

# UNIVERSIDADE CATÓLICA DE BRASÍLIA

PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO  
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

## Curso de Física

### OS ASPECTOS FÍSICOS E MATEMÁTICOS DO LANÇAMENTO DO FOGUETE DE GARRAFA PET

Autor: Marco Antonio Sodré Oliveira

Orientador: Prof. Dr. Paulo Eduardo de Brito

BRASÍLIA

2008

**MARCO ANTONIO SODRÉ OLIVEIRA**

**OS ASPECTOS FÍSICOS E MATEMÁTICOS DO LANÇAMENTO DO  
FOGUETE DE GARRAFA PET**

Trabalho de Conclusão de Curso  
submetido à Universidade Católica  
de Brasília para obtenção do Grau  
de Licenciado em Física.

Orientador: Dr. Paulo Eduardo de  
Brito

BRASÍLIA  
NOVEMBRO DE 2008

# OS ASPECTOS FÍSICOS E MATEMÁTICOS DO LANÇAMENTO DO FOGUETE DE GARRAFA PET

## RESUMO

Neste trabalho foram estudados os aspectos físicos e matemáticos do movimento do foguete de garrafa pet propulsado à água, e por meio da análise do seu lançamento, aplicou-se um modelo matemático consistente com o fenômeno observado. Para a obtenção dos dados foram realizados vários lançamentos com foguetes de pet sob diferentes condições iniciais. Com os dados coletados para cada foguete, calculou-se sua altura teórica. Os cálculos foram realizados com o auxílio do software Maple 7. O valor de referência para saber se a altura estava correta, foi a comparação desta com o valor da altura medida com o auxílio de um astrolábio. Comparando os valores obtidos, teóricos e experimentais, verificou-se a compatibilidade destes resultados. A análise do movimento também constituiu uma boa oportunidade para os estudos de equações diferenciais bem como a utilização dos métodos numéricos computacionais aplicados aos dados experimentais do lançamento do foguete.

**PALAVRAS-CHAVE:** Foguete, aerodinâmica, sistemas de massa variável, astrolábio e equação do foguete.

## 1. INTRODUÇÃO

A análise dos aspectos físicos e matemáticos do foguete de garrafa pet constitui um estudo bastante relevante do ponto de vista físico e matemático.

Fisicamente, este trabalho permite o estudo de um sistema de massa variável que está sob a ação da força de resistência do ar, situação pouco explorada no ensino médio e superior por tornar os cálculos mais complicados. Explora ainda vários conceitos físicos, por exemplo, trajetória, movimento, força, momento e energia.

Do ponto de vista matemático, observam-se aspectos importantes como o da matemática, como ferramenta para solução de problemas, a matemática como raciocínio, as conexões matemáticas, geometria, computação e estimativa.

Este trabalho pode desenvolver habilidades do processo científico como da observação, comunicação, medida e coleta de dados, inferência, previsão, construção de modelos, interpretação de dados, controle de variáveis, capacidade de definição operacional e investigação.

Pode contribuir ainda para o desenvolvimento de recursos, novas metodologias, participação do aluno no processo ensino-aprendizagem, contextualização, interdisciplinaridade, criatividade e interesse pelos temas espaciais.

A finalidade deste estudo não é ensinar a montar um disparador de foguete pet. Existe uma infinidade de orientações em relação à montagem do mesmo. O disparador montado neste trabalho baseou-se em uma orientação adquirida na internet no site <http://www.geocities.com/brasilfoguetes>.

Com o auxílio do disparador e vários foguetes de pet com aletas, realizou-se vários lançamentos para a coleta de dados. De posse desses resultados e das diferentes condições iniciais, aplicou-se um dos modelos matemáticos estudados para descrever o sistema em estudo.

Este trabalho se inicia com um breve histórico sobre a história dos foguetes, seus princípios e funcionamento. Em seguida, faz-se uma abordagem sobre aerodinâmica para entendermos os efeitos do ar sobre um corpo se deslocando neste meio fluido.

Seqüencialmente, tratamos de forma sucinta dos efeitos gravitacionais de corpos que se movem nas proximidades da Terra. Logo após, se define o que são os sistemas de massa variável e no tópico seguinte, mostrou-se o cálculo da velocidade de descarga da água expelida pelo foguete de pet. O item seguinte trata sobre a medida de alturas de objetos com utilização do astrolábio. No último tópico sobre os aspectos teóricos, foi feito o estudo de equações aplicadas ao movimento de um foguete.

Por fim, apresentamos os resultados das medidas das alturas, teórica e experimental, atingidas pelos foguetes fazendo-se a comparação dos valores verificando a compatibilidade dos resultados.

## **2. ASPECTOS TEÓRICOS**

### **2.1 ORIGENS DOS FOGUETES**

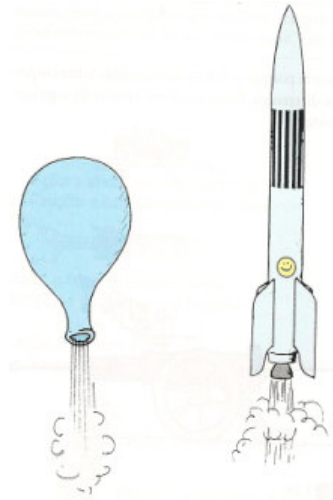
Os primeiros foguetes que surgiram na humanidade eram de tubos de bambu cheios de uma espécie de pólvora que eram utilizados em festividades religiosas na China. Os chineses foram os primeiros a experimentar tubos cheios de pólvora com arcos para fins militares. Nestes lançamentos acabaram descobrindo que os tubos contendo pólvora poderiam lançar-se com a impulsão dos gases liberados pela reação química. Nascia o primeiro foguete.

Os foguetes mais desenvolvidos que surgiram, conhecidos como mísseis balísticos, foram destinados para fins militares. Somente na transição do século XIX para o século XX, surgiram os primeiros cientistas que utilizaram os foguetes como forma de propulsor para veículos espaciais para o desenvolvimento da Astronomia.

#### **2.1.1 PROPULSÃO DOS FOGUETES**

O funcionamento de um foguete pode ser explicado utilizando um balão de ar. Uma vez cheio, o ar é liberado, o balão se desloca no sentido contrário ao da saída do ar.

Um foguete ao ser disparado para o espaço funciona exatamente como um balão. Isso ocorre devido aos foguetes funcionarem baseados na Terceira Lei de Newton, a lei da ação e reação. Essas forças são iguais em intensidade e direção, porém tem sentidos contrários.



**Figura 1:** Princípio do funcionamento de um balão e do foguete

**Fonte:** Livro Fundamentos de Física Conceitual - Paul G. Hewitt

Os foguetes consistem basicamente, em um projétil que leva combustível sólido ou líquido no seu interior. Esse combustível é descarregado continuamente na câmara de combustão e são expelidos para trás na abertura na traseira. Essa expulsão do combustível resulta no deslocamento do foguete para frente.

Para a propulsão de um foguete de pet são necessários três dispositivos básicos: o disparador, a bomba de ar com manômetro e o foguete de garrafa. A bomba de ar com manômetro é importante para se ter segurança em relação ao valor da pressão que está sendo colocada no interior da garrafa.



**Figura 2:** Disparador, bomba de ar com manômetro e o foguete de pet

Acoplado-se os três dispositivos acima, tem-se o resultado representado na figura abaixo:



**Figura 3:** Dispositivos acoplados pronto para o disparo

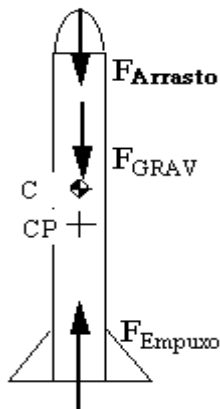
Com os dispositivos acoplados basta injetar com água aproximadamente 1/3 do volume da garrafa. A seguir, com a bomba, coloca-se ar no interior da garrafa a certa pressão estabelecida. Finalmente, aciona-se o dispositivo de disparo. A água é expelida impulsionando o foguete na direção oposta com grande velocidade.

### 2.1.2 CONTROLE E ESTABILIDADE DOS FOGUETES

A estabilidade de um foguete é a capacidade de manter sua trajetória. Depende de dois pontos importantes: o centro de massa e do centro de pressão.

O centro de pressão é definido como o ponto onde atua a resultante das forças aerodinâmicas, as quais o foguete está sujeito. A determinação do ponto de pressão depende do comprimento da ponta do foguete, do comprimento do foguete e das dimensões e formas das aletas.

O foguete manterá sua estabilidade e sua trajetória se o centro de pressão (CP) estiver abaixo do centro de massa (CM). O centro de massa deve ser localizado próximo a ponta do foguete; nessas condições, mesmo o foguete sofrendo turbulências que gerem forças laterais, terá sua trajetória estabilizada.



#### Figura 4: Localização do CM e CP do foguete

Fonte: [http://www.barney1.hpg.ig.com.br/Tubeira/P\\_tubeira.htm](http://www.barney1.hpg.ig.com.br/Tubeira/P_tubeira.htm)

As aletas laterais, também auxiliam no controle e estabilidade do foguete modificando a resistência do ar, fazendo com que o mesmo siga a trajetória projetada, ou em linha reta ou girando.

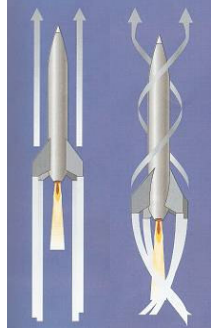


Figura 5: Foguete se deslocando em linha reta ou girando

Fonte: Livro Universo – Ciência e Tecnologia com Criatividade (CTC)

## 2.2 NOÇÕES DE AERODINÂMICA

Aerodinâmica é a ciência que estuda as forças que agem sobre os corpos que se deslocam em meios fluidos. Esta ciência se desenvolveu através de um grande número de observações em túneis de vento, o que resultou no conhecimento de formas mais apropriadas para o deslocamento de corpos em meios fluidos.

Contribuíram para o desenvolvimento da aerodinâmica, nomes como o de Leonardo da Vinci, um dos primeiros a estudar e projetar máquinas voadoras, e Isaac Newton, que procurou explicar como se comportavam as forças que atuavam num corpo se deslocando no meio fluido.

Atualmente, a aerodinâmica é de fundamental importância para a construção de aviões, edifícios, pontes, automóveis, submarinos, etc.

### 2.2.1 FORÇA DE RESISTÊNCIA FLUIDA

Um corpo se deslocando com velocidade  $v$  em um fluido sofre a ação de uma força que se opõe ao seu movimento. Esta força é denominada força de resistência fluida  $F_{rf}$  representada pela equação geral abaixo:

$$F_{rf} = k_n v^n, \text{ com } n = 1 \text{ ou } n = 2 \quad (1)$$

sendo  $k_n$  uma constante que depende da forma do corpo e também de propriedades físicas do fluido. O ar será o fluido de referência, para a aplicação dos modelos matemáticos que se seguem neste trabalho.

Para  $n=1$  a força de resistência do ar é considerada como uma força de resistência viscosa. A equação para a resistência viscosa do ar é:

$$n = 1 \Rightarrow F_{\text{ar}} = k_1 v \quad (2)$$

Esta equação vale para corpos com velocidades da ordem de 2m/s. Um exemplo é o movimento das gotículas de neblina no ar. Millikan utilizou esta equação em seu experimento para a determinação da carga elétrica elementar.

Para  $n=2$  a força de resistência do ar é considerada como uma força de resistência dinâmica, ou seja, a resistência do ar deixa de ser viscosa. A equação para a resistência dinâmica do ar é:

$$n = 2 \Rightarrow F_{\text{ar}} = k_2 v^2 \quad (3)$$

Esta equação vale para corpos com velocidades entre 24m/s e 330m/s. Para este intervalo de velocidade a constante  $k_2$  é igual a:

$$k_2 = \frac{1}{2} C_x \rho_{\text{ar}} A \quad (4)$$

Logo, a equação para a resistência dinâmica do ar assume a seguinte forma:

$$F_{\text{ar}} = \frac{1}{2} C_x \rho_{\text{ar}} A v^2 \quad (5)$$

sendo  $C_x$  o coeficiente de arraste do corpo;  $\rho_{\text{ar}}$  a densidade do ar;  $A$  a área voltada para o movimento e  $v$  a velocidade relativa do corpo. Cada um dos termos descritos anteriormente, influencia de forma significativa o movimento de um corpo que se desloca no ar.

#### **2.2.1.1 COEFICIENTE DE ARRASTE DE UM CORPO ( $C_x$ )**

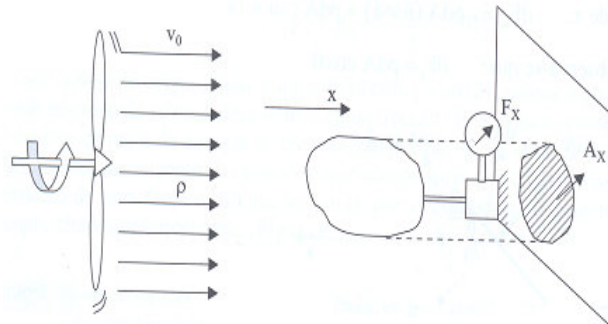
A forma de um corpo se deslocando no ar é caracterizada pelo coeficiente de arraste  $C_x$ . Quanto menor o  $C_x$ , melhor o deslocamento do corpo no ar. A resistência do ar muda conforme a forma dos corpos. Geralmente, ajustam-se os contornos do objeto para que o ar escoe de forma mais suave sobre ele.

#### **2.2.1.2 MEDIDA EXPERIMENTAL DE $C_x$**



A medida do coeficiente de arraste de um corpo é feita utilizando o túnel de vento, que é um aparelho que testa a ação do ar sobre o objeto com diferentes velocidades podendo se controlar ainda, a temperatura e a pressão do ar.

O esquema abaixo mostra de forma simplificada como se determina experimentalmente  $C_x$ .



**Figura 6:** Cálculo experimental de  $C_x$

Fonte: Livro Mecânica dos Fluidos - Franco Bruetti

Sendo  $\rho_{ar}$  a densidade do ar da fonte;  $v_0$  a velocidade relativa do ar ao corpo;  $A_x$  a área do corpo voltada para o movimento e  $F_x$  a força indicada pelo dinamômetro que o ar exerce sobre o objeto, então o coeficiente de arraste do corpo será:

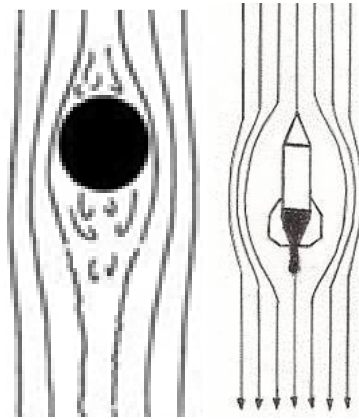
$$C_x = \frac{2F_x}{\rho_{ar} v_0^2 A_x} \quad (6)$$

### 2.2.1.3 MEDIDA ESTIMADA DE $C_x$

O coeficiente de arraste aerodinâmico de um corpo, também pode ser determinado por meio de valores de  $C_x$  tabelados para diversas formas de objetos.

Na figura abaixo vemos que as linhas de corrente de ar que desenham o foguete, são semelhantes às linhas aerodinâmicas da esfera. Com isso, podemos estimar o valor de  $C_x$  para o foguete de pet através do coeficiente de arraste tabelado para a esfera.

Para a esfera, o coeficiente de arraste aerodinâmico, com uma boa margem de precisão, é 0,11.



**Figura 7:** Linhas de corrente de ar da esfera e do foguete de pet

#### **2.2.1.4 ÁREA DO CORPO VOLTADA PARA O MOVIMENTO (A)**

A área do corpo (maior área) voltada para o movimento está relacionada com o seu tamanho. Um exemplo simples é se soltarmos uma folha de papel inteira e uma folha amassada, observa-se que a folha amassada chegará primeiro ao chão.

#### **2.2.1.5 DENSIDADE DO AR ( $\rho_{ar}$ )**

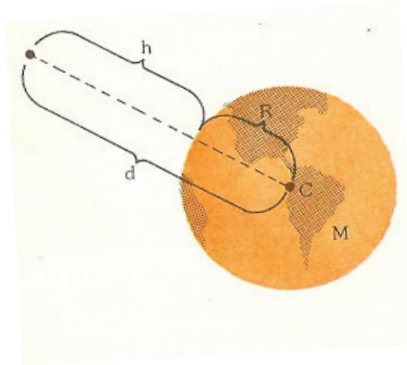
A densidade é outro fator importante a ser considerado no movimento de corpos em meios fluidos. Se o ar for muito denso em determinado local, este oferecerá maior resistência ao movimento do corpo. Fatores importantes que influenciam a densidade do ar são a temperatura, pressão, altitude e umidade do ar.

#### **2.2.1.6 VELOCIDADE RELATIVA (v)**

A força de resistência do ar também é influenciada pela velocidade relativa do corpo em relação ao fluido. Quanto maior a velocidade relativa, maior será a força de resistência do ar. Um experimento simples com a finalidade de se observar este fato, é colocar uma das mãos para fora de um carro em movimento. À medida que o veículo acelera, sente-se o aumento da força do ar sobre a mão.

### **2.3 A ACELERAÇÃO DA GRAVIDADE NAS PROXIMIDADES DA TERRA**

Observando a expressão  $g=GM/d^2$ , em que  $d=R+h$ , vemos que a intensidade da aceleração da gravidade varia com a altitude. Porém, até 50 milhas náuticas dentro da atmosfera terrestre essa variação não é importante.



**Figura 8:** Ação do efeito gravitacional sobre um objeto

Fonte: Livro Física Mecânica Vol. 1 - Robotella

Vamos considerar que o foguete na superfície da Terra esteja sujeito a uma força gravitacional  $F_{g_0}$  que pode ser calculada pela expressão:

$$F_{g_0} = G \frac{Mm}{R^2} \text{ e } F_{g_0} = mg_0 \Rightarrow g_0 = G \frac{M}{R^2}$$

sendo  $g_0$  a aceleração da gravidade na superfície da Terra;  $G$  a constante da gravitação universal;  $M$  a massa da Terra;  $m$  a massa do foguete e  $R$  o raio da Terra.

Agora em uma dada altitude em relação à superfície da Terra, o foguete estará sujeito a uma força gravitacional  $F_g$  que pode ser calculada pela seguinte expressão:

$$F_g = G \frac{Mm}{(R+h)^2} \text{ e } F_g = mg \Rightarrow g = G \frac{M}{(R+h)^2}$$

sendo  $g$  a aceleração da gravidade na altitude  $h$ ;  $G$  a constante da gravitação universal;  $M$  a massa da Terra;  $m$  a massa do foguete e  $R$  é o raio da Terra.

Comparando as expressões obtidas de  $g$  e  $g_0$  conclui-se que:

$$g_0 R^2 = g (R+h)^2 \Rightarrow g = g_0 \left( \frac{R}{R+h} \right)^2$$

Na expressão obtida acima, vamos considerar que o raio da Terra é muito maior se comparado com a altitude alcançada pelo foguete. Tal aproximação nos leva a concluir que podemos considerar a intensidade da aceleração da gravidade, em uma altitude  $h$  muito menor que o raio da Terra, aproximadamente igual a sua intensidade na superfície da Terra. Matematicamente,

$$R \gg h \Rightarrow g \simeq g_0 \quad (7)$$

É importante lembrar, que outros fatores também influenciam no valor da intensidade da aceleração da gravidade na superfície da Terra. A gravidade sofre influência do movimento de rotação da Terra, fato que pode ser constatado experimentalmente, medindo-se o valor da gravidade em função da latitude do lugar. Outro fator que influencia no efeito gravitacional é a morfologia local das rochas, fato comprovado por meio de estudos realizados em Geologia, com a utilização de técnicas de gravimetria. Por estes motivos, se utilizará para  $g_0$ , para fins de cálculos, o valor médio com a latitude variando de  $0^\circ$  até  $90^\circ$  que é de  $9,80622\text{m/s}^2$ , o qual aproximaremos para  $9,81\text{m/s}^2$ .

#### 2.4 SISTEMAS FÍSICOS DE MASSA VARIÁVEL

Pode se considerar que a maioria dos sistemas físicos que estudamos tem sua massa constante. No caso dos foguetes isso não acontece. Os foguetes são denominados sistemas de massa variável em razão da descarga contínua do seu combustível. A descarga do combustível faz com que o foguete seja impulsionado sob a ação de uma força contínua, em sentido contrário ao do deslocamento do combustível.

Vamos considerar um foguete se deslocando com uma velocidade de intensidade  $v$  em relação à superfície da Terra descarregando seu combustível a uma taxa constante  $R=|dm/dt|$ . Então a massa do foguete no instante  $t$  é:

$$R = \left| \frac{dm}{dt} \right| \Rightarrow = \int_{t_0}^t R dt \Rightarrow m(t) = m_0 - Rt \quad (8)$$

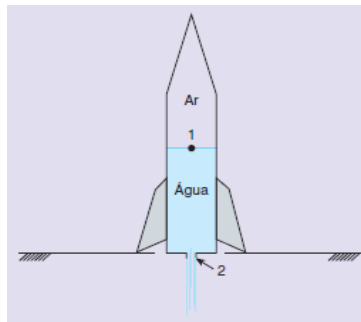
sendo  $m$  a massa do foguete num dado instante  $t$ ;  $m_0$  a massa inicial do foguete (massa de combustível + massa do foguete vazio) e  $R$  é taxa de descarga do combustível.

Se o foguete descarrega todo o seu combustível de massa  $m_a$  em um tempo  $t_a$  e sua massa depois de todo o combustível descarregado for  $m_f$ , então o tempo de descarga do combustível do foguete será dado por:

$$m_f = m_0 - R t_a \Rightarrow t_a = \frac{m_0 - m_f}{R} = \frac{m_a}{R} \quad (9)$$

## 2.5 VELOCIDADE DE DESCARGA DO COMBUSTÍVEL DE UM FOGUETE

Do ponto de vista termodinâmico, as partículas da água expelida pelo foguete apresentam uma certa distribuição de velocidades. Cada molécula de água tem velocidade diferente. Vamos considerar  $v_e$  o valor médio das velocidades destas partículas que são expelidas para fora do foguete.



**Figura 9:** Descarga da água do foguete de pet

Fonte: [http://www.moderna.com.br/moderna/didaticos/em/fisica/faces\\_old/Cap.18.pdf](http://www.moderna.com.br/moderna/didaticos/em/fisica/faces_old/Cap.18.pdf)

Para o cálculo aproximado de  $v_e$  utilizaremos a equação de Bernoulli. Sejam os pontos 1 e 2 da figura, considerou-se nestes pontos como sendo  $p_1=p$  a pressão do ar neste ponto;  $h_1=h$  a altura do líquido em relação a base da garrafa;  $v_1$  a velocidade de descida do ponto 1;  $p_2=p_0$  a pressão atmosférica;  $h_2=0$ ;  $v_2=v_e$  a velocidade de descarga da água;  $g$  a aceleração da gravidade e  $\mu$  a densidade da água.

Aplicando a equação de Bernoulli nos pontos 1 e 2 do foguete temos a seguinte expressão:

$$p_1 + \mu g h_1 + \frac{1}{2} \mu v_1^2 = p_2 + \mu g h_2 + \frac{1}{2} \mu v_e^2$$

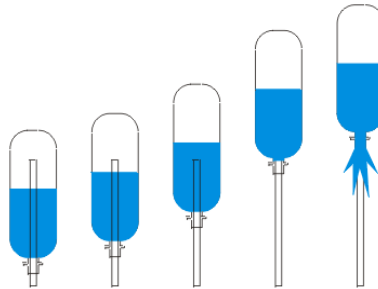
Agora considerando que a velocidade do ponto 2 é muito maior que a velocidade do ponto 1, vamos obter a seguinte expressão para o cálculo de  $v_e$ :

$$v_e^2 - v_1^2 \simeq v_e^2 \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\mu} - 2gh} \quad (10)$$

É importante observar que a equação acima calcula de forma estimada a velocidade de descarga do líquido do foguete. Pois observamos que a garrafa não é

perfeitamente cilíndrica como a da figura. Despreza-se ainda, a relação entre as áreas dos pontos 1 e 2 que não está sendo considerada no cálculo.

Outro fator importante é que durante o pequeno intervalo de tempo que o cano está no interior do foguete, não há praticamente descarga de água fazendo com que a pressão não varie muito no interior da garrafa. Isso implicará numa aceleração maior ao foguete.



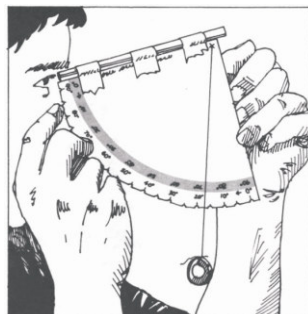
**Figura 10:** Cano no interior da garrafa implica numa maior velocidade

Fonte: <http://www.geocities.com/brasilfoguetes>

## 2.6 ASTROLÁBIO

Existem várias formas de se conhecer a altura de um objeto. Uma forma simples é a utilização do astrolábio. É um instrumento antigo utilizado para medir a altura em graus de objetos astronômicos.

Sua utilização é simples. Basta apontar o bastão fixado no astrolábio para o objeto e verificar a medida do ângulo que a linha irá indicar na graduação do transferidor.

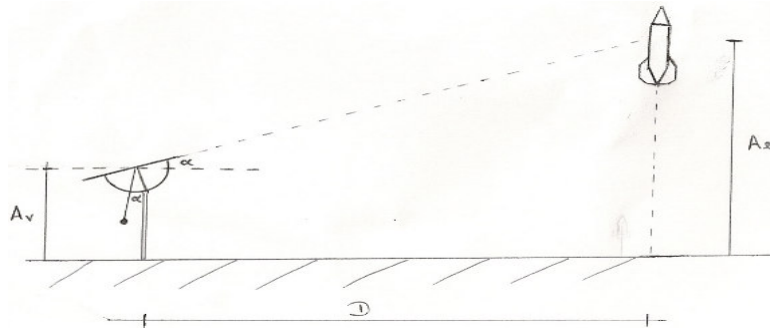


**Figura 11:** Utilização do astrolábio

Fonte: <http://www.oal.ul.pt/observatorio/vol12/n1/pagina4.html>

A construção de um de um astrolábio é simples. Basta fazer um pequeno furo na marcação  $0^{\circ}$  (zero graus) do transferidor e colocar um fio com uma massa.

Com o ângulo medido e a distância que se deu o ângulo de visão, basta utilizar as relações trigonométricas num triângulo retângulo para o cálculo da altura parcial, pois esta altura parcial deverá ser somada a altura do ângulo de visão do observador, para se obter a altura final do objeto.



**Figura 12:** Cálculo da altura de um objeto com o astrolábio

Na figura acima observamos que um foguete atingiu a altura  $A_e$  em relação ao solo sendo observado de uma distância  $D$  da base de lançamento sob um ângulo de visão  $\alpha$ , sendo altura do ângulo de visão  $A_v$  que compreende a distância dos olhos do observador até o chão. Com cálculos simples, podemos escrever que a altura  $A_e$  em função dos outros parâmetros é:

$$A_e = A_v + D \operatorname{tg} \alpha \quad (11)$$

## 2.7 A EQUAÇÃO GERAL DO FOGUETE

Vimos que a massa no instante  $t$ , de um foguete se deslocando com velocidade  $v$  em relação à Terra, descarregando sua massa a uma taxa  $R = |dm/dt|$  é:

$$m(t) = m_0 - Rt$$

sendo  $m_0$  sua massa inicial (massa do foguete vazio + massa de combustível) no tempo  $t=0$ .

O seu momento no instante  $t$  é:

$$p_i = mv$$

Logo após, no instante  $t + dt$ , a massa expelida pelo foguete será  $Rdt$ . Se a velocidade de descarga do combustível do foguete é  $v_e$ , sua velocidade em relação à Terra será  $v - v_e$  e o foguete terá massa  $m - Rdt$  e velocidade  $v + dv$ . Logo, o momento do sistema será:

$$p_f = (m - Rdt)(v + dv) + Rdt(v - v_e) = mv + mdv - vRdt - Rdt dv + vRdt - v_e Rdt$$

Na equação acima, o produto  $dt dv$  pode ser desprezado em comparação com os outros por se tratar de um produto de dois valores infinitesimais. O momento passa a ser:

$$p_f \simeq mv + mdv - v_e Rdt$$

Logo, a variação do momento é:

$$dp = p_f - p_i = mdv - v_e Rdt \Rightarrow \frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt} - R v_e$$

Como  $F_{ext} = dp/dt$  é a resultante das forças externas sobre o foguete, então a equação geral do foguete é:

$$m \frac{dv}{dt} = R v_e + F_{ext} \quad (12)$$

Na equação acima, a grandeza representada pelo produto da taxa de descarga do combustível  $R$  pela velocidade de descarga do combustível  $v_e$ , é definido como força de empuxo do foguete  $F_e$ . É a força responsável pelo deslocamento do foguete para cima.

$$F_e = R v_e \quad (13)$$

A equação geral pode assumir outras formas, dependendo das condições em que o foguete será lançado.

(a) Ausência de forças sobre o foguete, ou seja, o foguete estará parado em relação a um referencial inercial ou estará em movimento retilíneo uniforme;

$$m \frac{dv}{dt} = 0 \quad (14)$$

(b) O foguete estará sob ação de empuxo constante e livre da ação do efeito gravitacional e da força de resistência do ar;



$$m \frac{dv}{dt} = R v_e \quad (15)$$

(c) O foguete estará sob as ações do empuxo e da ação do campo gravitacional, e livre da força de resistência do ar;

$$m \frac{dv}{dt} = R v_e - mg \quad (16)$$

(d) O foguete estará em baixa velocidade sob a ação do empuxo, da gravidade e da força de arrasto aerodinâmico;

$$m \frac{dv}{dt} = R v_e - mg - k_1 v \quad (17)$$

(d) O foguete estará em alta velocidade sob a ação do empuxo, da gravidade e da força de arrasto aerodinâmico;

$$m \frac{dv}{dt} = R v_e - mg - k_2 v^2 \quad (18)$$

### 3. PROCEDIMENTOS

Para a realização do experimento são necessários os seguintes materiais: disparador de foguete pet; bomba de ar com manômetro; 15 (quinze) foguetes de pet com aletas; balança; uma trena de 50m; uma régua de 30cm; um astrolábio; uma câmera de vídeo e óculos de proteção.

Inicialmente colocou-se o disparador de foguete em um ponto fixo. A seguir, colocou-se um observador com um astrolábio a uma determinada distância do dispositivo de disparo. Um segundo observador fixará uma câmera de filmagem, a uma distância de maneira que seja possível filmar o movimento do foguete até que se esgote toda a água. Um último observador fará a marcação do instante em que o foguete atingiu sua altura máxima.

Depois de preparado o local do experimento, faz-se a medida da massa do foguete vazio  $m_f$ . Coloca-se uma quantidade de água qualquer no foguete e faz-se a medida da massa do conjunto água-foguete  $m_f$ . Na seqüência, coloca-se o foguete no disparador e injeta-se ar no interior da garrafa até uma pressão  $p$  com a qual o foguete será lançado. Faz-se a medida da altura  $h$  da coluna de água sob pressão no foguete.

Realizados esses procedimentos, efetua-se o disparo do foguete, que parte de uma altura  $A_p$  em relação ao solo. O observador com a câmera, realiza a filmagem do percurso do foguete até que se escoe toda água. O vídeo será útil na determinação do tempo  $t_a$  que a água levou para ser expelida. Um segundo observador a uma distância  $Dob$  com o astrolábio faz a medida do ângulo  $\alpha$  quando o foguete atingir a altura máxima. A altura do ângulo de visão  $A_v$  do ângulo foi considerada como sendo a altura do solo até os olhos do observador. O observador com o cronômetro fez a medida do tempo  $t_e$  quando o foguete estiver na sua altura máxima.

#### 4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para a coleta de dados, foram realizados sucessivos lançamentos com foguetes de diferentes massas, pressão e formatos. Necessitou-se de vários dias de experimento, pois com o ar turbulento, os resultados calculados não eram coerentes. Os melhores resultados foram obtidos nos dias em que o ar estava aparentemente parado e os foguetes subiram em linha reta. Dos vários lançamentos consideraram-se os dados de oitos foguetes os quais foram denominados de F1, F2, F3, F4, F5, F6, F7 e F8.

Antes do lançamento de cada foguete coletaram-se os seguintes dados iniciais:

**Tabela 1:** Dados coletados para cada foguete antes do lançamento

	$m_f$ kg	$m_i$ kg	$p$ N/m <sup>2</sup> $\times 10^5$	$p_0$ N/m <sup>2</sup> $\times 10^5$	$h$ m	$\mu_{\text{água}}$ kg/m <sup>3</sup>	$g$ m/s <sup>2</sup>	$Dob$ m	$Av$ m	$Ap$ m
F1	0.275	1.04	4.5	1	0.15	$10^3$	9.81	50	1.69	0.44
F2	0.150	0.550	3.5	1	0.11	$10^3$	9.81	50	1.69	0.44
F3	0.250	0.610	5.5	1	0.12	$10^3$	9.81	50	1.69	0.44
F4	0.170	0.690	3.5	1	0.13	$10^3$	9.81	50	1.69	0.44
F5	0.190	0.750	4.0	1	0.15	$10^3$	9.81	50	1.69	0.44
F6	0.330	1.03	5.5	1	0.18	$10^3$	9.81	50	1.69	0.44
F7	0.194	0.766	3.5	1	0.12	$10^3$	9.81	50	1.69	0.44
F8	0.430	1.04	6.5	1	0.17	$10^3$	9.81	50	1.69	0.44

sendo  $m_i$  a massa inicial (massa de água + massa do foguete vazio);  $m_f$  a massa do foguete vazio;  $p$  a pressão do ar no interior da garrafa;  $p_0$  a pressão atmosférica;  $h$  a altura da coluna de água no interior da garrafa;  $\mu_{\text{água}}$  a densidade da água;  $g$  a gravidade;  $Dob$  a distância do observador com o astrolábio à base de lançamento do foguete;  $Av$  a altura do ângulo de visão e  $Ap$  a altura de partida do foguete em relação ao solo.

Depois de lançado cada foguete, faz-se a medida do ângulo na sua altura máxima e o do tempo gasto para atingir esta altura. Com a filmagem do experimento,

utiliza-se o software Windows Movie Maker (editor de vídeos) para visualizar o movimento do foguete em quadros e se obter o tempo gasto para o escoamento total da água do foguete. Pois, este tempo é muito difícil de medir com um cronômetro. Com estes dados coletados, montou-se a tabela abaixo:

**Tabela 2:** Dados obtidos para cada foguete após o lançamento

	$\alpha$ °	$t_e$ s	$t_a$ s
F1	45	3.2	0.5
F2	38	2.9	0.4
F3	35	2.7	0.3
F4	43	3.1	0.4
F5	47	3.3	0.4
F6	45.5	3.2	0.2
F7	42	3	0.4
F8	37.5	2.9	0.6

sendo  $\alpha$  o ângulo na astrolábio na altura máxima do foguete;  $t_e$  o tempo em que o foguete atingiu a altura máxima e  $t_a$  o tempo que a água levou para ser toda expelida do foguete. Com os dados coletados nas tabelas anteriormente, calculou-se, para cada foguete lançado a massa de água  $m_a$ , a taxa de descarga de água do foguete  $R$  e a velocidade de descarga do líquido  $v_e$ . Com estes resultados montou-se a tabela abaixo:

	$C_x$	$\rho_{ar}$ kg/m <sup>3</sup>	$\varnothing$ m	$A$ m <sup>2</sup>	$k_2$ Ns <sup>2</sup> /m <sup>2</sup>
--	-------	----------------------------------	--------------------	-----------------------	--

**Tabela 3:** Dados obtidos

	$m_a$ kg	$R$ kg/s	$v_e$ m/s
F1	0.765	1.5	24.5
F2	0.400	1.0	22.4
F3	0.360	1.2	30.0
F4	0.520	1.3	22.4
F5	0.560	1.4	24.5
F6	0.700	3.5	28.3
F7	0.572	1.4	22.4
F8	0.610	1.0	33.2

de  $m_a$ ,  $R$  e  $v_e$

Com a medida estimada do coeficiente de arraste e do diâmetro de cada foguete, obtiveram-se os valores da constante  $k_2$  conforme a tabela:

**Tabela 4:** Valores de  $k_2$

				$\times 10^{-3}$	$\times 10^{-4}$
F1	0.11	1.29	0.10	7.9	5.6
F2	0.11	1.29	0.10	7.9	5.6
F3	0.11	1.29	0.10	7.9	5.6
F4	0.11	1.29	0.10	7.9	5.6
F5	0.11	1.29	0.10	7.9	5.6
F6	0.11	1.29	0.09	6.4	4.5
F7	0.11	1.29	0.10	7.9	5.6
F8	0.11	1.29	0.10	7.9	5.6

sendo  $C_x$  o coeficiente de arraste de cada foguete;  $\rho_{ar}$  a densidade do ar;  $\phi$  o diâmetro da maior área da garrafa e  $A$  a maior área voltada para o movimento.

Lançamentos preliminares mostraram que os foguetes se deslocavam com altas velocidades. Por esse motivo, utilizou-se a equação (18) aplicada a corpos em alta velocidade sob a ação do empuxo, da gravidade e da força de arrasto aerodinâmico variando com o quadrado da velocidade.

Com o auxílio do Maple 7 (software para computação algébrica), aplicou-se os dados coletados e calculados das tabelas anteriores na equação (18) e obtivemos os seguintes resultados para a altura teórica ( $A_t$ ) e altura experimental ( $A_e$ ) com os respectivos erros relativos entre estes valores obtidos:

**Tabela 5:** Altura teórica, experimental e erro relativo

	$A_t$ m	$A_e$ m	Erro relativo (%)
F1	48.1	51.2	6
F2	38.8	40.3	3.5
F3	34.0	36.2	6.2
F4	45.2	47.8	5.4
F5	52.4	54.8	4.4
F6	50.1	52.1	3.7
F7	43.4	46.2	6.1
F8	38.5	39.6	2.7

Neste experimento, o valor de referência para verificar a compatibilidade da altura alcançada pelo foguete, obtida com o modelo matemático, foram as alturas ( $A_e$ ) coletadas com o astrolábio. Comparando as alturas da tabela, observa-se que o erro relativo entre as medidas apresentam uma diferença pouco significativa, considerando

uma margem de erro de 10%, haja vista que o experimento apresenta erros acumulados em função de medidas e cálculos realizados de forma estimada.

As medidas e cálculos que podem ter provocado os erros mais significativos são as de  $\rho_{ar}$ ,  $C_x$ ,  $v_e$ ,  $t_a$ ,  $t_e$ . As próprias medidas das alturas com o astrolábio ( $A_e$ ) contêm erros. O próprio modelo matemático aplicado aos dados tem suas limitações. A equação aplicada é válida para o foguete enquanto ele estiver variando sua massa e com alta velocidade. Pois, a partir de determinado instante, o qual não se sabe precisar, a velocidade do foguete diminui passando a valer outra lei para o movimento do foguete com baixas velocidades. Nos cálculos, foi considerado desprezível o impulso adicional realizado pela saída de ar após o escoamento do líquido até a igualdade das pressões internas e externas.

O foguete F5 foi o que atingiu a maior altura, 52,4m obtido com o modelo matemático, e 54,8m com o astrolábio. O menor erro cometido em relação às medidas e cálculos foi para o foguete F8, 2,7%.

É importante observar que a equação aplicada ao movimento do foguete, fica reduzida do termo  $Rv_e$  (empuxo) após todo o combustível líquido ser consumido. Ou seja, o sistema passa a ser considerado com massa constante. Por isso, os cálculos foram realizados em duas etapas: a primeira etapa considerou o foguete como um sistema de massa variável e a segunda como um sistema de massa constante. Um exemplo de como foram realizados os cálculos para obtenção das alturas teóricas e experimentais se encontra no anexo deste trabalho.

## 5. CONCLUSÃO

O presente estudo analisou e abordou os aspectos físicos e matemáticos do lançamento de um foguete de garrafa de pet, onde se aplicou ao movimento deste foguete o modelo matemático válido para deslocamentos rápidos no ar.

Para tal, realizamos vários lançamentos sob diferentes condições iniciais. Com os dados coletados nos lançamentos, calculamos, com o auxílio do Maple 7, sua altura teórica e comparamos com a altura experimental medida com o astrolábio. Os resultados foram bastante satisfatórios em relação às certas condições, as quais não tínhamos o controle, por exemplo, o ar turbulento e suas características.

Vimos que os aspectos físicos e matemáticos do foguete têm uma gama de conhecimentos que podem alcançar importantes objetivos educacionais, destacando-se a comparação dos resultados para modelos teóricos e verificando ainda os limites de validade das equações.

A utilização da informática nos cálculos constituiu uma boa oportunidade para o uso de tecnologias modernas que devem ser exploradas para fins didáticos. Entendemos que o trabalho aqui abordado, possa ser utilizado como ponto de partida para outros estudos e experiências almejando resultados melhores.

## 6. AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por sua presença insigne em toda minha trajetória de lutas, conquistas, decisões e alegrias.

Agradeço a meus pais, que sempre contribuíram para o meu engrandecimento pessoal.

Agradeço à minha querida Cristiane, inspiração para meu futuro e incentivadora para minhas conquistas.

Em especial, agradeço ao Professor Dr. Paulo Brito, que acreditou no meu trabalho, orientando-me e incentivando-me, sempre com muita presteza.

Agradeço ainda, aos Professores Dr. Sérgio, Dr. Armando, Dr. Benício e Dr. Rui Seimetz, pela ajuda tão enriquecedora.

Finalizo meus agradecimentos, citando meus amigos Livia Simão, Marco Aurélio, Alexandre Ângelo e César Roldão, por me auxiliarem na concretização do meu trabalho.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física – Volume 1 – Mecânica**. 6ª edição, LTC Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 2001.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; KRANE, Kenneth S. **Física 1**. 4ª edição, LTC Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 1992.

CHAVES, Alaor; **Física – Volume 1 – Mecânica**. 1ª edição, Reichmann & Affonso Editores, 2001.

OREAR, Jay; **Física**. 1ª edição, LTC Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 1977.

MACHADO, Kleber Daum. **Equações diferenciais aplicadas à Física**. 3ª edição. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2001.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R.. **Equações diferenciais - volume 1**. 3ª edição. Makron Books, 2001.

WIKIPÉDIA. **Foguete espacial**. Disponível em <<http://pt.wikipedia.org/wiki/Foguete>> Acesso em: 08 abr. 2006.

DIVISÃO DE SISTEMAS AERONÁUTICOS - ASA. **Aerodinâmica & Túneis de Vento**. Disponível em <<http://www.iae.cta.br/asa/asa-l/asalaerodinamica.html>> Acesso em: 08 abr. 2006.

KSC/NASA. **Uma Breve História dos Foguetes**. Disponível em <<http://www.solarviews.com/portug/rocket.htm>> Acesso em: 14 mar. 2006.

CAMARGO, Jeremias. **Foguetes à água**. Disponível em <<http://www.foguetesaagua.hpg.ig.com.br/>> Acesso em: 14 mar. 2006.

ARAUJO, Naelton Mendes. **História da Astronáutica**. Disponível em <<http://www.geocities.com/naelton/slide.htm>> Acesso em: 14 mar. 2006.

CHAVES, Alaor Silvério. **Física - Mecânica** – Volume 1. Rio de Janeiro: Reichmann e Affonso, 2001.

GRAF, Grupo de reelaboração do ensino de física. **Física 1- Mecânica**. 6. ed. São Paulo: EDUSP -Editora da Universidade de São Paulo, 2000.

X V I SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE FÍSICA. **Medida da Aceleração da Gravidade**. Disponível em <<http://www.sbf1.sbfisica.org.br/eventos/snef/xvi/cd/resumos/T0297-1.pdf>> Acesso em: 23 nov. 2008.

PARANÁ, Djalma Nunes da Silva. **Física, vol. único Mecânica**. 1. ed. São Paulo: Ática, 1993.

NUSSENZVEIG, Herch Moisés. **Curso de Física Básica - Mecânica**. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1999.

BRUNETTI, Franco. **Mecânica dos Fluidos**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2005.

ROBORTELLA, Campos. **Física - Mecânica** – Volume 1. 7. Ed São Paulo: Ática, 1988.

TIPLER, Paul; **Física – Volume 1; mecânica, oscilações e ondas, termodinâmica**. 4ª edição, LTC Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 2000.

HEWITT, Paul G. **Fundamentos de Física Conceitual**. Porto Alegre: Bookman, 2009. 440 p.; 28cm.

Centro de Pesquisa e Desenvolvimento da Sangari Brasil. **Universo**. 10. ed. São Paulo: Sangari Brasil, 2007. CTC – Ciência e Tecnologia com Criatividade.

TORRES, Carlos *et al.* **Física: Ciência e Tecnologia: Volume Único**. São Paulo: Moderna, 2001.





# **ANEXOS**

# **Cálculo da altura teórica e experimental: exemplo dos cálculos realizados para um fogete**

**Obs.: os demais foguetes tiveram seus dados calculados conforme os cálculos realizados para F1.**

## **Fogete F1: Cálculo da altura teórica e experimental**

**Dados:**

**massa inicial (massa de água + massa do fogete vazio)  $m_i=1.04\text{kg}$**

**massa de água  $m_a=0.765\text{kg}$**

**tempo de escoamento da água  $t_a=0.5\text{s}$**

**densidade da água  $\mu=10^3\text{kg/m}^3$**

**pressão do ar no interior da garrafa  $p=4.5 \times 10^5\text{N/m}^2$**

**pressão atmosférica  $p_0=10^5 \text{N/m}^2$**

**gravidade  $g=9.81\text{m/s}^2$**

altura da coluna de água no interior da garrafa  $h=0.15\text{m}$

coeficiente de arrasto aerodinâmico  $C_x=0.11$

densidade do ar  $\rho=1.29\text{kg/m}^3$

$\pi = 3.141592654$

diâmetro da garrafa voltado para o movimento  $\phi=0.1\text{m}$

altura de partida do foguete relação ao solo  $A_p=0.44\text{m}$

distância do observador com o astrolábio à base de lançamento do foguete  $D_{ob}=50\text{m}$

ângulo medido no astrolábio na altura máxima do foguete  $\alpha=45\text{graus}$

altura de visada do ângulo do ângulo na altura máxima  $A_v=1.69\text{m}$

tempo para atingir a altura máxima  $t_e=3.2\text{s}$

>

$m_i:=1.04; m_a:=0.765; t_a:=0.5; \mu:=1000; p:=4e5; p_0:=1e5; g:=9.81;$   
 $h:=0.15; C_x:=0.11; \rho:=1.29; \phi:=0.1; A_p:=0.44; D_{ob}:=50; \alpha:=45; A_v:=1.69;$

$m_i := 1.04$

$m_a := .765$

$t_a := .5$

$\mu := 1000$

$p := 400000.$

$p_0 := 100000.$

$g := 9.81$

$h := .15$

$C_x := .11$

$\rho := 1.29$

$\phi := .1$

$A_p := .44$

$D_{ob} := 50$

$\alpha := 45$

$A_v := 1.69$

**Massa no instante t (m)**

>  $m:=m_i-R*t;$

$m := 1.04 - R t$

**Taxa de descarga da água (R)**

>  $R:=m_a/t_a;$

$R := 1.530000000$

**Velocidade de descarga da água (ve)**

>  $ve:=\text{sqrt}(2/\mu*(p-p_0)+2*g*h);$

$ve := 24.55489768$

**Área da garrafa voltada para o movimento (A)**

```
> A:=evalf(Pi) * (phi^2) / 4;
A := .007853981635
```

### Constante (k2)

```
> k:=0.5*Cx*rho*A;
k := .0005572399970
```

### Cálculo da altura para o intervalo de 0s a 0.5s - Sistema de massa variável

```
> EDO1:=diff(x(t), t$2) = (R*ve/m) - (m*g/m) -
k*(diff(x(t), t)**2);
EDO1 :=
```

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} x(t) = 37.56899345 \frac{1}{1.04 - 1.530000000 t} - 9.81 - .0005572399970 \left( \frac{\partial}{\partial t} x(t) \right)^2$$

```
> inivals:=x(0)=0, D(x)(0)=0.0;
> funcs:={x(t)};
> soluaprox:= dsolve({EDO1, inivals}, funcs, type=numeric,
output=procedurelist);
soluaprox := proc(rkf45_x) ... end proc
> sol1:=soluaprox(0.5);
sol1 := [ t = .5, x(t) = 5.17592104971494126, \frac{\partial}{\partial t} x(t) = 27.7119667089116106 ]
```

### Cálculo da altura para o intervalo de 0.5s a 3.2s - Sistema de massa constante

```
> x0:=rhs(sol1[2]);
x0 := 5.17592104971494126
> v0:=rhs(sol1[3]);
v0 := 27.7119667089116106
```

### Massa do foguete vazio (mf)

```
> mf:=mi-ma;
mf := .275
```

```
> EDO2:=diff(x(t), t$2) = -(mf*g/mf) - k*(diff(x(t), t)**2);
```

$$EDO2 := \frac{\partial^2}{\partial t^2} x(t) = -9.81 - .0005572399970 \left( \frac{\partial}{\partial t} x(t) \right)^2$$

```
> inivals:=x(0)=x0, D(x)(0)=v0;
inivals := x(0) = 5.17592104971494126 , D(x)(0) = 27.7119667089116106
```

```
> funcs:={x(t)};
funcs := { x(t) }
```

```
> soluaprox:=
dsolve({EDO2, inivals}, funcs, type=numeric, output=procedureli
st);
soluaprox := proc(rkf45_x) ... end proc
```

```
> sol2:=soluaprox(2.7);
```

$$\text{sol2} := \left[ t = 2.7, x(t) = 43.4522837843977214, \frac{\partial}{\partial t} x(t) = .832253738051589309 \right]$$

#### Altura teórica do foguete (At)

```
> At := rhs(sol1[2]) + rhs(sol2[2]) - Ap;  
At := 48.18820483
```

#### Altura experimental do foguete (Ae)

```
> Ae := Dob * tan(alpha * 3.141592654 / 180) + (Av - Ap) ;  
Ae := 51.25000000
```

#### Erro relativo (E)

```
> E := (Ae - At) / Ae * 100 ;  
E := 5.974234478
```