0) = 0. \end{cases} \quad (3.97)$$

De (3.93) obtém-se que u_0 não depende de y , ou seja, $u_0(x, y, t) = u_0(x, t)$. Em seguida, para determinar u_1 resolve-se a equação (3.94), considerando a independência de y em u_0 . Aplicando-se o Lema 2.3.1 em (3.94) para garantir a existência da solução u_1 , 1-periódica na variável y se obtém uma solução da forma $u_1 = N_1(y) \frac{\partial u_0}{\partial x}$, onde $N_1(y)$ é uma função 1-periódica, dada por

$$N_1(y) = \int_0^y \left(\frac{\widehat{E}}{E(s)} - 1 \right) ds. \quad (3.98)$$

Logo a solução u_1 é obtida como

$$u_1(x, y, t) = \frac{\partial u_0}{\partial x} \int_0^y \left(\frac{\widehat{E}}{E(s)} - 1 \right) ds, \quad (3.99)$$

com o coeficiente efetivo

$$\widehat{E} = \langle E^{-1} \rangle^{-1}. \quad (3.100)$$

Da equação (3.95) determina-se u_2 . Especificamente, da aplicação direta do Lema 2.3.1, obtém-se a condição para u_2 solução do problema (3.95) seja 1-periódica. Tal condição é a chamada equação do problema homogeneizado:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \widehat{E} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = f(x, t). \quad (3.101)$$

Substituindo (3.101) em (3.95) e de supor a solução $u_2 = N_2(y) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}$, se obtém que $N_2(y)$ é uma função 1-periódica, dada por

$$N_2(y) = \int_0^y \left(\frac{\langle N_1(y) \rangle \widehat{E}}{E(s)} - N_1(s) \right) ds. \quad (3.102)$$

Assim, a s.a.f. é determinada por

$$u^{(2)}(x, t, \varepsilon) = u_0(x, t) + \varepsilon N_1(y) \frac{\partial u_0}{\partial x} + \varepsilon^2 N_2(y) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \quad y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad (3.103)$$

onde u_0 é solução do problema homogeneizado, definido por (3.101) e ε^0 em (3.97):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \widehat{E} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = f(x, t), & x \in (0, 1), t > 0, \\ u_0(0, t) = u_0(1, t) = 0, & t > 0, \\ u_0(x, 0) = p(x), \quad \frac{\partial u_0}{\partial t}(x, 0) = q(x), & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (3.104)$$

3.2.3 Relação de proximidade

A demonstração de que a proximidade entre as soluções u^ε e u_0 dos problemas original (3.90)-(3.92) e homogeneizado (3.104) é de ordem $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ na norma de $H_0^1([0, 1] \times [0, T])$, $T > 0$, é realizada mediante o princípio do máximo generalizado para equações hiperbólicas (ver anexo A.3) (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989, Teorema 3), seguindo os mesmos passos feitos para a equação do calor. Assim, segue que u_0 é uma boa aproximação de u^ε para ε suficientemente pequeno, ou seja, $u^\varepsilon \rightarrow u_0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Este fato é ilustrado através do exemplo a seguir.

3.2.4 Exemplo

Considere a equação da onda (3.90) com coeficiente $E\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = 1 + \frac{1}{4}\cos\left(\frac{2\pi x}{\varepsilon}\right)$, termo fonte $f(x, t) = e^{-t}$, e sujeita às condições de contorno e iniciais homogêneas

$$\begin{cases} u^\varepsilon(0, t) = 0, u^\varepsilon(1, t) = 0, t > 0, \\ u^\varepsilon(x, 0) = 0, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x, 0) = 0, x \in (0, 1). \end{cases} \quad (3.105)$$

A Figura 7 ilustra a solução u^ε do problema original, a qual foi obtida por diferenças finitas (ver anexo B.3.2), assim como na Figura 8 a solução u_0 do problema homogeneizado, a qual foi obtida pelo método de Fourier, seguindo os mesmos passos realizados para o problema homogeneizado da equação do calor (ver anexo B.4). Dos resultados obtidos, ainda é possível vizualizar a partir da Figura 9, a proximidade entre as soluções dos problemas original e homogeneizado, ou seja, quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ a solução do problema original converge para a solução do problema homogeneizado:

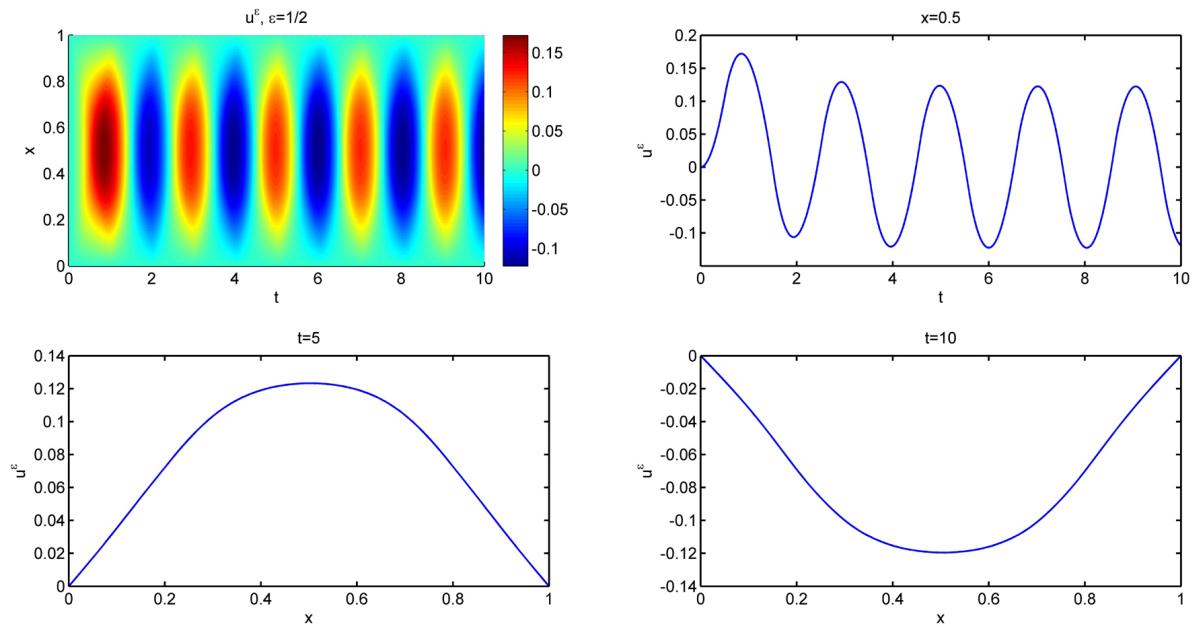


Figura 7: Solução do problema original ilustrado sob diversas perspectivas.

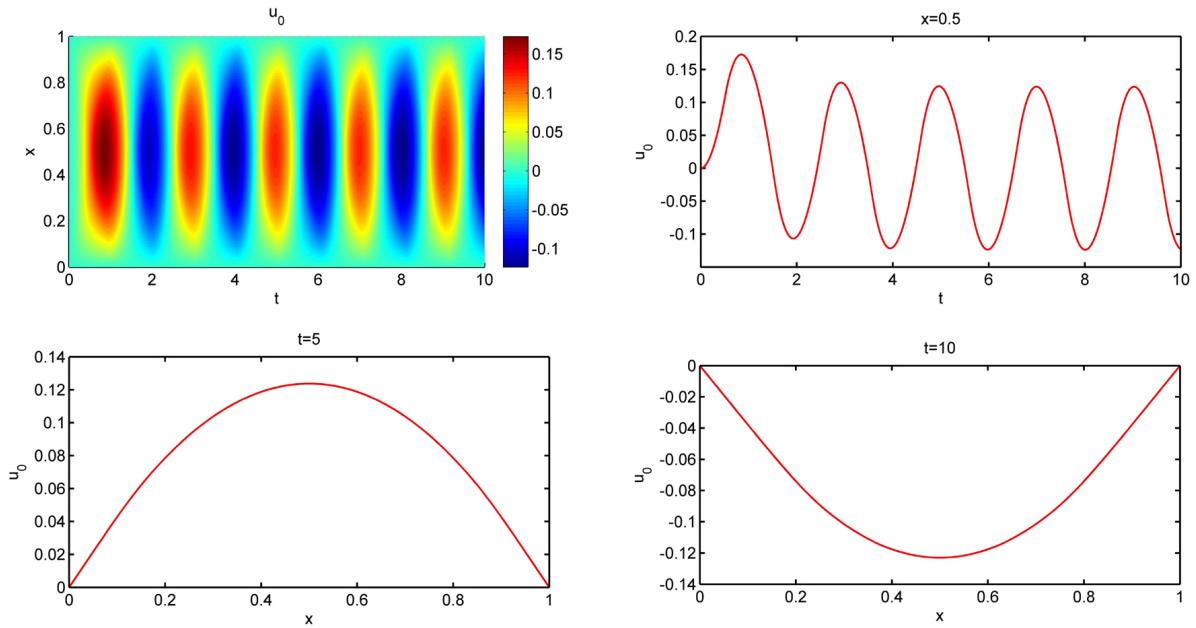


Figura 8: Solução do problema homogeneizado ilustrado sob diversas perspectivas.

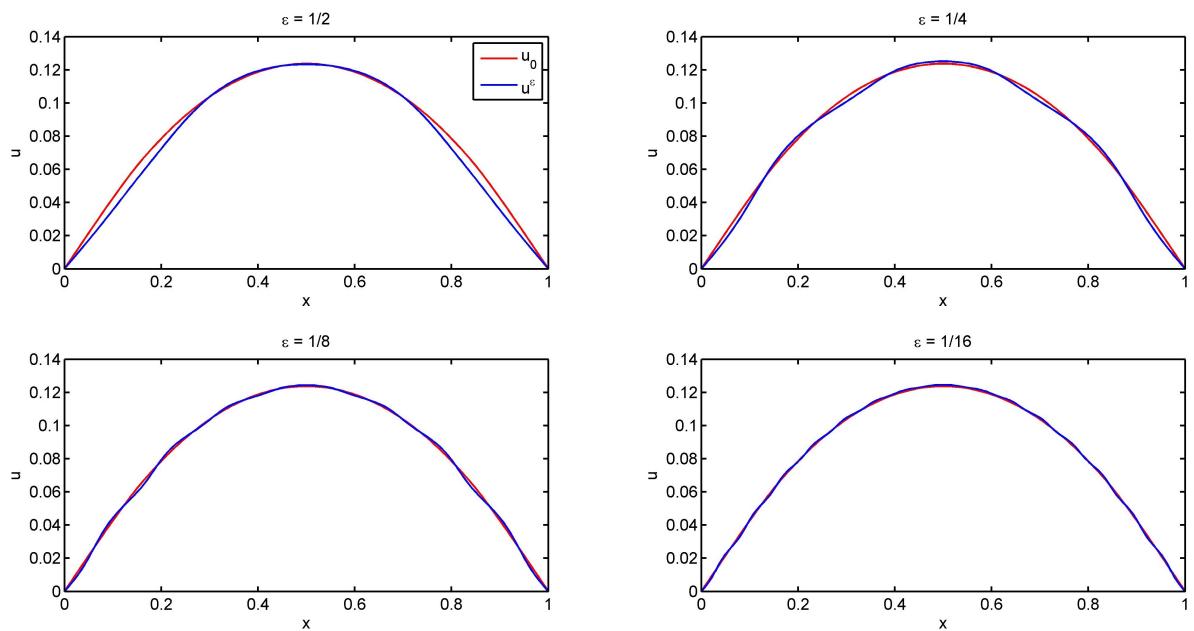


Figura 9: Proximidade entre as soluções do problema original e do homogeneizado.

3.3 Problema não linear

3.3.1 Equação de difusão com fluxo não linear

Seja um problema de difusão não linear da forma

$$\begin{cases} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma \left(\frac{x}{\varepsilon}, t, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right) \right] = f \left(x, \frac{x}{\varepsilon}, t \right), & x \in (0, 1), t > 0, \\ u^\varepsilon(0, t) = p_1(t), u^\varepsilon(1, t) = p_2(t), & t > 0, \\ u^\varepsilon(x, 0) = q(x), & x \in (0, 1) \end{cases} \quad (3.106)$$

onde σ é o fluxo não linear e p_i, q, f, σ são funções infinitamente diferenciáveis.

A construção da solução assintótica deste problema inicia-se pela hipótese de solução na forma de uma e.a. de ordem $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$, dada por

$$u^{(2)}(x, t, \varepsilon) = u_0(x, y, t) + \varepsilon u_1(x, y, t) + \varepsilon^2 u_2(x, y, t), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad (3.107)$$

onde u_i são funções 1-periódicas em y . Seja a derivada da densidade u^ε com respeito à variável x definida por

$$\epsilon = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}, \quad (3.108)$$

que ao aplicar a e.a. (3.107) produz

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial x},$$

e, pela regra da cadeia, se obtém

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} = \varepsilon^{-1} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \varepsilon^0 \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \varepsilon \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial x}. \quad (3.109)$$

Agora lineariza-se o fluxo σ com respeito a ϵ na vizinhança do termo de ordem $\mathcal{O}(1)$ de (3.109), ou seja, se expande σ em série de Taylor

$$\sigma(y, t, \epsilon) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \sigma}{\partial \epsilon^k} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \left[\epsilon - \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right]^k \quad (3.110)$$

e se consideram os dois primeiros termos:

$$\sigma(y, t, \epsilon) \approx \sigma \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \left[\epsilon - \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right]. \quad (3.111)$$

Observe que tal linearização se faz necessária neste momento pois a substituição direta de (3.109) em (3.110) produziria uma série para σ com infinitos termos com potências de ε de expoente negativo. Isto implicaria que, para a igualdade assintótica

resultante de substituir tal série na equação de (3.106) ser satisfeita, seria necessário resolver um sistema de infinitas equações correspondentes aos termos das potências de ε de expoente menor que -2 . Por outro lado, mais adiante será provado que u_0 não depende de y , o qual faz com que o primeiro termo de (3.109) se anule e, portanto, a substituição direta em (3.110) não produziria termos com potências de ε de expoente negativo. Ainda mais, considerar u_0 independente de y faria com que todas as equações do sistema descrito acima, correspondentes aos termos das potências de ε de expoente menor ou igual que -2 , fossem satisfeitas identicamente. Assim, o desenvolvimento a seguir baseado na linearização (3.111) produzirá os mesmos resultados que aquele que considera a série (3.110) completa.

Da substituição de (3.109) em (3.111), obtém-se que

$$\begin{aligned} \sigma(y, t, \varepsilon) &\approx \sigma \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \\ &\quad + \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \left[\varepsilon^{-1} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \varepsilon \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \right] \\ &= \varepsilon^{-1} \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \sigma \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \\ &\quad + \varepsilon \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (3.112)$$

Agora, substituindo (3.112) e (3.107) na equação de (3.106), após aplicar a regra da cadeia e agrupar em potências de ε , obtém-se

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{-2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \\ &+ \varepsilon^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\sigma \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] + f(x, y, t) = \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.113)$$

A igualdade assintótica (3.113) será válida se e somente se as seguintes equações forem satisfeitas:

$$\varepsilon^{-2} : \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] = 0, \quad (3.114)$$

$$\varepsilon^{-1} : \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\sigma \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] = 0, \quad (3.115)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 : & \frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \\ & - \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] - f(x, y, t) = 0. \end{aligned} \quad (3.116)$$

Por outro lado, da aplicação da expansão assintótica (3.107) nas condições de contorno e iniciais de (3.106) se obtém

$$p_1(t) = u_0(0, 0, t) + \varepsilon u_1(0, 0, t) + \varepsilon^2 u_2(0, 0, t), \quad (3.117)$$

$$p_2(t) = u_0\left(1, \frac{1}{\varepsilon}, t\right) + \varepsilon u_1\left(1, \frac{1}{\varepsilon}, t\right) + \varepsilon^2 u_2\left(1, \frac{1}{\varepsilon}, t\right), \quad (3.118)$$

$$q(x) = u_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, 0\right) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, 0\right) + \varepsilon^2 u_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, 0\right), \quad (3.119)$$

de onde

$$\varepsilon^0 : \begin{cases} u_0(0, 0, t) = p_1(t), \\ u_0\left(1, \frac{1}{\varepsilon}, t\right) = p_2(t), \\ u_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, 0\right) = q(x), \end{cases} \quad \varepsilon^1 : \begin{cases} u_1(0, 0, t) = 0, \\ u_1\left(1, \frac{1}{\varepsilon}, t\right) = 0, \\ u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, 0\right) = 0, \end{cases} \quad \varepsilon^2 : \begin{cases} u_2(0, 0, t) = 0, \\ u_2\left(1, \frac{1}{\varepsilon}, t\right) = 0, \\ u_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, 0\right) = 0, \end{cases} \quad (3.120)$$

os quais complementam as equações (3.114)-(3.116).

Para obter os termos da s.a.f. parte-se de (3.114). Da equação (3.114) tem-se que

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = K(x, t). \quad (3.121)$$

De assumir que $\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) > 0$, para quaisquer $x \in (0, 1)$ e $t > 0$, a derivada de u_0 com relação a y é expressada como

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = K(x, t) \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right]^{-1}, \quad (3.122)$$

e para obter K aplica-se o operador de valor médio em ambos os lados de (3.122). Logo

$$\int_0^1 \frac{\partial u_0}{\partial y} dy = \int_0^1 K(x, t) \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right]^{-1} dy, \quad (3.123)$$

e pela hipótese de u_0 ser uma função 1-periódica com relação a y , resulta em

$$0 = K(x, t) \int_0^1 \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right]^{-1} dy. \quad (3.124)$$

Note que a integral de uma função positiva é positiva, ou seja,

$$\int_0^1 \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right]^{-1} dy > 0. \quad (3.125)$$

Portanto,

$$K(x, t) = 0. \quad (3.126)$$

Ao substituir (3.126) em (3.122) implica que u_0 não depende da variável y , assim como

no caso linear, ou seja,

$$u_0(x, y, t) = u_0(x, t), \quad (3.127)$$

o qual faz que (3.114) seja satisfeita identicamente. Note que (3.127) também pode ser obtida diretamente do Lema 2.3.1. Com efeito, sejam $x \in [0, 1]$ e $t > 0$ fixos, e $N(y) = u_0(x, y, t)$. De aplicar o Lema em (3.114) com $a(y) \equiv \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)$, que é 1-periódica em y por causa da 1-periodicidade em y de σ e u_1 , segue que existe $u_0(x, y, t)$ solução 1-periódica em y de (3.114), única salvo uma constante aditiva, ou seja, $u_0(x, y, t) = \tilde{u}_0(x, y, t) + C(x, t)$. Observe que $\tilde{u}_0 \equiv 0$ é solução de (3.114). Logo, $u_0(x, y, t) = C(x, t)$, ou seja, u_0 não depende de y .

Na sequência, serão apontadas algumas relações importantes na construção da s.a.f., as quais permitirão obter expressões explícitas para os termos u_1 e u_2 .

Da substituição de (3.127) em (3.115) se obtém a equação do problema local

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\sigma \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] = 0, \quad (3.128)$$

da qual fornecerá o segundo termo da s.a.f. u_1 . Na equação (3.116), a qual fornece o terceiro termo da s.a.f., note que a mesma pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right] &= f(x, y, t) - \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right]. \end{aligned} \quad (3.129)$$

E ainda, para garantir que exista uma solução u_2 1-periódica de (3.129) deve-se aplicar o Lema 2.3.1 para cada x e t fixos. De onde, a seguinte igualdade deve ser satisfeita:

$$\left\langle \frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] - f(x, y, t) \right\rangle = 0,$$

que, em virtude da linearidade o operador da média pode ser reescrita como

$$\left\langle \frac{\partial u_0}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \right\rangle - \langle f(x, y, t) \rangle = 0,$$

onde

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \right\rangle = 0, \quad (3.130)$$

pois u_1 e σ são funções 1-periódicas com relação a y . Dessa forma, tem-se

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \right\rangle = \langle f(x, y, t) \rangle. \quad (3.131)$$

Logo, a equação (3.131) é a condição para a existência de u_2 solução 1-periódica da equação (3.116), e ainda, esta é a chamada equação do problema homogeneizado. Note que a equação (3.131) pode ser reescrita da forma

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \sigma \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right\rangle = \langle f(x, y, t) \rangle \quad (3.132)$$

Finalmente, para obter explicitamente as soluções u_1 e u_2 em função de u_0 , como realizado no caso linear, devemos primeiro resolver o problema local para obter u_1 , o qual é definido pela equação (3.128) e as condições de ordem $\mathcal{O}(\varepsilon)$ de (3.120):

$$\mathcal{P}_L : \begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \left[\sigma \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] = 0, & x \in (0, 1), t > 0, \\ u_1(0, 0, t) = u_1 \left(1, \frac{1}{\varepsilon}, t \right) = 0, & t > 0, \\ u_1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon}, 0 \right) = 0, & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (3.133)$$

Note que na equação de (3.133) pode-se considerar $\bar{\epsilon} = \frac{\partial u_0}{\partial x}$ como um parâmetro. Isto faz de (3.133) uma família uniparamétrica de problemas com o parâmetro $\bar{\epsilon}$, para a qual a existência de solução 1-periódica em y é garantida pelo seguinte Lema:

Lema 3.3.1. *Seja $\bar{\epsilon} = \frac{\partial u_0}{\partial x}$ um parâmetro. Então, para todo x e t fixos, existe uma única função $u_1(x, y, t)$, 1-periódica em y , solução de (3.133). Precisamente, existem funções $\mathcal{N}_1(y, t, \bar{\epsilon})$, 1-periódicas em y , soluções da família uniparamétrica de problemas $\mathcal{P}_L^{\bar{\epsilon}}$ com parâmetro $\bar{\epsilon}$ definida por*

$$\mathcal{P}_L^{\bar{\epsilon}} : \begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \left[\sigma \left(y, t, \bar{\epsilon} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) \right] = 0, & y \in (0, 1), \\ \mathcal{N}_1(0, t, \bar{\epsilon}) = 0, \end{cases} \quad (3.134)$$

onde a condição $\mathcal{N}_1(0, t, \bar{\epsilon}) = 0$ garante a unicidade da solução.

Demonstração: Seja

$$\epsilon = \bar{\epsilon} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y}. \quad (3.135)$$

Ao integrar a equação em (3.134) com respeito a y resulta que

$$\sigma(y, t, \epsilon) = \bar{\sigma}, \quad (3.136)$$

onde $\bar{\sigma}$ é uma constante com relação a y . Seja

$$F(y, t, \epsilon) = \sigma(y, t, \epsilon) - \bar{\sigma} = 0, \quad (3.137)$$

cuja derivada com respeito a ϵ é

$$\frac{\partial F}{\partial \epsilon} = \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \neq 0, \quad (3.138)$$

ou seja, F satisfaz as condições do teorema da função implícita (SPIVAK, 1965). Logo, existe a função $\epsilon(y, t, \bar{\sigma})$, 1-periódica em y , inversa de $\sigma(y, t, \epsilon)$ com respeito a ϵ :

$$\epsilon(y, t, \bar{\sigma}) = \bar{\epsilon} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y}. \quad (3.139)$$

Assim, tem-se

$$\frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} = \epsilon(y, t, \bar{\sigma}) - \bar{\epsilon}, \quad (3.140)$$

e ao integrar de 0 a y obtém-se

$$\mathcal{N}_1(y, t, \bar{\epsilon}) - \mathcal{N}_1(0, t, \bar{\epsilon}) = \int_0^y (\epsilon(s, t, \bar{\sigma}) - \bar{\epsilon}) ds, \quad (3.141)$$

de onde, pela condição para a unicidade em (3.134), tem-se

$$\mathcal{N}_1(y, t, \bar{\epsilon}) = \int_0^y (\epsilon(s, t, \bar{\sigma}) - \bar{\epsilon}) ds. \quad (3.142)$$

Agora, para garantir que $\mathcal{N}_1(y, t, \bar{\epsilon})$ seja 1-periódica, realiza-se mesmo procedimento do caso linear, ou seja, deve cumprir que $\mathcal{N}_1(y+1, t, \bar{\epsilon}) - \mathcal{N}_1(y, t, \bar{\epsilon}) = 0$

$$\mathcal{N}_1(s, t, \bar{\epsilon})|_{s=y}^{s=y+1} = \int_y^{y+1} (\epsilon(s, t, \bar{\sigma}) - \bar{\epsilon}) ds = \int_0^1 (\epsilon(y, t, \bar{\sigma}) - \bar{\epsilon}) dy = \langle \epsilon(y, t, \bar{\sigma}) \rangle - \bar{\epsilon} = 0.$$

Assim, para que \mathcal{N}_1 seja 1-periódica, a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$\langle \epsilon(y, t, \bar{\sigma}) \rangle = \bar{\epsilon}. \quad (3.143)$$

□

Da equação (3.136), sabe-se que $\sigma(y, t, \epsilon)$, avaliada em $\epsilon = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}$, não depende explicitamente da variável y . Logo,

$$\hat{\sigma} \left(t, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) = \left\langle \sigma \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right\rangle = \sigma \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \bar{\sigma}. \quad (3.144)$$

Portanto,

$$\bar{\sigma} = \hat{\sigma} \left(t, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) = \sigma \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \quad (3.145)$$

é o fluxo efetivo do problema de difusão não linear.

Em seguida, para obter u_2 solução de (3.116), considerando (3.132) e (3.144),

tem-se

$$\langle f(x, y, t) \rangle - f(x, y, t) - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right] = 0. \quad (3.146)$$

Após garantir, a partir do Lema 2.3.1, a existência de u_2 solução 1-periódica em y de (3.146), onde $\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \bar{\epsilon} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right)$ é considerado o coeficiente na definição do operador \mathcal{L}_{yy} para x e t fixos, e $\bar{\epsilon} = \frac{\partial u_0}{\partial x}$ um parâmetro, busca-se uma função $\mathcal{N}_2 \left(y, t, \bar{\epsilon} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right)$, solução do problema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \bar{\epsilon} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) \frac{\partial \mathcal{N}_2}{\partial y} \right] = - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \bar{\epsilon} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial x} \right] \\ \qquad \qquad \qquad + \langle f(x, y, t) \rangle - f(x, y, t) \\ \mathcal{N}_2(0, t, \bar{\epsilon}) = 0, \end{cases} \quad (3.147)$$

Logo, integrando a equação (3.147) se obtém

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \bar{\epsilon} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \mathcal{N}_2}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial x} \right) = \int_0^y (\langle f(x, y, t) \rangle - f(x, s, t)) ds - C, \quad (3.148)$$

onde C é uma constante de integração. Isolando a derivada de $\mathcal{N}_2(y, t, \bar{\epsilon})$ obtém-se

$$\frac{\partial \mathcal{N}_2}{\partial y} = \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \bar{\epsilon} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) \right]^{-1} \left[\int_0^y (\langle f(x, y, t) \rangle - f(x, s, t)) ds - C \right] - \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial x}. \quad (3.149)$$

Como $\mathcal{N}_2 \left(y, t, \bar{\epsilon} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right)$ é 1-periódica em y , o cálculo da sua média permite obter a constante C , ou seja,

$$C = \frac{\left\langle \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} (y, t, \epsilon) \right]^{-1} \int_0^y (\langle f(x, y, t) \rangle - f(x, s, t)) ds \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial x} \right\rangle}{\left\langle \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} (y, t, \epsilon) \right]^{-1} \right\rangle}, \quad (3.150)$$

onde $\epsilon = \bar{\epsilon} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y}$. Logo, integrando (3.149) tem-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_2(y, t, \bar{\epsilon}) &= \int_0^y \left\{ \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(s, t, \bar{\epsilon} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial s} \right) \right]^{-1} \left[\int_0^s (\langle f(x, y, t) \rangle - f(x, w, t)) dw - C \right] \right\} ds \\ &\quad - \int_0^y \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial x} ds, \end{aligned} \quad (3.151)$$

onde C é dado por (3.150). Portanto, conclui-se, de forma geral, a construção da s.a.f.

$u^{(2)}$ para o caso dinâmico com fluxo não linear, onde

$$u^{(2)}(x, t, \varepsilon) = u_0(x, t) + \varepsilon \mathcal{N}_1 \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \varepsilon^2 \mathcal{N}_2 \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right), \quad y = \frac{x}{\varepsilon} \quad (3.152)$$

Para determinar a forma explícita dos termos u_1 e u_2 deve-se especificar σ . A seguir, o processo será apresentado através um exemplo com não-linearidade do tipo potencial. E ainda, a proximidade é apenas ilustrada.

3.3.2 Exemplo

Considere em (3.106) o fluxo potencial

$$\sigma \left(\frac{x}{\varepsilon}, t, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right) = a^\varepsilon(x, t) \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right)^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.153)$$

com coeficiente

$$a \left(\frac{x}{\varepsilon}, t \right) = e^{-nt} \left(1 + \frac{1}{4} \cos \left(\frac{2\pi x}{\varepsilon} \right) \right)^{-n}, \quad (3.154)$$

a fonte

$$f \left(x, \frac{x}{\varepsilon}, t \right) = \varepsilon e^t \left(\frac{x}{\varepsilon} + \frac{1}{8\pi} \sin \left(\frac{2\pi x}{\varepsilon} \right) \right), \quad (3.155)$$

e condições de contorno e inicial

$$u^\varepsilon(0, t) = 0, \quad u^\varepsilon(1, t) = e^t, \quad t > 0, \quad (3.156)$$

$$u^\varepsilon(x, 0) = x + \frac{\varepsilon}{8\pi} \sin \left(\frac{2\pi x}{\varepsilon} \right), \quad x \in (0, 1). \quad (3.157)$$

O caráter rapidamente oscilante do coeficiente a^ε para $n = 1$ é apresentado na Figura 10, assim como seu comportamento para $\varepsilon = \frac{1}{2}$ e diferentes valores de n na Figura 11.

A busca da formula específica da solução (3.152) se inicia a partir dos resultados obtidos na seção anterior, especificamente da equação (3.145) onde ao considerar (3.153), tem-se que

$$\hat{\sigma} \left(t, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) = a(y, t) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^n, \quad (3.158)$$

onde $\hat{\sigma}$ é o fluxo efetivo. Observe que, ao isolar em (3.158) o termo da derivada de u_1 , tem-se

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \left[a^{-1}(y, t) \hat{\sigma} \left(t, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right]^{\frac{1}{n}} - \frac{\partial u_0}{\partial x}. \quad (3.159)$$

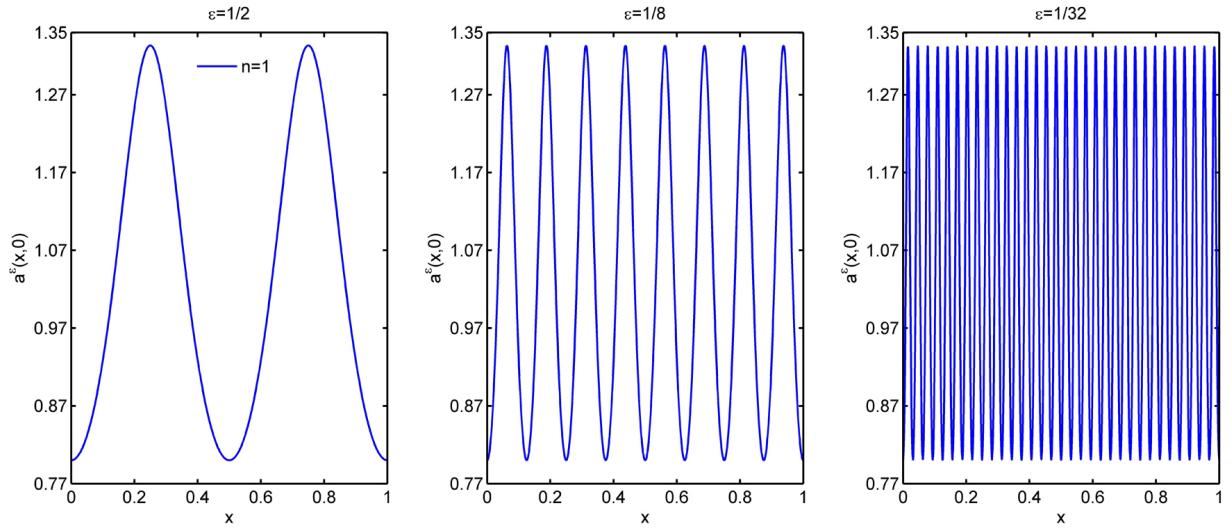


Figura 10: Caráter rapidamente oscilante do coeficiente a^ε para $n = 1$ e $t = 0$.

Aplicando o operador de valor médio em (3.159) obtém-se

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial u_1}{\partial y} \right\rangle &= \int_0^1 \left(\left[a^{-1}(y,t) \hat{\sigma} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right]^{\frac{1}{n}} - \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) dy \\ u_1 \left(1, \frac{1}{\varepsilon}, t \right) - u_1(0,0,t) &= \hat{\sigma} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^{\frac{1}{n}} \int_0^1 a^{\frac{1}{n}}(y,t) dy - \frac{\partial u_0}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.160)$$

que, levando em consideração a 1-periodicidade de u_1 em y , (3.160) se resume em

$$0 = \hat{\sigma} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^{\frac{1}{n}} \left\langle a^{-\frac{1}{n}}(y,t) \right\rangle - \frac{\partial u_0}{\partial x}. \quad (3.161)$$

E isolando $\hat{\sigma}$ em (3.161) se obtém

$$\hat{\sigma} \left(t, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) = \left\langle a^{-\frac{1}{n}}(y,t) \right\rangle^{-n} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^n, \quad (3.162)$$

sendo este, o fluxo efetivo não linear. Note que (3.162) pode ser reescrita como

$$\hat{\sigma} \left(t, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) = \hat{a}(t) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^n \quad (3.163)$$

onde $\hat{a}(t) = \left\langle a^{-\frac{1}{n}}(y,t) \right\rangle^{-n}$ é o coeficiente efetivo do fluxo efetivo e a lei efetiva correspondente é $\bar{\sigma} = \hat{\sigma}(t, \bar{\epsilon})$. Agora, para obter u_1 substituí-se o resultado (3.163) em (3.159),

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \left[a^{-1}(y,t) \hat{a}(t) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^n \right]^{\frac{1}{n}} - \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad (3.164)$$

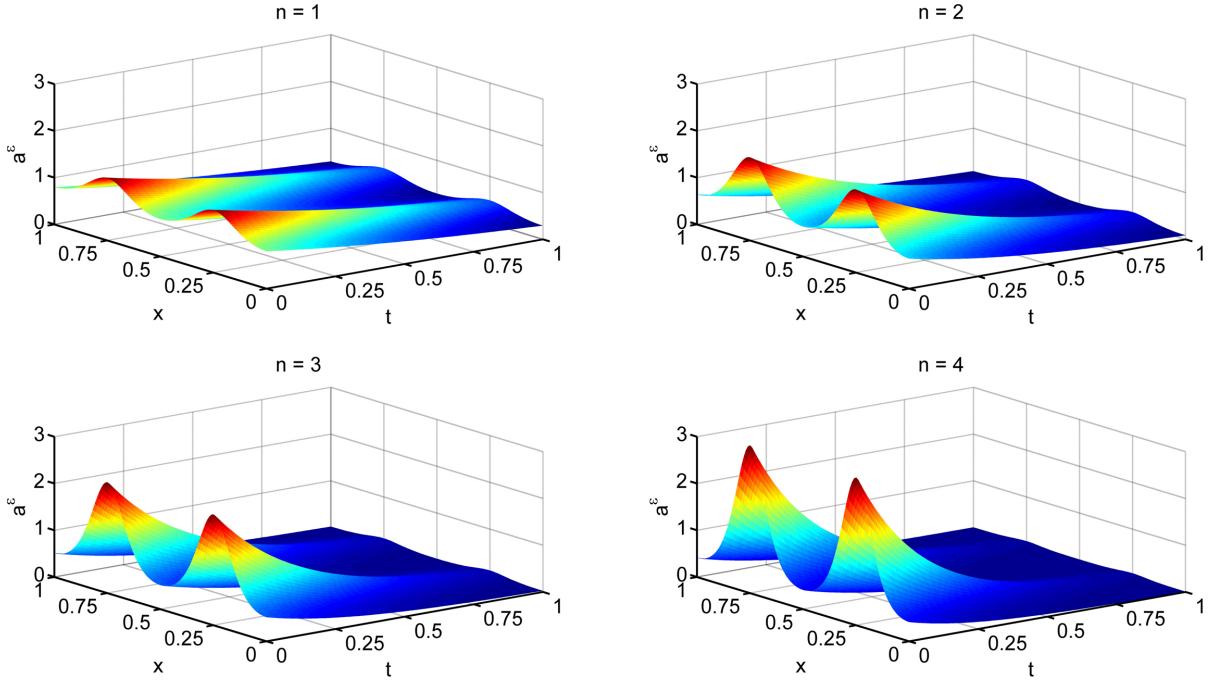


Figura 11: Comportamento do coeficiente a^ε para diferentes valores de n .

e pela simplificação resulta em

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \left[\left(\frac{\hat{a}(t)}{a(y,t)} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right] \frac{\partial u_0}{\partial x}. \quad (3.165)$$

Ao integrar (3.165) se obtém

$$\begin{aligned} u_1(x,y,t) - u_1(0,0,t) &= \int_0^y \left[\left(\frac{\hat{a}(t)}{a(s,t)} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right] ds \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ u_1(x,y,t) &= N_1(y,t) \frac{\partial u_0}{\partial x} = \mathcal{N}_1 \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (3.166)$$

onde $N_1(y,t) = \int_0^y \left[\left(\frac{\hat{a}(t)}{a(s,t)} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right] ds$. Note que para $n = 1$, e no caso estacionário, recuperam-se os resultados da seção 2.3.

E por fim, obtém-se o termo u_2 da expansão assintótica a partir da equação (3.116), onde substituindo os resultados (3.127), (3.155) e (3.166) se tem que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) \right] - xe^t \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) \left(N_1(y,t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.167)$$

onde a soma dos três primeiros termos é zero por (3.131), considerando (3.128). Logo,

(3.167) se resume em

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) \left(N_1(y, t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right] = 0. \quad (3.168)$$

Isolando o termo que contém a derivada de u_2 em (3.168) tem-se

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right] = -\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) N_1(y, t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right]. \quad (3.169)$$

Agora, como no exemplo linear, assume-se a solução u_2 da forma $N_2(y, t) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}$. Logo, a expressão (3.168) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial N_2}{\partial y} + N_1(y, t) \right) \right] \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = 0, \quad (3.170)$$

onde tem-se por hipótese $\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \neq 0$. Logo,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial N_2}{\partial y} + N_1(y, t) \right) \right] = 0. \quad (3.171)$$

De integrar (3.171) e isolar o termo da derivada de N_2 tem-se que

$$\frac{\partial N_2}{\partial y} = q(x, t) \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) \right]^{-1} - N_1(y, t). \quad (3.172)$$

Para determinar a função $q(x, t)$ aplica-se o operador de valor médio em (3.172) e impõe-se que N_2 seja 1-periódica com respeito a y . Disto, segue que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial N_2}{\partial y} \right\rangle &= \left\langle q(x, t) \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) \right]^{-1} - N_1(y, t) \right\rangle, \\ N_2(1, t) - N_2(0, t) &= q(x, t) \left\langle \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) \right]^{-1} \right\rangle - \langle N_1(y, t) \rangle, \\ 0 &= q(x, t) \left\langle \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) \right]^{-1} \right\rangle - \langle N_1(y, t) \rangle, \end{aligned} \quad (3.173)$$

de onde

$$q(x, t) = \langle N_1(y, t) \rangle \left\langle \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) \right]^{-1} \right\rangle. \quad (3.174)$$

Obtido (3.174), a equação (3.172) resulta em

$$\frac{\partial N_2}{\partial y} = \langle N_1(y, t) \rangle \left[\left\langle \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) \right]^{-1} \right\rangle \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) \right]^{-1} - N_1(y, t). \quad (3.175)$$

Logo, de integrar (3.175), com a condição de unicidade $N_2(0, t) = 0$, se obtém

$$\begin{aligned} N_2(y, t) &= \langle N_1(y, t) \rangle \left\langle \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) \right]^{-1} \right\rangle^{-1} \int_0^y \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) \right]^{-1} ds \\ &\quad - \int_0^y N_1(s, t) ds. \end{aligned} \quad (3.176)$$

Prova-se agora que $N_2(y)$ é uma função 1-periódica em y .

Demonstração: A ideia é mostrar que $N_2(y+1, t) - N_2(y, t) = 0$. Logo, de (3.176)

$$\begin{aligned} N_2(s, t)|_{s=y}^{s=y+1} &= \langle N_1(y, t) \rangle \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \int_y^{y+1} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(s, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial s} \right) \right]^{-1} ds \\ &\quad - \int_y^{y+1} N_1(s, t) ds \\ &= \langle N_1(y, t) \rangle \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \int_0^1 \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(s, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial s} \right) \right]^{-1} ds \\ &\quad - \int_0^1 N_1(s, t) ds \\ &= \langle N_1(y, t) \rangle \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \left\langle \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right]^{-1} \right\rangle \\ &\quad - \langle N_1(y, t) \rangle. \end{aligned} \quad (3.177)$$

Do primeiro termo da direita de (3.177) temos que $\langle \sigma^{-1} \rangle^{-1} \langle \sigma^{-1} \rangle = 1$. Logo,

$$N_2(1, t) - N_2(0, t) = \langle N_1 \rangle - \langle N_1 \rangle = 0. \quad (3.178)$$

□

Um último termo, do qual ainda não se obteve sua forma fechada, é

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right). \quad (3.179)$$

Para obtê-lo, considere a equação (3.136) e derive-a com respeito a $\epsilon = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}$, ou seja,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} = na(y, t) \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right)^{n-1}. \quad (3.180)$$

De avaliar $\epsilon = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} = \left(1 + \frac{\partial N_1}{\partial y}\right) \frac{\partial u_0}{\partial x}$ obtém-se que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) = na(y, t) \left[\left(1 + \frac{\partial N_1}{\partial y}\right) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right]^{n-1}, \quad (3.181)$$

e considerando

$$\frac{\partial N_1}{\partial y} = \left(\frac{\hat{a}(t)}{a(y, t)} \right)^{\frac{1}{n}} - 1, \quad (3.182)$$

se obtém a seguinte expressão para (3.179)

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, t, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial y} \right) = na^{\frac{1}{n}}(y, t) \hat{a}^{\frac{n-1}{n}}(t) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^{n-1}. \quad (3.183)$$

A seguir, alguns resultados numéricos serão apresentados.

1. Problema Original

O problema original é composto pela equação (3.106), considerando σ da forma (3.153), e condições de contorno e iniciais, (3.156)-(3.157). Sua solução exata é

$$u^\varepsilon(x, t) = \varepsilon e^t \left(\frac{x}{\varepsilon} + \frac{1}{8\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi x}{\varepsilon} \right) \right). \quad (3.184)$$

2. Problema Homogeneizado

Ao aplicar as condições iniciais e de contorno (3.156)-(3.157) na expansão assintótica, se obtém as condições do problema homogeneizado, que juntamente à equação (3.131) estabelecem o problema homogeneizado, onde sua solução é

$$u_0(x, t) = xe^t. \quad (3.185)$$

3. Coeficiente efetivo

Na Figura 12 apresenta-se o comportamento do coeficiente efetivo $\hat{a}(t) = e^{-nt}$.

Em particular, a Figura 12 mostra que $\hat{a}(t)$ decresce para zero, e o faz tanto mais rapidamente assim que o expoente de não linearidade n decresce. Isto sugere que, macroscopicamente, o meio evolui para ser um isolante, isto é, se opor ao fluxo até impedi-lo. Contudo, o fluxo efetivo $\hat{\sigma} \left(t, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) = \hat{a}(t) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^n$ resulta

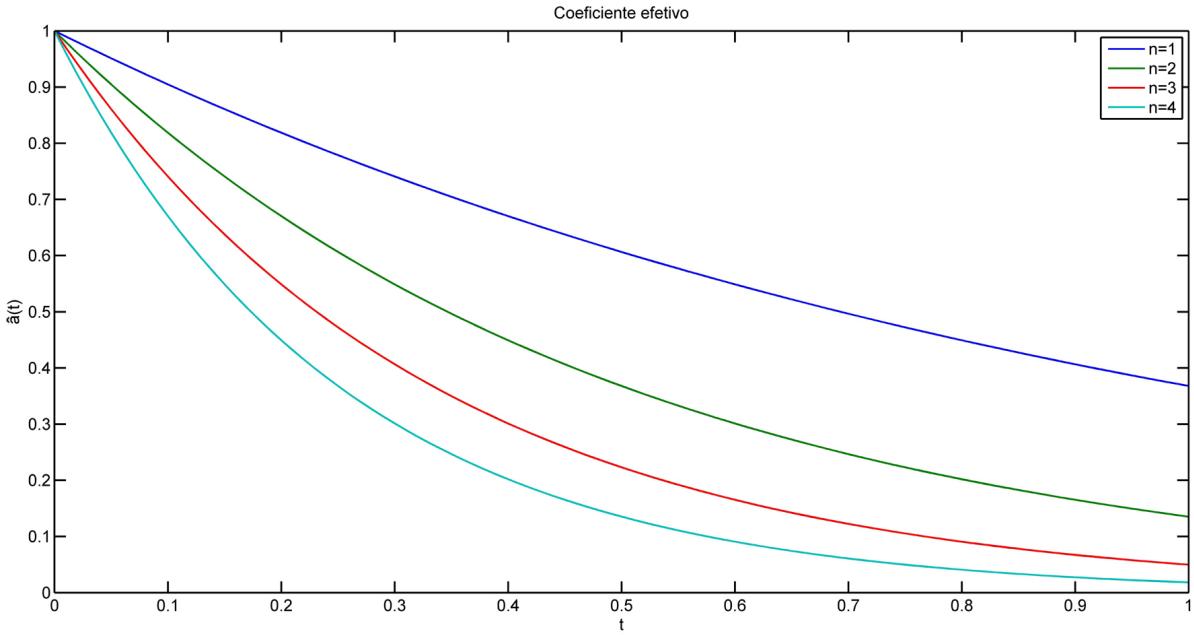


Figura 12: Comportamento do coeficiente efetivo $\hat{a}(t)$ para diferentes valores de n .

ser unitário, $\hat{\sigma} \left(t, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) = 1$. Isto mostra que, em presença de não linearidade, o comportamento efetivo não pode ser aferido completamente pelo coeficiente efetivo, senão pela lei efetiva.

4. Problema Local

Do problema local definido em (3.133), foi mostrado que sua solução u_1 é um produto de duas funções, $N_1(y)$ e $\frac{\partial u_0}{\partial x}$, onde

$$N_1(y, t) = \frac{1}{8\pi} \operatorname{sen}(2\pi y). \quad (3.186)$$

Logo,

$$u_1(x, y, t) = \frac{e^t}{8\pi} \operatorname{sen}(2\pi y). \quad (3.187)$$

5. Solução Assintótica

Tendo em vista a solução do problema homogeneizado, a segunda derivada desta solução é nula, e portanto, o terceiro termo da expansão assintótica também o será. Logo, a expansão assintótica da solução do problema original se resume a

$$u^{(1)}(x, t, \varepsilon) = u_0(x, t) + \varepsilon u_1(x, y, t), \quad y = \frac{x}{\varepsilon} \quad (3.188)$$

ou seja,

$$u^{(1)}(x, t, \varepsilon) = xe^t + \frac{\varepsilon}{8\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi x}{\varepsilon} \right) e^t. \quad (3.189)$$

Note que para este exemplo, a solução assintótica formal $u^{(1)}$ é idêntica à solução exata u^ε .

Portanto destes resultados, pode-se observar a proximidade entre as soluções dos problemas original e homogeneizado e a assintótica (ver Figura 13).

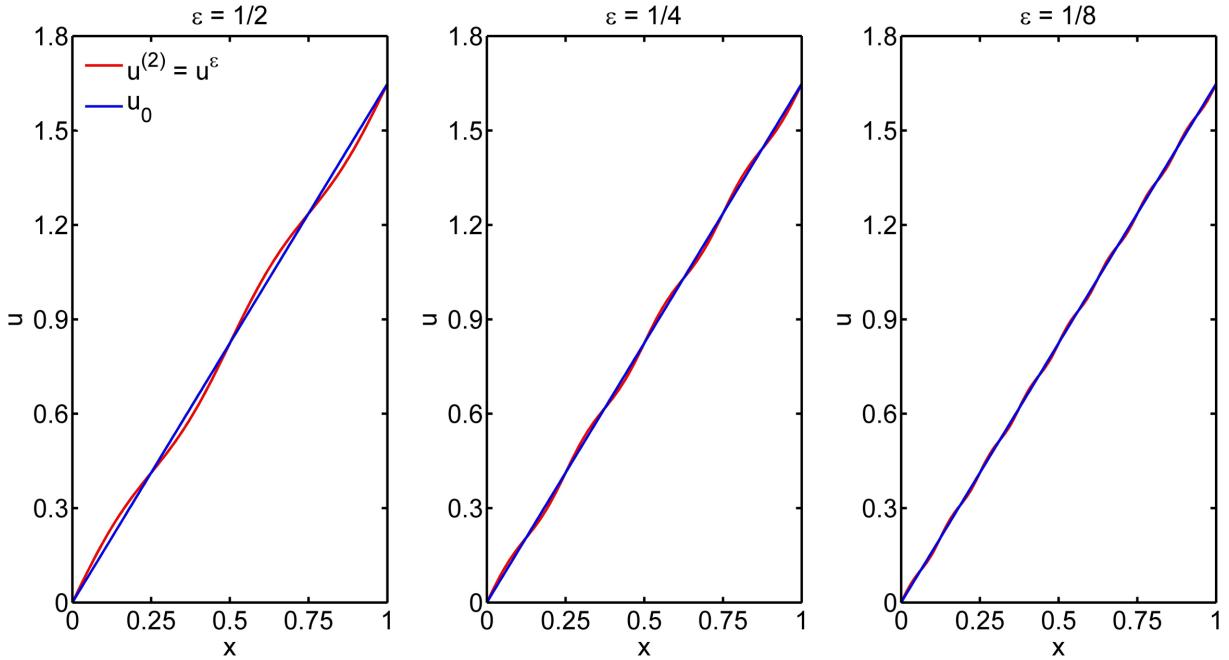


Figura 13: Proximidade entre soluções u_0 , u^ε e $u^{(1)}$ para $t = 0.5$.

3.4 Alguns comentários sobre problemas com fluxo e fonte explicitamente dependentes da incógnita

De grande interesse em diversas aplicações são as equações do tipo

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma \left(\frac{x}{\varepsilon}, t, u^\varepsilon, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right) \right] = f \left(x, \frac{x}{\varepsilon}, t, u^\varepsilon \right), \quad (3.190)$$

onde σ e f são funções 1-periódicas em $y = \frac{x}{\varepsilon}$. Equações deste tipo podem modelar fenômenos advectivos, difusivos e reativos, lineares e não lineares, que aparecem, por exemplo, no estudo da dispersão de poluentes, o transporte de partículas neutras, o clima, e reações químicas. Geralmente, tais fenômenos são de natureza multiescalar e, portanto, resulta relevante seu estudo mediante técnicas de homogeneização.

Note que a não linearidade da equação (3.190) é mais geral que a da seção 3.3 em virtude da dependência do fluxo e da fonte com relação a u^ε . A seguir, apresentam-se as ideias fundamentais da aplicação do MHA para esta equação, considerando condições de Dirichlet no contorno. Para isto, considere as linearizações do fluxo e da

fonte com relação aos termos de ordem $\mathcal{O}(1)$ das assintóticas

$$u^{(2)}(x, \varepsilon) = u_0(x, y, t) + \varepsilon u_1(x, y, t) + \varepsilon^2 u_2(x, y, t), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad (3.191)$$

e

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} = \varepsilon^{-1} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \varepsilon \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial y}, \quad (3.192)$$

onde tais linearizações são

$$\begin{aligned} \sigma \left(y, t, u^{(2)}, \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} \right) &\approx \sigma \left(y, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \\ &+ (\varepsilon u_1(x, y, t) + \varepsilon^2 u_2(x, y, t)) \frac{\partial \sigma}{\partial (u^\varepsilon)} \left(y, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \\ &+ \left[\varepsilon^{-1} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \varepsilon \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial y} \right] \frac{\partial \sigma}{\partial \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right)} \left(y, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (3.193)$$

e

$$f(y, t, u^{(2)}) \approx f(y, t, u_0) + (\varepsilon u_1(x, y, t) + \varepsilon^2 u_2(x, y, t)) \frac{\partial f}{\partial (u^\varepsilon)}(y, t, u_0). \quad (3.194)$$

Logo, substituindo (3.191), (3.193) e (3.194) em (3.190), aplicando a regra da cadeia e, considerando os coeficientes das potências ε^{-2} , ε^{-1} e ε^0 como nulos, obtém-se as equações recorrentes, que permitem obter os termos u_0 , u_1 e u_2 da s.a.f. $u^{(2)}$, ou seja,

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-2} &: \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right)} \left(y, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right] = 0, \\ \varepsilon^{-1} &: \frac{\partial}{\partial y} \left[\sigma \left(y, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial \sigma}{\partial \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right)} \left(y, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \frac{\partial u_0}{\partial y} = 0, \\ \varepsilon^0 &: \frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma \left(y, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[u_1(x, y, t) \frac{\partial \sigma}{\partial (u^\varepsilon)} \left(y, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \\ &- \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} \right)} \left(y, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] = f(x, y, t, u_0). \end{aligned}$$

Note que, as equações correspondentes a ε^{-2} e ε^{-1} são similares àquelas do problema estudado na seção 2.3. Analogamente, da primeira, mostra-se que u_0 independe da variável y , ou seja, $u_0 = u_0(x, t)$. Da segunda, para x e t fixos, prova-se que existe uma única solução u_1 , 1-periódica em y . Precisamente, se obtém uma família paramétrica de problemas locais, com parâmetros u_0 e $\frac{\partial u_0}{\partial x}$, de cuja resolução se obtém $u_1(x, y, t) = \mathcal{N}_1 \left(y, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)$. A demonstração desse resultado baseia-se na aplicação do teorema da função implícita (SPIVAK, 1965). E por fim, da aplicação do

Lema 2.3.1 na terceira equação, para x e t fixos, se tem como condição de existência de solução u_2 , 1-periódica com respeito a y , a equação do problema homogeneizado

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \sigma \left(y, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right\rangle = \langle f(x, y, t, u_0) \rangle, \quad (3.195)$$

cuja solução determina completamente a assintótica $u^{(2)}$ na forma

$$u^{(2)}(x, t, \varepsilon) = u_0(x, t) + \varepsilon \mathcal{N}_1 \left(\frac{x}{\varepsilon}, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \varepsilon^2 \mathcal{N}_2 \left(\frac{x}{\varepsilon}, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \quad (3.196)$$

onde $u_2(x, y, t) = \mathcal{N}_2 \left(y, t, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)$.

4 HOMOGENEIZAÇÃO DE MEIOS MULTIDIMENSIONAIS CONTINUAMENTE MICROPERIÓDICOS

Neste capítulo, o desenvolvimento da homogeneização assintótica realizado no capítulo 2 é generalizado para casos multidimensionais e para ilustrar os resultados obtidos, será resolvido um exemplo de condução térmica estacionária.

4.1 Formulação do problema

Considere o seguinte problema de condução térmica estacionária: Encontrar $u^\varepsilon \in C^2(\bar{\Omega})$, $\bar{\Omega} = [0, 1]^d$, tal que

$$\begin{cases} \mathcal{L}^\varepsilon u^\varepsilon \equiv \sum_{j,l=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{jl}^\varepsilon(x) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_l} \right) = f(x), & x \in \Omega, \\ u^\varepsilon = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde $a_{jl}^\varepsilon \in C^1(\bar{\Omega})$ são εY -periódicas ($Y = [0, 1]^d$) tais que $a_{jl}^\varepsilon(x) = a_{lj}^\varepsilon(x)$ para todo $x \in \Omega$ (simetria) e $\forall \eta \in \mathbb{R}^d, \exists c > 0 : \forall y \in \mathbb{R}^d, a_{jl}(y)\eta_j\eta_l \geq c\eta_l\eta_l$ (caráter definido positivo). No caso isotrópico, tem-se $a_{jl}^\varepsilon(x) = a^\varepsilon(x)\delta_{jl}$, onde δ_{jl} é a delta de Kronecker.

4.2 Aplicação do MHA

Inicialmente, propõe-se como solução do problema (4.1) a expansão assintótica

$$u^{(2)}(x, \varepsilon) = u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y) + \varepsilon^2 u_2(x, y), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad (4.2)$$

onde $u_i \in C^2(\Omega \times Y)$ são Y -periódicas com respeito a variável y . Ao substituir (4.2) na equação de (4.1) e aplicar a regra da cadeia $\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial F}{\partial x_j} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial F}{\partial y_j} \Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}}$, e ainda, considerar o operador

$$\mathcal{L}_{\alpha\beta} = \sum_{j,l=1}^d \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(a_{jl}(y) \frac{\partial}{\partial \beta_l} \right), \quad \alpha, \beta \in \{x, y\}$$

obtém-se,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^\varepsilon u^{(2)} - f(x) &= \varepsilon^{-2} \mathcal{L}_{yy} u_0 + \varepsilon^{-1} (\mathcal{L}_{xy} u_0 + \mathcal{L}_{yx} u_0 + \mathcal{L}_{yy} u_1) \\ &\quad + \varepsilon^0 (\mathcal{L}_{xx} u_0 + \mathcal{L}_{xy} u_1 + \mathcal{L}_{yx} u_1 + \mathcal{L}_{yy} u_2 - f(x)) + \mathcal{O}(\varepsilon)\end{aligned}$$

Assim, por definição, para que $u^{(2)}$ seja uma solução assintótica formal de (4.1) as seguintes equações devem ser satisfeitas:

$$\varepsilon^{-2} : \mathcal{L}_{yy} u_0 = 0 \quad (4.3)$$

$$\varepsilon^{-1} : \mathcal{L}_{yy} u_1 = -\mathcal{L}_{xy} u_0 - \mathcal{L}_{yx} u_0 \quad (4.4)$$

$$\varepsilon^0 : \mathcal{L}_{yy} u_2 = -\mathcal{L}_{xx} u_0 - \mathcal{L}_{xy} u_1 - \mathcal{L}_{yx} u_1 + f(x). \quad (4.5)$$

Para resolver tais equações, deve-se aplicar uma versão generalizada do Lema 2.3.1, ou seja,

Lema 4.2.1. *Sejam $a_{jl}(y)$ e $F(y)$ funções diferenciáveis Y -periódicas, e $a_{jl}(y)$ satisfaz as condições de simetria e positividade. Então, uma condição necessária e suficiente para uma solução Y -periódica da equação*

$$\mathcal{L}_{yy} N \equiv \frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{jl}(y) \frac{\partial N}{\partial y_l} \right) = F(y), \quad (4.6)$$

existir é

$$\langle F(y) \rangle = \int_Y F(y) dy = 0. \quad (4.7)$$

E ainda, a solução geral Y -periódica da equação (4.6) é única salvo uma constante aditiva, ou seja, $N(y) = \tilde{N}(y) + C$, onde $\tilde{N}(y)$ é a solução Y -periódica de (4.6) que tem média nula sobre o período, $\langle \tilde{N} \rangle = 0$, e C é uma constante arbitrária.

Como no caso unidimensional, a aplicação do Lema 4.2.1 na equação (4.3) implica que u_0 não depende da variável y , ou seja,

$$u_0(x, y) = u_0(x). \quad (4.8)$$

Considerando (4.8) e aplicando-se o Lema 4.2.1 na equação (4.4) implica que existe u_1 solução Y -periódica em y . A equação (4.4) resume-se a

$$\mathcal{L}_{yy} u_1 = -\mathcal{L}_{yx} u_0, \quad (4.9)$$

e para resolvê-la, propõe-se a solução u_1 por separação de variáveis, da forma

$$u_1(x, y) = N_p(y) \frac{\partial u_0}{\partial x_p}, \quad (4.10)$$

que, ao substituí-la em (4.9), obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{jl}(y) \frac{\partial N_p}{\partial y_l} \right) \frac{\partial u_0}{\partial x_p} = - \frac{\partial a_{jl}}{\partial y_j} \frac{\partial u_0}{\partial x_l}. \quad (4.11)$$

Substituindo o índice l por p no termo do lado direito de (4.11) e colocando a derivada de u_0 em evidência tem-se que

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{jp}(y) + a_{jl}(y) \frac{\partial N_p}{\partial y_l} \right) \frac{\partial u_0}{\partial x_p} = 0. \quad (4.12)$$

Como $\frac{\partial u_0}{\partial x_p} \neq 0$, deve-se buscar para cada $p = 1, \dots, d$, $N_p(y)$, solução Y -periódica do problema local definido a seguir:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{jp}(y) + a_{jl}(y) \frac{\partial N_p}{\partial y_l} \right) = 0, & y \in Y, \\ \langle N_p(y) \rangle = 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

O Lema 4.2.1, garante a existência de $N_p(y)$ Y -periódicas, soluções de $\mathcal{L}_{yy}N = F$ com $F = -\frac{\partial a_{jp}}{\partial y_j}$, e a unicidade da solução do problema (4.13) é garantida por $\langle N_p(y) \rangle = 0$.

De aplicar o Lema 4.2.1 em (4.5), obtém-se que a condição necessária e suficiente para a existência da solução u_2 Y -periódica, solução de (4.5) é

$$\langle -\mathcal{L}_{xx}u_0 - \mathcal{L}_{xy}u_1 - \mathcal{L}_{yx}u_1 \rangle + f(x) = 0, \quad (4.14)$$

for satisfeita. Substituindo (4.10) em (4.14), resulta

$$-\left\langle \frac{\partial}{\partial y_j} (a_{jl}(y)N_p(y)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_l \partial x_p} + a_{jl}(y) \frac{\partial N_p}{\partial y_l} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_j \partial x_p} + a_{jl}(y) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_j \partial x_l} \right\rangle + f(x) = 0, \quad (4.15)$$

de onde, trocando o índice j por l , no primeiro termo do lado esquerdo de (4.15) e trocando l por p no terceiro, tem-se

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y_l} (a_{lj}(y)N_p(y)) + a_{jl}(y) \frac{\partial N_p}{\partial y_l} + a_{jp}(y) \right\rangle \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_j \partial x_p} = f(x). \quad (4.16)$$

Por razão de $a_{jp}(y)$ e $N_p(y)$ serem Y -periódicas,

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y_l} (a_{lj}(y)N_p(y)) \right\rangle = 0, \quad (4.17)$$

e assim, (4.16) pode ser reescrita como

$$\hat{a}_{jp} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_j \partial x_p} = f(x), \quad (4.18)$$

onde

$$\widehat{a}_{jp} = \left\langle a_{jl}(y) \frac{\partial N_p}{\partial y_l} + a_{jp}(y) \right\rangle. \quad (4.19)$$

Note que a equação (4.18) é a equação do problema homogeneizado. Logo, o problema homogeneizado é definido como: encontrar $u_0 \in C^2(\bar{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} \widehat{a}_{jp} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_j \partial x_p} = f(x), x \in \Omega \\ u_0(x) = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (4.20)$$

onde \widehat{a}_{jp} são os coeficientes efetivos dados por (4.19). E ainda, (4.18) é a condição de existência de u_2 solução Y -periódica da equação (4.5).

Observe que da substituição de (4.18) em (4.5) obtém-se

$$\mathcal{L}_{yy} u_2 = - \left\langle \frac{\partial}{\partial y_l} (a_{lj}(y) N_p(y)) + a_{jl}(y) \frac{\partial N_p}{\partial y_l} + a_{jp}(y) - \widehat{a}_{jp} \right\rangle \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_j \partial x_p}. \quad (4.21)$$

Isso mostra que a solução u_2 pode ser buscada da forma

$$u_2(x, y) = N_{pq}(y) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_p \partial x_q}. \quad (4.22)$$

Portanto, dos resultados fundamentais obtidos na construção de uma s.a.f. de (4.1), tem-se a expressão de $u^{(2)}$ da forma

$$u^{(2)}(x, \varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon N_p(y) \frac{\partial u_0}{\partial x_p} + \varepsilon^2 N_{pq}(y) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_p \partial x_q}, \quad y = \frac{x}{\varepsilon}. \quad (4.23)$$

Como no caso unidimensional, para o caso multidimensional, basta obter as soluções u_0 e u_1 , pois será visto a seguir que a assintótica $u^{(1)}$ também é uma boa aproximação de u^ε . Mas para obter u_2 , basta substituir (4.18) e (4.22) em (4.5) e seguir os mesmos passos para obter u_1 , obtendo-se de forma análoga um segundo problema local, em que busca-se N_{pq} Y -periódica, ou seja,

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{yy} N_{pq} = \widehat{a}_{pq} - T_{pq}, \quad y \in Y, \\ \langle N_{pq} \rangle = 0, \end{cases} \quad (4.24)$$

onde

$$T_{pq}(y) = a_{pq}(y) + a_{ql}(y) \frac{\partial N_p}{\partial y_l} + \frac{\partial}{\partial y_l} (a_{lq}(y) N_p(y)). \quad (4.25)$$

A existência de N_{pq} solução Y -periódica de (4.24) é garantida pelo Lema 4.2.1.

4.3 Relação de proximidade

No caso unidimensional, a condição para a unicidade da solução 1-periódica de $LN = F$ no Lema 2.3.1 é $N(0) = 0$. Tal condição garante que a assintótica $u^{(2)}$ satisfaz exatamente a condição de contorno do problema original. A diferença do caso unidimensional, a condição correspondente no caso multidimensional dada no Lema 4.2.1 é $\langle N \rangle = 0$. Sendo assim, no geral, a construção da assintótica $u^{(2)}$ não satisfaz a condição de contorno $u^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0$, enquanto se quer aplicar a uma estimativa para a solução em $H_0^1(\Omega)$. Se a solução u_0 da equação homogeneizada satisfaz as condições no contorno $u_0|_{\partial\Omega} = 0$, então o erro de $u^{(2)}$ no contorno é de ordem ε , mas é diferente de zero. Para contornar esta situação, multiplica-se $\varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2$ por uma função de corte $\chi(x)$ para forçar que a s.a.f. satisfaça exatamente as condições de contorno, mas com isto adicionam-se alguns novos termos para o erro. No entanto, estes termos são avaliados como sendo de ordem $\sqrt{\varepsilon}$ na norma $H^{-1}(\Omega)$, isto é, o erro na forma $f_0 + \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$, com f_0 e f_i tendo a norma $L^2(\Omega)$ de ordem $\sqrt{\varepsilon}$ e podemos aplicar a uma estimativa para a solução em $H_0^1(\Omega)$.

Especificamente, se N_p são soluções dos problemas locais (4.13), N_{pq} são soluções dos segundos problemas locais (4.24), u_0 é a solução do problema homogeneizado (4.20), e $u_0(x) \in C^2(\bar{\Omega})$, então a assintótica

$$u^{(2)}(x, \varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon N_p \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u_0}{\partial x_p} + \varepsilon^2 N_{pq} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_p \partial x_q} \quad (4.26)$$

é solução da equação

$$\mathcal{L}^\varepsilon u^{(2)} - f(x) = \varepsilon r^{(2)}(x, \varepsilon) \quad (4.27)$$

onde $\varepsilon r^{(2)}(x, \varepsilon)$ é o erro de assumir $u^{(2)}$ como solução do problema original:

$$\varepsilon r^{(2)}(x, \varepsilon) = \varepsilon (\mathcal{L}_{xy} u_2 + \mathcal{L}_{yx} u_2 + \mathcal{L}_{xx} u_1) + \varepsilon^2 \mathcal{L}_{xx} u_2, \quad y = \frac{x}{\varepsilon}. \quad (4.28)$$

Note que, assumindo que $u_0 \in C^4(\bar{\Omega})$, o teorema de Weierstrass garante que $\|r^{(2)}(x, \varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}(1)$. No entanto, o erro de $u^{(2)}$ no contorno $\partial\Omega$ é de ordem ε :

$$u^{(2)}|_{\partial\Omega} = \varepsilon u_1|_{\partial\Omega} + \varepsilon^2 u_2|_{\partial\Omega}. \quad (4.29)$$

Para ter uma solução assintótica que satisfaça as condições de contorno, consideremos uma função de corte χ que força a assintótica satisfazer exatamente as condições de contorno. Considera-se $\chi = \chi(x)$ uma função infinitamente diferenciável com suporte contido no interior da ε -vizinhança do contorno de Ω , tal que $\chi|_{\partial\Omega} = 1$, $|\chi| \leq 1$, e $\left\| \varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial x} \right\|_{C(\bar{\Omega})} \leq c_1$, onde c_1 é uma constante independente de ε .

Considera-se a função

$$\begin{aligned}\tilde{u}^{(2)}(x, \varepsilon) &= u^{(2)}(x, \varepsilon) - \chi(x) (\varepsilon u_1(x, y) + \varepsilon^2 u_2(x, y)) \\ &= u_0(x) + \varepsilon (1 - \chi(x)) u_1(x, y) + \varepsilon^2 (1 - \chi(x)) u_2(x, y), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}\end{aligned}\quad (4.30)$$

que satisfaz exatamente a condição de contorno em (4.1). Por outro lado, tem-se

$$\mathcal{L}^\varepsilon \tilde{u}^{(2)} - f(x) = \varepsilon r^{(2)}(x, \varepsilon) - \frac{\partial}{\partial x_j} \Phi_j(x, \varepsilon) \quad (4.31)$$

onde

$$\Phi_j(x, \varepsilon) = a_{jl} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \left[\varepsilon \frac{\partial(\chi u_1)}{\partial x_l} + \varepsilon^2 \frac{\partial(\chi u_2)}{\partial x_l} \right]. \quad (4.32)$$

Pelas hipóteses sobre χ , tem-se que a função $\Phi_j(x, \varepsilon)$ é limitada em valor absoluto por uma constante independente de ε , e seu suporte está contido no interior da ε -vizinhança do contorno de Ω ,

$$|\Phi_j(x, \varepsilon)| \leq c_2, \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \quad (4.33)$$

Para $d = 3$, por exemplo,

$$\Phi_j(x, \varepsilon) = 0, \quad x \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon]^3, \quad (4.34)$$

em que $\|\Phi_j(x, \varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$.

Demonstração: Seja

$$\|\Phi_j(x, \varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \Phi_j^2(x, \varepsilon) dx. \quad (4.35)$$

Por (4.34) tem-se

$$\|\Phi_j(x, \varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega \setminus [\varepsilon, 1 - \varepsilon]^3} \Phi_j^2(x, \varepsilon) dx \quad (4.36)$$

Considere um domínio limitado $\Omega^* = \Omega \setminus [\varepsilon, 1 - \varepsilon]^3$ em x , e Ω_ε^* em $\frac{x}{\varepsilon}$, tal que $\Omega^* = \varepsilon \Omega_\varepsilon^*$. Substituindo (4.10) e (4.22) em (4.36) com (4.32), e derivando se obtém

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega^*} \left[a_{jl} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \left(\varepsilon \frac{\partial(\chi u_1)}{\partial x_l} + \varepsilon^2 \frac{\partial(\chi u_2)}{\partial x_l} \right) \right]^2 dx \\ &= \int_{\Omega^*} \left[a_{jl} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \left(\varepsilon N_p \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \left(\frac{\partial \chi}{\partial x_l} \frac{\partial u_0}{\partial x_p} + \chi(x) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_p \partial x_l} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \varepsilon^2 N_{pq} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \left(\frac{\partial \chi}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_p \partial x_q} + \chi(x) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x_p \partial x_q \partial x_l} \right) \right) \right]^2 dx\end{aligned}\quad (4.37)$$

Pelo Teorema de Weierstrass, existem B_0, B_1 e B_2 tais que

$$|a_{jl}| \leq B_0, \quad |N_p| \leq B_1, \quad |N_{pq}| \leq B_2, \quad \forall \frac{x}{\varepsilon} \in \Omega_\varepsilon^*. \quad (4.38)$$

Considerando $B = \max\{B_0, B_1, B_2\}$ tem-se que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^*} \left[a_{jl} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \left(\varepsilon \frac{\partial(\chi u_1)}{\partial x_l} + \varepsilon^2 \frac{\partial(\chi u_2)}{\partial x_l} \right) \right]^2 dx \\ & \leq B^4 \int_{\Omega^*} \left(\left| \varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial x_l} \right| \left| \frac{\partial u_0}{\partial x_p} \right| + \varepsilon |\chi| \left| \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_p \partial x_l} \right| \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon \left| \frac{\partial \chi}{\partial x_l} \right| \left| \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_p \partial x_q} \right| + \varepsilon^2 |\chi| \left| \frac{\partial^3 u_0}{\partial x_p \partial x_q \partial x_l} \right| \right)^2 dx. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Similarmente, pelo Teorema de Weierstrass, existem C_0, C_1, C_2 e C_3 tais que

$$\left| \varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial x_l} \right| \leq C_0, \quad \left| \frac{\partial u_0}{\partial x_p} \right| \leq C_1, \quad \left| \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_p \partial x_l} \right| \leq C_2, \quad \left| \frac{\partial^3 u_0}{\partial x_p \partial x_q \partial x_l} \right| \leq C_3, \quad \forall x \in \Omega^*. \quad (4.40)$$

Lembrando que $|\chi| \leq 1$, considera-se $C = \max\{1, C_0, C_1, C_2, C_3\}$. Logo, tem-se que

$$\int_{\Omega^*} \left[a_{jl} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \left(\varepsilon \frac{\partial(\chi u_1)}{\partial x_l} + \varepsilon^2 \frac{\partial(\chi u_2)}{\partial x_l} \right) \right]^2 dx \leq B^4 C^4 (1 + \varepsilon)^4 \int_{\Omega^*} dx \quad (4.41)$$

Então, de (4.36)

$$\|\Phi_j(x, \varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2B^4 C^4 (1 + \varepsilon)^4 |\Omega^*| = 2B^4 C^4 (1 + \varepsilon)^4 D(\varepsilon), \quad (4.42)$$

onde $D(\varepsilon) = 3\varepsilon - 6\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3$, ou seja, é de ordem $\mathcal{O}(\varepsilon)$. E, portanto,

$$\|\Phi_j(x, \varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{2B^4 C^4 (1 + \varepsilon)^4 D(\varepsilon)}, \quad (4.43)$$

ou seja,

$$\|\Phi_j(x, \varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}). \quad (4.44)$$

□

Subtraindo o problema (4.1) de (4.31) resulta

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{jl}^\varepsilon(x) \frac{\partial(\tilde{u}^{(2)} - u^\varepsilon)}{\partial x_l} \right) = \varepsilon r^{(2)}(x, \varepsilon) - \frac{\partial}{\partial x_j} \Phi_j(x, \varepsilon) \quad (4.45)$$

onde, lembrando que $(\tilde{u}^{(2)} - u^\varepsilon)|_{\partial\Omega} = 0$, da aplicação do princípio do máximo para equações elípticas (ver anexo A.1) obtém-se a estimativa

$$\|\tilde{u}^{(2)} - u^\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c_3 \left(\varepsilon \|r^{(2)}(x, \varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^3 \|\Phi_j(x, \varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} \right) \quad (4.46)$$

onde c_3 independe de ε , e lembre que para $u_0 \in C^4(\bar{\Omega})$ tem-se $\|r^{(2)}(x, \varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}(1)$.

Logo, a relação (4.30) implica que

$$\|\tilde{u}^{(2)} - u^\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}), \quad (4.47)$$

e, como caso particular, se obtém

$$\|\tilde{u}^{(1)} - u^\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}), \quad (4.48)$$

onde $\tilde{u}^{(1)}(x, \varepsilon) = u^{(1)} - \varepsilon \chi u_1$.

Para mostrar a proximidade de u_0 e u^ε , basta mostrar, seguindo o procedimento descrito acima, que

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}^{(1)}\|_{H_0^1(\Omega)} = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}), \quad (4.49)$$

e

$$\|\tilde{u}^{(1)} - u_0\|_{H_0^1(\Omega)} = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}). \quad (4.50)$$

Logo,

$$\|u^\varepsilon - u_0\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|u^\varepsilon - \tilde{u}^{(1)}\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\tilde{u}^{(1)} - u_0\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad (4.51)$$

obtendo assim que

$$\|u^\varepsilon - u_0\|_{H_0^1(\Omega)} = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}). \quad (4.52)$$

Outro resultado importante da homogeneização assintótica em problemas multidimensionais é que os coeficientes efetivos preservam a simetria e o caráter definido positivo dos coeficientes originais, o qual constitui uma ferramenta de controle dos cálculos realizados. A seguir, isto será demonstrado em detalhes.

4.4 Conservação da simetria

Parte-se de reescrever os coeficientes efetivos (4.19) com $M_p = N_p + y_p$, ou seja,

$$\begin{aligned} \hat{a}_{jp} &= \left\langle a_{jl}(y) \frac{\partial N_p}{\partial y_l} + a_{jp}(y) \right\rangle = \left\langle a_{jl}(y) \frac{\partial N_p}{\partial y_l} + a_{jl}(y) \delta_{pl} \right\rangle = \left\langle a_{jl}(y) \frac{\partial N_p}{\partial y_l} + a_{jl}(y) \frac{\partial y_p}{\partial y_l} \right\rangle \\ &= \left\langle a_{jl}(y) \frac{\partial M_p}{\partial y_l} \right\rangle = \left\langle a_{kl}(y) \delta_{jk} \frac{\partial M_p}{\partial y_l} \right\rangle = \left\langle a_{kl}(y) \frac{\partial y_j}{\partial y_k} \frac{\partial M_p}{\partial y_l} \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Substituindo $y_j = M_j - N_j$ tem-se

$$\hat{a}_{jp} = \left\langle a_{kl}(y) \frac{\partial(M_j - N_j)}{\partial y_k} \frac{\partial M_p}{\partial y_l} \right\rangle = \left\langle a_{kl}(y) \frac{\partial M_j}{\partial y_k} \frac{\partial M_p}{\partial y_l} \right\rangle - \left\langle a_{kl}(y) \frac{\partial N_j}{\partial y_k} \frac{\partial M_p}{\partial y_l} \right\rangle. \quad (4.54)$$

A partir daqui, busca-se mostrar que o primeiro termo da direita de (4.54) é simétrico com relação aos índices j e p , e ainda, que o segundo termo é nulo. Primeiramente, mostra-se que o segundo termo de (4.54) é nulo:

Considere a equação do problema local (4.13) reescrita da seguinte forma

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{jl}(y) \frac{\partial M_p}{\partial y_l} \right) = 0, \quad y \in Y. \quad (4.55)$$

Seja $\phi = \phi(y)$, Y -periódica e continuamente diferenciável. Logo,

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{jl}(y) \frac{\partial M_p}{\partial y_l} \right) \phi(y) = 0, \quad y \in Y. \quad (4.56)$$

Note que

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{jl}(y) \frac{\partial M_p}{\partial y_l} \phi(y) \right) = \frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{jl}(y) \frac{\partial M_p}{\partial y_l} \right) \phi(y) + a_{jl}(y) \frac{\partial M_p}{\partial y_l} \frac{\partial \phi}{\partial y_j}. \quad (4.57)$$

Então, ao aplicar o operador da média, tem-se

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{jl}(y) \frac{\partial M_p}{\partial y_l} \phi(y) \right) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{jl}(y) \frac{\partial M_p}{\partial y_l} \right) \phi(y) \right\rangle + \left\langle a_{jl}(y) \frac{\partial M_p}{\partial y_l} \frac{\partial \phi}{\partial y_j} \right\rangle. \quad (4.58)$$

Note que $M_p(y) = N_p(y) + y_p$ não é Y -periódico. Contudo, $\frac{\partial M_p}{\partial y_l} = \frac{\partial N_p}{\partial y_l} + \delta_{pl}$ é Y -periódico. Logo, $a_{jl}(y) \frac{\partial M_p}{\partial y_l} \phi(y)$ é Y -periódico, o qual implica que o termo na esquerda de (4.58) é nulo. Portanto, tem-se

$$\left\langle a_{jl}(y) \frac{\partial M_p}{\partial y_l} \frac{\partial \phi}{\partial y_j} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{jl}(y) \frac{\partial M_p}{\partial y_l} \right) \phi(y) \right\rangle, \quad (4.59)$$

que implica, com (4.56), que

$$\left\langle a_{jl}(y) \frac{\partial M_p}{\partial y_l} \frac{\partial \phi}{\partial y_j} \right\rangle = 0, \quad (4.60)$$

para todo $\phi \in C^1(Y)$, Y -periódica. Em particular, se $\phi = N_k$ se cumpre

$$\left\langle a_{jl}(y) \frac{\partial M_p}{\partial y_l} \frac{\partial N_k}{\partial y_j} \right\rangle = 0. \quad (4.61)$$

Assim, considerando (4.61) em (4.54) tem-se

$$\hat{a}_{jp} = \left\langle a_{kl}(y) \frac{\partial M_j}{\partial y_k} \frac{\partial M_p}{\partial y_l} \right\rangle. \quad (4.62)$$

A simetria de \hat{a}_{jp} segue de permutar os índices k e l , e considerar a simetria de a_{lk} :

$$\hat{a}_{jp} = \left\langle a_{lk}(y) \frac{\partial M_j}{\partial y_l} \frac{\partial M_p}{\partial y_k} \right\rangle = \left\langle a_{lk}(y) \frac{\partial M_p}{\partial y_k} \frac{\partial M_j}{\partial y_l} \right\rangle = \left\langle a_{kl}(y) \frac{\partial M_p}{\partial y_k} \frac{\partial M_j}{\partial y_l} \right\rangle = \hat{a}_{pj}. \quad (4.63)$$

Portanto, $\widehat{a}_{jp} = \widehat{a}_{pj}$. Assim, uma maneira de controlar os cálculos realizados por técnicas analíticas ou numéricas baseia-se na simetria esperada.

4.5 Conservação do caráter definido positivo

Um outro importante resultado do processo de homogeneização é a conservação do caráter definido positivo dos coeficientes efetivos, também chamada de condição de elipticidade da equação do problema homogeneizado. Da formulação do problema original (4.1), tem-se que o coeficiente a_{jl} é definido positivo, ou seja, $\exists c > 0$, $\forall \eta \in \mathbb{R}^d \mid a_{jl}(y)\eta_j\eta_l \geq c\eta_j\eta_l$, $\forall y \in Y$. Logo, para mostrar o caráter definido positivo de \widehat{a}_{jp} , uma relação similar deve ser provada. Seja $y \in \mathbb{R}^d$. Logo, de (4.62) tem-se

$$\widehat{a}_{jp}\eta_j\eta_p = \left\langle a_{kl}(y) \frac{\partial M_p}{\partial y_k} \frac{\partial M_j}{\partial y_l} \right\rangle \eta_j\eta_p = \left\langle a_{kl}\eta_p \frac{\partial M_p}{\partial y_k} \eta_j \frac{\partial M_j}{\partial y_l} \right\rangle. \quad (4.64)$$

Da definição de positividade de a_{kl} , sabe-se que

$$a_{kl}(y)\eta_p \frac{\partial M_p}{\partial y_k} \eta_j \frac{\partial M_j}{\partial y_l} \geq c \sum_{l=1}^d \left(\eta_j \frac{\partial M_j}{\partial y_l} \right)^2, \quad \forall y \in Y. \quad (4.65)$$

Logo, de substituir (4.65) em (4.64), tem-se

$$\widehat{a}_{jp}\eta_j\eta_p \geq c \sum_{l=1}^d \left\langle \left(\eta_j \frac{\partial M_j}{\partial y_l} \right)^2 \right\rangle. \quad (4.66)$$

Da desigualdade de Cauchy-Buniakovski (KOLMOGOROV; FOMIN, 1975) tém-se

$$\widehat{a}_{jp}\eta_j\eta_p \geq c \sum_{l=1}^d \left\langle \eta_j \frac{\partial M_j}{\partial y_l} \right\rangle^2, \quad (4.67)$$

que pode ser reescrita como

$$\widehat{a}_{jp}\eta_j\eta_p \geq c \sum_{l=1}^d \left[\left\langle \eta_j \frac{\partial N_j}{\partial y_l} \right\rangle + \left\langle \eta_j \frac{\partial y_j}{\partial y_l} \right\rangle \right]^2, \quad (4.68)$$

em que

$$\left\langle \eta_j \frac{\partial N_j}{\partial y_l} \right\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \left\langle \eta_j \frac{\partial y_j}{\partial y_l} \right\rangle = \eta_j \langle \delta_{jl} \rangle = \eta_l. \quad (4.69)$$

Logo, de (4.68) resulta

$$\widehat{a}_{jp}\eta_j\eta_p \geq c \sum_{l=1}^d [\eta_j \delta_{jl}]^2 \quad (4.70)$$

e, portanto,

$$\widehat{a}_{jp}\eta_j\eta_p \geq c \sum_{l=1}^d \eta_l^2 = c\eta_l\eta_l. \quad (4.71)$$

4.6 Exemplo

Para ilustrar os resultados obtidos do MHA realizado nas seções anteriores, propõe-se o seguinte exemplo. Seja $d = 3$, e considere um sólido termicamente isotrópico, micro-heterogêneo e εY -periódico. No espaço, o sólido ocupa a região $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega = [0, 1]^3$. Considere o problema (4.1) com $a_{jl}^\varepsilon(x) = a^\varepsilon(x)\delta_{jl}$, com $a^\varepsilon(x) = 1 + \frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x_1}{\varepsilon}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x_2}{\varepsilon}\right)$ e $f(x) = -1$. A Figura 14 ilustra o comportamento rapidamente oscilante, a positividade e o caráter limitado do coeficiente $a^\varepsilon(x)\delta_{jl}$, para diferentes valores de ε :

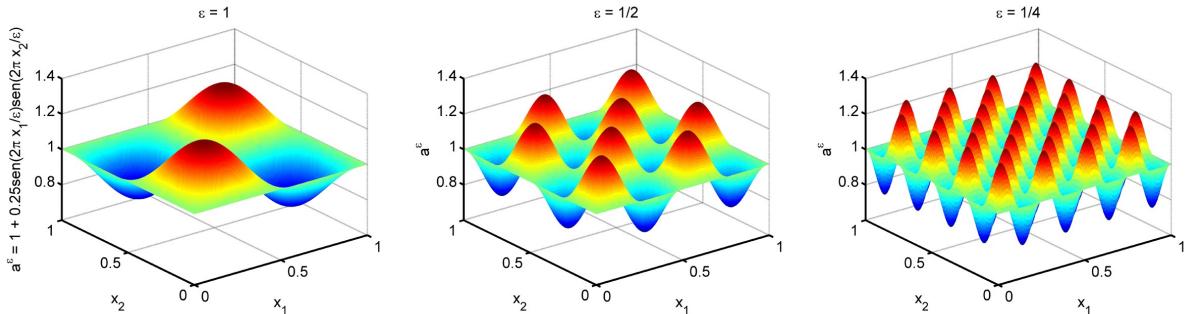


Figura 14: Coeficiente continuamente diferenciável, positivo, limitado e rapidamente oscilante ($\varepsilon \rightarrow 0^+$) para o problema linear elíptico tridimensional.

Para este problema, resolvem-se os problemas (4.13), (4.19) e (4.20), obtidos da homogeneização assintótica. É possível perceber que o primeiro destes problemas é bidimensional do ponto de vista da homogeneização, pois seus problemas locais dependem apenas de y_1 e y_2 , sendo isso uma consequência da propriedade $a^\varepsilon(x)$ depender apenas de x_1 e x_2 . Portanto, de (4.13) resolve-se o seguinte problema local:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_1} \left(a(y) \frac{\partial N_p}{\partial y_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(a(y) \frac{\partial N_p}{\partial y_2} \right) = -\frac{\partial a}{\partial y_p}, & y \in Y, \\ \langle N_p(y) \rangle = 0, \end{cases} \quad (4.72)$$

para cada $p = 1, 2, 3$. A equação deste problema é de Poisson bidimensional para $p = 1, 2$ e de Laplace para $p = 3$. Para resolvê-lo, utilizou-se o Método das Diferenças Finitas (CUNHA, 2000), (BURDEN; FAIRES, 2008) que seguiu os seguintes passos:

- Estabelece-se a malha de $N + 2$ pontos para ambas direções y_1 e y_2 , definindo os pontos de fronteira, que em particular são todos nulos, como na Figura 15:

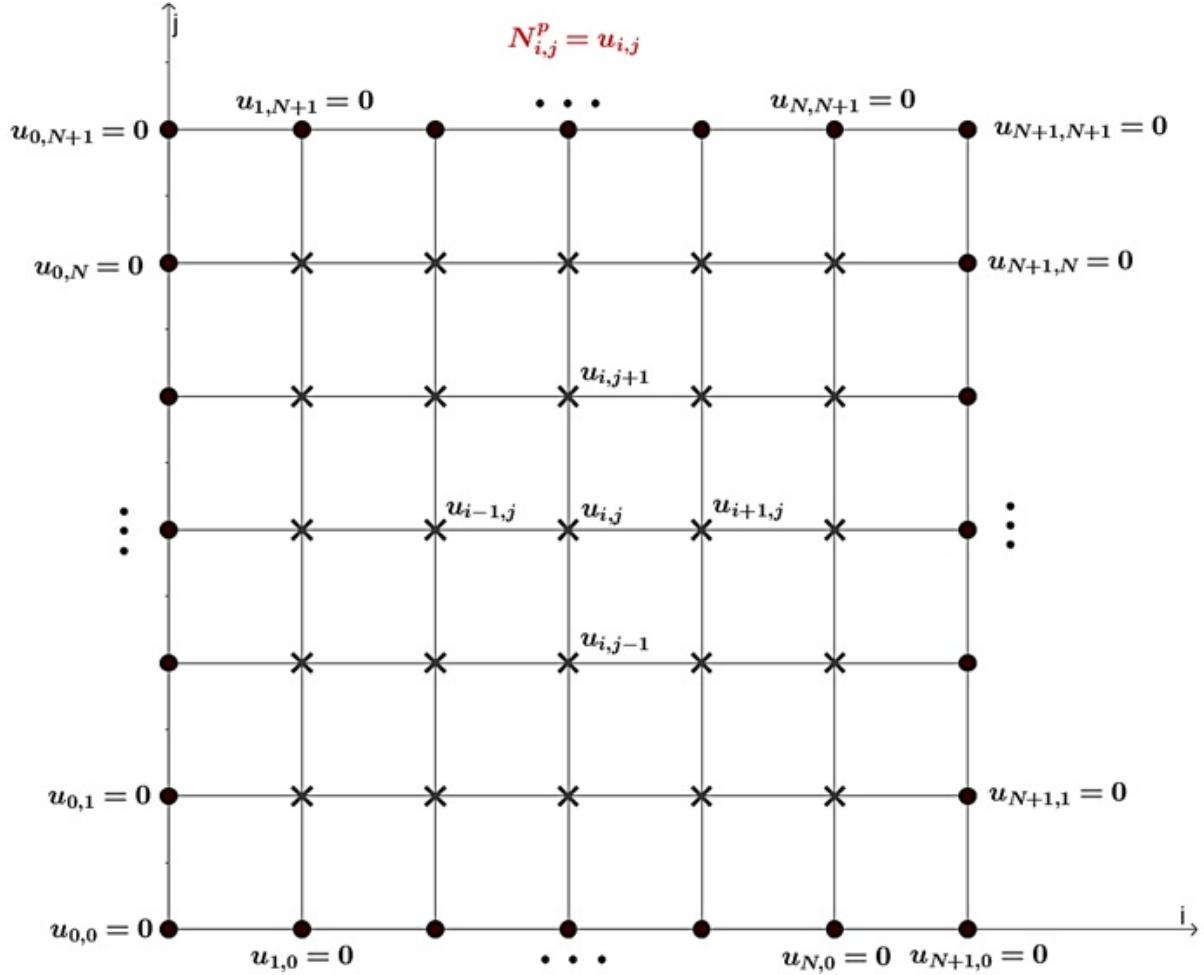


Figura 15: Discretização da região Y para todo y_3 fixo.

- A discretização da equação do problema (4.72) num ponto arbitrário $(y_{1,i}, y_{2,j})$ é

$$c_{i,j}N_{i+1,j}^p + d_{i,j}N_{i-1,j}^p + e_{i,j}N_{i,j+1}^p + f_{i,j}N_{i,j-1}^p + g_{i,j}N_{i,j}^p = F_{i,j}^p,$$

em que

$$c_{i,j} = \frac{a_{i,j}^{(1)}}{2h} + \frac{a_{i,j}}{h^2}, \quad d_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{h^2} - \frac{a_{i,j}^{(1)}}{2h}, \quad e_{i,j} = \frac{a_{i,j}^{(2)}}{2h} + \frac{a_{i,j}}{h^2}, \quad f_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{h^2} - \frac{a_{i,j}^{(2)}}{2h},$$

$$g_{i,j} = -\frac{a_{i,j}}{h^2}, \quad F_{i,j}^p = \begin{cases} \text{se } p = 1 \text{ então } F_{i,j}^1 = -a_{i,j}^{(1)}, \\ \text{se } p = 2 \text{ então } F_{i,j}^2 = -a_{i,j}^{(2)}, \\ \text{se } p = 3 \text{ então } F_{i,j}^3 = 0, \end{cases}$$

$$a_{i,j}^{(1)} = \frac{\partial a}{\partial y_1}(y_{1,i}, y_{2,j}), \quad a_{i,j}^{(2)} = \frac{\partial a}{\partial y_2}(y_{1,i}, y_{2,j}),$$

e $h = \frac{1}{N+1}$ é o espaçamento entre os pontos da malha em y_1 e y_2 , sendo N um número par que define o número de pontos internos da região Y com y_3 fixo.

- Monta-se o sistema de equações lineares usando a discretização nos pontos (\times) internos da região e as condições de contorno (\bullet), (ver Figura 15). A matriz dos coeficientes do sistema é estruturada por blocos, sendo ela definida como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} S_1 & R_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ T_2 & S_2 & R_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & T_3 & S_3 & R_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & T_{N-1} & S_{N-1} & R_{N-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & T_N & S_N \end{bmatrix}_{N^2 \times N^2} \quad (4.73)$$

em que $\{S_j\}_{1 \leq j \leq N}$, $\{R_j\}_{1 \leq j \leq N-1}$ e $\{T_j\}_{2 \leq j \leq N}$, são blocos de dimensão $N \times N$ que compõem a matriz A de dimensão $N^2 \times N^2$. Tais blocos estão definidos como:

$$S_j = \begin{bmatrix} c_{1,j} & d_{1,j} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ e_{2,j} & c_{2,j} & d_{2,j} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & e_{3,j} & c_{3,j} & d_{3,j} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & e_{N-1,j} & c_{N-1,j} & d_{N-1,j} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & e_{N,j} & c_{N,j} \end{bmatrix}_{N \times N},$$

$$R_j = \begin{bmatrix} f_{1,j} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & f_{2,j} & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & f_{3,j} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & f_{N-1,j} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & f_{N,j} \end{bmatrix}_{N \times N},$$

e

$$T_j = \begin{bmatrix} g_{1,j} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & g_{2,j} & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & g_{3,j} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & g_{N-1,j} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & g_{N,j} \end{bmatrix}_{N \times N}.$$

Note que a primeira linha da matriz A é constituída pelos coeficientes do ponto localizado em $i = 1$ e $j = 1$, $w_1 \equiv u_{1,1} = N_{1,1}^p$, e os demais são definidos na sequência ilustrada na distribuição de pontos na malha, Figura 16:

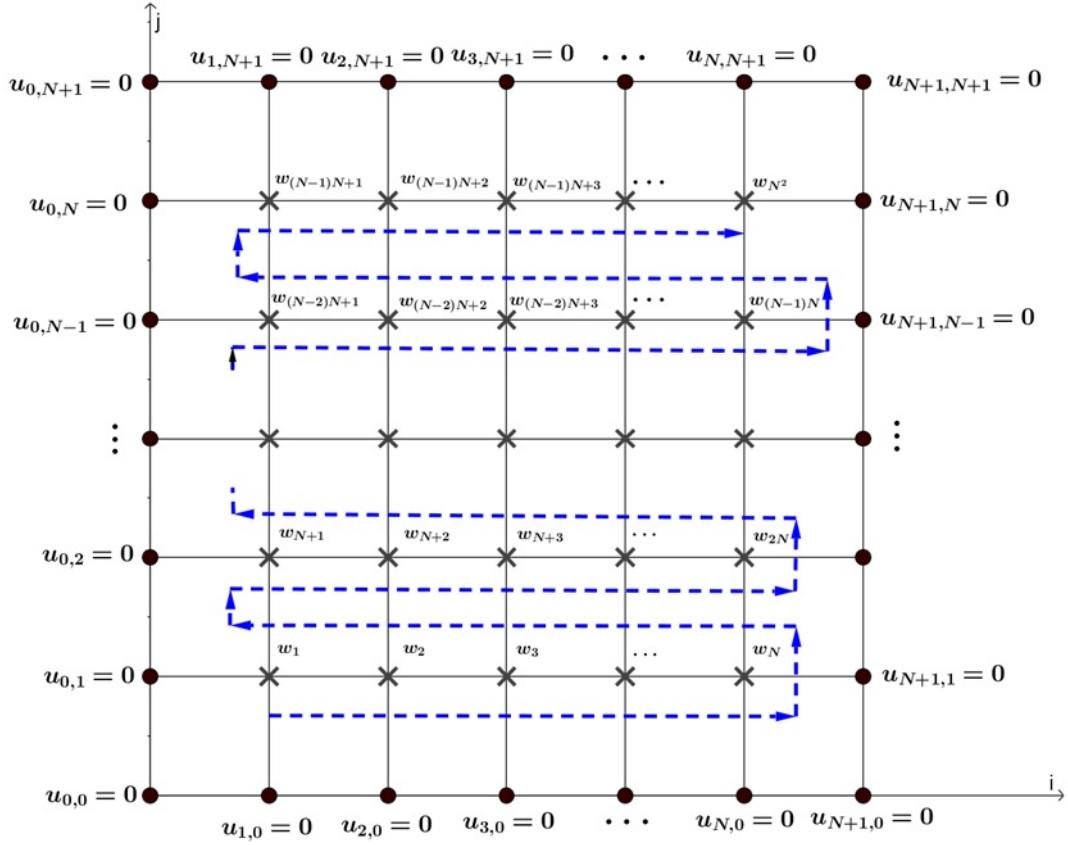


Figura 16: Distribuição de pontos na malha.

A partir desta distribuição o vetor incógnita do sistema é definido como:

$$\mathbf{b} = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_{N^2}]_{N^2 \times 1}^T. \quad (4.74)$$

Assim, de modo análogo, para cada ponto o termo fonte está definido. Logo, $F_{i,j}^p$ é um vetor de dimensão $N^2 \times 1$, ou seja,

$$\mathbf{F}^p = [F_{1,1}^p \ F_{1,2}^p \ \dots \ F_{1,N}^p \ F_{2,1}^p \ F_{2,2}^p \ \dots \ F_{2,N}^p \ \dots \ F_{N,1}^p \ F_{N,2}^p \ \dots \ F_{N,N}^p]_{N^2 \times 1}^T. \quad (4.75)$$

Portanto obtém-se um sistema de equações lineares da forma

$$\mathbf{Ab} = \mathbf{F}^p, \quad (4.76)$$

que determina valores do vetor (4.74), a partir da matriz de coeficientes (4.73) e do vetor (4.75).

Do desenvolvimento descrito acima, os resultados a seguir foram obtidos para uma malha de 10000 pontos, para cada p . O tempo total dessa simulação foi de aproximadamente 1 minuto e 40 segundos. Na Figura 17 estão representadas as soluções dos problemas locais N_p , para $p = 1, 2$, pois para $p = 3$, $N_3(y) = 0$.

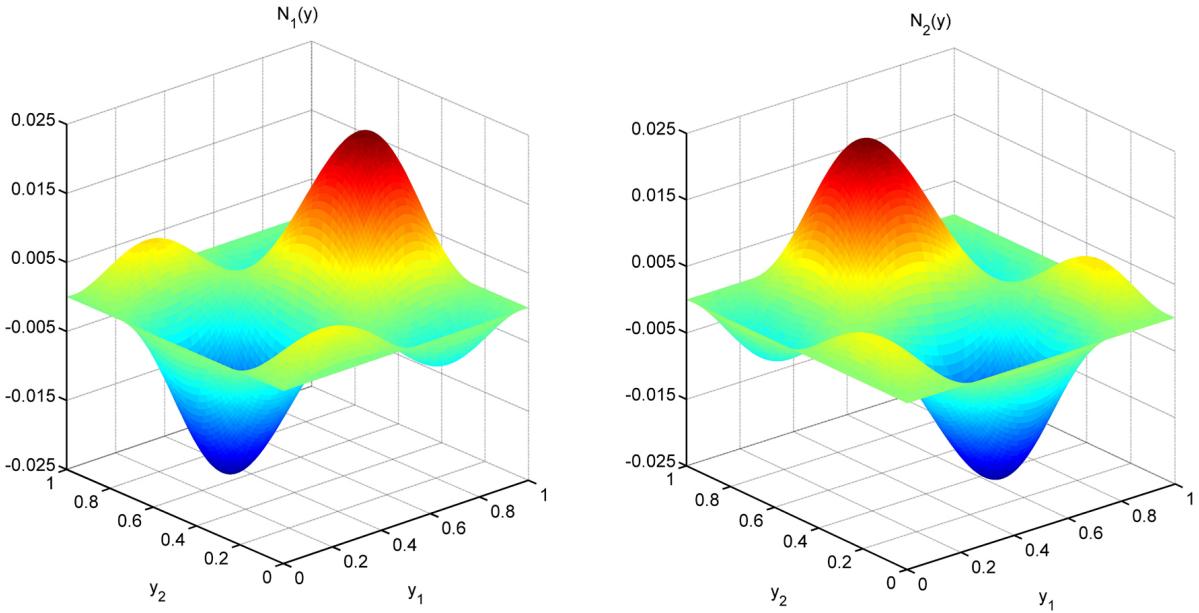


Figura 17: Soluções dos problemas locais N_1 e N_2 , sendo $N_3 = 0$.

Observe que as soluções locais N_p foram calculadas assumindo condições de Dirichlet homogêneas no contorno da célula periódica, ou seja, trocou-se a condição $\langle N_p \rangle = 0$ no problema local (4.13) por $N_p|_{\partial Y} = 0$. Como comentado na seção 4.3, estas condições fazem com que a solução assintótica satisfaça exatamente as condições de contorno do problema original. Por outro lado, no desenvolvimento do MHA na seção 4.2 foi empregado o Lema 4.2.1, o qual utiliza a condição de média nula para a unicidade. No geral, a escolha diferente para garantir a unicidade das soluções locais só influí qualitativamente no comportamento da solução assintótica na vizinhança do contorno. Mas, a diferença entre as soluções locais obtidas a partir dessas condições diferentes é uma constante aditiva, e como os coeficientes efetivos dependem apenas das derivadas das soluções locais, tal diferença não influí nos seus valores. Mesmo assim, para o exemplo resolvido, após o cálculo das soluções locais com condições homogêneas, se verificou que as médias dessas soluções são muito próximas de zero. Especificamente, $\langle N_1 \rangle = 2.365 \times 10^{-5}$, $\langle N_2 \rangle = -2.309 \times 10^{-5}$ e $\langle N_3 \rangle = N_3 = 0$. Ainda mais, estes valores tendem a zero quando o passo da discretização tende a zero, $h \rightarrow 0$. Isto quer dizer que as soluções do exemplo apresentado, satisfazem ambas condições para a unicidade, ou seja, se anulam no contorno da célula de periodicidade e tem média nula sobre a célula periódica.

Obtidas as soluções dos problemas locais, é possível calcular os coeficientes efetivos (4.19). Mas, antes disso, é possível simplificar a expressão para seu cálculo. Note que na expressão de (4.19) deve-se obter a derivada das soluções N_p , que exigiria passos extras na programação, aumento do tempo de simulação, ou seja, maior custo computacional, e ainda, aumento do erro numérico.

Para simplificar (4.19), reescreve-se o termo que contém a derivada de N_p como

$$a_{jl}(y) \frac{\partial N_p}{\partial y_l} = \frac{\partial}{\partial y_l} (N_p(y)a_{jl}(y)) - N_p(y) \frac{\partial a_{jl}}{\partial y_l}. \quad (4.77)$$

Portanto, ao considerar (4.77) em (4.19) tem-se

$$\hat{a}_{jp} = \left\langle \frac{\partial}{\partial y_l} (N_p(y)a_{jl}(y)) - N_p(y) \frac{\partial a_{jl}}{\partial y_l} + a_{jp}(y) \right\rangle, \quad (4.78)$$

que se resume a

$$\hat{a}_{jp} = \langle a_{jp}(y) \rangle - \left\langle N_p(y) \frac{\partial a_{jl}}{\partial y_l} \right\rangle, \quad (4.79)$$

pois $\left\langle \frac{\partial}{\partial y_l} (N_p(y)a_{jl}(y)) \right\rangle = 0$, em virtude de $N_p(y)$ e $a_{jl}(y)$ serem Y -periódicas. Pela isotropia, tem-se

$$\hat{a}_{jp} = \langle a(y) \rangle \delta_{jp} - \left\langle N_p(y) \frac{\partial a}{\partial y_l} \right\rangle \delta_{jl}, \quad (4.80)$$

ou seja,

$$(\hat{a}_{jp})_{1 \leq j,p \leq 3} = \begin{bmatrix} \langle a(y) \rangle - \left\langle N_1(y) \frac{\partial a}{\partial y_1} \right\rangle & - \left\langle N_2(y) \frac{\partial a}{\partial y_1} \right\rangle & 0 \\ - \left\langle N_1(y) \frac{\partial a}{\partial y_2} \right\rangle & \langle a(y) \rangle - \left\langle N_2(y) \frac{\partial a}{\partial y_2} \right\rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle a(y) \rangle \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

Logo, pelo Método de Simpson - Regra do 1/3 (ver anexo B.2.2) calcula-se cada elemento da matriz dos coeficientes efetivos, obtendo-se assim:

$$(\hat{a}_{jp})_{1 \leq j,p \leq 3} = \begin{bmatrix} 0.994587 & 0.000103 & 0 \\ -0.000084 & 0.994607 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

Note que esta matriz é definida positiva, e que os elementos fora da diagonal principal são muito próximos de zero, isto é, pode-se assumir que \hat{a}_{jp} satisfaz a condição de simetria. De fato, malhas mais finas produzem valores muito mais próximos de 1 na diagonal principal e de 0 fora dela, respectivamente, mas o custo computacional é também muito maior, podendo conduzir inclusive à não convergência do método numérico. Sendo assim, quando o passo da discretização tende a zero, $h \rightarrow 0$, tem-se que $\hat{a}_{jp} = \delta_{jp}$, que é, evidentemente, simétrica e definida positiva, como esperado. Este resultado pode ser controlado a partir de cotas variacionais para os coeficientes efetivos derivados da energia efetiva, assunto que será explorado no próximo capítulo.

Especificamente, tais cotas (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989) são,

$$\langle a^{-1}(y) \rangle^{-1} \delta_{jp} \leq \hat{a}_{jp} \leq \langle a(y) \rangle \delta_{jp}, \quad (4.83)$$

onde $\langle a(y) \rangle = 1$ e $\langle a^{-1}(y) \rangle^{-1} = 0.984055$.

Ao se ter a matriz dos coeficientes efetivos, é possível resolver o problema homogeneizado (4.20), que se resume a um problema com equação de Poisson e condições de Dirichlet homogêneas, ou seja,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_3^2} = -1, & x \in \Omega \\ u_0 = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.84)$$

Para resolver o problema (4.84) utilizou o método de separação de variáveis (WEINBERGER, 1995), obtendo-se como solução

$$u_0(x) = \frac{64}{\pi^5} \sum_{i,j,k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(i\pi x_1)\operatorname{sen}(j\pi x_2)\operatorname{sen}(k\pi x_3)}{((2i-1)^2 + (2j-1)^2 + (2k-1)^2)(2i-1)(2j-1)(2k-1)}. \quad (4.85)$$

O processo foi realizado da seguinte maneira: Propõe-se como solução do problema (4.84) uma série de Fourier na base ortogonal $\{\operatorname{sen}(n\pi x_i)\}_{(n,i) \in \mathbb{N} \times \{1,2,3\}}$, a qual satisfaz as condições de contorno homogêneas impostas, ou seja, assume-se

$$u_0(x) = \sum_{i,j,k=1}^{\infty} C_{ijk} \operatorname{sen}(i\pi x_1) \operatorname{sen}(j\pi x_2) \operatorname{sen}(k\pi x_3), \quad x \in [0, 1]^3, \quad (4.86)$$

em que C_{ijk} são constantes a determinar. Ao substituir (4.86) na equação do problema (4.84) obtém-se que

$$\pi^2 \sum_{i,j,k=1}^{\infty} C_{ijk} (i^2 + j^2 + k^2) \operatorname{sen}(i\pi x_1) \operatorname{sen}(j\pi x_2) \operatorname{sen}(k\pi x_3) = 1. \quad (4.87)$$

Para obter C_{ijk} , emprega-se a ortogonalidade da família $\{\operatorname{sen}(n\pi z)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $z \in [0, 1]$. Assim, pelo método de Fourier, fixa-se $i = I$ e multiplica-se em ambos os lados de (4.87) por $\operatorname{sen}(I\pi x_1)$, e integra-se sobre o domínio de x_1 de onde se obtém

$$\begin{aligned} \pi^2 \sum_{j,k=1}^{\infty} C_{Ijk} (I^2 + j^2 + k^2) \operatorname{sen}(j\pi x_2) \operatorname{sen}(k\pi x_3) \int_0^1 \operatorname{sen}^2(I\pi x_1) dx_1 &= \int_0^1 \operatorname{sen}(I\pi x_1) dx_1, \\ \frac{\pi^2}{2} \sum_{j,k=1}^{\infty} C_{Ijk} (I^2 + j^2 + k^2) \operatorname{sen}(j\pi x_2) \operatorname{sen}(k\pi x_3) &= \frac{2}{I\pi} \end{aligned}$$

para I ímpar, pois $C_{Ijk} = 0$ para I par. Similarmente, fixando $j = J$ e depois $k = K$,

multiplicando por $\sin(J\pi x_2)$, $\sin(K\pi x_3)$ e integrando sobre cada um dos domínios, obtém-se

$$C_{IJK} = \frac{64}{(I^2 + J^2 + K^2) IJK \pi^5}, \quad (4.88)$$

em que J e K também são ímpares, pelo mesmo motivo de I . Portanto,

$$u_0(x) = \frac{64}{\pi^5} \sum_{i,j,k=1}^{\infty} \frac{\sin(i\pi x_1)\sin(j\pi x_2)\sin(k\pi x_3)}{((2i-1)^2 + (2j-1)^2 + (2k-1)^2)(2i-1)(2j-1)(2k-1)}. \quad (4.89)$$

Nas Figuras 18 e 19 a seguir, apresentam-se as soluções $u^{(1)}$, u_0 e as diferenças $u^{(1)} - u_0$ para $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$, respectivamente:

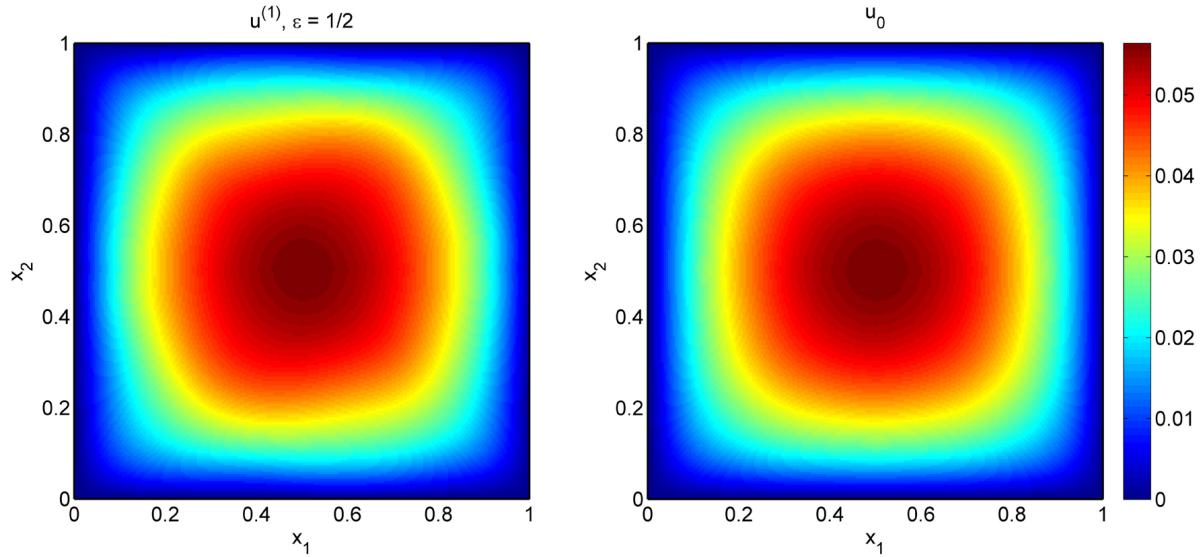


Figura 18: Soluções assintótica (esquerda) e homogeneizada (direita).

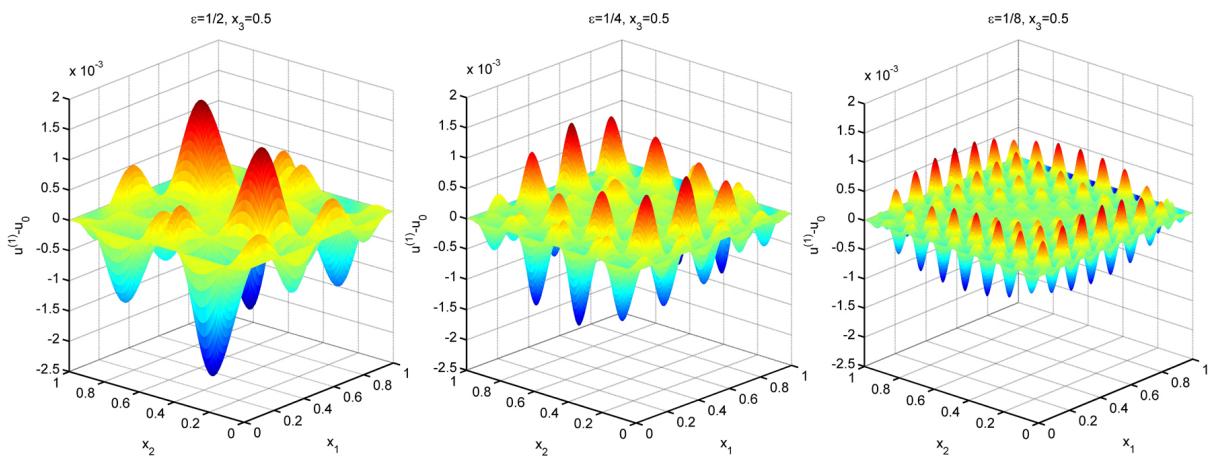


Figura 19: Diferença entre as soluções assintótica e homogeneizada para $\varepsilon = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$.

Na visualização tridimensional das soluções assintótica e homogeneizada apresentadas na Figura 18 não é possível distinguir as leves diferenças entre elas. No entanto, note que sua representação bidimensional tais diferenças são visíveis. Especificamente, o gráfico da esquerda na Figura 18 apresenta uma pequena assimetria, enquanto o gráfico da direita é perfeitamente simétrico. Mas mesmo assim, ambas soluções são muito próximas, como ilustrado na Figura 19. Este exemplo ilustra de maneira muito clara a necessidade de uma abordagem alternativa (por exemplo, o MHA) à resolução direta do problema original, pois este apresenta todas as características descritas na Introdução deste trabalho. Especificamente, o problema original (4.1) é tridimensional e com coeficientes rapidamente oscilantes (Figura 14), o qual faz com que uma abordagem direta por um método tradicional, como o método de diferenças finitas empregado aqui, requeira de uma discretização tridimensional extremamente fina do domínio para conseguir capturar a variação rápida dos coeficientes. Isto implica em um alto custo computacional e no comprometimento da convergência do método numérico empregado. De fato, isto foi o que aconteceu quando tentou-se resolver diretamente o problema original (4.1) deste exemplo pelo método de diferenças finitas. Assim, o MHA forneceu uma alternativa na procura da solução deste problema na forma da s.a.f., a qual foi provada ser muito próxima da solução exata do problema na seção 4.3. Ainda mais, do ponto de vista prático, os problemas gerados da aplicação do MHA, ou seja, os problemas homogeneizado e locais, são muito mais simples de serem resolvidos. Neste caso, os problemas locais são bidimensionais e seus coeficientes, mesmo não sendo constantes, não oscilam rapidamente, o qual permitiu que o método de diferenças finitas fosse aplicado com sucesso. Já para o problema homogeneizado, o qual tem coeficientes constantes, foi resolvido analiticamente via o método de Fourier. Por outro lado, a busca da solução exata do problema original requereria de abordagens não tradicionais, como métodos numéricos multiescalas (ABDULLE; E, 2003; HUANG; CAO; YANG, 2015). Contudo, isto foge do escopo da dissertação, mas será levado em consideração ao dar continuidade às pesquisas nesta área no trabalho futuro.

5 COTAS VARIACIONAIS PARA A ENERGIA EFETIVA E A LEI EFETIVA DE MEIOS MICROPERIÓDICOS HOMOGÊNEOS POR PARTES

Neste capítulo, o enfoque da aplicação da homogeneização é diferente do que tem sido feito nos capítulos anteriores, nos quais o objetivo fundamental é a obtenção de boas estimativas da solução do problema original. Neles, como resultados complementares da aplicação do MHA, foram obtidas gradezas que caracterizam o comportamento macroscópico do meio heterogêneo: as propriedades efetivas. Este é precisamente o objetivo do presente capítulo: o estudo do comportamento efetivo de meios heterogêneos mediante homogeneização matemática. Estudos com este enfoque, geralmente são realizados sobre meios que apresentam geometrias complexas, tais como em materiais compósitos. Materiais compósitos são materiais heterogêneos formados a partir da distribuição de domínios ocupados por dois ou mais materiais homogêneos constituintes diferentes chamados de fases. Nos capítulos anteriores, os meios heterogêneos estudados apresentavam propriedades que variavam continuamente. Neste capítulo, diferentemente dos anteriores, estudam-se compósitos, os quais, por serem constituídos por fases homogêneas, apresentam propriedades constantes por partes. Tal descontinuidade faz necessário impor condições nas superfícies de contato entre as fases. O objeto de estudo neste capítulo é um compósito, bifásico, não linear, com estrutura tridimensional microperiódica e contato perfeito entre as fases constituintes. O comportamento efetivo será estudado a partir da formulação variacional do problema, obtendo-se cotas para a energia efetiva e para a lei efetiva deste compósito.

5.1 Formulação do problema

Considera-se um compósito bifásico periódico, que ocupa um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de fronteira $\partial\Omega$ suficientemente suave, de volume $|\Omega|$ e que se obtém da replicação de uma célula de periodicidade $\mathcal{Y} \subset \Omega$. As duas fases, que ocupam subdomínios Ω_r , $r = 1, 2$, com $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ e $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, se assumem estar em contato perfeito.

O comportamento constitutivo do compósito, isto é, a relação entre o fluxo σ e o campo gradiente ϵ é dado por

$$\sigma_i = \sigma_i(x, \epsilon) = \frac{\partial W(x, \epsilon)}{\partial \epsilon_i} \quad (5.1)$$

onde W é a função de energia constitutiva do compósito. O estado de equilíbrio do compósito é dado por

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} = 0. \quad (5.2)$$

Todo fluxo σ que satisfaz (5.2) é chamado de auto-equilibrado. Com $F = \sigma$ ou W tem-se

$$F(x, \epsilon) = \sum_{r=1}^2 \chi_r(x) F_r(\epsilon) \quad (5.3)$$

onde $\chi_r(x)$ é a função característica da fase $r = 1, 2$ e F_r é a restrição de F a Ω_r .

O campo gradiente ϵ é dito compatível se, com o símbolo de permutação de Levi-Civita definido por

$$\pi_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{se } ijk \text{ é uma permutação par de } \{1, 2, 3\} \\ -1, & \text{se } ijk \text{ é uma permutação ímpar de } \{1, 2, 3\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (5.4)$$

tem-se que

$$\pi_{ijk} \frac{\partial \epsilon_k}{\partial x_j} = 0. \quad (5.5)$$

A equação de compatibilidade (5.5) expressa que ϵ é irrotacional, de onde segue que ϵ é conservativo, ou seja, que existe um campo escalar u tal que

$$\epsilon_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}. \quad (5.6)$$

O contato perfeito das fases implica que todas as grandezas são contínuas através das superfícies de contato $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ entre as fases. Especificamente, tem-se a continuidade do potencial u

$$[u]_\Gamma = 0, \quad (5.7)$$

e do fluxo σ

$$[\sigma_i n_i]_\Gamma = 0, \quad (5.8)$$

onde $[F]_\Gamma$ indica o salto de F ao redor de Γ , e n é o vetor normal unitário exterior a Γ .

Dada a \mathcal{Y} -periodicidade do compósito, considera-se $u \in H_{per}^1(\mathcal{Y})$ e, tendo em conta que u se estende periodicamente de maneira natural para todo Ω , tem-se também a \mathcal{Y} -periodicidade de $\epsilon_i, \sigma_i \in L^2(\Omega)$.

Note que, com estas considerações, a equação de equilíbrio (5.2) deve ser entendida no sentido generalizado, ou seja,

$$\left\langle \sigma_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle = 0, \quad \forall \phi \in H_{per}^1(\mathcal{Y}), \langle \phi \rangle = 0, \quad (5.9)$$

onde $\langle F \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} F dx$ é o operador do valor médio. Note que $\langle F \rangle = \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}} F dy$ por causa da \mathcal{Y} -periodicidade.

Em geral, as condições de contorno de tipo elíptica para este problema são

$$u|_{\partial\Omega_u} = u^0, \quad \sigma_i n_i|_{\partial\Omega_\sigma} = t^0, \quad (5.10)$$

onde $\partial\Omega = \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_\sigma$, $\emptyset = \partial\Omega_u \cap \partial\Omega_\sigma$ e n é o vetor unitário normal exterior a $\partial\Omega$. Em caso de condições uniformes se tem que

$$u^0 = \bar{\epsilon}_i x_i, \quad t^0 = \bar{\sigma}_i n_i, \quad (5.11)$$

onde a barra indica uma grandeza constante. E ainda, com certo abuso de notação, quando não se impõe uma condição de contorno a uma grandeza, de todas as formas denotamos seus valores em $\partial\Omega$ como tal condição, ou seja, (5.10) denota tanto valores impostos como naturais.

5.2 Teoremas básicos

No presente enfoque, a homogeneização de um compósito refere-se a encontrar a dependência funcional entre as variáveis médias $\bar{\sigma}$ e $\bar{\epsilon}$ do modelo que descreve seu comportamento físico. Um passo prévio à homogeneização consiste em conhecer de antemão tais médias em termos das condições de contorno aplicadas ao compósito, independentemente das relações constitutivas. Nesta seção, apresentam-se generalizações de teoremas clássicos sobre as grandes médias.

Teorema 5.2.1 (Grandezas médias). *Sejam ϵ compatível e σ auto-equilibrado. Então:*

(a) *para a condição de contorno geral para u em (5.10) sobre $\partial\Omega$ tem-se*

$$\langle \epsilon_i \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} u^0 n_i dS, \quad (5.12)$$

em que para o caso da condição de contorno uniforme para u em (5.11) tem-se

$$\langle \epsilon_i \rangle = \bar{\epsilon}_i; \quad (5.13)$$

(b) para a condição de contorno geral para σ em (5.10) sobre $\partial\Omega$ tem-se

$$\langle \sigma_i \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} t^0 x_i dS, \quad (5.14)$$

em que para o caso da condição de contorno uniforme para σ em (5.11) tem-se

$$\langle \sigma_i \rangle = \bar{\sigma}_i. \quad (5.15)$$

Na demonstração a seguir, leva-se em conta o teorema da divergência e, em particular, que para o delta de Kronecker se tem que $\delta_{ij} = \langle \delta_{ij} \rangle = \left\langle \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} x_i n_j dS$.

Demonstração. (a) Sejam ϵ e u tais que $\epsilon_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ e $u|_{\partial\Omega} = u^0$. Logo,

$$\langle \epsilon_i \rangle = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} u n_i dS = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} u^0 n_i dS. \quad (5.16)$$

Ainda, se $u^0 = \bar{\epsilon}_i x_i$, tem-se que

$$\langle \epsilon_i \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} u^0 n_i dS = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \bar{\epsilon}_j x_j n_i dS = \bar{\epsilon}_i. \quad (5.17)$$

(b) Seja σ tal que $\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} = 0$ com $\sigma_i n_i|_{\partial\Omega} = t^0$. Logo,

$$\begin{aligned} \langle \sigma_i \rangle &= \langle \sigma_j \delta_{ij} \rangle = \left\langle \sigma_j \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial(\sigma_j x_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \sigma_j}{\partial x_j} x_i \right\rangle = \left\langle \frac{\partial(\sigma_j x_i)}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \sigma_j x_i n_j dS = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} t^0 x_i dS. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Ainda, se $t^0 = \bar{\sigma}_i n_i$, tem-se que

$$\langle \sigma_i \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} t^0 x_i dS = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \bar{\sigma}_j n_j x_i dS = \bar{\sigma}_i. \quad (5.19)$$

□

Teorema 5.2.2 (Média do produto - HILL (1963)). *Sejam ϵ compatível e σ auto-equilibrado. Então, para as condições de contorno gerais (5.10) se tem*

$$\langle \sigma_i \epsilon_i \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} t^0 u^0 dS, \quad (5.20)$$

em que para o caso de condições de contorno uniformes (5.11) se tem

$$\langle \sigma_i \epsilon_i \rangle = \bar{\sigma}_i \bar{\epsilon}_i. \quad (5.21)$$

Demonstração. Sejam σ, ϵ e u tais que $\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} = 0$ e $\epsilon_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ com $\sigma_i n_i|_{\partial\Omega} = t^0$ e $u|_{\partial\Omega} = u^0$. Então,

$$\begin{aligned}\langle \sigma_i \epsilon_i \rangle &= \left\langle \sigma_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial(\sigma_i u)}{\partial x_i} - \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} u \right\rangle = \left\langle \frac{\partial(\sigma_i u)}{\partial x_i} \right\rangle \\ &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \sigma_i u n_i dS = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} t^0 u^0 dS.\end{aligned}\quad (5.22)$$

Logo, no caso de condições de contorno uniformes, de (5.22) tem-se

$$\langle \sigma_i \epsilon_i \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} t^0 u^0 dS = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \bar{\sigma}_i n_i \epsilon_j x_j dS = \bar{\sigma}_i \langle \epsilon_i \rangle \\ \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \sigma_i n_i \bar{\epsilon}_j x_j dS = \langle \sigma_i \rangle \bar{\epsilon}_i \end{array} \right\} = \bar{\sigma}_i \bar{\epsilon}_i. \quad (5.23)$$

□

Teorema 5.2.3 (Identidade de HILL (1963)). *Sejam ϵ compatível e σ auto-equilibrado. Então,*

$$\langle \sigma_i \epsilon_i \rangle - \langle \sigma_j \rangle \langle \epsilon_j \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} (t^0 - \langle \sigma_i \rangle n_i) (u^0 - \langle \epsilon_j \rangle x_j) dS \quad (5.24)$$

Demonstração. Sejam σ, ϵ e u tais que $\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} = 0$ e $\epsilon_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ com $\sigma_i n_i|_{\partial\Omega} = t^0$ e $u|_{\partial\Omega} = u^0$.

Então,

$$\begin{aligned}\langle \sigma_i \epsilon_i \rangle - \langle \sigma_j \rangle \langle \epsilon_j \rangle &= \langle \sigma_i \epsilon_i \rangle - \langle \sigma_j \rangle \langle \epsilon_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \epsilon_i \rangle + \langle \sigma_i \rangle \langle \epsilon_i \rangle \\ &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} t^0 u^0 dS - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} t^0 x_j dS \langle \epsilon_j \rangle \\ &\quad - \langle \sigma_i \rangle \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} u^0 n_i dS + \langle \sigma_i \rangle \langle \epsilon_j \rangle \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} n_i x_j dS \\ &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} (t^0 u^0 - t^0 \langle \epsilon_j \rangle x_j - u^0 \langle \sigma_i \rangle n_i + \langle \sigma_i \rangle n_i \langle \epsilon_j \rangle x_j) dS \\ &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} (t^0 - \langle \sigma_i \rangle n_i) (u^0 - \langle \epsilon_j \rangle x_j) dS.\end{aligned}\quad (5.25)$$

□

Note que a média do produto (5.21) pode ser obtida também considerando as condições de contorno uniformes (5.11) na identidade (5.24).

Teorema 5.2.4 (Optimalidade das condições de contorno uniformes). *Sejam as condições de contorno uniformes e valores naturais (5.11) e ϵ tais que*

$$\epsilon_i = \epsilon_i(x, \bar{\epsilon}), \quad (5.26)$$

e $\langle \sigma \rangle = \bar{\sigma}$, $\langle \epsilon \rangle = \bar{\epsilon}$. Define-se a energia média $\langle W \rangle(\bar{\epsilon}) = \langle W(x, \epsilon) \rangle$ com a relação constitutiva (5.1) e (5.26). Então:

(a) tem-se que a lei efetiva é

$$\bar{\sigma}_i = \frac{\partial \langle W \rangle(\bar{\epsilon})}{\partial \bar{\epsilon}_i}; \quad (5.27)$$

(b) e se a função de energia $W(x, \epsilon)$ é convexa, ou seja,

$$W(x, \epsilon^{(1)}) \geq W(x, \epsilon^{(2)}) + (\epsilon_i^{(1)} - \epsilon_i^{(2)}) \frac{\partial W(x, \epsilon^{(2)})}{\partial \epsilon_i}, \quad (5.28)$$

ao considerar as seguintes soluções do problema (5.1), (5.2), (5.6),

$$\epsilon^{(1)} = \epsilon^{t^0}, \quad \epsilon^{(2)} = \epsilon^{\bar{\sigma}} \quad (5.29)$$

obtidas de condições de contorno gerais e uniformes de igual valor médio,

$$\langle \epsilon^{t^0} \rangle = \langle \epsilon^{\bar{\sigma}} \rangle = \bar{\epsilon}, \quad (5.30)$$

tem-se que

$$\langle W \rangle^{t^0}(\bar{\epsilon}) \geq \langle W \rangle^{\bar{\sigma}}(\bar{\epsilon}) \equiv \widehat{W}(\bar{\epsilon}), \quad (5.31)$$

sendo $\widehat{W}(\bar{\epsilon})$ a energia efetiva. Logo, de (5.27) segue a lei efetiva

$$\bar{\sigma}_i = \frac{\partial \widehat{W}(\bar{\epsilon})}{\partial \bar{\epsilon}_i}. \quad (5.32)$$

Demonstração. (a) Pela regra da cadeia e a relação constitutiva (5.1) tem-se

$$\frac{\partial W(x, \epsilon)}{\partial \epsilon_i} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_j} \frac{\partial \epsilon_j}{\partial \epsilon_i} = \sigma_j \frac{\partial \epsilon_j}{\partial \epsilon_i}. \quad (5.33)$$

Calculando a média de (5.33) e levando em conta (5.21), segue que

$$\frac{\partial \langle W \rangle(\bar{\epsilon})}{\partial \bar{\epsilon}_i} = \langle \sigma_j \rangle \left\langle \frac{\partial \epsilon_j}{\partial \bar{\epsilon}_i} \right\rangle = \langle \sigma_j \rangle \frac{\partial \langle \epsilon_j \rangle}{\partial \bar{\epsilon}_i}. \quad (5.34)$$

Assim, das condições uniformes (5.11) e as médias (5.12), e (5.14) segue que $\frac{\partial \langle \epsilon_j \rangle}{\partial \bar{\epsilon}_i} = \delta_{ji}$, que com $\bar{\epsilon} = \langle \epsilon \rangle$ e $\bar{\sigma} = \langle \sigma \rangle$ resulta em (5.27).

(b) Substituindo (5.29) em (5.28) e calculando a média com (5.11) e (5.20), segue que

$$\langle W \rangle^{t^0}(\bar{\epsilon}) - \langle W \rangle^{\bar{\sigma}}(\bar{\epsilon}) \geq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} (u^{t^0} - u^{\bar{\sigma}}) \bar{\sigma}_i n_i dS = \left\langle \epsilon_i^{t^0} - \epsilon_i^{\bar{\sigma}} \right\rangle \bar{\sigma}_i = 0 \quad (5.35)$$

por (5.30). Logo, tem-se (5.31). □

5.3 Homogeneização variacional

O problema original definido na seção 5.1 é, em geral, muito difícil de resolver diretamente. Uma alternativa útil consiste na obtenção de estimativas ou cotas para as grandezas e expressões importantes relacionadas com sua solução, a saber, a energia efetiva (5.31) e a lei efetiva (5.32). Nesta seção, serão obtidas cotas a partir da formulação variacional do problema original para a energia efetiva e a lei efetiva.

5.3.1 Princípios variacionais e cotas para a energia efetiva

O teorema de otimalidade das condições de contorno uniformes apresentado pode ser formalizado como um princípio variacional de mínima energia que constitui a formulação fraca do problema original.

Teorema 5.3.1 (Princípio de Mínima Energia). *Seja $W(x, \epsilon)$ convexo por partes a função de energia constitutiva do compósito. Então, a solução u do problema definido por (5.1) (5.2) e (5.13) minimiza a energia média $\langle W(x, \epsilon) \rangle$, ou seja,*

$$\widehat{W}(\bar{\epsilon}) = \inf_{\epsilon \in S(\bar{\epsilon})} \langle W(x, \epsilon) \rangle, \quad (5.36)$$

onde

$$S(\bar{\epsilon}) = \left\{ \epsilon : \exists u \in H_{per}^1(\mathcal{Y}), \epsilon_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \langle \epsilon \rangle = \bar{\epsilon} \right\}. \quad (5.37)$$

Demonstração. A variação total da energia média cumpre que

$$\begin{aligned} \delta \langle W(x, \epsilon) \rangle &= \langle \delta W(x, \epsilon) \rangle = \left\langle \frac{\partial W(x, \epsilon)}{\partial \epsilon_i} \delta \epsilon_i \right\rangle \\ &= \langle \sigma_i \delta \epsilon_i \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} t^0 \delta \bar{\epsilon}_i x_i dS = 0, \end{aligned} \quad (5.38)$$

que se anula dado que $\delta \bar{\epsilon}|_{\partial\Omega} = 0$, ou seja, se cumpre a condição necessária de extremo para todo ϵ que satisfaz a condição de contorno uniforme, em particular, a solução do problema original. Por outro lado, a afirmação (5.36) foi demonstrada em (5.35) para qualquer condição de contorno.

Em particular, para condições uniformes, resulta conveniente escrever ϵ em termos de sua média e desvio, ou seja, como $\epsilon = \bar{\epsilon} + \epsilon^0$, onde $\langle \epsilon \rangle = \bar{\epsilon}$ e $\langle \epsilon^0 \rangle = 0$. Logo, sendo $S^0 = S(0)$ o conjunto de admissibilidade correspondente a condições de contorno homogêneas para o desvio, o princípio variacional (5.36) pode ser escrito como

$$\widehat{W}(\bar{\epsilon}) = \inf_{\epsilon^0 \in S^0} \langle W(x, \bar{\epsilon} + \epsilon^0) \rangle. \quad (5.39)$$

Logo, da diferenciabilidade e convexidade de $W(x, \epsilon)$, tem-se que

$$\begin{aligned}
\widehat{W}(\bar{\epsilon}') &= \inf_{\epsilon' \in S(\bar{\epsilon}')} \langle W(x, \epsilon') \rangle = \inf_{\epsilon^0 \in S^0} \langle W(x, \bar{\epsilon}' + \epsilon^0) \rangle \\
&\geq \inf_{\epsilon^0 \in S^0} \left\langle W(x, \bar{\epsilon} + \epsilon^0) + (\bar{\epsilon}'_i - \bar{\epsilon}_i) \frac{\partial W(x, \bar{\epsilon} + \epsilon^0)}{\partial \epsilon_i} \right\rangle \\
&\geq \widehat{W}(\bar{\epsilon}) + \inf_{\epsilon \in S(\bar{\epsilon})} \left\langle (\bar{\epsilon}'_i - \bar{\epsilon}_i) \frac{\partial W(x, \epsilon)}{\partial \epsilon_i} \right\rangle \\
&= \widehat{W}(\bar{\epsilon}) + (\bar{\epsilon}'_i - \bar{\epsilon}_i) \bar{\sigma}_i
\end{aligned} \tag{5.40}$$

de onde resultam (5.36), a lei efetiva (5.32) e que $\widehat{W}(\bar{\epsilon})$ é convexo. \square

Da mesma maneira, pode-se garantir a existência de um princípio variacional similar a (5.36) em σ que corresponde ao problema relacionado à energia complementar $U(x, \sigma)$, cuja convexidade se pode assumir. Em resumo, o problema para a formulação em σ é dado pela equação de equilíbrio (5.9), e condições de contorno uniformes para σ em (5.11) com as relações constitutivas

$$\epsilon_i = \epsilon_i(x, \sigma) = \frac{\partial U(x, \sigma)}{\partial \sigma_i}, \tag{5.41}$$

que em forma variacional é dado pelo princípio de mínima energia complementar

$$\widehat{U}(\bar{\sigma}) = \inf_{\sigma \in S^*(\bar{\sigma})} \langle U(x, \sigma) \rangle, \tag{5.42}$$

onde

$$S^*(\bar{\sigma}) = \left\{ \sigma : \sigma_i \in L^2(\Omega) \mid \left\langle \sigma_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle = 0, \forall \phi \in H_{per}^1(\mathcal{Y}), \langle \phi \rangle = 0, \langle \sigma \rangle = \bar{\sigma} \right\}. \tag{5.43}$$

Logo, a lei efetiva nesta formulação é

$$\bar{\epsilon}_i = \frac{\partial \widehat{U}(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}_i}. \tag{5.44}$$

Note que as energias constitutivas e efetivas de ambas as formulações estão relacionadas, respectivamente, pelas transformadas de Legendre

$$W(x, \epsilon) = \sup_{\sigma} \{ \epsilon_i \sigma_i - U(x, \sigma) \} = U^*(x, \epsilon) \tag{5.45}$$

e

$$\widehat{W}(\bar{\epsilon}) = \sup_{\bar{\sigma}} \{ \bar{\epsilon}_i \bar{\sigma}_i - \widehat{U}(\bar{\sigma}) \} = \widehat{U}^*(\bar{\epsilon}). \tag{5.46}$$

Note também que, dado o caráter não linear geral das relações constitutivas e a arbitrariedade na forma da célula periódica \mathcal{Y} , a resolução direta dos princípios va-

riacionais (5.39) e (5.42) é, em geral, praticamente impossível. Como alternativa, o enfoque usual consiste em obter cotas ou estimativas a partir deles. Nos casos desenvolvidos aqui, a generalização à não linearidade das cotas clássicas superior de VOIGT (1889) e inferior de REUSS (1929) se obtém de substituir campos constantes ($\epsilon = \bar{\epsilon}$ e $\sigma = \bar{\sigma}$) em (5.39) e (5.42), respectivamente, ou seja,

$$\widehat{W}(\bar{\epsilon}) \leq \langle W(x, \bar{\epsilon}) \rangle = \sum_{r=1}^2 c_r W_r(\bar{\epsilon}) \equiv \langle W \rangle(\bar{\epsilon}) \equiv \langle U^* \rangle(\bar{\epsilon}) \quad (5.47)$$

e

$$\widehat{U}(\bar{\sigma}) \leq \langle U(x, \bar{\sigma}) \rangle = \sum_{r=1}^2 c_r U_r(\bar{\sigma}) \equiv \langle U \rangle(\bar{\sigma}) \equiv \langle W^* \rangle(\bar{\sigma}), \quad (5.48)$$

onde $c_r = \langle \chi_r(x) \rangle$ é a concentração ou fração de volume da fase r e o asterisco representa a transformada de Legendre. Logo, de (5.45)-(5.48) tem-se que

$$\langle W^* \rangle^*(\bar{\epsilon}) \leq \widehat{W}(\bar{\epsilon}) \leq \langle W \rangle(\bar{\epsilon}). \quad (5.49)$$

Note que, em caso de comportamento linear, as funções de energia constitutiva e efetiva são formas quadráticas $W(x, \epsilon) = \frac{1}{2}a_{ij}(x)\epsilon_i\epsilon_j$ e $\widehat{W}(\bar{\epsilon}) = \frac{1}{2}\widehat{a}_{ij}\bar{\epsilon}_i\bar{\epsilon}_j$, de onde segue que $\langle W^* \rangle^*(\bar{\epsilon}) = \langle W^{-1} \rangle^{-1}(\bar{\epsilon})$ e, portanto, as cotas (5.49) especializam-se a

$$\frac{1}{2}\langle a^{-1}(x) \rangle_{ij}^{-1}\bar{\epsilon}_i\bar{\epsilon}_j \leq \frac{1}{2}\widehat{a}_{ij}\bar{\epsilon}_i\bar{\epsilon}_j \leq \frac{1}{2}\langle a(x) \rangle_{ij}\bar{\epsilon}_i\bar{\epsilon}_j, \quad (5.50)$$

de onde se obtém as cotas clássicas superior de VOIGT (1889) e inferior de REUSS (1929) para a propriedade efetiva $\langle a^{-1}(x) \rangle^{-1} \leq \widehat{a} \leq \langle a(x) \rangle$ dadas por (4.83) (para o caso isotrópico) no capítulo anterior. Ainda mais, note que, no caso unidimensional, esta cota inferior coincide exatamente com a predição dada pelo MHA: $\widehat{a} = \langle a^{-1}(x) \rangle^{-1}$.

A vantagem destas cotas consiste em que não dependem da geometria de \mathcal{Y} e, portanto, são aplicáveis a todos os compósitos que tenham a mesma relação constitutiva e as mesmas concentrações de fase. Mas isto também é sua desvantagem, pois ao não levar em conta detalhes da geometria, as cotas clássicas resultam muito amplas. Por isso é usual empregá-las apenas para controlar outros resultados mais precisos que devem estar contidos entre elas. Para melhorar as cotas clássicas, será exposta a seguir a metodologia variacional de HASHIN; SHTRIKMAN (1962a,b, 1963) generalizada para compósitos não lineares.

Seja um compósito linear de comparação com propriedade a^0 e a mesma microgeometria que o compósito não linear, ou seja, cuja função de energia

$$W^0(x, \epsilon) = \frac{1}{2}a_{ij}^0(x)\epsilon_i\epsilon_j \quad (5.51)$$

satisfaz uma relação similar a (5.3). A transformada de Legendre da diferença entre as funções de energia é dada por

$$(W - W^0)^*(x, \eta) = \sup_{\epsilon} \{ \eta_i \epsilon_i - (W - W^0)(x, \epsilon) \}, \quad \forall \eta, \quad (5.52)$$

e ao desprezar o supremo e isolar a função de energia $W(x, \epsilon)$ tem-se a desigualdade

$$W(x, \epsilon) \geq \eta_i \epsilon_i + W^0(x, \epsilon) - (W - W^0)^*(x, \eta), \quad \forall \eta. \quad (5.53)$$

Então, da aplicação do princípio de mínima energia (5.36), segue que

$$\widehat{W}(\bar{\epsilon}) \geq \inf_{\epsilon \in S(\bar{\epsilon})} \langle \eta_i \epsilon_i + W^0(x, \epsilon) - (W - W^0)^*(x, \eta) \rangle. \quad (5.54)$$

Note que a cota inferior (5.54) será não trivial se a diferença das funções de energia tem crescimento superquadrático, ou seja, se cumpre a condição

$$\frac{(W - W^0)(x, \epsilon)}{|\epsilon|} \rightarrow \infty, \text{ quando } |\epsilon| \rightarrow \infty. \quad (5.55)$$

Se faz necessário especificar a forma da polarização η . Um escolha natural é considerá-lo constante por partes, ou seja,

$$\eta = \sum_{r=1}^2 \chi_r(x) \eta_r. \quad (5.56)$$

Em particular, tomando $\eta = 0$ em (5.54) tem-se a cota a inferior de PONTE CASTANEDA (1991)

$$\widehat{W}(\bar{\epsilon}) \geq \widehat{W}^0(\bar{\epsilon}) + \sum_{r=1}^2 c_r \min_{\epsilon} \{ (W_r - W_r^0)(\epsilon) \}, \quad (5.57)$$

onde

$$\widehat{W}^0(\bar{\epsilon}) = \frac{1}{2} \widehat{a}_{ij}^0 \bar{\epsilon}_i \bar{\epsilon}_j \quad (5.58)$$

é a energia efetiva do compósito linear de comparação cuja propriedade efetiva é \widehat{a}^0 .

Note que, de fato, (5.57) representa uma família paramétrica de cotas inferiores com parâmetro a^0 , que é a propriedade constitutiva do compósito linear de comparação. Logo, para obter a melhor destas cotas inferiores, ou seja, para escolher o compósito de comparação cujas propriedades fornecem a melhor cota inferior, isto é, o compósito linear mais parecido com o compósito não linear estudado, o lado direito de (5.57) deve ser maximizado com relação a a^0 .

Por causa do crescimento superquadrático de $W(x, \epsilon)$, não é possível obter uma cota superior a partir desta estrutura (WILLIS, 2000). No entanto, no caso particular de compósitos formados por inclusões não lineares (com energia $W_2(\epsilon)$) inseridas em

uma matriz linear (com energia $W_1(\epsilon) = \frac{1}{2}a_{ij}^{(1)}\epsilon_i\epsilon_j$), é possível obter uma cota superior como segue (TALBOT, 1999, 2000). Fazendo

$$U_2(\sigma) = \sup_{\epsilon} \{\sigma_i\epsilon_i - W_2(\epsilon)\} \geq \sigma_i\epsilon_i - W_2(\epsilon) \quad (5.59)$$

tem-se que

$$\begin{aligned} U(x, \sigma) &= \chi_1(x)U_1(\sigma) + \chi_2(x)U_2(\sigma) \\ &\geq \chi_1(x)U_1(\sigma) + \chi_2(x)(\sigma_i\epsilon_i - W_2(\epsilon)), \end{aligned} \quad (5.60)$$

onde $U_1(\sigma) = \frac{1}{2}b_{ij}^{(1)}\sigma_i\sigma_j$ com $b^{(1)} = (a^{(1)})^{-1}$. Substituindo (5.60) no princípio de mínima energia complementar (5.42) tem-se

$$\widehat{U}(\bar{\sigma}) \geq \inf_{\sigma \in S^*(\bar{\sigma})} \langle \chi_1(x)U_1(\sigma) + \chi_2(x)\sigma_i\epsilon_i \rangle - c_2W_2(\epsilon), \quad (5.61)$$

que através da transformada de Legendre (5.46) induz uma cota superior para $\widehat{W}(\bar{\epsilon})$.

Observe que o primeiro termo do lado direito de (5.61) é a energia efetiva complementar de um compósito linear com matriz com propriedade $a^{(1)}$ contendo inclusões com propriedade infinita e uma polarização ϵ aplicada nas inclusões. A propriedade efetiva deste compósito, que será o de comparação, é \widehat{a}^∞ . Para o cálculo do ínfimo em (5.61) emprega-se a seguinte versão da fórmula (15) de TALBOT; WILLIS (1992) (ver também TALBOT (1999, 2000)):

$$\begin{aligned} \inf_{\sigma \in S^*(\bar{\sigma})} \left\langle \sum_{r=1}^2 \left\{ \chi_r(x) \left(\tau_i^{(r)}\sigma_i + \frac{1}{2}b_{ij}^{(r)}\sigma_i\sigma_j \right) \right\} \right\rangle &= \frac{1}{2} \langle b_{ij}(x) \rangle \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_j + \bar{\sigma}_i \langle \tau_i(x) \rangle \\ &- \frac{1}{2} \left(\langle b_{ij}(x) \rangle - \widehat{b}_{ij} \right) \left[\bar{\sigma}_i + \left(b_{ik}^{(1)} - b_{ik}^{(2)} \right)^{-1} \left(\tau_k^{(1)} - \tau_k^{(2)} \right) \right] \left[\bar{\sigma}_j + \left(b_{jl}^{(1)} - b_{jl}^{(2)} \right)^{-1} \left(\tau_l^{(1)} - \tau_l^{(2)} \right) \right] \end{aligned}$$

onde, com $A = b, \tau, \langle A \rangle = c_r A^{(r)}$, e \widehat{b} é a propriedade efetiva complementar correspondente. Logo, assumindo $\tau^{(1)} = 0, \tau^{(2)} = \epsilon, b^{(1)} = (a^{(1)})^{-1}, b^{(2)} = 0$ e $\widehat{b}^{-1} = \widehat{a}^\infty$, tem-se que

$$\begin{aligned} \inf_{\sigma \in S^*(\bar{\sigma})} \langle \chi_1(x)U_1(\sigma) + \chi_2(x)\sigma_i\epsilon_i \rangle &= \frac{1}{2}c_1 (a^{(1)})_{ij}^{-1} \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_j + c_2 \bar{\sigma}_i \epsilon_i \\ &- \frac{1}{2} \left(c_1 (a^{(1)})_{ij}^{-1} - (\widehat{a}^\infty)_{ij}^{-1} \right) \left(\bar{\sigma}_i - a_{ik}^{(1)} \epsilon_k \right) \left(\bar{\sigma}_j - a_{jl}^{(1)} \epsilon_l \right) \end{aligned} \quad (5.62)$$

Logo, substitui-se (5.62) em (5.61) para obter uma cota inferior para a energia efetiva complementar $\widehat{U}(\bar{\sigma})$. Finalmente, de aplicar a tal cota inferior a transformada de Legendre (5.46) se obtém uma cota superior para a energia efetiva $\widehat{W}(\bar{\epsilon})$. Especificamente,

o supremo é atingido quando

$$\bar{\sigma}_i = \hat{a}_{ij}^{\infty} \bar{\epsilon}_j + (a_{ij}^{(1)} - \hat{a}_{ij}^{\infty}) \epsilon_j. \quad (5.63)$$

Assim, obtém-se a cota superior de TALBOT (1999)

$$\widehat{W}(\bar{\epsilon}) \leq \frac{1}{2} \hat{a}_{ij}^{\infty} \bar{\epsilon}_i \bar{\epsilon}_j + \left(a_{ij}^{(1)} - \hat{a}_{ij}^{\infty} \right) \bar{\epsilon}_i \epsilon_j + \frac{1}{2} \left(\hat{a}_{ij}^{\infty} - (1 + c_2) a_{ij}^{(1)} \right) \epsilon_i \epsilon_j + c_2 W_2(\epsilon). \quad (5.64)$$

Note que, de fato, (5.64) representa uma família paramétrica de cotas superiores com parâmetro ϵ , ou seja, a polarização aplicada nas inclusões do compósito de comparação. Logo, deve escolher-se a polarização ϵ que produz a melhor destas cotas superiores e, para isto, (5.64) deve ser minimizado com relação a ϵ . E ainda, as cotas melhoradas (5.57) e (5.64) dependem das propriedades constitutivas e efetivas do compósito de comparação correspondente. Portanto, é necessário ter estimativas ou cotas lineares para tais propriedades efetivas.

Em suma, (5.57) e (5.64) representam famílias paramétricas de cotas onde os parâmetros são: para (5.57), as propriedades constitutivas a_r^0 do compósito de comparação, e para (5.64), o campo gradiente ϵ . Em ambos os casos, para escolher a melhor cota de cada família, devem-se realizar processos de otimização com respeito a tais parâmetros.

5.3.2 Cotas para a lei efetiva

Os resultados apresentados até agora se referem a obtenção de cotas para a energia efetiva. Outro problema importante é o estudo das leis efetivas que no caso não linear, tem sido pouco investigadas por métodos variacionais (MILTON; SERKOV, 2000; TALBOT; WILLIS, 2004; PEIGNEY, 2005), pois como se sabe, em geral, a derivada de uma cota não produz uma cota da derivada, mas apenas uma estimativa.

Seguindo uma observação de MILTON; SERKOV (2000), a relação constitutiva (5.1) pode ser representada como $(\sigma, \epsilon) \in K(x)$ onde

$$K(x) = \{(\sigma, \epsilon) \mid \sigma = \sigma(x, \epsilon)\}. \quad (5.65)$$

Note que em (5.65) não se assume a existência de uma função de energia para o compósito. Isto permite aplicar o método variacional a situações em que tal função de energia não exista ou não seja convexa. Neste caso, é possível representar a lei efetiva $\bar{\sigma} = \hat{\sigma}(\bar{\epsilon})$ como $(\bar{\sigma}, \bar{\epsilon}) \in \hat{K}$, onde

$$\hat{K} = \{(\bar{\sigma}, \bar{\epsilon}) \mid \bar{\sigma} = \hat{\sigma}(\bar{\epsilon})\}. \quad (5.66)$$

Agora, define-se o potencial indicador das relações constitutivas como

$$\mathcal{V}(x, \sigma, \epsilon) = \begin{cases} 0, & \text{se } (x, \sigma, \epsilon) \in K(x), \\ \infty, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.67)$$

Note que, em vista de (5.3) tem-se que

$$\mathcal{V}(x, \sigma, \epsilon) = \sum_{r=1}^2 \chi_r(x) \mathcal{V}_r(\sigma, \epsilon), \quad (5.68)$$

onde

$$\mathcal{V}_r(\sigma, \epsilon) = \begin{cases} 0, & \text{se } (\sigma, \epsilon) \in K_r, \\ \infty, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.69)$$

com

$$K_r = \{(\sigma, \epsilon) \mid \sigma = \sigma_r(\epsilon)\}. \quad (5.70)$$

Define-se também o potencial efetivo correspondente como

$$\widehat{\mathcal{V}}(\bar{\sigma}, \bar{\epsilon}) = \inf_{(\sigma, \epsilon) \in S^*(\bar{\sigma}) \times S(\bar{\epsilon})} \langle \mathcal{V}(x, \sigma, \epsilon) \rangle, \quad (5.71)$$

onde $S^*(\bar{\sigma})$ e $S(\bar{\epsilon})$ são definidos por (5.43) e (5.37), respectivamente.

Note que, de fato, o potencial efetivo (5.71) é o potencial indicador da lei efetiva (PEIGNEY, 2005), ou seja,

$$\widehat{\mathcal{V}}(\bar{\sigma}, \bar{\epsilon}) = \begin{cases} 0, & \text{se } (\bar{\sigma}, \bar{\epsilon}) \in \widehat{K}, \\ \infty, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.72)$$

Demonstração. Seja $(\bar{\sigma}, \bar{\epsilon})$ arbitrário. Se $(\bar{\sigma}, \bar{\epsilon}) \in \widehat{K}$, então existe $(\sigma, \epsilon) \in S^*(\bar{\sigma}) \times S(\bar{\epsilon})$ tal que $(\sigma, \epsilon) \in K(x)$ para todo $x \in \Omega$, de onde $\mathcal{V}(x, \sigma, \epsilon) = 0$ e, portanto, $\widehat{\mathcal{V}}(\bar{\sigma}, \bar{\epsilon}) = 0$. Por outro lado, Se $(\bar{\sigma}, \bar{\epsilon}) \notin \widehat{K}$, então existe $x \in \Omega$ tal que $(\sigma, \epsilon) \notin K(x)$ para todo $(\sigma, \epsilon) \in S^*(\bar{\sigma}) \times S(\bar{\epsilon})$, de onde $\mathcal{V}(x, \sigma, \epsilon) = \infty$ e, portanto, $\widehat{\mathcal{V}}(\bar{\sigma}, \bar{\epsilon}) = \infty$. \square

A ideia é limitar inferiormente a $\widehat{\mathcal{V}}(\bar{\sigma}, \bar{\epsilon})$. Com efeito, se tal cota inferior for positiva, então $(\bar{\sigma}, \bar{\epsilon}) \notin \widehat{K}$. Portanto, \widehat{K} está contido no conjunto dos pares $(\bar{\sigma}, \bar{\epsilon})$ tais que $\widehat{\mathcal{V}}(\bar{\sigma}, \bar{\epsilon}) \leq 0$. Para obter a cota inferior, utilizaremos a metodologia de Hashin-Shtrikman de maneira similar ao que foi feito para a energia. Considera-se um potencial de comparação que segue a geometria do compósito de não linear, ou seja,

$$\mathcal{V}^0(x, \sigma, \epsilon) = \frac{1}{2} a_{ij}^0(x) \epsilon_i \epsilon_j + \frac{1}{2} b_{ij}^0(x) \sigma_i \sigma_j - \frac{1}{2} \sigma_i \epsilon_i \quad (5.73)$$

que satisfaz uma relação similar a (5.3). Note que, em geral, as propriedades constitutivas a^0 e b^0 correspondem a dos compósitos lineares de comparação diferentes,

ou seja, $(a^0)^{-1} \neq b^0$, o qual permite tratá-los de forma independente. E ainda, da transformada de Legendre da diferença dos potenciais

$$(\mathcal{V} - \mathcal{V}^0)^*(x, \eta, \xi) = \sup_{\sigma, \epsilon} \{\eta_i \sigma_i + \xi_i \epsilon_i - (\mathcal{V} - \mathcal{V}^0)(x, \sigma, \epsilon)\}, \quad (5.74)$$

para todo par η, ξ , resulta que

$$\mathcal{V}(x, \sigma, \epsilon) \geq \eta_i \sigma_i + \xi_i \epsilon_i + \mathcal{V}^0(x, \sigma, \epsilon) - (\mathcal{V} - \mathcal{V}^0)^*(x, \eta, \xi), \quad (5.75)$$

de onde, aplicando (5.71), segue a cota inferior

$$\widehat{\mathcal{V}}(\bar{\sigma}, \bar{\epsilon}) \geq \inf_{(\sigma, \epsilon) \in S^*(\bar{\sigma}) \times S(\bar{\epsilon})} \langle \eta_i \sigma_i + \xi_i \epsilon_i + \mathcal{V}^0(x, \sigma, \epsilon) - (\mathcal{V} - \mathcal{V}^0)^*(x, \eta, \xi) \rangle. \quad (5.76)$$

A escolha mais simples das polarizações (η, ξ) é considerá-las como constantes denotadas por $(\bar{\eta}, \bar{\xi})$. Neste caso, a cota (5.76) torna-se, para todo par $(\bar{\eta}, \bar{\xi})$,

$$\widehat{\mathcal{V}}(\bar{\sigma}, \bar{\epsilon}) \geq \bar{\eta}_i \bar{\sigma}_i + \bar{\xi}_i \bar{\epsilon}_i + \widehat{\mathcal{V}}^0(\bar{\sigma}, \bar{\epsilon}) - \sum_{r=1}^2 c_r (\mathcal{V}_r - \mathcal{V}_r^0)^*(\bar{\eta}, \bar{\xi}), \quad (5.77)$$

com o potencial efetivo de comparação

$$\widehat{\mathcal{V}}^0(\bar{\sigma}, \bar{\epsilon}) = \frac{1}{2} \widehat{a}_{ij}^0 \bar{\epsilon}_i \bar{\epsilon}_j + \frac{1}{2} \widehat{b}_{ij}^0 \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_j - \frac{1}{2} \bar{\sigma}_i \bar{\epsilon}_i. \quad (5.78)$$

Levando em conta (5.69) e (5.70) no último termo de (5.77) tem-se, para todo $(\bar{\eta}, \bar{\xi})$ que

$$\begin{aligned} (\mathcal{V}_r - \mathcal{V}_r^0)^*(\bar{\eta}, \bar{\xi}) &= \sup_{(\sigma, \epsilon)} \{ \bar{\eta}_i \sigma_i + \bar{\xi}_i \epsilon_i - (\mathcal{V}_r - \mathcal{V}_r^0)(\sigma, \epsilon) \} \\ &= \sup_{(\sigma, \epsilon) \in K_r} \{ \bar{\eta}_i \sigma_i + \bar{\xi}_i \epsilon_i + \mathcal{V}_r^0(\sigma, \epsilon) \} \\ &= \sup_{\epsilon} \{ \bar{\eta}_i \sigma_{ri}(\epsilon) + \bar{\xi}_i \epsilon_i + \mathcal{V}_r^0(\sigma_r(\epsilon), \epsilon) \}, \end{aligned} \quad (5.79)$$

onde

$$\mathcal{V}_r^0(\sigma_r(\epsilon), \epsilon) = \frac{1}{2} a_{rij}^0 \epsilon_i \epsilon_j + \frac{1}{2} b_{rij}^0 \sigma_{ri}(\epsilon) \sigma_{rj}(\epsilon) - \frac{1}{2} \sigma_{ri}(\epsilon) \epsilon_i. \quad (5.80)$$

A não trivialidade de (5.77) segue da finitude do supremo em (5.79), o que leva a considerar

$$\begin{cases} a_r^0 = 0, \text{ se } \frac{|\sigma_r(\epsilon)|}{|\epsilon|} \rightarrow 0, \text{ quando } |\epsilon| \rightarrow \infty, \\ b_r^0 = 0, \text{ se } \frac{|\sigma_r(\epsilon)|}{|\epsilon|} \rightarrow \infty, \text{ quando } |\epsilon| \rightarrow \infty. \end{cases}, \quad (5.81)$$

sendo que, na maioria das aplicações, cumprem-se as condições do segundo caso.

Disto, e considerando (5.72) em (5.77), tem-se que

$$0 \geq \bar{\eta}_i \bar{\sigma}_i + \bar{\xi}_i \bar{\epsilon}_i - \frac{1}{2} \bar{\sigma}_i \bar{\epsilon}_i + \frac{1}{2} \hat{a}_{ij}^0 \bar{\epsilon}_i \bar{\epsilon}_j - \sum_{r=1}^2 c_r (\mathcal{V}_r - \mathcal{V}_r^0)^*(\bar{\eta}, \bar{\xi}). \quad (5.82)$$

Como notado por TALBOT; WILLIS (2004), se a microestrutura do compósito é isotrópica, então é possível supor que $\bar{\sigma}$, $\bar{\epsilon}$, $\bar{\eta}$ e $\bar{\xi}$ são paralelos, o qual permite tratá-los como escalares. Então, da cota (5.82) resulta

$$\bar{\sigma} \left(\frac{1}{2} \bar{\epsilon} - \bar{\eta} \right) \geq \bar{\xi} \bar{\epsilon} + \frac{1}{2} \hat{A}^0 \bar{\epsilon}^2 - \sum_{r=1}^2 c_r (\mathcal{V}_r - \mathcal{V}_r^0)^*(\bar{\eta}, \bar{\xi}). \quad (5.83)$$

onde $\hat{A}^0 = \hat{a}_{ij}^0 \nu_i \nu_j$ com ν o vetor unitário que indica a direção do paralelismo assumido. Observe que, de fato, a cota (5.83) produzirá uma cota superior se $\bar{\eta} > \frac{1}{2} \bar{\epsilon}$, e uma cota inferior se $\bar{\eta} < \frac{1}{2} \bar{\epsilon}$, respectivamente, e isto, levando em conta a lei efetiva $\bar{\sigma} = \hat{\sigma}(\bar{\epsilon})$. Observe também que tais cotas obtidas de (5.83) dependem de cotas ou estimativas para a propriedade efetiva \hat{a}^0 do compósito de comparação e devem ser otimizadas com respeito a $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ e a_r^0 .

5.4 O MHA aplicada a compósitos unidimensionais

Nesta seção o algoritmo do MHA aplicado a compósito é apresentado, em particular, para um compósito bifásico unidimensional, ver Figura 20.

A versão unidimensional do problema formulado na seção 5.1, considerando condições de Dirichlet homogêneas, é

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \sigma \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{du^\varepsilon}{dx} \right) = 0, & x \in \Omega \setminus \Gamma^\varepsilon, \\ \llbracket \sigma \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{du^\varepsilon}{dx} \right) \rrbracket_{\Gamma^\varepsilon} = 0, \\ \llbracket u^\varepsilon \rrbracket_{\Gamma^\varepsilon} = 0 \\ u^\varepsilon = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (5.84)$$

onde $\Omega = (0, 1)$, $\Gamma^\varepsilon = \{c_1 k \varepsilon, k \varepsilon\}_{k=1,2,\dots,n-1}$, $\llbracket F \rrbracket_{\Gamma^\varepsilon} = (-1)^{k-1} (F_1 - F_2)$, $k = 1, 2, \dots, n-1$. Note que aqui $\mathcal{Y} = \varepsilon Y$, $Y = (0, 1)$.

A construção da s.a.f. segue os mesmos passos que o realizado na seção 3.3, mas agora, sem a dependência do tempo, com ausência de fontes e com condições de contorno homogêneas. A novidade está nas condições de contato em (5.84), que estabelecem a continuidade do potencial u e do fluxo σ através das interfaces Γ^ε .

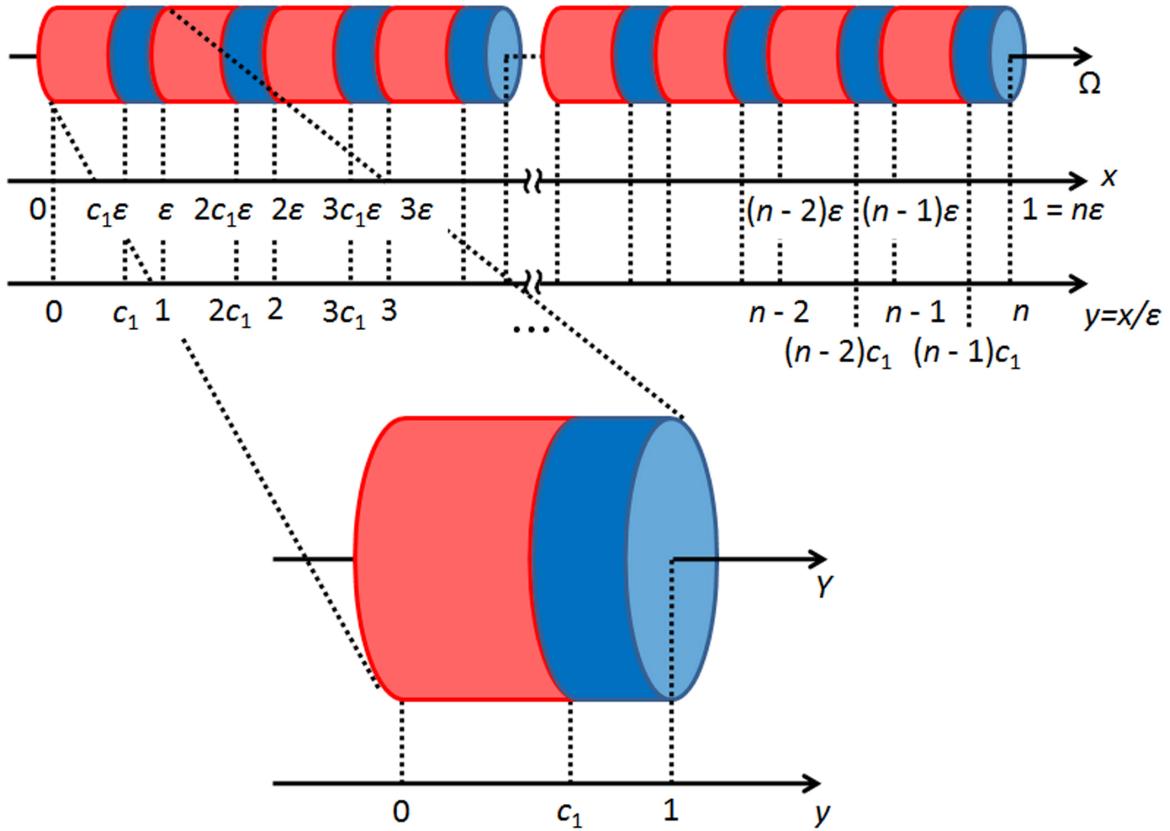


Figura 20: Compósito bifásico unidimensional de comprimento unitário e ε -periódico para $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Logo, constrói-se a s.a.f. do problema (5.84) da forma

$$u^{(2)}(x, \varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x, y) + \varepsilon^2 u_2(x, y), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad (5.85)$$

onde u_1 e u_2 são funções 1-periódicas em y .

Ao linearizar σ de (5.84) com respeito a $\epsilon = \frac{du^\varepsilon}{dx}$ na vizinhança do termo de $\mathcal{O}(1)$ da derivada de (5.85), após aplicada regra da cadeia, obtém-se

$$\sigma \left(y, \frac{du^{(2)}}{dx} \right) \approx \sigma \left(y, \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \varepsilon \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right). \quad (5.86)$$

De substituir (5.86) na equação de (5.84), aplicar a regra da cadeia, e agrupar por potências de ε , obtém-se uma igualdade assintótica que, para ser satisfeita, os coeficientes dos termos de ordens $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ e $\mathcal{O}(1)$ devem anular-se, ou seja,

$$\varepsilon^{-1} : \frac{\partial}{\partial y} \left[\sigma \left(y, \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] = 0, \quad (5.87)$$

e

$$\varepsilon^0 : \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma \left(y, \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right] = 0. \quad (5.88)$$

De substituir a assintótica (5.85) e a aproximação linear de $\sigma(y, \epsilon)$ (5.86) nas condições de contato em (5.84), tem-se para cada x fixo,

$$[\![u^{(2)}]\!]_{\Gamma} = [\![u_0(x)]!]_{\Gamma} + \varepsilon [\![u_1(x, y)]!]_{\Gamma} + \varepsilon^2 [\![u_2(x, y)]!]_{\Gamma} \quad (5.89)$$

e

$$\left[\left[\sigma \left(y, \frac{du^{(2)}}{dx} \right) \right] \right]_{\Gamma} \approx \left[\left[\sigma \left(y, \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \right]_{\Gamma} + \varepsilon \left[\left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right] \right]_{\Gamma}, \quad (5.90)$$

onde $\Gamma = \varepsilon^{-1}\Gamma^{\varepsilon}$. Se todos os termos de (5.89) e (5.90) se anulam, então satisfazem as condições de contato do problema (5.84) exatamente. Note que, devido $u_0(x)$ ser contínua, seu salto em qualquer ponto é nulo. Então, para todo $x \in [0, 1]$ resulta

$$\left[\left[\sigma \left(y, \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \right]_{\Gamma} = 0, \quad \left[\left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right] \right]_{\Gamma} = 0 \quad (5.91)$$

e

$$[\![u_1(x, y)]!]_{\Gamma} = 0, \quad [\![u_2(x, y)]!]_{\Gamma} = 0. \quad (5.92)$$

Em seguida, ao substituir (5.85) na condição de contorno em (5.84), levando em conta a 1-periodicidade em y de u_1 e u_2 , tem-se

$$u_0(0) = u_0(1) = 0, \quad u_1(0, 0) = u_1(1, 0) = 0, \quad u_2(0, 0) = u_2(1, 0) = 0. \quad (5.93)$$

A partir da equação (5.87) e condições para u_1 (5.91), (5.92) e (5.93) formula-se o problema \mathcal{P}_1 para u_1 :

$$\mathcal{P}_1 : \begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \sigma \left(y, \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = 0, & x \in \Omega \setminus \Gamma, \\ \left[\left[\sigma \left(y, \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] \right]_{\Gamma} = 0, & y \neq \left\{ 0, \frac{1}{\varepsilon} \right\} \\ [\![u_1(x, y)]!]_{\Gamma} = 0, & y \neq \left\{ 0, \frac{1}{\varepsilon} \right\} \\ u_1(0, 0) = u_1(1, 0) = 0. \end{cases} \quad (5.94)$$

De maneira similar, de (5.88), e as condições para u_2 em (5.91), (5.92) e (5.93)

obtém-se o problema \mathcal{P}_2 para u_2 , ou seja,

$$\mathcal{P}_2 : \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma \left(y, \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right] = 0, & x \in \Omega \setminus \Gamma, \\ \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \left(y, \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right]_{\Gamma} = 0, & y \neq \left\{ 0, \frac{1}{\epsilon} \right\} \\ \llbracket u_2(x, y) \rrbracket_{\Gamma} = 0, & y \neq \left\{ 0, \frac{1}{\epsilon} \right\} \\ u_2(0, 0) = u_2(1, 0) = 0. \end{cases} \quad (5.95)$$

Note que o problema \mathcal{P}_1 define uma família paramétrica de problemas com parâmetro $\frac{du_0}{dx}$. A existência de solução 1-periódica para este problema se garante através do seguinte Lema:

Lema 5.4.1. *Existem funções $\mathcal{N}_1(y, \bar{\epsilon})$ 1-periódicas em y , soluções da família paramétrica de problemas $\mathcal{P}^{\bar{\epsilon}}$ com parâmetro $\bar{\epsilon}$ independente de y definida por*

$$\mathcal{P}^{\bar{\epsilon}} : \begin{cases} \frac{d}{dy} \sigma \left(y, \bar{\epsilon} + \frac{d\mathcal{N}_1}{dy} \right) = 0, & y \notin \Gamma, \\ \left[\sigma \left(y, \bar{\epsilon} + \frac{d\mathcal{N}_1}{dy} \right) \right]_{\Gamma} = 0, & y \neq \left\{ 0, \frac{1}{\epsilon} \right\} \\ \llbracket \mathcal{N}_1(y, \bar{\epsilon}) \rrbracket_{\Gamma} = 0, & y \neq \left\{ 0, \frac{1}{\epsilon} \right\} \\ \mathcal{N}_1(0, \bar{\epsilon}) = 0, \end{cases} \quad (5.96)$$

onde $\bar{\epsilon} = \frac{du_0}{dx}$ e $\mathcal{N}_1 \left(y, \frac{du_0}{dx} \right) = u_1(x, y)$.

A demonstração deste lema é análoga à realizada para o Lema 3.3.1.

A garantia da existência de u_2 solução 1-periódica do problema \mathcal{P}_2 , segue de calcular a média da equação (5.95). De levar em consideração a 1-periodicidade de u_1 , u_2 e σ e as condições de contato, tem-se assim a equação homogeneizada

$$\frac{d}{dx} \left\langle \sigma \left(y, \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right\rangle = 0. \quad (5.97)$$

Logo, o problema homogeneizado \mathcal{P}_H é definido por (5.97) e as condições para u_0 em (5.93), ou seja, com

$$\hat{\sigma}(\bar{\epsilon}) = \left\langle \sigma \left(y, \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right\rangle \quad (5.98)$$

temos a lei efetiva $\bar{\sigma} = \hat{\sigma}(\bar{\epsilon})$ e o problema homogeneizado \mathcal{P}_H :

$$\mathcal{P}_H : \begin{cases} \frac{d}{dx} \hat{\sigma} \left(\frac{du_0}{dx} \right) = 0, \\ u_0(0) = u_0(1) = 0. \end{cases} \quad (5.99)$$

A demonstração do Lema 5.4.1 sobre a existência da solução do problema \mathcal{P}_1 nos oferece um método simples para a obtenção da lei efetiva (5.98). Note que a equação de (5.94) implica que σ não depende explicitamente de y quando avaliada na solução u_1 do problema local. Portanto, tem-se

$$\widehat{\sigma}(\bar{\epsilon}) = \left\langle \sigma \left(y, \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right\rangle = \sigma \left(y, \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \bar{\sigma}. \quad (5.100)$$

Da existência da inversa da relação constitutiva $\sigma(y, \epsilon)$ segue que $\epsilon(y, \bar{\sigma}) = \bar{\epsilon} + \frac{d\mathcal{N}_1}{dy}$ e de sua média, resulta que $\bar{\epsilon} = \langle \epsilon(y, \bar{\sigma}) \rangle$. Logo, basta inverter esta expressão para obter uma expressão ou uma fórmula para a lei efetiva. E ainda, por causa do caráter unidimensional deste problema, a energia efetiva é obtida da integração da lei efetiva obtida, ou seja,

$$\widehat{W}(\bar{\epsilon}) = \int_0^{\bar{\epsilon}} \widehat{\sigma}(s) ds. \quad (5.101)$$

5.5 Um exemplo integrador

Nesta seção, apresenta-se um exemplo unidimensional para o qual se comparam as cotas variacionais e a estimativa pelo MHA tanto para a energia efetiva quanto para a lei efetiva. Na primeira situação, como a estimativa pelo MHA é obtida diretamente para a lei efetiva, se resolve (5.101) para obter a estimativa pelo MHA da energia efetiva.

Seja um compósito como o estudado na seção anterior e que obedece às leis

$$\begin{cases} \sigma_1(\epsilon) = a_1\epsilon \\ W_1(\epsilon) = \frac{1}{2}a_1\epsilon^2 \end{cases}, y \in \varepsilon^{-1}\Omega_1 \quad \text{e} \quad \begin{cases} \sigma_2(\epsilon) = a_2\epsilon^n \\ W_2(\epsilon) = \frac{1}{n+1}a_2\epsilon^{n+1} \end{cases}, y \in \varepsilon^{-1}\Omega_2 \quad (5.102)$$

onde a_r , $r = 1, 2$, são constantes.

Primeiramente, deve-se obter a estimativa via MHA da lei efetiva para

$$\sigma(y, \epsilon) = \chi_1(y)a_1\epsilon + \chi_2(y)a_2\epsilon^n. \quad (5.103)$$

Assim, aplicando o algoritmo descrito no final da seção anterior a

$$\sigma \left(y, \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \chi_1(y)a_1 \left(\frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \chi_2(y)a_2 \left(\frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^n, \quad (5.104)$$

considerando que $\sigma \left(y, \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \bar{\sigma}$, tem-se

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = a_1 \left(\frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right), & y \in \varepsilon^{-1}\Omega_1, \\ \bar{\sigma} = a_2 \left(\frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^n, & y \in \varepsilon^{-1}\Omega_2, \end{cases} \quad (5.105)$$

Então, da inversa de $\bar{\sigma} = \sigma(x, \epsilon)$ com relação a $\epsilon = \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y}$ resulta

$$\frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} = \chi_1(y) \left(\frac{\bar{\sigma}}{a_1} \right) + \chi_2(y) \left(\frac{\bar{\sigma}}{a_2} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (5.106)$$

Da média de (5.106), levando em conta que u_1 é 1-periódico com relação a y , se obtém

$$\frac{du_0}{dx} = \bar{\epsilon} = c_1 \left(\frac{\bar{\sigma}}{a_1} \right) + c_2 \left(\frac{\bar{\sigma}}{a_2} \right)^{\frac{1}{n}} = \hat{\sigma}^{-1}(\bar{\sigma}), \quad (5.107)$$

ou seja, $\bar{\epsilon} = \hat{\sigma}^{-1}(\bar{\sigma})$, de onde sua inversa determina a lei efetiva $\bar{\sigma} = \hat{\sigma}(\bar{\epsilon})$.

A lei efetiva normalizada com relação à lei da fase linear $\frac{\bar{\sigma}}{a_1 \bar{\epsilon}} = \frac{\hat{\sigma}(\bar{\epsilon})}{a_1 \bar{\epsilon}}$ é obtida então, após algumas manipulações algébricas, de forma implícita como

$$\left(1 - c_1 \frac{\bar{\sigma}}{a_1 \bar{\epsilon}} \right)^n + \frac{c_2^n}{c_1} \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{a_2 \bar{\epsilon}^2}{a_1} \right)^{\frac{1-n}{2}} \left(1 - c_1 \frac{\bar{\sigma}}{a_1 \bar{\epsilon}} \right) - \frac{c_2^n}{c_1} \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{a_2 \bar{\epsilon}^2}{a_1} \right)^{\frac{1-n}{2}} = 0. \quad (5.108)$$

Para fins computacionais, esta relação pode ser formulada como

$$R^n + AR - A = 0, \quad (5.109)$$

onde

$$R = 1 - c_1 \frac{\bar{\sigma}}{a_1 \bar{\epsilon}}, \quad A = \frac{c_2^n}{c_1} \lambda^{\frac{n-3}{2}} 2^{\frac{1-n}{2}p}, \quad \lambda = \frac{a_2}{a_1}, \quad p = \log_2 \left(\frac{a_2 \bar{\epsilon}^2}{a_1} \right), \quad (5.110)$$

e de considerar $\frac{\bar{\sigma}}{a_1 \bar{\epsilon}} > 0$ tem-se como condição que $R < 1$. Assim, obter a lei efetiva normalizada requer obter a raízes reais da equação polinômica (5.109), que são duas para n par e uma para n ímpar. Para n par, considera-se a raiz real que gera o menor valor positivo de $\frac{\bar{\sigma}}{a_1 \bar{\epsilon}}$.

Obtido tais valores para $\frac{\bar{\sigma}}{a_1 \bar{\epsilon}}$, é possível reescrever a relação (5.101) como

$$\widehat{W}(\bar{\epsilon}) = \int_0^{\bar{\epsilon}} a_1 \epsilon \frac{\hat{\sigma}(\epsilon)}{a_1 \epsilon} d\epsilon = \frac{a_1^2}{2a_2} \int_0^{\frac{a_2 \bar{\epsilon}^2}{a_1}} F \left(\frac{a_2}{a_1} \epsilon^2 \right) d \left(\frac{a_2}{a_1} \epsilon^2 \right). \quad (5.111)$$

Logo, a estimativa pelo MHA para a energia efetiva normalizada com relação à fase

linear é dada por

$$\frac{\widehat{W}}{W_1}(\bar{\epsilon}) = \left(\frac{a_2}{a_1} \bar{\epsilon}^2 \right)^{-1} \int_0^{\frac{a_2}{a_1} \bar{\epsilon}^2} F(t) dt, \quad (5.112)$$

cuja formulação computacional é

$$\frac{\widehat{W}}{W_1} = 2^{-p} \int_0^{2^p} F(t) dt, \quad (5.113)$$

onde $t = \frac{a_2}{a_1} \bar{\epsilon}^2$, e $F(t)$ é dado de forma implícita por

$$(1 - c_1 F(t))^n + \frac{c_2^n}{c_1} \lambda^{\frac{n-3}{2}} t^{\frac{1-n}{2}} (1 - c_1 F(t)) - \frac{c_2^n}{c_1} \lambda^{\frac{n-3}{2}} t^{\frac{1-n}{2}} = 0. \quad (5.114)$$

Considere agora as cotas clássicas da energia efetiva, definidas por (5.49), normalizadas com relação à energia da fase linear. A cota superior de Voigt é dada por

$$\frac{\langle W \rangle}{W_1}(\bar{\epsilon}) = c_1 + 2 \frac{c_2}{n+1} \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{\frac{3-n}{2}} \left(\frac{a_2}{a_1} \bar{\epsilon}^2 \right)^{\frac{n-1}{2}}, \quad (5.115)$$

cuja formulação computacional é

$$\frac{\langle W \rangle}{W_1} = c_1 + \frac{c_2}{n+1} \lambda^{\frac{3-n}{2}} 2^{\frac{n-1}{2} p+1}. \quad (5.116)$$

Já para a cota inferior de Reuss, se obtém de (5.48) que

$$\langle W^* \rangle(\bar{\sigma}) = a_1^{-1} \frac{c_1}{2} \bar{\sigma}^2 + c_2 a_2^{-\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} \bar{\sigma}^{\frac{n+1}{n}}, \quad (5.117)$$

e pela transformada de Legendre se obtém

$$\langle W^* \rangle^*(\bar{\epsilon}) = \frac{a_1}{2c_1} (\bar{\epsilon} - c_2 \epsilon_R)^2 + \frac{c_2 a_2}{n+1} \epsilon_R^{n+1}, \quad (5.118)$$

em que ϵ_R é a raiz do polinômio

$$\bar{\epsilon} - c_2 \epsilon_R - c_1 \frac{a_2}{a_1} \epsilon_R^n = 0. \quad (5.119)$$

Se considerar $\epsilon_R = t\bar{\epsilon}$, a relação (5.119) pode ser reescrita como

$$1 - c_2 t - c_1 \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{\frac{3-n}{2}} \left(\frac{a_2}{a_1} \bar{\epsilon}^2 \right)^{\frac{n-1}{2}} t^n = 0, \quad (5.120)$$

que pode ser formulada computacionalmente através de

$$1 - c_2 t - c_1 \lambda^{\frac{3-n}{2}} 2^{\frac{n-1}{2} p} t^n = 0. \quad (5.121)$$

Assim, a forma normalizada da cota inferior (5.118) é dada por

$$\frac{\langle W^* \rangle^*}{W_1}(\bar{\epsilon}) = \frac{(1 - c_2 t)^2}{c_1} + c_2 \frac{2}{n+1} \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{\frac{3-n}{2}} \left(\frac{a_2 \bar{\epsilon}^2}{a_1} \right)^{\frac{n-1}{2}} t^{n+1} \quad (5.122)$$

ou ainda, sua formulação computacional por

$$\frac{\langle W^* \rangle^*}{W_1} = \frac{(1 - c_2 t)^2}{c_1} + \frac{c_2}{n+1} \lambda^{\frac{3-n}{2}} 2^{\frac{n-1}{2} p+1} t^{n+1} \quad (5.123)$$

com $t > 0$ obtido como a menor raiz real positiva de (5.121).

Por outro lado, a cota inferior de Ponte-Castañeda (5.57), considerando $W_1^0 \equiv W_1$, $W_2^0(\epsilon) = \frac{1}{2} a^0 \epsilon^2$ e $\hat{a}^0 = \left(\frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2}{a^0} \right)^{-1}$, é dada por

$$\widehat{W}(\bar{\epsilon}) \geq \frac{1}{2} \hat{a}^0 \bar{\epsilon}^2 - \frac{c_2}{2} \frac{n-1}{n+1} a_2 \left(\frac{a^0}{a_2} \right)^{\frac{n+1}{n-1}}, \quad (5.124)$$

cuja forma normalizada é

$$\frac{\widehat{W}}{W_1}(\bar{\epsilon}) \geq \frac{\hat{a}^0}{a_1} - c_2 \frac{n-1}{n+1} \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{\frac{n-3}{n-1}} \left(\frac{a^0}{a_1} \right)^{\frac{n+1}{n-1}} \left(\frac{a_2 \bar{\epsilon}^2}{a_1} \right)^{-1}, \quad (5.125)$$

onde $\frac{\hat{a}^0}{a_1} = \left(c_1 + \frac{c_2}{z} \right)^{-1}$ com $z = \frac{a^0}{a_1}$. Note que a equação (5.125) é uma família uniparamétrica de cotas inferiores, onde o parâmetro z está relacionado a propriedade do material de comparação a^0 . Assim, para obter a melhor das cotas inferiores, otimiza-se (5.125) com relação a z , ou seja,

$$\frac{\widehat{W}}{W_1} \geq \max_{z>0} \left\{ \left(c_1 + \frac{c_2}{z} \right)^{-1} - c_2 \frac{n-1}{n+1} \lambda^{\frac{n-3}{n-1}} z^{\frac{n+1}{n-1}} 2^{-p} \right\}. \quad (5.126)$$

Finalmente, de (5.64) se obtém a cota superior de Talbot, dada por

$$\widehat{W}(\bar{\epsilon}) \leq \frac{1}{2} \hat{a}^\infty \bar{\epsilon}^2 + (a_r - \hat{a}^\infty) \bar{\epsilon} \epsilon + \frac{1}{2} (\hat{a}^\infty - (1 + c_2) a_1) \epsilon^2 + \frac{c_2 a_2}{n+1} \epsilon^{n+1}, \quad (5.127)$$

onde

$$\hat{a}^\infty = \lim_{a_0 \rightarrow \infty} \left(\frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2}{a^0} \right)^{-1} = \frac{a_1}{c_1} \Rightarrow \frac{\hat{a}^\infty}{a_1} = \frac{1}{c_1}. \quad (5.128)$$

A forma normalizada com relação a energia da fase linear desta cota superior, levando em consideração $\epsilon = t \bar{\epsilon}$, é

$$\frac{\widehat{W}}{W_1}(\bar{\epsilon}) \leq \frac{(1 - c_2 t)^2}{c_1} + c_2 \frac{2}{n+1} \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{\frac{3-n}{2}} \left(\frac{a_2 \bar{\epsilon}^2}{a_1} \right)^{\frac{n-1}{2}} t^{n+1}. \quad (5.129)$$

A relação (5.129) é uma família uniparamétrica de cotas superiores com parâmetro t .

Logo, para obter a melhor destas cotas, otimiza-se (5.129) com relação a $t > 0$, ou seja,

$$\frac{\widehat{W}}{W_1} \leq \min_{t>0} \left\{ \frac{(1-c_2 t)^2}{c_1} + \frac{c_2}{n+1} \lambda^{\frac{3-n}{2}} 2^{\frac{n-1}{2} p+1} t^{n+1} \right\}. \quad (5.130)$$

O valor de t que fornece o mínimo em (5.130) é obtido da condição necessária de extremo

$$1 - c_2 t - c_1 \lambda^{\frac{3-n}{2}} 2^{\frac{n-1}{2} p} t^n = 0. \quad (5.131)$$

Note que, neste caso, as cotas inferior de Reuss e superior de Talbot são iguais. Com efeito, as expressões das cotas (5.122) e (5.129) são idênticas, ambas dependentes do parâmetro t , o qual é obtido das condições (5.121) e (5.131), respectivamente, que por sua vez, são iguais, sendo que a primeira é obtida das condições necessárias de extremo no cálculo dos supremos nas transformadas de Legendre, e a segunda da condição necessária de extremo na obtenção da melhor cota superior (5.130) da família uniparamétrica, com parâmetro t , dada por (5.129).

Da igualdade entre as cotas superior de Talbot e inferior de Reuss, se pode deduzir três fatos importantes: o primeiro é que a energia efetiva do compósito é exatamente determinada pela realização destas cotas; o segundo é que, como no geral, a cota de Ponte-Castañeda está contida entre as cotas superior de Talbot e inferior de Reuss, neste caso, ela terá que ser exatamente igual que elas; e o terceiro, é que a estimativa obtida pelo MHA, que também deve estar contida entre as cotas de Talbot e Ponte-Castañeda, também terá que ser igual que estas. A igualdade destas quatro estimativas podem ser visualizada na Figura 21, onde CSV se refere a cota superior de Voigt obtida de (5.116), CST a cota superior de Talbot obtida de (5.130), CIR a cota inferior de Reuss obtida de (5.123), MHA a estimativa obtida via método de homogeneização assintótica obtida de (5.113) e CIPC a cota inferior de Ponte-Castañeda obtida de (5.126). Na Figura 21 ilustra-se o comportamento da energia efetiva normalizada perante a variação de seus parâmetros. Em particular, na Figura 21(a), plota-se em função de $\log_2 \left(\frac{a_2}{a_1} \bar{\epsilon}^2 \right)$, para $c_2 = 0.5$, $n = 2$ e $\frac{a_2}{a_1} = 2$; plota-se na Figura 21(b) em função de c_2 , para $\log_2 \left(\frac{a_2}{a_1} \bar{\epsilon}^2 \right) = 0.5$, $n = 2$ e $\frac{a_2}{a_1} = 2$; plota-se na Figura 21(c) em função de n , para $\log_2 \left(\frac{a_2}{a_1} \bar{\epsilon}^2 \right) = 0.5$, $c_2 = 0.5$ e $\frac{a_2}{a_1} = 2$; e por último, plota-se na Figura 21(d) em função de $\frac{a_2}{a_1}$, para $\log_2 \left(\frac{a_2}{a_1} \bar{\epsilon}^2 \right) = 0.5$, $c_2 = 0.5$ e $n = 2$.

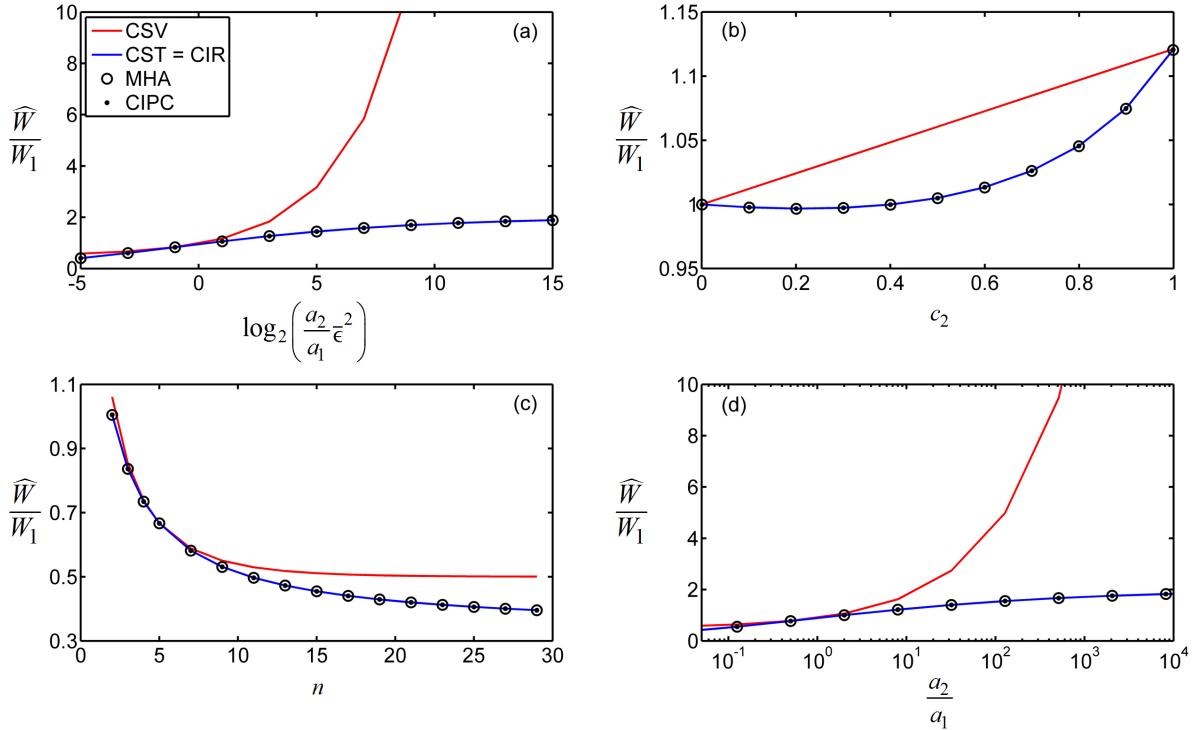


Figura 21: Estimativas para a energia efetiva normalizada.

A seguir, apresentam-se as estimativas para a lei efetiva normalizada $\frac{\sigma(\bar{\epsilon})}{a_1\bar{\epsilon}} = \frac{\hat{\sigma}(\bar{\epsilon})}{a_1\bar{\epsilon}}$. A estimativa pelo MHA foi obtida no início desta seção e é dada implicitamente pela equação (5.108). Então, considere a versão unidimensional da cota formal (5.82), que é

$$0 \geq \bar{\eta}\sigma + \bar{\xi}\bar{\epsilon} - \frac{1}{2}\bar{\sigma}\bar{\epsilon} + \frac{1}{2}\hat{a}^0\bar{\epsilon}^2 - \sum_{r=1}^2 c_r (\mathcal{V}_r - \mathcal{V}_r^0)^*(\bar{\eta}, \bar{\xi}). \quad (5.132)$$

Observe que, como em (5.83), esta expressão gera uma cota superior para $\bar{\eta} > \frac{1}{2}\bar{\epsilon}$, e uma cota inferior para $\bar{\eta} < \frac{1}{2}\bar{\epsilon}$. E, ainda, note que essas cotas são, de fato, famílias paramétricas de cotas superiores e inferiores com relação aos parâmetros $\bar{\eta}$, $\bar{\xi}$ e a_r^0 , $r = 1, 2$. Vista a complexidade de otimizar tais cotas com respeito a esses quatro parâmetros, a seguir apresentam-se casos particulares destas cotas os quais são mais simples de serem implementados.

Considerando $a_r^0 = 0$ e $\bar{\xi} = 0$, obtém-se a seguinte versão otimizada das cotas de MILTON; SERKOV (2000):

$$\max_{\bar{\eta} < \frac{1}{2}\bar{\epsilon}} F(\bar{\eta}, \bar{\epsilon}) \leq \hat{\sigma}(\bar{\epsilon}) \leq \min_{\bar{\eta} > \frac{1}{2}\bar{\epsilon}} F(\bar{\eta}, \bar{\epsilon}), \quad (5.133)$$

onde

$$F(\bar{\eta}, \bar{\epsilon}) = \left(c_1 \frac{1}{2} a_1 \bar{\eta}^2 + c_2 \frac{1}{2} a_2 \frac{1}{n+1} \left(\frac{2n}{n+1} \right)^{n+1} \bar{\eta}^{n+1} \right) \left(\bar{\eta} - \frac{1}{2} \bar{\epsilon} \right)^{-1}, \quad (5.134)$$

cuja forma normalizada, para $\bar{\eta} = t\bar{\epsilon}$, é dada por

$$\max_{t < \frac{1}{2}} F(t, \bar{\epsilon}) \leq \frac{\hat{\sigma}(\bar{\epsilon})}{a_1 \bar{\epsilon}} \leq \min_{t > \frac{1}{2}} F(t, \bar{\epsilon}), \quad (5.135)$$

onde

$$F(t, \bar{\epsilon}) = \left(c_1 t^2 + c_2 \frac{1}{n+1} \left(\frac{2n}{n+1} \right)^{n+1} \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{\frac{3-n}{2}} \left(\frac{a_2 \bar{\epsilon}^2}{a_1} \right)^{\frac{n-1}{2}} t^{n+1} \right) (2t-1)^{-1}. \quad (5.136)$$

A formulação computacional de (5.136) é dada por

$$F(t, \bar{\epsilon}) = \left(c_1 t^2 - c_2 \frac{n-1}{n} \left(\frac{2n}{n+1} \right)^{n+1} \lambda^{\frac{3-n}{2}} 2^{\frac{n-1}{2} p} t^{n+1} \right) (2t-1)^{-1}. \quad (5.137)$$

Os experimentos numéricos realizados com (5.135) e (5.137) monstraram que apenas a cota superior é relevante, pois a inferior é 0 ou $-\infty$, dependendo da paridade do expoente n . Logo, se faz necessário obter uma cota inferior não trivial. Para isto, segue-se a ideia da obtenção da cota inferior de Ponte-Castañeda, ou seja, consideram-se $\bar{\eta} = 0$, $\bar{\xi} = 0$ e $a_1^0 = a_1$ em (5.132). Assim, obtém-se a cota inferior normalizada

$$\frac{\hat{\sigma}(\bar{\epsilon})}{a_1 \bar{\epsilon}} \geq \frac{\hat{a}^0}{a_1} - c_2 \frac{n-1}{2} \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{\frac{n-3}{n-1}} \left(\frac{2}{n+1} \right)^{\frac{n+1}{n-1}} \left(\frac{a_2^0}{a_1} \right)^{\frac{n+1}{n-1}} \left(\frac{a_2 \bar{\epsilon}^2}{a_1} \right)^{-1} \quad (5.138)$$

e sua formulação computacional, considerando a aproximação por MHA da normalizada $\frac{\hat{a}^0}{a_1} = \left(c_1 + \frac{c_2}{z} \right)^{-1}$ com $z = \frac{a_2^0}{a_1}$, é

$$\frac{\hat{\sigma}}{a_1 \bar{\epsilon}} \geq \max_{z>0} \left\{ \left(c_1 + \frac{c_2}{z} \right)^{-1} - c_2 (n-1) (n+1)^{-\frac{n+1}{n-1}} \lambda^{\frac{n-3}{n-1}} 2^{\frac{2}{n-1} - p} z^{\frac{n+1}{n-1}} \right\}. \quad (5.139)$$

Na Figura 22 é possível visualizar o comportamento de tais estimativas para a lei efetiva normalizada perante a variação de seus parâmetros, em que CS, MHA e CI se referem, respectivamente, à cota superior (5.135), à estimativa (5.108) obtida via método de homogeneização assintótica, e à cota inferior (5.139). Em particular, nas Figuras 22(a), (b), (c) e (d), tais comportamentos estão plotados em função de $\log_2 \left(\frac{a_2 \bar{\epsilon}^2}{a_1} \right)$, para $c_2 = 0.5$ e $n = 2$ fixos, e $\frac{a_2}{a_1} = 0.1$, $\frac{a_2}{a_1} = 0.5$, $\frac{a_2}{a_1} = 2$ e $\frac{a_2}{a_1} = 10$, respectivamente; em seguida, nas Figuras 22(e), (f), (g) e (h), tais comportamentos são plotados em

função de c_2 , para $\log_2 \left(\frac{a_2 \bar{\epsilon}^2}{a_1} \right) = 0.5$ e $n = 2$ fixos, e $\frac{a_2}{a_1} = 0.1$, $\frac{a_2}{a_1} = 0.5$, $\frac{a_2}{a_1} = 2$ e $\frac{a_2}{a_1} = 10$, respectivamente.

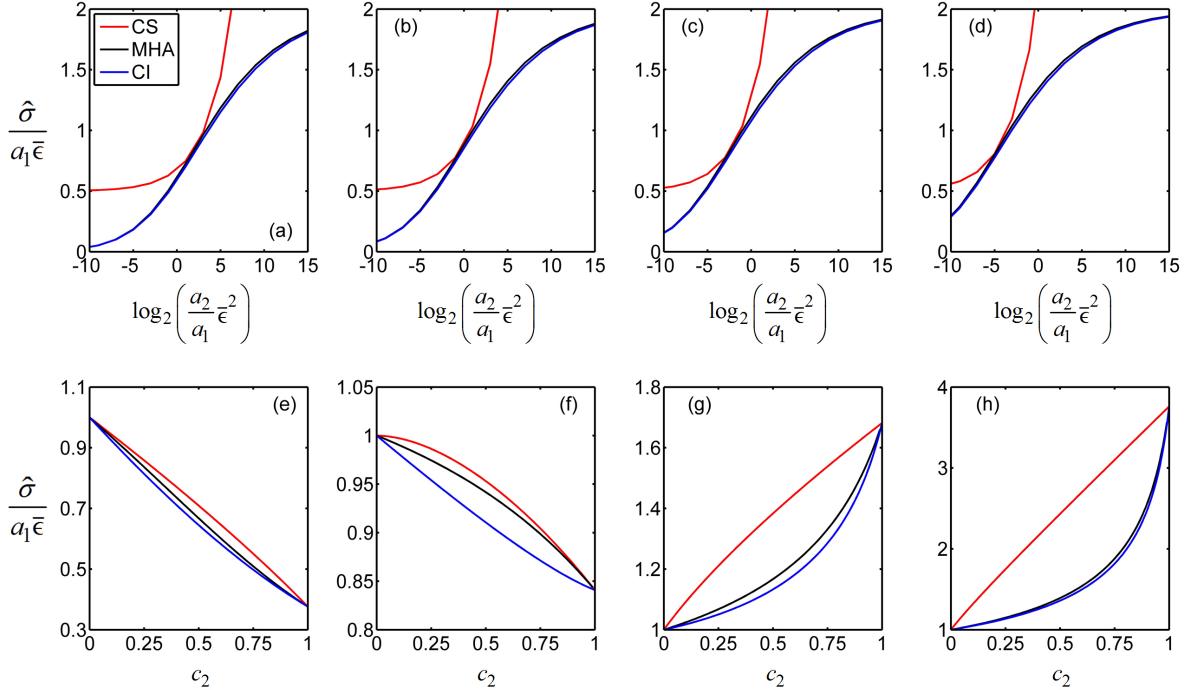


Figura 22: Cotas para a lei efetiva normalizada com relação a energia da fase linear.

De forma geral, a partir da Figura 22 pode-se concluir que a cota superior não é tão boa, devido à escolha de $\bar{\xi} = 0$. Conjectura-se que a otimização, também com relação a este parâmetro, fornecerá uma cota superior melhor do que a apresentada. Por outro lado, observa-se que a cota inferior é muito próxima da estimativa por homogeneização assintótica. A procura de uma cota superior melhorada, será objeto de estudo em trabalhos futuros.

6 CONCLUSÕES

A seguir são apresentados os resultados desta dissertação por capítulo:

1. No capítulo 2, o método de homogeneização assintótica foi apresentado e aplicado a um problema unidimensional, linear, estático e com coeficiente continuamente diferenciável. Demonstrou-se, mediante o princípio do máximo generalizado correspondente a este caso, a proximidade entre as soluções exata, assintótica e homogeneizada, que foi de ordem $\sqrt{\varepsilon}$ na norma de H_0^1 .
2. No capítulo 3, realizou-se a generalização dos resultados do capítulo 2 aos casos dinâmicos das equações do calor e da onda, respectivamente, inclusive a demonstração da proximidade entre as soluções exata, assintótica e homogeneizada. Além disso, foi estudado o problema da difusão com fluxo não linear com relação à derivada da incógnita, e a proximidade entre as soluções exata, assintótica e homogeneizada foi ilustrada. E ainda, foram apresentadas as ideias fundamentais da aplicação do MHA em equações com não linearidades mais gerais, em particular, com fluxo e fonte dependentes explicitamente da incógnita.
3. No capítulo 4, a aplicação do MHA apresentada no capítulo 2 foi estendida ao caso multidimensional, demonstrando-se inclusive a proximidade entre as soluções exata, assintótica e homogeneizada. Demonstrou-se também a conservação da simetria e do caráter definido positivo do coeficiente efetivo. Ainda, apresentou-se um exemplo ilustrativo.
4. No capítulo 5, estudou-se a generalização do problema do capítulo 4 ao caso não linear e de propriedades constantes por partes, isto é, a compósitos. Desenvolveu-se uma abordagem alternativa a partir da formulação variacional do problema. Provaram-se resultados básicos sobre as grandezas médias, e a otimalidade das condições de contorno uniformes, no sentido de que elas produzem um mínimo da energia média do compósito, isto é, a energia efetiva. Como consequência, tem-se a definição da energia efetiva mediante o princípio de mínima energia, o qual constitui a formulação fraca do problema de contorno original. A partir do princípio de mínima energia e o seu dual, o princípio de mínima

energia complementar, obtiveram-se cotas variacionais tanto para a energia efetiva quanto para a lei efetiva do compósito. Estas cotas foram comparadas com a estimativa obtida a partir do MHA em um exemplo integrador unidimensional, o qual mostrou a relevância da abordagem variacional da homogeneização.

Dos resultados descritos acima, pode-se concluir que o MHA é uma alternativa eficaz para problemas com coeficientes que variam rapidamente com relação a posição, em que a obtenção direta da solução não é possível por métodos tradicionais. Por outro lado, a abordagem integradora de cotas variacionais não lineares e estimativas lineares por MHA também mostrou-se eficaz no estudo do comportamento efetivo de meios heterogêneos. No entanto, foram identificadas situações que requerem um estudo mais aprofundado:

1. No problema não linear estudado na seção 3.3 só foi possível ilustrar a proximidade entre as soluções exata, assintótica e homogeneizada. A prova de tal proximidade poderia ser baseada em algum princípio do máximo para equações parabólicas não lineares. Em KRYLOV (1979) estudam-se princípios do máximo para equações parabólicas e elípticas não lineares, mas sua aplicação nos problemas estudados neste trabalho não é evidente.
2. Como na seção 3.3 não foi possível demonstrar a proximidade entre as soluções exata, assintótica e homogeneizada, procurou-se resolver diretamente o problema original para ilustrar tal proximidade através de um exemplo. Na tentativa de construir um exemplo ilustrativo, o MHA foi aplicado em problemas com fluxo potencial, para os quais é possível separar variáveis e foram obtidos problemas de Sturm-Liouville com EDOs de segunda ordem não lineares. A resolução destes problemas foi atacada numericamente aplicando os métodos de Runge-Kutta de quarta ordem (CONTE; BOOR, 1980, p. 362) e do tiro (CONTE; BOOR, 1980, p. 412) ao sistema de equações de primeira ordem obtida a partir da EDO do problema de Sturm-Liouville. O método do tiro foi empregado para estimar a condição inicial da derivada da incógnita, e como controle procurou-se satisfazer a segunda condição de contorno, que se obtém caso o método converja, o qual não é garantido. No entanto, esta abordagem não produziu resultados conclusivos, possivelmente por causa do efeito combinado da forma assumida para os autovalores e da rápida variabilidade do coeficiente. Alternativamente, procurou-se resolver o problema original através da forma tradicional do método de análise de homotopia (LIAO, 2012), o qual propõe a construção iterativa da solução na forma de uma série dependente de um parâmetro que permite controlar a convergência. Novamente, os resultados não foram conclusivos, possivelmente por causa da micro-heterogeneidade do meio, ou seja, dos coeficientes serem rapidamente variáveis. Mesmo assim, reconhece-se a potencialidade de ambas

abordagens descritas acima no estudo de problemas não lineares, para as quais deve-se investigar como levar em conta a heterogeneidade multiescalar típica destes problemas.

3. No exemplo implementado no capítulo 4, foram assumidas que as condições de contorno nos problemas locais eram homogêneas, sendo que a condição de unicidade do Lema 4.2.1 é de média nula. No exemplo apresentado, ambas condições foram satisfeitas pelas soluções obtidas. Contudo, no geral, estas condições não são equivalentes, pelo qual se faz necessário estudar como implementar a condição de média nula. Especificamente, como transformar a condição de média nula em condição de contorno, levando em consideração a periodicidade da solução.
4. As cotas para as leis efetivas, mesmo no caso bifásico unidimensional, requerem a otimização com relação a quatro parâmetros. Estudos preliminares nesta direção mostraram que métodos tradicionais têm sua convergência comprometida por causa do formato incomum da região de factibilidade. Então, para poder explorar ao máximo a potencialidade destas cotas, se faz necessário contar com métodos de otimização capazes de lidar com este tipo de região de factibilidade.
5. No capítulo 5, foi enfatizada a segunda abordagem da homogeneização matemática, isto é, a procura do comportamento efetivo de meios heterogêneos com propriedades constantes por partes. A procura da solução para este tipo de problemas, por exemplo, através de métodos em diferenças requer o uso de esquemas conservativos, pois a descontinuidade dos coeficientes podem fazer com que o esquema tradicional não convirja, ou convirja para uma solução que não é a solução do problema (TIJONOV; SAMARSKY, 1972, p. 649).

Vários dos resultados contidos neste trabalho foram apresentados/publicados em diversos eventos da área e constituem a base de trabalhos submetidos para publicação em periódicos (ver anexo C).

REFERÊNCIAS

- ABDULLE, A.; E, W. Finite difference heterogeneous multi-scale method for homogenization problems. **Journal of Computational Physics**, [S.I.], v.191, p.18–39, 2003.
- ALLAIRE, G.; BAL, G. Homogenization of the criticality spectral equation in neutron transport. **Mathematical Modelling and Numerical Analysis**, [S.I.], v.33, n.4, p.721–746, 1999.
- BABUSKA, I. Solutions of interface problems by homogenization, Part 1. **SIAM Journal of Mathematical Analysis**, [S.I.], v.7, n.5, p.603–634, 1976a.
- BABUSKA, I. Solutions of interface problems by homogenization, Part 2. **SIAM Journal of Mathematical Analysis**, [S.I.], v.7, n.5, p.635–645, 1976b.
- BABUSKA, I. Solutions of interface problems by homogenization, Part 3. **SIAM Journal of Mathematical Analysis**, [S.I.], v.8, n.6, p.923–937, 1976c.
- BAKHVALOV, N. S. Averaged characteristics of bodies with periodic structure. **Doklady Akademii Nauk SSSR**, [S.I.], v.218, n.5, p.1046–1048, 1974.
- BAKHVALOV, N. S. Averaging of partial differential equations with rapidly oscillating coefficients. **Doklady Akademii Nauk SSSR**, [S.I.], v.224, n.2, p.351–355, 1975a.
- BAKHVALOV, N. S. Averaging of nonlinear partial differential equations with rapidly oscillating coefficients. **Doklady Akademii Nauk SSSR**, [S.I.], v.225, n.2, p.249–252, 1975b.
- BAKHVALOV, N. S.; PANASENKO, G. P. **Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989.
- BENDSOE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology Optimization: Theory, Methods and Applications**. New York: Springer-Verlag, 2003.
- BENOUSSAN, A.; LIONS, J. L.; PAPANICOLAU, G. **Asymptotic Analysis for Periodic Structures**. Amsterdam: North-Holland, 1978.

- BENVENISTE, Y. Magnetoelectric effect in fibrous composites with piezoelectric and piezomagnetic phases. **Physical Review B**, [S.I.], v.51, p.16424–16427, 1995.
- BERDICHEVSKY, V. L. Spacial homogenization of periodic structures. **Doklady Akademii Nauk SSSR**, [S.I.], v.222, n.3, p.565–567, 1975.
- BRAVO-CASTILLERO, J.; GUINOVART-DÍAZ, R.; SABINA, F. J.; RODRÍGUEZ-RAMOS, R. Closed-form expressions for the effective coefficients of fiber-reinforced composites with transversely isotropic constituents - II. Piezoelectric and square symmetry. **Mechanics of Materials**, [S.I.], v.33, p.237–248, 2001.
- BRAVO-CASTILLERO, J.; SABINA, F. J.; RODRÍGUEZ-RAMOS, R.; GUINOVART-DÍAZ, R.; MIJANGOS, O. V.; LIS, J. C. Sabina de. Effective elastic properties of periodic fibrous composites. Limit cases. Applications to porous and nonlinear materials. **Computer Assisted Mechanics and Engineering Systems**, [S.I.], v.13, p.305–322, 2006.
- BRAVO-CASTILLERO, J.; SIXTO-CAMACHO, L. M.; BRENNER, R.; GUINOVART-DÍAZ, R.; PÉREZ-FERNÁNDEZ, L. D.; SABINA, F. J. Temperature-related effective properties and exact relations for thermo-magneto-electro-elastic fibrous composites. **Computers and Mathematics with Applications**, [S.I.], v.69, p.980–996, 2015.
- BRUNO, O. P. The effective conductivity of strongly heterogeneous composites. **Proceedings of the Royal Society of London A**, [S.I.], v.433, p.353–381, 1991.
- BRUNO, O. P.; LEO, P. H. On the stiffness of materials containing a disordered array of microscopic holes or hard inclusions. **Archives of Rational Mechanics and Analysis**, [S.I.], v.121, p.303–338, 1993.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise Numérica**. São Paulo: Cengage Learning, 2008.
- CAPDEVILLE, Y.; GUILLOT, L.; MARIGO, J. J. 1-D non-periodic homogenization for the seismic wave equation. **Geophysical Journal International**, [S.I.], v.181, p.897–910, 2010a.
- CAPDEVILLE, Y.; GUILLOT, L.; MARIGO, J. J. 2-D non-periodic homogenization to upscale elastic media for P-SV waves. **Geophysical Journal International**, [S.I.], v.182, p.903–922, 2010b.
- CHERKAEV, A. V. **Variational Methods for Structural Optimization**. New York: Springer-Verlag, 2000.
- CHRISTENSEN, R. M. **Mechanics of Composite Materials**. New York: Wiley, 1979.

- CIORANESCU, D.; DONATO, P. **An Introduction to Homogenization**. Oxford: University Press, 1999.
- CONTE, S. D.; BOOR, C. **Elementary Numerical Analysis**: An Algorithmic Approach. New York, NY, USA: McGraw-Hill, 1980.
- COURANT, R.; HILBERT, D. **Methods of Mathematical Physics**: Volume II. Partial Differential Equations. New York: Wiley, 1989.
- CUNHA, C. **Métodos Numéricos**. São Paulo: Editora da Unicamp, 2000.
- DE GIORGI, E.; SPAGNOLO, S. Sulla convergenza degli integrali dell'energia per operatori ellittici del secondo ordine. **Bollettino dell'Unione Matematica Italiana**, [S.I.], v.8, p.391–411, 1973.
- EINSTEIN, A. Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen. **Annalen der Physik**, [S.I.], v.19, p.289–306, 1906.
- GUINOVART-DÍAZ, R.; BRAVO-CASTILLERO, J.; RODRÍGUEZ-RAMOS, R.; SABINA, F. J. Closed-form expressions for the effective coefficients of fiber-reinforced composites with transversely isotropic constituents. I: elastic and hexagonal symmetry. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, [S.I.], v.49, p.1445–1462, 2001.
- HASHIN, Z.; SHTRIKMAN, S. On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity. **Journal of the Mechanics Physics of Solids**, [S.I.], v.10, p.335–342, 1962.
- HASHIN, Z.; SHTRIKMAN, S. A variational approach to the theory of the elastic behavior of polycrystals. **Journal of the Mechanics Physics of Solids**, [S.I.], v.10, p.343–352, 1962.
- HASHIN, Z.; SHTRIKMAN, S. A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials. **Journal of the Mechanics Physics of Solids**, [S.I.], v.11, p.127–140, 1963.
- HILL, R. Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, [S.I.], v.11, p.357–372, 1963.
- HUANG, J.; CAO, L.; YANG, C. A multiscale algorithm for radiative heat transfer equation with rapidly oscillating coefficients. **Applied Mathematics and Computation**, [S.I.], v.266, p.149–168, 2015.
- JKOV, V. V.; KOZLOV, S. M.; OLEINIK, O. A. **Homogenization of Partial Differential Operators and Integral Functionals**. Berlin: Springer-Verlag, 1994.

- KOLMOGOROV, A. N.; FOMIN, S. V. **Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional**. Moscou: Mir, 1975.
- KRYLOV, N. V. On the maximum principle for nonlinear parabolic and elliptic equations. **Mathematics USSR Izvestija**, [S.I.], v.13, n.2, p.335–347, 1979.
- KUDRIAVTSEV, L. D. **Curso de Análisis Matemático**: Tomo I. Moscou: Mir, 1983.
- LARSSON, S.; THOMÉE, V. **Partial Differential Equations with Numerical Methods**. New York: Springer, 2003.
- LEÓN-MECÍAS, A.; BRAVO-CASTILLERO, J.; MESEJO-CHIONG, A.; PÉREZ-FERNÁNDEZ, L. D.; SABINA, F. J. Improved bounds for the effective energy of nonlinear 3D conducting composites. **Revista Mexicana de Física**, [S.I.], v.53, n.3, p.164–170, 2007.
- LEÓN-MECÍAS, A.; PÉREZ-FERNÁNDEZ, L. D.; BRAVO-CASTILLERO, J.; SABINA, F. J. On the effective behavior of 3D porous conductive materials. **Revista Cubana de Física**, [S.I.], v.22, n.1, p.56–59, 2005.
- LEÓN-MECÍAS, A.; PÉREZ-FERNÁNDEZ, L. D.; BRAVO-CASTILLERO, J.; SABINA, F. J. Tight bounds for three-dimensional nonlinear incompressible elastic composites. **International Journal of Engineering Science**, [S.I.], v.46, p.1087–1097, 2008.
- LIAO, S. **Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equations**. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2012.
- MARCHENKO, V. A.; KHRUSLOV, E. Y. **Boundary Value Problems in Domains with Fine-Grained Boundary**. Kiev: Naukova Dumba, 1974.
- MAXWELL, J. C. **Treatise on Electricity and Magnetism**. Oxford: Clarendon Press, 1873.
- MILTON, G. W. **The Theory of Composites**. Cambridge: University Press, 2002.
- MILTON, G. W.; SERKOV, S. K. Bounding the current in nonlinear conducting composites. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, [S.I.], v.48, p.1295–1324, 2000.
- MURAT, F.; TARTAR, L. H-convergence. In: CHERKAEV, A.; KOHN, R. (Ed.). **Topics in the Mathematical Modelling of Composite Materials**. Boston: Birkhäuser, 1998.
- NG, C.-O. Dispersion in steady and oscillatory flows through a tube with reversible and irreversible wall reactions. **Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, [S.I.], v.462, n.2066, p.481–515, 2006.

OLEINIK, O. A. On convergence of solutions of elliptic and parabolic equations when coefficients weakly converge. **Uspekhi Matematicheskikh Nauk**, [S.I.], v.30, n.4, p.257–258, 1975.

OLEINIK, O. A.; SHAMAEV, A. S.; YOSIFIAN, G. A. **Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization**. Amsterdam: North-Holland, 1992.

PANASENKO, G. P. **Multi-scale Modelling for Structures and Composites**. Dordrecht: Springer, 2005.

PANASENKO, G. P. Homogenization for periodic media: from microscale to macroscale. **Physics of Atomic Nuclei**, [S.I.], v.71, p.681–694, 2008.

PARNELL, W. J.; GRIMAL, Q. The influence of mesoscale porosity on cortical bone anisotropy. **Journal of the Royal Society Interface**, [S.I.], v.6, p.97–109, 2009.

PAVLIOTIS, G. A.; STUART, A. M. **Multiscale Methods: Averaging and Homogenization**. New York: Springer, 2008.

PEIGNEY, M. A pattern-based method for bounding the effective response of a nonlinear composite. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, [S.I.], v.53, p.923–948, 2005.

PÉREZ-FERNÁNDEZ, L. D.; BECK, A. T. Failure detection in umbilical cables via electroactive elements - a mathematical homogenization approach. **International Journal of Modeling and Simulation for the Petroleum Industry**, [S.I.], v.8, p.34–39, 2014.

PÉREZ-FERNÁNDEZ, L. D.; BRAVO-CASTILLERO, J.; RODRÍGUEZ-RAMOS, R.; SABINA, F. J. Estimation of very narrow bounds to the behavior of nonlinear incompressible elastic composites. **Archive of Applied Mechanics**, [S.I.], v.77, p.229–239, 2007a.

PÉREZ-FERNÁNDEZ, L. D.; BRAVO-CASTILLERO, J.; RODRÍGUEZ-RAMOS, R.; SABINA, F. J. On the influence of fiber cross-section geometry on the overall response of nonlinear fiber-reinforced conductors. In: **Proceedings of the 10th Pan-American Congress of Applied Mechanics - PACAM X**. [S.I.]: s.n., 2008. p.382–385.

PÉREZ-FERNÁNDEZ, L. D.; BRAVO-CASTILLERO, J.; RODRÍGUEZ-RAMOS, R.; SABINA, F. J. On the constitutive relations and energy potentials of linear thermo-magneto-electro-elasticity. **Mechanics Research Communications**, [S.I.], v.36, p.343–350, 2009.

PÉREZ-FERNÁNDEZ, L. D.; GÓMEZ-MUÑOZ, J. L.; BRAVO-CASTILLERO, J.; GUINOVART-DÍAZ, R.; RODRÍGUEZ-RAMOS, R.; SABINA, F. J.; LIS, J. C. Sabina de.

An integrated approach for nonlinear model of composite rod (asymptotic homogenization vs. variational principles. **Problems of Nonlinear Analysis in Engineering Systems**, [S.I.], v.13, p.50–63, 2007b.

PÉREZ-FERNÁNDEZ, L. D.; LEÓN-MECÍAS, A.; BRAVO-CASTILLERO, J. About the improvement of variational bounds for nonlinear composite dielectrics. **Materials Letters**, [S.I.], v.59, p.1552–1557, 2005.

PONTE CASTANEDA, P. The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. **Journal of the Mechanics Physics of Solids**, [S.I.], v.39, n.1, p.45–71, 1991.

RAYLEIGH, L. On the influence of obstacles arranged in a rectangular order upon the properties of medium. **Philosophical Magazine**, [S.I.], v.34, p.481–502, 1892.

REUSS, A. Berechnung der Fliessgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle. **Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik**, [S.I.], v.9, p.49–58, 1929.

RODRÍGUEZ-RAMOS, R.; SABINA, F. J.; BRAVO-CASTILLERO, J.; GUINOVART-DÍAZ, R. Closed-form expressions for the effective coefficients of fiber-reinforced composites with transversely isotropic constituents - I. Elastic and square symmetry. **Mechanics of Materials**, [S.I.], v.33, p.223–235, 2001.

SABINA, F. J.; BRAVO-CASTILLERO, J.; GUINOVART-DÍAZ, R.; RODRÍGUEZ-RAMOS, R.; VALDIVIEZO-MIJANGOS, O. C. Overall behavior of two-dimensional periodic composites. **International Journal of Solids and Structures**, [S.I.], v.39, p.483–497, 2002.

SABINA, F. J.; RODRÍGUEZ-RAMOS, R.; BRAVO-CASTILLERO, J.; GUINOVART-DÍAZ, R. Closed-form expressions for the effective coefficients of fiber-reinforced composites with transversely isotropic constituents. II: piezoelectric and hexagonal symmetry. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, [S.I.], v.49, p.1463–1479, 2001.

SADD, M. H. **Elasticity: Theory, Applications, and Numerics**. Oxford: Elsevier Academic Press, 2005.

SAHIMI, M. **Heterogeneous Materials I: Linear Transport and Optical Properties**. New York: Springer-Verlag, 2003.

SANCHEZ-PALENCIA, E. Solutions périodiques par rapport aux variables d'espace et applications. **Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Academie des Sciences Série A - Sciences Mathématiques**, [S.I.], v.271, p.1129–1132, 1970.

SANCHEZ-PALENCIA, E. **Nonhomogeneous Media and Vibration Theory**. New York: Springer-Verlag, 1980.

SPIVAK, M. **Calculus on Manifolds**: a Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus. Reading: Addison-Wesley, 1965.

TALBOT, D. Bounds which incorporate morphological information for a nonlinear composite dielectric. **Proceedings of the Royal Society of London A**, [S.I.], v.455, p.3617–3628, 1999.

TALBOT, D. Improved bounds for the effective properties of a nonlinear two-phase elastic composite. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, [S.I.], v.48, p.1285–1294, 2000.

TALBOT, D.; WILLIS, J. Variational principles for inhomogeneous non-linear media. **IMA Journal of Applied Mathematics**, [S.I.], v.35, p.39–54, 1985.

TALBOT, D.; WILLIS, J. Some simple explicit bounds for the overall behavior of nonlinear composites. **International Journal of Solids and Structures**, [S.I.], v.29, p.1981–1987, 1992.

TALBOT, D.; WILLIS, J. Bounds for the effective constitutive relation of a nonlinear composite. **Proceedings of the Royal Society of London A**, [S.I.], v.460, p.2705–2723, 2004.

TIJONOV, A. N.; SAMARSKY, A. A. **Ecuaciones de la Física Matemática**. Moscou: Mir, 1972.

TORQUATO, S. **Random Heterogeneous Materials**: Microstructure and Macroscopic Properties. New York: Springer-Verlag, 2002.

TORQUATO, S. Optimal design of heterogeneous materials. **Annual Review of Materials Research**, [S.I.], v.40, p.101–129, 2010.

VOIGT, W. Ueber die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper. **Annalen der Physik**, [S.I.], v.38, p.573–587, 1889.

WEINBERGER, H. F. **A First Course in Partial Differential Equations with Complex Variables and Transform Methods**. New York: Dover, 1995.

WILLIS, J. R. The overall elastic response of composite materials. **Journal of Applied Mechanics**, [S.I.], v.50, p.1202–1209, 1983.

WILLIS, J. R. The overall elastic response of nonlinear composite media. **European Journal of Mechanics A/Solids**, [S.I.], v.19, p.S165–S184, 2000.

ANEXO A PRINCÍPIOS DO MÁXIMO

A.1 Princípio do máximo generalizado para equações elípticas

Seja $u \in H_0^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, a solução generalizada do problema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} (A_i(x)u) + B_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + A(x)u = f(x) + \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i}, & x \in \Omega \setminus \Gamma, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Os coeficientes A_{ij} satisfazem condições de simetria $A_{ij}(x) = A_{ji}(x)$ e positividade $A_{ij}(x)\eta_i\eta_j \geq \kappa\eta_i\eta_i$, $\forall \eta \in \mathbb{R}^d$, onde κ é uma constante positiva.

Para esta solução a seguinte estimativa é válida:

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^s \|f_i\|_{L^2(\Omega)} \right), \quad (\text{A.1})$$

onde $c > 0$ é uma constante (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989). Para simplificação, adotou-se a notação de Einstein para a soma por índices repetidos em um termo.

A.2 Princípio do máximo generalizado para equações parabólicas

Seja $u \in H_0^1(\Omega \times (0, T))$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, solução generalizada do problema

$$\begin{cases} S(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + A_i(x, t)u \right) \\ \quad + B_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + A(x, t)u = f(x, t) + \frac{\partial f_i(x, t)}{\partial x_i}, & x \in \Omega \setminus \Gamma, \quad t \in (0, T), \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in (0, T) \\ u(x, 0) = \psi(x), \quad \psi \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

onde $S(x, t) > S_0 > 0$, tal que, S_0 é uma constante. Os coeficientes A_{ij} satisfazem condições de simetria $A_{ij}(x) = A_{ji}(x)$ e positividade $A_{ij}(x)\eta_i\eta_j \geq \kappa\eta_i\eta_i$, $\forall \eta \in \mathbb{R}^d$, onde $\kappa > 0$ é uma constante.

Para esta solução a seguinte estimativa é válida:

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega \times (0, T))} \leq c(T) \left(\|\psi(x)\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega \times (0, T))} + \sum_{i=1}^s \|f_i\|_{L^2(\Omega \times (0, T))} \right), \quad (\text{A.2})$$

onde c depende de T (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989). Para simplificação, adotou-se a notação de Einstein para a soma por índices repetidos em um termo.

A.3 Princípio do máximo generalizado para equações hiperbólicas

Seja $u \in H_0^1(\Omega \times (0, T))$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, a solução generalizada do problema

$$\begin{cases} R(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + S(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \\ \quad + B_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + A(x, t)u = f(x, t) + \frac{\partial f_i(x, t)}{\partial x_i}, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma, \quad t \in (0, T), \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in (0, T) \\ u(x, 0) = \psi_1(x), \quad \psi_1 \in H_0^1(\Omega), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi_2(x), \quad \psi_2 \in L^2(\Omega), \end{cases}$$

onde $R(x, t) > R_0 > 0$, $S(x, t) > S_0 > 0$, tais que, R_0 e S_0 são constantes. Os coeficientes A_{ij} satisfazem condições de simetria $A_{ij}(x) = A_{ji}(x)$ e positividade $A_{ij}(x)\eta_i\eta_j \geq \kappa\eta_i\eta_j$, $\forall \eta \in \mathbb{R}^d$, onde $\kappa > 0$ é uma constante.

Para esta solução a seguinte estimativa é válida:

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_0^1(\Omega \times (0, T))} \leq c(T) & \left(\|\psi_1(x)\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\psi_2(x)\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega \times (0, T))} \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^s \left(\|f_i\|_{L^2(\Omega \times (0, T))} + \max_{t \in [0, T]} \|f_i\|_{L^2(\Omega)} \right) \right), \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

onde c depende de T (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989). Para simplificação, adotou-se a notação de Einstein para a soma por índices repetidos em um termo.

ANEXO B MÉTODOS APLICADOS

B.1 Método dos Trapézios

O método dos trapézios calcula a integral definida sobre um intervalo $[a, b]$, dividido em N subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$ igualmente espaçados, onde $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, N$. Para cada subintervalo definido pelo índice i é calculado a área de um trapézio de altura $h = \frac{b-a}{N}$, onde $N \in \mathbb{N}$ especifica a quantidade de trapézios que compõem o intervalo $[a, b]$. Denota-se a integral de cada trapézio por $I_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$, assim a integral sobre todo o intervalo é a soma de todos os subintervalos, ou seja,

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^N I_i. \quad (\text{B.1})$$

O método dos trapézios consiste em substituir a função $f(x)$ por $p_1(x)$, onde $p_1(x)$ é um polinômio de grau 1 que interpola os pontos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}) \equiv f_{i-1})$ e $(x_i, f(x_i) \equiv f_i)$. Isto é, a partir do interpolador de Lagrange

$$p_m(x) = \sum_{i=0}^m f(x_i)L_i(x)dx \quad (\text{B.2})$$

onde

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^m \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad (\text{B.3})$$

é fornecido para $m = 1$, a expressão para calcular a integral de cada trapézio i , ou seja,

$$I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} p_1(x)dx = h \left(\frac{f_{i+1} + f_i}{2} \right), \quad (\text{B.4})$$

e portanto, para todo domínio tem-se

$$I = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^n (f_{i-1} + f_i) + E_T, \quad (\text{B.5})$$

onde

$$E_T = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\beta), \quad a \leq \beta \leq b \quad (\text{B.6})$$

é o erro da fórmula dos trapézios (CUNHA, 2000).

Perante tais ideias, implementou-se o correspondente método para obter o coeficiente efetivo (3.29), considerando $a = 0$, $b = 1$, $N = 10000$ e $f = \left(1 + \frac{1}{4}\sin(2\pi x)\right)^{-1}$, de onde se obteve $\hat{k} = I^{-1} \approx 0.968$.

B.2 Método de Simpson - Regra do 1/3

B.2.1 Unidimensional

Seja a interpolação da função $f(x)$ usando o polinômio interpolador de Lagrange (B.2) de grau 2 que coincide com essa função nos pontos x_{2i-2} , x_{2i-1} e x_{2i} . Ao considerar que $m = 2$ em (B.2) e (B.3) se obtém, a partir da integração do polinômio interpolador, a expressão para a integral numérica da função $f(x)$ sobre o subintervalo $[x_{2i-2}, x_{2i}]$, ou seja,

$$I_i = \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} p_2(x) dx = \frac{h}{3} [f_{2i-2} + 4f_{2i-1} + f_{2i}] \quad (\text{B.7})$$

onde $h = \frac{b-a}{N}$, $N \in \mathbb{N}$ é o espaçamento entre os pontos x_i . Note que N define o número de pontos sobre o intervalo $[a, b]$, o qual $f(x)$ está definida. No entanto, N deve ser um número par. Logo, a integral aproximada sobre o intervalo $[a, b]$ é obtida por

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f_0 + 4 \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} f_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1} f_{2i} + f_n] + E_S \quad (\text{B.8})$$

onde

$$E_S = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\beta), \quad a \leq \beta \leq b \quad (\text{B.9})$$

é o erro final da fórmula de Simpson (BURDEN; FAIRES, 2008),(CUNHA, 2000).

B.2.2 Bidimensional

De forma similar ao caso unidimensional, considera-se a interpolação da função $f(x, y)$ usando o polinômio interpolador de Lagrange (B.2) de grau 2 que coincide com essa função nos pontos x_{2i-2} , x_{2i-1} e x_{2i} , ou y_{2i-2} , y_{2i-1} e y_{2i} . E ainda, assume-se que o domínio $\mathcal{D} = [a, b] \times [c, d]$ está subdividido em $N \times M$ pontos, onde N e M são números naturais e pares. Assim, a integral dupla definida em \mathcal{D} é dada por

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy. \quad (\text{B.10})$$

Sabe-se de (B.7) que a integral aproximada pelo método de Simpson é dada por

$$\int_a^b f(x, y) dx \approx I(y) \quad (\text{B.11})$$

onde

$$I(y) = \frac{h_x}{3} \left[f(x_0, y) + 4 \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} f(x_{2i-1}, y) + 2 \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1} f(x_{2i}, y) + f(x_n, y) \right]. \quad (\text{B.12})$$

Logo, integrando com respeito a y pelo método de Simpson novamente tem-se

$$\begin{aligned} \int_c^d I(y) dy &= \frac{h_x h_y}{9} [f(x_0, y_0) + f(x_0, y_M) + f(x_N, y_0) + f(x_n, y_M)] \\ &\quad + \frac{4h_x h_y}{9} \left[\sum_{j=1}^{\frac{M}{2}-1} f(x_0, y_{2j-1}) + \sum_{j=1}^{\frac{M}{2}} f(x_N, y_{2j-1}) + \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} (f(x_{2i-1}, y_0) + f(x_{2i-1}, y_M)) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1} \sum_{j=1}^{\frac{M}{2}-1} f(x_{2i}, y_{2j}) \right] \\ &\quad + \frac{2h_x h_y}{9} \left[\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1} (f(x_{2i}, y_0) + f(x_{2i}, y_M)) + \sum_{j=1}^{\frac{M}{2}-1} (f(x_0, y_{2j}) + f(x_N, y_{2j})) \right] \\ &\quad + \frac{8h_x h_y}{9} \left[\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} \sum_{j=1}^{\frac{M}{2}-1} f(x_{2i-1}, y_{2j}) + \sum_{j=1}^{\frac{M}{2}} \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1} f(x_{2i}, y_{2j-1}) \right] \\ &\quad + \frac{16h_x h_y}{9} \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} \sum_{j=1}^{\frac{M}{2}} f(x_{2i-1}, y_{2j-1}) + E_S, \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

onde h_x e h_y são os espaçamentos entre os pontos x_i e y_i , definidos por

$$h_x = \frac{b-a}{N}, \quad h_y = \frac{d-c}{M},$$

respectivamente, e E_S o erro fornecido por

$$E_S = -\frac{(d-c)(b-a)}{180} \left[h_x^4 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(\bar{\eta}, \bar{\mu}) + h_y^4 \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(\hat{\eta}, \hat{\mu}) \right]$$

para alguns $(\bar{\eta}, \bar{\mu})$ e $(\hat{\eta}, \hat{\mu})$ em \mathcal{D} (BURDEN; FAIRES, 2008).

B.3 Método de Diferenças Finitas

B.3.1 Crank-Nicolson

Sejam $\mathcal{D} = [a, b] \times [c, d]$ o conjunto dos pontos, nos quais a equação diferencial está definida, e \mathcal{S} o seu contorno.

Considere uma malha formada por pontos igualmente espaçados, definida por:

$$\mathcal{D}^* = \{(x_i, t_j) = (a + ih, c + jr), i = 0, 1, \dots, N \text{ e } j = 0, 1, \dots, M\}, \quad (\text{B.14})$$

onde a e c são os pontos iniciais conhecidos, $h = \frac{b-a}{N}$ e $r = \frac{d-c}{M}$ são os espaçamentos da malha, h na horizontal e r na vertical.

No método, as derivadas presentes na equação são substituídas por aproximações obtidas a partir da série de Taylor,

$$u(x_{i+1}, t_j) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x_i, t_j) h^k, \quad (\text{B.15})$$

$$u(x_{i-1}, t_j) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x_i, t_j) h^k, \quad (\text{B.16})$$

$$u(x_i, t_{j+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x_i, t_j) r^k, \quad (\text{B.17})$$

onde de (B.15) obtemos a derivada primeira com respeito a x

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - u(x_i, t_j)}{h} + \mathcal{O}(h), \quad (\text{B.18})$$

da soma de (B.15) e (B.16) obtemos a segunda derivada com respeito a x

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2), \quad (\text{B.19})$$

e de (B.17) a derivada primeira com respeito a t

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{r} + \mathcal{O}(r). \quad (\text{B.20})$$

Por conveniência, será usada a seguinte notação para os pontos da malha:

$$\begin{aligned} u(x_i, t_j) &= u_{i,j}, & u(x_i + h, t_j) &= u_{i+1,j}, \\ u(x_i - h, j) &= u_{i-1,j}, & u(x_i, t_j + r) &= u_{i,j+1}, \\ u(x_i, t_j - r) &= u_{i,j-1}. \end{aligned}$$

A ideia do método de Crank-Nicolson é realizar a média entre a derivada com

respeito a x no tempo t_j e t_{j+1} , ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) = \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} + \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1}}{h} \right) + \mathcal{O}(h), \quad (\text{B.21})$$

e para a segunda derivada

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) &= \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} \right) \\ &\quad + \mathcal{O}(h^2), \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

já para os termos conhecidos, define-se da seguinte forma

$$f_{i,j} = f(x_i, t_j), \quad (\text{B.23})$$

$$k'_i = \frac{dk}{dx} \left(\frac{x_i}{\varepsilon} \right), \quad (\text{B.24})$$

$$k_i = k \left(\frac{x_i}{\varepsilon} \right). \quad (\text{B.25})$$

Note que, para fins computacionais, o coeficiente não tem duas escalas.

Assim, a aplicação dessas formulações na equação do problema (3.89), se obtém

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{r} - \frac{k'_i}{2} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} + \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1}}{h} \right) \\ - \frac{k_i}{2} \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} \right) = f_{i,j}. \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

A representação matricial do método, é dada por

$$\mathbf{A}\mathbf{u}^{j+1} = \mathbf{B}\mathbf{u}^j + \mathbf{F} \quad (\text{B.27})$$

onde, no caso de condições de contorno do tipo Dirichlet tem-se que \mathbf{A} e \mathbf{B} são tridiagonais. Especificamente, as diagonais superior, principal e inferior de \mathbf{A} são, respectivamente,

$$a^+ = -r(k'_i h + 2k_i)\mathbb{I}_{n-1}, \quad a^0 = 4(h^2 + r k_i)\mathbb{I}_n, \quad a^- = r(k'_i h - 2k_i)\mathbb{I}_{n-1}, \quad (\text{B.28})$$

onde \mathbb{I}_m é o vetor de dimensão m com todas as componentes iguais a 1. Similarmente, as diagonais de \mathbf{B} estão dadas pelos vetores

$$b^\pm = -a^\pm \mathbb{I}_{n-1}, \quad b^0 = 4(h^2 - r k_i)\mathbb{I}_n \quad (\text{B.29})$$

$$\mathbf{F} = [f_{1,j} + r(2k_i - k'_i h)u_{0,:} \ f_{2,j} \dots f_{N-2,j} \ f_{N-1,j} + r(k'_i h + 2k_i)u_{N,:}]^T,$$

onde $u_{0,:}$ e $u_{N,:}$ são as condições de contorno definidas. Da formulação matricial (B.27) devemos resolver o sistema no instante de tempo j , obtendo assim a solução do instante seguinte $j + 1$.

B.3.2 Diferenças centradas

Para resolver o problema original (3.90) e (3.105) a partir do método de diferenças finitas, seguiu-se uma versão para coeficientes variáveis do procedimento realizado em BURDEN; FAIRES (2008), para coeficientes constantes.

Inicialmente, discretiza-se o domínio $\mathcal{D} = [a, b] \times [c, d]$ em N elementos em x e M elementos em t , ou seja,

$$\begin{aligned} x_i &= a + ih, \text{ onde } h = \frac{b-a}{N} \text{ para cada } i = 0, \dots, N, \\ t_i &= c + jk, \text{ onde } k = \frac{d-c}{M} \text{ para cada } j = 0, \dots, M, \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

onde $x_0 = a$, $t_0 = c$, $N, M \in \mathbb{N}$.

Em qualquer ponto interior da malha (x_i, t_j) a equação da onda (3.90) é

$$\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(x_i, t_j) - \frac{\partial E}{\partial x}\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}(x_i, t_j) - E\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right) \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x^2}(x_i, t_j) = f(x_i, t_j). \quad (\text{B.31})$$

O esquema utilizado para o método de diferenças finitas foi o das diferenças centradas para as derivadas parciais segundas dadas por

$$\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(x_i, t_j) = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} + \mathcal{O}(k^2) \quad (\text{B.32})$$

e

$$\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{k^2} + \mathcal{O}(h^2). \quad (\text{B.33})$$

Para a derivada parcial primeira, também o das diferenças centradas dada por

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}(x_i, t_j) = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + \mathcal{O}(h). \quad (\text{B.34})$$

Os demais termos, são conhecidos, logo são formulados como

$$\frac{\partial E}{\partial x}\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right) = E_i^1, E\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right) = E_i^0 \text{ e } f(x_i, t_j) = f_{i,j}. \quad (\text{B.35})$$

Se considerarmos $\lambda = \frac{k}{h}$ podemos reescrever a equação diferença, isolando $u_{i,j+1}$, a aproximação mais avançada de passo no tempo, como

$$u_{i,j+1} = \frac{\lambda^2}{2} [E_i^1 h(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + 2E_i^0(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + 2h^2 f_{i,j}] + 2u_{i,j} - u_{i,j-1}. \quad (\text{B.36})$$

Esta equação vale para cada $i = 1, \dots, N - 1$ e $j = 1, \dots, M - 1$. As condições de contorno fornecem $u_{0,j} = u_{M,j} = 0$, para cada $j = 1, \dots, M - 1$, e a condição inicial implica que $u_{i,0} = 0$. Note que (B.36) implica que o $(j + 1)$ -ésimo passo no tempo necessita dos valores dos (j) -ésimo e $(j - 1)$ -ésimo passos no tempo, isto é, para a simulação natural desta equação são necessários valores para $u_{i,0}$ e $u_{i,1}$. O primeiro é obtido naturalmente pela condição incial, mas o segundo é obtido da condição da derivada (velocidade incial). Para obter esta segunda condição, utiliza-se a seguinte abordagem: substitua a condição incial da velocidade por uma aproximação de diferenças progressivas,

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x_i, 0) = \frac{u_{i,1} - u_{i,0}}{k} + \mathcal{O}(k), \quad (\text{B.37})$$

e isolando $u_{i,1}$ se obtém

$$u_{i,1} = u_{i,0} + k \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x_i, 0) + \mathcal{O}(k), \quad (\text{B.38})$$

que, em particular, $u_{i,1} = 0$.

B.4 Método de Fourier para resolução do problema homogeneizado - Equação do Calor

Assume-se que a solução $v_0^{(\tau)}(x, t)$ de (3.85) pode ser expressa como o produto de duas funções, uma que dependa apenas da variável x e outra da variável t , isto é, $v_0^{(\tau)}(x, t) = X(x)T(t)$. Quando este produto é substituído na equação de (3.85) obtém-se

$$X(x)T'(t) - \hat{k}X''(x)T(t) = 0. \quad (\text{B.39})$$

Dividindo (B.39) por $\hat{k}X(x)T(t)$ (nos pontos onde $X(x)$ e $T(t)$ não se anulam) a equação se separa em duas equações diferenciais ordinárias, uma para $X(x)$ e outra para $T(t)$

$$\frac{T'(t)}{\hat{k}T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (\text{B.40})$$

O lado direito da equação (B.40) é uma função apenas de t , enquanto o lado esquerdo depende apenas de x . Logo, ambos os lados têm que ser iguais a uma mesma constante real $(-\lambda)$. Portanto, as equações diferenciais ordinárias são:

$$T'(t) = -\lambda \hat{k}T(t), \quad (\text{B.41})$$

$$X''(x) = -\lambda X(x). \quad (\text{B.42})$$

E ainda, de substituir o correspondente produto nas condições de contorno tem-se

$$X(0)T(t) = 0, \quad X(1)T(t) = 0, \quad \forall t > 0. \quad (\text{B.43})$$

Logo, para obter soluções não triviais tanto para $X(x)$ quanto para $T(t)$, impõem-se que

$$X(0) = 0, \quad X(1) = 0, \quad (\text{B.44})$$

onde $X(x)$ será solução do problema de Sturm-Liouville dado por

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \quad X(1) = 0. \end{cases} \quad (\text{B.45})$$

Por outro lado, $T(t)$ será qualquer das infinitas soluções da equação diferencial

$$T'(t) + \lambda \hat{k} T(t) = 0. \quad (\text{B.46})$$

Note que o problema (B.45) fornece uma família de soluções, a qual está associada a valores definidos por λ . Assim, deve-se procurar os valores de λ (auto-valores) que geram soluções não nulas (auto-funções) do problema (B.45), ou seja, para cada auto-valor obtido há uma auto-função associada.

Considerando-se três hipóteses de valores para λ ,

$$\lambda = 0 \text{ ou } \lambda = -\alpha^2 < 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ ou } \lambda = \alpha^2 > 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

a única que gera soluções não triviais do problema de Sturm-Liouville é a terceira com $\lambda_n = (n\pi)^2$ com $n \in \mathbb{N}$, onde a solução correspondente é

$$X_n(x) = \operatorname{sen}(n\pi x). \quad (\text{B.47})$$

Portanto, λ_n são os auto-valores de (B.45) e (B.47) são as auto-funções associadas. Ainda, ao resolver a equação (B.46) tem-se

$$T_n(t) = c_n \exp \left\{ -(n\pi)^2 \hat{k} t \right\}, \quad (\text{B.48})$$

onde c_n são constantes arbitrárias a determinar.

Assim, de (B.47) e (B.48) se obtém uma família de soluções

$$v_{0n}^{(\tau)}(x, t) = c_n \exp \left\{ -(n\pi)^2 \hat{k} t \right\} \operatorname{sen}(n\pi x), \quad x \in (0, 1), \quad t > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (\text{B.49})$$

que pelo princípio da superposição, a solução geral é dada por

$$v_0^{(\tau)}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp \left\{ -(n\pi)^2 \hat{k}t \right\} \sin(n\pi x), \quad x \in (0, 1), t > 0. \quad (\text{B.50})$$

Para obter c_n , aplica-se a condição inicial de (3.85) em (B.50), ou seja,

$$v_0^{(\tau)}(x, t; \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x) = e^{-\tau}, \quad (\text{B.51})$$

que pela propriedade de ortogonalidade e integração em x de 0 a 1

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x) \sin(m\pi x) dx = \int_0^1 e^{-\tau} \sin(m\pi x) dx, \quad (\text{B.52})$$

se obtém

$$\begin{aligned} c_n \int_0^1 \sin^2(n\pi x) dx &= e^{-\tau} \int_0^1 \sin(n\pi x) dx, \\ \frac{c_n}{2} &= e^{-\tau} \left(\frac{1 - \cos(n\pi)}{n\pi} \right), \\ c_{2n-1} &= \frac{4e^{-\tau}}{(2n-1)\pi}, \quad c_{2n} = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

onde (B.53) uma família de constantes e assim de (B.50) e (B.53) tem-se a solução

$$v_0^{(\tau)}(x, t) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp \left\{ -((2n-1)\pi)^2 \hat{k}t - \tau \right\}}{(2n-1)\pi} \sin((2n-1)\pi x), \quad x \in (0, 1), t > 0. \quad (\text{B.54})$$

E, portanto, a solução do problema homogeneizado (3.83) é dada por

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= \int_0^t v_0^{(\tau)}(x, t-\tau) d\tau \\ &= 4 \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp \left\{ -((2n-1)\pi)^2 \hat{k}(t-\tau) - \tau \right\}}{(2n-1)\pi} \sin((2n-1)\pi x) d\tau. \end{aligned} \quad (\text{B.55})$$

ANEXO C PRODUÇÃO CIENTÍFICA

Parte do presente trabalho constitui-se de trabalhos que foram desenvolvidos durante os cursos “Introdução à Homogeneização Matemática” e “Homogeneização Matemática Avançada e Aplicações” realizados no Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática da UFPel em 2014/2015 pelo Professor Visitante Especial da CAPES Dr. Julián Bravo Castillero. De ambos cursos resultaram diversos trabalhos publicados em:

- Anais de evento

1. LAZZARI, L.; FERNANDEZ, L. S.; LIMA, M. P. ; FERNÁNDEZ, L. D. P.; CASTILLERO, J. B. Homogeneização Assintótica da equação unidimensional do calor. In: ENCONTRO DE PÓS-GRADUAÇÃO UFPEL, 16. Pelotas, 2014. Anais do XVI ENPOS. Pelotas: UFPel, 2014. Disponível em: <http://cti.ufpel.edu.br/siepe/arquivos/2014/CE_01710.pdf>.
2. LIMA, M. P.; LAZZARI, L.; FERNANDEZ, L. S.; FERNÁNDEZ, L. D. P.; CASTILLERO, J. B. Homogeneização assintótica da equação da onda sobre meios microperiódicos unidimensionais. In: Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul, 20. Bagé, 2014. Anais do XX EREMAT-SUL. Bagé: UNIPAMPA, 2014. p.213-220.
3. LIMA, M. P.; LAZZARI, L.; FERNANDEZ, L. S.; FERNÁNDEZ, L. D. P.; CASTILLERO, J. B. Homogeneização assintótica da equação do calor para meios unidimensionais periódicos continuamente heterogêneos. In: Conferência Sul de Modelagem Computacional, 6. Rio Grande, 2014. Anais do 6º MCSUL. Rio Grande: FURG, 2014. p.311-317.
4. LIMA, M. P.; LAZZARI, L.; FERNANDEZ, L. S.; FERNÁNDEZ, L. D. P.; CASTILLERO, J. B. Homogeneização assintótica da equação de onda sobre meios unidimensionais microperiódicos continuamente heterogêneos. In. Congresso Brasileiro de Jovens Pesquisadores em Matemática Pura e Aplicada, 1. São Paulo, 2014. Anais do I Congresso Brasileiro de Jovens Pesquisadores em Matemática

Pura e Aplicada. São Paulo: USP, 2014. p. 25. Disponível em:<<http://jovens.ime.usp.br/jovens/sites/all/themes/simplecorp/abstracts/LivrodeResumos.pdf>>.

5. LIMA, M. P.; LAZZARI, L.; FERNÁNDEZ, L. D. P.; CASTILLERO, J. B. Homogeneização assintótica de um problema elíptico multidimensional. In: ENCONTRO DE PÓS-GRADUAÇÃO UFPEL, 17. Pelotas, 2015. Anais do XVII ENPOS. Pelotas: UFPel, 2015. Disponível em: <http://cti.ufpel.edu.br/siepe/arquivos/2015/CE_04471.pdf>.

- Periódico - Revista Vetor. Situação: aceito.

1. LIMA, M. P.; LAZZARI, L.; FERNANDEZ, L. S.; FERNÁNDEZ, L. D. P.; CASTILLERO, J. B. (2015) Homogeneização assintótica da equação do calor para meios unidimensionais periódicos continuamente heterogêneos.

- Periódico - Revista Ciência e Engenharia. Situação: em avaliação.

1. LIMA, M. P.; LAZZARI, L.; FERNANDEZ, L. S.; FERNÁNDEZ, L. D. P.; CASTILLERO, J. B. (2015) Solução da equação de difusão com coeficientes continuamente microperiódicos pelo método de homogeneização assintótica.

Homogeneização matemática de meios micro-heterogêneos com estrutura periódica – Marcos Pinheiro de Lima



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
Instituto de Física e Matemática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática



Dissertação

Homogeneização matemática de meios micro-heterogêneos com estrutura periódica

MARCOS PINHEIRO DE LIMA

Pelotas, 2016