UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
Instituto de Física e Matemática
Programa de Pós-Graduação em Física

Dissertação

Modelagem Numérica de Inicialização em Plasmas de Tokamak

Luís Felipe Eslabão Maescki

Pelotas, 2025

Luís Felipe Eslabão Maescki

Modelagem Numérica de Inicialização em Plasmas de Tokamak

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Joel Pavan

Pelotas, 2025

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas
Catalogação da Publicação

M186m Maescki, Luís Felipe Eslabão

Modelagem numérica de inicialização em Plasmas de Tokamak [recurso eletrônico] / Luís Felipe Eslabão Maescki ; Joel Pavan, orientador. — Pelotas, 2025.
65 f. : il.

Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Física, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2025.

1. Plasma. 2. Hidrodinâmica. 3. Fusão Nuclear. 4. Tokamak. I. Pavan, Joel, orient. II. Título.

CDD 539.7

Elaborada por Gabriela Machado Lopes CRB: 10/1842

Luís Felipe Eslabão Maescki

Modelagem Numérica de Inicialização em Plasmas de Tokamak

Dissertação aprovada, como requisito parcial, para obtenção do grau de Mestre em Física, Programa de Pós-Graduação em Física, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas.

Data da Defesa: 13 de março de 2025

Banca Examinadora:

gov.br Documento assinado digitalmente
JOEL PAVAN
Data: 27/03/2025 11:37:35-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Joel Pavan (orientador)
Doutor em Ciências pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

gov.br Documento assinado digitalmente
RUDI GAELZER
Data: 30/03/2025 16:24:02-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Rudi Gaelzer
Doutor em Ciências pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

gov.br Documento assinado digitalmente
JOSE RAFAEL BORDIN
Data: 27/03/2025 12:33:32-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. José Rafael Bordin
Doutor em Ciências pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

gov.br Documento assinado digitalmente
RAFAEL CAVAGNOLI
Data: 28/03/2025 17:32:17-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Rafael Cavagnoli
Doutor em Física pela Universidade Federal de Santa Catarina.

RESUMO

MAESCKI, Luís Felipe Eslabão. **Modelagem Numérica de Inicialização em Plasmas de Tokamak**. Orientador: Joel Pavan. 2025. 65 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2025.

Neste trabalho usamos a teoria hidrodinâmica, na qual tratamos o estado de plasma como um fluido, para modelar a inicialização de plasma em um Tokamak, onde um gás neutro é ionizado e se torna um plasma. O Tokamak é até o momento o dispositivo mais promissor e testado para a obtenção da fusão termonuclear controlada, que tem potencial para se tornar uma fonte de energia limpa, renovável e praticamente inesgotável. O processo de inicialização do plasma dentro da câmara de vácuo de um Tokamak é chamado de plasma *start-up*, e pode ser dividido em três fases : a fase de avalanche ou *breakdown*, a fase de queima de impurezas ou *burn-through* e a fase do estabelecimento da corrente de plasma ou *ramp-up*. Com uma quantidade de elétrons inicial residual, foi possível simular o disparo durante as três fases da inicialização e obter o comportamento de quantidades importantes como corrente, densidade e pressão, e com isso compreender melhor os mecanismos do processo de *start-up*, o que pode ajudar a evitar falhas durante essa fase do disparo.

Palavras-chave: plasma; hidrodinâmica; fusão nuclear; tokamak.

ABSTRACT

MAESCKI, Luís Felipe Eslabão. **Numerical Modeling of Initiation in Tokamak Plasmas**. Advisor: Joel Pavan. 2025. 65 f. Thesis (Masters in) – , Federal University of Pelotas, Pelotas, 2025.

In this work we use the hydrodynamic theory, where we treat the plasma state as a fluid, in order to model plasma initiation in a Tokamak where a neutral gas is ionized and becomes a plasma.The Tokamak is until now the the most promising and tested approach for obtaining the controlled thermonuclear fusion that has the potential of becoming a practically inexhaustible source of clean and renewable energy. The process of plasma initiation inside a Tokamak vacuum chamber is called plasma start-up and can be divided in three phases: the avalanche or breakdown phase, the burn of impurities or burn-through and the established plasma current or ramp-up. With a residual initial amount of electrons it was possible to evolve the shot through its three initial phases while obtaining the behavior of important parameters such as current, density and pressure, so to have a better understandment of the underlying mechanisms of the start-up process and help to prevent failures during this phase of the shot.

Keywords: plasma; hydrodynamics; nuclear fusion; tokamak.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Aumento da população global entre 1700-2100. 10
Figura 2 Matriz energética mundial no ano de 2021. 11
Figura 3 Fusão dos isótopos do Hidrogênio, Deutério (D) e Trítio (T) 12
Figura 4 Componentes típicos de um Tokamak. 13
Figura 5 Ilustração da configuração geométrica de um Tokamak típico. . . . 13
Figura 6 O comportamento da corrente no solenoide central e da corrente de plasma durante um disparo completo. 14
Figura 7 Evolução da corrente de plasma ($\mathbf{i}_p$), emissão de radiação de linha (D_α) e temperatura dos elétron (T_e), durante a inicialização do plasma. 15
Figura 8 Ilustração do mecanismo de avalanche em uma descarga de Townsend acontecendo em um tubo catódico. 18
Figura 9 Ilustração mostrando a criação da tensão de loop e o encontro das linhas de campo com as paredes da câmara. 19
Figura 10 Ilustração para visualizarmos a definição do comprimento efetivo, L_{ef}. 20
Figura 11 Gráfico mostrando os valores de campo elétrico mínimos para obtenção de uma avalanche no gás Deutério, levando em conta a dependência da pressão e do comprimento efetivo. 21
Figura 12 O Tokamak *Chauffage Alfvén Brésilien* (TCABR) no Laboratório de Física de Plasmas da Universidade de São Paulo. 33
Figura 13 Comportamento da corrente de plasma em condições ideais. 33
Figura 14 Comportamento da corrente durante o disparo 28700 no Tokamak TCABR. 34
Figura 15 Comportamento da tensão de loop durante o disparo 28700 no Tokamak TCABR. 34
Figura 16 Esquematização do método de Euler para integrar numericamente uma equação diferencial. 38
Figura 17 Evolução temporal da corrente total durante a inicialização de plasma na direção toroidal. 41
Figura 18 Evolução temporal da densidade total de elétrons em relação à de partículas neutras, normalizadas pela densidade inicial. 42
Figura 19 Evolução temporal da pressão exercida pelas partículas neutras do gás. 42
Figura 20 Evolução temporal do Coeficiente de Townsend α_T. 43
Figura 21 Evolução espacial da densidade de corrente toroidal na seção transversal do reator. 43

Figura 22 Evolução temporal da densidade de corrente toroidal no centro do reator. 44
Figura 23 Evolução espacial da densidade de elétrons na seção reta do reator. 44
Figura 24 Evolução temporal da densidade de elétrons e da densidade de partículas neutras, ambas normalizadas pela densidade inicial registradas no centro do reator. 45
Figura 25 O comprimento de conexão efetivo das linhas de campo magnético e sua dependência em R. 46
Figura 26 Evolução espacial do coeficiente de Townsend. 46
Figura 27 Evolução do gradiente de pressão durante o início do processo de inicialização. 47
Figura 28 A direção da Força magnética $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ atuando sobre as partículas do plasma. 48
Figura 29 Evolução dos termos envolvendo o operador ∇ na equação (87). . . 49
Figura 30 Evolução dos termos envolvendo o operador ∇ da equação (88). . . 50
Figura 31 Evolução dos termos envolvendo o operador ∇ da equação (89). . . 51
Figura 32 Evolução dos termos envolvendo o operador ∇ da equação (90). . . 52

Figura 33 Em $a)$ temos a ionização líquida em relação à coordenada R e em $b)$ a evolução da corrente na direção toroidal, usando um parâmetro $E_0 = 1$V. 62
Figura 34 Em $a)$ temos a ionização líquida em relação à coordenada R e em $b)$ a evolução da corrente na direção toroidal, usando um parâmetro $E_0 = 10$V. 63
Figura 35 Em $a)$ temos a ionização líquida em relação à coordenada R e em $b)$ a evolução da corrente na direção toroidal, usando um parâmetro $E_0 = 10^2$V. 64
Figura 36 Em $a)$ temos a ionização líquida em relação à coordenada R e em $b)$ a evolução da corrente na direção toroidal, usando um parâmetro $E_0 = 10^3$V. 65

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 10

2 A FÍSICA DO PROCESSO DE *BREAKDOWN* 17
2.1 O primeiro Coeficiente de Townsend 17
2.2 O *breakdown* em Tokamaks 18

3 O ESCOPO DA TEORIA DE FLUIDOS 22
3.1 A Função de Distribuição de Probabilidades 22
3.2 A Densidade 22
3.3 A Velocidade Média 23
3.4 A Equação de Boltzmann na ausência de colisões 23
3.5 A Equação de Boltzmann na presença de colisões 24
3.6 As Equações Macroscópicas de Transporte 25
3.7 A equação de conservação de massa 26
3.8 A equação de conservação de momento 26
3.9 A equação de conservação de energia 28

4 MODELANDO O PROCESSO DE INICIALIZAÇÃO USANDO UM MODELO DE DOIS FLUIDOS 30
4.1 A implementação 34
4.2 O Esquema Numérico 37
4.3 Algumas considerações 40

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO 41
5.1 Evolução temporal das principais quantidades do plasma 41
5.2 Certas nuances matemáticas. 48

6 CONCLUSÃO 53

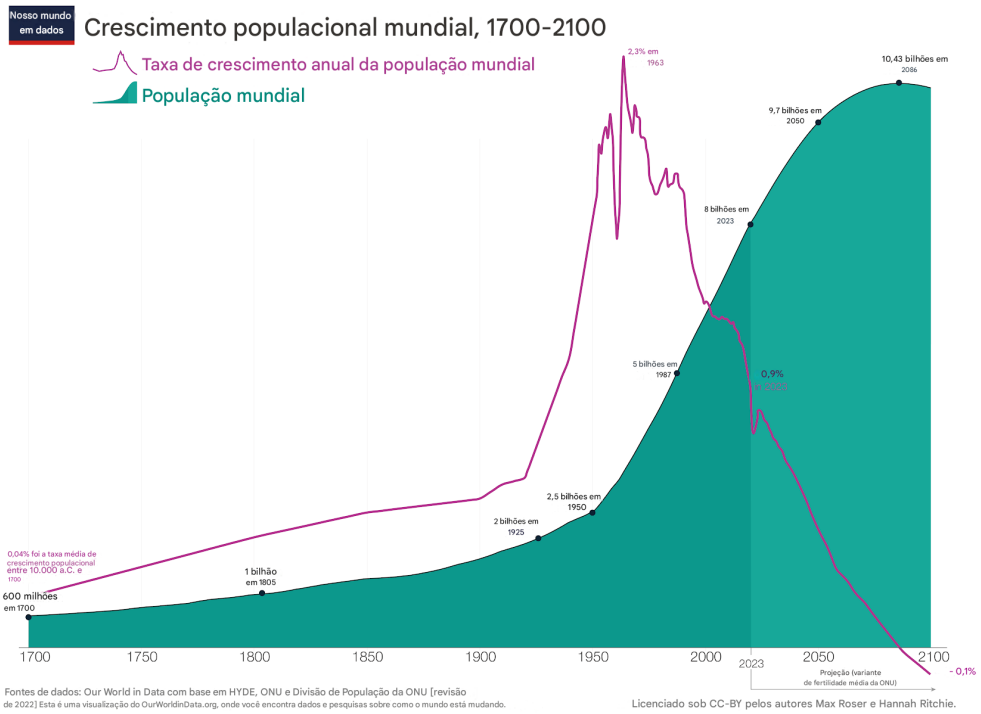
REFERÊNCIAS 55

APÊNDICE A RESULTADOS EXTRAS 61

1 INTRODUÇÃO

A energia tem um papel fundamental no desenvolvimento da civilização humana, melhorando a qualidade de vida ao possibilitar o uso de máquinas para tarefas pesadas e afazeres domésticos (Smil, 2017). A melhora na qualidade de vida possibilita o aumento populacional, de forma que a população mundial mais do que quadruplicou nos últimos 100 anos, como mostra a figura 1. Dado o aumento da população global

Figura 1 – Aumento da população global entre 1700-2100.



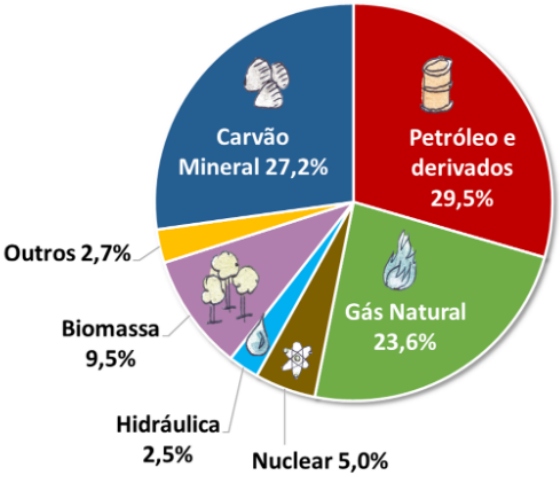
Fonte: adaptado de https://ourworldindata.org/population-growth.

e o fato de que na vida moderna cada vez mais necessitamos de energia para tarefas do cotidiano, é natural que tenhamos um aumento no consumo e demanda de energia, especialmente entre os países em desenvolvimento (Kim, 2015). Mas, mesmo com a notável presença de fontes renováveis, como vemos na figura 2, a maior parte do suprimento de energia no mundo ainda provém de fontes não renováveis, como petróleo, gás natural e carvão, cuja queima contribui para o efeito estufa e o conse-

quente aumento na temperatura global, como vemos no Painel Intergovernamental sobre Mudanças Climáticas (IPCC) (Lee; Romero, 2023).

A partir disso, a fusão nuclear se apresenta como uma fonte limpa, renovável e praticamente inesgotável de fornecimento de energia (Moynihan; Bortz, 2023), podendo solucionar o dilema da necessidade de diminuir o uso de combustíveis fósseis enquanto a demanda por energia cresce no mundo (Chen, 2011). Diferentemente das

Figura 2 – Matriz energética mundial no ano de 2021.

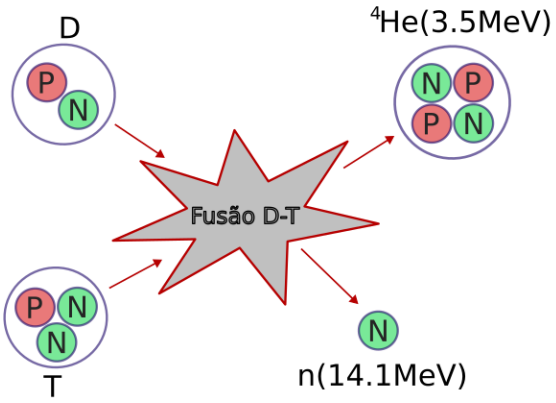


Fonte: adaptado de https://www.epe.gov.br/pt/abcdenergia/matriz-energetica-e-eletrica.

reações de fissão nuclear que ocorrem quando átomos pesados são fragmentados e liberam energia, a reação de fusão acontece com átomos leves, tipicamente Hidrogênio (H) e seus isótopos Deutério (D) e Trítio (T) (Jacquinot, 1999), onde dois átomos leves se fundem em um mais pesado e liberam energia no fim do processo em forma de energia cinética dos produtos da reação (Furth, 1994), como ilustra a figura 3. A fusão nuclear é a fonte de energia do Sol e de outras estrelas, de forma que podemos afirmar que a fusão nuclear provê luz e calor ao Universo inteiro e torna possível a vida na Terra (Clery, 2013).

O potencial da fusão para solucionar os problemas da demanda crescente de energia tem motivado cientistas nos últimos 60 anos a desenvolverem formas de controlar as reações de fusão (Barbarino, 2020) e, a partir disso, construir usinas comerciais que possam gerar energia a partir da fusão nuclear (Sheffield, 1994). Mas, para tal, a fusão precisa ser controlada de forma eficiente. Para o caso de estrelas do tipo Sol, a gravidade se encaminha de confinar o Hidrogênio contido no núcleo solar em altíssimas densidades e temperaturas, e por meio disso criando a condição propícia para fundir átomos de Hidrogênio que são convertidos, primeiro em Deutério, e por fim em Hélio, por meio de reações do tipo proton-proton (Bethe, 1939). Na intenção de controlar reações de fusão nuclear e transformá-la em uma fonte de energia disponível na Terra, vários métodos foram propostos (Thomson, 1960): do *Stellarator*, desenvolvido pelo astrofísico americano Lyman Spitzer (Spitzer lyman, 1958) e que

Figura 3 – Fusão dos isótopos do Hidrogênio, Deutério (D) e Trítio (T) .

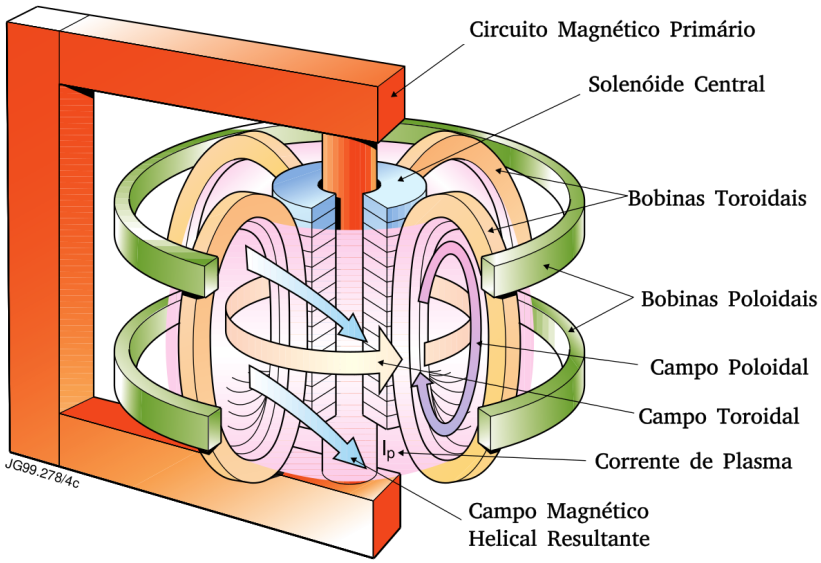


Fonte: o autor

usa campos magnéticos torcidos para confinar um gás ionizado a altas temperaturas, aos diversos tipos de confinamento inercial, que envolvem atingir e aquecer cápsulas com um conteúdo destinado a ser o combustível da fusão com lasers potentes (Nakai; Takabe, 1996). Entre esses métodos, situa-se o Tokamak. O dispositivo para o confinamento mais usado e conhecido é o Tokamak, desenvolvido no Instituto Kurchatov em Moscou, cujo nome é um anacrônimo das palavras russas ***to****roidalnaya* ***ka****mera*, que significam "câmara toroidal", com ***ma****gnitnaya* ***k****atushka* que significam "bobina magnética". Como uma das formas mais eficientes de confinar um plasma em um determinado volume é por meio de campos magnéticos. Por causa da natureza não divergente do campo magnético, o formato toroidal é a configuração topológica mais simples que ele pode assumir sem que as linhas de campo acabem extravasando um determinado volume (Kadomtsev; Pogutse, 1971). Como sabemos que as partículas carregadas têm suas trajetórias em torno das linhas de campo, essa configuração também é a mais simples para se confinar um conjunto de partículas carregadas dentro de um volume e, dessa forma, como ilustra a figura 4, o Tokamak usa campos magnéticos para aquecer e confinar um gás ionizado a altas temperaturas dentro de um toroide (Zakharov, 2019).

Levando em conta então a complexidade tecnológica e científica, o Tokamak se apresenta como o método mais promissor e testado para o controle da fusão nuclear (Komm, 2020), onde as reações de fusão ocorrem em um plasma mantido a altas densidades e temperaturas, inicializado a partir de um gás neutro a temperatura ambiente. Por fim, o desafio se torna confinar o plasma até atingir as condições de ignição, ou seja, confinar uma quantidade suficiente de plasma por tempo suficiente e a temperaturas suficientemente altas para que a geração de energia seja maior do que o consumo exigido pelo reator (Lawson, 1957), o que não foi feito em quantidades satisfatórias, já que um plasma contido em um Tokamak é algo extremamente complexo, sendo bastante denso e quente, e por se tratar de um gás ionizado, exibe

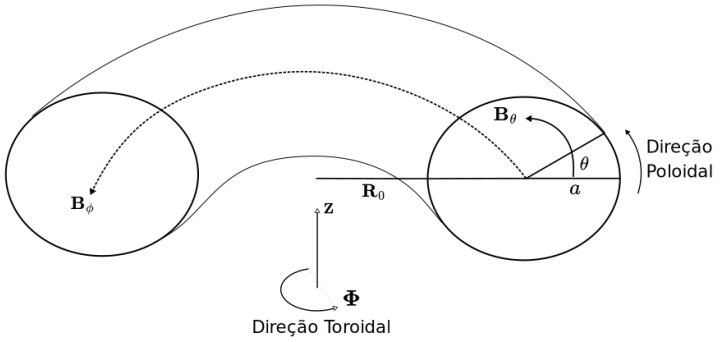
Figura 4 – Componentes típicos de um Tokamak.



Fonte: adapatado de (Kim, 2013)

comportamento coletivo que faz com que uma pequena perturbação local crie instabilidades que afetam todo o conjunto de partículas, o que torna controlar um plasma nessas condições uma tarefa árdua. Em um Tokamak, o plasma aquecido é contido pelo campo magnético gerado pela corrente que circula as bobinas de campo toroidais, chamado campo magnético toroidal ($\mathbf{B}_\Phi$), e pelo campo gerado pela corrente criada no próprio plasma devido ao movimento das partículas carregadas, chamado de campo poloidal ($\mathbf{B}_\theta$). No Tokamak, a intensidade do campo toroidal é muito maior do que a intensidade do campo poloidal (Artsimovich, 1972), e o dispositivo é geometricamente definido pelo seu raio maior $\mathbf{R}_0$, e pelo raio menor a, junto com os ângulos toroidal ($\mathbf{\Phi}$) e poloidal (θ), como ilustra a figura 5.

Figura 5 – Ilustração da configuração geométrica de um Tokamak típico.

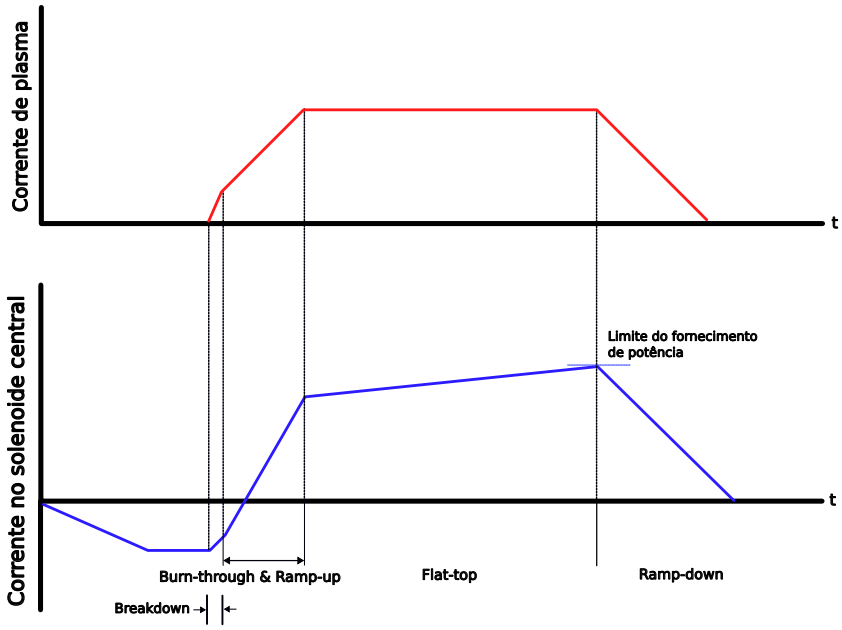


Fonte: o autor.

O processo de inicialização do plasma dentro da câmara de vácuo de um Tokamak ou plasma *start-up* (Mueller, 2013) pode ser dividido em três fases (Sinha, 2017): (i) a fase de avalanche ou *breakdown*, (ii) a fase de queima de impurezas ou *burn-through*

e (iii) a fase do estabelecimento da corrente de plasma ou *ramp-up*. Tipicamente, um Tokamak usa o campo elétrico toroidal $\mathbf{E}_\phi$ induzido por uma variação de fluxo magnético no solenoide central para dar início ao processo de *breakdown* (Papoular, 1976). Tokamaks são máquinas que operam em pulsos (Kuteev; Sergeev, 2020) devido às limitações na variação de fluxo impostas pelo solenoide central, que possui um fornecimento de potência limitado (Kadomtsev; Troyon; Watkins; Rutherford; Yoshikawa; Mukhovatov, 1990), de forma que um disparo completo por si só também pode ser dividido em três fases: a inicialização que termina na fase de *ramp-up*, a fase de *flat-top* ou saturação da corrente de plasma e por fim a fase de *ramp-down* quando o campo elétrico é desligado e o disparo chega ao fim, como mostrado na figura 6.

Figura 6 – O comportamento da corrente no solenoide central e da corrente de plasma durante um disparo completo.

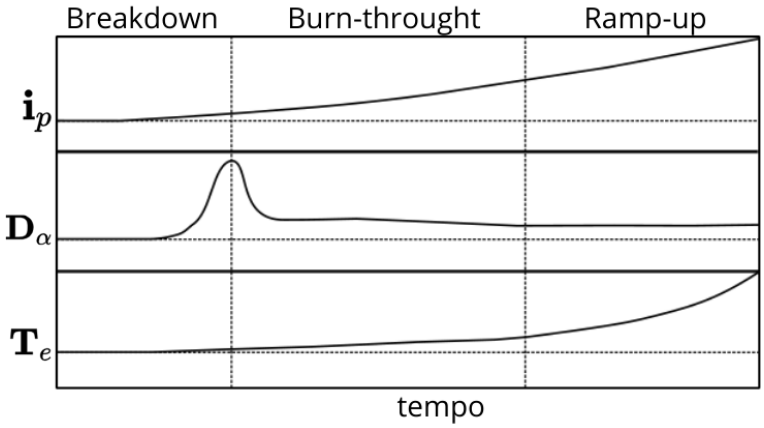


Fonte: o autor.

O campo elétrico gerado pelo solenoide central acaba por acelerar elétrons-semente presentes no gás neutro que inicialmente preenche a câmara de vácuo. Esses elétrons são acelerados na direção de $\mathbf{E}_\phi$, e ao se chocarem com um átomo neutro, se tiverem energia suficiente, eles devem ionizar este átomo (Gryzinski; Kunc, 1986), liberando outro elétron também a ser acelerado pelo campo elétrico, o que acaba por desencadear o fenômeno de avalanche ou descarga de Townsend (Chew; Gibbon; Brömmel; Wauters; Gribov; Vries, 2023). O processo de ionização deve prosseguir enquanto o plasma for aquecido (seja por meios ôhmicos ou por métodos auxiliares) (Sugiyama; Shinya; Utoh; Aiba; Sakamoto, 2021). Para que a temperatura possa aumentar, é preciso que a potência do aquecimento seja maior do que a perda de energia devido à ionização tanto dos átomos alvo quanto das impurezas presentes na câmara de vácuo (Kim; Casson; Meyer; Cunningham; Scannell; Kogan; Harrison;

Kim; Gwak; Na; Lee; Litaudon; Falchetto; team, 2022), assim como às perdas de energia por meio de radiação de linha devido à queima de impurezas presentes na câmara de vácuo, que vem a ser a principal forma de perda de potência durante a fase de *breakdown* (Vershkov; Mirnov, 1974). Existem algumas alternativas para se obter o aumento na temperatura, sendo o aquecimento por meios ôhmicos o mais simples e usado, onde o aumento na própria corrente de plasma acaba por aumentar a temperatura e queimar completamente as impurezas, de forma a possibilitar o estabelecimento da corrente de plasma, como ilustrado na figura 7. Depois que todo o conteúdo do gás inserido inicialmente na câmara de vácuo tiver sido ionizado, é preciso abastecer o dispositivo com mais combustível para que a densidade do plasma possa aumentar (Ravensbergen; Vries; Felici; Blanken; Nouailletas; Zabeo, 2017).

Figura 7 – Evolução da corrente de plasma ($\mathbf{i}_p$), emissão de radiação de linha (D_α) e temperatura dos elétron (T_e), durante a inicialização do plasma.



Fonte: o autor.

Além das bobinas toroidais que geram o campo magnético toroidal, um Tokamak usualmente conta também com um conjunto de bobinas poloidais, já que o *breakdown* do gás e a subsequente formação de plasma exigem ambos configurações magnéticas distintas. Ao fim do processo de inicialização, essas bobinas devem controlar o equilíbrio e a corrente de plasma (Gribov; Humphreys; Kajiwara; Lazarus; Lister; Ozeki; Portone; Shimada; Sips; Wesley, 2007). Essas bobinas são usadas para determinar o formato do plasma e controlar algumas instabilidades, mas podem gerar campos magnéticos erráticos que afetam de forma significativa o processo de *breakdown* (Yoo; Na, 2022), uma vez que esses campos erráticos alteram a direção das linhas de campo magnético e acabam causando perdas de elétrons que acabam se chocando com as paredes da câmara de vácuo e criando instabilidades que podem levar à disrupção do disparo (Yang; Park; Jeon; Logan; Lee; Hu; Lee; Kim; Kim; Lee; Na; Hahm; Choi; Snipes; Park; Ko, 2024).

Apesar de ser um processo comum à maioria dos dispositivos, a inicialização de plasma ganha pouco interesse e, por isso, ainda existem algumas lacunas na compre-

ensão da primeira e importante fase do disparo em Tokamaks (Vries; Gribov, 2019), e mesmo com o estudo experimental intenso, os aspectos teóricos e numéricos do processo ainda estão longe de ser plenamente compreendidos, com alguns casos de falha na inicialização sendo atribuídos a falhas nos componentes do dispositivo, mas na maioria das vezes o problema não é identificado, em parte porque a maioria dos trabalhos teóricos tratando do assunto depende de modelos analíticos simplificados ou de modelos empíricos (Jiang; Peng; Zhang; Lapenta, 2016).

A partir disso, este trabalho se apresenta como uma forma de abordar o tema prezando pela intuição física fornecida pela teoria hidrodinâmica, modelo bastante presente nos trabalhos envolvendo fusão nuclear e que fornece uma descrição bastante acurada de fenômenos importantes como o equilíbrio macroscópico e os processos de transporte (Davidson, 2017). Nesta abordagem, consideramos o plasma constituído por dois fluidos que se interpenetram: um composto por elétrons e o outro por íons (Chen, 2019), o que nos leva às equações de conservação, que junto com as ferramentas da teoria eletromagnética, nos fornecem uma hierarquia de equações a serem resolvidas de forma a obtermos um modelo autoconsistente de fluidos (Burby, 2017).

No segundo capítulo deste trabalho, introduzimos a física da ionização de um gás no contexto das descargas elétricas e passamos à aplicação dessa no contexto da inicialização de plasma em Tokamaks. No terceiro capítulo, apresentamos o escopo da teoria de fluidos, na qual desenvolvemos o modelo, que se dá no capítulo 4. No capítulo 5 apresentamos os nossos resultados, junto com algumas discussões sobre o modelo e trabalhos futuros.

2 A FÍSICA DO PROCESSO DE *BREAKDOWN*

A fase de *breakdown* em um Tokamak é a fase onde uma quantidade residual de elétrons desencadeia uma avalanche, e pode ser modelada por uma descarga ou avalanche de Townsend (Lloyd; Jackson; Taylor; Lazarus; Luce; Prater, 1991). Esse fenômeno é bem validado experimentalmente e foi desenvolvido a partir do estudo de descargas em tubos catódicos, e é aplicável no estudo de Tokamaks, sendo usado na estimativa de parâmetros para o processo de inicialização (Kim, 2013).

2.1 O primeiro Coeficiente de Townsend

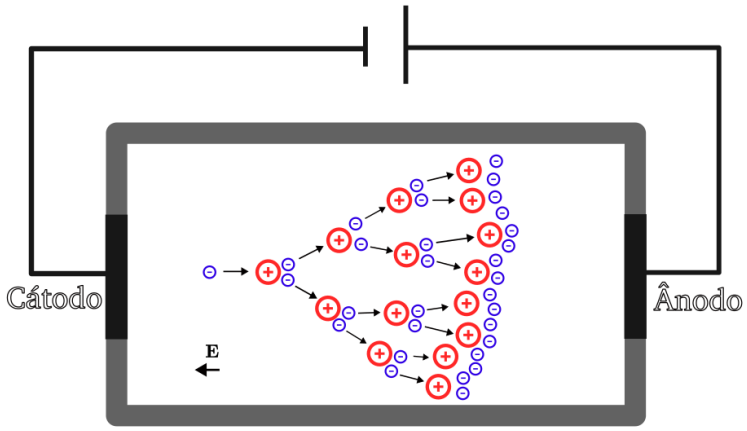
Uma avalanche de elétrons implica no aumento abrupto na densidade de elétrons presentes no gás, e o mecanismo por trás disso é chamado de avalanche de Townsend (Townsend, 1900). Para que o fenômeno ocorra, é necessária a presença de elétrons-semente no gás, que dão início à avalanche (Brunner, 1978). No caso de um tubo catódico, os elétrons-semente são acelerados pelo campo elétrico em direção ao cátodo, e se possuírem energia suficiente devem, por meio de um impacto, ionizar os átomos neutros do gás (Sanders, 1933). Os outros elétrons produzidos a partir dessa ionização por impacto também devem ser acelerados pelo campo elétrico em direção ao cátodo e, por sua vez, devem também ionizar outros átomos (Aponte; Esser; Shaw; Dickens; Mankowski; Neuber, 2019), o que dá origem a um fenômeno de avalanche, como ilustra a figura 8.

Nesse contexto vemos que o aumento na densidade de elétrons é proporcional à distância percorrida e à quantidade inicial de elétrons, de forma que $dn_e \propto n_e dx$, ou se definirmos o primeiro coeficiente de Townsend, α_T, como a quantidade de ionizações em relação ao caminho percorrido pelo elétron (Smirnov, 2009), podemos escrever o aumento na densidade de elétrons como

$$dn_e = \alpha_T n_e dx \,. \tag{1}$$

Os elétrons serão acelerados pelo campo elétrico e, após algum tempo, devido às colisões com o gás neutro, atingem a velocidade terminal ou de deriva, $u_{D||}$, paralela

Figura 8 – Ilustração do mecanismo de avalanche em uma descarga de Townsend acontecendo em um tubo catódico.



Fonte: o autor.

ao campo elétrico. Nesse caso, a distância percorrida deve ser $dx = u_{D||}dt$ e com isso podemos definir uma taxa de ionização ν_{ion} como

$$dn_e = \alpha_T n_e u_{D||} dt \rightarrow \frac{dn_e}{dt} = \alpha_T u_{D||} n_e = \nu_{ion} n_e \,. \tag{2}$$

Além disso, temos ainda a condição empírica de que (Lieberman; Lichtenberg, 2005)

$$\alpha_T = Ape^{-B\frac{p}{E}} \,, \tag{3}$$

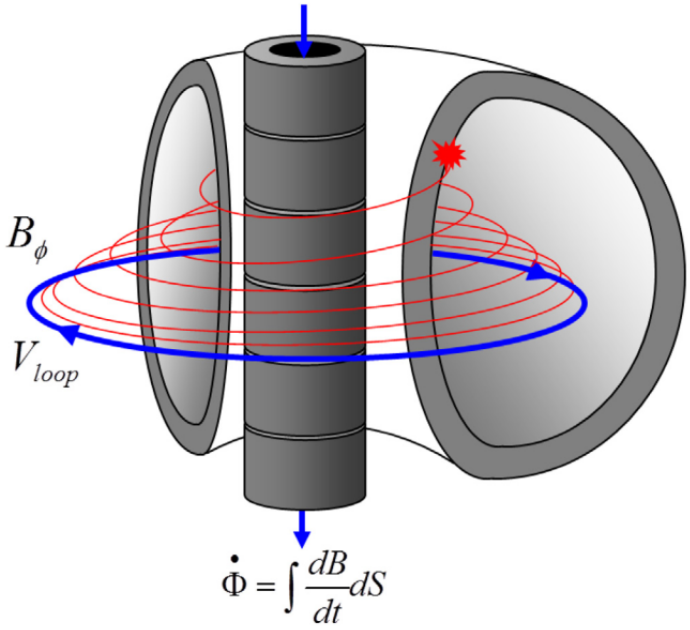
sendo A e B constantes que dependem do gás com o qual se trabalha, p a pressão do gás e $\mathbf{E}$ o campo elétrico aplicado.

2.2 O *breakdown* em Tokamaks

No contexto dos Tokamaks, os elétrons são acelerados pelo campo elétrico toroidal $\mathbf{E}_\phi$ (Peng; Jiang; Innocenti; Zhang; Hu; Zhuang; Lapenta, 2018), gerado pela variação de fluxo no solenoide central. Uma "tensão de loop" $V_{loop} = \oint \mathbf{E}_\phi d\mathbf{l}$ é gerada ao redor do toroide (Hammond; Raman; Volpe, 2017) e tende a acelerar os elétrons presentes no gás, e estes, por sua vez, tendem a acompanhar as linhas de campo magnético toroidal. Devido à presença de campos poloidais dentro da câmara de vácuo e de campos erráticos, as linhas de campo magnético não são perfeitamente toroidais, como ilustrado na figura 9.

Com isso, precisamos incluir além da taxa de ionização ν_{ion}, um termo que represente os elétrons que são perdidos e devem contribuir para a diminuição da densidade. Durante o *breakdown*, o principal mecanismo de perda de elétrons é devido a esses desvios nas linhas de campo magnético, (Lloyd; Carolan; Warrick, 1996), que acabam levando junto os elétrons que as acompanham e sofrem recombinação ao atingir a

Figura 9 – Ilustração mostrando a criação da tensão de loop e o encontro das linhas de campo com as paredes da câmara.



Fonte: adaptado de (Kim, 2013).

parede do reator, de forma que podemos definir a taxa de perda de elétrons, ν_{perda} como

$$\nu_{perda} = \frac{u_{D||}}{L_{ef}}\,, \tag{4}$$

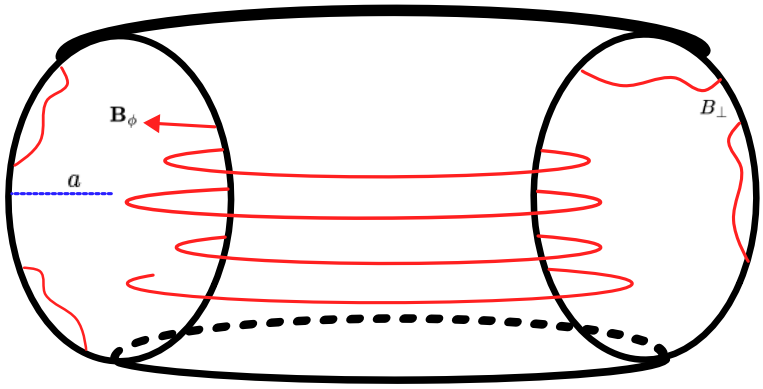
onde L_{ef} é chamado de comprimento de conexão efetivo e representa a distância que os elétrons percorrem ao longo das linhas de campo magnético antes de atingirem as paredes da câmara e, portanto, quanto maior for L_{ef}, melhor confinadas estarão as partículas (Maviglia; Albanese; Magistris; Lomas; Minucci; Rimini; Sips; Vries, 2014). Como dito anteriormente, L_{ef} depende do campo magnético toroidal e dos campos erráticos presentes na câmara durante o disparo, de forma que é usual representarmos L_{ef} como sendo diretamente proporcional ao campo magnético toroidal e inversamente proporcional aos campos erráticos perpendiculares, de forma que podemos dar uma definição empírica ao comprimento efetivo nos baseando nos componentes dos quais ele depende. Como ilustra a figura 10, podemos definí-lo então como $L_{ef} \sim a\mathbf{B}_\phi / B_\perp$ (Vries; Gribov, 2019), onde a é o raio menor do Tokamak.

Com isso, o aumento na densidade de elétrons, pode ser definido como a diferença entre a taxa de ionização, ν_{ion}, e a taxa de perdas, ν_{perda}, de forma que

$$\frac{dn_e}{dt} = (\nu_{ion} - \nu_{perda})\, n_e\,. \tag{5}$$

E se ν_{ion} e ν_{perda} forem constantes, a densidade de elétrons durante essa fase pode

Figura 10 – Ilustração para visualizarmos a definição do comprimento efetivo, L_{ef}.



Fonte: o autor.

ser expressa como

$$n_e(t) = n_{e0} e^{(\nu_{ion} - \nu_{perda})t}\,, \tag{6}$$

onde n_{e0} é a densidade de elétrons em $t = 0$. O processo de *breakdown* será então bem-sucedido se a taxa de ionização exceder a taxa de perdas.

Igualando a equação (5) a zero, temos uma condição mínima para a obtenção de uma avalanche, e portanto, de um processo de *breakdown* bem sucedido, com $\nu_{ion} = \nu_{perda}$ temos que

$$\alpha_T u_{D||} = \frac{u_{D||}}{L_e f} \rightarrow \alpha_T = \frac{1}{L_{ef}}\,. \tag{7}$$

Portanto, com a condição (3),

$$A p_n e^{-B\frac{p_n}{E_\phi}} = \frac{1}{L_{ef}}\,, \tag{8}$$

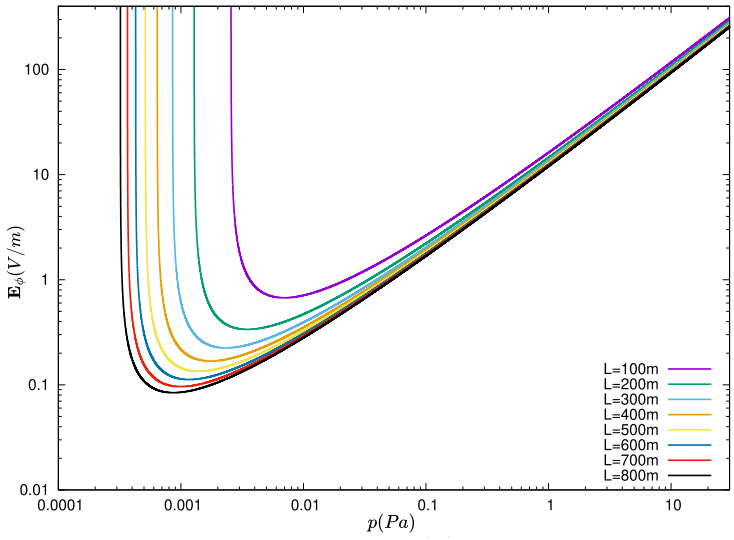
sendo p_n a pressão do gás neutro que inicialmente preenche a câmara e $\mathbf{E}_\phi$ o campo elétrico toroidal, o que nos mostra que um processo de *breakdown* em um Tokamak depende da escolha da pressão do gás neutro, da intensidade do campo elétrico toroidal e do comprimento efetivo.

Para cada valor de E_ϕ temos um valor mínimo de pressão para o coeficiente α_T (Rose, 1956), ou seja

$$\frac{d\alpha_T}{dp_n} = 0 \rightarrow A p_n e^{-B\frac{p_n}{E_\phi}} \left(1 - B\frac{p_n}{E_\phi}\right) \rightarrow p_n = \frac{E_\phi}{B}\,. \tag{9}$$

O que nos leva às curvas de Paschen, vistas na figura 11, onde temos o campo elétrico mínimo para a obtenção do *breakdown*, dada a pressão do gás neutro e determinado comprimento efetivo (Burm, 2007), onde fica claro a dependência dessas componentes.

Figura 11 – Gráfico mostrando os valores de campo elétrico mínimos para obtenção de uma avalanche no gás Deutério, levando em conta a dependência da pressão e do comprimento efetivo.



Fonte: o autor.

3 O ESCOPO DA TEORIA DE FLUIDOS

Como um plasma é um sistema que contém um grande número de partículas interagentes, podemos usar suas propriedades macroscópicas para descrevê-lo como um fluido. Essa abordagem é chamada de "teoria hidrodinâmica", e consiste em tomar os elementos de fluido do plasma e agrupar as equações de conservação (Bittencourt, 2004). Embora proposta inicialmente para descrever fenômenos da astrofísica e da física espacial (Alfvén, 1942), a teoria de fluidos se consolidou como uma das ferramentas mais usadas na área da fusão nuclear. Aqui apresentaremos o escopo da teoria de forma a desenvolver o ferramental necessário durante o resto do trabalho.

3.1 A Função de Distribuição de Probabilidades

A chamada Função de Distribuição de Probabilidades é um objeto matemático que fornece as informações de interesse físico das partículas que compõem o sistema. Como o plasma contém muitas partículas, é interessante que essas informações sejam uma média estatística (Leontovich; Lashinsky, 1965).

Chamando de $d^6N_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$ o número de partículas do tipo α dentro do elemento de volume no espaço de fase d^3rd^3v centrado em $(\mathbf{r},\mathbf{v})$ no instante t, a função de distribuição pode ser definida como a densidade de pontos representativos dentro do espaço de fase,

$$f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t) = \frac{d^6N_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)}{d^3rd^3v}\,. \tag{10}$$

3.2 A Densidade

A densidade é uma variável macroscópica definida no espaço de configuração como o número de partículas por unidade de volume e independente da velocidade,

$$n_\alpha(\mathbf{r},t) = \frac{1}{d^3r}\int_v d^6N_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\,, \tag{11}$$

ou em termos da função de distribuição

$$n_\alpha(\mathbf{r},t) = \int_v f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)d^3v\,. \tag{12}$$

3.3 A Velocidade Média

A velocidade média $\mathbf{u}$ pode então ser definida como o fluxo macroscópico de partículas na posição $\mathbf{r}$ em um instante t. Para isso usamos a função de distribuição (10) para definir a média de uma determinada variável dinâmica,

$$\langle\chi\rangle_\alpha = \frac{1}{n_\alpha(\mathbf{r},t)}\int_v \chi f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)d^3v \rightarrow \mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r},t) = \langle\mathbf{v}\rangle_\alpha = \frac{1}{n_\alpha(\mathbf{r},t)}\int_v \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)d^3v\,, \tag{13}$$

onde $\langle\rangle_\alpha$ denota o valor médio de determinada quantidade, em relação ao espaço de velocidades, para partículas do tipo α.

3.4 A Equação de Boltzmann na ausência de colisões

Se cada partícula no plasma for submetida a uma força externa $\mathbf{F}$, após um tempo dt, as novas coordenadas podem ser escritas como

$$\mathbf{r}'(t+dt) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}dt\,, \tag{14}$$

e

$$\mathbf{v}'(t+dt) = \mathbf{v}(t) + \mathbf{a}dt\,. \tag{15}$$

Portanto, depois do intervalo de tempo dt, as partículas devem ocupar um novo elemento de volume no espaço de fase denotado por $d^3r'd^3v'$. Como estamos considerando as mesmas partículas já que, como não há colisões, não deve haver perda nem ganho de partículas, devemos ter que

$$f_\alpha(\mathbf{r}',\mathbf{v}',t)d^3r'd^3v' = f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)d^3rd^3v\,. \tag{16}$$

E a partir do teorema de Liouville, sabemos que o elemento de volume no espaço de fase pode alterar seu formato mas não o seu volume, temos que

$$d^3r'd^3v' = d^3rd^3v\,, \tag{17}$$

e podemos reescrever (16) como

$$[f_\alpha(\mathbf{r}',\mathbf{v}',t) - f_\alpha]d^3rd^3v = 0\,. \tag{18}$$

Se expandirmos o primeiro termo de (18) em uma série de Taylor em torno da

posição $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ e ignorando os termos de segunda ordem ou maiores, obtemos

$$f_\alpha(\mathbf{r} + \mathbf{v}dt, \mathbf{v} + \mathbf{a}dt, t + dt) = f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) +$$

$$+ \left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} + v_y \frac{\partial f_\alpha}{\partial y} + v_z \frac{\partial f_\alpha}{\partial z}\right) + \left(a_x \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_x} + a_y \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_y} + a_z \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_z}\right)\right] dt\,. \tag{19}$$

Definindo os operadores

$$\nabla = \hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial z}\,, \tag{20}$$

e

$$\nabla_v = \hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial}{\partial v_x} + \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial}{\partial v_y} + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial v_z}\,, \tag{21}$$

a equação (19) pode ser escrita como

$$f_\alpha(\mathbf{r} + \mathbf{v}dt, \mathbf{v} + \mathbf{a}dt, t + dt) = f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + \mathbf{a} \cdot \nabla_v f_\alpha\right] dt\,. \tag{22}$$

Então a partir de (18), temos que

$$\frac{\partial f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{a} \cdot \nabla_v f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 0\,, \tag{23}$$

a equação de Boltzmann na ausência de colisões.

3.5 A Equação de Boltzmann na presença de colisões

Quando considerados os efeitos das interações entre partículas, a equação (16) precisa ser modificada, já que o elemento de volume no espaço de fase pode ser alterado devido ao ganho ou perda de partículas. Nesse caso, vamos denotar a diferença no número de partículas como resultado das colisões como

$$\left[\frac{\delta f_\alpha}{\delta t}\right]_{col} d^3r d^3v dt\,. \tag{24}$$

Então com a inclusão dos efeitos de colisões entre partículas, a equação (18) se torna

$$[f_\alpha(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) - f_\alpha] d^3r d^3v = \left[\frac{\delta f_\alpha}{\delta t}\right]_{col} d^3r d^3v dt\,, \tag{25}$$

e a equação de Boltzmann para esse caso se torna

$$\frac{\partial f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{a} \cdot \nabla_v f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \left[\frac{\delta f_\alpha}{\delta t}\right]_{col}\,. \tag{26}$$

3.6 As Equações Macroscópicas de Transporte

Não é necessário resolvermos a equação de Boltzmann em termos da função de distribuição para obtermos as variáveis macroscópicas de interesse físico, já que estas variáveis estão relacionadas aos momentos da função de distribuição e, portanto, as equações de transporte podem ser obtidas ao tomarmos os momentos da equação de Boltzmann. Os primeiros três momentos da equação de Boltzmann são obtidos ao multiplicarmos a equação de Boltzmann por m_α, $m_\alpha \mathbf{v}_\alpha$ e $\frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}$, respectivamente, e integrarmos sobre todo o espaço de velocidades. Esse procedimento nos leva às equações de conservação de massa, momento e energia.

Seja $\chi(\mathbf{v})$ uma propriedade física das partículas do plasma. Ao multiplicarmos a equação (26) por $\chi(\mathbf{v})$ e integrando a equação resultante sobre o espaço de velocidades, devemos ter

$$\int_v \chi \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} d^3v + \int_v \chi \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha d^3v + \int_v \chi \mathbf{a} \cdot \nabla_v f_\alpha d^3v = \int_v \chi \left[\frac{\delta f_\alpha}{\delta t}\right]_{col} d^3v \,. \tag{27}$$

Agora, para uma melhor clareza, vamos resolver cada integral de (3.18) separadamente:

- A primeira equação do lado esquerdo pode ser escrita como

$$\int_v \chi \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} d^3v = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_v \chi f_\alpha d^3v\right) - \int_v \frac{\partial \chi}{\partial t} d^3v \,, \tag{28}$$

  mas como $\chi = \chi(\mathbf{v})$, sua derivada em relação ao tempo é zero. Usando a definição de média a partir da função de distribuição de probabilidades e tendo em conta que $\langle\chi\rangle$ denota uma média em relação à função de distribuição, ficamos com

$$\boxed{\int_v \chi \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} d^3v = \frac{\partial}{\partial t}\left[n_\alpha(\mathbf{r},t)\langle\chi\rangle_\alpha\right]} \,. \tag{29}$$

- Para a segunda integral do lado esquerdo em (27) temos que

$$\int_v \chi \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha d^3v = \nabla \cdot \left(\int_v \chi \mathbf{v} f_\alpha d^3v\right) - \int_v \nabla\chi \cdot \mathbf{v} f_\alpha d^3v - \int_v \chi f_\alpha \nabla \cdot \mathbf{v} d^3v \,, \tag{30}$$

  e da mesma forma que $\chi = \chi(\mathbf{v})$, o gradiente também é nulo e como as variáveis $\mathbf{r}$,$\mathbf{v}$ e t são independentes, o divergente de $\mathbf{v}$ também é nulo, de forma que

$$\boxed{\int_v \chi \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha d^3v = \nabla \cdot \left[n_\alpha \langle\chi\mathbf{v}\rangle_\alpha\right]} \,. \tag{31}$$

- Agora, para a terceira integral do lado esquerdo de (27),

$$\int_v \chi \mathbf{a} \cdot \nabla_v f_\alpha d^3v = \int_v \nabla_v \cdot (\mathbf{a}\chi f_\alpha)\, d^3v - \int_v f_\alpha \left(\mathbf{a} \cdot \nabla_v \chi f_\alpha\right) d^3v - \int_v \chi f_\alpha \left(\nabla_v \cdot \mathbf{a}\right) d^3v \,, \tag{32}$$

onde a primeira integral deve desaparecer já que a função de distribuição deve desaparecer para $\pm\infty$, enquanto a última integral desaparece se considerarmos que

$$\nabla_v \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{m_\alpha} \nabla_v \cdot \mathbf{F} = 0 \,, \tag{33}$$

ou seja, que o componente F_j da força é independente da componente correspondente da velocidade v_j. Portanto temos que

$$\boxed{\int_v \chi \mathbf{a} \cdot \nabla_v f_\alpha d^3v = -n_\alpha \langle \mathbf{a} \cdot \nabla_v \chi \rangle_\alpha} \,. \tag{34}$$

Finalmente, para o lado direito da equação (27), podemos reescrever o termo de colisões como a alteração da quantidade χ por unidade de volume para as partículas do tipo α, devido às colisões

$$\int_v \chi \left[\frac{\delta f_\alpha}{\delta t}\right]_{col} d^3v = \left[\frac{\delta}{\delta t}\left(n_\alpha \langle \chi \rangle_\alpha\right)\right]_{col} \,. \tag{35}$$

Substituindo então as equações (29), (31), (34) e (35) em (27), teremos finalmente

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[n_\alpha(\mathbf{r},t)\langle \chi \rangle_\alpha\right] + \nabla \cdot \left[n_\alpha \langle \chi \mathbf{v} \rangle_\alpha\right] - n_\alpha \langle \mathbf{a} \cdot \nabla_v \chi \rangle_\alpha = \left[\frac{\delta}{\delta t}\left(n_\alpha \langle \chi \rangle_\alpha\right)\right]_{col} \,. \tag{36}$$

3.7 A equação de conservação de massa

A equação de conservação de massa ou de continuidade pode ser obtida se substituirmos χ pela massa, na equação (36). Se definirmos $\rho_{m\alpha} = n_\alpha m_\alpha$ como a densidade de massa, devemos obter

$$\frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \mathbf{u}_\alpha) = S_\alpha \,, \tag{37}$$

onde o termo de colisões $S_\alpha = \left[\frac{\delta \rho_{m\alpha}}{\delta t}\right]_{col}$, representa a taxa em que partículas do tipo α, que são produzidas ou perdidas, por unidade de volume, como resultado das colisões.

3.8 A equação de conservação de momento

Para derivarmos a equação de conservação de momento, vamos definir $\chi(\mathbf{v}) = m_\alpha \mathbf{v} = m_\alpha(\mathbf{u}_\alpha + \mathbf{c}_\alpha)$, onde $\mathbf{c}_\alpha$ é a velocidade aleatória, devido ao movimento térmico,

em relação a velocidade média $\mathbf{u}_\alpha$, de forma que $\mathbf{c}_\alpha = \mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha$ e $\langle \mathbf{c}_\alpha \rangle = 0$, já que $\langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}_\alpha$. Substituindo em (36),

- O primeiro termo do lado esquerdo

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(n_\alpha \langle \chi \rangle\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha\right) = \mathbf{u}_\alpha \frac{\partial \rho_{m_\alpha}}{\partial t} + \rho_{m_\alpha} \frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} \,. \tag{38}$$

- O segundo termo

$$\nabla \cdot \left(n_\alpha \langle \chi \mathbf{v} \rangle_\alpha\right) = \nabla \cdot \left(\rho_{m\alpha} \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \rangle\right) = \nabla \cdot \left(\rho_{m\alpha} \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha + \rho_{m\alpha} \langle \mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{c}_\alpha \rangle\right) \,. \tag{39}$$

- E o terceiro termo do lado esquerdo

$$n_\alpha \langle \mathbf{a} \cdot \nabla_v \chi \rangle = n_\alpha \langle \left(m_\alpha \mathbf{a} \cdot \nabla_v\right) \mathbf{v} \rangle = n_\alpha \langle \left(\mathbf{F} \cdot \nabla_v\right) \mathbf{v} \rangle = n_\alpha \langle \mathbf{F} \rangle_\alpha \,. \tag{40}$$

E para os termos do lado direito,

$$\mathbf{R}_\alpha = \left[\frac{\delta}{\delta t}\left(n_\alpha \langle \chi \rangle\right)\right]_{col} = \left[\frac{\delta}{\delta t}\left(\rho_{m\alpha} \mathbf{u}\right)\right]_{col} \,, \tag{41}$$

onde $\mathbf{R}_\alpha$ representa a taxa de variação de momento devido às colisões. Substituindo o resultado obtido na equação (36), devemos obter

$$\mathbf{u}_\alpha \frac{\partial \rho_{m_\alpha}}{\partial t} + \rho_{m_\alpha} \frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho_{m\alpha} \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha + \rho_{m\alpha} \langle \mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{c}_\alpha \rangle\right) - n_\alpha \langle \mathbf{F} \rangle_\alpha = \mathbf{R}_\alpha \,. \tag{42}$$

Podemos definir o tensor $\mathcal{P}_\alpha = \rho_{m_\alpha} \langle \mathbf{c}_\alpha \mathbf{c}_\alpha \rangle$ como a pressão exercida pela agitação térmica das partículas e além disso, temos que

$$\nabla \cdot \left(\rho_{m\alpha} \mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\alpha\right) = p_{m\alpha} \left(\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla\right) \mathbf{u}_\alpha + \left[\nabla \cdot \left(\rho_{m\alpha} \mathbf{u}_\alpha\right)\right] \mathbf{u}_\alpha \,. \tag{43}$$

Usando a força de Lorentz, ao retornarmos para (42) temos

$$\mathbf{u} \frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \rho_{m\alpha} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho_{m\alpha} \left(\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla\right) \mathbf{u}_\alpha + \left[\nabla \cdot \left(\rho_{m_\alpha} \mathbf{u}_\alpha\right)\right] \mathbf{u}_\alpha =$$

$$n_\alpha q_\alpha \left(\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}\right) - \nabla \cdot \mathcal{P}_\alpha + \mathbf{R}_\alpha \,, \tag{44}$$

rearranjando

$$\rho_{m_\alpha} \left[\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + \left(\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla\right) \mathbf{u}_\alpha\right] + \mathbf{u}_\alpha \left[\frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho_{m\alpha} \mathbf{u}_\alpha\right)\right] =$$

$$n_\alpha q_\alpha \left(\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}\right) - \nabla \cdot \mathcal{P}_\alpha + \mathbf{R}_\alpha \,. \tag{45}$$

Mas como o segundo termo do lado esquerdo é a equação de continuidade (37), a

equação anterior pode ser reduzida a

$$\rho_{m_\alpha}\left[\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t}+(\mathbf{u}_\alpha\cdot\nabla)\,\mathbf{u}_\alpha\right]=n_\alpha q_\alpha\left(\mathbf{E}+\mathbf{u}_\alpha\times\mathbf{B}\right)-\nabla\cdot\mathcal{P}_\alpha-\mathbf{u}_\alpha S_\alpha+\mathbf{R}_\alpha\,, \tag{46}$$

onde obtemos a taxa de variação de momento em cada elemento de fluido devido às forças externas aplicadas, à própria pressão do fluido e às forças internas devido às colisões.

3.9 A equação de conservação de energia

A equação de transporte ou de conservação de energia pode ser obtida ao substituirmos $\chi(\mathbf{v})$ pela energia cinética das partículas. Nesse caso, substituímos $\chi(\mathbf{v})=\frac{1}{2}m_\alpha v^2$ em (36) e devemos ter para os termos da equação geral de transporte

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(n_\alpha\langle\chi\rangle\right)=\frac{\rho_{m\alpha}}{2}\langle v^2\rangle=\frac{\rho_{m\alpha}}{2}\langle\mathbf{c}_\alpha\cdot\mathbf{c}_\alpha\rangle+\frac{\rho_{m\alpha}}{2}u_\alpha^2\,. \tag{47}$$

Se a velocidade aleatória for isotrópica, podemos escrever $\rho_{m\alpha}\langle c_\alpha^2\rangle=3p_\alpha$, já que nesse caso $\mathcal{P}_\alpha=\mathbf{1}p_\alpha$, sendo p_α a pressão escalar, e a equação anterior se torna

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(n_\alpha\langle\chi\rangle\right)=\frac{1}{2}\left(3p_\alpha+\rho_{m\alpha}u_\alpha^2\right)\,. \tag{48}$$

A segunda equação do lado esquerdo em (36) se torna

$$\nabla\cdot\left(n_\alpha\langle\chi\mathbf{v}\rangle_\alpha\right)=\nabla\cdot\left[\frac{\rho_{m\alpha}}{2}\langle(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{v}\rangle_\alpha\right]\,, \tag{49}$$

e a terceira

$$n_\alpha\langle\mathbf{a}\cdot\nabla_v\chi\rangle_\alpha=n_\alpha\langle\frac{\mathbf{F}}{m_\alpha}\cdot\nabla_v\left(\frac{m_\alpha v^2}{2}\right)\rangle_\alpha=n_\alpha\langle\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\rangle_\alpha\,. \tag{50}$$

Expandindo o termo $\langle(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{v}\rangle_\alpha$, usando a definição do tensor de pressão $\mathcal{P}_\alpha$ e definindo o fluxo de calor como $\mathbf{q}_\alpha=\frac{1}{2}\rho_{m\alpha}\langle c_\alpha^2\mathbf{c}_\alpha\rangle_\alpha$, teremos por fim a equação de conservação de energia

$$\frac{3}{2}\left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial t}+\mathbf{u}_\alpha\cdot\nabla p_\alpha\right)+\frac{3}{2}p_\alpha\left(\nabla\cdot\mathbf{u}_\alpha\right)+\left(\mathcal{P}_\alpha\cdot\nabla\right)\cdot\mathbf{u}_\alpha+\nabla\cdot\mathbf{q}_\alpha=$$

$$Q_\alpha-\mathbf{u}_\alpha\cdot\mathbf{R}_\alpha+\frac{1}{2}u_\alpha^2 S_\alpha\,, \tag{51}$$

onde Q_α representa a mudança na densidade de energia devido às colisões no plasma, sendo

$$Q_\alpha=\left[\frac{\delta}{\delta t}\left(n_\alpha\langle\chi\rangle_\alpha\right)\right]_{col}=\left[\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{1}{2}\rho_{m\alpha}u_\alpha^2\right)\right]_{col}\,, \tag{52}$$

Com isso, acabamos por gerar uma hierarquia de equações que se inter-relacionam, cujo número de variáveis independentes é maior do que o número de equações. Para que tenhamos um sistema fechado e autoconsistente, algumas aproximações de caráter físico são necessárias (Jardin, 2010). Dada a proposta do trabalho, vamos limitar o modelo de forma a considerarmos que durante o início do disparo a temperatura é praticamente constante e podemos descartar a equação de conservação de energia, e o sistema fechado de equações que usaremos neste trabalho é dado mantendo apenas as equações de conservação de massa e de momento, na forma

$$\frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \mathbf{u}_\alpha) = S_\alpha \,, \tag{53}$$

e

$$\rho_{m_\alpha} \left[\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla)\, \mathbf{u}_\alpha \right] = n_\alpha q_\alpha \left(\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B} \right) - \nabla \cdot \mathcal{P}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha S_\alpha + \mathbf{R}_\alpha \,. \tag{54}$$

A partir de onde começamos a implementação de um modelo de dois fluidos que seja adequado à modelagem do processo de inicialização.

4 MODELANDO O PROCESSO DE INICIALIZAÇÃO USANDO UM MODELO DE DOIS FLUIDOS

Acima derivamos as equações de transporte para um fluido condutor e agora, a partir delas, vamos modelar o processo de inicialização em um plasma de Tokamak. Usando um modelo onde consideramos o plasma como sendo composto por dois fluidos que se interpenetram: um de elétrons e o outro, de íons, e considerando que o plasma num todo mantém sua quasi-neutralidade ($n_e = n_i = n$). Podemos assumir agora que, durante a fase de *start-up*, os íons por serem muito mais pesados que os elétrons, estarão em repouso ($\mathbf{u}_i = 0$), uma abordagem usual desde o início do estudo do fenômeno plasma (Tonks; Langmuir, 1929), portanto podemos desconsiderar a equação de conservação de momento para os íons. Além disso, podemos definir um termo de produção de partículas que leve em conta o próprio número de partículas. Diremos que $\mathcal{S}_\alpha = S_\alpha/m_\alpha$, e para o caso em questão teremos que $S_e = S_i = \mathcal{S} = n(\nu_+ - \nu_-)$, sendo ν_+ a taxa de ionização e ν_- a taxa de perdas de partículas, que já definimos anteriormente como sendo $\nu_+ = \alpha_T u_{e||}$ e $\nu_- = u_{e||}/L_{ef}$, onde aqui $u_{e||}$ é a velocidade paralela ao campo magnético, também considerada aproximadamente paralela ao campo elétrico toroidal.

A partir das equações (53) e (54), ficamos então com as seguintes equações de transporte:

A equação de conservação de massa

$$\boxed{\frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \mathbf{u}_\alpha) = S_\alpha}. \tag{55}$$

A equação de conservação de momento

$$\boxed{\rho_{m\alpha} \left[\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla)\mathbf{u}_\alpha \right] = n_\alpha q_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) - \nabla p_\alpha + \mathbf{R}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha S_\alpha}. \tag{56}$$

Para partículas do tipo α dentro do plasma, a equação de conservação de massa pode ser escrita em termos da densidade n. Expandindo o termo envolvendo ∇ em

(55), lembrando que a densidade de massa é definida como $\rho_{m\alpha} = n_\alpha m_\alpha$, temos

$$\nabla \cdot (\rho_{m\alpha}\mathbf{u}_\alpha) = m_\alpha(n_\alpha \nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha + \mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla n_\alpha)\,, \tag{57}$$

e retornando

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + n_\alpha \nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha + \mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla n_\alpha = \frac{S_\alpha}{m_\alpha}\,. \tag{58}$$

Mas também temos que $\rho_\alpha = n_\alpha q_\alpha$ é a densidade de cargas e $\mathbf{J}_\alpha = \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha$ é a densidade de corrente dessas cargas, portanto

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_\alpha = q_\alpha(n_\alpha \nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha + \mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla n_\alpha)\,, \tag{59}$$

e retornando (59) em (58) temos finalmente

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{q_\alpha}\nabla \cdot \mathbf{J}_\alpha = \frac{S_\alpha}{m_\alpha}\,. \tag{60}$$

Agora, devemos escrever a equação de conservação de momento em termos da densidade de corrente $\mathbf{J}_\alpha$. Primeiro, notando que

$$\frac{\partial \mathbf{J}_\alpha}{\partial t} = q_\alpha \left(n_\alpha \frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + \mathbf{u}_\alpha \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} \right)\,, \tag{61}$$

ou

$$n_\alpha \frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} = \frac{1}{q_\alpha}\frac{\partial \mathbf{J}_\alpha}{\partial t} - \mathbf{u}_\alpha \frac{\partial n_\alpha}{\partial t}\,. \tag{62}$$

Substituindo em (56)

$$\frac{1}{q_\alpha}\frac{\partial \mathbf{J}_\alpha}{\partial t} - \mathbf{u}_\alpha \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + n_\alpha(\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla)\mathbf{u}_\alpha =$$

$$\frac{n_\alpha q_\alpha}{m_\alpha}(\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) - \frac{1}{m_\alpha}\nabla p_\alpha + \frac{\mathbf{R}_\alpha}{m_\alpha} - \mathbf{u}_\alpha \frac{S_\alpha}{m_\alpha}\,. \tag{63}$$

Levando em conta a equação (60), podemos reescrever o segundo termo em (63). Expandindo o termo não linear da forma

$$n_\alpha(\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla)\mathbf{u}_\alpha = \frac{n_\alpha}{q_\alpha^2}\left(\frac{\mathbf{J}_\alpha}{n_\alpha} \cdot \nabla\right)\frac{\mathbf{J}_\alpha}{n_\alpha}\,, \tag{64}$$

definindo um novo vetor $\overline{\mathbf{J}}_\alpha$ como

$$\overline{\mathbf{J}}_\alpha = \frac{\mathbf{J}_\alpha}{n_\alpha}\,, \tag{65}$$

podemos reescrever a equação (56) como

$$\frac{\partial \mathbf{J}_\alpha}{\partial t} + \left(\frac{\overline{\mathbf{J}}_\alpha}{q_\alpha}\right)\nabla \cdot \mathbf{J}_\alpha + \frac{n_\alpha}{q_\alpha}\left(\overline{\mathbf{J}}_\alpha \cdot \nabla\right)\overline{\mathbf{J}}_\alpha =$$

$$\frac{n_\alpha q_\alpha^2}{m_\alpha}\mathbf{E} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}(\mathbf{J}_\alpha \times \mathbf{B}) - \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\nabla p_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\mathbf{R}_\alpha \,. \tag{66}$$

Considerando a quase neutralidade do plasma e $\nu_{\alpha\beta}$ como a frequência de colisões entre partículas dos tipos α e β, podemos escrever o termo de troca de momento devido às colisões, $\mathbf{R}_\alpha$, como

$$\mathbf{R}_\alpha = -\rho_{m\alpha}\sum_\beta \nu_{\alpha\beta}(\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta) = -nm_e\mathbf{u}_e(\nu_{ei} + \nu_{en}) \,. \tag{67}$$

Definindo ν_+ and ν_- como a taxa de criação e de perda de elétrons, respectivamente, teremos

$$\frac{S_e}{m_e} = n(\nu_+ - \nu_-) \,. \tag{68}$$

Finalmente, lembrando que para elétrons devemos ter que $q_e = -e$, ficamos com as equações:

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} - \frac{1}{e}\nabla \cdot \mathbf{J}_e = n(\nu_+ - \nu_-)}, \tag{69}$$

e

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{J}_e}{\partial t} - \left(\frac{\overline{\mathbf{J}}_e}{e}\right)\nabla \cdot \mathbf{J}_e - \frac{n_e}{e}\left(\overline{\mathbf{J}}_e \cdot \nabla\right)\overline{\mathbf{J}}_e = \frac{n_e e^2}{m_e}\mathbf{E} - \frac{e}{m_e}(\mathbf{J}_e \times \mathbf{B}) + \frac{e}{m_e}\nabla p_e - \mathbf{J}_e(\nu_{ei} + \nu_{en})}\,. \tag{70}$$

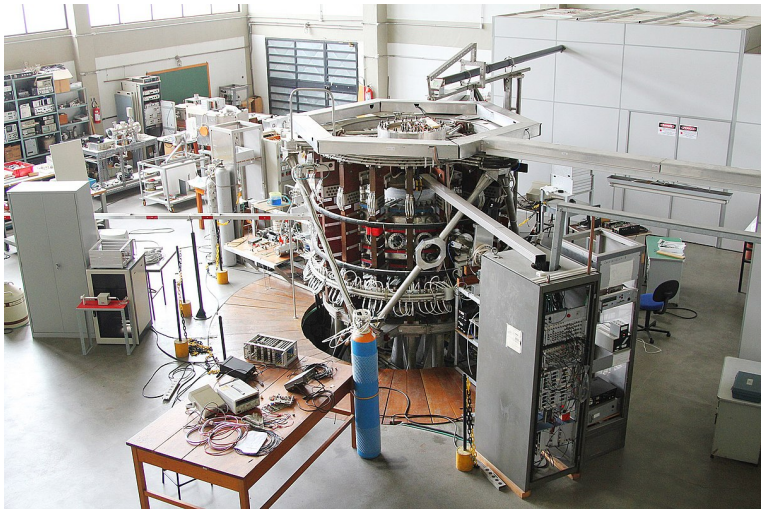
Como os íons são considerados imóveis, sua contribuição para a densidade de corrente é nula e, portanto, $\mathbf{J}_e$ representa a densidade de corrente total do plasma.

A partir do modelo elaborado, foi possível modelar um disparo em um Tokamak com os parâmetros do dispositivo TCABR, do Instituto de Física da Universidade de São Paulo, mostrado na figura 12.

O plasma no TCABR é composto de Hidrogênio e suas descargas costumam usar os meios ôhmicos de aquecimento, com a corrente de plasma na ordem de $i_P \leq 100$kA. Os seus raios menor e maior são, respectivamente, $a = 18$cm e $R_0 = 61,5$cm. O campo magnético toroidal externo no TCABR é da ordem de $\mathbf{B}_\phi \sim 1$T[1] e um disparo completo tem a duração de cerca de 100ms.

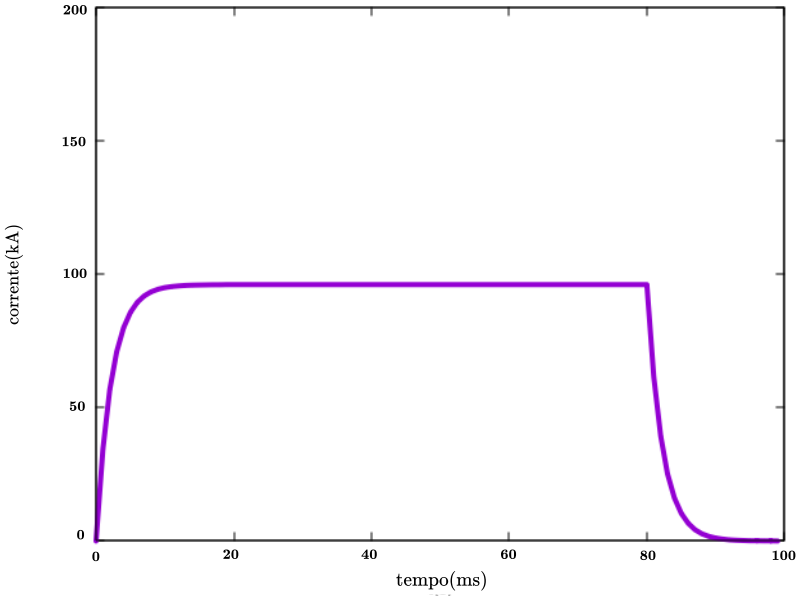
Idealmente, considerando o campo elétrico constante e comprimento efetivo infinito (sem perda de partículas), o comportamento da corrente de plasma durante um disparo completo tem a forma da figura 13, onde ficam bem claras as fases de inicialização, saturação e o fim do disparo, onde vemos que em 0,08 segundos o campo elétrico é desligado e o disparo entra na fase de *ramp-down*. Mas, tratando-se de um disparo real, como na figura 14, onde temos um campo elétrico que não é constante como vemos na figura 15 (semelhante ao comportamento da corrente no solenoide central mostrado na figura 6), e um comprimento efetivo das linhas de campo dinâ-

Figura 12 – O Tokamak *Chauffage Alfvén Brésilien* (TCABR) no Laboratório de Física de Plasmas da Universidade de São Paulo.



Fonte: Wikipédia

Figura 13 – Comportamento da corrente de plasma em condições ideais.

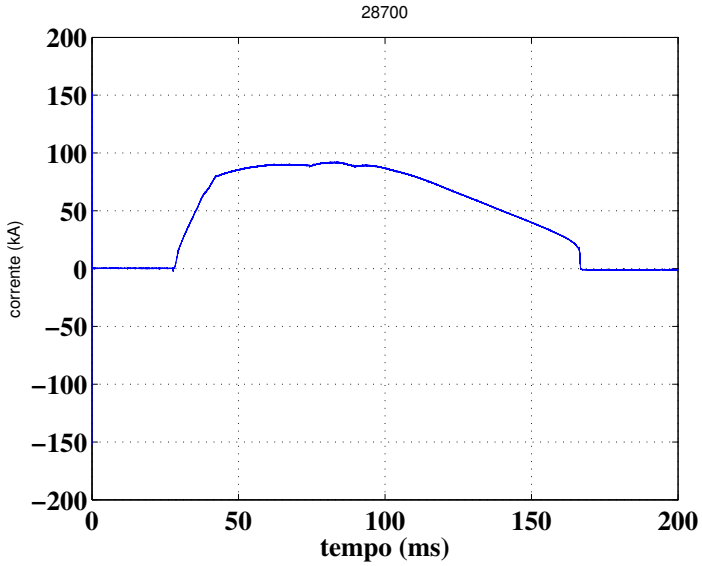


Fonte: o autor.

mico que deve variar nas diferentes fases de um disparo junto com efeitos térmicos e coeficientes de colisão que dependem da temperatura, as etapas do disparo podem não ser tão bem delineadas ao analisarmos o perfil da corrente de plasma.

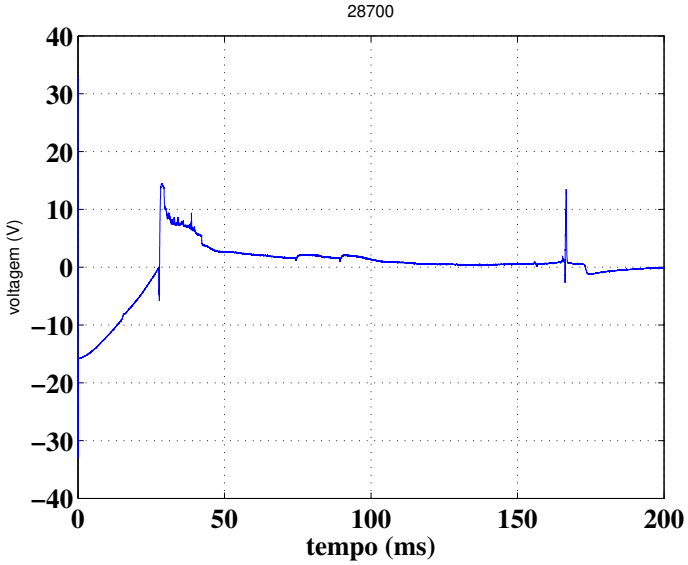
[1] A título de comparação, o campo magnético da Terra varia na ordem de 25μT a 60μT, dependendo da posição na superfície terrestre.

Figura 14 – Comportamento da corrente durante o disparo 28700 no Tokamak TCABR.



Fonte: (Santos, 2019).

Figura 15 – Comportamento da tensão de loop durante o disparo 28700 no Tokamak TCABR.



Fonte: (Santos, 2019).

4.1 A implementação

Para implementar o modelo numericamente, consideramos a geometria do Tokamak para desenvolver as equações usando um sistema de coordenadas cilíndrico mas axialmente simétrico, de forma que $\partial/\partial\phi = 0$, e teremos variação em apenas duas coordenadas espaciais, R e Z.

- Para os termos envolvendo o operador ∇ nas equações (69) e (70), considerando $(\partial/\partial\phi = 0)$, devemos ter que

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_e = \frac{J_R}{R} + \frac{\partial J_R}{\partial R} + \frac{\partial J_z}{\partial z}\,, \tag{71}$$

e

$$\left(\overline{\mathbf{J}}_e \cdot \nabla\right) \overline{\mathbf{J}}_e = \left(\overline{J}_{eR} \frac{\partial \overline{J}_{eR}}{\partial R} + \overline{J}_{ez} \frac{\partial \overline{J}_{eR}}{\partial z} - \frac{\overline{J}_{e\phi}^2}{R} \right) \hat{\mathbf{R}} + \left(\overline{J}_{eR} \frac{\partial \overline{J}_{e\phi}}{\partial R} + \overline{J}_{ez} \frac{\partial \overline{J}_{e\phi}}{\partial z} + \frac{\overline{J}_{e\phi} \overline{J}_{eR}}{R} \right) \hat{\phi}$$

$$+ \left(\overline{J}_{eR} \frac{\partial \overline{J}_{ez}}{\partial R} + \overline{J}_{ez} \frac{\partial \overline{J}_{ez}}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{z}} \,. \tag{72}$$

- O termo envolvendo a pressão é escrito como

$$p_e = n_e k_b T_e \rightarrow \nabla p_e = k_b T_e \nabla n_e \,, \tag{73}$$

já que consideramos a temperatura constante. Isso nos leva a

$$\nabla p_e = k_b T_e \nabla n_e = k_b T_e \left(\frac{\partial n_e}{\partial R} \hat{\mathbf{R}} + \frac{\partial n_e}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \right) \,. \tag{74}$$

- Dado o sistema de coordenadas cilíndrico usado, os componentes dos campos eletromagnéticos serão

$$\mathbf{B} = B_R \hat{e}_R + B_\phi \hat{e}_\phi + B_Z \hat{e}_Z + B_{ext} \hat{e}_\phi \,, \tag{75}$$

e

$$\mathbf{E} = E_R \hat{e}_R + E_\phi \hat{e}_\phi + E_z \hat{e}_Z + E_{ext} \hat{e}_\phi \,. \tag{76}$$

Além disso, o produto $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ deve ser

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = (J_\phi B_Z - J_Z B_\phi) \hat{e_R} + (J_Z B_R - J_R B_Z) \hat{e_\phi} + (J_R B_\phi - J_\phi B_R) \hat{e_Z} \,. \tag{77}$$

- A dependência em R do campo externo E_{ext} gerado pelo solenoide central é dada por

$$V_{loop} = \oint E_\phi dl = 2\pi R E_\phi \rightarrow E_\phi = \frac{V_{loop}}{2\pi R} \,. \tag{78}$$

- Já para o campo magnético externo B_{ext} gerado pelas bobinas toroidais temos, a partir da lei de Ampère $\nabla \times \mathbf{B}_\phi = \mu_0 \mathbf{J}$, que

$$\int (\nabla \times \mathbf{B}_\phi) \cdot d\mathbf{S} = \int \mu_0 \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \,, \tag{79}$$

ou usando o teorema de Stokes

$$\oint \mathbf{B}_\phi dl = \int \mu_0 \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \rightarrow 2\pi R B_\phi(R) = \mu_0 I_T \,, \tag{80}$$

onde I_T é a corrente total que percorre as bobinas toroidais. Com isso, temos que

$$2\pi R B_\phi(R) = 2\pi R_0 B_\phi(R_0) = \mu_0 I_T \,, \tag{81}$$

e então temos o campo externo toroidal em termos da direção R

$$B_\phi(R) = \frac{R_0 B_\phi(R_0)}{R} \,, \tag{82}$$

- Temos que $\nu_+ = \alpha_T u_{e,||}$ e como $J = neu_e$, podemos reescrever ν_+ como $\nu_+ = \alpha_T J/ne$. E fazendo a mesma substituição em $\nu_- = u_{e,||}/L_{eff}$, teremos que $\nu_- = J/(L_{eff}ne)$.

- O primeiro coeficiente de Townsend, α_T, será dado por

$$\alpha_T = C_1 p_n e^{-C_2 \frac{p_n}{E_\phi}} \,, \tag{83}$$

onde C_1 e C_2 são constantes que dependem do gás. Para o Deutério, $C_1 = 3.9$Pa^{-1}.m^{-1} e $C_2 = 96.6$V.Pa^{-1}.m^{-1}.

- Tomando os valores numéricos dos coeficientes de colisão, usando os valores disponíveis no 2023 NRL PLASMA FORMULARY (Beresnyak, 2023), temos que para a frequência de colisões ν_{en}

$$\nu_{en} = n_n \sigma \left(\frac{k_b T_e}{m_e}\right)^{1/2} \,, \tag{84}$$

onde σ é a seção de choque e o termo n_n nos dá a densidade de partículas neutras. Para o coeficiente ν_{ei}, temos que

$$\nu_{ei} = 3,9.10^{-6} \left(T_e\right)^{-3/2} n \,. \tag{85}$$

Considerando os termos de colisões ν_{ei} e ν_{en} como proporcionais à densidade de íons e de átomos neutros respectivamente, temos que a densidade do número de neutros deve ser a densidade do gás neutro que preenche a câmara de vácuo inicialmente, que chamamos de n_0 e deve diminuir conforme a densidade de elétrons total n aumenta. Porém, nesse caso, é preciso distinguir entre a variação na densidade devido ao processo de ionização e a variação ocasionada pelo transporte de elétrons devido ao termo $\nabla \cdot \mathbf{J}$, de forma que

$$\nu_{ei} + \nu_{en} = \mathbf{C}_{ei} n + \mathbf{C}_{en}(n_n) \rightarrow n_n = n_0 - (n - \frac{\Delta t}{e} \nabla \cdot \mathbf{J}) \,, \tag{86}$$

onde os coeficientes $\mathbf{C}$ são constantes e Δt define um determinado intervalo

temporal.

Levando em conta apenas os campos externos, junto ao descrito acima, as principais equações do modelo terão a seguinte forma:

- Da densidade

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{e}\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{J_\phi}{e}\left(\alpha_T - \frac{1}{L_{eff}}\right). \tag{87}$$

E da corrente,

- Na direção R

$$\frac{\partial J_R}{\partial t} = \frac{ek_bT_e}{m_e}|\nabla n|_R + \frac{\overline{J}_R}{e}\left(\nabla \cdot \mathbf{J}\right)$$

$$+\frac{n}{e}|\left(\overline{\mathbf{J}} \cdot \nabla\right)\overline{\mathbf{J}}|_R - J_R(\mathbf{C}_{ei}n + \mathbf{C}_{en}n_n) + \frac{e}{m_e}(J_Z B_\phi), \tag{88}$$

- na direção ϕ,

$$\frac{\partial J_\phi}{\partial t} = \frac{ne^2}{m_e}E_\phi + \frac{\overline{J}_\phi}{e}\left(\nabla \cdot \mathbf{J}\right) + \frac{n}{e}|\left(\overline{\mathbf{J}} \cdot \nabla\right)\overline{\mathbf{J}}|_\phi - J_\phi(\mathbf{C}_{ei}n + \mathbf{C}_{en}n_n), \tag{89}$$

- e na direção z,

$$\frac{\partial J_Z}{\partial t} = \frac{ek_bT_e}{m_e}|\nabla n|_Z + \frac{\overline{J}_z}{e}\left(\nabla \cdot \mathbf{J}\right)$$

$$+\frac{n}{e}|\left(\overline{\mathbf{J}} \cdot \nabla\right)\overline{\mathbf{J}}|_Z - J_Z(\mathbf{C}_{ei}n + \mathbf{C}_{en}n_n) - \frac{e}{m_e}(J_R B_\phi). \tag{90}$$

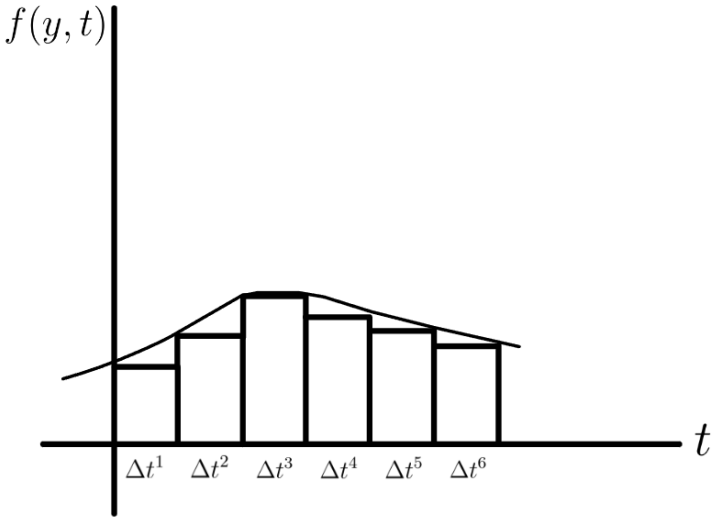
4.2 O Esquema Numérico

- Para resolver (integrar numericamente) uma equação diferencial do tipo $f(y,t) = dy/dt$, é possível discretizar a equação no tempo e aproximar a solução em um esquema de diferenças finitas (Tajima, 2018), como ilustra a figura 16. Para uma derivada primeira, usamos o esquema de Euler:

$$\boxed{\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t} = f \quad \rightarrow \quad y_{i+1} = y_i + \Delta t f}. \tag{91}$$

- A geometria do Tokamak é construída em uma grade discretizada, levando em conta os raios maior R_0 e menor a, como ilustrado na figura 5. Temos dentro

Figura 16 – Esquematização do método de Euler para integrar numericamente uma equação diferencial.



Fonte: o autor

da câmara de vácuo um ”raio mínimo” que chamaremos de R_{min} e será definido como $R_{min} = R_0 - a$ e da mesma forma um ”raio máximo”, $R_{max} = R_0 + a$. Sendo N o número de pontos atribuídos a essa grade, o espaçamento que ela possui na direção R será

$$\Delta r = \frac{R_{max} - R_{min}}{N-1}\,, \tag{92}$$

e com isso a direção espacial R é definida como

$$R(i) = R_{min} + (i-1)\Delta r\,. \tag{93}$$

Já o seu espaçamento na direção z é dado por

$$\Delta z = \frac{2a}{N-1}\,, \tag{94}$$

e a direção espacial z é construída como

$$z(j) = -a + (j-1)\Delta z\,. \tag{95}$$

- Com isso, usamos o método de Euler para resolver as equações diferenciais que governam a evolução da densidade (87) e da corrente (88)-(90), considerando as duas direções espaciais R e z como i e j, e o índice temporal como k.

- A equação (87) se torna:

$$n^{k+1}_{(i,j)} = n^{k}_{(i,j)}$$

$$+\Delta t\left[\frac{1}{e}|\nabla\cdot\mathbf{J}|^k_{(i,j)}+\frac{J^k_{\phi(i,j)}}{e}\left(\alpha^k_{T(i,j)}-\frac{1}{L^k_{eff(i,j)}}\right)\right]. \tag{96}$$

- A equação (88):

$$\frac{J^{k+1}_{R(i,j)}-J^k_{R(i,j)}}{\Delta t}=\frac{ek_bT_e}{m_e}|\nabla n|^k_{R(i,j)}+\frac{\overline{J}^k_{R(i,j)}}{e}\left(|\nabla\cdot\mathbf{J}|^k_{(i,j)}\right)$$

$$+\frac{n^k_{(i,j)}}{e}|\left(\overline{\mathbf{J}}\cdot\nabla\right)\overline{\mathbf{J}}|^k_{R(i,j)}-J^k_{R(i,j)}(\mathbf{C}_{ei}n^k_{(i,j)}+\mathbf{C}_{en}n^k_{n(i,j)})+\frac{e}{m_e}(J^k_{Z(i,j)}B^k_{\phi(i,j)})\,. \tag{97}$$

- A equação (89):

$$\frac{J^{k+1}_{\phi(i,j)}-J^k_{\phi(i,j)}}{\Delta t}=\frac{n^k_{(i,j)}e^2}{m_e}E^k_{\phi(i,j)}+\frac{\overline{J}^k_{\phi(i,j)}}{e}\left(|\nabla\cdot\mathbf{J}|^k_{(i,j)}\right)$$

$$+\frac{n^k_{(i,j)}}{e}|\left(\overline{\mathbf{J}}\cdot\nabla\right)\overline{\mathbf{J}}|^k_{\phi(i,j)}-J^k_{\phi(i,j)}(\mathbf{C}_{ei}n^k_{(i,j)}+\mathbf{C}_{en}n^k_{n(i,j)})\,. \tag{98}$$

- E a equação (90):

$$\frac{J^{k+1}_{Z(i,j)}-J^k_{Z(i,j)}}{\Delta t}=\frac{ek_bT_e}{m_e}|\nabla n|^k_{Z(i,j)}+\frac{\overline{J}^k_{Z(i,j)}}{e}\left(|\nabla\cdot\mathbf{J}|^k_{(i,j)}\right)$$

$$+\frac{n^k_{(i,j)}}{e}|\left(\overline{\mathbf{J}}\cdot\nabla\right)\overline{\mathbf{J}}|^k_{Z(i,j)}-J^k_{Z(i,j)}(\mathbf{C}_{ei}n^k_{(i,j)}+\mathbf{C}_{en}n^k_{n(i,j)})-\frac{e}{m_e}(J^k_{R(i,j)}B^k_{\phi(i,j)})\,. \tag{99}$$

- Por fim temos a evolução da pressão

$$p^k_{n(i,j)}=(n_0-n^k_{(i,j)}+\frac{\Delta t}{e}|\nabla\cdot\mathbf{J}|^k_{(i,j)})k_bT_n=n^k_{n(i,j)}k_bT_n\,, \tag{100}$$

  e o coeficiente de Townsend

$$\alpha^k_{T(i,j)}=C_1p^k_{n(i,j)}exp(-C_2p^k_{n(i,j)}/E^k_{\phi(i,j)})\,. \tag{101}$$

- Os campos externos toroidais E_{ext} e B_{ext} dados em (78) e (82) serão definidos como

$$E_\phi(i,j)=\frac{E_0}{R(i)}\,, \tag{102}$$

  e

$$B_\phi(i,j)=\frac{B_0}{R(i)}\,, \tag{103}$$

  onde, como a magnitude desses campos será explorada de forma paramétrica,

definimos $V_{loop}/2\pi = E_0$ e $R_0 B_\phi(R_0) = B_0$, respectivamente.

As equações (96)-(103) formam o sistema de equações interdependentes que definem nosso modelo e que deve ser evoluído no tempo.

4.3 Algumas considerações

Para evitar o custo computacional que se traduziria em tempo de iteração, o campo elétrico foi aumentado em algumas ordens de grandeza, enquanto o campo magnético foi reduzido. Isso por dois motivos: A dependência em R de ambos os campos $\mathbf{B}_\phi$ e $\mathbf{E}_\phi$ implica que sua computação depende do número de pontos na grade discretizada $R(i)$ e para que o sistema possa evoluir sem apresentar instabilidade numérica, teríamos que atribuir mais números à essa grade o que, por sua vez, elevaria o tempo de iteração. Isso fica melhor esclarecido ao Anexo A, onde vemos algumas figuras representando a ionização líquida para determinados valores de campo elétrico. Temos que à medida que o campo elétrico é diminuído, a ionização fica concentrada em determinadas regiões de R, o que produz gradientes mais íngremes, que requerem uma maior resolução da grade numérica para serem adequadamente tratados. Além disso, em física de plasmas temos um termo importante conhecido como frequência de Larmor ou frequência de cíclotron, que nos dá a frequência de giro das partículas em torno das linhas de campo magnético, e para os elétrons ela é definida como $\omega_e = eB/m_e = 1.76 \times 10^{11} B$. Como nosso sistema depende do movimento dos elétrons, teremos um limite físico no nosso passo temporal Δt, que será limitado pelo período de cíclotron dos elétrons, $1/\omega_e$. Já que o número de iterações e o passo temporal devem ter uma relação constante e nesse caso, conforme aumentarmos o valor do campo magnético $\mathbf{B}_\phi$, menor deve ser o valor de Δt, e quanto menor este for, maior o número de iterações necessárias. Os resultados, embora tenham valores um pouco diferentes de um disparo real, têm a mesma forma e são consistentes com o esperado fisicamente.

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

5.1 Evolução temporal das principais quantidades do plasma

Nos gráficos apresentados abaixo, o valor total das quantidades é obtido integrando seus valores numericamente ao longo da seção reta do reator, enquanto a densidade se refere ao valor medido exatamente no centro da seção reta. A intensidade de corrente i é dada em Ampère (A), a densidade de corrente em Ampère por metro quadrado $(\mathrm{A/m^2})$ e a pressão em Pascal (Pa). Para a obtenção dos resultados, usamos um valor de $6 \times 10^{19}/\mathrm{m}^3$ para a densidade do gás neutro que preenche a câmara de vácuo do reator, a uma temperatura de 300K. Os campos externos têm a forma dada em (102) e (103), com $\mathbf{E}_0 = 10^3$V e $\mathbf{B}_0 = 10^{-2}$T.m.

A partir de uma densidade de elétrons-semente muito pequena da ordem de $\sim 10^{-8}\%$ do valor da densidade do gás neutro, foi possível obter um aumento abrupto na corrente e densidade, até o ponto de saturação. No gráfico 17 vemos esse aumento na corrente total de plasma na principal direção do reator, a direção toroidal.

Figura 17 – Evolução temporal da corrente total durante a inicialização de plasma na direção toroidal.

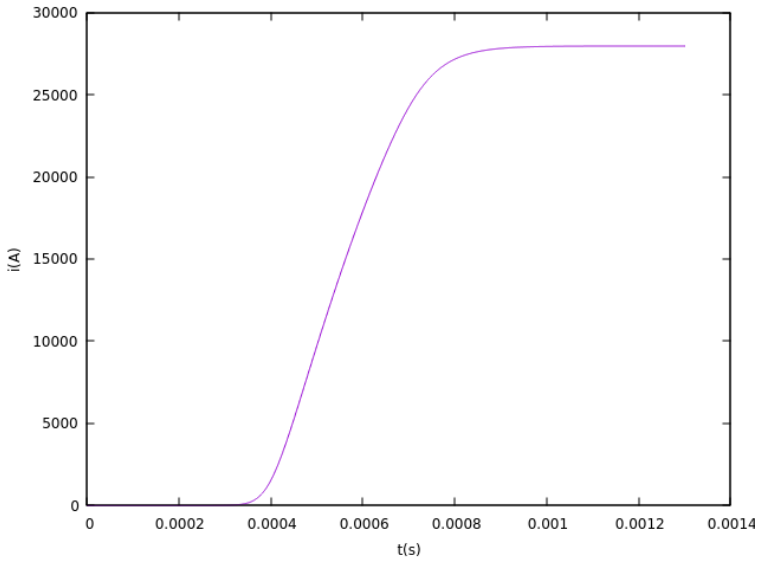
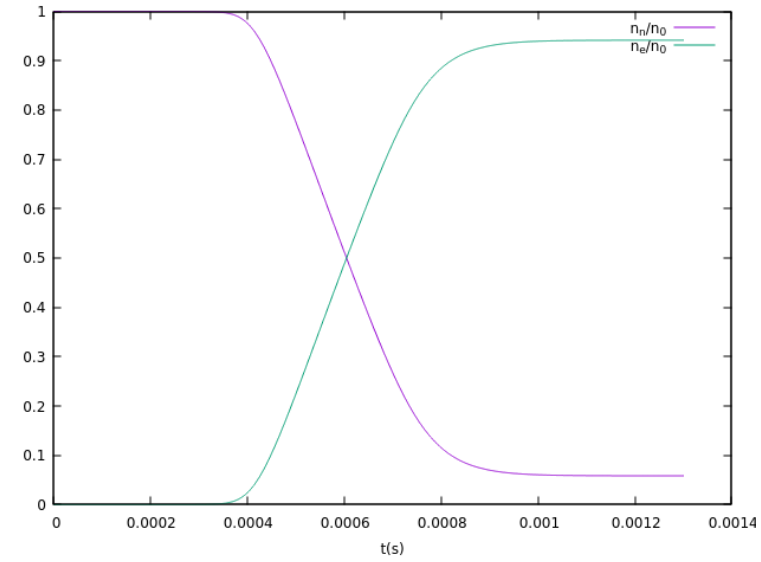
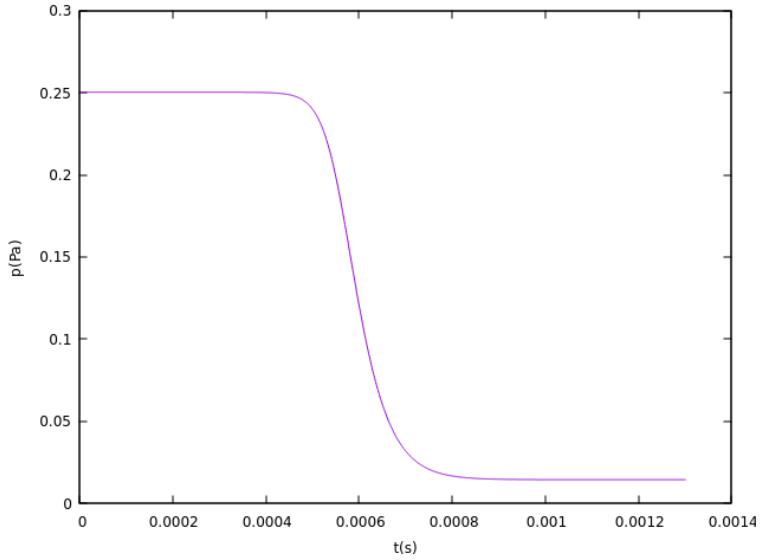


Figura 18 – Evolução temporal da densidade total de elétrons em relação à de partículas neutras, normalizadas pela densidade inicial.



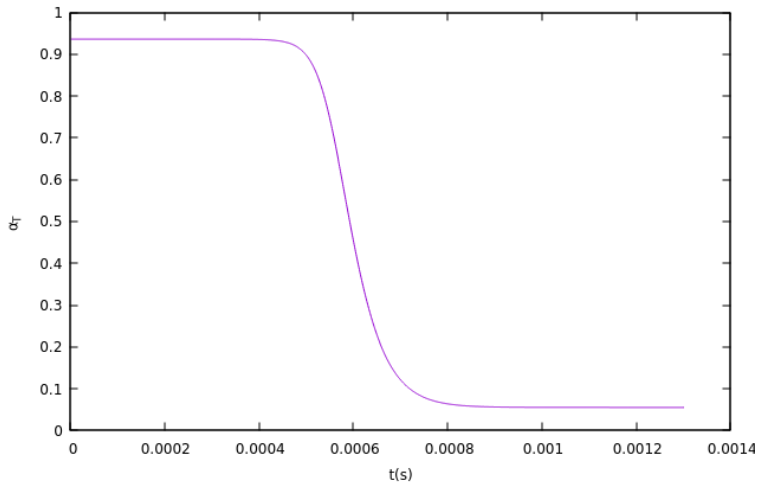
Além disso, foi possível obter a evolução da densidade total de partículas neutras e elétrons, ambas normalizadas pela densidade inicial de partículas do gás que preenche a câmara de vácuo, como vemos na figura 18. Como a quantidade total de gás é mantida constante, vemos a quantidade de partículas neutras diminuindo na mesma razão em que a densidade de elétrons aumenta.

Figura 19 – Evolução temporal da pressão exercida pelas partículas neutras do gás.



Com isso, no gráfico 19 vemos o comportamento da pressão exercida pelas partículas neutras, que decresce junto com o gráfico anterior, como esperado. Da mesma forma, temos na figura 20 o comportamento do coeficiente de Townsend, α_T, que também decresce conforme as partículas neutras vão sendo ionizadas e, como a quanti-

Figura 20 – Evolução temporal do Coeficiente de Townsend α_T.



dade total do gás inicial é mantida constante, chega-se a um ponto onde quase não há partículas ainda por ionizar. Importante notar que os gráficos 17 a 20 têm um comportamento semelhante de crescimento e decrescimento, a partir de um instante específico, o que ficará mais claro mais abaixo.

Figura 21 – Evolução espacial da densidade de corrente toroidal na seção transversal do reator.

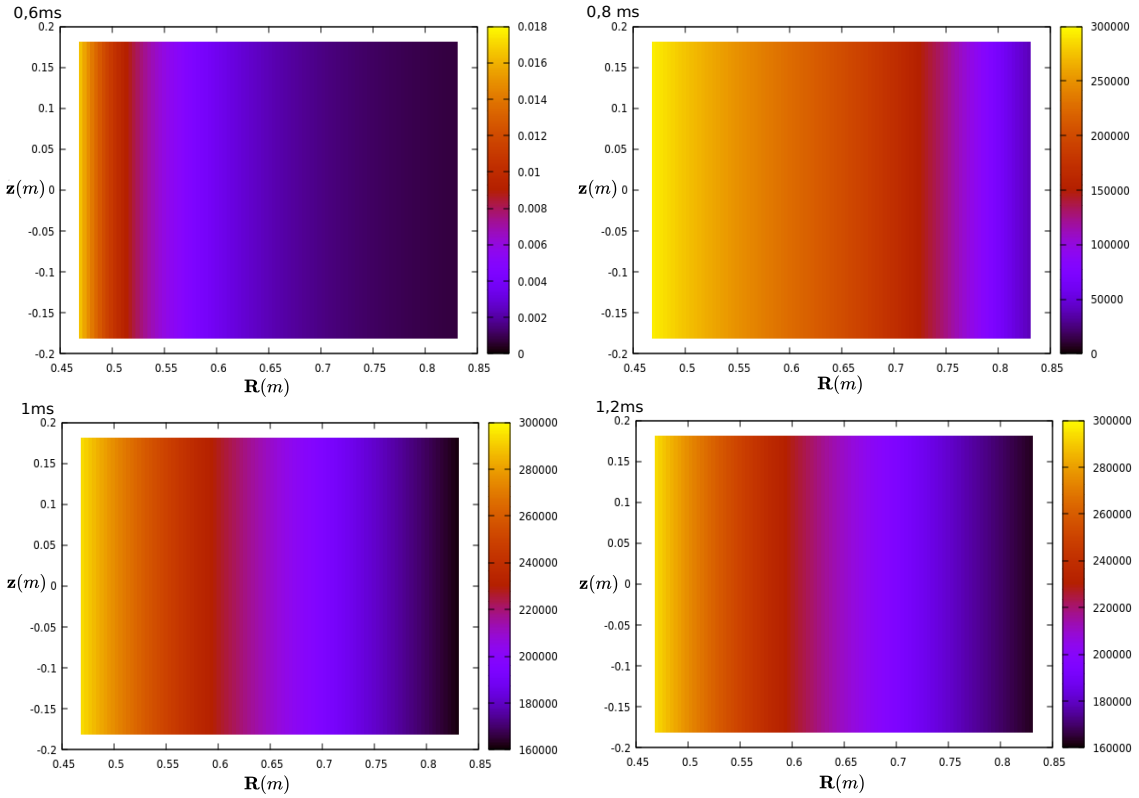
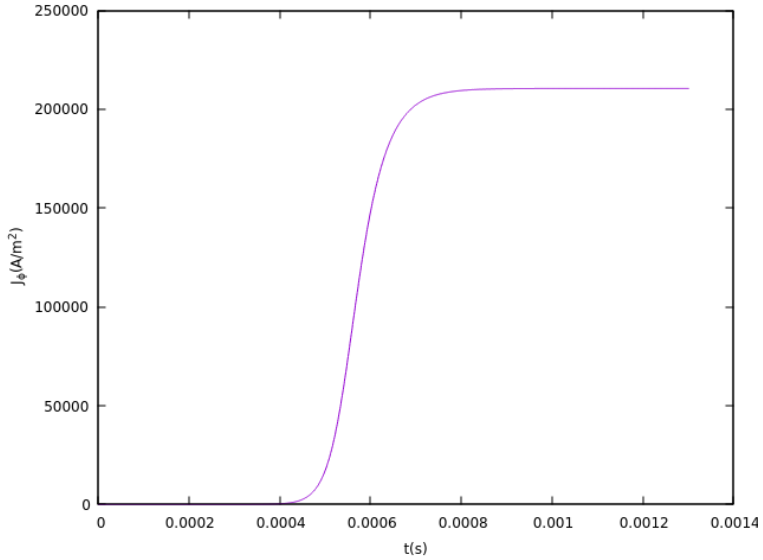
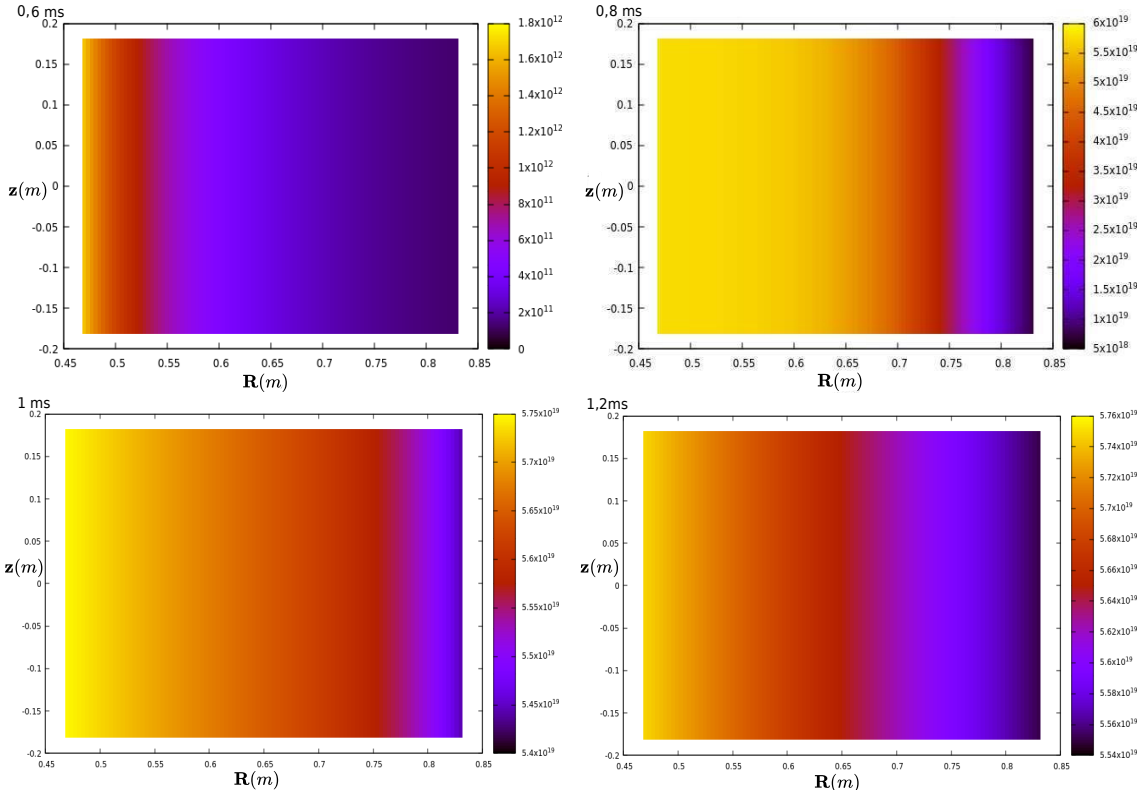


Figura 22 – Evolução temporal da densidade de corrente toroidal no centro do reator.



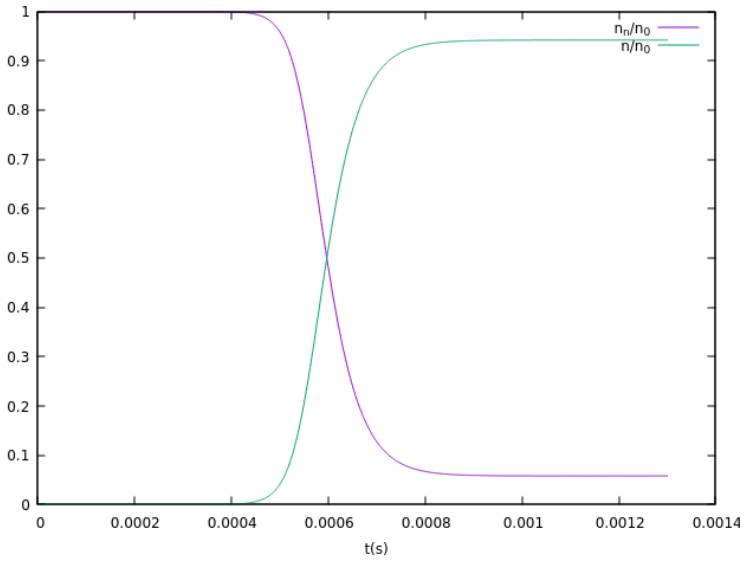
É possível ainda olharmos para a seção transversal do reator, e vermos o comportamento espacial das quantidades que mostramos acima. Primeiro, na figura 21 vemos o comportamento espacial da densidade de corrente na direção principal do reator, a direção toroidal.

Figura 23 – Evolução espacial da densidade de elétrons na seção reta do reator.



Já na figura 23, vemos o comportamento espacial da densidade de elétrons. Uma

Figura 24 – Evolução temporal da densidade de elétrons e da densidade de partículas neutras, ambas normalizadas pela densidade inicial registradas no centro do reator.



vez que os campos elétrico e magnético externos são proporcionais a $1/R$, temos que a corrente e densidade também devem ter essa dependência, como vemos nos gráficos 21 e 23. Nos gráficos 22 e 24, vemos o comportamento no tempo da densidade de corrente e da densidade de partículas neutras e ionizadas, respectivamente, ambas registradas exatamente no centro do reator.

Uma vez que as partículas carregadas seguem as linhas de campo e o comprimento efetivo destas, L_{ef}, é diretamente proporcional ao campo magnético toroidal que, por sua vez, tem uma dependência de $1/R$, temos que a ionização se dá no sentido crescente da coordenada R, já que é onde o comprimento de conexão efetivo é maior e as partículas carregadas percorrem as maiores distâncias ao redor do toroide. Como visto na figura 23, a densidade aumenta no sentido crescente de R e no gráfico 25 vemos o motivo. Isso fica ainda mais claro quando comparamos o comportamento do coeficiente de Townsend, que nos mostra o aumento da ionização na seção no sentido crescente de R, como vemos em 26. Vemos a ionização avançando na seção reta, conforme as partículas neutras vão sendo ionizadas e a densidade de partículas ainda por ionizar está na direção de R crescente.

Além disso, foi possível obter a evolução espacial do gradiente de pressão ∇p durante o início do processo, como mostrado no gráfico 27. Como temos que o aumento da densidade se dá na direção de R crescente como na figura 23, o gradiente de pressão, como definido em (73), nos mostra a direção de maior crescimento de densidade de elétrons e, ao mesmo tempo, a direção da força exercida pela pressão dos elétrons dentro da câmara do reator.

Também obtivemos a direção da força magnética $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ exercida sobre as partícu-

Figura 25 – O comprimento de conexão efetivo das linhas de campo magnético e sua dependência em R.

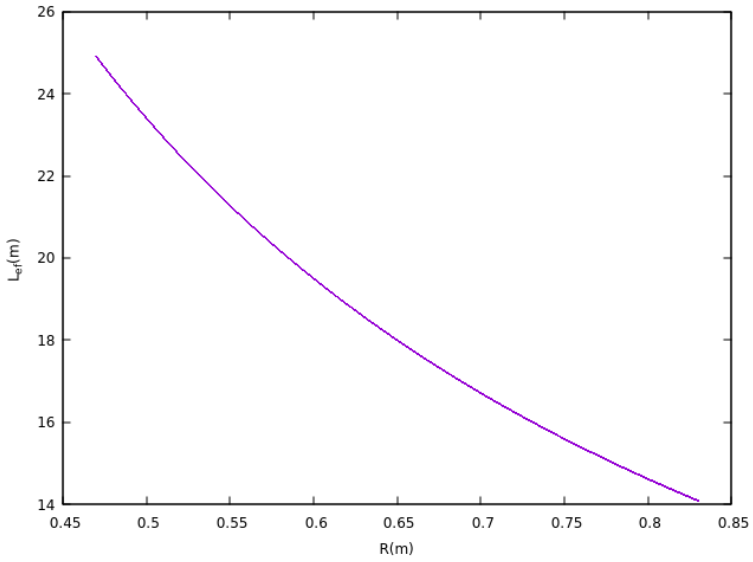
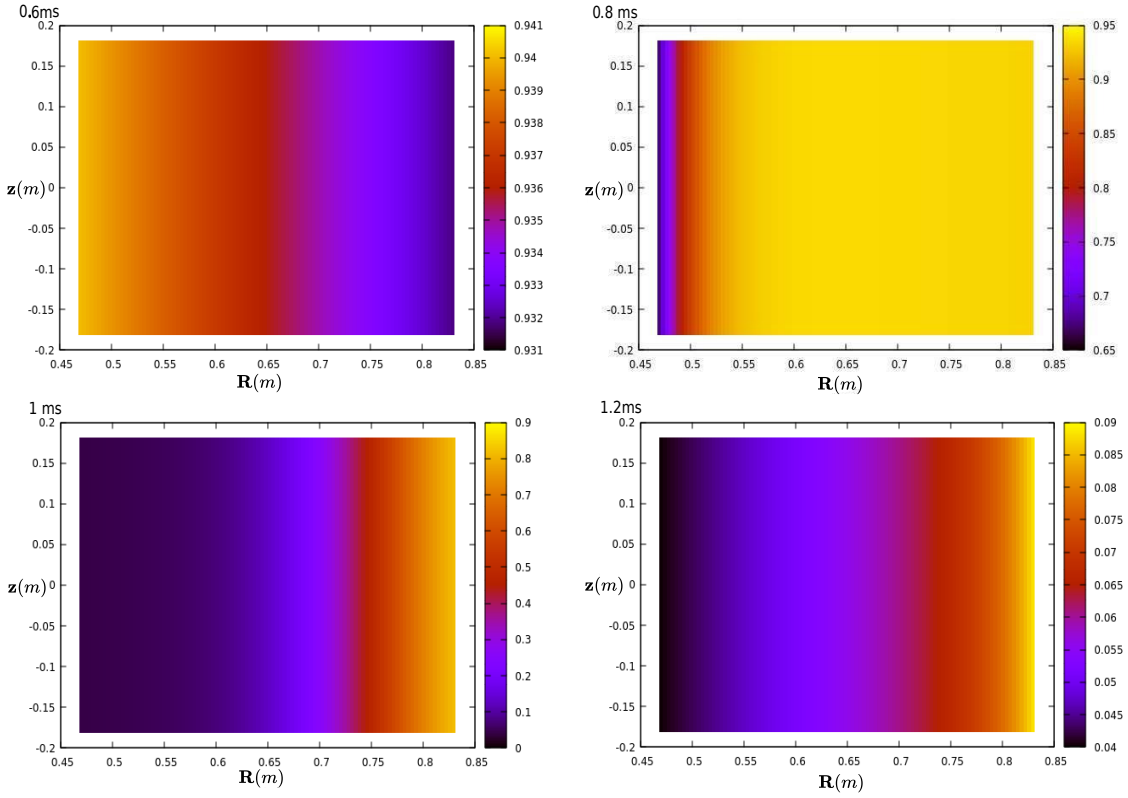


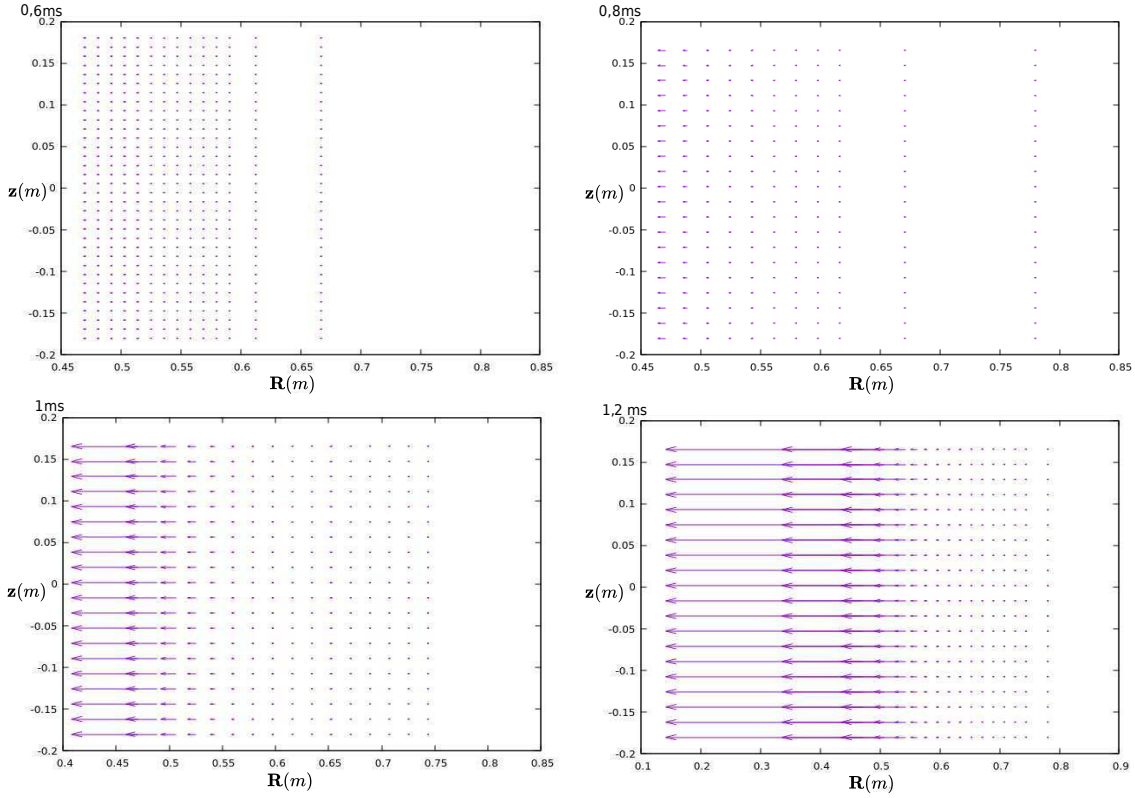
Figura 26 – Evolução espacial do coeficiente de Townsend.



las do plasma, na figura 28. Conforme R diminui, a intensidade do campo magnético aumenta e vemos a tendência da força magnética de ”torcer” a trajetória das partículas.

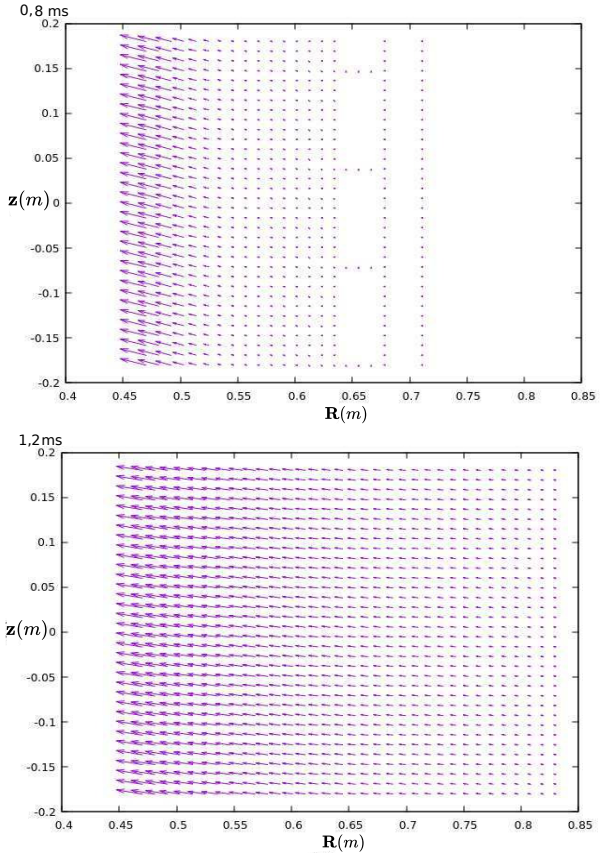
Como usamos um campo magnético pequeno, essa alteração não é tão aparente

Figura 27 – Evolução do gradiente de pressão durante o início do processo de inicialização.



conforme avançamos na direção R. Vemos com isso a consistência do nosso modelo, já que as quantidades físicas analisadas são interdependentes e devem evoluir em conjunto, de acordo com determinadas quantidades como a densidade inicial, os campos externos $\mathbf{B}_\phi$ e $\mathbf{E}_\phi$ e as dimensões físicas do reator.

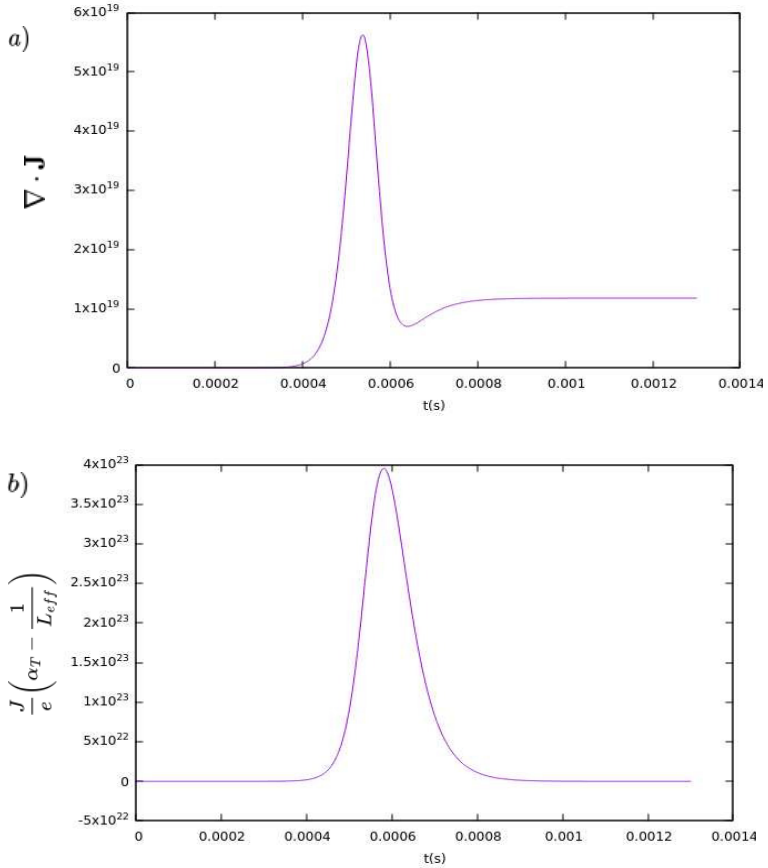
Figura 28 – A direção da Força magnética $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ atuando sobre as partículas do plasma.



5.2 Certas nuances matemáticas.

Além do que foi posto acima, é possível fazermos outra análise: a dos termos individuais das equações que nos dão a evolução de densidade e corrente, como postas em (87) até (90). É usual em livros-texto de dinâmica de fluidos e física de plasmas descartar os termos envolvendo ∇ nas equações de transporte devido ao aumento na complexidade do modelo quando estes termos se fazem presentes, o que acarreta em considerar o fluido incompressível. Ao optarmos por não descartar os termos de compressibilidade como ∇n e os outros termos não lineares, nos foi possível uma análise dos termos envolvendo o operador ∇, como por exemplo a obtenção do comportamento do gradiente de pressão, como mostrado acima, que em um fluido pode ser considerado como a força por unidade de volume. Além disso, podemos analisar o comportamento físico e matemático desses termos em sua evolução temporal, de forma a compreender melhor o funcionamento do modelo que elaboramos. Os termos analisados aqui foram todos obtidos a partir dos valores medidos no centro do reator.

Figura 29 – Evolução dos termos envolvendo o operador ∇ na equação (87).

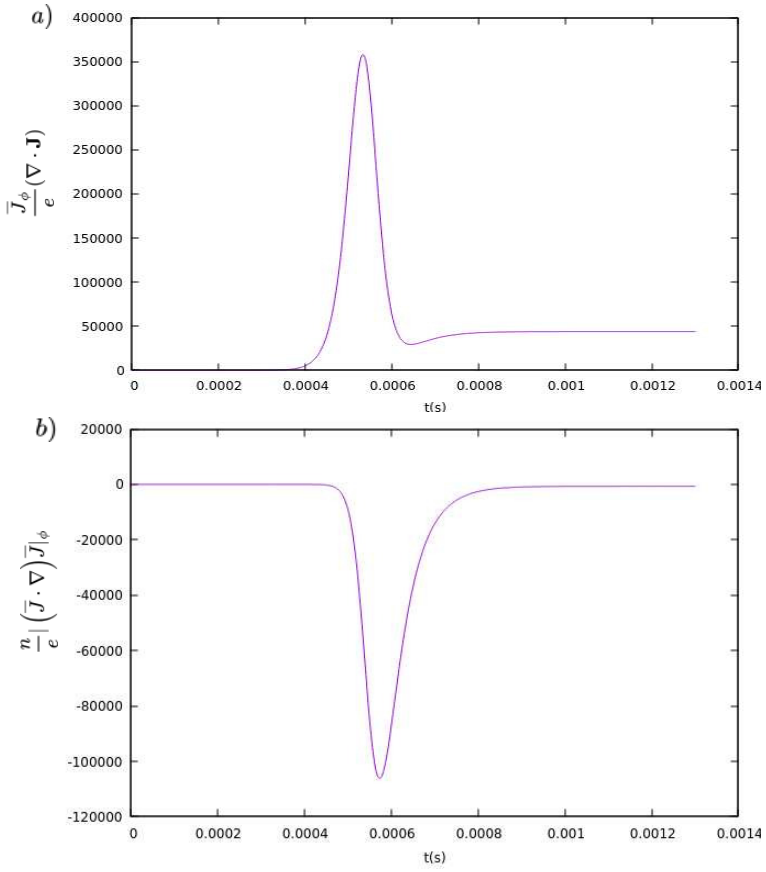


Na figura 29 o termo $b)$ é um dos mais importantes do nosso modelo, uma vez que nos mostra a relação entre criação e perda de partículas no tempo. Vemos um pico de criação de partículas, onde a densidade e a corrente atingem seu valor de *flat-top*, como podemos ver no gráfico 22, que é onde o coeficiente de ionização excede totalmente as perdas e temos o aumento abrupto no número de partículas ionizadas.

Uma vez que o número total de partículas é mantido constante, temos que a ionização deve diminuir conforme diminuem as partículas ainda por ionizar, até o ponto em que ambos os coeficientes voltam à equivalência.

Na figura 30, o termo divergente em $a)$ se assemelha ao divergente em $a)$ na figura 29, porém em magnitude reduzida, já que é multiplicado pela quantidade normalizada $\overline{J}_\phi$. Da mesma forma, o termo em 30 $a)$ tem o mesmo comportamento, limitado devido à quantidade que envolve o divergente, porém mostra o aumento abrupto na corrente bastante semelhante ao gráfico anterior, como esperamos de um divergente nesta situação de aumento abrupto de partículas. Assim como o divergente em 29 $a)$, ambos têm o pico durante o mesmo instante, que é onde temos o aumento abrupto na corrente.

Figura 30 – Evolução dos termos envolvendo o operador ∇ da equação (88).



O termo envolvendo ∇n , mostrado no gráfico 31 $a)$, tem um papel interessante no sistema, já que nos mostra o aumento na densidade de partículas no mesmo instante que o gráfico $b)$ em 29, porém negativo, pois, como mostramos acima, o aumento da densidade é maior onde R é menor. Esse termo nos ajuda a entender o comportamento dos termos não lineares das equações de corrente nas direções R e z. Lembrando a definição dos termos não lineares em coordenadas cilíndricas como dados em (72), temos que nas duas direções os termos normalizados $\overline{J}_\phi$ e $\overline{J}_Z$ serão os termos mais expressivos devido à sua dependência na densidade, como dada em (65). Essa mesma dependência na densidade explica o comportamento dos termos não lineares em 30 $b)$ e 32 $b)$, já que n tem o maior crescimento de todos os componentes analisados, sua variação espacial acaba determinando o comportamento desses termos.

Figura 31 – Evolução dos termos envolvendo o operador ∇ da equação (89).

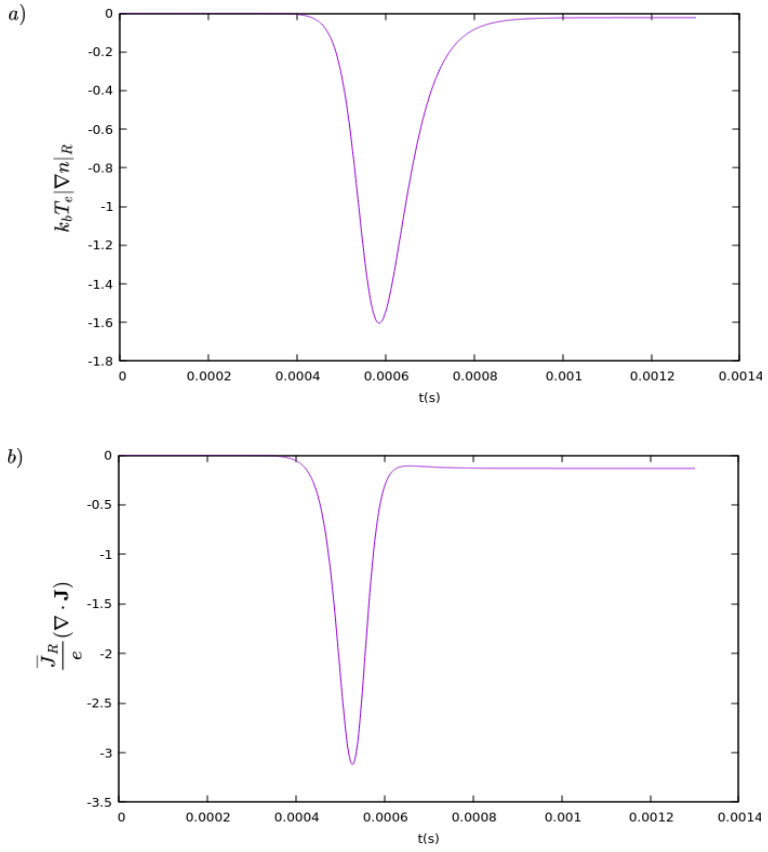
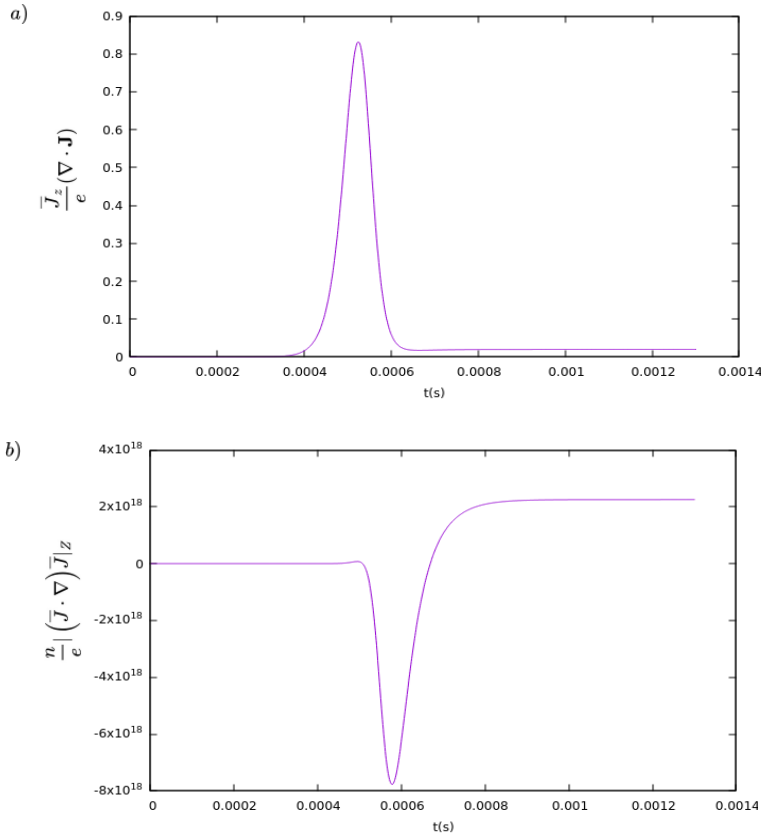


Figura 32 – Evolução dos termos envolvendo o operador ∇ da equação (90).



6 CONCLUSÃO

Além do que foi tratado aqui, existem outros termos envolvendo o operador ∇ que podem vir a ser úteis em trabalhos futuros. Sabemos que, devido à dependência em R do campo magnético toroidal $\mathbf{B}_\phi$, há uma curvatura neste campo que gera um gradiente intrínseco. Tanto a curvatura quanto o gradiente geram velocidades de arrasto nas partículas carregadas do plasma, que têm direções opostas: elétrons para cima e íons para baixo. Isso, por fim, ocasiona uma separação de cargas que, por sua vez, gera um campo elétrico perpendicular ao campo magnético toroidal. Esse campo elétrico resulta em um outro termo de arrasto $\mathbf{E} \times \mathbf{B}_\phi$ que tende a empurrar as partículas carregadas radialmente na direção das paredes do reator, o que causa uma perda significativa de partículas em sistemas de confinamento toroidais.

E tratando-se do modelo num todo, ainda outras análises são possíveis, como considerar a equação de transporte de energia (51) e, com isso, analisar os efeitos da variação de temperatura. Além disso, é possível incluir os termos de perdas de partículas por meio de recombinação e de energia por meio de emissão de radiação. Pode-se ainda incorporar no modelo os campos gerados pelo próprio plasma devido à sua própria corrente que, por sua vez, interagem com o plasma e com os campos externos, onde passamos a considerar os campos eletromagnéticos totais como a soma dos campos externos com os campos gerados pelo plasma. Usando o calibre de Lorentz $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \partial V / \partial t$, podemos escrever as seguintes relações:

$$\nabla^2 \mathbf{A}_{pl} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}_{pl}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} \,, \tag{104}$$

e

$$\nabla^2 V_{pl} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 V_{pl}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \,, \tag{105}$$

onde $\mathbf{A}_{pl}$ é o potencial magnético vetorial gerado pelo plasma e V_{pl} é o potencial eletrostático, $\mathbf{J}$ e ρ as densidades de corrente e de cargas, respectivamente. A partir disso, podemos obter os campos elétrico e magnético gerados pelo próprio plasma

$$\mathbf{B}_{pl} = \nabla \times \mathbf{A}_{pl} \,, \tag{106}$$

e

$$\mathbf{E}_{pl} = -\nabla V_{pl} - \frac{\partial \mathbf{A}_{pl}}{\partial t}\,, \tag{107}$$

E os campos totais serão dados por $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{ext} + \mathbf{E}_{pl}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{ext} + \mathbf{B}_{pl}$. Ainda, as bobinas que determinam o campo magnético externo são separadas em toroidais e poloidais. Os efeitos das bobinas toroidais já foram inclusos, porém, as bobinas poloidais podem ter mais de uma forma de arranjo. Por exemplo, se considerarmos um arranjo quadrupolar ao redor do toroide, teríamos alterações no comprimento efetivo das linhas de conexão, que não mais dependeriam apenas da direção R mas também da direção z e, consequentemente, a ionização não seria mais homogênea na direção z.

Os resultados apresentados até aqui não esgotam o nosso modelo, mas foram os principais e mais importantes para compreendermos os mecanismos por trás de uma inicialização de plasma em Tokamaks, onde obtivemos resultados consistentes para os comportamentos das principais quantidades do plasma como densidade, corrente e pressão. Tendo em vista a complexidade de um sistema como o plasma de um Tokamak, onde mesmo um modelo simplificado conta com muitas variáveis dinâmicas interdependentes, vemos o motivo dos modelos de fluido serem tão utilizados em trabalhos que envolvem plasmas de fusão nuclear: a possibilidade de explorar esses modelos com um ferramental matemático relativamente simples, prezando pela intuição física e pelo baixo custo computacional, que foi o papel deste trabalho.

REFERÊNCIAS

ALFVÉN, H. Existence of Electromagnetic-Hydrodynamic Waves. **Nature**, [S.l.], v. 150, p. 405–406, 1942.

APONTE, I. A.; ESSER, B.; SHAW, Z. C.; DICKENS, J. C.; MANKOWSKI, J. J.; NEUBER, A. A. Fundamental study of DC and RF breakdown of atmospheric air. **Physics of Plasmas**, [S.l.], v. 26, n. 12, p. 123512, 12 2019.

ARTSIMOVICH, L. Tokamak devices. **Nuclear Fusion**, [S.l.], v. 12, n. 2, p. 215, mar 1972.

BARBARINO, M. A brief history of nuclear fusion. **Nature Physics**, [S.l.], v. 16, n. 9, p. 890–893, 2020.

BERESNYAK, A. **NRL Plasma Formulary**. 2023. Disponível em: <https://www.nrl.navy.mil/News-Media/Publications/NRL-Plasma-Formulary/>.

BETHE, H. A. Energy Production in Stars. **Phys. Rev.**, [S.l.], v. 55, p. 434–456, Mar 1939.

BITTENCOURT, J. **Fundamentals of Plasma Physics**. New York: Springer-Verlag, 2004.

BRUNNER, G. Townsend coefficients of gases in avalanche counters. **Nuclear Instruments and Methods**, [S.l.], v. 154, n. 1, p. 159–163, 1978.

BURBY, J. W. Magnetohydrodynamic motion of a two-fluid plasma. **Physics of Plasmas**, [S.l.], v. 24, n. 8, p. 082104, 07 2017.

BURM, K. T. A. L. Calculation of the Townsend Discharge Coefficients and the Paschen Curve Coefficients. **Contributions to Plasma Physics**, [S.l.], v. 47, n. 3, p. 177–182, 2007.

CHEN, F. **Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion**. [S.l.]: Springer International Publishing, 2019.

CHEN, F. F. **An Indispensable Truth**: How Fusion Power Can Save the Planet. New York: Springer, 2011.

CHEW, J.; GIBBON, P.; BRöMMEL, D.; WAUTERS, T.; GRIBOV, Y.; VRIES, P. de. First principles simulation of early stage plasma initiation process in ITER-scale tokamak. **Nuclear Fusion**, [S.l.], v. 64, n. 1, p. 016003, nov 2023.

CLERY, D. **A Piece of the Sun**: The Quest for Fusion Energy. [S.l.]: Overlook Duckworth, 2013.

DAVIDSON, P. **Introduction to Magnetohydrodynamics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2017. (Cambridge Texts in Applied Mathematics).

FURTH, H. P. The energy source: Nuclear fusion reactors. **Applied Energy**, [S.l.], v. 47, n. 2, p. 147–167, 1994. Therapy for the Earth.

GRIBOV, Y.; HUMPHREYS, D.; KAJIWARA, K.; LAZARUS, E.; LISTER, J.; OZEKI, T.; PORTONE, A.; SHIMADA, M.; SIPS, A.; WESLEY, J. Chapter 8: Plasma operation and control. **Nuclear Fusion**, [S.l.], v. 47, n. 6, p. S385, jun 2007.

GRYZINSKI, M.; KUNC, J. A. Collisional ionisation and the atomic model. **Journal of Physics B: Atomic and Molecular Physics**, [S.l.], v. 19, n. 16, p. 2479, aug 1986.

HAMMOND, K.; RAMAN, R.; VOLPE, F. Application of Townsend avalanche theory to tokamak startup by coaxial helicity injection. **Nuclear Fusion**, [S.l.], v. 58, n. 1, p. 016013, nov 2017.

JACQUINOT, J. Deuterium-tritium operation in magnetic confinement experiments: results and underlying physics. **Plasma Physics and Controlled Fusion**, [S.l.], v. 41, n. 3A, p. A13, mar 1999.

JARDIN, S. **Computational Methods in Plasma Physics**. 1st.ed. USA: CRC Press, Inc., 2010.

JIANG, W.; PENG, Y.; ZHANG, Y.; LAPENTA, G. Numerical modeling of tokamak breakdown phase driven by pure Ohmic heating under ideal conditions. **Nuclear Fusion**, [S.l.], v. 56, n. 12, p. 126017, sep 2016.

KADOMTSEV, B.; POGUTSE, O. Trapped particles in toroidal magnetic systems. **Nuclear Fusion**, [S.l.], v. 11, n. 1, p. 67, jan 1971.

KADOMTSEV, B.; TROYON, F.; WATKINS, M.; RUTHERFORD, P.; YOSHIKAWA, M.; MUKHOVATOV, V. Tokamaks. **Nuclear Fusion**, [S.l.], v. 30, n. 9, p. 1675, sep 1990.

KIM, H.-T. **Physics and Computational Simulations of Plasma Burn-through for Tokamak Start-up**. 2013. — Imperial College London.

KIM, H.-T.; CASSON, F.; MEYER, H.; CUNNINGHAM, G.; SCANNELL, R.; KOGAN, L.; HARRISON, J.; KIM, S.-C.; GWAK, J.-W.; NA, Y.-S.; LEE, J.-W.; LITAUDON, X.; FALCHETTO, G.; TEAM, M. Development of full electromagnetic plasma burn-through model and validation in MAST. **Nuclear Fusion**, [S.l.], v. 62, n. 12, p. 126012, oct 2022.

KIM, Y. S. Electricity consumption and economic development: Are countries converging to a common trend? **Energy Economics**, [S.l.], v. 49, p. 192–202, 2015.

KOMM, M. ITER: The Giant Fusion Reactor. Bringing a Sun to Earth. **Fusion Science and Technology**, [S.l.], v. 76, n. 5, p. 696–697, 2020.

KUTEEV, B.; SERGEEV, V. Discharge duration limits of contemporary tokamaks and stellarators. **Nuclear Fusion**, [S.l.], v. 60, n. 4, p. 046017, mar 2020.

LAWSON, J. D. Some Criteria for a Power Producing Thermonuclear Reactor. **Proceedings of the Physical Society. Section B**, [S.l.], v. 70, n. 1, p. 6, jan 1957.

LEE, H.; ROMERO, J. **CLIMATE CHANGE 2023**:Synthesis Report. 2023. Disponível em: <https://www.ipcc.ch/report/ar6/syr/>.

LEONTOVICH, M.; LASHINSKY, H. **Reviews of Plasma Physics**. New York: Consultants Bureau, 1965. n. v. 1.

LIEBERMAN, M. A.; LICHTENBERG, A. J. **Principles of Plasma Discharges and Materials Processing**. New York: John Wiley Sons, Inc., 2005.

LLOYD, B.; CAROLAN, P. G.; WARRICK, C. D. ECRH-assisted start-up in ITER. **Plasma Physics and Controlled Fusion**, [S.l.], v. 38, n. 9, p. 1627, sep 1996.

LLOYD, B.; JACKSON, G.; TAYLOR, T.; LAZARUS, E.; LUCE, T.; PRATER, R. Low voltage Ohmic and electron cyclotron heating assisted startup in DIII-D. **Nuclear Fusion**, [S.l.], v. 31, n. 11, p. 2031, nov 1991.

MAVIGLIA, F.; ALBANESE, R.; MAGISTRIS, M. de; LOMAS, P. J.; MINUCCI, S.; RIMINI, F. G.; SIPS, A. C. C.; VRIES, P. C. de. Electromagnetic Models of Plasma Breakdown in the JET Tokamak. **IEEE Transactions on Magnetics**, [S.l.], v. 50, n. 2, p. 937–940, 2014.

MOYNIHAN, M.; BORTZ, A. B. **Fusion's Promise**:How Technological Breakthroughs in Nuclear Fusion Can Conquer Climate Change on Earth (And Carry Humans To Mars, Too). [S.l.]: Springer, 2023.

MUELLER, D. The physics of tokamak start-up. **Physics of Plasmas**, [S.l.], v. 20, n. 5, p. 058101, 05 2013.

NAKAI, S.; TAKABE, H. Principles of inertial confinement fusion - physics of implosion and the concept of inertial fusion energy. **Reports on Progress in Physics**, [S.l.], v. 59, n. 9, p. 1071, sep 1996.

PAPOULAR, R. The genesis of toroidal discharges. **Nuclear Fusion**, [S.l.], v. 16, n. 1, p. 37, feb 1976.

PENG, Y.; JIANG, W.; INNOCENTI, M. E.; ZHANG, Y.; HU, X.; ZHUANG, G.; LAPENTA, G. On the breakdown modes and parameter space of ohmic tokamak start-up. **Journal of Plasma Physics**, [S.l.], v. 84, n. 5, p. 905840505, 2018.

RAVENSBERGEN, T.; VRIES, P. de; FELICI, F.; BLANKEN, T.; NOUAILLETAS, R.; ZABEO, L. Density control in ITER: an iterative learning control and robust control approach. **Nuclear Fusion**, [S.l.], v. 58, n. 1, p. 016048, dec 2017.

ROSE, D. J. Townsend Ionization Coefficient for Hydrogen and Deuterium. **Phys. Rev.**, [S.l.], v. 104, p. 273–277, Oct 1956.

SANDERS, F. H. Measurement of the Townsend Coefficients for Ionization by Collision. **Phys. Rev.**, [S.l.], v. 44, p. 1020–1024, Dec 1933.

SANTOS, M. F. dos. **Diagnóstico de temperatura em tokamaks através do uso de bobinas Rogowski**. 2019. — Universidade Federal de Pelotas, Pelotas,RS.

SHEFFIELD, J. Magnetic fusion commercial power plants. **Journal of Fusion Energy**, [S.l.], v. 13, n. 2, p. 167–170, 1994. Therapy for the Earth.

SINHA, J. **Plasma breakdown and current formation in single core and doublet configurations on TCV**. 2017. — ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE, Suisse.

SMIL, V. **Energy and Civilization**: A History. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 2017.

SMIRNOV, B. M. Modeling of gas discharge plasma. **Physics-Uspekhi**, [S.l.], v. 52, n. 6, p. 559, jun 2009.

SPITZER LYMAN, J. The Stellarator Concept. **The Physics of Fluids**, [S.l.], v. 1, n. 4, p. 253–264, 07 1958.

SUGIYAMA, S.; SHINYA, K.; UTOH, H.; AIBA, N.; SAKAMOTO, Y. A study on ohmic plasma initiation for JA DEMO. **Fusion Engineering and Design**, [S.l.], v. 172, 2021.

TAJIMA, T. **Computational Plasma Physics**: With Applications To Fusion And Astrophysics. [S.l.]: CRC Press, 2018.

THOMSON, G. P. Thermonuclear Reactions. **American Journal of Physics**, [S.l.], v. 28, n. 221, 1960.

TONKS, L.; LANGMUIR, I. Oscillations in Ionized Gases. **Phys. Rev.**, [S.l.], v. 33, p. 195–210, Feb 1929.

TOWNSEND, J. S. E. The Conductivity produced in Gases by the Motion of Negatively–charged Ions. **Nature**, [S.l.], v. 62, p. 340–341, 1900.

VERSHKOV, V.; MIRNOV, S. Role of impurities in current tokamak experiments. **Nuclear Fusion**, [S.l.], v. 14, n. 3, p. 383, jun 1974.

VRIES, P. de; GRIBOV, Y. ITER breakdown and plasma initiation revisited. **Nuclear Fusion**, [S.l.], v. 59, n. 9, p. 096043, aug 2019.

YANG, S.; PARK, J.-K.; JEON, Y.; LOGAN, N. C.; LEE, J.; HU, Q.; LEE, J.; KIM, S.; KIM, J.; LEE, H.; NA, Y.-S.; HAHM, T. S.; CHOI, G.; SNIPES, J. A.; PARK, G.; KO, W.-H. Tailoring tokamak error fields to control plasma instabilities and transport. **Nature Communications**, [S.l.], v. 15, n. 1275, p. 1275, 2024.

YOO, M.-G.; NA, Y.-S. Understanding the electromagnetic topology during the ohmic breakdown in tokamaks considering self-generated electric fields. **Plasma Physics and Controlled Fusion**, [S.l.], v. 64, n. 5, p. 054008, apr 2022.

ZAKHAROV, L. E. V. D. Shafranov and Necessary Conditions for Fusion Energy. **Plasma Physics Reports**, [S.l.], v. 45, n. 12, 2019.

Apêndices

APÊNDICE A – Resultados Extras

Aqui os parâmetros de temperatura, densidade, pressão e campo magnético foram mantidos constantes e são os mesmos da seção 5. Variamos apenas o campo elétrico toroidal, de forma a obtermos a ionização líquida no início do disparo e a consequência disso na evolução da corrente. Temos que à medida que o campo elétrico diminui, a ionização fica concentrada em determinadas regiões de R, o que produz gradientes mais íngremes, que requerem uma maior resolução da grade numérica para serem adequadamente tratados e podemos ver que o crescimento da corrente é mais lento na medida em que o campo elétrico diminui. Nos gráficos abaixo vemos a dependência desses fatores para a obtenção do perfil desejado de corrente de plasma na direção toroidal, como no gráfico 36 $b)$.

Figura 33 – Em $a)$ temos a ionização líquida em relação à coordenada R e em $b)$ a evolução da corrente na direção toroidal, usando um parâmetro $E_0 = 1$V.

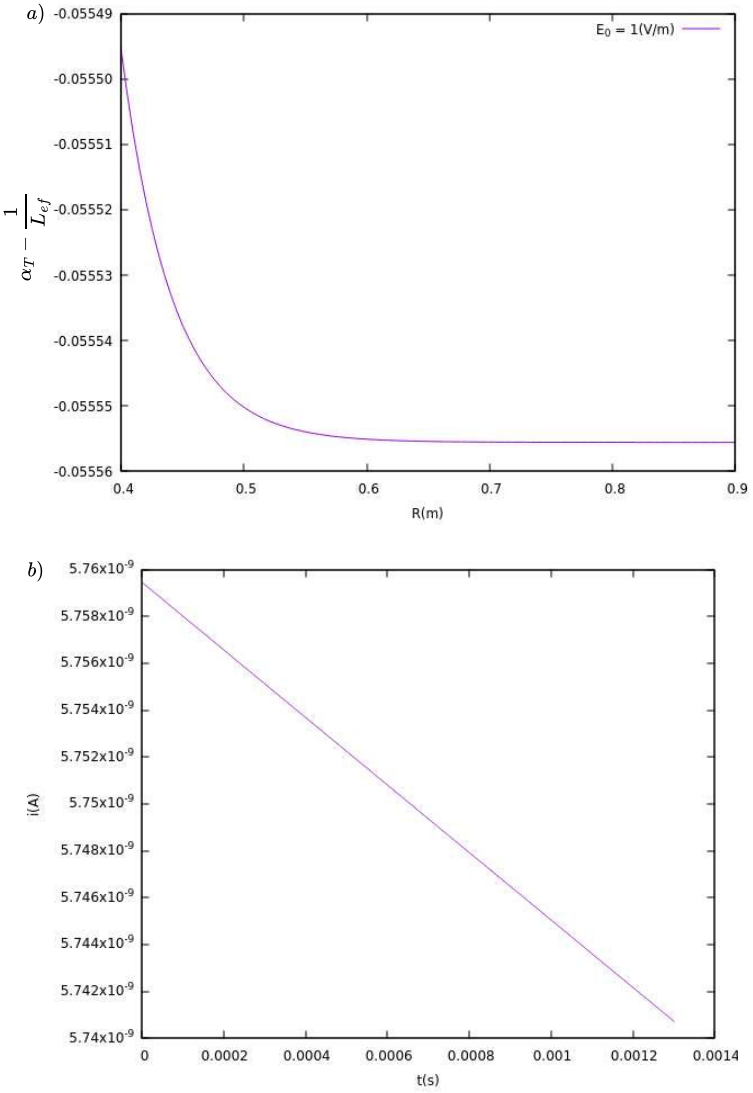


Figura 34 – Em $a)$ temos a ionização líquida em relação à coordenada R e em $b)$ a evolução da corrente na direção toroidal, usando um parâmetro $E_0 = 10$V.

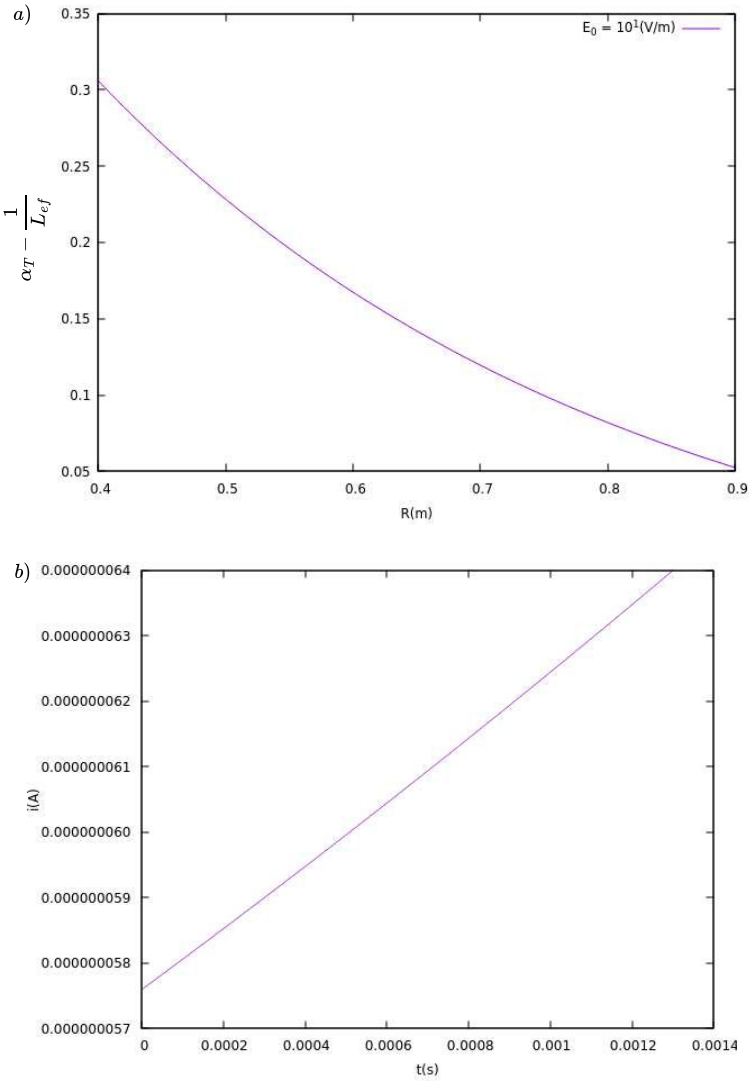


Figura 35 – Em $a)$ temos a ionização líquida em relação à coordenada R e em $b)$ a evolução da corrente na direção toroidal, usando um parâmetro $E_0 = 10^2$V.

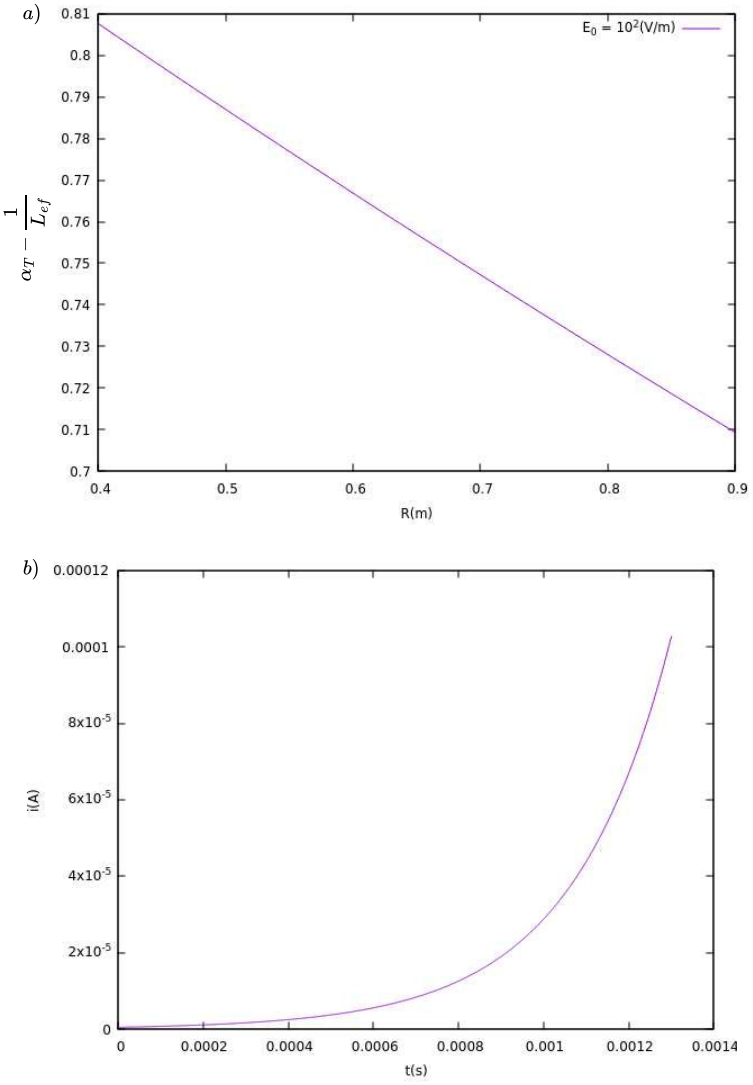
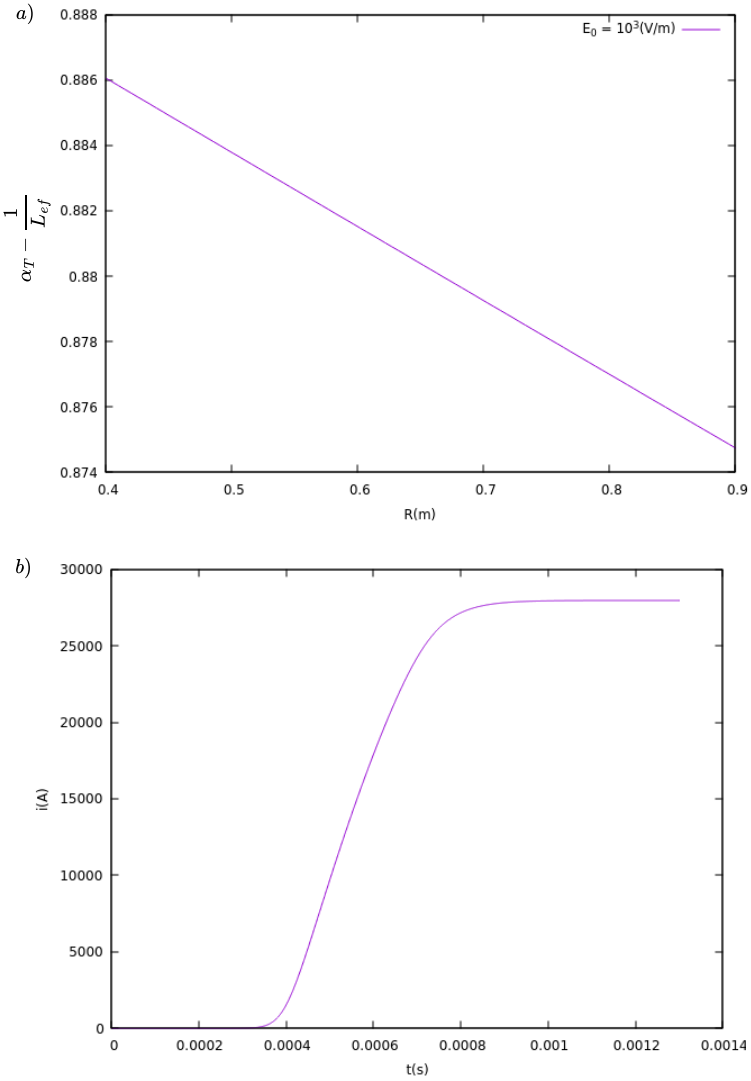



Figura 36 – Em $a)$ temos a ionização líquida em relação à coordenada R e em $b)$ a evolução da corrente na direção toroidal, usando um parâmetro $E_0 = 10^3$V.