

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
INSTITUTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA



Tese de Doutorado

**Título: Fenomenologia de processos em altas energias
utilizando a equação Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov com polos
discretos**

Cesar Eduardo Krumreich

Pelotas, 2020

Cesar Eduardo Krumreich

Fenomenologia de processos em altas energias utilizando a equação Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov com polos discretos

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Werner Krambeck Sauter

Pelotas, 2020

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas
Catalogação na Publicação

K94f Krumreich, Cesar Eduardo

Fenomenologia de processos em altas energias utilizando a equação Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov com polos discretos / Cesar Eduardo Krumreich ; Werner Krambeck Sauter, orientador. — Pelotas, 2020.

134 f. : il.

Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Física, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2020.

1. Equação BFKL. 2. Pomeron. 3. Polos. I. Sauter, Werner Krambeck, orient. II. Título.

CDD : 530.4

Cesar Eduardo Krumreich

Título: Fenomenologia de processos em altas energias utilizando a equação
Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov com polos discretos

Tese de Doutorado aprovada, como requisito parcial, para obtenção do grau de Doutor em Física, Programa de Pós-Graduação em Física, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas.

Data da Defesa: 3 de junho de 2020

Banca examinadora:

Prof. Werner Krambeck Sauter (Orientador)



Doutor em Ciências

Universidade Federal de Pelotas

Prof. Mário Luiz Lopes da Silva



Doutor em Ciências

Universidade Federal de Pelotas

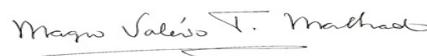
Prof. Cristiano Brenner Mariotto



Doutor. em Ciências

Universidade Federal do Rio Grande

Prof. Magno Valério Trindade Machado



Doutor. em Ciências

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Emerson Gustavo de Souza Luna



Doutor. em Ciências

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

AGRADECIMENTOS

Agradeço a toda a minha família, em especial minha mãe Geneci, meu avô Adolfo e minha avó Ilma que infelizmente faleceu a cerca de dois anos, na qual descrevo ser uma pessoa muito gentil, que me incentivava nos estudos e que era uma referência para mim. Se eu cheguei até aqui é em grande parte por causa dela!

Agradeço ao Dr. Werner Krambeck Sauter por ter me aceito como orientando no doutorado, mesmo que minha área de pesquisa no mestrado não fosse em física de partículas. Agradeço também pelo bom humor, paciência, pela compreensão nos meus momentos de dificuldade e por ter proporcionado um ambiente de trabalho muito bom.

Agradeço ao Dr. Victor Paulo Barros Gonçalves por estar sempre disposto a atender e tirar dúvidas. Agradeço também pelas contribuições que tivesse no meu trabalho que foram essenciais.

Agradeço aos colegas da Pós-Graduação Celso, Patrícia, Giovana, Thiago, Jean, Yuri, Rafael, Alex e Celsina pela amizade.

Agradeço aos alunos de Pós-Doutorado Bruno que contribuiu na programação e ao Paulo que me ensinou a utilizar ferramentas computacionais para fazer ajuste de curvas.

Agradeço a Universidade Federal de Pelotas, ao Programa de Pós Graduação em Física e a todos membros do GAME (Grupo de Altas e Médias Energias).

Por fim, destaco que o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

KRUMREICH, Cesar, **Fenomenologia de processos em altas energias utilizando a equação Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov com polos discretos** 2020, 134p. Tese (Doutorado em Física) - Programa de Pós-Graduação em Física, Departamento de Física, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2020.

Nos dias atuais, a descrição teórica do comportamento da seção de choque no regime de altas energias ainda é motivo de questionamento. Uma proposta que se encontra válida é que o leve crescimento da seção de choque, neste regime de energia, está associado a troca de um objeto com os números quânticos do vácuo, chamado de Pomeron. Fenomenologicamente, via teoria de Regge, foi possível obter algumas de suas propriedades. Em QCD, encontramos por meio de cálculos perturbativos que o Pomeron é descrito através de interações entre glúons em forma de uma “escada”. A evolução dos glúons nessa “escada” é descrita pela equação Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov (BFKL). Neste trabalho, apresentamos algumas abordagens a respeito da solução da equação BFKL com constante de acoplamento fixa e dinâmica. Utilizaremos o método de autofunções discretas que nos retornam como solução no plano complexo do momentum angular uma sequência infinita de polos. Uma aplicação proposta é ajustar a curva teórica a dados experimentais da função de estrutura F_2 para investigar as propriedades infravermelhas da equação BFKL. Uma vez fixado os parâmetros livres, utilizamos o resultado do nosso ajuste para produção de quark charm, produção de mésons vetoriais massivos e a produção de dois fótons a altas energias. Todos esses processos são descritos pela primeira vez com esse formalismo em Leading Order (LO).

Palavras Chave: equação BFKL, Pomeron, polos

ABSTRACT

KRUMREICH, Cesar, **Phenomenology of high energy processes using the Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov equation with discrete poles** 2020, 134p. Thesis (Doctorate Degree in Physics) - Programa de Pós-Graduação em Física, Departamento de Física, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2020.

In the present day, the theoretical description of the behavior of the cross section in the high energy regime is still a matter of questioning. One proposal that is valid is that the small growth of the cross section, in this energy regime, is associated with the exchange of an object with the vacuum quantum numbers, called Pomeron. Phenomenologically, via theory Regge, it was possible to obtain some of its properties. In QCD we find by means of perturbative calculations that the Pomeron is described through interactions between gluons in the form of a “ladder”. The evolution of the gluons in this “ladder” is described by the Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov (BFKL) equation. In this work, we present some approaches regarding the solution of the BFKL equation with fixed and dynamic coupling constant. We will use the discrete eigenfunction method that return us as a solution in the complex plane of angular momentum an infinite sequence of poles. A proposed application is to fit the theoretical curve to experimental data of the F_2 structure function to investigate the infrared properties of BFKL equation. Once the free parameters are fixed, we use the result of our adjustment for charm quark production, production of massive vector mesons and the production of two photons at high energies. All of these processes are described for the first time with this formalism in Leading Order (LO).

Key-words: BFKL equation, Pomeron, poles

SUMÁRIO

Pág.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

1	INTRODUÇÃO	19
2	CROMODINÂMICA QUÂNTICA E A ESTRUTURA HADRÔNICA	23
2.1	Modelo Padrão e a Cromodinâmica Quântica	23
2.2	Lagrangiana da QCD	24
2.3	Constante de acoplamento da QCD	27
2.4	Espalhamento profundamente inelástico	28
2.5	Conclusão	32
3	O POMERON EM TEORIA DE REGGE	33
3.1	Teoria de Regge	33
3.1.1	Trajectoria de Regge	34
3.1.2	Construindo a ideia do Pomeron	35
3.2	Conclusão	38
4	O POMERON NA QCD: A EQUAÇÃO BFKL	39
4.1	Espalhamento quark-quark via troca de um glúon	39
4.2	Espalhamento quark-quark via troca de dois glúons	41
4.3	Espalhamento quark-quark via troca de três glúons	46
4.4	Cálculo de diagramas de ordens superiores	57
4.5	A Equação BFKL	64
4.6	Solução da equação BFKL para $t = 0$	66
4.7	Equação BFKL em DIS	71
4.8	Equação de Difusão	76
4.9	Conclusão	77
5	O POMERON NA QCD: A EQUAÇÃO BFKL COM CONSTANTE DE ACOPLAMENTO DINÂMICA	79
5.1	Solução da equação BFKL para α_s dinâmico	79
5.1.1	Difusão da BFKL para α_s dinâmico	85
5.1.2	Solução da equação BFKL via autofunções discretas	90

5.2	Conclusão	96
6	FENOMENOLOGIA DE PROCESSOS DIFRATIVOS UTILIZANDO O FORMALISMO BFKL VIA AUTOFUNÇÕES DISCRETAS	97
6.1	Ajuste da função de estrutura F_2	97
6.2	Produção de quarks pesados	101
6.3	Produção de mésons vetoriais J/Ψ e Υ	104
6.4	Produção de dois fótons em altas energias	109
6.5	Conclusão	117
7	CONCLUSÃO	119
A	MÉTODOS MATEMÁTICOS	121
A.1	Método do ponto de sela	121
A.2	Expansão da função $\chi(\gamma)$ em série de Taylor para $\gamma = 1/2$	122
A.3	Integrais angulares	122
A.4	Transformada de Mellin	123
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	125

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 Propagadores da QCD. Os quarks são representados pela linha contínua, os fantasmas pela linha tracejada, os glúons pela linha ondular, p e k são momenta, m_f representa a massa dos quarks com seu respectivo sabor f , os índices com letras latinas (a, b, c, ...), referem-se às cores dos glúons, e os índices (i, j, k, ...), as cores dos quarks, μ e ν são os índices de Lorentz. Figura do autor.	26
2.2 Vértices da QCD. Os quarks são representados pela linha contínua, os fantasmas pela linha tracejada, os glúons pela linha ondular, p é o momentum, os índices com letras latinas (a, b, c, ...), referem-se às cores dos glúons, e (i, j, k, ...), as cores dos quarks, μ , ν e σ são os índices de Lorentz, f é uma constante estrutural do grupo SU(3), γ^μ é a matriz de Dirac e g_s é a constante de acoplamento. Figura do autor.	26
2.3 Gráfico de α_s em função de Q . Figura extraída de [31].	28
2.4 Espalhamento profundamente inelástico. Figura do autor.	29
3.1 Trajetória mesônica de $\alpha(t)$ versus $ t $ de ρ , f_2 , a_2 e ω . Figura extraída de [8].	34
3.2 Seção de choque para pp , $\bar{p}p$ e $\pi^\pm p$. Figuras extraídas de [7].	36
3.3 Seção de choque para $K^\pm p$. Figura extraída de [7].	37
3.4 Espalhamento elástico pp com $\sqrt{s} = 53$ GeV. Figura extraída de [5].	37
3.5 Trajetória do Pomeron com o candidato a bola de grude. Figura extraída de [40].	38
4.1 Espalhamento quark-quark via troca de um glúon. Figura extraída de [8].	39
4.2 Espalhamento $qq \rightarrow qq$ com troca de dois glúons: (a) conhecido como diagrama caixa; (b) diagrama cruzado. Figura extraída de [8].	42
4.3 Parte imaginária da Figura (4.2,a). Figura extraída de [8].	42
4.4 Diagramas com emissões reais de glúons para o processo $qq \rightarrow qqq$. Figura extraída de [8].	47
4.5 Processo $qq \rightarrow qqq$ com vértice corrigido (Vértice de Lipatov). Figura extraída de [8].	50
4.6 Contribuição do glúon real para o caso de dois laços. Figura extraída de [8].	50
4.7 Processo $qq \rightarrow qqq$ contribuição virtual para troca de três glúons. Figura extraída de [8].	54
4.8 Parte imaginária da amplitude de espalhamento para o diagrama a nível de árvore. Figura extraída de [8].	57

4.9	Gráfico da singularidade (corte com ponto de ramificação em λ) da equação BFKL representada pela Equação (4.167). Figura do autor.	70
4.10	Gráfico das funções $\chi(\gamma)$ Equação (4.180) em azul e $R(\gamma)$ Equação (4.187) em vermelho. Figura do autor.	74
5.1	Singularidades do plano complexo de w para α_s dinâmico obtida através da Equação implícita (5.35) para os polos e a Equação (5.38) para o ponto de sela. Figura extraída de [50].	85
5.2	Sequência infinita de polos no plano complexo de w calculadas através da Equação (5.55) e w_{max} da Equação (5.53), que são oriundas da solução da equação BFKL para o caso de α_s dinâmico. Figura extraída de [11].	89
5.3	Comportamento da autofunção. Figura do autor.	92
6.1	Espalhamento fóton-próton ($\gamma^*p \rightarrow \gamma^*p$), nas quais Φ_γ e Φ_p são os fatores de impacto do fóton e próton, respectivamente. Tal processo é mediado pelo Pomeron através da equação BFKL que é representada por $G(x, \mathbf{k}, \mathbf{k}')$, onde k e k' são momenta transversos. Figura do autor.	98
6.2	Gráfico de F_2 versus x feito a partir dos dados obtidos da Tabela (6.1). A curva tracejada (azul) são 2 polos, sólida (vermelha) são 3 polos e pontilhada (verde) são 4 polos. Dados extraídos de [56].	100
6.3	Gráfico de F_2 versus x feito a partir dos dados obtidos da Tabela (6.1). A curva tracejada (azul) são 2 polos, sólida (vermelha) são 3 polos e pontilhada (verde) são 4 polos. Dados extraídos de [56].	100
6.4	Gráfico de λ_{eff} versus Q^2 . A curva tracejada (azul) são 2 polos, sólida (vermelha) são 3 polos e pontilhada (verde) são 4 polos. Dados extraídos de [57–59].	101
6.5	Gráfico de F_2^{cc} versus x feito a partir dos dados obtidos da Tabela (6.1). A curva tracejada (azul) são 2 polos, sólida (vermelha) são 3 polos e pontilhada (verde) são 4 polos. Dados extraídos de [62].	103
6.6	Gráfico de σ_r^{cc} versus x feito a partir dos dados obtidos da Tabela (6.1). A curva tracejada (azul) são 2 polos, sólida (vermelha) são 3 polos e pontilhada (verde) são 4 polos. Dados extraídos de [62–64].	103
6.7	Espalhamento fóton-próton ($\gamma^*p \rightarrow Vp$), cujo estado final se encontra os mésons vetoriais J/Ψ ou Υ e o próton intacto. Temos que Φ_V e Φ_p são os fatores de impacto do méson vetorial e próton, respectivamente. Tal processo é mediado pelo Pomeron através da equação BFKL que é representada por $G(x, \mathbf{k}, \mathbf{k}')$, onde k e k' são momenta transversos. Figura do autor.	105

6.8	A Figura da esquerda está relacionada ao ajuste de J/Ψ , onde a curva sólida (azul) é referente a escala $M_V^2/4$ e a tracejada (azul) é referente a escala M_V^2 , ambas para 2 polos. Já a Figura à direita também está relacionada ao ajuste de J/Ψ , onde a curva sólida (vermelha) é referente a escala $M_V^2/4$ e a tracejada (vermelha) é referente a escala M_V^2 , ambas para 3 polos.	110
6.9	A Figura da esquerda está relacionada ao ajuste de J/Ψ , onde a curva sólida (verde) é referente a escala $M_V^2/4$ e a tracejada (verde) é referente a escala M_V^2 , ambas para 4 polos. Já a Figura à direita está relacionada ao ajuste de Υ , onde a curva sólida (azul) é referente a escala $M_V^2/4$ e a tracejada (azul) é referente a escala M_V^2 , ambas para 2 polos.	110
6.10	A Figura da esquerda está relacionada ao ajuste de Υ , onde a curva sólida (vermelha) é referente a escala $M_V^2/4$ e a tracejada (vermelha) é referente a escala M_V^2 , ambas para 3 polos. Já a Figura à direita também está relacionada ao ajuste de Υ , onde a curva sólida (verde) é referente a escala $M_V^2/4$ e a tracejada (verde) é referente a escala M_V^2 , ambas para 4 polos.	111
6.11	Espalhamento fóton-fóton ($\gamma^*\gamma^* \rightarrow \gamma^*\gamma^*$), na qual Φ_γ representa o fator de impacto do fóton. Tal processo é mediado pelo Pomeron através da equação BFKL que é representada por $G(x, \mathbf{k}, \mathbf{k}')$, onde k e k' são momenta transversos. Figura do autor.	111
6.12	Seção de choque $\sigma_{\gamma^*\gamma^*}$ versus rapidez y . A curva tracejada (azul) são 2 polos, sólida (vermelha) são 3 polos e pontilhada (verde) são 4 polos. Dados extraídos de [98, 99].	114
6.13	Função de estrutura do fóton real F_2^γ/α versus x . A curva tracejada (azul) são 2 polos, sólida (vermelha) são 3 polos e pontilhada (verde) são 4 polos. Dados extraídos de [100, 101].	115
6.14	Seção de choque $\sigma_{\gamma\gamma}$ versus energia do centro de massa W . A curva tracejada (azul) são 2 polos, sólida (vermelha) são 3 polos e pontilhada (verde) são 4 polos. Dados extraídos de [104, 105].	116

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
5.1 Tabela com valores das singularidades contidas no plano complexo de w . Resultado extraído de [10].	84
6.1 Resultado do ajuste de F_2 Equação (6.1). Aqui a primeira coluna é referente a quantidade de polos, a segunda a variável de Bjorken inicial, a terceira a fase não perturbativa, da quarta a sétima é o resultado do autovalor e por fim a última coluna descreve uma medida de divergência entre a distribuição dos dados e uma distribuição esperada pelo número de graus de liberdade.	99
6.2 Tabela com parâmetros do modelo Boosted Gaussian de J/Ψ e Υ . Dados extraídos de [60,67].	106
6.3 Ajuste da normalização para a produção do méson J/Ψ . Na primeira coluna se encontra o número de polos, na segunda coluna a escala escolhida, na terceira coluna a constante de normalização ajustada aos dados experimentais e na quarta coluna a quantidade estatística que descreve uma medida de divergência entre a distribuição dos dados e uma distribuição esperada pelo número de graus de liberdade.	109
6.4 Ajuste da normalização para a produção do méson Υ . Na primeira coluna se encontra o número de polos, na segunda coluna a escala escolhida, na terceira coluna a constante de normalização ajustada aos dados experimentais e na quarta coluna a quantidade estatística que descreve uma medida de divergência entre a distribuição dos dados e uma distribuição esperada pelo número de graus de liberdade.	109

1 INTRODUÇÃO

A física de partículas é um ramo da física que investiga os constituintes elementares da matéria e da radiação, e também, sua interação e aplicações. Hoje em dia, as partículas fundamentais estão dispostas no que chamamos de Modelo Padrão. Além de classificá-las o Modelo Padrão descreve a força eletrofraca e a força forte [1, 2]. Atualmente, o desenvolvimento científico-tecnológico na área de física de partículas é muito significativo e isso se deve em grande parte a construção do Large Hadron Collider (LHC). Finalmente, conseguimos descobrir a existência do já teorizado Bóson de Higgs [3, 4].

Apesar desses grandes avanços, alguns resultados em relação a dados científicos ainda se encontram em análise, por exemplo, a descrição teórica da seção de choque total a altas energias. Uma proposta, sugerida por volta da década de 60 e ainda vigente, afirma que o leve crescimento da seção de choque total está relacionado com a troca de um objeto que porta os números quânticos do vácuo, chamado de Pomeron (nome em homenagem a Pommeranchuk). No âmbito da teoria de Regge [5, 6], ele surge como uma troca de um reggeon (troca de uma família de ressonâncias no canal do quadrado do momentum transferido). Este reggeon está associado à conjectura de que a singularidade da amplitude de espalhamento no plano complexo do momentum angular seja um polo. Donnachie e Landshoff em 1992 [7] efetuaram um ajuste de dados para a seção de choque total e chegaram ao resultado de que a intercepto da trajetória do Pomeron é aproximadamente 1,08. Este resultado está relacionado a uma cinemática, na qual não existe fragmentação da estrutura interna dos hádrons. Apesar de que no interior dos hádrons haja um acoplamento forte, temos que os quarks, assintoticamente, com o aumento da energia adquirem o comportamento de “partículas livres”. Esse comportamento é chamado de liberdade assintótica. Isso implica que a aplicação de uma teoria perturbativa através da utilização de diagramas e regras de Feynman seja possível na Cromodinâmica Quântica (*Quantum Chromodynamics*, QCD). Na QCD perturbativa, para modelar tal objeto, que porta os números quânticos do vácuo (singlete de cor), é necessário que haja pelo menos a troca de dois glúons nessa interação. No entanto, para altas energias com essa simples troca a seção de choque total permanece constante; portanto para que se possa obter um leve crescimento da mesma é necessário que a interação entre glúons seja levada em conta. Essa interação entre glúons é descrita por uma “escada” e a equação que descreve a evolução dessa escada é a Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov (BFKL) [6, 8]. Sua solução com constante de acoplamento fixo tem como característica um corte no plano complexo do momentum angular, onde o valor com maior parte real contribui para intercepto da trajetória do Pomeron. O resultado da intercepto da trajetória do Pomeron com acoplamento fixo é de aproximadamente 1,5. No entanto, esse resultado, do ponto de vista físico, não é consistente, devido ao fato de que nessa solução

da equação BFKL não se levou em conta que a constante de acoplamento é dinâmica. A construção de uma solução da equação BFKL com acoplamento dinâmico pode ser encontrada em [9–11]. Seu resultado traz uma nova perspectiva em relação a abordagem do Pomeron em QCD perturbativa. Agora o corte no plano complexo do momentum angular é substituído por uma sequência infinita de polos no eixo real positivo, que surgem dos zeros da função de Airy [10, 12] e os zeros da função de Airy somado com os polos de Regge [11]. Nessa última abordagem, o autor dá destaque a respeito da contribuição macia para Pomeron oriundo da QCD perturbativa. A introdução de um acoplamento dinâmico em processos duros, faz com que os coeficientes de difusão dependam do logaritmo dos momenta, em discordância com o caso fixo, onde eram contantes. O efeito de difusão causa o surgimento de diferentes momenta transversais na "escada". Em um regime de grande rapidez, momenta transversais podem se difundir para escalas menores que Λ_{QCD} , ou seja, para escalas infravermelhas, evidenciando que o Pomeron BFKL pode ter contribuição macia não perturbativa em sua descrição. Além desse tipo de abordagem podemos solucionar a equação BFKL com constante de acoplamento dinâmico, através do método de autofunções discretas, inicialmente abordado em [13]. Atualmente, ele tem sido bastante explorado [14–20], na busca de uma descrição mais precisa dos dados experimentais.

O objetivo do presente trabalho é aplicar a equação BFKL em observáveis onde a troca do Pomeron seja relevante. Utilizamos o método de autofunções discretas [6] em primeira ordem (*Leading Order*, LO) a zero momentum transferido. O observável físico proposto para aplicação da equação BFKL foi a função de estrutura F_2 , onde concretizaremos ajustes em relação a dados experimentais. Temos dois parâmetros livres que são a condição inicial da variável de Bjorken x_0 e a fase não perturbativa η_{np} . Esta última é nosso vínculo com as propriedades infravermelhas da equação BFKL. A princípio, dentro da QCD, elas são desconhecidas. Entretanto, por ser um parâmetro livre, pode ser ajustável a dados experimentais. Uma vez fixados, os parâmetros livres através do ajuste de F_2 , aplicaremos eles em outros processos onde a troca do Pomeron seja relevante. Dentre esses processos escolhemos a produção do quark charm e mésons vetoriais J/Ψ e Υ [21], pois são observáveis cuja escala dura possibilitam sua análise dentro da QCD perturbativa. Além da produção de charm e dos mésons vetoriais, aplicaremos para produção de dois fótons em altas energias representada pela seção de choque $\gamma^*\gamma^*$ e $\gamma\gamma$ e a função de estrutura do fóton F_2^γ . Tanto a produção do quark charm e mésons vetoriais J/Ψ e Υ quanto a produção de dois fótons a altas energias são processos pelos quais esse formalismo é utilizado de forma inédita. A grande importância da aplicação em outros processos está atrelada a universalidade do nosso resultado. Ela nos mostra que a utilização de uma sequência de polos de uma descrição em LO do Pomeron é possível em processos de altas energias e também nos mostra o quanto é robusto o ajuste do modelo. É importante ressaltar que

nosso estudo da equação BFKL em termos de polos discretos resultou na publicação dos artigos [22, 23].

Por fim, esta tese está organizada como segue: no capítulo dois mostramos como as partículas estão classificadas no Modelo Padrão, falamos de algumas características da Cromodinâmica Quântica e apresentamos o espalhamento profundamente inelástico. No capítulo três foi feita uma revisão da teoria de Regge, na qual damos ênfase às justificativas que levaram à descrição de um objeto chamado Pomeron. No capítulo quatro, tratamos a respeito do Pomeron na QCD. Fizemos uma revisão da equação BFKL, mostrando sua solução com acoplamento fixo. O capítulo cinco está dedicado especialmente as soluções com constante de acoplamento dinâmico. O capítulo seis está destinado a aplicação da equação BFKL com polos discretos na função de estrutura F_2 , para função de estrutura do quark charm $F_2^{c\bar{c}}$ e sigma reduzido do quark charm $\sigma_r^{c\bar{c}}$, na produção de mésons vetoriais J/Ψ e Υ e para as seção de choque fóton real - fóton real $\sigma_{\gamma\gamma}$ e seção de choque fóton virtual - fóton virtual $\sigma_{\gamma^*\gamma^*}$ e função de estrutura F_2^γ do fóton real. Por fim, no capítulo sete apresentamos nossas conclusões.

2 CROMODINÂMICA QUÂNTICA E A ESTRUTURA HADRÔNICA

Introduzimos este capítulo a fim de fazer uma revisão de alguns conceitos básicos que são utilizados para a derivação da equação BFKL. Começamos o capítulo mostrando como está distribuído o Modelo Padrão em relação as partículas que participam da interação forte, mostramos de onde são derivadas as regras de Feynman, além disso explicamos o que é confinamento e liberdade assintótica, e por fim fizemos um resumo do espalhamento profundamente inelástico.

2.1 Modelo Padrão e a Cromodinâmica Quântica

O Modelo Padrão [24, 25] descreve as forças fundamentais que são a força forte, fraca e eletromagnética, bem como as partículas fundamentais da matéria. Apesar da eficiência de tal modelo em descrever resultados experimentais, temos que ele ainda se encontra incompleto, pois não contempla, por exemplo a gravidade.

Representativamente, nele as partículas fundamentais são descritas em termos de bósons e férmions. Os bósons são mediadores da interação e possuem spin inteiro. Temos que o mediador da interação eletromagnética é o fóton, da interação fraca são os bósons W^\pm e Z^0 e o da interação forte são os glúons. Férmions são partículas que constituem a matéria caracterizados por possuírem spin semi-inteiro, sendo classificados como quarks e léptons. Os léptons são partículas que estão sob a ação da interação fraca e eletromagnética e são divididos em três famílias: elétron, múon e tau e seus respectivos neutrinos. Já os quarks estão sob ação da interação forte e devido ao confinamento de cor nunca são observados livres na natureza; somente de forma indireta. Existem seis tipos de sabores de quarks que são up, down, strange, charm, bottom, e top. Temos que cada um desses sabores podem apresentar três cargas de cor. Essa carga de cor está relacionada a força forte que existe entre quarks e glúons. Para elas são comumente atribuídas os nome de verde, azul e vermelho, e cada cor tem sua respectiva anticor magenta, amarelo e ciano. O confinamento de quarks e glúons impossibilita que os hádrons possam ter cor. Portanto, para que tenhamos um estado “sem cor“ precisamos da junção de três quarks ou três antiquarks que formarão os bárions ou a junção de quarks com seu respectivo antiquark, formando assim os mésons. Além dos quarks, os glúons também possuem carga de cor, no caso são oito combinações de cor/anticor. Essa propriedade possibilita, não somente quarks e glúons interagirem, mas também proporciona que glúons interajam entre si. Veremos no capítulo quatro que essa propriedade é de suma importância para elaboração do Pomeron dentro da QCD perturbativa, pois o Pomeron é construído levando-se em conta a interação entre glúons em forma de ”escada”. Por fim, podemos destacar no

Modelo Padrão o bóson de Higgs descoberto em 2012, que é responsável por dar massas as outras partículas elementares.

2.2 Lagrangiana da QCD

A Cromodinâmica Quântica (QCD) [26] é uma área da física que descreve as interações fortes. Essa interação forte ocorre entre os pártons (coletivamente chamados de quarks e glúons). Quarks são férmions de spin 1/2, com massa, carga elétrica fracionária e possuem carga de cor. Já os glúons são bósons de spin 1 sem massa e carga elétrica e compartilham a propriedade de carga de cor com os quarks. A QCD é baseada no grupo SU(3) com três graus de liberdade representados pela carga de cor.

Para calcular as amplitudes de espalhamento dos processos na QCD é preciso de regras de Feynman. Essas regras são derivadas da lagrangiana da QCD [27,28], que é representada como se segue

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \mathcal{L}_{\text{clássica}} + \mathcal{L}_{\text{calibre-fixo}} + \mathcal{L}_{\text{fantasma}}. \quad (2.1)$$

A lagrangiana clássica é a responsável pela dinâmica de quarks e glúons. Ela é dada por

$$\mathcal{L}_{\text{clássica}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - g_s A_\mu^a \tau^a - m_f)\psi - \frac{1}{4}F^{a\mu\nu}F_{\mu\nu}^a, \quad (2.2)$$

onde

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_r \\ \psi_b \\ \psi_g \end{pmatrix}$$

é o spinor com índices r , b e g que significam as três cores portadas pelos quarks, g_s é a constante de acoplamento, m são as massas dos quarks para cada respectivo sabor f , A_μ^a é o campo de glúons com índice de Lorentz μ , $\tau^a = \lambda^a/2$ são geradores do grupo SU(3) representados pelas oito matrizes de Gell-Mann [1]

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

o índice a refere-se as oito possíveis combinações de cores dos glúons. O termo $F_{\mu\nu}^a$ é o tensor intensidade de campo de glúons a qual obedece a relação

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (2.3)$$

Aqui f^{abc} é a constante de estrutura do grupo SU(3), que pode ser representada por

$$[\lambda^a, \lambda^b] = if^{abc} \lambda^c. \quad (2.4)$$

Podemos destacar que através da quantidade $F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^a$ surgiram novos vértices que são os de três e de quatro glúons como está apresentado na Figura (2.2). Além da lagrangiana clássica temos a lagrangiana do calibre-fixo que surge diante da inviabilidade de determinar um propagador para o glúon sem que haja uma escolha de calibre. O termo de fixação de calibre covariante é dado por [8]

$$\mathcal{L}_{\text{calibre-fixo}} = -\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2. \quad (2.5)$$

O fato de fixar um calibre covariante acarretará no surgimento de graus de liberdade não físicos. A maneira de eliminar estes graus não físicos é subtrair outro campo de forma a cancelar esta contribuição. A esta quantidade subtraída é atribuída o nome de campo fantasma de Faddeev-Popov [29], que é dado pela lagrangiana

$$\mathcal{L}_{\text{fantasma}} = (\partial_\mu c^{a*}) (\delta^{ac} \partial^\mu + g_s f^{abc} A_\mu^b) c^c. \quad (2.6)$$

A quantidade c^{a*} representa os campos fantasmas que são responsáveis por cancelar o calibre covariante.

Agora iremos colocar a representação das regras de Feynman para os propagadores e vértices, conforme indicam a Figura (2.1) e a Figura (2.2), respectivamente. No caso da Figura (2.1) a quantidade $D_{\mu\nu}(k)$ do propagador do glúon é

$$D_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \quad (2.7)$$

que no caso do calibre de Landau $\xi = 0$ e no calibre de Feynman $\xi = 1$.

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{c} j \qquad p \qquad i \\ \hline \longrightarrow \end{array} = \frac{i(\not{p} + m_f)\delta^{ij}}{p^2 - m_f^2 + i\epsilon} \\
& \begin{array}{c} b \qquad k \qquad a \\ \hline \dashrightarrow \end{array} = \frac{i\delta^{ab}}{k^2 + i\epsilon} \\
& \begin{array}{c} a \qquad k \qquad b \\ \hline \text{oooooo} \\ \nu \qquad \qquad \mu \end{array} = \frac{-iD_{\mu\nu}(k)\delta^{ab}}{k^2 + i\epsilon}
\end{aligned}$$

Figura 2.1 - Propagadores da QCD. Os quarks são representados pela linha contínua, os fantasmas pela linha tracejada, os glúons pela linha ondular, p e k são momenta, m_f representa a massa dos quarks com seu respectivo sabor f , os índices com letras latinas (a, b, c, \dots), referem-se às cores dos glúons, e os índices (i, j, k, \dots), as cores dos quarks, μ e ν são os índices de Lorentz. Figura do autor.

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{c} j \qquad \mu \qquad a \\ \diagdown \qquad \text{oooooo} \\ i \qquad \diagup \end{array} = ig_s \gamma^\mu (\tau^a)_{ji} \\
& \begin{array}{c} b \qquad \mu \qquad a \\ \dashrightarrow \qquad \text{oooooo} \\ c \qquad \diagup \\ \qquad p \end{array} = ig_s p^\mu f^{abc} \\
& \begin{array}{c} \text{oooooo} \quad p_1 \qquad \nu \qquad b \\ a \qquad \mu \qquad \text{oooooo} \\ \diagdown \qquad \text{oooooo} \quad p_2 \\ c \qquad p_3 \qquad \rho \end{array} = -g_s f^{abc} [(p_1 - p_3)g^{\mu\rho} + (p_2 - p_1)g^{\mu\nu} + (p_3 - p_2)g^{\nu\rho}] \\
& \begin{array}{c} \text{oooooo} \quad a \qquad \nu \qquad b \\ \mu \qquad \text{oooooo} \\ \diagdown \qquad \text{oooooo} \quad \sigma \\ c \qquad \rho \qquad \text{oooooo} \quad d \end{array} = -ig_s^2 [f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})]
\end{aligned}$$

Figura 2.2 - Vértices da QCD. Os quarks são representados pela linha contínua, os fantasmas pela linha tracejada, os glúons pela linha ondular, p é o momentum, os índices com letras latinas (a, b, c, \dots), referem-se às cores dos glúons, e (i, j, k, \dots), as cores dos quarks, μ, ν e σ são os índices de Lorentz, f é uma constante estrutural do grupo SU(3), γ^μ é a matriz de Dirac e g_s é a constante de acoplamento. Figura do autor.

2.3 Constante de acoplamento da QCD

Na física de partículas, em especial na QCD, temos duas propriedades muito importantes que são o confinamento e a liberdade assintótica. Antes de entender essas duas propriedades, iremos mostrar a dedução da constante de acoplamento α_s . Temos que a constante de acoplamento pode ser construída por meio do grupo de renormalização [26, 30]

$$\frac{d\alpha_s(Q^2)}{dt'} = \beta(\alpha_s(Q^2)), \quad (2.8)$$

onde

$$t' = \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) \quad \text{e} \quad \beta(\alpha_s(Q^2)) = \mu^2 \frac{d\alpha_s}{d\mu^2}. \quad (2.9)$$

A variável μ representa a escala de renormalização e Q a virtualidade. A função β em QCD tem sua expansão em mais baixas ordens em α_s dada por

$$\beta(\alpha_s) = -\alpha_s^2[\beta_0 + \beta_1\alpha_s + O(\alpha_s^2)], \quad (2.10)$$

sendo que

$$\beta_0 = \frac{33 - 2n_f}{12\pi} \quad \text{e} \quad \beta_1 = \frac{153 - 19n_f}{2\pi(33 - 2n_f)}, \quad (2.11)$$

onde n_f é o número de sabores ativos. Podemos escrever que

$$t' = \int_{\alpha_s(\mu^2)}^{\alpha_s(Q^2)} \frac{d\alpha_s}{\beta(\alpha_s)}. \quad (2.12)$$

Usando a Equação (2.10) e Equação (2.11) em (2.12) e considerando o termo de $\beta(\alpha_s)$ somente em primeira ordem, obtemos

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + \alpha_s(\mu^2)\beta_0 t'}. \quad (2.13)$$

A escala de confinamento da QCD é definida da forma [8]

$$\ln \Lambda_{\text{QCD}}^2 = \ln \mu^2 - \frac{1}{\beta_0 \alpha_s(\mu^2)}, \quad (2.14)$$

portanto

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{1}{\beta_0 \ln(Q^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)}. \quad (2.15)$$

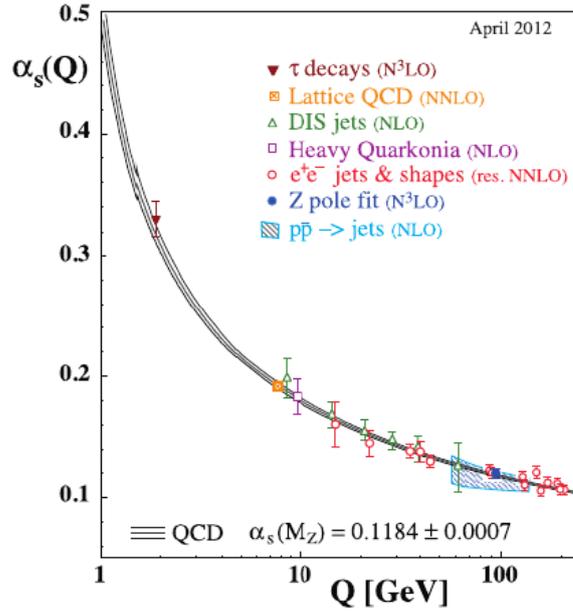


Figura 2.3 - Gráfico de α_s em função de Q . Figura extraída de [31].

Podemos observar na Figura (2.3) que quando estamos em grandes distâncias ou ainda em pequeno Q o acoplamento é bastante intenso, ocasionando que os quarks e glúons estejam fortemente ligados nos hádrons (confinamento). Todavia se estamos falando de pequenas distâncias ou grande Q a constante de acoplamento tende a zero, acarretando que os quarks se comportem como "partículas livres" (liberdade assintótica). Esta propriedade de liberdade assintótica permite que dentro da QCD seja possíveis cálculos da interação entre partículas via regras de Feynman. A Equação (2.15) será de grande importância na tese, pois é comum atribuir a constante de acoplamento valores fixos a cálculos de primeira ordem, porém em nosso trabalho trataremos de uma abordagem via equação BFKL, onde utilizaremos o acoplamento dinâmico, ou seja, nos moldes como se encontra a Equação (2.15).

2.4 Espalhamento profundamente inelástico

O espalhamento profundamente inelástico (*Deep Inelastic Scattering*, DIS) [8, 25, 27] se baseia na interação de um lépton com um núcleon. Se no estado final somente o hádron é detectado dizemos que este espalhamento é inclusivo, mas se no estado final tivermos, por exemplo os mésons vetoriais J/ψ ou Υ , definimos como sendo um processo semi-inclusivo. Este tipo de espalhamento tem sua aplicabilidade atribuída a investigação da estrutura hadrônica. Isto é possível, pois só um dos constituintes do espalhamento possui subestrutura. Podemos representar o espalhamento elétron-próton, que caracteriza um processo DIS conforme descreve o diagrama da Figura (2.4). O processo elétron-próton,

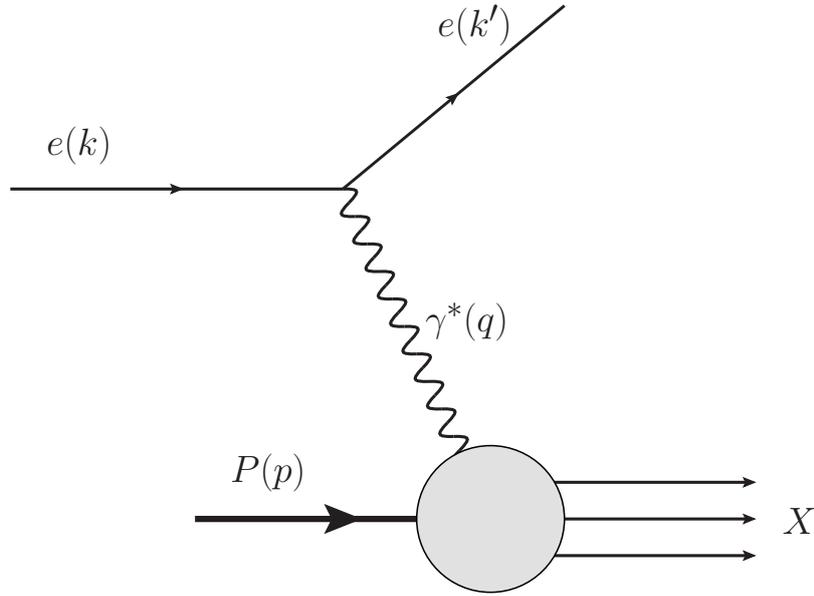


Figura 2.4 - Espalhamento profundamente inelástico. Figura do autor.

pode ser determinado pela representação

$$e(k)P(p) \rightarrow e(k')X(p'), \quad (2.16)$$

onde e representa o elétron que transporta quadrimomentum inicial k e quadrimomentum final k' . Esse elétron emite um fóton virtual γ^* com momentum transferido q que vai interagir com os constituintes do próton. Aqui P representa o próton com momentum p e massa m_p e X é o estado final hadrônico com momentum p' . A partir do espalhamento (2.16), podemos deduzir algumas variáveis cinemáticas como:

$$Q^2 = -q^2 = -(k - k')^2, \quad (2.17)$$

onde Q está vinculada à resolução do processo. Essa resolução aumenta e medida em que as distâncias diminuem. O quadrado da energia do centro de massa é

$$s = (k + p)^2. \quad (2.18)$$

A energia do centro de massa do processo fóton-próton é

$$W^2 = (q + p)^2, \quad (2.19)$$

também caracterizada como a massa invariante do sistema X . A fração de momentum do próton portada pelo parton/núcleon é dada por:

$$x = \frac{Q^2}{2p \cdot q} = \frac{Q^2}{2m_p \nu} = \frac{Q^2}{Q^2 + W^2 - m_p^2}, \quad (2.20)$$

também conhecida como variável de Bjorken. A quantidade $\nu = E - E'$ é a diferença de energia do estado final e inicial do elétron. Quando temos a condição de que $Q^2 \gg m_p^2$, caracterizamos o processo como sendo profundo, pois esta condição implica que o fóton penetra o núcleon. Já se tivermos a condição $W^2 \gg m_p^2$, nos diz que o processo é inelástico e que houve a fragmentação do núcleon. A parcela

$$\bar{y} = \frac{p \cdot q}{p \cdot k} = \frac{W^2 + Q^2 - m_p^2}{s - m_p^2} \quad (2.21)$$

conhecida como inelasticidade, representa a quantidade de energia do lépton transferida para o núcleon através do fóton trocado. Essa quantidade também pode ser escrita como $\bar{y} = \nu/E$.

Agora calcularemos a seção de choque diferencial para o DIS inclusivo. Ela pode ser expressa da forma [8, 25]

$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{\alpha_{em}^2 E'}{2m_p Q^4} L_{\mu\nu} W^{\mu\nu}, \quad (2.22)$$

onde α_{em} é o acoplamento eletromagnético, $d\Omega = d\cos(\theta)d\varphi$ é o ângulo sólido que identificará o ângulo de saída do lépton emergente,

$$W_{\mu\nu} = -2m_p W_1(\nu, Q^2) \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + \frac{2W_2(\nu, Q^2)}{m_p} \left(p_\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu \right) \quad (2.23)$$

é o tensor hadrônico, padronizado conforme [8, 25] e

$$L_{\mu\nu} = 2(k_\mu k'_\nu + k'_\nu k_\mu - k \cdot k' g_{\mu\nu}) \quad (2.24)$$

é o tensor leptônico em ordem dominante obtido via regra de Feynman da Eletrodinâmica Quântica (*Quantum Electrodynamics*, QED). Com a substituição da Equação (2.24) e a Equação (2.23) na Equação (2.22), ficamos com

$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{4\alpha_{em}^2 E'}{Q^2} \left[2W_1(\nu, Q^2) \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + W_2(\nu, Q^2) \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]. \quad (2.25)$$

Introduzindo as funções de estrutura adimensionais

$$F_1(x, Q^2) \equiv m_p W_1(\nu, Q^2), \quad (2.26)$$

$$F_2(x, Q^2) \equiv \nu W_2(\nu, Q^2) \quad (2.27)$$

mais a substituição das variáveis do sistema de referência de laboratório

$$x = \frac{2EE' \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{m_p(E - E')} \quad \text{e} \quad \bar{y} = 1 - \frac{E'}{E},$$

obtemos

$$\frac{d\sigma}{dx dQ^2} = \frac{4\pi\alpha_{em}^2}{xQ^2} \left[x\bar{y}^2 F_1(x, Q^2) + \left(1 - \bar{y} - \frac{x\bar{y}m_p}{2E} F_2(x, Q^2)\right) \right]. \quad (2.28)$$

Também podemos escrever o tensor hadrônico Equação (2.23) em relação as funções de estrutura com a utilização das relações (2.26) e (2.27), de modo que ficamos com

$$W_{\mu\nu} = -2F_1(x, Q^2) \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + \frac{2F_2(x, Q^2)}{p \cdot q} \left(p_\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu \right). \quad (2.29)$$

Através do teorema óptico somos capazes de escrever a seção de choque total de fotoabsorção como [8]

$$\sigma_\lambda^{\gamma^* P}(x, Q^2) = \frac{2\pi^2 \alpha_{em}}{m_p \sqrt{\nu^2 + Q^2}} \varepsilon_\mu^{(\lambda)} \varepsilon_\nu^{(\lambda)*} W^{\mu\nu}, \quad (2.30)$$

onde ε_μ^λ é o quadrivetor do fóton virtual com helicidade λ . Temos que os projetores de helicidade do fóton são [8, 25]

$$d_{\mu\nu}^{(\Sigma)} = \sum_{\lambda=0, \pm 1} \varepsilon_\mu^{(\lambda)} \varepsilon_\nu^{(\lambda)*} = - \left(g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{Q^2} \right), \quad (2.31)$$

$$d_{\mu\nu}^{(L)} = \varepsilon_\mu^{(0)} \varepsilon_\nu^{(0)*} = - \frac{Q^2}{m_p^2(\nu^2 + Q^2)} \left(p_\mu + \frac{q \cdot p}{Q^2} q_\mu \right) \left(p_\nu + \frac{q \cdot p}{Q^2} q_\nu \right), \quad (2.32)$$

$$d_{\mu\nu}^{(T)} = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_\mu^{(+1)} \varepsilon_\nu^{(+1)*} + \varepsilon_\mu^{(-1)} \varepsilon_\nu^{(-1)*} \right) = \frac{1}{2} \left(d_{\mu\nu}^{(\Sigma)} - d_{\mu\nu}^{(L)} \right). \quad (2.33)$$

Agora somos capazes de escrever a seção de choque total de fotoabsorção em termos das funções de estrutura F_1 e F_2 . Usando a Equação (2.29), Equação (2.32) e Equação (2.33),

obtemos os resultados

$$\sigma_T^{\gamma^*P}(x, Q^2) = \frac{2\pi^2\alpha_{em}}{m_p\sqrt{\nu^2 + Q^2}} d_{\mu\nu}^{(T)} W^{\mu\nu} = \frac{4\pi^2\alpha_{em}}{Q^2} 2xF_1, \quad (2.34)$$

$$\sigma_L^{\gamma^*P}(x, Q^2) = \frac{2\pi^2\alpha_{em}}{m_p\sqrt{\nu^2 + Q^2}} d_{\mu\nu}^{(L)} W^{\mu\nu} = \frac{4\pi^2\alpha_{em}}{Q^2} (F_2 - 2xF_1). \quad (2.35)$$

Podemos escrever a Equação (2.34) e a Equação (2.35) em termos da função de estrutura transversal e longitudinal com a substituição de $F_T = 2xF_1$ e $F_L = F_2 - 2xF_1$, respectivamente. Assim obtemos que a soma da seção de choque transversal mais a longitudinal fica

$$\sigma_T^{\gamma^*P}(x, Q^2) + \sigma_L^{\gamma^*P}(x, Q^2) = \frac{4\pi^2\alpha_{em}}{Q^2} (F_T(x, Q^2) + F_L(x, Q^2)). \quad (2.36)$$

A função de estrutura pode ser escrita em termos de $F_2 = F_T + F_L$, portanto a seção de choque para fotoabsorção adquire a forma

$$\begin{aligned} \sigma^{\gamma^*P}(x, Q^2) &= \sigma_T^{\gamma^*P}(x, Q^2) + \sigma_L^{\gamma^*P}(x, Q^2) \\ &= \frac{4\pi^2\alpha_{em}}{Q^2} F_2(x, Q^2). \end{aligned} \quad (2.37)$$

2.5 Conclusão

Neste capítulo fizemos um breve resumo do Modelo Padrão, Lagrangiana da QCD, constante de acoplamento e DIS, cujo objetivo é fornecer conceitos básicos para a construção da equação BFKL dentro da QCD perturbativa e entender o DIS, pois faremos uma análise fenomenológica deste tipo de espalhamento. A priori no próximo capítulo daremos foco à teoria de Regge, na qual o Pomeron é descrito em altas energias dentro de uma perspectiva não perturbativa. Seguimos este roteiro porque teoria de Regge vai servir nesta tese como ponto de partida para o entendimento do comportamento da seção de choque a altas energias, que acaba sendo associado à troca de um objeto portador dos números quânticos do vácuo.

3 O POMERON EM TEORIA DE REGGE

Reservamos este capítulo para descrever a teoria de Regge. Embora a teoria de Regge não seja o foco desse trabalho é de grande valia que apresentemos, mesmo que de forma simples, a hipótese que levou à concepção de que haveria a troca de um objeto que portasse os números quânticos do vácuo, para que a seção de choque a altas energias tivesse um leve crescimento. Veremos que este leve crescimento está diretamente relacionado a singularidade do plano complexo do momentum angular.

3.1 Teoria de Regge

A teoria de Regge [5,6,8] é uma teoria não perturbativa de altas energias, cujo objetivo é estudar as propriedades analíticas em termos do momentum angular. Ela parte do pressuposto que estados ligados para um potencial esférico simétrico incidem em uma família de ressonâncias, isso ocorre à medida em que o momento angular e energia aumentam. Estes estados ligados representam polos da amplitude da onda parcial no caso de l inteiro. Para um potencial esfericamente simétrico, a amplitude pode ser expressa por [5,6,8]

$$F(k,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)a_l(k)P_l(\cos\vartheta), \quad (3.1)$$

onde ϑ é um ângulo, l o momentum angular, $a_l(k)$ a amplitude da onda parcial, P_l o polinômio de Legendre e k o quadri-momentum. A proposta da teoria de Regge é estender o momentum angular l para valores complexos, nos retornando uma função para a amplitude da onda parcial da forma $a(l,k)$, onde l representa polos simples ou polos de Regge. Sua localização é delineada pela relação,

$$l = \alpha(k) \quad (3.2)$$

conhecida como trajetória de Regge. Essa formulação tem uma aplicabilidade em física de partículas no âmbito da matriz S. A matriz S não contém a informação da dinâmica da teoria, esse fato faz com que sejamos incapazes de estudar a propriedade de analiticidade, fazendo com que a existência dos polos de Regge seja apenas uma especulação. Apesar dessa inconveniência, desde a década de 60 até os dias atuais a comunidade científica ainda tem se utilizado de tal teoria na descrição de fenômenos de física de altas energias [32,33], comprovando seu sucesso.

Sob certas propriedades da matriz S [34] somos capazes de estender l a valores complexos.

Desta forma, os polos de Regge [6, 8] são localizados em

$$l = \alpha(t), \quad (3.3)$$

onde t representa o quadrado do momentum transferido. No caso do quadrado do momentum transferido t fixo e quadrado de energia do centro de massa $s \rightarrow \infty$ a amplitude de espalhamento elástico se comporta como

$$A(s,t) \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} s^{\alpha(t)}. \quad (3.4)$$

O que vai determinar o comportamento assintótico da amplitude de espalhamento é a singularidade $\alpha(t)$ com maior parte real no plano t . Até agora, estamos nos referindo apenas a polos simples, não quer dizer que não sejamos confrontados com outro tipo de singularidade, como polos não simples e cortes, que surgem como contribuições complementares da amplitude de espalhamento.

3.1.1 Trajetória de Regge

A trajetória de Regge descreve que a interação forte é proveniente por uma troca de uma família de ressonâncias no canal t . Chew e Frautschi [8], observaram que ao fazer um ajuste dos dados para mésons leves, em relação ao spin das partículas versus a massa ao quadrado, análogos a $\alpha(t)$ e t , respectivamente, obtiveram um resultado que se comportava linearmente. Esse comportamento pode ser observado no gráfico da Figura (3.1). A equação que descreve a evolução da família de ressonâncias é obtida através da expansão

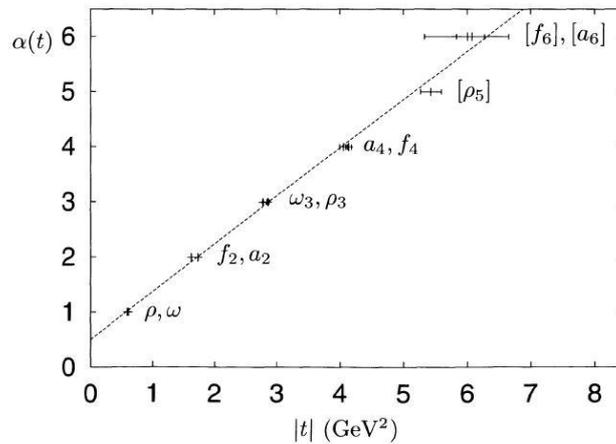


Figura 3.1 - Trajetória mesônica de $\alpha(t)$ versus $|t|$ de ρ , f_2 , a_2 e ω . Figura extraída de [8].

de $\alpha(t)$ em séries de potências em torno de $t = 0$, resultando em

$$\alpha(t) = \alpha(0) + \alpha't. \quad (3.5)$$

Através da Figura (3.1), podemos ter um resultado aproximado para o coeficiente linear e angular da Equação (3.5), que é, respectivamente,

$$\alpha(0) = 0,55 \quad \text{e} \quad \alpha' = 0,86 \text{ GeV}^{-2}.$$

A condição (3.5), também é válida para partículas de spin semi-inteiro, ou seja, os bárions.

3.1.2 Construindo a ideia do Pomeron

Esta seção está destinada a responder a pergunta do por que o leve crescimento da seção de choque a altas energias está associado ao Pomeron. Para termos um entendimento do que levou a essa interpretação precisamos ter o conhecimento acerca de algumas suposições. Uma delas, a de Pomeranchuk [6], refere que para um processo no qual há troca de carga a seção de choque diminui assintoticamente (teorema de Pomeranchuk). Já para Foldy e Peirels [6], um processo pelo qual a seção de choque não diminui com o aumento do quadrado da energia do centro de massa s era um indício do predomínio da troca dos números quânticos do vácuo (isospin zero e conjugação de carga par). Um candidato para descrever tais eventos seria a trajetória da partícula f_2 da Figura (3.1), que porta os números quânticos do vácuo. No entanto, veremos que ela não explicava o porque do leve aumento da seção de choque. Isso fica claro quando substituímos a intercepto $\alpha(0) = 0,55$ na seção de choque total, obtida através do teorema óptico para parte imaginária da amplitude de espalhamento com zero momentum transferido ($t = 0$) [8]

$$\sigma_{\text{tot}} \underset{s \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{1}{s} \text{Im} A_{el}(s, t = 0) \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} s^{\alpha(0)-1}. \quad (3.6)$$

Vemos que a seção de choque diminui com o aumento de s , precisamos, porém, de um intercepto que faça que tenhamos um leve crescimento da mesma. Para isso acontecer temos que ter necessariamente uma trajetória de Regge com intercepto $\alpha(0) > 1$ e ainda satisfazer a condição de carregar os números quânticos do vácuo. A esse candidato é atribuído o nome de Pomeron.

Donnachie e Landshoff [7], fizeram um ajuste dos dados da seção de choque total utilizando a parametrização

$$\sigma_{\text{tot}} = X s^{0,0808} + Y s^{-0,4525}, \quad (3.7)$$

onde X e Y são parâmetros livres dependentes da reação. O expoente do primeiro termo é relacionado à troca do Pomeron com intercepto $\alpha_{\mathbb{P}}^{\text{suave}}(0) \simeq 1,0808$ e o expoente do segundo a troca de um trajetórias de Regge com intercepto $\alpha_{\mathbb{R}}(0) \simeq 0,5475$. Colaborações mais atuais mostraram um leve crescimento da seção de choque [35,36]. Um problema dos resultados encontrados para o intercepto do Pomeron é que eles são $\alpha_{\mathbb{P}}(0) > 1$, violando o limite de Froissart-Martin, ou seja, a unitariedade. O limite de Froissart-Martin nos diz que o crescimento da seção de choque para $s \rightarrow \infty$ não deve ser maior do que $\ln^2 s$. Temos que assintoticamente ocorre múltiplas trocas de Pomerons, e a inserção da probabilidade desses múltiplos espalhamentos restaura a unitariedade [37–39].

O parâmetro X da Equação (3.7), por estar relacionado com a troca dos números quânticos do vácuo, não muda de partícula para anti-partícula, devido o acoplamento ocorrer com mesma intensidade para ambas. Podemos evidenciar este comportamento nos processos pp , $\bar{p}p$ e $\pi^\pm p$ na Figura (3.2) e $K^\pm p$ na Figura (3.3).

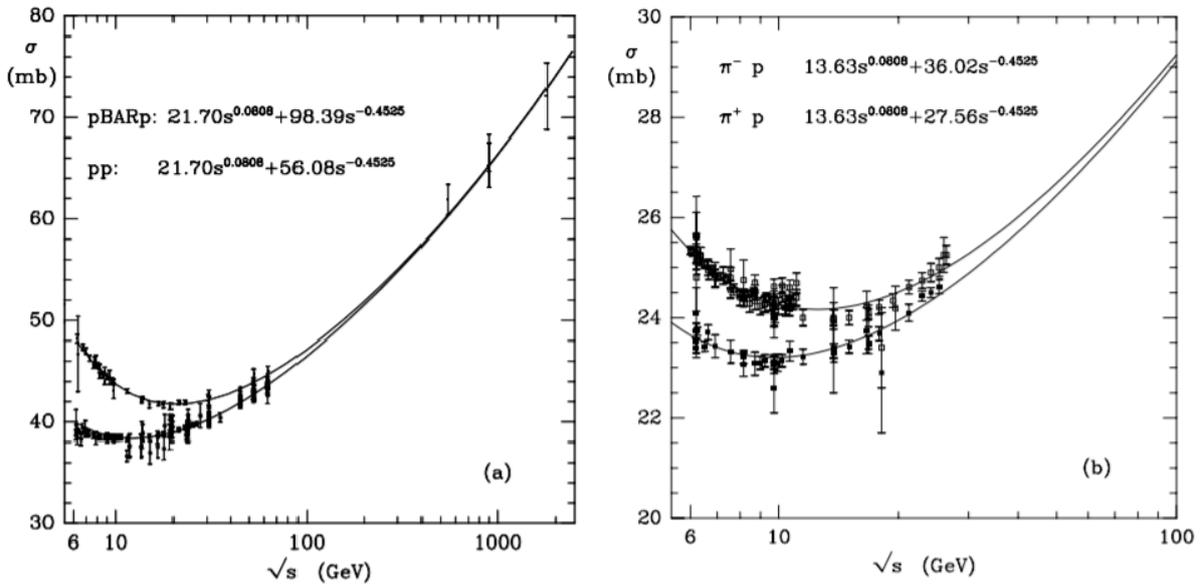


Figura 3.2 - Seção de choque para pp , $\bar{p}p$ e $\pi^\pm p$. Figuras extraídas de [7].

O valor de α' pode ser encontrado para pequenos valores de t a alguma energia fixa, a partir da seção de choque diferencial do espalhamento elástico pp . Representada por [6]

$$\frac{d\sigma_{\text{el}}}{dt} \propto s^{2\alpha(0)-2}. \quad (3.8)$$

A Figura (3.4) mostra um ajuste dos dados para a seção de choque diferencial e nos dá o coeficiente angular $\alpha' \simeq 0,25$. Com esse resultado mais o do intercepto, quantificado por

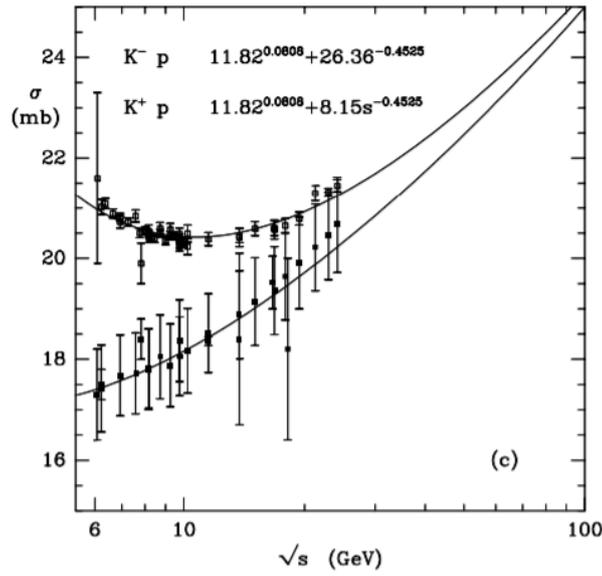


Figura 3.3 - Seção de choque para $K^\pm p$. Figura extraída de [7].

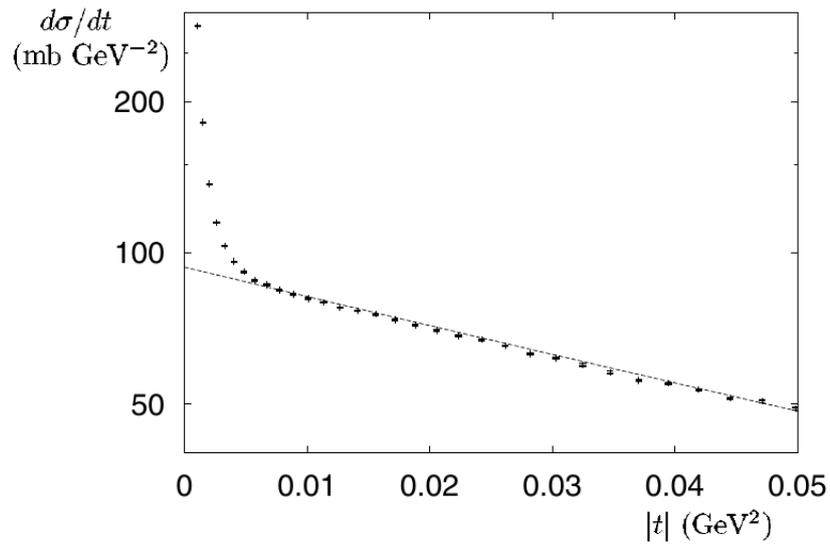


Figura 3.4 - Espalhamento elástico pp com $\sqrt{s} = 53 \text{ GeV}$. Figura extraída de [5].

Donnachie e Landshoff, somos capazes de escrever a trajetória do Pomeron. Seu resultado é:

$$\alpha(t) = 1,08 + 0,25 \text{ GeV}^{-2}t. \quad (3.9)$$

Nessa trajetória não temos nenhuma ressonância. Um candidato para descrever o Pomeron, seria estados ligados de glúons, conhecido como bola de grude (partícula hipotética). Um ajuste dos dados para a trajetória Equação (3.9), nos dá a seguinte representação

gráfica dessa partícula hipotética [40] .

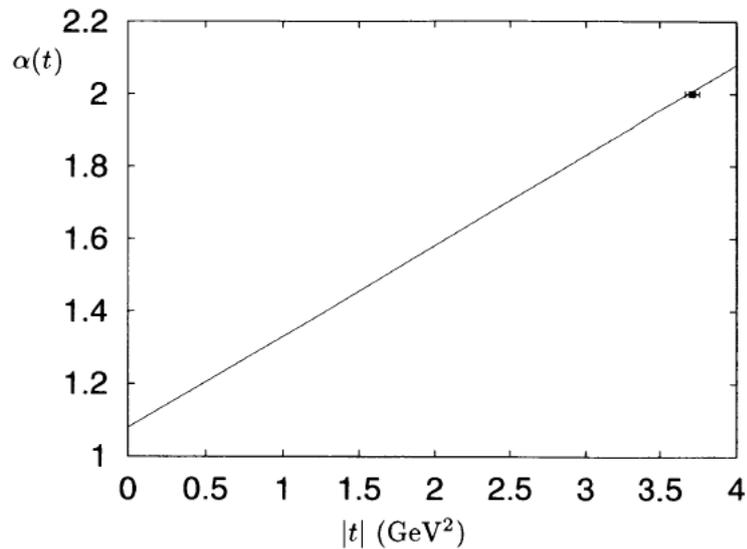


Figura 3.5 - Trajetória do Pomeron com o candidato a bola de grude. Figura extraída de [40].

3.2 Conclusão

Foi feita uma revisão da teoria de Regge, que é uma teoria não perturbativa que serve na descrição das seções de choque a altas energias. O comportamento assintótico da seção de choque total foi atribuído à troca de um objeto chamado Pomeron. Fenomenologicamente, foi viável chegar a um valor quantitativo para a sua intercepto, que é de $\alpha_{\mathbb{P}}^{\text{suave}}(0) \approx 1,1$. O foco do próximo capítulo é investigá-lo no âmbito da QCD. Veremos que, perturbativamente, e sob certas condições cinemáticas é possível modelar o Pomeron através da troca de interações entre glúons. Isto traz a possibilidade de estudá-lo do ponto de vista de um objeto que tem estrutura.

4 O POMERON NA QCD: A EQUAÇÃO BFKL

No capítulo anterior dedicamos a descrição do Pomeron em altas energias através da teoria de Regge. Dedicaremos este capítulo a sua descrição dentro da QCD perturbativa. Nela temos como exemplo o modelo de Low e Nussinov, que é a maneira mais básica para representar o Pomeron. [41, 42]. Neste modelo no espalhamento elástico temos a troca de dois glúons, pois é a meio mais simples de não haver troca de cor. Mas somente a troca de dois glúons não nos dá o crescimento assintótico da seção de choque total e a interação entre eles deve ser levada em conta. Essa interação é descrita através de uma “escada” de glúons, e a equação que descreve a evolução dos glúons nessa “escada” é a equação BFKL [6, 8, 27]. Daremos foco ao cálculo em Leading Log Approximation (LLA), onde diagramas com termos de maior potência em $(\alpha_s \ln s/t)^n$, servem de aproximação em cada ordem em teoria de perturbação. A soma de todas essas contribuições dominantes, em octeto de cor, nos darão a trajetória do glúon. Além disso, vamos mostrar a solução da equação BFKL a momentum transferido nulo, com uma constante de acoplamento fixa.

4.1 Espalhamento quark-quark via troca de um glúon

O diagrama da Figura (4.1) retrata o espalhamento qq via troca de um glúon. Com esse tipo de espalhamento não teríamos como descrever o Pomeron. Isto acontece porque o Pomeron é descrito por uma configuração “incolor” e para que isso ocorra é necessário termos um objeto singlete de cor. Veremos nas próximas seções, que a parcela de singlete de cor aparece a partir de espalhamentos quark-quark via troca de dois glúons. É conveniente descrever o espalhamento quark-quark via troca de um glúon, pois utilizaremos os resultados encontrados para análises posteriores, como, por exemplo, para o glúon reggeizado. De forma a simplificar o problema, foram omitidos os índices de helicidade dos espinores de Dirac.

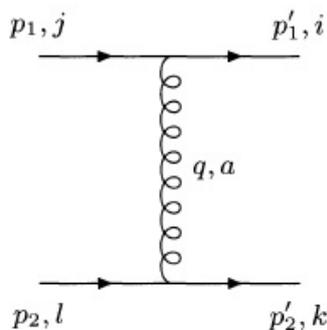


Figura 4.1 - Espalhamento quark-quark via troca de um glúon. Figura extraída de [8].

A amplitude de espalhamento do diagrama da Figura (4.1), em regras de Feynman [1] na QCD é

$$-i\mathcal{A}(s,t) = [\bar{u}(p'_1) \left(-\frac{1}{2}ig_s\lambda_{ij}^a\gamma^\mu \right) u(p_1)] \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \delta^{ab} [\bar{u}(p'_2) \left(-\frac{1}{2}ig_s\lambda_{kl}^b\gamma^\nu \right) u(p_2)], \quad (4.1)$$

onde as primeiras letras latinas (a, b, c, ...), referem-se às cores dos glúons, e (i, j, k, ...), as cores dos quarks, μ e ν são os índices de Lorentz e g_s é a constante de acoplamento da QCD. Já os geradores $\lambda^{a,b}$ que aparecem nos vértices são representados por oito matrizes de Gell-Mann [1]. Esses geradores, podem ser expressos em termos de $\tau_{ij}^a = \frac{1}{2}\lambda_{ij}^a$ e $\tau_{kl}^b = \frac{1}{2}\lambda_{kl}^b$. Dessa forma podemos rearranjar a Equação (4.1), tal que

$$-i\mathcal{A}(s,t) = ig_s^2 \tau_{ij}^a \tau_{kl}^a [\bar{u}(p'_1)\gamma^\mu u(p_1)] \frac{1}{q^2} [\bar{u}(p'_2)\gamma_\mu u(p_2)]. \quad (4.2)$$

Próximo passo será introduzir uma parametrização para o momentum q do propagador do glúon, que é a de Sudakov [8]

$$q = \alpha p_1 + \beta p_2 + q_\perp, \quad (4.3)$$

onde $q_\perp = (0, \mathbf{q}, 0)$ é um quadri-vetor com apenas componentes transversais. O quadrado da energia de centro de massa para caso de $s \gg t$ é

$$s \approx 2p_1 \cdot p_2. \quad (4.4)$$

Temos que a variável de Mandelstam t está relacionada com o quadrado do momentum transferido. Então, usando a Equação (4.3) pode-se escrever que

$$t = q^2 = 2\alpha\beta p_1 \cdot p_2 - \mathbf{q}^2 = \alpha\beta s - \mathbf{q}^2. \quad (4.5)$$

Ciente das definições descritas acima, podemos escrever a condição de camada de massa para os quarks de saída, ou seja,

$$(p_1 - q)^2 = -(1 - \alpha)\beta s - \mathbf{q}^2 = 0, \quad (4.6)$$

$$(p_2 - q)^2 = \alpha(1 + \beta)s - \mathbf{q}^2 = 0. \quad (4.7)$$

Quando relacionamos a Equação (4.6) com a Equação (4.7), chegamos a conclusão de que $\alpha = -\beta$, e se impormos a condição de que $s \gg \mathbf{q}^2$, implica que

$$\alpha = |\beta| \simeq \frac{\mathbf{q}^2}{s} \gg 1 \quad \text{e} \quad q^2 \simeq -\mathbf{q}^2. \quad (4.8)$$

Para calcular a amplitude de espalhamento da Equação (4.2), será utilizada aproximação eiconal [8]. Além de facilitar os cálculos é uma ferramenta que possibilita a soma de infinitos diagramas. A partir de agora todos os cálculos, na qual sua aplicação é conveniente, serão baseados nesse tipo de aproximação. Nela tomamos o limite de altas energias na amplitude, ou seja, consideramos $s \gg |t|$, o que implica que as componentes q^μ são muito menores que p_1^μ e p_2^μ , o que nos permite escrever que

$$\bar{u}(p'_1)\gamma^\mu u(p_1) = 2p_1^\mu \quad \text{e} \quad \bar{u}(p'_2)\gamma_\mu u(p_2) = 2p_{2,\mu}. \quad (4.9)$$

Substituindo a Equação (4.9) na Equação (4.2) e utilizando a definição (4.4) ficamos com

$$\mathcal{A}(s,t) = g_s^2 \tau_{ij}^a \tau_{kl}^a 4 \left(\frac{p_1^\mu p_{2,\mu}}{q^2} \right) = 8\pi\alpha_s \tau_{ij}^a \tau_{kl}^a \frac{s}{t}, \quad (4.10)$$

onde a constante de acoplamento vale $\alpha_s = g_s^2/4\pi$.

Agora, resta calcular o quadrado da amplitude de espalhamento do processo qq , mas primeiramente calculamos o quadrado do fator de cor

$$\begin{aligned} (\tau_{ij}^a \tau_{kl}^a)^2 &= \frac{1}{N_c^2} (\tau_{ij}^a \tau_{kl}^a) (\tau_{ij}^b \tau_{kl}^b)^* = \frac{1}{N_c^2} (\tau_{ij}^a \tau_{kl}^a) (\tau_{ji}^b \tau_{lk}^b) \\ &= \frac{1}{N_c^2} \text{Tr}(\tau^a \tau^b) \text{Tr}(\tau^a \tau^b) = \frac{1}{N_c^2} \frac{1}{4} (\delta_{ab}^2) = \frac{N_c^2 - 1}{4N_c^2} = \frac{2}{9}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde $N_c = 3$ e $\delta_{aa} = \delta_{bb} = 8$. O fator $1/N_c^2$ incluso em (4.11) representa as possíveis combinações de cores no estado inicial, já o termo $N_c^2 - 1$ é a soma sobre todas as possíveis cores no estado inicial e final. Uma versão mais detalhada do cálculo do fator de cor, no espalhamento qq via troca de um glúon, pode ser encontrada em [1]. Como já temos o resultado do quadrado do fator de cor, ao tomarmos o quadrado da amplitude da Equação (4.10), ficamos com

$$|\mathcal{A}(s,t)|^2 = \frac{8}{9} g_s^4 \frac{s^2}{t^2}. \quad (4.12)$$

De modo geral é assim que calculamos o quadrado da amplitude de espalhamento, na qual serve, por exemplo, para o cálculo de seções de choque. Daqui em diante, vamos nos deter ao cálculo de diagramas de Feynman do processo de espalhamento (quark-quark) $qq \rightarrow qq$ onde ocorre a troca de mais de um glúon.

4.2 Espalhamento quark-quark via troca de dois glúons

A Figura (4.2) nos mostra diagramas do espalhamento quark-quark via troca de dois

glúons que contribuem em LLA. Somente o diagrama caixa e o cruzado tem parcela dominante. Temos uma variedade maior de diagramas com troca de dois glúons, mas eles são responsáveis por correções de ordem mais alta.

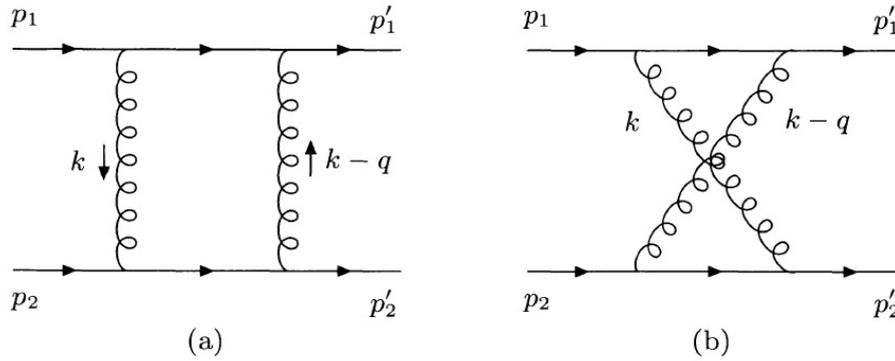


Figura 4.2 - Espalhamento $qq \rightarrow qq$ com troca de dois glúons: (a) conhecido como diagrama caixa; (b) diagrama cruzado. Figura extraída de [8].

A fim de obter a amplitude de espalhamento utilizaremos as regras de Cutkosky [8], que dizem que a parte imaginária da amplitude é descrita pelo produto do espaço de fase com duas amplitudes externas, ou seja,

$$\text{Im}\mathcal{A}(s,t) = \frac{1}{2} \int d\Pi_2 \mathcal{A}(s,k^2) \mathcal{A}^\dagger(s,(k-q)^2), \quad (4.13)$$

onde o \dagger representa o conjugado hermitiano da amplitude.

Podemos representar diagramaticamente o corte da Figura (4.2,a) como está representado na Figura (4.3)

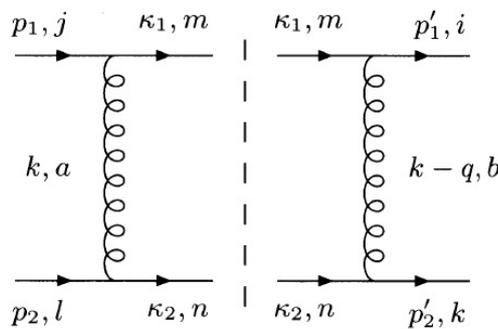


Figura 4.3 - Parte imaginária da Figura (4.2,a). Figura extraída de [8].

O diagrama da Figura (4.1) se assemelha ao diagrama do lado esquerdo e direito do corte da Figura (4.3), de modo que o resultado da amplitude de espalhamento da Equação (4.10), pode ser usado como comparativo para termos o resultado das amplitudes de espalhamento externas da Equação (4.13), ou seja,

$$\mathcal{A}(s, k^2) = -8\pi\alpha_s(\tau_{mj}^a\tau_{nl}^a)\frac{s}{\mathbf{k}^2}, \quad (4.14)$$

$$\mathcal{A}^\dagger(s, (k-q)^2) = -8\pi\alpha_s(\tau_{mi}^b\tau_{nk}^b)^*\frac{s}{(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}. \quad (4.15)$$

O espaço de fase de duas partículas intermediárias é descrito por

$$\begin{aligned} \int d\Pi_2 &= \int \frac{d^4\kappa_1}{(2\pi)^3} \frac{d^4\kappa_2}{(2\pi)^3} \delta(\kappa_1^2)\delta(\kappa_2^2)(2\pi)^4\delta(p_1+p_2-\kappa_1-\kappa_2) \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} \delta((p_1-k)^2)\delta((p_2+k)^2). \end{aligned} \quad (4.16)$$

A parametrização de Sudakov para o quadrimomentum do glúon no canal t é

$$k = \alpha p_1 + \beta p_2 + k_\perp, \quad (4.17)$$

onde o elemento diferencial de volume em quatro dimensões é dado por

$$d^4k = \frac{s}{2} d\alpha d\beta d^2\mathbf{k}. \quad (4.18)$$

A partir da Equação (4.6) e Equação (4.7) é possível deduzir algumas relações para o limite de grande s , como as que são mostradas e seguir:

$$\alpha = |\beta| \simeq \frac{\mathbf{k}}{s} \ll 1, \quad (4.19)$$

$$k^2 \simeq -\mathbf{k}^2, \quad (k-q)^2 \simeq -(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2 \quad (4.20)$$

com

$$\mathbf{k}^2 \simeq (\mathbf{k}-\mathbf{q})^2 \simeq \mathbf{q}^2. \quad (4.21)$$

Substituindo a Equação (4.6) e (4.7), só que agora em termos do momentum k do glúon, mais a Equação (4.18) na Equação (4.16), resulta na seguinte expressão para o espaço de fase de dois corpos [8]

$$\int d\Pi_2 = \frac{s}{8\pi^2} \int d\alpha d\beta d^2\mathbf{k} \delta(-\beta(1-\alpha)s + \mathbf{k}^2) \delta(\alpha(1+\beta)s - \mathbf{k}^2). \quad (4.22)$$

Usando a propriedade $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$ em (4.22) e integrando a função delta, obtemos

$$\int d\Pi_2 = \frac{1}{8\pi^2 s} \int d\alpha d\beta d^2\mathbf{k} \delta\left(\beta + \frac{\mathbf{k}^2}{s}\right) \delta\left(\alpha - \frac{\mathbf{k}^2}{s}\right) = \frac{1}{8\pi^2 s} \int d^2\mathbf{k} \quad (4.23)$$

Agora, substituindo os resultados encontrados na Equações (4.14), (4.15) e (4.23) na Equação (4.13), temos

$$\text{Im}\mathcal{A}(s,t) = 4s\alpha_s^2 (\tau^a \tau^b)_{ij} (\tau^a \tau^b)_{kl} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}. \quad (4.24)$$

Para prosseguir os cálculos necessitamos usar relação de dispersão [6], que nos diz que

$$\text{Re}\mathcal{A} = -\frac{1}{(n+1)\pi} \ln(s) \text{Im}\mathcal{A}. \quad (4.25)$$

O valor de n é determinado pela potência do logaritmo que a parte imaginária da amplitude carrega, ou seja,

$$\ln^n(s), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.26)$$

Para a Equação (4.24) $n = 0$, portanto a parte real será

$$\mathcal{A}(s,t)_{\text{Fig.4.2,a}} = \frac{4\alpha_s^2}{\pi} (\tau^a \tau^b)_{ij} (\tau^a \tau^b)_{kl} \frac{s}{t} \ln\left(\frac{s}{t}\right) \int \frac{d^2\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}. \quad (4.27)$$

Uma vez que no diagrama caixa s/t é negativa, da Equação (4.27) é possível extrair a parte real e imaginária mediante o uso de $\ln(-s) = \ln(s) - i\pi$, assim obtemos que

$$\mathcal{A}(s,t)_{\text{Fig.4.2,a}} = -\frac{4\alpha_s^2}{\pi} (\tau^a \tau^b)_{ij} (\tau^a \tau^b)_{kl} \frac{s}{t} \left[\ln\left(\frac{s}{|t|}\right) - i\pi \right] \int \frac{d^2\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}. \quad (4.28)$$

A singularidade da integral da Equação (4.27) é divergente no infravermelho, devido aos quarks externos estarem situados dentro da camada de massa. Mas em uma situação real, eles se encontram confinados dentro dos hádrons e fora da camada de massa. A fim de contornar este problema, determinamos um corte infravermelho μ^2 , desta maneira ficamos com

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(s,t)_{\text{Fig.4.2,a}} = & -\frac{4s\alpha_s^2}{\pi} (\tau^a \tau^b)_{ij} (\tau^a \tau^b)_{kl} \left[\ln\left(\frac{s}{|t|}\right) - i\pi \right] \\ & \times \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(\mathbf{k}^2 + \mu^2)[(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2 + \mu^2]}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Para futura conveniência, escrevemos a seguinte função adimensional

$$\epsilon(t) = \frac{N_c \alpha_s}{4\pi^2} \int d^2\mathbf{k} \frac{-\mathbf{q}^2}{(\mathbf{k}^2 + \mu^2)[(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 + \mu^2]}, \quad (4.30)$$

desta forma a Equação (4.28) pode ser escrita como

$$\mathcal{A}(s,t)_{\text{Fig.4.2,a}} = -\frac{16\pi\alpha_s}{N_c} (\tau^a \tau^b)_{ij} (\tau^a \tau^b)_{kl} \frac{s}{t} \ln\left(\frac{s}{t}\right) \epsilon(t). \quad (4.31)$$

Para a contribuição do canal u , o cálculo não é muito diferente do diagrama caixa. O resultado pode ser obtido com a simples substituição de u por s e na mudança de um dos termos do fator de cor na Equação (4.31), com isso queremos dizer que

$$\mathcal{A}(s,t)_{\text{Fig.4.2,b}} = -\frac{16\pi\alpha_s}{N_c} (\tau^a \tau^b)_{ij} (\tau^b \tau^a)_{kl} \frac{u}{t} \ln\left(\frac{u}{t}\right) \epsilon(t). \quad (4.32)$$

Quando $s \gg t$ segue que $u \simeq -s$, assim da Equação (4.32), temos

$$\mathcal{A}(s,t)_{\text{Fig.4.2,b}} = \frac{16\pi\alpha_s}{N_c} (\tau^a \tau^b)_{ij} (\tau^b \tau^a)_{kl} \frac{s}{t} \ln\left(\frac{s}{|t|}\right) \epsilon(t). \quad (4.33)$$

A soma do diagrama caixa mais o cruzado, nos dão o resultado

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(s,t)_{\text{Fig.4.2,a+b}} &= \mathcal{A}(s,t)_{\text{Fig.4.2,a}} + \mathcal{A}(s,t)_{\text{Fig.4.2,b}} \\ &= -\frac{16\pi\alpha_s}{N_c} (\tau^a \tau^b)_{ij} \frac{s}{t} \left[[\tau^a, \tau^b]_{kl} \ln\left(\frac{s}{|t|}\right) - i\pi (\tau^a \tau^b)_{kl} \right] \epsilon(t). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Na Equação (4.34), temos que o primeiro termo à direita é antissimétrico e está relacionado com a troca de octeto de cor e o segundo termo é simétrico e está relacionado ao singleto de cor. Agora, nos deteremos ao cálculo do fator de cor referente de ambas partes. Então se segue que para octeto de cor temos

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{(8)} &= \frac{1}{2} ((\tau^a \tau^b)_{ij} - (\tau^b \tau^a)_{ij}) [\tau^a, \tau^b]_{kl} \\ &= \frac{1}{2} [\tau^a, \tau^b]_{ij} [\tau^a, \tau^b]_{kl} \\ &= \frac{i f_{abc} i f_{abd}}{2} \tau_{ij}^c \tau_{kl}^d \\ &= -\frac{N_c}{2} \tau_{ij}^c \tau_{kl}^c. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Note que, devido à anti-simetria em a e b , escrevemos o produto das matrizes de cor em

forma de comutador. Para a parte singleto vamos ter

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}^{(1)} &= \frac{1}{N_c^2} (\tau^a \tau^b)_{ij} (\tau^b \tau^a)_{kl} \\
&= \frac{1}{N_c^2} \text{Tr}(\tau^a \tau^b) \text{Tr}(\tau^a \tau^b) \delta_{ij} \delta_{kl} \\
&= \frac{1}{4N_c^2} (\delta_{ab})^2 \delta_{ij} \delta_{kl} \\
&= \frac{N_c^2 - 1}{4N_c^2} \delta_{ij} \delta_{kl}.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

O fator $1/N_c^2$, acrescentado na Equação (4.36) reflete as possíveis combinações de cores no estado inicial e as funções delta surgem como imposição da não mudança das cores dos quarks.

Substituindo a Equação (4.35) na Equação (4.34), obtemos para o caso octeto de cor

$$\mathcal{A}^{(8)}(s,t)_{\text{Fig.4.2,a+b}} = 8\pi\alpha_s \tau_{ij}^a \tau_{kl}^a \frac{s}{t} \ln\left(\frac{s}{|t|}\right) \epsilon(t). \tag{4.37}$$

E para o caso singleto de cor substituindo a Equação (4.36) na Equação (4.34), assim temos

$$\mathcal{A}^{(1)}(s,t)_{\text{Fig.4.2,a+b}} = \frac{16i\pi^2\alpha_s}{N_c} \left(\frac{N_c^2 - 1}{4N_c^2}\right) \delta_{ij} \delta_{kl} \frac{s}{t} \epsilon(t). \tag{4.38}$$

4.3 Espalhamento quark-quark via troca de três glúons

Nesta subseção, trataremos do espalhamento qq via troca de três glúons (dois loops). Começaremos com a correção de vértice, elemento utilizado na construção da “escada” de glúons (objeto que descreve o Pomeron na QCD), e após isso, daremos seguimento ao cálculo das próximas correções de laços.

A parametrização dos momenta transversos dos glúons (parametrização de Sudakov) para o caso do espalhamento em que há troca de três glúons é

$$k_1 = \alpha_1 p_1 + \beta_1 p_2 + k_{1\perp} \quad \text{e} \quad k_2 = \alpha_2 p_1 + \beta_2 p_2 + k_{2\perp}, \tag{4.39}$$

onde $k_{1\perp} = (0, \mathbf{k}_1, 0)$ e $k_{2\perp} = (0, \mathbf{k}_2, 0)$. As contribuições em LO procedem da cinemática

$$1 \gg \alpha_1 \gg \alpha_2 \quad \text{e} \quad 1 \gg |\beta_2| \gg |\beta_1|. \tag{4.40}$$

Nesse regime, a condição de camada de massa para os glúons de saída é

$$\alpha_1 \beta_2 s = -(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2. \quad (4.41)$$

A conjuntura de que $s \gg -\mathbf{k}_1^2$ e $s \gg -\mathbf{k}_2^2$, implica que

$$k_1^2 \approx k_{1\perp}^2 = -\mathbf{k}_1^2 \quad \text{e} \quad k_2^2 \approx k_{2\perp}^2 = -\mathbf{k}_2^2. \quad (4.42)$$

Além disso, os momenta transversais são todos proporcionais $\mathbf{k}_1^2 \simeq \mathbf{k}_2^2 \simeq \mathbf{q}^2$.

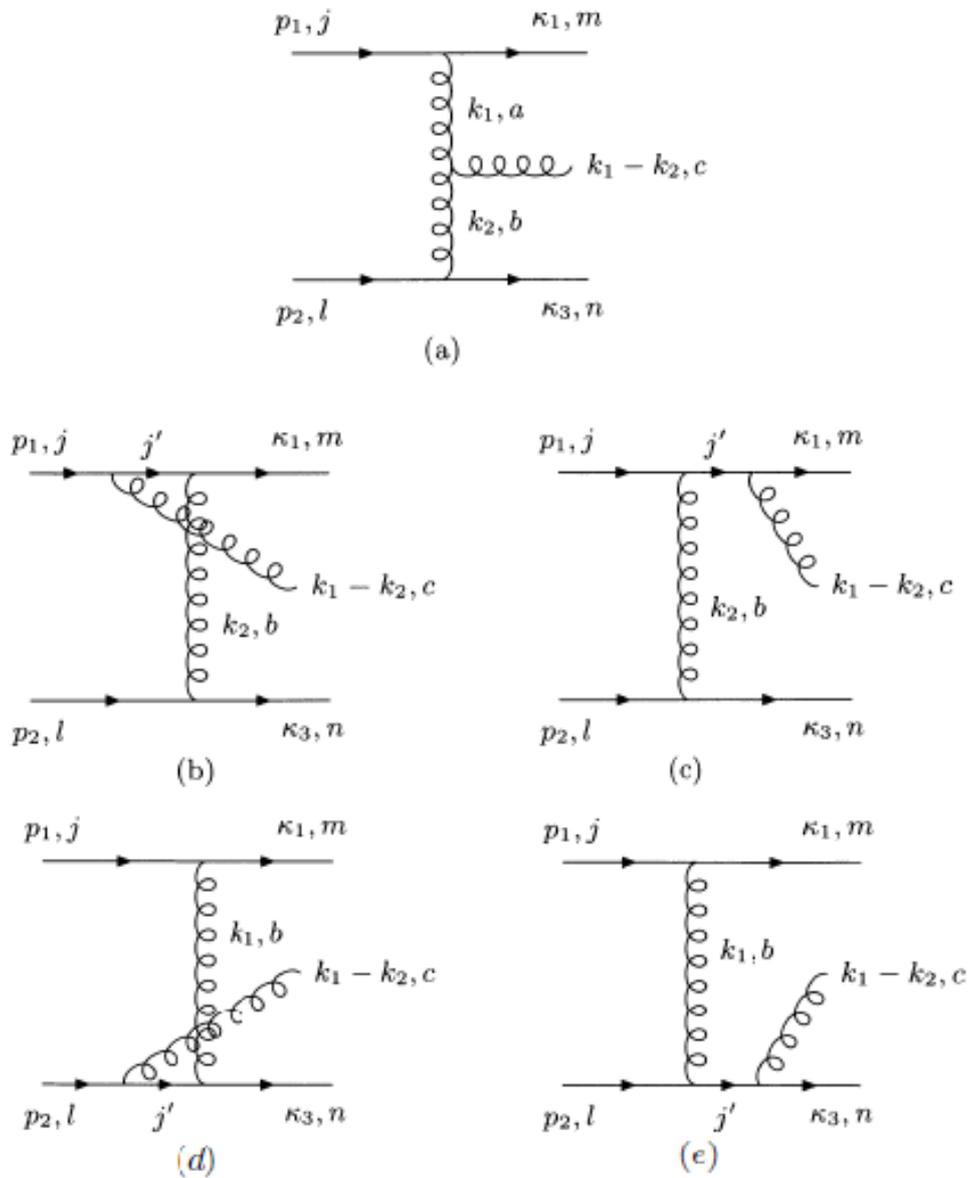


Figura 4.4 - Diagramas com emissões reais de glúons para o processo $qq \rightarrow qgg$. Figura extraída de [8].

A Figura (4.4), mostra os diagramas com emissões reais de glúons, que serão computados para obtenção da correção de vértice. Começamos utilizando as regras de Feynman, para determinar a amplitude de espalhamento da Figura (4.4,a)

$$i\mathcal{A}_{\text{Fig.4.4,a}}^\rho = -(-2ig_s p_1^\mu) \tau_{mj}^a \left(-\frac{i}{k_2^2} \right) g_s f_{abc} ((2k_2 - k_1)^\mu g^{\nu\rho} + (2k_1 - k_2)^\nu g^{\rho\mu} - (k_1 + k_2)^\rho g^{\mu\nu}) \left(-\frac{i}{k_2^2} \right) (-2ig_s p_2^\nu) \tau_{nl}^b. \quad (4.43)$$

Cálculo em separado algumas contribuições da Equação (4.43), obtemos

$$p_1^\mu (k_1 + k_2)^\rho g^{\mu\nu} p_2^\nu = s[(\alpha_1 + \alpha_2)p_1^\rho + (\beta_1 + \beta_2)p_2^\rho + (k_{1\perp}^\rho + k_{2\perp}^\rho)]/2, \quad (4.44)$$

$$p_1^\mu (2k_2 - k_1)^\nu g^{\nu\rho} p_2^\rho = s(2\beta_2 - \beta_1)p_2^\rho/2, \quad (4.45)$$

$$p_1^\mu (2k_1 - k_2)^\nu g^{\rho\mu} p_2^\nu = s(2\alpha_1 - \alpha_2)p_1^\rho/2. \quad (4.46)$$

Substituindo as Equações (4.44), (4.45) e (4.46) na Equação (4.43), e impondo a condição cinemática Equação (4.40), temos que

$$\mathcal{A}_{\text{Fig.4.4,a}}^\rho = -2ig_s^3 s f_{abc} \tau_{mj}^a \tau_{nl}^b \frac{1}{\mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2} (\alpha_1 p_1^\rho + \beta_2 p_2^\rho - (k_{1\perp}^\rho + k_{2\perp}^\rho)). \quad (4.47)$$

Agora, calculando a amplitude de espalhamento para o caso da emissão do glúon da Figura (4.4,b), via regras de Feynman, obtemos

$$i\mathcal{A}_{\text{Fig.4.4,b}}^\rho = (-2ig_s p_1^\rho) \tau_{j'j}^c \left(\frac{i}{(p_1 - k_1 + k_2)^2} \right) \times (-2ig_s) (p_1^\mu - k_1^\mu + k_2^\mu) \tau_{mj'}^b \left(-\frac{i}{k_2^2} \right) (-2ig_s p_{2\mu}) \tau_{nl}^b. \quad (4.48)$$

Com a imposição da cinemática da Equação (4.40), sendo que $s \gg -\mathbf{k}_1^2$ e $s \gg -\mathbf{k}_2^2$, podemos escrever que $(p_1 - k_1 + k_2)^2 \approx s\beta_2$. Com esse resultado e sabendo que $s = 2p_1 \cdot p_2$, a Equação (4.48) fica da forma

$$\mathcal{A}_{\text{Fig.4.4,b}}^\rho = -4g_s^3 s (\tau^b \tau^c)_{mj} \tau_{nl}^b \frac{p_1^\rho}{\beta_2 s \mathbf{k}_2^2}. \quad (4.49)$$

Para o caso da Figura (4.4,c), utilizando as regras de Feynman, obtemos

$$i\mathcal{A}_{\text{Fig.4.4,c}}^\rho = (-2ig_s p_{1\mu}) \tau_{j'j}^b \left(-\frac{i}{k_2^2} \right) (-2ig_s p_2^\mu) \times \tau_{nl}^b \left(\frac{i}{(p_2 - k_2)^2} \right) (-2ig_s (p_1^\rho - k_2^\rho)) \tau_{mj'}^c. \quad (4.50)$$

Novamente, com a utilização da cinemática Equações (4.40), podemos chegar no resultado $(p_1 - k_2)^2 \approx -s\beta_2$. Com isso é possível manipular os termos da amplitude de espalhamento e chegar na solução

$$\mathcal{A}_{\text{Fig.4.4,c}}^\rho = 4g_s^3 s (\tau^c \tau^b)_{mj} \tau_{nl}^b \frac{p_1^\rho}{\beta_2 s \mathbf{k}_2^2}. \quad (4.51)$$

O cálculo para os diagramas da Figura (4.4d,e), seguem de forma semelhante aos da Figura (4.4b,c), e seu resultado é, respectivamente,

$$\mathcal{A}_{\text{Fig.4.4,d}}^\rho = 4g_s^3 s (\tau^b \tau^c)_{mj} \tau_{nl}^b \frac{p_2^\rho}{\alpha_1 s \mathbf{k}_1^2}, \quad (4.52)$$

$$\mathcal{A}_{\text{Fig.4.4,e}}^\rho = 4g_s^3 s (\tau^c \tau^b)_{mj} \tau_{nl}^b \frac{p_2^\rho}{\alpha_1 s \mathbf{k}_1^2}. \quad (4.53)$$

Por fim, somando todas as Equações (4.47),(4.49),(4.51),(4.52) e (4.53), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{Fig.4.4,a+b+c+d+e}}^\rho &= -2ig_s^3 s f_{abc} \tau_{mj}^a \tau_{nl}^b \frac{1}{\mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2} (\alpha_1 p_1^\rho + \beta_2 p_2^\rho - (k_{1\perp}^\rho + k_{2\perp}^\rho)) \\ &\quad - 4g_s^3 s [\tau^b, \tau^c] \tau_{nl}^b \frac{p_2^\rho}{\alpha_1 s \mathbf{k}_1^2} - 4g_s^3 s [\tau^b, \tau^c] \tau_{nl}^b \frac{p_1^\rho}{\beta_2 s \mathbf{k}_2^2}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Utilizando a propriedade $[\tau^b, \tau^c] = if_{abc} \tau^a$, e manipulando algebricamente, encontramos para a amplitude, a partir da soma de todos os processos da Figura (4.4), o resultado

$$\mathcal{A}_{\text{Fig.4.4,a+b+c+d+e}}^\rho = -4ig_s^3 \frac{p_1^\mu p_2^\mu}{\mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2} \tau_{mj}^a \tau_{nl}^b f_{abc} \Gamma_{\mu\nu}^\rho(k_1, k_2), \quad (4.55)$$

onde

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho(k_1, k_2) = \frac{2p_{2\mu} p_{1\nu}}{s} \left[\left(\alpha_1 + \frac{2\mathbf{k}_1^2}{\beta_2 s} \right) p_1^\rho + \left(\beta_2 + \frac{2\mathbf{k}_2^2}{\alpha_1 s} \right) p_2^\rho - (k_{1\perp}^\rho + k_{2\perp}^\rho) \right] \quad (4.56)$$

é o vértice efetivo de Lipatov. Podemos representá-lo diagramaticamente, como mostrado na Figura (4.5).

A amplitude de espalhamento da Figura (4.5) é

$$i\mathcal{A}^\rho(k_1, k_2)_{\text{Fig.4.5}} = (-2ig_s p_1^\mu) \tau_{mj}^a \left(-\frac{i}{k_1^2} \right) f_{abc} g_s \Gamma_{\mu\nu}^\rho(k_1, k_2) \left(-\frac{i}{k_2^2} \right) (-2ig_s p_2^\nu) \tau_{nl}^b. \quad (4.57)$$

Esse resultado corresponde a mesma cinemática encontrada na Equação (4.55). Dando continuidade as correções de laços, para o caso da troca do glúon real é dado pelo diagrama da Figura (4.6)

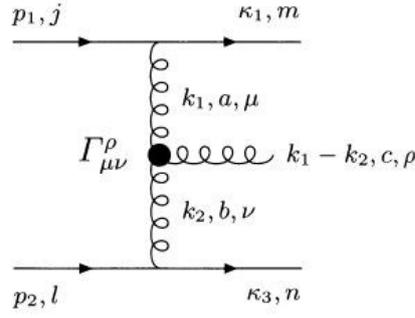


Figura 4.5 - Processo $qq \rightarrow qqg$ com vértice corrigido (Vértice de Lipatov). Figura extraída de [8].

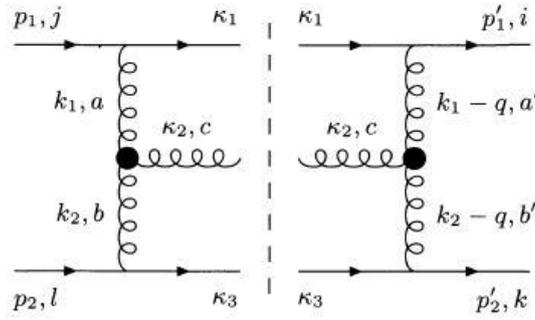


Figura 4.6 - Contribuição do glúon real para o caso de dois laços. Figura extraída de [8].

Usando a regra de Cutkosky, escrevemos a parte imaginária da amplitude da Figura (4.6) como:

$$\text{Im}\mathcal{A}(s, t)_{\text{Fig.4.6}} = -\frac{g_{\rho\sigma}}{2} \int d\Pi_3 \mathcal{A}^\rho(k_1, k_2) \mathcal{A}^{\sigma\dagger}(k_1 - q, k_2 - q). \quad (4.58)$$

O termo $-g_{\rho\sigma}$, representa a soma da helicidade dos glúons intermediários. O espaço de fase para três corpos é

$$\int d\Pi_3 = \frac{1}{(2\pi)^5} \int \frac{d^4\kappa_1}{(2\pi)^3} \frac{d^4\kappa_2}{(2\pi)^3} \frac{d^4\kappa_3}{(2\pi)^3} \times \delta(\kappa_1^2) \delta(\kappa_2^2) \delta(\kappa_3^2) (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 + p_3 - \kappa_1 - \kappa_2 - \kappa_3). \quad (4.59)$$

Usando a integração em κ_3 para absorver a conservação da energia e integrando sobre o momenta dos glúons trocados, temos

$$\int d\Pi_3 = \frac{1}{(2\pi)^5} \int d^4k_1 d^4k_2 \delta((p_1 - k_1)^2) \delta((p_2 + k_2)^2) + \delta((k_1 - k_2)^2). \quad (4.60)$$

Com o uso da Equação (4.39), obtemos

$$\begin{aligned}
\int d\Pi_3 &= \frac{s^2}{4(2\pi)^5} \int d\alpha_1 d\alpha_2 d\beta_1 d\beta_2 d^2\mathbf{k}_1 d^2\mathbf{k}_2 \\
&\times \delta(-\beta_1(1-\alpha_1)s - \mathbf{k}_1) \delta(\alpha_2(1+\beta_2)s - \mathbf{k}_2^2) \\
&\times \delta((\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)s - (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2).
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Se impormos a condição cinemática Equação (4.40), podemos reescrever a Equação (4.61), da forma

$$\begin{aligned}
\int d\Pi_3 &= \frac{s^2}{4(2\pi)^5} \int d\alpha_1 d\alpha_2 d\beta_1 d\beta_2 d^2\mathbf{k}_1 d^2\mathbf{k}_2 \\
&\times \delta(-\beta_1 s - \mathbf{k}_1^2) \delta(\alpha_2 s - \mathbf{k}_2^2) \delta(-\alpha_1 \beta_2 s - (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2).
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Usando a propriedade $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int d\Pi_3 &= \frac{1}{4(2\pi)^5 s} \int_{\alpha_2}^1 \frac{d\alpha_1}{\alpha_1} \int d^2\mathbf{k}_1 \int d^2\mathbf{k}_2 \int_0^1 d\alpha_2 \delta(\alpha_2 s - \mathbf{k}_2^2) \\
&= \frac{1}{4(2\pi)^5 s} \int_{\mathbf{q}^2/s}^1 \frac{d\alpha_1}{\alpha_1} \int d^2\mathbf{k}_1 \int d^2\mathbf{k}_2 \\
&= \frac{1}{4(2\pi)^5 s} \ln\left(\frac{s}{|t|}\right) \int d^2\mathbf{k}_1 \int d^2\mathbf{k}_2.
\end{aligned} \tag{4.63}$$

O resultado da amplitude de espalhamento do lado direito do corte da Figura (4.6), via regras de Feynman é:

$$\begin{aligned}
i\mathcal{A}^{e\dagger}(k_1 - q, k_2 - q)_{\text{Fig.4.6}} &= (-2ig_s p_1^{\mu'}) \tau_{im}^{a'} \left(-\frac{i}{(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})^2} \right) \\
&\times f^{a'b'c} g_s \Gamma_{\mu'\nu'}^e(-k_1 - q, -(k_2 - q)) \left(-\frac{i}{(\mathbf{k}_2 - \mathbf{q})^2} \right) (-2ig_s p_2^{\nu'}) \tau_{kn}^{b'}.
\end{aligned} \tag{4.64}$$

O produto da amplitude de espalhamento da Equação (4.57) com a Equação (4.64), resulta em

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^\rho(k_1, k_2) A^{e\dagger}(k_1 - q, k_2 - q) &= -16g_s^6 (\tau^{a'} \tau^a)_{ij} (\tau^{b'} \tau^b)_{kl} f_{abc} f_{a'b'c} \\
&g_{\rho e} \Gamma_{\mu\nu}^\rho(k_1, k_2) \Gamma_{\mu'\nu'}^e(-k_1 - q, -(k_2 - q)) \frac{p_1^\mu p_2^\nu p_1^{\mu'} p_2^{\nu'}}{\mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})^2 (\mathbf{k}_2 - \mathbf{q})^2}.
\end{aligned} \tag{4.65}$$

Com o uso da cinemática das Equações (4.41) e (4.42), a contração dos vértices fica

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho(k_1, k_2) \Gamma_{\rho\mu'\nu'}(-k_1 - q, -k_2 - q) = \frac{-8p_{2\mu} p_{1\nu} p_{2\mu'} p_{1\nu'}}{s^2} \left(\mathbf{q}^2 - \frac{\mathbf{k}_1^2 (\mathbf{k}_2 - \mathbf{q})^2}{(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2} - \frac{\mathbf{k}_2^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})^2}{(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2} \right). \quad (4.66)$$

Colocando a Equação (4.66) em (4.65), nos dá o resultado

$$\mathcal{A}^\rho(k_1, k_2) A^{\rho\dagger}(k_1 - q, k_2 - q) = -256\alpha_s^3 \pi^3 s^2 f_{abc} f_{a'b'c} (\tau^{a'} \tau^a)_{ij} (\tau^{b'} \tau^b)_{kl} \times \left[\frac{\mathbf{q}^2}{\mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})^2 (\mathbf{k}_2 - \mathbf{q})^2} - \frac{1}{\mathbf{k}_2^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2} - \frac{1}{\mathbf{k}_1^2 (\mathbf{k}_2 - \mathbf{q})^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2} \right]. \quad (4.67)$$

Por fim, substituindo a Equação (4.67) e (4.63) em (4.58), temos para a parte imaginária da amplitude resulta em

$$\text{Im}\mathcal{A}(s, t)_{\text{Fig.4.6}} = -\frac{2\alpha_s^3}{\pi^2} f_{abc} f_{a'b'c} (\tau^{a'} \tau^a)_{ij} (\tau^{b'} \tau^b)_{kl} s \ln\left(\frac{s}{|t|}\right) \int d^2\mathbf{k}_1 \int d^2\mathbf{k}_2 \times \left[\frac{\mathbf{q}^2}{\mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})^2 (\mathbf{k}_2 - \mathbf{q})^2} - \frac{1}{\mathbf{k}_2^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2} - \frac{1}{\mathbf{k}_1^2 (\mathbf{k}_2 - \mathbf{q})^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2} \right]. \quad (4.68)$$

A contribuição do canal u é igual e oposta ao do canal s , então com a mudança de $\tau^b \leftrightarrow \tau^{b'}$, e usando $\ln(-s) = \ln(s) - i\pi$ na Equação (4.69), a soma dos dois canais dá

$$\text{Im}\mathcal{A}(s, t)_{\text{Fig.4.6}} = -\frac{2\alpha_s^3 s}{\pi^2} f_{abc} f_{a'b'c} (\tau^{a'} \tau^a)_{ij} \left([(\tau^{b'}, \tau^b)]_{kl} \ln\left(\frac{s}{|t|}\right) - i\pi (\tau^{b'} \tau^b)_{kl} \right) \times \int d^2\mathbf{k}_1 \int d^2\mathbf{k}_2 \left[\frac{\mathbf{q}^2}{\mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})^2 (\mathbf{k}_2 - \mathbf{q})^2} - \frac{1}{\mathbf{k}_2^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2} - \frac{1}{\mathbf{k}_1^2 (\mathbf{k}_2 - \mathbf{q})^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2} \right]. \quad (4.69)$$

Agora, vamos nos deter ao cálculo do fator de octeto de cor, temos uma anti-simetria contida em b e b' , por isso escrevemos que

$$\mathcal{C}^{(8)} = \frac{1}{2} (f_{abc} f_{a'b'c} - f_{ab'c} f_{a'bc}) (\tau^{a'} \tau^a)_{ij} [\tau^{b'}, \tau^b]_{kl}. \quad (4.70)$$

Usando a identidade de Jacobi

$$f_{123} f_{534} + f_{325} f_{154} + f_{425} f_{135} = 0, \quad (4.71)$$

ficamos com

$$\mathcal{C}^{(8)} = \frac{1}{2} f_{aa'c} f_{bb'b'} (\tau^{a'} \tau^a)_{ij} [\tau^{b'}, \tau^b]_{kl}. \quad (4.72)$$

No entanto, também temos uma anti-simetria em a e a' , de modo que podemos escrever

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}^{(8)} &= \frac{1}{4} f_{aa'c} ((\tau^{a'} \tau^a)_{ij} - (\tau^a \tau^{a'})_{ij}) f_{cbb'} [\tau^{b'}, \tau^b]_{kl} \\
&= \frac{1}{4} (f_{aa'c} [\tau^{a'}, \tau^a]_{ij}) (f_{cbb'} [\tau^{b'}, \tau^b]_{kl}) \\
&= -\frac{1}{4} (f_{aa'c} f_{aa'f} \tau_{ij}^f) (f_{cbb'} f_{gbb'} \tau_{kl}^g) \\
&= -\frac{9}{4} \delta_{cf} \delta_{cg} \tau_{ij}^f \tau_{kl}^g \\
&= -\frac{N_c^2}{4} \tau_{ij}^c \tau_{kl}^c.
\end{aligned} \tag{4.73}$$

Já para caso singlete de cor,

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}^{(1)} &= \frac{1}{N_c^2} (\tau^{a'} \tau^a)_{ij} (\tau^{b'} \tau^b)_{kl} f_{abc} f_{a'b'c} \\
&= \frac{1}{N_c^2} \text{Tr}(\tau^{a'} \tau^a) \text{Tr}(\tau^{b'} \tau^b) \delta_{ij} \delta_{kl} f_{abc} f_{a'b'c} \\
&= \frac{1}{4N_c^2} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{a'a} \delta_{b'b} f_{abc} f_{a'b'c} \\
&= \frac{1}{4N_c^2} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{a'a} f_{abc} f_{a'bc} \\
&= \frac{1}{4N_c} \delta_{ij} \delta_{kl} (\delta_{a'a})^2 \\
&= \frac{N_c^2 - 1}{4N_c} \delta_{ij} \delta_{kl}.
\end{aligned} \tag{4.74}$$

Com o uso do resultado das Equações (4.72) e (4.74) na Equação (4.69), chegamos a conclusão de que a parte imaginária da amplitude de espalhamento octeto de cor e singlete de cor são, respectivamente,

$$\begin{aligned}
\text{Im}\mathcal{A}^{(8)}(s, t)_{\text{Fig.4.6}} &= \frac{N_c^2 \alpha_s^3}{2\pi^2} \tau_{ij}^a \tau_{kl}^a s \ln\left(\frac{s}{|t|}\right) \int d^2\mathbf{k}_1 \int d^2\mathbf{k}_2 \\
&\times \left[\frac{\mathbf{q}^2}{\mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})^2 (\mathbf{k}_2 - \mathbf{q})^2} - \frac{1}{\mathbf{k}_2^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2} - \frac{1}{\mathbf{k}_1^2 (\mathbf{k}_2 - \mathbf{q})^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2} \right].
\end{aligned} \tag{4.75}$$

e

$$\begin{aligned}
\text{Im}\mathcal{A}^{(1)}(s, t)_{\text{Fig.4.6}} &= -i \frac{2N_c \alpha_s^3 s}{\pi} \left(\frac{N_c^2 - 1}{4N_c^2} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} \int d^2\mathbf{k}_1 \int d^2\mathbf{k}_2 \\
&\times \left[\frac{\mathbf{q}^2}{\mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})^2 (\mathbf{k}_2 - \mathbf{q})^2} - \frac{1}{\mathbf{k}_2^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2} - \frac{1}{\mathbf{k}_1^2 (\mathbf{k}_2 - \mathbf{q})^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2} \right].
\end{aligned} \tag{4.76}$$

Uma vez que já temos o resultado para a amplitude de espalhamento para o caso em que a troca de três glúons é real, agora nos deteremos ao cálculo da contribuição virtual.

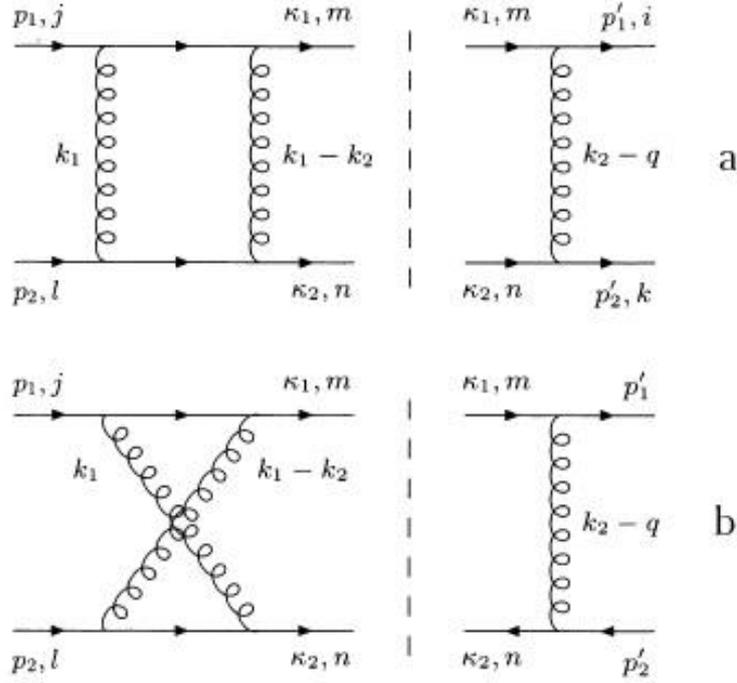


Figura 4.7 - Processo $qq \rightarrow qqq$ contribuição virtual para troca de três glúons. Figura extraída de [8].

Para esta parcela virtual temos os seguintes diagramas descritos na Figura (4.7). A parte imaginária da amplitude de espalhamento é descrita de tal maneira:

$$\text{Im}\mathcal{A}(s, t)_{\text{Fig.4.7}} = \frac{1}{2} \int d\Pi_2 \mathcal{A}(s, k_2^2) \mathcal{A}^\dagger(s, (k_2 - q)^2) + \frac{1}{2} \int d\Pi_2 \mathcal{A}(s, k_1^2) \mathcal{A}^\dagger(s, (k_1 - q)^2), \quad (4.77)$$

onde o produto da amplitude do primeiro termo à direita da Equação (4.77), refere-se ao da Figura (4.7,a). Suas amplitudes são identificadas em analogia com os cálculos feitos nas Equações (4.36) e (4.10), da forma

$$\mathcal{A}(s, k_2^2) = 8\pi\alpha_s \tau_{mj}^b \tau_{nl}^b \frac{s}{k_2^2} \ln\left(\frac{s}{\mathbf{k}_2^2}\right) \epsilon(k_2^2), \quad (4.78)$$

$$\mathcal{A}^\dagger(s, (k_2 - q)^2) = 8\pi\tau_{mi}^{a*} \tau_{nk}^{a*} \frac{s}{(\mathbf{k}_2 - \mathbf{q})^2}, \quad (4.79)$$

e o segundo ao da Figura (4.7,b), as amplitudes são descritas pelas equações

$$\mathcal{A}(s, k_1^2) = 8\pi\alpha_s \tau_{mj}^b \tau_{nl}^b \frac{s}{k_1^2} \ln\left(\frac{s}{\mathbf{k}_1^2}\right) \epsilon(k_1^2), \quad (4.80)$$

$$\mathcal{A}^\dagger(s, (k_1 - q)^2) = 8\pi\tau_{mi}^{a*} \tau_{nk}^{a*} \frac{s}{(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})^2}, \quad (4.81)$$

onde

$$\epsilon(k_1^2) = \frac{N_c \alpha_s}{4\pi^2} \int d^2 \mathbf{k}_2 \frac{\mathbf{k}_1^2}{\mathbf{k}_2^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2}, \quad (4.82)$$

$$\epsilon(k_2^2) = \frac{N_c \alpha_s}{4\pi^2} \int d^2 \mathbf{k}_1 \frac{\mathbf{k}_2^2}{\mathbf{k}_1^2 (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)^2}. \quad (4.83)$$

A parte imaginária da amplitude de espalhamento da Figura (4.7,a), é obtida com a utilização das Equações (4.23), (4.78), (4.79) e (4.83), assim resultando em

$$\begin{aligned} \text{Im}\mathcal{A}(s, t)_{\text{Fig.4.7,a}} &= -\frac{N_c \alpha_s^3}{\pi^2} (\tau^a \tau^b)_{ij} (\tau^a \tau^b)_{kl} s \ln \left(\frac{s}{|t|} \right) \\ &\quad \times \int d^2 \mathbf{k}_1 \int d^2 \mathbf{k}_2 \frac{1}{\mathbf{k}_1^2 (\mathbf{k}_2 - \mathbf{q})^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2}. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Já a parte imaginária da amplitude de espalhamento da Figura (4.7,b), é obtida com a utilização das Equações (4.23), (4.80), (4.81) e (4.82), de forma que temos

$$\begin{aligned} \text{Im}\mathcal{A}(s, t)_{\text{Fig.4.7,b}} &= -\frac{N_c \alpha_s^3}{\pi^2} (\tau^a \tau^b)_{ij} (\tau^b \tau^a)_{kl} s \ln \left(\frac{s}{|t|} \right) \\ &\quad \times \int d^2 \mathbf{k}_1 \int d^2 \mathbf{k}_2 \frac{1}{\mathbf{k}_2^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2}. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Note que foi usado a proposição de que $\ln(s/\mathbf{k}_1^2) \simeq \ln(s/\mathbf{k}_2^2) \simeq \ln(s/|t|)$.

O uso de $\ln(-s) = \ln s - i\pi$ na Equação (4.84), mais sua soma com a Equação (4.85), nos retorna

$$\begin{aligned} \text{Im}\mathcal{A}(s, t)_{\text{Fig.4.7,a+b}} &= -\frac{N_c \alpha_s^3 s}{\pi^2} (\tau^a \tau^b)_{ij} \left[[\tau^a, \tau^b]_{kl} \ln \left(\frac{s}{|t|} \right) - i\pi (\tau^a \tau^b)_{kl} \right] \\ &\quad \times \int d^2 \mathbf{k}_1 \int d^2 \mathbf{k}_2 \left(\frac{1}{\mathbf{k}_1^2 (\mathbf{k}_2 - \mathbf{q})^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2} + \frac{1}{\mathbf{k}_2^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2} \right). \end{aligned} \quad (4.86)$$

O mesmo cálculo para o fator de octeto de cor foi feito na subseção anterior, e seu valor é dado pela Equação (4.35), e por fim, obtemos

$$\begin{aligned} \text{Im}\mathcal{A}^{(8)}(s, t)_{\text{Fig.4.7,a+b}} &= -\frac{N_c^2 \alpha_s^3}{2\pi^2} \tau_{ij}^a \tau_{kl}^a s \ln \left(\frac{s}{|t|} \right) \\ &\quad \times \int d^2 \mathbf{k}_1 \int d^2 \mathbf{k}_2 \left(\frac{1}{\mathbf{k}_1^2 (\mathbf{k}_2 - \mathbf{q})^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2} + \frac{1}{\mathbf{k}_2^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2} \right). \end{aligned} \quad (4.87)$$

Esse resultado corresponde a contribuição virtual total em LO, na qual três glúons estão envolvidos no processo de espalhamento em octeto de cor.

Somando a contribuição real mais virtual, Equações (4.69) e (4.87), resulta em

$$\begin{aligned} \text{Im}\mathcal{A}^{(8)}(s, t)_{\text{Fig.4.6+Fig.4.7,a+b}} &= \frac{N_c^2 \alpha_s^3}{2\pi^2} \tau_{ij}^a \tau_{kl}^a s \ln\left(\frac{s}{|t|}\right) \\ &\times \int d^2\mathbf{k}_1 \int d^2\mathbf{k}_2 \frac{\mathbf{q}^2}{\mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})^2 (\mathbf{k}_2 - \mathbf{q})^2}. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Utilizando as Equações (4.82) e (4.83), mais a relação de dispersão Equação (4.25), escrevemos a parte real da Equação (4.88) da forma

$$\mathcal{A}^{(8)}(s, t)_{\text{Fig.4.6+Fig.4.7,a+b}} = 4\pi\alpha_s \tau_{ij}^a \tau_{kl}^a \frac{s}{t} \ln^2\left(\frac{s}{|t|}\right) \epsilon^2(t). \quad (4.89)$$

Se considerarmos a soma das contribuições das amplitudes em LO já calculadas em octeto de cor, temos que

$$\mathcal{A}^{(8)}(s, t) = 8\pi\alpha_s \tau_{ij}^a \tau_{kl}^a \frac{s}{t} \left(1 + \ln\left(\frac{s}{|t|}\right) \epsilon(t) + \frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{s}{|t|}\right) \epsilon^2(t) + \dots \right). \quad (4.90)$$

Supondo que a série se mantém com o cálculo de diagramas com troca de mais de três glúons, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{(8)}(s, t) &= 8\pi\alpha_s \tau_{ij}^a \tau_{kl}^a \frac{s}{t} \ln\left(\frac{s}{|t|}\right)^{\epsilon(t)} \\ &= 8\pi\alpha_s \tau_{ij}^a \tau_{kl}^a \ln\left(\frac{s}{|t|}\right)^{\alpha_g}, \end{aligned} \quad (4.91)$$

onde $\alpha_g = 1 + \epsilon(t)$ é caracterizada como a trajetória do glúon reggeizado.

No caso de singlete de cor, com contribuição virtual de dois laços, a substituição da Equação (4.36) na Equação (4.87), fica

$$\begin{aligned} \text{Im}\mathcal{A}^{(1)}(s, t)_{\text{Fig.4.7,a+b}} &= -i \frac{N_c \alpha_s^3 s}{\pi} \left(\frac{N_c^2 - 1}{4N_c^2} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} \\ &\times \int d^2\mathbf{k}_1 \int d^2\mathbf{k}_2 \left(\frac{1}{\mathbf{k}_1^2 (\mathbf{k}_2 - \mathbf{q})^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2} + \frac{1}{\mathbf{k}_2^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2} \right). \end{aligned} \quad (4.92)$$

A soma das Equações (4.76) e (4.91) nos retorna

$$\begin{aligned} \text{Im}\mathcal{A}^{(1)}(s, t)_{\text{Fig.4.6+Fig.4.7,a+b}} &= -i \frac{2N_c \alpha_s^3 s}{\pi} \left(\frac{N_c^2 - 1}{4N_c^2} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} \\ &\times \int d^2\mathbf{k}_1 \int d^2\mathbf{k}_2 \left(\frac{1}{2\mathbf{k}_1^2 (\mathbf{k}_2 - \mathbf{q})^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2} + \frac{1}{2\mathbf{k}_2^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2} \right). \end{aligned} \quad (4.93)$$

Essa é a contribuição total do espalhamento qq singlete de cor com troca de três glúons.

4.4 Cálculo de diagramas de ordens superiores

Nessa seção, vamos fazer uma generalização, na qual diagramas de ordem superiores são levados em conta. Com isso queremos construir uma equação, que possa dar um sentido para o Pomeron na QCD. A maneira mais simples de se conseguir um singlete de cor é com a troca de dois glúons, mas devido à dinâmica do espalhamento essa simples conversão, não é eficiente ao ponto de descrever a troca do Pomeron. Uma forma de solucionar este problema foi determinar a evolução dos glúons em forma de uma “escada“ [6]. A generalização para diagramas de ordem superior é descrita na cinemática multi-Regge, onde trabalhamos com ordens dominantes em $\ln s$. A parametrização adotada segue sendo

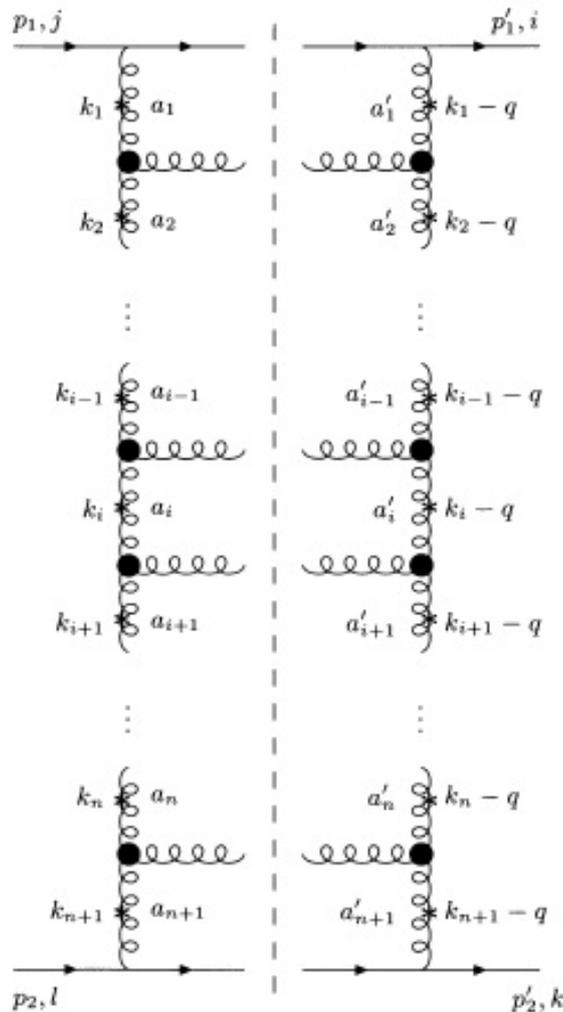


Figura 4.8 - Parte imaginária da amplitude de espalhamento para o diagrama a nível de árvore. Figura extraída de [8].

a de Sudakov [6], só que agora para i-ésima componente, ou seja,

$$k_i = \alpha_i p_1 + \beta_i p_2 + k_{i\perp}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1. \quad (4.94)$$

Os momenta transversais são de mesma ordem e menores que s

$$\mathbf{k}_1^2 \simeq \mathbf{k}_2^2 \dots \mathbf{k}_n^2 \simeq \mathbf{k}_{n+1}^2 \simeq \mathbf{q}^2 \quad (4.95)$$

e se encontra um forte ordenamento dos momenta longitudinais

$$1 \gg \alpha_1 \gg \alpha_2 \gg \dots \gg \alpha_{n+1} \gg \frac{\mathbf{q}^2}{s} \quad (4.96)$$

$$1 \gg |\beta_{n+1}| \gg \dots \gg |\beta_2| \gg |\beta_1| \gg \frac{\mathbf{q}^2}{s}. \quad (4.97)$$

A amplitude de espalhamento para o lado esquerdo do corte Figura (4.8), pode ser escrita em generalização da Equação (4.57) por

$$\begin{aligned} i\mathcal{A}_{2 \rightarrow n+2}^{\rho_1 \dots \rho_n} &= (-2ig_s) p_1^{\mu_1} \tau_{ij}^{a_1} \\ &\times g_s f_{a_1 a_2 b_1} \Gamma_{\mu_1 \nu_2}^{\rho_1}(k_1, k_2) \left(\frac{-i}{k_2^2} \right) \\ &\times g_s f_{a_2 a_3 b_2} \Gamma_{\mu_2 \nu_3}^{\rho_2}(k_2, k_3) \left(\frac{-i}{k_3^2} \right) \\ &\dots \\ &\times g_s f_{a_n a_{n+1} b_n} \Gamma_{\mu_n \nu_{n+1}}^{\rho_n}(k_n, k_{n+1}) \left(\frac{-i}{k_{n+1}^2} \right) \\ &\times (-2ig_s) p_2^{\nu_{n+1}} \tau_{kl}^{a_{n+1}}. \end{aligned} \quad (4.98)$$

Em foma de produtório segue que

$$\mathcal{A}_{2 \rightarrow n+2}^{\rho_1 \dots \rho_n} = 2is(g_s)^{n+2} \tau_{ij}^{a_1} \tau_{kl}^{a_{n+1}} \frac{i}{\mathbf{k}_1^2} \prod_{i=1}^n \left[\frac{2p_1^{\mu_i} p_2^{\nu_{i+1}}}{s} f_{a_i a_{i+1} b_i} \Gamma_{\mu_i \nu_{i+1}}^{\rho_i}(k_i, k_{i+1}) \frac{i}{\mathbf{k}_{i+1}^2} \right]. \quad (4.99)$$

A generalização das contrações do vértice de Lipatov é

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu_n \nu_{n+1}}^{\rho_n}(k_n, k_{n+1}) &= \frac{2p_2^\mu p_1^{\nu_{n+1}}}{s} \left[\left(\alpha_n + \frac{2\mathbf{k}_n^2}{\beta_n s} \right) p_1^\rho \right. \\ &\quad \left. + \left(\beta_{n+1} + \frac{2\mathbf{k}_{n+1}^2}{\alpha_n s} \right) p_2^\rho - (k_{n\perp}^\rho + k_{n+1\perp}^\rho) \right]. \end{aligned} \quad (4.100)$$

A Equação (4.98) nos fornece somente a amplitude de espalhamento nível árvore, não levando em conta as correções radiativas. Estas correções vão ser calculadas mediante

uma transformação de calibre em LO, cuja mudança em todas as ordens em α_s , vai modificar o propagador do glúon no canal t , assim

$$\frac{-i}{k_i^2} \rightarrow \frac{-i}{k_i^2} \left(\frac{-s_i}{k_i^2} \right)^{\epsilon(k_i^2)} \simeq \frac{-i}{k_i^2} \left(\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} \right)^{\epsilon(k_i^2)}, \quad (4.101)$$

onde

$$s_i = (k_{i+1} - k_{i+1})^2 \simeq \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} (\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_{i+1})^2. \quad (4.102)$$

Da Equação (4.101) podemos generalizar a energia de centro de massa da i -ésima seção de escada, ou seja,

$$\epsilon(k_i^2) = \frac{N_c \alpha_s}{4\pi^2} \int d^2 \boldsymbol{\kappa} \frac{-\mathbf{k}_i^2}{\boldsymbol{\kappa}^2 (\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{k}_i)^2}. \quad (4.103)$$

O propagador do glúon no calibre de Feynman é dado por:

$$D_{\mu\nu}(s_i, k_i^2) = -i \frac{g_{\mu\nu}}{k_i^2} \left(\frac{s}{\mathbf{k}^2} \right)^{\epsilon(k_i^2)}. \quad (4.104)$$

Um glúon com este propagador é chamado de glúon reggeizado. A substituição de glúons nas linhas verticais, por glúons reggeizados equivale a considerar as correções radiativas virtuais. O diagrama da Figura (4.8) apresenta uma mudança realizadas nas linhas verticais utilizando glúons reggeizados. Eles são representados por asteriscos e sua trajetória é dada pela função $\alpha(t) = 1 + \epsilon(t)$. Para obtermos a amplitude de espalhamento para n glúons, cujo resultado agrega as correções radiativas virtuais, basta substituímos a Equação (4.101) em (4.98), assim temos:

$$\begin{aligned} i\mathcal{A}_{2 \rightarrow n+2}^{\rho_1 \dots \rho_n} &= (-2ig_s p_1^{\mu_1}) \tau_{ij}^{a_1} \left(\frac{i}{\mathbf{k}_1^2} \right) \left(\frac{1}{\alpha_1} \right)^{\epsilon(k_1^2)} \\ &\times g_s f_{a_1 a_2 b_1} \Gamma_{\mu_1 \nu_2}^{\rho_1} (k_1, k_2) \left(\frac{i}{\mathbf{k}_2^2} \right) \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^{\epsilon(k_2^2)} \\ &\times g_s f_{a_2 a_3 b_2} \Gamma_{\mu_2 \nu_3}^{\rho_2} (k_2, k_3) \left(\frac{i}{\mathbf{k}_3^2} \right) \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_3} \right)^{\epsilon(k_3^2)} \\ &\dots \\ &\times g_s f_{a_n a_{n+1} b_n} \Gamma_{\mu_n \nu_{n+1}}^{\rho_n} (k_n, k_{n+1}) \left(\frac{-i}{\mathbf{k}_{n+1}^2} \right) \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^{\epsilon(k_n^2)} \\ &\times (-2ig_s p_2^{\nu_{n+1}}) \tau_{kl}^{a_{n+1}}. \end{aligned} \quad (4.105)$$

A qual é equivalente a escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{2 \rightarrow n+2}^{\rho_1 \dots \rho_n} = 2is(g_s)^{n+2} \tau_{ij}^{a_1} \tau_{kl}^{a_{n+1}} \frac{i}{\mathbf{k}_1^2} \left(\frac{1}{\alpha_1} \right)^{\epsilon(k_1^2)} \prod_{i=1}^n \left[\frac{2p_1^{\mu_i} p_2^{\nu_{i+1}}}{s} f_{a_i a_{i+1} b_i} \right. \\ \left. \times \Gamma_{\mu_i \nu_{i+1}}^{\rho_i}(k_i, k_{i+1}) \frac{i}{\mathbf{k}_{i+1}^2} \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}} \right)^{\epsilon(k_{i+1}^2)} \right]. \end{aligned} \quad (4.106)$$

Por comparação à equação anterior, podemos escrever a amplitude de espalhamento do lado direito da Figura (4.8) como

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{2 \rightarrow n+2}^{\rho_1 \dots \rho_n} = 2is(g_s)^{n+2} \tau_{ij}^{a'_1} \tau_{kl}^{a'_{n+1}} \frac{i}{(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})^2} \left(\frac{1}{\alpha_1} \right)^{\epsilon(k_1^2 - q)} \prod_{i=1}^n \left[\frac{2p_1^{\mu'_i} p_2^{\nu'_{i+1}}}{s} f_{a'_i a'_{i+1} b_i} \right. \\ \left. \times \Gamma_{\mu_i \nu_{i+1}}^{\rho_i}(-(k_i - q), -(k_{i+1} - q)) \frac{-i}{(\mathbf{k}_{i+1} - \mathbf{q})^2} \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}} \right)^{\epsilon(k_{i+1}^2 - q)} \right]. \end{aligned} \quad (4.107)$$

A parte imaginária da amplitude de espalhamento elástica qq com troca de uma "escada" de glúons, nas quais as linhas verticais são glúons reggeizados é obtida através da relação de unitariedade da matriz S , ou seja,

$$\begin{aligned} \text{Im} \mathcal{A}(s, t) = \frac{(-1)^n}{2} g_{\rho_1 \rho_1} \dots g_{\rho_n \rho_n} \int d\Pi_{n+2} \mathcal{A}_{2 \rightarrow n+2}^{\rho_1 \dots \rho_n}(k_1, \dots, k_n) \\ \times \mathcal{A}_{2 \rightarrow n+2}^{\rho_1 \dots \rho_n \dagger}(k_1 - q, \dots, k_n - q). \end{aligned} \quad (4.108)$$

Levando em conta a helicidade dos glúons intermediários, temos a contração dos vértices de Lipatov. Seu resultado é

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}(k_i, k_{i+1}) \Gamma_{\rho\mu'\nu'}(-(k_i - q), -(k_{i+1} - q)) = \\ \frac{-8p_{2\mu_i} p_{1\nu_{i+1}} p_{2\mu'_i} p_{1\nu'_{i+1}}}{s^2} \left(\mathbf{q}^2 - \frac{\mathbf{k}_i^2 (\mathbf{k}_{i+1} - \mathbf{q})^2}{(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_{i+1})^2} - \frac{\mathbf{k}_{i+1}^2 (\mathbf{k}_i - \mathbf{q})^2}{(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_{i+1})^2} \right) \end{aligned} \quad (4.109)$$

Por conveniência escrevemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}(k_i, k_{i+1}) \Gamma_{\rho\mu'\nu'}(-(k_i - q), -(k_{i+1} - q)) \\ \equiv \frac{-8p_{2\mu_i} p_{1\nu_{i+1}} p_{2\mu'_i} p_{1\nu'_{i+1}}}{s^2} K(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_{i+1}). \end{aligned} \quad (4.110)$$

Substituindo as Equações (4.106) e (4.107) na Equação (4.108), ficamos com

$$\begin{aligned}
\text{Im}\mathcal{A}(s,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} 2s^2 g_s^{2n+4} \tau_{ij}^{a_1} \tau_{kl}^{a_{n+1}} \tau_{ij}^{a'_1} \tau_{kl}^{a'_{n+1}} \int d\Pi_{n+2} \frac{1}{\mathbf{k}_1^2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})^2} \\
&\times \left(\frac{1}{\alpha_1} \right)^{\epsilon(k_1^2) + \epsilon((k_1 - q)^2)} \prod_{i=1}^n \left[\frac{(-2)}{\mathbf{k}_{i+1}^2 (\mathbf{k}_{i+1} - \mathbf{q})^2} f_{a_i a_{i+1} b_i} f_{a'_i a'_{i+1} b_i} \right. \\
&\times \left. K(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_{i+1}) \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}} \right)^{\epsilon(k_{i+1}^2) + \epsilon((k_{i+1} - q)^2)} \right]. \tag{4.111}
\end{aligned}$$

A fórmula geral do espaço de fase $(n+2)$ corpos, é descrito por:

$$\begin{aligned}
d\Pi_{n+2} &= \frac{s^{n+1}}{2^{n+1} (2\pi)^{3n+2}} \int \prod_{i=1}^{n+1} d\alpha_i d\beta_i d^2 \mathbf{k}_i \\
&\times \delta(-\beta_i (1 - \alpha_i) s - \mathbf{k}_1^2) \delta(\alpha_{n+1} (1 + \beta_{n+1}) s - \mathbf{k}_{n+1}^2) \\
&\times \prod_{j=1}^n \delta(\alpha_j - \alpha_{j+1}) (\beta_j - \beta_{j+1}) s - (\mathbf{k}_j - \mathbf{k}_{j+1})^2. \tag{4.112}
\end{aligned}$$

Utilizando a cinemática multi-Regge, dadas pelas Equações (4.96) e (4.97) e integrando em relação a β_i , temos:

$$d\Pi_{n+2} = \frac{1}{2^{n+1} (2\pi)^{3n+2}} \prod_{i=1}^n \int_{\alpha_{i+1}}^1 \frac{d\alpha_i}{\alpha_i} \int_0^1 d\alpha_{n+1} \prod_{j=1}^{n+1} \int d^2 \mathbf{k}_j \delta(\alpha_{n+1} s - \mathbf{k}^2). \tag{4.113}$$

Quando substituimos a Equação (4.113) na Equação (4.111), ficamos com uma integral do tipo

$$f(s) = \mathbf{k}^2 \prod_{i=1}^n \int_{\alpha_{i+1}}^1 \frac{d\alpha_i}{\alpha_i} f_i \left(\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} \right) \delta(\alpha_{n+1} s - \mathbf{k}), \tag{4.114}$$

na qual $\alpha_0 = 1$ e $\alpha_{n+1} = 0$. Com a utilização da transformada de Mellin, obtemos

$$f(w) = \mathbf{k}^2 \int_1^{\infty} d \left(\frac{s}{\mathbf{k}^2} \right) \left(\frac{s}{\mathbf{k}^2} \right)^{-w-1} \prod_{i=1}^n \int_{\alpha_{i+1}}^1 \frac{d\alpha_i}{\alpha_i} f_i \left(\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} \right) \delta(\alpha_{n+1} s - \mathbf{k}). \tag{4.115}$$

Absorvendo a integral em s/\mathbf{k} com a função delta, temos

$$f(w) = \prod_{i=1}^n \int_{\alpha_{i+1}}^1 \frac{d\alpha_i}{\alpha_i} f_i \left(\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} \right) \alpha_n^w. \tag{4.116}$$

Fazendo a mudança da variáveis

$$\xi = \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}, \quad (4.117)$$

e sabendo que $\alpha_n = \xi_1 \xi_2 \dots \xi_n$, a Equação (4.116) fica

$$f(w) = \prod_{i=1}^n \int_{\alpha_{i+1}}^1 d\xi_i \xi_i^{w-1} f_i\left(\frac{1}{\xi_i}\right). \quad (4.118)$$

O fator de octeto de cor é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{(8)} &= -\tau_{ij}^{a_1} \tau_{kl}^{a_{n+1}} \tau_{ij}^{a'_1} \tau_{kl}^{a'_{n+1}} f_{a_i a_{i+1} b_i} f_{a'_i a'_{i+1} b_i} \\ &= \left(\frac{N_c}{2}\right)^n \frac{N_c}{2} \tau_{ij}^a \tau_{kl}^a. \end{aligned} \quad (4.119)$$

Com a substituição do espaço de fase na Equação (4.111) e a utilização da transformada de Mellin e sabendo que o fator de octeto de cor é dado pela Equação (4.119), podemos escrever

$$f^{(8)}(w, \mathbf{q}^2) = 4N_c (\pi\alpha_s)^2 \tau_{ij}^a \tau_{kl}^a \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{F^{(8)}(w, \mathbf{k}, \mathbf{q})}{\mathbf{k}^2 (\mathbf{k} - \mathbf{q})^2}, \quad (4.120)$$

onde a função $F^{(8)}(w, \mathbf{k}, \mathbf{q})$ satisfaz a equação integral

$$\begin{aligned} [w - \epsilon(-\mathbf{k}^2) - \epsilon(-(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2)] F^{(8)}(w, \mathbf{k}, \mathbf{q}) \\ = 1 - \frac{N_c \alpha_s}{4\pi^2} \int d^2\mathbf{k} \frac{K(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa})}{\boldsymbol{\kappa}^2 (\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{q})^2} F^{(8)}(w, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{q}). \end{aligned} \quad (4.121)$$

A direita de (4.121) representa as contribuições radiativas reais. Já à esquerda temos os termos de ϵ responsáveis pelas correções radioativas virtuais. Comparando $K(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa})$ com a Equação (4.66), obtemos

$$K(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) = \mathbf{q} - \frac{\mathbf{k}^2 (\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{q})^2}{(\mathbf{k} - \boldsymbol{\kappa})^2} - \frac{\boldsymbol{\kappa}^2 (\mathbf{k} - \mathbf{q})^2}{(\mathbf{k} - \boldsymbol{\kappa})^2}. \quad (4.122)$$

As expressões explícitas para os glúons reggeizados podem ser escritas como

$$\epsilon(-\mathbf{k}^2) = -\frac{N_c \alpha_s}{4\pi^2} \int d^2\boldsymbol{\kappa} \frac{\mathbf{k}^2}{\boldsymbol{\kappa}^2 (\mathbf{k} - \boldsymbol{\kappa})^2}, \quad (4.123)$$

$$\epsilon((-\mathbf{k} - \mathbf{q})^2) = -\frac{N_c \alpha_s}{4\pi^2} \int d^2\boldsymbol{\kappa} \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2}{(\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{q})^2 (\mathbf{k} - \boldsymbol{\kappa})^2}. \quad (4.124)$$

Próximo passo a ser tomado é substituir as Equações (4.122), (4.123) e (4.124) em (4.121). Com essa mudança, as contribuições radiativas virtuais desaparecem, portanto ficamos com

$$wF^{(8)}(w, \mathbf{k}, \mathbf{q}) = 1 - \frac{N_c \alpha_s}{4\pi^2} \int d^2 \mathbf{k} \frac{\mathbf{q}^2}{\kappa^2 (\kappa - \mathbf{q})^2} F^{(8)}(w, \kappa, \mathbf{q}), \quad (4.125)$$

onde

$$\epsilon(-\mathbf{q}^2) = -\frac{N_c \alpha_s}{4\pi^2} \int d^2 \mathbf{k} \frac{\mathbf{q}^2}{\kappa^2 (\kappa - \mathbf{q})^2}. \quad (4.126)$$

Assim (4.125) pode ser reescrita como uma função independente de \mathbf{k}

$$F^{(8)}(w, \mathbf{q}) = \frac{1}{w - \epsilon(-\mathbf{q}^2)}. \quad (4.127)$$

Portanto, da Equação (4.121), podemos escrever

$$f^{(8)}(w, \mathbf{q}^2) = 4\pi^2 \alpha_s \tau_{ij}^a \tau_{kl}^a \frac{\epsilon(-\mathbf{q}^2)}{\mathbf{q}^2} \frac{1}{w - \epsilon(-\mathbf{q}^2)}. \quad (4.128)$$

Para obter a parte imaginária da amplitude de espalhamento octeto de cor, basta substituir a Equação (4.128) na transformada inversa de Mellin (A.13), assim temos

$$\text{Im} \mathcal{A}^{(8)}(s, t) = \frac{4\pi^2 \alpha_s \tau_{ij}^a \tau_{kl}^a \epsilon(t)}{2\pi i} \left(\frac{s}{|t|} \right) \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dw \left(\frac{s}{t} \right)^w \frac{1}{w - \epsilon(t)}. \quad (4.129)$$

A fim de calcular a função integral da Equação (6.9), utilizamos o teorema dos resíduos [43]

$$\begin{aligned} \text{Im} \mathcal{A}^{(8)}(s, t) &= \frac{4\pi^2 \alpha_s \tau_{ij}^a \tau_{kl}^a \epsilon(t)}{2\pi i} \left(\frac{s}{|t|} \right) \left[2\pi i \lim_{w \rightarrow \epsilon(t)} \left(\frac{s}{|t|} \right)^w (w - \epsilon(t)) \frac{1}{w - \epsilon(t)} \right] \\ &= 4\pi^2 \alpha_s \tau_{ij}^a \tau_{kl}^a \epsilon(t) \left(\frac{s}{|t|} \right)^{1+\epsilon(t)}. \end{aligned} \quad (4.130)$$

A amplitude de espalhamento total do sistema, é obtida utilizando a relação de dispersão descrita na Equação (4.25), assim

$$\mathcal{A}^{(8)}(s, t) = 4\pi \alpha_s \tau_{ij}^a \tau_{kl}^a \left(\frac{s}{t} \right)^{\alpha_g(t)}, \quad (4.131)$$

onde $\alpha_g(t) = 1 + \epsilon(t)$ é a trajetória do glúon reggeizado que surge devido ao anatz (4.101). Somando as contribuições do canal u , usando $u \simeq -s$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{(8)}(s,t) &= 4\pi\alpha_s\tau_{ij}^a\tau_{kl}^a \left[\left(\frac{s}{t}\right)^{\alpha_g(t)} - \left(-\frac{s}{t}\right)^{\alpha_g(t)} \right] \\ &= 4\pi\alpha_s\tau_{ij}^a\tau_{kl}^a [1 - e^{-i\pi\alpha_g(t)}] \left(\frac{s}{t}\right)^{\alpha(t)}. \end{aligned} \quad (4.132)$$

Quando $\alpha_g(t) \simeq 1$, podemos aproximar a Equação (4.132), por

$$\mathcal{A}^{(8)}(s,t) = 8\pi\alpha_s\tau_{ij}^a\tau_{kl}^a \left(\frac{s}{t}\right)^{\alpha(t)}. \quad (4.133)$$

que é a amplitude de espalhamento total de octeto de cor em todas as contribuições perturbativas, idêntica ao resultado já encontrado em (4.91).

4.5 A Equação BFKL

Para chegar no resultado da equação BFKL, precisamos ter um objeto singlete de cor. O cálculo do valor do fator de cor para o espalhamento da Figura (4.8) é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{(1)} &= \tau_{ij}^{a_1}\tau_{kl}^{a_{n+1}}\tau_{ij}^{a'_1}\tau_{kl}^{a'_{n+1}} f_{a_i a_{i+1} b_i} f_{a'_i a'_{i+1} b_i} \\ &= (N_c)^n \frac{N_c^2 - 1}{4N_c^2} \delta_{ij} \delta_{kl}. \end{aligned} \quad (4.134)$$

O cálculo da parte singlete de cor é semelhante ao da parte octeto só muda o fator de cor, assim podemos escrever

$$f^{(1)}(w, \mathbf{q}^2) = 8(\pi^2\alpha_s)^2 \frac{N_c^2 - 1}{4N_c^2} \delta_{ij} \delta_{kl} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi^2)} F^{(1)}(w, \mathbf{k}, \mathbf{q}), \quad (4.135)$$

de modo que

$$\begin{aligned} [w - \epsilon(-\mathbf{k}^2) - \epsilon(-(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2)] F^{(1)}(w, \mathbf{k}, \mathbf{q}) \\ = 1 - \frac{2\alpha_s N_c}{4\pi^2} \int d^2\mathbf{k} \frac{K(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa})}{\boldsymbol{\kappa}^2(\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{q})^2} F^{(1)}(w, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{q}). \end{aligned} \quad (4.136)$$

Introduzindo uma função $F(w, \mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q})$, que se relaciona com $F^{(1)}(w, \mathbf{k}, \mathbf{q})$ através de

$$F^{(1)}(w, \mathbf{k}, \mathbf{q}) = \int \frac{d^2\mathbf{k}'}{\mathbf{k}'^2} F(w, \mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}), \quad (4.137)$$

desta forma a Equação (4.136), pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} [w - \epsilon(-\mathbf{k}^2) - \epsilon(-(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2)]F(w, \mathbf{k}, \mathbf{k}'\mathbf{q}) \\ = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') - \frac{2\alpha_s N_c}{4\pi^2} \int d^2\mathbf{k} \frac{K(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa})}{\boldsymbol{\kappa}^2(\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{q})^2} F(w, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{k}'\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (4.138)$$

A solução da equação BFKL no caso singlete é mais complicada do que no octeto, pois não ocorre nenhum cancelamento das correções radiativas virtuais e reais. Para solucioná-la, modificamos os integrando das equações (4.123) e (4.124), da forma

$$\int \frac{d^2\boldsymbol{\kappa}}{\boldsymbol{\kappa}^2(\mathbf{k} - \boldsymbol{\kappa})^2} = 2 \int \frac{d^2\boldsymbol{\kappa}}{(\mathbf{k} - \boldsymbol{\kappa})^2[\boldsymbol{\kappa}^2 + (\mathbf{k} - \boldsymbol{\kappa})^2]} \quad (4.139)$$

e

$$\int \frac{d^2\boldsymbol{\kappa}}{(\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{q})^2(\mathbf{k} - \boldsymbol{\kappa})^2} = 2 \int \frac{d^2\boldsymbol{\kappa}}{(\mathbf{k} - \boldsymbol{\kappa})^2[(\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{q})^2 + (\mathbf{k} - \boldsymbol{\kappa})^2]}, \quad (4.140)$$

sendo assim da Equação (4.138), temos

$$\begin{aligned} wF(w, \mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) &= \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') + \frac{N_c \alpha_s}{2\pi^2} \int d^2\boldsymbol{\kappa} \left[\frac{-\mathbf{q}^2}{(\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{q})^2} F(w, \mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) \right. \\ &+ \frac{1}{(\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{k})^2} \left(F(w, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{k}', \mathbf{q}) - \frac{\mathbf{k}^2 F(w, \mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q})}{\boldsymbol{\kappa}^2 + (\mathbf{k} - \boldsymbol{\kappa})^2} \right) + \frac{1}{(\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{k})^2} \\ &\times \left. \left(\frac{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 \boldsymbol{\kappa}^2 F(w, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{k}', \mathbf{q})}{(\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{q})^2 \mathbf{k}^2} - \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 F(w, \mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q})}{(\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{q})^2 + (\mathbf{k} - \boldsymbol{\kappa})^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.141)$$

Finalmente, obtivemos a equação BFKL para troca de singlete de cor. Desta equação podemos tirar algumas conclusões, por exemplo se tomarmos o limite de $\boldsymbol{\kappa}^2 \rightarrow \infty$ e $\mathbf{k}^2 \rightarrow \infty$ ela é finita na região ultravioleta. Além disso, na medida em que acontece o comportamento infravermelho, temos que para $\boldsymbol{\kappa} \rightarrow 0$ e $\mathbf{k} = \boldsymbol{\kappa}$ esta equação é regular. Podemos observar da aplicação desta última condição, que os termos que se encontram em colchetes se cancelam, devido a isso eliminamos a divergência que ocorre no fator $\frac{1}{(\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{k})^2}$. Agora se a condição de que $\boldsymbol{\kappa} \rightarrow 0$ é imposta, divergências infravermelhas aparecem devido aos termos relacionados com os glúons virtuais [13].

Da Equação (4.141), podemos inferir a condição de momentum transferido nulo, ou seja, ($\mathbf{q} = 0$),

$$\begin{aligned} wF(w, \mathbf{k}, \mathbf{k}', 0) &= \delta^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}') + \frac{N_c \alpha_s}{\pi^2} \int \frac{d^2\boldsymbol{\kappa}}{(\mathbf{k} - \boldsymbol{\kappa})^2} \\ &\times \left[F(w, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{k}', 0) - \frac{\mathbf{k}^2}{\boldsymbol{\kappa}^2 + (\mathbf{k} - \boldsymbol{\kappa})^2} F(w, \mathbf{k}, \mathbf{k}', 0) \right]. \end{aligned} \quad (4.142)$$

O núcleo da BFKL é

$$\mathcal{K}(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) = 2\epsilon(-\mathbf{k}^2)\delta^2(\mathbf{k} - \boldsymbol{\kappa}) + \frac{N_c\alpha_s}{\pi^2} \frac{1}{(\mathbf{k} - \boldsymbol{\kappa})^2}. \quad (4.143)$$

De (4.143), temos que o primeiro termo representa as condições radioativas virtuais e o segundo termo as correções radioativas reais. Conhecido o núcleo da BFKL a Equação (4.142), pode ser reescrita como

$$wF(w, \mathbf{k}, \mathbf{k}', 0) = \delta^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}') + \int d^2\boldsymbol{\kappa} \mathcal{K}(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}) F(w, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{k}', 0). \quad (4.144)$$

Além disso, podemos reescrever a equação BFKL em termos de uma equação integro-diferencial em relação à rapidez $\ln(s/\mathbf{k}^2)$, para isso contamos com o auxílio da propriedade [8]

$$\frac{\partial F(s, \mathbf{k}, \mathbf{k}', 0)}{\partial \ln(s/\mathbf{k}^2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dw \left(\frac{s}{\mathbf{k}^2}\right)^w wF(w, \mathbf{k}, \mathbf{k}', 0). \quad (4.145)$$

Com a substituição da Equação (4.144) na Equação (4.145), chegamos ao resultado

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(s, \mathbf{k}, \mathbf{k}', 0)}{\partial \ln(s/\mathbf{k}^2)} &= \frac{N_c\alpha_s}{\pi^2} \int \frac{d^2\boldsymbol{\kappa}}{(\mathbf{k} - \boldsymbol{\kappa})^2} \\ &\times \left[F(s, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{k}', 0) - \frac{\mathbf{k}^2}{\boldsymbol{\kappa}^2 + (\mathbf{k} - \boldsymbol{\kappa})^2} F(s, \mathbf{k}, \mathbf{k}', 0) \right]. \end{aligned} \quad (4.146)$$

Até agora apresentamos de forma genérica a equação BFKL. Dedicaremos a próxima seção a sua solução para o caso de zero momentum transferido.

4.6 Solução da equação BFKL para $t = 0$

Na solução da equação BFKL para $t = 0$ representamos a Equação (4.144) pela seguinte expressão

$$wF(w, \mathbf{k}, \mathbf{k}', 0) = \mathbb{I} + \mathcal{K} \otimes F(w, \mathbf{k}, \mathbf{k}', 0). \quad (4.147)$$

Comparando a Equação (4.142) com a Equação (4.147) é fácil observar que

$$\begin{aligned} \mathcal{K} \otimes F(w, \mathbf{k}, \mathbf{k}', 0) &= \frac{N_c\alpha_s}{\pi^2} \int \frac{d^2\boldsymbol{\kappa}}{(\mathbf{k} - \boldsymbol{\kappa})^2} \\ &\times \left[F(w, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{k}', 0) - \frac{\mathbf{k}^2}{\boldsymbol{\kappa}^2 + (\mathbf{k} - \boldsymbol{\kappa})^2} F(w, \mathbf{k}, \mathbf{k}', 0) \right]. \end{aligned} \quad (4.148)$$

A Equação (4.148), pode ser identificada como uma função de Green, desde que o operador \mathcal{K} admita um conjunto de autofunções Φ_α , ou seja, um conjunto de funções Φ_α e escalares w_α , tais que

$$\mathcal{K} \otimes \Phi_\alpha = w_\alpha \Phi_\alpha, \quad (4.149)$$

onde o índice α representa um rótulo que pode ser discreto e/ou contínuo. Além disso, temos que Φ_α obedece a seguinte relação de completeza

$$\sum_\alpha \Phi_\alpha(\mathbf{k}) \Phi_\alpha^*(\mathbf{k}') = \delta^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (4.150)$$

Finalmente utilizando as Equações (4.149) e (4.150) em (4.147), obtemos a solução da função de Green

$$F(w, \mathbf{k}, \mathbf{k}', 0) = \sum_\alpha \frac{\Phi_\alpha(\mathbf{k}) \Phi_\alpha^*(\mathbf{k}')}{w - w_\alpha}, \quad (4.151)$$

sendo que a soma em α representa uma integral sobre as variáveis contínuas. Com o objetivo de facilitar os passos seguintes, identificaremos na Equação, (4.148) que $\Phi_\alpha(\mathbf{k}) \equiv F(w, \mathbf{k}, \mathbf{k}', 0)$ e $\Phi_\alpha(\boldsymbol{\kappa}) \equiv F(w, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{k}', 0)$, assim ficamos com

$$\mathcal{K} \otimes \Phi_\alpha(\mathbf{k}) \equiv \frac{N_c \alpha_s}{\pi^2} \int \frac{d^2 \boldsymbol{\kappa}}{(\mathbf{k} - \boldsymbol{\kappa})^2} \left[\Phi_\alpha(\boldsymbol{\kappa}) - \frac{\mathbf{k}^2 \Phi_\alpha(\mathbf{k})}{\boldsymbol{\kappa}^2 + (\mathbf{k} - \boldsymbol{\kappa})^2} \right]. \quad (4.152)$$

Uma vez que \mathbf{k} é um vetor no espaço bidimensional podemos escrever a Equação (5.61), usando variáveis polares descritas por $\mathbf{k} \equiv (|k|, \vartheta)$ e $\boldsymbol{\kappa} \equiv (|\boldsymbol{\kappa}|, \varphi)$, ou seja,

$$\mathcal{K} \otimes \Phi_\alpha(\mathbf{k}) \equiv \frac{N_c \alpha_s}{2\pi^2} \int_0^\infty d\boldsymbol{\kappa}^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{(\mathbf{k} - \boldsymbol{\kappa})^2} \left[\Phi_\alpha(|\boldsymbol{\kappa}|, \varphi) - \frac{\mathbf{k}^2 \Phi_\alpha(|\mathbf{k}|, \vartheta)}{\boldsymbol{\kappa}^2 + (\mathbf{k} - \boldsymbol{\kappa})^2} \right], \quad (4.153)$$

onde $d^2 \boldsymbol{\kappa} = \frac{1}{2} d\boldsymbol{\kappa}^2 d\varphi$.

Para encontrar as autofunções do núcleo da BFKL, escrevemos $\Phi_\alpha(|\mathbf{k}|, \vartheta)$ em série de Fourier em ϑ , e, logo após, integramos a função em relação a esse ângulo. Ao realizar esse procedimento, nota-se que os coeficientes dependentes de $|\boldsymbol{\kappa}|$, comportam-se com potência em \mathbf{k}^2 , isso se deve ao fato de que o núcleo da BFKL é adimensional e para regularizar a dimensão esse argumento com potência deve ser imposto. Uma revisão mais detalhada desse cálculo pode ser encontrada [6]. Além disso, outra imposição deve ser levada em conta, a de que a autofunção obedeça a relação de completeza (4.150), e para que isso ocorra a função de potência deve ter a forma $(\mathbf{k}^2)^{\gamma-1}$ e ser multiplicada por uma

exponencial complexa com número inteiro vezes o ângulo azimutal, assim obtemos que

$$\Phi_{n,\nu}(|\mathbf{k}|,\vartheta) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}(\mathbf{k}^2)^{-\frac{1}{2}+i\nu} e^{in\vartheta}, \quad (4.154)$$

onde foi usado que $\gamma = \frac{1}{2} + i\nu$, com ν real. Esse fator γ é definido como um número complexo arbitrário, similar à dimensão anômala da Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi (DGLAP) [44–46].

A Equação (4.154) é normalizada de modo a satisfazer a

$$\int d^2\mathbf{k} \Phi_{n,\nu}(\mathbf{k}) \Phi_{n',\nu'}^*(\mathbf{k}) = \delta_{nn'} \delta(\nu - \nu'). \quad (4.155)$$

Substituindo a Equação (4.154) na Equação (4.149) com $\alpha \rightarrow (n,\nu)$, encontramos uma expressão para os autovalores

$$w_n(\nu) = \frac{N_c \alpha_s}{2\pi^2} \int_0^\infty d\kappa^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{(\mathbf{k} - \boldsymbol{\kappa})^2} \times \left[\left(\frac{\kappa^2}{\mathbf{k}^2} \right)^{-\frac{1}{2}+i\nu} e^{in(\varphi-\vartheta)} - \frac{\mathbf{k}^2}{\kappa^2 + (\mathbf{k} - \boldsymbol{\kappa})^2} \right]. \quad (4.156)$$

O segundo termo da Equação (4.156), à direita da igualdade, pode ser rearranjado de forma que ficamos com

$$w_n(\nu) = \frac{N_c \alpha_s}{2\pi^2} \int_0^\infty d\kappa^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{1}{(\mathbf{k} - \boldsymbol{\kappa})^2} \left(\frac{\kappa^2}{\mathbf{k}^2} \right)^{-\frac{1}{2}+i\nu} e^{in(\varphi-\vartheta)} - \left(\frac{\mathbf{k}^2}{\kappa^2} \right) \left[\frac{1}{(\mathbf{k} - \boldsymbol{\kappa})^2} - \frac{1}{\kappa^2 + (\mathbf{k} - \boldsymbol{\kappa})^2} \right] \right]. \quad (4.157)$$

Para o cálculo da integral (4.157), em relação a φ , primeiramente substituímos no primeiro termo $e^{i(\varphi-\vartheta)} = z$, e após, utilizamos teorema dos resíduos. O resultado desse cálculo pode ser escrito como

$$w_n(\nu) = \frac{\alpha_s N_c}{\pi} \left[\int_0^{\mathbf{k}^2} d\kappa^2 \left(\frac{1}{\mathbf{k}^2 - \kappa^2} \left(\frac{\kappa^2}{\mathbf{k}^2} \right)^{\frac{|n|-1}{2}+i\nu} - \frac{\mathbf{k}^2}{\kappa^2(\mathbf{k}^2 - \kappa^2)} + \frac{\mathbf{k}^2}{\kappa^2 \sqrt{4\kappa^4 + \mathbf{k}^4}} \right) + \int_{\mathbf{k}^2}^\infty d\kappa^2 \left(\frac{1}{\kappa^2 - \mathbf{k}^2} \left(\frac{\mathbf{k}^2}{\kappa^2} \right)^{\frac{|n|+1}{2}-i\nu} - \frac{\mathbf{k}^2}{\kappa^2(\kappa^2 - \mathbf{k}^2)} + \frac{\mathbf{k}^2}{\kappa^2 \sqrt{4\kappa^4 + \mathbf{k}^4}} \right) \right]. \quad (4.158)$$

Agora, fazemos a seguinte substituição $a = \kappa^2/\mathbf{k}^2$ na primeira integral e $a = \mathbf{k}^2/\kappa^2$ na segunda, ficamos com

$$w_n(\nu) = \frac{\alpha_s N_c}{\pi} \left[\int_0^1 da \left[\frac{a^{\frac{|n|-1}{2}+i\nu} - 1}{1-a} + \frac{a^{\frac{|n|-1}{2}-i\nu} - 1}{1-a} \right] - \int_0^1 da \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a\sqrt{1+4a^2}} \right) + \int_0^1 \frac{da}{\sqrt{4+a^2}} \right]. \quad (4.159)$$

O resultado do termo entre parênteses e a última integral de (4.159) tem o mesmo valor, sendo que sua soma se anula, os dois termos restantes são calculados através da comparação com a função digama [47], representada por

$$\Psi(z) \equiv \frac{d \ln \Gamma(z)}{dz} = \int_0^1 da \frac{a^{z-1} - 1}{a-1} + \Psi(1), \quad \text{Re}(z) > 0. \quad (4.160)$$

Portanto, o resultado do autovalor vai ser

$$w_n(\nu) = \frac{\alpha_s N_c}{\pi} \text{Re} \left[2\Psi(1) - \Psi \left(\frac{|n|+1}{2} + i\nu \right) - \Psi \left(\frac{|n|+1}{2} - i\nu \right) \right], \quad (4.161)$$

em que $\Psi(1) = -\gamma_E$. A quantidade γ_E é a constante de Euler ($\gamma_E = 0,577215\dots$).

Sabendo que as autofunções tem a forma descrita na Equação (4.154), e escrevendo que $w_n(\nu) = \bar{\alpha}_s \chi_n(\nu)$, podemos reescrever a Equação (4.151) como

$$F(w, \mathbf{k}, \mathbf{k}', 0) = \frac{1}{2\pi^2 (\mathbf{k}^2 \mathbf{k}'^2)^{\frac{1}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{in(\vartheta - \vartheta')} \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu \frac{e^{i\nu \ln(\mathbf{k}^2/\mathbf{k}'^2)}}{w - \alpha_s \chi_n(\nu)}, \quad (4.162)$$

onde ϑ e ϑ' são os ângulos entre \mathbf{k} e \mathbf{k}' e algum eixo arbitrário do plano transversal. Na equação (4.162) se ν é uma variável contínua, não é possível obter um polo isolado na transformada de Mellin que possa ser associado com a intercepto do Pomeron. O comportamento de $\ln(s)$ em ordem dominante de $F(s, k, k', 0)$ é determinada pela sua singularidade mais à direita da transformada de Mellin de $F(w, k, k', 0)$ sobre o eixo real de w , ou seja, a singularidade com maior parte real no plano w . Esse comportamento pode ser visto na Figura (4.9). Uma vez que a função $\chi_n(\nu)$ diminui com a elevação de n , impomos o caso de $n = 0$. Assim da Equação (4.162), temos

$$F(w, \mathbf{k}, \mathbf{k}', 0) = \frac{1}{2\pi (\mathbf{k}^2 \mathbf{k}'^2)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu \frac{e^{i\nu \ln(\mathbf{k}^2/\mathbf{k}'^2)}}{w - w_0(\nu)}. \quad (4.163)$$

A função (4.161) tem um máximo em $\nu = 0$, e, ao expandir em torno desse ponto teremos

$$w_0(\nu) = \frac{N_c \alpha_s}{\pi} (4 \ln 2 - 14 \zeta(3) \nu^2 + \dots), \quad (4.164)$$

onde $\zeta(z)$ representa a função zeta de Riemann, cujo valor de $\zeta(3) \simeq 1,202$. A Equação (4.164) pode ser reescrita como

$$w_0(\nu) = \lambda - \lambda' \nu^2. \quad (4.165)$$

Neste caso, assumimos que as constantes seguem os valores $\lambda = \frac{N_c \alpha_s}{\pi} 4 \ln 2$ e $\lambda' = \frac{N_c \alpha_s}{\pi} 14 \zeta(3)$. Agora, substituímos a Equação (4.165) na Equação (4.163), obtemos que

$$F(w, \mathbf{k}, \mathbf{k}', 0) = \frac{1}{2\pi(\mathbf{k}^2 \mathbf{k}'^2)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu \frac{e^{i\nu \ln(\mathbf{k}^2/\mathbf{k}'^2)}}{w - \lambda + \lambda' \nu^2}. \quad (4.166)$$

Usando teorema dos resíduos para o cálculo da integral em (4.166), temos o seguinte resultado

$$F(w, \mathbf{k}, \mathbf{k}', 0) \propto \frac{1}{\sqrt{w - \lambda}}, \quad (4.167)$$

que mostra a existência de um ponto de ramificação em $w = \lambda$. Para o caso de $N_c = 3$ e $\alpha_s \simeq 0,2$, temos que λ assume o valor de aproximadamente 0,5. O corte no plano complexo de w , está expresso graficamente na Figura (4.9).

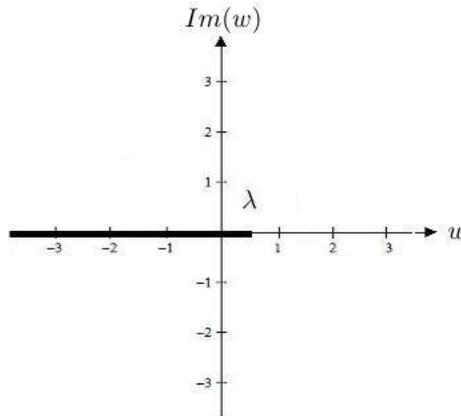


Figura 4.9 - Gráfico da singularidade (corte com ponto de ramificação em λ) da equação BFKL representada pela Equação (4.167). Figura do autor.

Próximo passo é obter a dependência em s da amplitude de singleto de cor, para isso

vamos efetuar a transformada inversa de Mellin da função $F(w, \mathbf{k}, \mathbf{k}', 0)$, que seria fazer

$$\begin{aligned} F(s, \mathbf{k}, \mathbf{k}', 0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C dw \left(\frac{s}{\mathbf{k}^2} \right)^w F(w, \mathbf{k}, \mathbf{k}', 0) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2\pi(\mathbf{k}^2 \mathbf{k}'^2)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu e^{i\nu \ln(\mathbf{k}^2/\mathbf{k}'^2)} \oint_C dw \frac{\left(\frac{s}{\mathbf{k}^2} \right)^w}{w - w_0(\nu)}. \end{aligned} \quad (4.168)$$

O contorno C está à direita de todas as singularidades do plano complexo de w de $F(w, \mathbf{k}, \mathbf{k}', 0)$. A integração em relação a w pode ser realizada via teorema dos resíduos [43]. Portanto, no limite de $w \rightarrow w_0(\nu)$, ficamos com

$$\begin{aligned} F(s, \mathbf{k}, \mathbf{k}', 0) &= \frac{1}{2\pi(\mathbf{k}^2 \mathbf{k}'^2)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu e^{i\nu \ln(\mathbf{k}^2/\mathbf{k}'^2)} \left(\frac{s}{\mathbf{k}^2} \right)^{\lambda - \lambda' \nu^2} \\ &= \frac{1}{2\pi(\mathbf{k}^2 \mathbf{k}'^2)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{s}{\mathbf{k}^2} \right)^{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu \exp \left[-\lambda' \nu^2 \ln \left(\frac{s}{\mathbf{k}^2} \right) + i\nu \ln \left(\frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}'^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.169)$$

Já a integral em ν tem a forma $\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ax^2+ibx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}$ encontrada em [47], assim obtemos que

$$F(s, \mathbf{k}, \mathbf{k}', 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3 \lambda' \mathbf{k}^2 \mathbf{k}'^2}} \frac{1}{\sqrt{\ln s / \mathbf{k}^2}} \left(\frac{s}{\mathbf{k}^2} \right)^{\lambda} \exp \left[-\frac{\ln^2 \left(\frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}'^2} \right)}{4\lambda' \ln \left(\frac{s}{\mathbf{k}^2} \right)} \right]. \quad (4.170)$$

Esta equação representa a solução LO do Pomeron da equação BFKL. O termo $\frac{1}{\sqrt{\ln s}}$ surge do fato da transformada de Mellin conter no plano w um corte em vez de um polo. Além disso, por identificação, a quantidade

$$\alpha_{\mathbb{P}}^{\text{duro}}(0) = 1 + \lambda = 1 + \frac{N_c \alpha_s}{\pi} 4 \ln 2, \quad (4.171)$$

representa a intercepto do Pomeron na QCD perturbativa, conhecida como BFKL Pomeron. Ao impormos um valor arbitrário $\alpha_s \simeq 0,2$, temos que $\alpha_{\mathbb{P}}^{\text{duro}}(0) - 1 \simeq 0,5$ é um valor muito maior do que o encontrado na intercepto do Pomeron suave ligado a teoria de Regge, cujo resultado aproximado é $\alpha_{\mathbb{P}}^{\text{suave}}(0) - 1 \simeq 0,1$.

4.7 Equação BFKL em DIS

O espalhamento profundamente inelástico (*Deep Inelastic Scattering, DIS*) é, atualmente, utilizado para analisar a estrutura interna dos hádrons, para uma revisão [1, 8]. Neste regime de espalhamento, definimos novas variáveis cinemáticas. Uma delas, é o x -Bjorken, representada pela relação $x \approx Q^2/s$, onde Q^2 é a virtualidade (responsável pela resolução).

Uma vez que imposta essa relação na Equação (4.146), não temos vínculo do ângulo azimutal entre \mathbf{k} e $\boldsymbol{\kappa}$. Este fato, nos dá a possibilidade de calcular a integral angular separadamente [11]. Com ajuda das integrais (A.10) e (A.11) encontradas no apêndice A, obtemos que

$$\frac{\partial F(y, \mathbf{k}, \mathbf{k}', 0)}{\partial y} = \frac{N_c \alpha_s}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\boldsymbol{\kappa}^2}{\boldsymbol{\kappa}^2} \mathbf{k}^2 \left[\frac{F(y, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{k}', 0) - F(y, \mathbf{k}, \mathbf{k}', 0)}{|\mathbf{k}^2 - \boldsymbol{\kappa}^2|} + \frac{F(y, \mathbf{k}, \mathbf{k}', 0)}{\sqrt{4\boldsymbol{\kappa}^4 + \mathbf{k}^4}} \right], \quad (4.172)$$

onde y é a rapidez definida por $y = \ln(1/x)$. Uma vez que a função de estrutura do glúon [8] é dada por

$$f(y, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^2 \mathbf{k}'}{\mathbf{k}'^2} \phi_p(\mathbf{k}') \mathbf{k}^2 F(y, \mathbf{k}, \mathbf{k}', 0), \quad (4.173)$$

no qual $\phi_p(\mathbf{k}')$ tem o papel de fator de impacto. Da Equação (4.172), encontramos

$$\frac{\partial f(y, \mathbf{k})}{\partial y} = \bar{\alpha}_s \int_0^\infty \frac{d\boldsymbol{\kappa}^2}{\boldsymbol{\kappa}^2} \mathbf{k}^2 \left[\frac{f(y, \boldsymbol{\kappa}) - f(y, \mathbf{k})}{|\mathbf{k}^2 - \boldsymbol{\kappa}^2|} + \frac{f(y, \mathbf{k})}{\sqrt{4\boldsymbol{\kappa}^4 + \mathbf{k}^4}} \right], \quad (4.174)$$

onde $\bar{\alpha}_s = N_c \alpha_s / \pi$. A Equação (4.174) é escrita de forma equivalente a

$$\frac{\partial f(y, \mathbf{k})}{\partial y} \equiv \bar{\alpha}_s \chi(\gamma) \otimes f(y, \mathbf{k}). \quad (4.175)$$

Se as funções de estrutura tem a forma de

$$f(y, \mathbf{k}) = (\mathbf{k}^2)^{\gamma-1} \quad \text{e} \quad f(y, \boldsymbol{\kappa}) = (\boldsymbol{\kappa}^2)^{\gamma-1}, \quad (4.176)$$

ao efetuar o cálculo do autovalor, semelhante a da seção anterior, chegamos na seguinte equação integral

$$\begin{aligned} \chi(\gamma) = & \int_0^{\mathbf{k}^2} d\boldsymbol{\kappa}^2 \left(\frac{1}{\mathbf{k}^2 - \boldsymbol{\kappa}^2} \left(\frac{\boldsymbol{\kappa}^2}{\mathbf{k}^2} \right)^{\gamma-1} - \frac{\mathbf{k}^2}{\boldsymbol{\kappa}^2(\mathbf{k}^2 - \boldsymbol{\kappa}^2)} + \frac{\mathbf{k}^2}{\boldsymbol{\kappa}^2 \sqrt{4\boldsymbol{\kappa}^4 + \mathbf{k}^4}} \right) \\ & + \int_{\mathbf{k}^2}^\infty d\boldsymbol{\kappa}^2 \left(\frac{1}{\boldsymbol{\kappa}^2 - \mathbf{k}^2} \left(\frac{\mathbf{k}^2}{\boldsymbol{\kappa}^2} \right)^{-\gamma+1} - \frac{\mathbf{k}^2}{\boldsymbol{\kappa}^2(\boldsymbol{\kappa}^2 - \mathbf{k}^2)} + \frac{\mathbf{k}^2}{\boldsymbol{\kappa}^2 \sqrt{4\boldsymbol{\kappa}^4 + \mathbf{k}^4}} \right). \quad (4.177) \end{aligned}$$

Para resolvê-la atribuímos a mudança de variável $a = \boldsymbol{\kappa}^2 / \mathbf{k}^2$ na primeira integral e

$a = \mathbf{k}^2/\kappa^2$ na segunda, ficando com

$$\begin{aligned} \chi(\gamma) = & - \int_0^1 da \left(\frac{a^{\gamma-1} - 1}{1-a} - \frac{1 - a^{-\gamma}}{1-a} \right) \\ & + \left[- \int_0^1 da \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a\sqrt{1+4a^2}} \right) + \int_0^1 \frac{da}{\sqrt{4+a^2}} \right]. \end{aligned} \quad (4.178)$$

O termo que se encontra entre parênteses se anula. As integrais restantes de (4.178), podem ser comparadas com as funções digama [47]

$$\psi(z) = \int_0^1 da \frac{a^{z-1} - 1}{a-1} + \psi(1) \quad \text{e} \quad \psi(1-z) = \int_0^1 da \frac{1 - a^{-z}}{1-a} + \psi(1). \quad (4.179)$$

Portanto, temos

$$\chi(\gamma) = 2\psi(1) - \psi(\gamma) - \psi(1-\gamma). \quad (4.180)$$

Para resolver a Equação (4.175), primeiramente fazemos a transformada de Mellin em relação a \mathbf{k} , na qual introduziremos uma variável \mathbf{k}_0 com a finalidade de regularizar a dimensão. Assim ficamos com

$$\tilde{f}(y, \gamma) = \int_1^\infty \frac{d\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}^2} \left(\frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}_0^2} \right)^{-\gamma} f(y, \mathbf{k}). \quad (4.181)$$

Sostituindo a Equação (4.175) na Equação (4.181), obtemos

$$\frac{\partial \tilde{f}(y, \gamma)}{\partial y} = \bar{\alpha}_s \chi(\gamma) \tilde{f}(y, \gamma). \quad (4.182)$$

Agora aplicaremos a transformada de Laplace da derivada, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial \tilde{f}(y, \gamma)}{\partial y} \right\} &= w \mathcal{L} \{ \tilde{f}(y, \gamma) \} - \tilde{f}(0, \gamma), \\ \bar{\alpha}_s \chi(\gamma) \mathcal{L} \{ \tilde{f}(y, \gamma) \} &= w \mathcal{L} \{ \tilde{f}(y, \gamma) \} - \tilde{f}(0, \gamma), \\ \bar{\alpha}_s \chi(\gamma) F(w, \gamma) &= w F(w, \gamma) - \tilde{f}(0, \gamma), \end{aligned}$$

que tem solução

$$F(w, \gamma) = \frac{\tilde{f}(0, \gamma)}{w - \bar{\alpha}_s \chi(\gamma)}. \quad (4.183)$$

Veremos a seguir que a função $\chi(\gamma)$ tem um mínimo em $\gamma = 1/2$, o que de fato, para grande y nos torna possível utilização da técnica de ponto de sela. No entanto, para encontrar

uma equação integral que dependa tanto da rapidez y , quanto do coeficiente de difusão r , necessitamos adotarmos o uso das transformadas, tanto a de Mellin quanto a de Laplace com o propósito de encontrar a função de Green que satisfaça a equação diferencial em relação a essas variáveis. Temos dependência em r e y , fazendo a transformada de Laplace de $f(y, r)$ em relação a r , portanto

$$\tilde{f}(y, \gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} dr e^{-\gamma r} f(y, r), \quad (4.184)$$

onde $r = \ln(\mathbf{k}^2/\mathbf{k}_0^2)$. A transformada de Laplace de $f(y, r)$ em relação a y , pode ser escrita como

$$\tilde{f}(w, r) = \int_0^{\infty} dy e^{-wy} f(y, r). \quad (4.185)$$

E por fim, definimos a transformada de Laplace de $\tilde{f}(y, \gamma)$ em relação a y , que é

$$F(w, \gamma) = \int_0^{\infty} dy e^{-wy} \tilde{f}(y, \gamma). \quad (4.186)$$

A transformada de Mellin em relação variável \mathbf{k} , está definida na região $0 < \text{Re}(\gamma) < 1$. Neste intervalo a função χ tem um mínimo em $\gamma = 1/2$. A existência desse ponto crítico nos dá a liberdade de impor que existe uma função na qual sua derivada primeira o originou. Essa função é descrita por

$$R(\gamma) = \int d\gamma' \tilde{\chi}(\gamma') = 2\psi(1)\gamma - \ln \left[\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)} \right]. \quad (4.187)$$

O comportamento de $R(\gamma)$ e $\tilde{L}(\gamma)$ pode ser observado no gráfico da Figura (4.10)

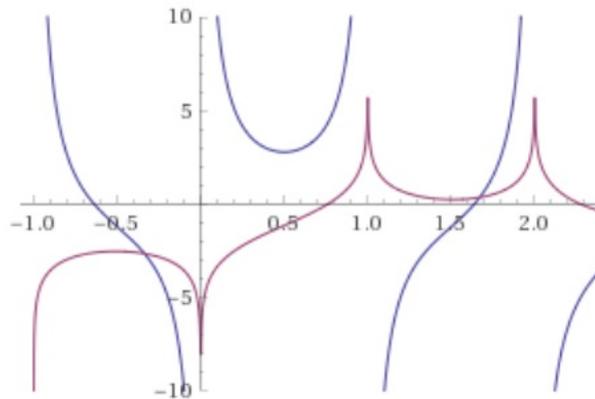


Figura 4.10 - Gráfico das funções $\chi(\gamma)$ Equação (4.180) em azul e $R(\gamma)$ Equação (4.187) em vermelho. Figura do autor.

A fim de avaliar as singularidades no plano complexo, efetuamos a transformada inversa de Mellin da Equação (4.184) e (4.186), que resulta, respectivamente, em

$$f(y,r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} d\gamma e^{\gamma r} \tilde{f}(y,\gamma) \quad (4.188)$$

e

$$\tilde{f}(y,\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dw e^{wy} F(w,\gamma). \quad (4.189)$$

A solução da equação BFKL em termos da função de Green com condição de contorno $y = 0$ é dada por

$$f(y,r) = \int_{-\infty}^{+\infty} dr_0 \tilde{f}(0,r_0) G(y,r,r_0). \quad (4.190)$$

Para solucionar a Equação (4.190), substituímos as Equações (4.183) e (4.189) na Equação (4.188) e impomos que $c = d = 1/2$, o que nos retorna

$$f(y,r) = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} d\gamma dw e^{\gamma r + yw} \frac{\tilde{f}(0,\gamma)}{w - \bar{\alpha}_s \chi(\gamma)}. \quad (4.191)$$

Na Equação (4.191) temos uma singularidade em $w = \bar{\alpha}_s \chi(\gamma)$, então pelo teorema dos resíduos no limite de $w \rightarrow \bar{\alpha}_s \chi(\gamma)$, ficamos com

$$f(y,r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} d\gamma e^{\gamma r + y\bar{\alpha}_s \chi(\gamma)} \tilde{f}(0,\gamma). \quad (4.192)$$

Fazendo a transformada de Laplace de $\tilde{f}(0,r_0)$, em relação a r_0 , obtemos

$$\tilde{f}(0,\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} dr_0 e^{-\gamma r_0} \tilde{f}(0,r_0). \quad (4.193)$$

Substituindo essa transformada na Equação (4.192), temos que

$$f(y,r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} d\gamma \int_{-\infty}^{\infty} dr_0 e^{\gamma(r-r_0) + y\bar{\alpha}_s \chi(\gamma)} \tilde{f}(0,r_0). \quad (4.194)$$

Por identificação de (4.190) a função tem Green tem a forma:

$$G(y,r,r_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} d\gamma e^{\gamma(r-r_0) + y\bar{\alpha}_s \chi(\gamma)}. \quad (4.195)$$

Adotaremos que $r_0 = 0$, então

$$G(y,r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} d\gamma e^{\gamma r + y\bar{\alpha}_s \chi(\gamma)}. \quad (4.196)$$

Para o cálculo da integral da Equação (4.196), utilizamos o método de ponto de sela (veja Apêndice A.1). Esse método exige que conheçamos a expansão da função em relação ao ponto crítico, para nosso caso, ele assume o valor de $\gamma = 1/2$. Portanto, efetuando a expansão da Equação (4.180), (deduzida no Apêndice A.2), temos

$$\chi(\gamma) = 4 \ln(2) + 14(\gamma - 1/2)^2 \zeta(3) + \dots \quad (4.197)$$

Antes de prosseguir os cálculos identificamos as quantidades

$$\lambda = 4\bar{\alpha}_s \ln(2) \quad \text{e} \quad \lambda' = 14\bar{\alpha}_s \zeta(3). \quad (4.198)$$

Com o resultado de (4.197), já somos capazes de chegar a uma equação integral do gênero (A.5), na qual foi descrita no apêndice. Utilizando o método de ponto de sela, a Equação (4.196) vai adquirir a seguinte forma:

$$G(y,r) = \frac{1}{2\pi} \exp \left[\frac{r}{2} + \lambda y \right] \int_{-\infty}^{+\infty} d(\gamma - 1/2) \exp \left[r(\gamma - \frac{1}{2}) + y\lambda'(\gamma - \frac{1}{2})^2 \right]. \quad (4.199)$$

Por fim, calculando a integral gaussiana, obtemos

$$G(y,r) \approx \left(\frac{e^r}{4\pi\lambda'y} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[\lambda y - \frac{r^2}{4\lambda'y} \right]. \quad (4.200)$$

Sabendo que $y = \ln(1/x)$, escrevemos

$$G(y,r) \approx x^{-\lambda}, \quad (4.201)$$

que é o comportamento dominante da distribuição não integrada do glúon a pequeno x .

4.8 Equação de Difusão

Uma interessante característica da equação BFKL é seu padrão de difusão. Temos uma distribuição gaussiana em $r = \ln(\mathbf{k}^2/\mathbf{k}_0^2)$, com largura $y = \ln(1/x)$. Um importante resultado desse padrão de difusão é que a medida que a energia do sistema aumenta, uma quantidade maior de momentos transversais surgem, e, em decorrência disso, a região não perturbativa entra. Podemos escrever a Equação (4.175) com dependência em y e r , sendo

assim

$$\frac{\partial f(y,r)}{\partial y} \equiv \bar{\alpha}_s \chi(\gamma) \otimes f(y,r). \quad (4.202)$$

Usando a Equação (4.197), desprezando os termos de terceira e maior ordem na potência de γ , temos

$$\frac{\partial f(y,r)}{\partial y} = \bar{\alpha}_s [4 \ln(2) + 14(\gamma - 1/2)^2 \zeta(3)] f(y,r). \quad (4.203)$$

Uma vez que $\gamma = \frac{1}{2} - i\nu$, e definimos ν como operador da forma $-i\frac{\partial}{\partial r}$, a Equação (4.203), pode ser escrita como

$$\frac{\partial f(y,r)}{\partial y} = \lambda f(y,r) + \lambda' \frac{\partial^2 f(y,r)}{\partial r^2}, \quad (4.204)$$

que é a equação de difusão da BFKL.

4.9 Conclusão

Um importante resultado, dentro da QCD perturbativa, é que podemos representar o Pomeron através de interações entre glúons em forma de uma “escada“. A evolução dos glúons dentro dessa estrutura é descrita pela equação BFKL. Apresentamos os cálculos em LO, com constante de acoplamento fixa. Vimos que uma solução em DIS também é possível e que a equação BFKL apresenta carácter difusivo. Veremos no próximo capítulo que a solução da equação BFKL com constante de acoplamento dinâmico nos traz como resultado no plano complexo do momentum angular uma sequência de infinitos polos.

5 O POMERON NA QCD: A EQUAÇÃO BFKL COM CONSTANTE DE ACOPLAMENTO DINÂMICA

Dedicamos este capítulo a equação BFKL, cuja solução é descrita em termos do acoplamento dinâmico. Temos na literatura várias maneiras de abordar o acoplamento dinâmico [6, 10–13, 48, 49], porém faremos uma revisão de dois métodos baseados em transformadas com o objetivo de mostrar para o leitor que o uso de uma constante de acoplamento dinâmico leva a uma solução cujo resultado é uma sequência infinita de polos no plano complexo do momentum angular. Após isso apresentamos o método de autofunções discretas [6, 14–16], na qual vai ser objeto de aplicação em processos de alta energia na qual temos troca do Pomeron.

5.1 Solução da equação BFKL para α_s dinâmico

Para a constante de acoplamento dinâmico, começaremos descrevendo a solução geral. O artifício usado é substituir a constante de acoplamento fixo, usada inicialmente na Equação (4.174), pela representação perturbativa [6],

$$\alpha_s(\mathbf{k}) = \frac{1}{\beta_0 \ln(\mathbf{k}^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)}, \quad (5.1)$$

onde Λ_{QCD} é o parâmetro de escala QCD e $\beta_0 = (33 - 2n_f)/12\pi$. O termo n_f é o número de sabores de quarks atuantes em \mathbf{k} . Assumindo que α_s é dinâmico na Equação (4.174), fato este faz com que a teoria se aproxime mais da realidade, visto que para a QCD a constante de acoplamento se comporta dinamicamente. A Equação BFKL, cuja solução devemos encontrar é [11].

$$\frac{\partial f(y, \mathbf{k}^2)}{\partial y} = \frac{3}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\kappa^2}{\kappa^2} \mathbf{k}^2 \left[\frac{\alpha_s(\kappa^2) f(y, \kappa) - \alpha_s(\mathbf{k}^2) f(y, \mathbf{k}^2)}{|\mathbf{k}^2 - \kappa^2|} + \frac{\alpha_s(\mathbf{k}^2) f(y, \mathbf{k}^2)}{\sqrt{4\kappa^4 + \mathbf{k}^4}} \right]. \quad (5.2)$$

Com a utilização de $h(y, \mathbf{k}^2) = \alpha_s(\mathbf{k}^2) f(y, \mathbf{k}^2)$, podemos representar a Equação (5.2) por

$$\frac{\partial h(y, \mathbf{k}^2)}{\partial y} = \frac{3}{\pi} \alpha_s(\mathbf{k}^2) \chi(\mathbf{k}^2) \otimes h(y, \mathbf{k}^2). \quad (5.3)$$

O argumento da Equação (4.181), descrito por $(\mathbf{k}^2/\mathbf{k}_0^2)^{-\gamma}$, na qual assumiremos a escolha de que $\mathbf{k}_0^2 = \Lambda_{\text{QCD}}^2$, mais a parte logarítmica da Equação (5.1), podem ser manipulados algebricamente a fim de encontrar a identidade

$$\left(\frac{\mathbf{k}^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \right)^{-\gamma} \ln \left(\frac{\mathbf{k}^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \right) = -\frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{\mathbf{k}^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \right)^{-\gamma}. \quad (5.4)$$

Utilizando a transformada de Mellin de $h(y, \mathbf{k}^2)$ em relação a \mathbf{k}^2 , ou seja,

$$\tilde{h}(y, \gamma) = \int_1^\infty \frac{d\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}^2} \left(\frac{\mathbf{k}^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \right)^{-\gamma} h(y, \mathbf{k}^2), \quad (5.5)$$

juntamente com as Equações (5.4) e (5.3), encontramos que

$$-\frac{\partial^2 \tilde{h}(y, \gamma)}{\partial y \partial \gamma} = \tilde{\alpha}_s \chi(\gamma) \tilde{h}(y, \gamma), \quad (5.6)$$

onde $\tilde{\alpha}_s = 3/\pi\beta_0$. Na Equação (5.3) utilizamos a transformada de Mellin para obter uma equação diferencial com derivada parcial em relação a γ . Agora queremos eliminar a derivação em relação a y da Equação (5.6) a fim de obter dependência em w . Para isso usaremos a propriedade da derivada da transformada da Laplace em relação a w , ou seja,

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 \tilde{h}(y, \gamma)}{\partial y \partial \gamma} \right\} = w \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial \tilde{h}(y, \gamma)}{\partial \gamma} \right\} - \frac{\partial \tilde{h}(0, \gamma)}{\partial \gamma}, \quad (5.7)$$

que pode ser escrita como

$$\frac{\partial H(w, \gamma)}{\partial \gamma} + \frac{\tilde{\alpha}_s}{w} \chi(\gamma) H(w, \gamma) = \frac{1}{w} \frac{\partial \tilde{h}(0, \gamma)}{\partial \gamma}. \quad (5.8)$$

A Equação (5.8) é uma equação diferencial parcial não homogênea, cuja solução geral é a soma da solução particular mais a homogênea. A parcela homogênea é calculada com a diferenciação da parte à esquerda da igualdade da Equação (5.8), ou seja,

$$\int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{\partial H_h(w, \gamma')}{H_h(w, \gamma')} \frac{1}{H_h(w, \gamma')} = -\frac{\tilde{\alpha}_s}{w} \int_{\gamma_0}^{\gamma} \partial \gamma' \chi(\gamma'). \quad (5.9)$$

Resolvendo a Equação (5.9), encontramos que

$$H_h(w, \gamma) = H_h(w, \gamma_0) e^{-\frac{\tilde{\alpha}_s}{w} (R(\gamma) - R(\gamma_0))}. \quad (5.10)$$

Para encontrar a solução particular, utilizamos o método do fator integrante. No nosso caso, o fator integrante assume o valor de

$$I = e^{\frac{\tilde{\alpha}_s}{w} \int d\gamma \chi(\gamma)}. \quad (5.11)$$

Multiplicando a Equação (5.8) pela Equação (5.11), e efetuando a integração desse resul-

tado, temos que

$$\int_{\gamma_0}^{\gamma'} \partial\gamma \frac{\partial}{\partial\gamma} \left(e^{\frac{\tilde{\alpha}_s}{w} \int d\gamma \chi(\gamma)} H_p(w, \gamma) \right) = \int_{\gamma_0}^{\gamma} \partial\gamma' \frac{1}{w} \frac{\partial \tilde{h}(0, \gamma')}{\partial\gamma'} e^{\frac{\tilde{\alpha}_s}{w} \int d\gamma' \chi(\gamma')}. \quad (5.12)$$

Por fim, identificamos na Equação (5.12), uma solução particular em termos da solução homogênea

$$H_p(w, \gamma) = \frac{1}{w} \int_{\gamma_0}^{\gamma} \partial\gamma' \frac{\partial \tilde{h}(0, \gamma')}{\partial\gamma'} \frac{H_h(w, \gamma)}{H_h(w, \gamma')}. \quad (5.13)$$

Somando as Equações (5.10) e (5.13), encontramos a solução total para a equação diferencial parcial. Seu resultado é

$$H(w, \gamma) = H_h(w, \gamma) + \frac{1}{w} \int_{\gamma_0}^{\gamma} \partial\gamma' \frac{\partial \tilde{h}(0, \gamma')}{\partial\gamma'} \frac{H_h(w, \gamma)}{H_h(w, \gamma')}. \quad (5.14)$$

Esta equação representa a solução geral para caso da constante de acoplamento dinâmica. O primeiro termo à direita da Equação (5.14), nos mostra que a singularidade do momentum angular, está contida em $w = 0$ e não depende de γ , diferentemente do caso fixo. Já o segundo termo só nos retornam singularidade úteis se a parte do integrando é proporcional ao primeiro termo, e se o momentum angular seja independente de γ . Em conclusão, podemos destacar que devido a mudança para uma constante de acoplamento dinâmica, o corte foi substituído por uma singularidade essencial em $w = 0$.

Vamos dar seguimento com a abordagem da solução da BFKL com acoplamento dinâmico encontrada em [10]. Nela somente a solução homogênea é levada em conta, de forma que temos que

$$H(w, \gamma) = H_h(w, \gamma_0) e^{-\frac{\tilde{\alpha}_s}{w} \int_{\gamma_0}^{\gamma} d\gamma' \chi(\gamma')}. \quad (5.15)$$

Fazendo a transformada de Laplace inversa em relação a γ e γ_0 , chegamos a conclusão de que

$$H(w, r) = H(w, r_0) \frac{\frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} d\gamma \exp \left[\gamma r - \frac{\tilde{\alpha}_s}{w} \int_{\frac{1}{2}}^{\gamma} d\gamma' \chi(\gamma') \right]}{\frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} d\gamma_0 \exp \left[\gamma_0 r_0 + \frac{\tilde{\alpha}_s}{w} \int_{\gamma_0}^{\frac{1}{2}} d\gamma' \chi(\gamma') \right]}. \quad (5.16)$$

A transformada inversa de Laplace de $H(w, r)$, em relação a w é

$$H(y, r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} dw e^{wy} H(w, r). \quad (5.17)$$

Substituindo a Equação (5.16) na Equação (5.17), obtemos

$$H(y,r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} dw e^{wy} \frac{\frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} d\gamma \exp \left[\gamma r - \frac{\tilde{\alpha}_s}{w} \int_{\frac{1}{2}}^{\gamma} d\gamma' \chi(\gamma') \right]}{\frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} d\gamma_0 \exp \left[\gamma_0 r_0 + \frac{\tilde{\alpha}_s}{w} \int_{\gamma_0}^{\frac{1}{2}} d\gamma' \chi(\gamma') \right]} H(w,r_0). \quad (5.18)$$

Para prosseguir os cálculos precisamos da transformadas de Laplace de $H(w,r_0)$, em relação a w , que resulta em

$$H(w,r_0) = \int_0^\infty dy_0 e^{-wy_0} H(y_0, r_0). \quad (5.19)$$

Substituindo a Equação (5.19) na Equação (5.18), temos

$$H(y,r) = \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \int_0^\infty \frac{dw dy_0}{2\pi i} e^{w(y-y_0)} \times \frac{\frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} d\gamma \exp \left[\gamma r - \frac{\tilde{\alpha}_s}{w} \int_{\frac{1}{2}}^{\gamma} d\gamma' \chi(\gamma') \right]}{\frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} d\gamma_0 \exp \left[\gamma_0 r_0 + \frac{\tilde{\alpha}_s}{w} \int_{\gamma_0}^{\frac{1}{2}} d\gamma' \chi(\gamma') \right]} H(y_0, r_0). \quad (5.20)$$

A função de Green satisfaz a condição inicial

$$G(y, y_0, r = r_0) = \delta(y - y_0). \quad (5.21)$$

Com distribuição de x fixada a uma virtualidade inicial $r = r_0$ é identificada da forma

$$H(y,r) = \int_0^\infty G(y, y_0, r = r_0) H(y_0, r_0) dy_0, \quad (5.22)$$

assim chegamos a conclusão de que

$$G(y, y_0, r, r_0) = \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{dw}{2\pi i} e^{w(y-y_0)} \frac{\frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} d\gamma \exp \left[\gamma r - \frac{\tilde{\alpha}_s}{w} \int_{\frac{1}{2}}^{\gamma} d\gamma' \chi(\gamma') \right]}{\frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} d\gamma_0 \exp \left[\gamma_0 r_0 + \frac{\tilde{\alpha}_s}{w} \int_{\gamma_0}^{\frac{1}{2}} d\gamma' \chi(\gamma') \right]}. \quad (5.23)$$

Utilizando a Equação (4.197) e o uso das propriedade do apêndice (A.2), somos capazes de escrever que

$$\begin{aligned} \chi(\gamma') &= \chi\left(\frac{1}{2}\right) + 14\zeta(3) \left(\gamma' - \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \chi\left(\frac{1}{2}\right) \left[1 + D \left(\gamma' - \frac{1}{2}\right)^2 \right], \end{aligned} \quad (5.24)$$

onde $D = -\psi^{(2)}\left(\frac{1}{2}\right) / \chi\left(\frac{1}{2}\right)$. Reescrevemos a Equação (5.23) da forma

$$G(y, y_0, r, r_0) = \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{dw}{2\pi i} e^{w(y-y_0)} \frac{I(\gamma)}{I(\gamma_0)}. \quad (5.25)$$

onde $I(\gamma)$ e $I(\gamma_0)$, são, respectivamente,

$$I(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} d\gamma \exp \left[\gamma r - \frac{\tilde{\alpha}_s}{w} \int_{\frac{1}{2}}^{\gamma} d\gamma' \chi(\gamma') \right], \quad (5.26)$$

$$I(\gamma_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} d\gamma_0 \exp \left[\gamma_0 r_0 + \frac{\tilde{\alpha}_s}{w} \int_{\gamma_0}^{\frac{1}{2}} d\gamma' \chi(\gamma') \right]. \quad (5.27)$$

Vamos calcular, passo a passo, somente a Equação (5.26), a álgebra para chegar no resultado da Equação (5.27) é semelhante. Portanto, substituindo a Equação (5.24) na Equação (5.26), obtemos

$$I(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} d\gamma d(\gamma' - 1/2) \exp \left[\gamma r - \frac{\tilde{\alpha}_s}{w} \chi\left(\frac{1}{2}\right) \int_{\frac{1}{2}}^{\gamma} \left[1 + D \left(\gamma' - \frac{1}{2} \right)^2 \right] \right]. \quad (5.28)$$

Sabendo que $\alpha_s(\mathbf{k}_0) = 1/\beta_0 r_0$ e identificando $w_L = 3\alpha_s \chi\left(\frac{1}{2}\right) / \pi$, escrevemos

$$I(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} d\gamma d(\gamma' - 1/2) \exp \left[\gamma r - \frac{r_0 w_L}{w} \int_{\frac{1}{2}}^{\gamma} \left[1 + D \left(\gamma' - \frac{1}{2} \right)^2 \right] \right]. \quad (5.29)$$

Resolvendo a integral em $d(\gamma' - 1/2)$ e multiplicando a equação por $e^{\frac{r}{2}-\frac{r}{2}}$, obtemos

$$I(\gamma) = \frac{e^{\frac{r}{2}}}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} d\gamma \exp \left[\left(r - \frac{w_L}{w} r_0 \right) \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) - \frac{w_L}{w} r_0 D \frac{\left(\gamma - \frac{1}{2} \right)^3}{3} \right]. \quad (5.30)$$

Com a mudança de variável $a = -\left(\frac{w_L r_0 D}{w}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)$, e a identificação com a função de Airy, mediante relação integral

$$\text{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c e^{\frac{a^3}{3} - za} da, \quad (5.31)$$

temos o resultado

$$I(\gamma) = -\left(\frac{w}{w_L r_0 D}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{r}{2}} \text{Ai} \left(\left(r - \frac{w_L}{w} r_0 \right) \left(\frac{w}{w_L r_0 D} \right)^{\frac{1}{3}} \right). \quad (5.32)$$

Por analogia,

$$I(\gamma_0) = - \left(\frac{w}{w_L r_0 D} \right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{r_0}{2}} \text{Ai} \left(\left(r_0 - \frac{w_L}{w} r_0 \right) \left(\frac{w}{w_L r_0 D} \right)^{\frac{1}{3}} \right). \quad (5.33)$$

Substituindo a Equação (5.32) e (5.33) na Equação (5.25), obtemos

$$G(y, y_0, r, r_0) = e^{\frac{1}{2}(r-r_0)} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{dw}{2\pi i} e^{w(y-y_0)} \frac{\text{Ai} \left(\left(r - \frac{w_L}{w} r_0 \right) \left(\frac{w}{w_L r_0 D} \right)^{\frac{1}{3}} \right)}{\text{Ai} \left(\left(r_0 - \frac{w_L}{w} r_0 \right) \left(\frac{w}{w_L r_0 D} \right)^{\frac{1}{3}} \right)}. \quad (5.34)$$

As singularidades no plano complexo do momentum angular surgem quando a função de Airy encontrada no denominador da Equação (5.34), zera. Isso acontece sempre que as funções de Airy são negativas, ou seja, quando $r_0 < \frac{w_L}{w} r_0$. Uma boa estimativa desses zeros, pode ser encontrada mediante a relação

$$\left(r_0 - \frac{w_L}{w_n} r_0 \right) \left(\frac{w_n}{w_L r_0 D} \right)^{\frac{1}{3}} = - \left(\frac{3\pi n}{2} - \frac{3\pi}{8} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (5.35)$$

Um cálculo numérico pode ser encontrado na Tabela (5.1).

w_L	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
0,650	0,300	0,170	0,120	0,093	0,075	0,064
0,500	0,220	0,135	0,102	0,081	0,068	0,055
0,330	0,170	0,115	0,087	0,072	0,053	0,040
0,250	0,140	0,100	0,078	0,064	0,056	0,050
0,200	0,122	0,090	0,071	0,069	0,051	0,046

Tabela 5.1 - Tabela com valores das singularidades contidas no plano complexo de w . Resultado extraído de [10].

Nessa tabela é possível observar que a medida que n cresce os polos se aproximam de zero. Para valores muito grandes de n , eles obedecem a lei

$$w_n \propto \frac{1}{n} \rightarrow 0. \quad (5.36)$$

Podemos encontrar a função de Green para a constante de acoplamento dinâmico seguindo os mesmos passos que foram feitos para chegar na Equação (4.200), de modo que para

este caso somente vamos colocar sua solução, que é

$$G(y, y_0, r, r_0) \propto \exp \left[w_L(y - y_0) - \frac{(r - r_0)^2}{4D(y - y_0)} \right]. \quad (5.37)$$

Esse resultado nos retorna que o ponto de sela é encontrado em

$$w_S = w_L - \frac{(r - r_0)^2}{4D(y - y_0)^2}. \quad (5.38)$$

O comportamento das singularidades, oriundas de uma constante de acoplamento dinâmica, estão ilustradas na Figura (5.1).

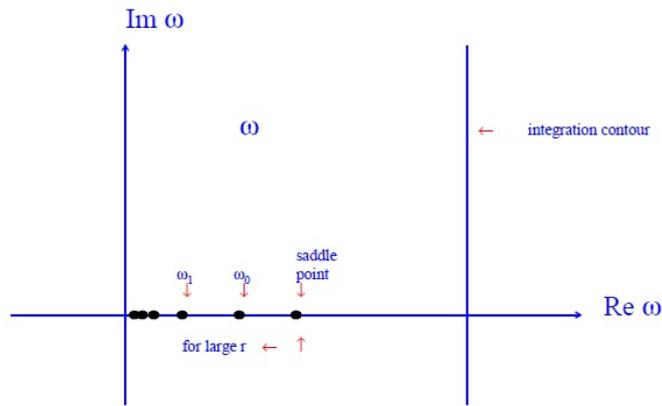


Figura 5.1 - Singularidades do plano complexo de w para α_s dinâmico obtida através da Equação implícita (5.35) para os polos e a Equação (5.38) para o ponto de sela. Figura extraída de [50].

5.1.1 Difusão da BFKL para α_s dinâmico

Em outra abordagem [11], bastante semelhante a anterior, a equação BFKL é solucionada, a partir de sua equação de difusão. Primeiramente vamos construí-la. Para este propósito, reescrevemos a Equação (5.3), utilizando de sua estrutura de convolução

$$\frac{1}{\alpha_s(r)} \frac{\partial h(y, r)}{\partial y} = \frac{3}{\pi} \chi(\hat{\gamma}) h(y, r). \quad (5.39)$$

Aqui $\hat{\gamma}$ é definido como um operador diferencial que depende de r e tem a forma $\hat{\gamma} = \frac{\partial}{\partial r}$. Uma propriedade conveniente do núcleo χ segue na relação

$$e^{ar} \chi(\hat{\gamma} + a) e^{-ar} = \chi(\hat{\gamma}). \quad (5.40)$$

Essa identidade é comprovada quando aplicamos em ambos lados da igualdade a transformadas de Mellin. Além disso, se assumirmos seu uso mais a substituição do termo $h_a(y,r) = e^{ar/2}h(y,r)$ na Equação (5.67), obtemos

$$\frac{1}{\alpha_s(r)} \frac{\partial h_a(y,r)}{\partial y} = \frac{3}{\pi} e^{ar/2} \chi(\hat{\gamma} + a/2) e^{-ar/2} h_a(y,r). \quad (5.41)$$

Vimos na seção (4.7) que χ tem um mínimo em $1/2$. Este fato faz com que a função ao ser expandida nesse ponto, tenha derivada primeira nula. Podemos fazer o uso desse resultado para escrever a equação BFKL em termos de uma equação de difusão. Basta que na Equação (5.41) atribuirmos $a = 1$ e desprezarmos os termos de terceira e ordens maiores da expansão de χ da Equação (4.197). Agora para $\hat{\gamma} = 1/2$, em aproximação, obtemos que

$$\frac{1}{\alpha_s(r)} \frac{\partial h_1(y,r)}{\partial y} \simeq \frac{3}{\pi} [4 \ln(2) + 14\zeta(3)\hat{\gamma}^2] h_1(y,r). \quad (5.42)$$

Usamos na Equação (5.42) e a relação de que $\tilde{\alpha}_s = 3/\pi\beta_0$ e $\hat{\gamma} = \partial/\partial r$. Além disso, identificamos as quantidades $\tilde{\lambda} = 4\tilde{\alpha}_s \ln(2)$ e $\tilde{\lambda}' = 14\tilde{\alpha}_s \zeta(3)$, ficamos com

$$\frac{1}{\beta_0 \alpha_s(r)} \frac{\partial h_1(y,r)}{\partial y} \simeq \tilde{\lambda} h_1(y,r) + \tilde{\lambda}' \frac{\partial^2 h_1(y,r)}{\partial r^2}. \quad (5.43)$$

É possível relacionar a Equação (5.43) com uma equação de difusão. Aqui a coordenada temporal é equiparada a y e a espacial a r . O termo $\alpha_s(r)\beta_0\tilde{\lambda}'$ representa o coeficiente de difusão. Podemos interpretá-lo como sendo a velocidade com a qual os glúons se difundem em y . Ao contrário do caso em que α_s é fixo, y depende de $\alpha_s(r)$, e se considerarmos grandes escalas de r a taxa pela qual os glúons se difundem é relativamente pequena. Por outro lado, se quisermos retratar a física do infravermelho (região de pequeno momentum transversal), devemos atribuir na Equação (5.43), condições de contorno no qual $r = r_0$ seja pequeno. Podemos destacar também que, ao invés do caso fixo, onde os coeficientes da equação de difusão são constantes, no caso dinâmico encontramos coeficientes com dependência em r .

Substituindo a Equação (5.1) na Equação (5.43), encontramos

$$r \frac{\partial h_1(y,r)}{\partial y} \simeq \tilde{\lambda} h_1(y,r) + \tilde{\lambda}' \frac{\partial^2 h_1(y,r)}{\partial r^2}. \quad (5.44)$$

Se utilizarmos a transformada de Laplace da derivada de $\bar{h}(w,u)$, que é obtida usando a

relação $\mathcal{L}\{f'(a)\} = a\mathcal{L}\{f\}(a) - f(0)$ e por simplificação $h(0,u) = 0$, obtemos

$$rw\bar{h}(w,r) = \tilde{\lambda}\bar{h}(w,r) + \tilde{\lambda}'\frac{\partial^2\bar{h}(w,r)}{\partial r^2}. \quad (5.45)$$

Esta equação pode ser escrita na forma de uma equação diferencial de Airy. Para isso utilizaremos da seguinte mudança de variável $r = z(\tilde{\lambda}/w)^{1/3} + \tilde{\lambda}'/w$.

$$\frac{\partial^2\bar{h}(w,r)}{\partial z^2} - z\bar{h}(w,r) = 0 \quad (5.46)$$

que tem solução

$$\bar{h}(w,r) = \text{Ai}(z). \quad (5.47)$$

As singularidades do plano complexo do momentum angular surgem como condições de contorno

$$\bar{h}_1(w,r) = \bar{h}_1(w,r_0)\frac{\text{Ai}(z)}{\text{Ai}(z_0)}, \quad (5.48)$$

onde $\bar{h}_1(w,r_0)$, para os autores, do ponto de vista fenomenológico, representa uma soma de polos de Regge [11]. Essa condição de contorno pode ser expressa por

$$\bar{h}_1(w,r_0) = \sum_i \frac{\gamma_i(w,r_0)}{w - \lambda_i}. \quad (5.49)$$

O numerador do lado direito da Equação (5.49) representa o resíduo dos polos. Além das singularidades encontradas por essa equação, temos, porém, as provindas dos zeros da função de Airy, que surgem quando seu argumento é negativo. Esse argumento é descrito por

$$z_0 = \left(\frac{w}{\tilde{\lambda}'}\right)^{1/3} \frac{r_0}{w} \left(w - \frac{\tilde{\lambda}}{r_0}\right). \quad (5.50)$$

Portanto, para ser negativo, devem obedecer a condição

$$w_{max} < \frac{\tilde{\lambda}}{r_0} = 4\frac{\tilde{\lambda}\ln(2)}{r_0}. \quad (5.51)$$

Os zeros da função de Airy, podem ser encontrados mediante formula $z_0 = -(3\pi n/2 - 3\pi/8)^{2/3}$, com n positivo e inteiro. Podemos obter um valor para o qual w seja máximo,

utilizando a expressão

$$w_{max} = \frac{\tilde{\lambda}}{r_0} - \epsilon. \quad (5.52)$$

Resolvendo para ϵ , obtemos

$$w_{max} = \frac{\tilde{\lambda}}{r_0} \left[1 - \frac{1}{r_0^{2/3}} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}'} \right)^{1/3} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{2/3} \right]. \quad (5.53)$$

É possível obter os polos no limite $w \ll \tilde{\lambda}/u_0$. Nesse limite a Equação (5.50), fica

$$z_0 \simeq \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}'} \right)^{1/3} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{w} \right)^{2/3}, \quad (5.54)$$

assim podemos localizá-los em

$$w \simeq w_n = \tilde{\lambda} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}'} \right)^{1/2} \left[\frac{3}{2}\pi n - \frac{3}{8}\pi \right]^{-1}. \quad (5.55)$$

Temos uma infinidade de polos que se encontram, a partir de $w = 0$ até $n \rightarrow \infty$. Podemos encontrar o conjunto de singularidade de $h_1(y, r)$, mediante transformada inversa de Laplace em relação a w , assim temos

$$h_1(y, r) = \sum_i e^{y\lambda_i} \mathcal{H}(\lambda_i, r) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{yw_n} \mathcal{H}(w_n, r). \quad (5.56)$$

O primeiro termo à direita da Equação (5.56), representa a física suave, já o segundo termo é referente aos polos dos zeros da função de Airy. Podemos representar graficamente o comportamento da somas dessas singularidades na Figura (5.2).

No caso de n ser grande, com o uso da Equação (5.55) e que $w \sim \tilde{\lambda}/r$, r pode ser grande até

$$r \sim \frac{3\pi n}{2} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}'} \right)^{1/2}. \quad (5.57)$$

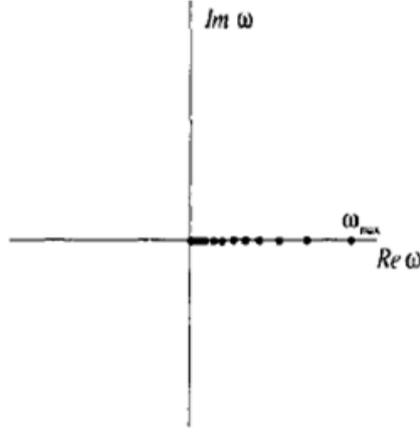


Figura 5.2 - Sequência infinita de polos no plano complexo de w calculadas através da Equação (5.55) e w_{max} da Equação (5.53), que são oriundas da solução da equação BFKL para o caso de α_s dinâmico. Figura extraída de [11].

Se $r \gg r_0$ e n grande, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(w_n, r) &\sim \text{Ai} \left(\left(\frac{2}{3\pi n} \right)^{1/3} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}'} \right)^{1/2} r - \left(\frac{3\pi n}{2} \right)^{2/3} \right) \\ &\sim \exp \left[-\frac{1}{\sqrt{\pi n}} \left(\frac{2r}{3} \right)^{3/2} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}'} \right)^{3/4} \right], \end{aligned} \quad (5.58)$$

onde foi usado que $\text{Ai}(z) \approx e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}}$. Devido o fato de que os resíduos vão rapidamente para zero, temos que para r grande somente valores de n grande vão ser relevantes. Para grande r a grande n o resultado da Equação (5.56), fica

$$h_1(y, r) \simeq \sum_n \exp \left[-\frac{1}{\sqrt{\pi n}} \left(\frac{2r}{3} \right)^{3/2} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}'} \right)^{3/4} + \frac{2\tilde{\lambda}}{3\pi n} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}'} \right)^{1/2} \right]. \quad (5.59)$$

O maior termo dessa série se encontra a $n = \frac{6\tilde{\lambda}^2 y^2}{\pi r^3} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}'} \right)^{-1/2}$, portanto

$$h_1(y, r) \sim \exp \left[\frac{y\tilde{\lambda}}{r} - \frac{r^3 \tilde{\lambda}}{9\tilde{\lambda}' y^2} \right]. \quad (5.60)$$

define o comportamento a grande r .

5.1.2 Solução da equação BFKL via autofunções discretas

Nesta seção veremos o tratamento da BFKL via autofunções discretas em LO, utilizando um método semelhante ao Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB), ou também conhecida como aproximação semi-clássica. A partir deste método de autofunções discretas podemos determinar as propriedades infravermelhas da BFKL através de ajustes de observáveis físicos. A equação BFKL nos moldes desta seção é construída a partir da obtenção dos autovalores e autofunções. Portanto, uma vez que o núcleo da equação (4.144), admita um conjunto de funções \bar{f}_n e escalares w_n , a equação para o autovalor fica [6]

$$w_n \bar{f}_n(\mathbf{k}) \equiv \frac{N_c \alpha_s}{\pi^2} \int \frac{d^2 \boldsymbol{\kappa}}{(\mathbf{k} - \boldsymbol{\kappa})^2} \left[\bar{f}_n(\boldsymbol{\kappa}) - \frac{\mathbf{k}^2}{\boldsymbol{\kappa}^2 + (\mathbf{k} - \boldsymbol{\kappa})^2} \bar{f}_n(\mathbf{k}) \right]. \quad (5.61)$$

Novamente, ao invés de usarmos a constante de acoplamento fixa utilizaremos a expressão perturbativa em ordem dominante dada por

$$\alpha_s(\mathbf{k}) = \frac{1}{\beta_0 r}, \quad (5.62)$$

onde $r = \ln(\mathbf{k}^2 / \Lambda_{\text{QCD}}^2)$. Conforme [6] as autofunções podem ser escritas no espaço dos momenta como

$$f_n(\mathbf{k}) = \frac{\bar{f}_n(\mathbf{k})}{\sqrt{\mathbf{k}^2}}, \quad (5.63)$$

onde

$$\bar{f}_n(\mathbf{k}) \sim \exp \left(\pm i \int^r dr' \nu(r') \right). \quad (5.64)$$

A função ν contém um zero em $\chi_0(\nu) = 4 \ln(2)$, portanto existe algum valor crítico de r_c , na qual sua derivada seja infinita. Para esse valor temos a quantidade

$$r_c = \frac{12 \ln(2)}{\pi \beta_0 w_n}. \quad (5.65)$$

Quando $r \sim r_c$, é possível fazer uma aproximação de ν , com a utilização das Equações (5.62) e (5.65) em $\chi_0(\nu) = 4 \ln 2 - 14\zeta(3)\nu^2$, obtemos

$$\nu = \left(\frac{\pi \beta_0 w_n}{14 N_c \zeta(3)} (r_c - r) \right)^{1/2}. \quad (5.66)$$

Note que quando $r > r_c$ a função ν se torna imaginária. Veremos que, neste caso, a autofunção tem o comportamento de um decaimento exponencial. Também na proximidade

da região do ponto de viragem $r \sim r_c$, desde que ν seja pequeno, podemos usar como aproximação para a Equação BFKL a quantidade (4.164) até a ordem quadrática. Uma vez que $\nu = -i\partial/\partial r$ e a constante de acoplamento é dinâmica, temos

$$w_n \bar{f}_n(\mathbf{k}) = \frac{N_c}{\pi\beta_0 r} \left[4 \ln 2 - 14\zeta(3) \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] \bar{f}_n(\mathbf{k}). \quad (5.67)$$

Com a mudança de variável

$$z = \left(\frac{\pi\beta_0 w_n}{14N_c\zeta(3)} \right)^{1/3} (r - r_c), \quad (5.68)$$

obtemos a seguinte equação

$$\frac{\partial^2 \bar{f}_n(\mathbf{k})}{\partial z^2} - z \bar{f}_n(\mathbf{k}) = 0, \quad (5.69)$$

que é a equação diferencial de Airy, cuja solução é dada em termos de duas funções independentes $\text{Ai}(z)$ e $\text{Bi}(z)$. No limite assintótico de $r \rightarrow \infty$, obtemos a informação da condição de contorno ultravioleta. Nesse limite, $\text{Ai}(z) \rightarrow 0$ e $\text{Bi}(z) \rightarrow \infty$. Uma condição de contorno que nos leva a infinitos não é boa, portanto consideramos somente como solução a função de $\text{Ai}(z)$. Seu comportamento assintótico é dado por [6]

$$\text{Ai}(z) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}|z|^{1/4}} \text{sen} \left(\frac{2}{3}(-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right), \quad z \rightarrow -\infty, \quad (5.70)$$

$$\text{Ai}(z) \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{\pi}z^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}}, \quad z \rightarrow \infty. \quad (5.71)$$

O comportamento da autofunção pode ser visto com mais detalhes na Figura (5.3). Nela temos que a região 1 corresponde a região não perturbativa, ou também conhecida como região infravermelha, onde temos momenta com valor abaixo de Λ_{QCD} ; a região 2 corresponde a uma região oscilatória, na qual é fixada uma fase a $r = r_0$; a região 3 é representada por uma região oscilatória 2 para um determinado múltiplo de π , e por fim, a região 4 descreve um decaimento exponencial.

Com a utilização da equação (5.68) e da equação (5.66), podemos escrever que

$$\nu = (-z)^{1/2} \left(\frac{\pi\beta_0 w_n}{14N_c\zeta(3)} \right)^{1/3}. \quad (5.72)$$

Identificando da equação (5.68) que $dr' = (\pi\beta_0 w_n/14N_c\zeta(3))^{-1/3} dz'$, e a utilização da

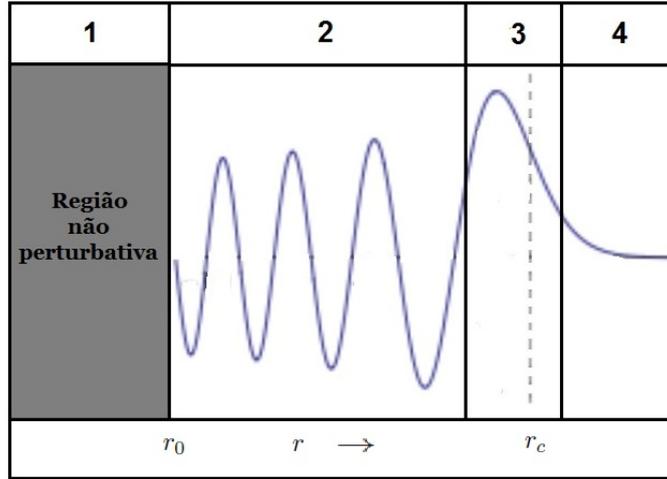


Figura 5.3 - Comportamento da autofunção. Figura do autor.

equação (5.72), podemos representar a mudança de fase de r_c para r por

$$\int_r^{r_c} \nu(r') dr' = \int_z^0 (-z')^{\frac{1}{2}} dz' = \frac{2}{3} (-z)^{\frac{3}{2}}. \quad (5.73)$$

Agora, faremos a dedução da equação BFKL, a partir da função de Green da função Airy

$$\left(z - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) G(z, z') = \delta(z - z'). \quad (5.74)$$

Dado que o Wronskiano devido a duas funções de Airy independentes é

$$\mathcal{W}\{\text{Ai}(z), \text{Bi}(z)\} = \text{Ai}(z) \frac{d}{dz} \text{Bi}(z) - \text{Bi}(z) \frac{d}{dz} \text{Ai}(z) = \frac{1}{\pi}. \quad (5.75)$$

Então, podemos definir a solução da função de Green da forma

$$G(z, z') = \pi [\text{Bi}(z) \text{Ai}(z') \theta(z' - z) + \text{Ai}(z) \text{Bi}(z') \theta(z - z')]. \quad (5.76)$$

Graficamente, essa função é semelhante ao da Figura (5.3), e também tem o comportamento ultravioleta desejado quando $r \rightarrow \infty$, ou seja,

$$G(z, z') \rightarrow 0, \quad (5.77)$$

porém não é muito bem definida na região de pequeno r . Podemos destacar também que, a Equação (5.76) pode ser escrita de forma a acrescentar uma solução homogênea, cujo propósito, além de determinar as singularidades do plano complexo de w , é fornecer a

função de Green uma correção a pequeno r , a região infravermelha. Portanto, escrevemos

$$G(z, z') = \pi[\bar{\text{Bi}}(z)\text{Ai}(z')\theta(z' - z) + \text{Ai}(z)\bar{\text{Bi}}(z')\theta(z - z')], \quad (5.78)$$

onde o termo $\bar{\text{Bi}}(z)$, representa uma superposição das funções $\text{Ai}(z)$ e $\text{Bi}(z)$

$$\bar{\text{Bi}}(z) = \text{Bi}(z) + c(w)\text{Ai}(z). \quad (5.79)$$

Aqui $c(w)$ é uma constante que assume o valor de $\cot(\phi(w))$.

Com ajuda da expressão $w_n = \frac{N_c}{\pi\beta_0 r} \left[4 \ln 2 - 14\zeta(3) \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right]$ mais a equação (5.68) e a utilização da generalização da equação de Airy [16], podemos escrever

$$\left(\frac{\pi\beta_0 w_n}{14N_c\zeta(3)} \right)^{2/3} \left(z - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \approx \frac{1}{N(r)} \left(\dot{z}z - \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\dot{z}} \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{1}{N(r')}. \quad (5.80)$$

Portanto,

$$N(r) = \left(\frac{\pi\beta_0 w_n}{14N_c\zeta(3)} \right)^{-1/6}. \quad (5.81)$$

Com ajuda da equação $\chi_0(\nu) = 4 \ln(2) - 14\zeta(3)$ e das Equações (5.68) e (5.72), podemos escrever que

$$\frac{|z(r)|^{1/4} \sqrt{28\zeta(3)}}{\sqrt{\chi_0'(\nu)}} = \left(\frac{\pi\beta_0 w_n}{14N_c\zeta(3)} \right)^{-1/6}. \quad (5.82)$$

Desta forma a normalização também pode ser escrita como

$$N(r) = \frac{|z(r)|^{1/4} \sqrt{28\zeta(3)}}{\sqrt{\chi_0'(\nu)}}. \quad (5.83)$$

Este resultado de normalização é obtido através da generalização da função de Airy Equação (5.80) para o caso de que $r \sim r_c$ para r longe de r_c é possível obter esse mesmo resultado como mostrado em [16].

Com o resultado da Equação (5.78), juntamente com a constante de normalização, construímos uma função de Green

$$G(r, r') = \pi N(r)N(r')[\bar{\text{Bi}}(z(r))\text{Ai}(z(r'))\theta(r' - r) + \text{Ai}(z(r))\bar{\text{Bi}}(z(r'))\theta(r - r')]. \quad (5.84)$$

Como pode ser visto em [16] a solução da função de Green é escrita em termos de uma

parte discreta e outra contínua como mostrada através da equação

$$(w' - w(r, \hat{\nu}))G(r, r') = \delta(r - r'), \quad (5.85)$$

onde w' é a parte contínua e $w(r, \hat{\nu})$ representa a parte discreta. No entanto, em nossas análises fenomenológicas usaremos somente a parte discreta, pois como veremos no próximo capítulo a utilização somente da parte discreta em formas de polos é capaz de descrever os processos físicos pelos quais analisaremos.

Para um dado valor de r' fixo, no caso em que $r < r'$, o segundo termo da Equação (5.84) é suprimido pela função de Heaviside. Assim, o comportamento da função de Green é governado pela função $\bar{\text{Bi}}(z)$. No caso em que $r \ll r_c$, temos que

$$\bar{\text{Bi}}(z(r)) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}z^{\frac{1}{4}}} \frac{\text{sen}(\int_r^{r_c} \nu_w(r')dr' + \frac{\pi}{4} - \phi(w))}{\text{sen}(\phi(w))}. \quad (5.86)$$

Fixando uma fase não perturbativa η_{np} em um ponto muito próximo da região infravermelha $r = r_0$, no argumento senoidal do numerador da Equação (5.86), obtemos

$$\phi(w) = \int_{r_0}^{r_c} \nu_w(r')dr' + \frac{\pi}{4} - \eta_{np}. \quad (5.87)$$

Note que $\phi(w)$, representa a diferença entre a fase perturbativa e a não-perturbativa. Seu valor é dado por

$$\phi(w) = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (5.88)$$

onde n representa o número de polos encontrados no eixo real positivo do plano complexo do momentum angular. O primeiro termo à direita de Equação (5.87), pode ser escrito em termos da integração por partes, de modo que fiquemos com

$$\int_{r_0}^{r_c} \nu_w(r')dr' = -\nu_w(r_0)r_0 + \frac{3}{\pi\beta_0 w} \int_0^{\nu_w(r_0)} \chi_0(\nu')d\nu'. \quad (5.89)$$

Foi usado que $r = 3\chi_0(\nu)/\pi\beta_0 w$. Para o caso em que r_0 é pequeno, a constante de acoplamento é grande, e, portanto

$$\chi_0(\nu_w(r)) = \frac{w}{\alpha_s(r)} \rightarrow 0 \quad (5.90)$$

e se ainda w é pequeno, $\nu_w(r_0)$ se aproxima do valor assintótico ν_0 , assim $\chi(\nu_0) = 0$. Essa

aproximação nos permite escrever a Equação (5.87) da forma

$$w \rightarrow w_n = \frac{3}{\pi\beta_0(n\pi + \eta_{np} + \nu_0 r_0 - \frac{\pi}{4})} \int_0^{\nu_0} \chi_0(\nu') d\nu'. \quad (5.91)$$

Temos que $\nu_0 = 0,67309$ e $\int_0^{\nu_0} \chi_0(\nu') d\nu' = 0,96278$ [13]. A equação (5.91) nos diz que a fase fixada a $r = r_c$ mais a fase não perturbativa fixada a $r = r_0$, nos levam a quantização, ou seja, a um conjunto discreto de autovalores.

Com a aproximação $\bar{f}_n(\mathbf{k}) \approx \sqrt{\pi} N(r(\mathbf{k})) \text{Ai}(z)$ mais a utilização da Equação (5.63), podemos escrever a autofunção na proximidade do ponto crítico da forma [6]

$$f_n(\mathbf{k}) \sim \sqrt{\frac{\pi}{\mathbf{k}^2}} \left(\frac{\pi\beta_0 w_n}{14N_c \zeta(3)} \right)^{-1/6} \text{Ai} \left(\left(\frac{\pi\beta_0 w_n}{14N_c \zeta(3)} \right)^{1/3} (r - r_c) \right). \quad (5.92)$$

Como dispomos da informação do autovalor e da autofunção, somos capazes de determinar a equação BFKL em termos de polos discretos. Conforme pode ser visto em [16], podemos representá-la da forma

$$G(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \sum_n \frac{f_n(\mathbf{k}) f_n^*(\mathbf{k}')}{w - w_n}. \quad (5.93)$$

Como $r = \ln(\mathbf{k}^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)$ e $r' = \ln(\mathbf{k}'^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)$ escrevemos por conveniência a função G em termos de \mathbf{k} e \mathbf{k}' . Dado que a transformada de Mellin em relação a da função de Green da Equação (5.93) é [16]

$$G(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \equiv \int_0^\infty dy e^{-wy} G(y, \mathbf{k}, \mathbf{k}') \quad (5.94)$$

e sua inversa

$$G(y, \mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} dw e^{wy} G(\mathbf{k}, \mathbf{k}'). \quad (5.95)$$

Com a substituição da Equação (5.93) na Equação (5.95) e a utilização do teorema dos resíduos, obtemos

$$G(y, \mathbf{k}, \mathbf{k}') = \sum_{n=1}^{\infty} e^{w_n y} f_n(\mathbf{k}) f_n^*(\mathbf{k}'). \quad (5.96)$$

Substituindo $y = \ln(x_0/x)$, onde x representa a fração de momentum do próton carregada

pelo párton interagente e x_0 seria sua condição inicial, obtemos

$$G(x, \mathbf{k}, \mathbf{k}') = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-w_n} f_n(\mathbf{k}) f_n^*(\mathbf{k}'). \quad (5.97)$$

Esse resultado nos mostra que a transformada inversa de Mellin, retornou para a função de Green, como solução, uma sequência de polos isolados, em substituição ao corte, encontrado quando usada a constante de acoplamento fixa. A Equação (5.97) vai ser o foco de análise do trabalho, cujo objetivo é aplicá-la em processos de altas energias onde a troca do Pomeron seja relevante. Trataremos desse assunto no próximo capítulo.

5.2 Conclusão

Tratamos a respeito de algumas abordagens da solução da equação BFKL para o caso de α_s dinâmico. Em conclusão a solução da equação BFKL com constante de acoplamento dinâmica nos retorna em substituição ao corte no plano complexo do momentum angular no caso fixo, uma sequência infinita de polos. Usaremos no próximo capítulo a solução via autofunção discreta e investigaremos as propriedades infravermelhas através de ajustes de F_2 e aplicaremos seu resultado em outros observáveis físicos, a fim de comprovar a universalidade do nosso resultado.

6 FENOMENOLOGIA DE PROCESSOS DIFRATIVOS UTILIZANDO O FORMALISMO BFKL VIA AUTOFUNÇÕES DISCRETAS

Neste capítulo, utilizaremos a solução da equação BFKL para o caso da constante de acoplamento dinâmica. Usaremos o método da aproximação semi-clássica, na qual é possível determinar as autofunções e autovalores da equação BFKL. Ajustaremos a predição teórica com dados experimentais da função de estrutura F_2 e mostraremos que nosso resultado é compatível de ser aplicado em outros processos de espalhamento. A escolha da função de estrutura F_2 do processo fóton-próton $\gamma^*p \rightarrow \gamma^*p$ se deve a vasta gama de pontos experimentais em diferentes faixas de energia. Um processo com “comportamento ideal” de ser aplicado a equação BFKL, por exemplo, é no caso do espalhamento $\gamma^*\gamma^* \rightarrow \gamma^*\gamma^*$ para virtualidades iguais e a produção de jatos de Mueller-Navelet na qual o momento transversal de ambos os glúons oriundos dos prótons também sejam de mesmo valor. Esses processos são ideais pelo fato de que neles temos somente evolução em x , caracterizando um processo típico BFKL, entretanto o número de dados experimentais inviabiliza um resultado de ajuste refinado. O fato é que na função de estrutura F_2 além da evolução em x temos também evolução em Q^2 , portanto contribuições colineares passam a ser relevantes. Este porém faz com que nosso ajuste não possa ser feito para valores muito grandes de Q^2 , para que tenhamos coerência com o processo tipo BFKL. Começaremos a primeira seção fazendo o ajuste de F_2 em relação ao número de polos com os parâmetros livres que são x_0 e η_{np} . Após ter fixado esses parâmetros livres, aplicaremos a equação BFKL com polos discretos para produção do quark charm, dos mésons vetoriais J/Ψ e Υ , e produção de dois fótons as seções de choque fóton real - fóton real ($\gamma\gamma$), fóton virtual - fóton virtual ($\gamma^*\gamma^*$), e a função de estrutura do fóton real (F_2^γ).

6.1 Ajuste da função de estrutura F_2

Nesta seção iremos aplicar a equação (5.97) para o caso de F_2 no processo fóton - próton ($\gamma^*p \rightarrow \gamma^*p$). O espalhamento em questão está ilustrado na Figura (6.1), onde temos a seguinte sequência de processos no sistema de repouso do alvo: um fóton flutua num par quark-antiquark; o par quark-antiquark interage com o próton e por fim o par quark-antiquark se recombina gerando no estado final um fóton virtual. Nesta figura temos que a quantidade Φ_p representa o fator de impacto do próton e Φ_γ o fator de impacto do fóton, calculável usando regras de Feynman da QED. Neste processo, a troca do Pomeron perturbativo, descrito pela equação BFKL, dada por $G(x, \mathbf{k}, \mathbf{k}')$ que representa a solução para o caso em que a constante de acoplamento é dinâmica.

Para calcular a função de estrutura F_2 , foi usada a seguinte equação bem estabelecida na

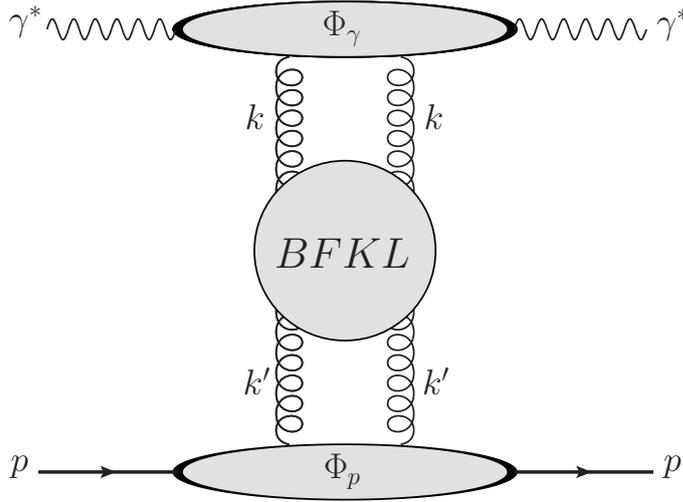


Figura 6.1 - Espalhamento fóton-próton ($\gamma^* p \rightarrow \gamma^* p$), nas quais Φ_γ e Φ_p são os fatores de impacto do fóton e próton, respectivamente. Tal processo é mediado pelo Pomeron através da equação BFKL que é representada por $G(x, \mathbf{k}, \mathbf{k}')$, onde k e k' são momenta transverso. Figura do autor.

literatura [6, 8]:

$$\begin{aligned}
 F_2(x, Q) &= \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{\mathbf{k}^2} \int \frac{d^2 \mathbf{k}'}{\mathbf{k}'^2} \Phi_\gamma(\mathbf{k}, Q) G(x, \mathbf{k}, \mathbf{k}') \Phi_p(\mathbf{k}', Q_0) \\
 &= \frac{Q^2 \alpha_s(Q^2)}{4\pi^2} \sum_q e_q^2 \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{\mathbf{k}^2} \mathcal{F}(x, \mathbf{k}) \int_0^1 dz \int_0^1 d\zeta \\
 &\quad \times \frac{1 - 2z(1-z) - 2\zeta(1-\zeta) + 12z(1-z)\zeta(1-\zeta)}{Q^2 z(1-z) + \mathbf{k}^2 \zeta(1-\zeta)}, \quad (6.1)
 \end{aligned}$$

onde Q representa a virtualidade do fóton, z é fração de momentum do fóton, ζ é um parâmetro de Feynman e e_q a carga dos quarks. A distribuição de glúon não integrada usada é definida em [21, 51] pela convolução do fator de impacto do próton Φ_p com a função do núcleo BFKL Equação (5.97)

$$\mathcal{F}(x, \mathbf{k}) = \int \frac{d\mathbf{k}'^2}{\mathbf{k}'^2} \Phi_p(\mathbf{k}', Q_0) \mathbf{k}^2 G(x, \mathbf{k}, \mathbf{k}'). \quad (6.2)$$

Como já conhecemos a estrutura da equação BFKL em termos de polos discretos, somos capazes de fazer um ajuste da função de estrutura F_2 teórica com dados experimentais, em relação aos parâmetros livres. Apesar de estarmos estudando em um regime de altas energias, o fato de que atualmente só conseguimos definir o fator de impacto do próton em termos de escala de pequeno momentum, traz a impossibilidade da sua elaboração via teoria de perturbação. Sua modelagem é determinada pelas propriedades de confinamento, portanto ele carrega informação não perturbativa da estrutura hadrônica. Iremos usar a

definição do fator de impacto do próton da forma [21],

$$\Phi_p(\mathbf{k}', Q_0) = \frac{C}{\pi\Gamma(\delta)} \left(\frac{\mathbf{k}'^2}{Q_0^2} \right)^\delta e^{-\frac{\mathbf{k}'^2}{Q_0^2}}, \quad (6.3)$$

onde $Q_0 = 0,28 \text{ GeV}$, $\delta = 6,5$ e $C = 2,35$.

Fixamos alguns parâmetros na Equação (5.91). No caso de $r_0 = \ln(\mathbf{k}_0^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)$ usamos o valor de $\mathbf{k}_0 = 1 \text{ GeV}$ [15] e $\Lambda_{\text{QCD}} = 210 \text{ MeV}$ [52, 53]. Vamos nos limitar aos quatro sabores mais leves de quarks [52, 53], logo $n_f = 4$, conseqüentemente o somatório sobre o quadrado de suas cargas será $\sum_q e_q^2 = 10/9$. Delimitamos o intervalo de fase de $-3\pi/4$ a $+\pi/4$ conforme [15] e restringimos o valor de Q^2 entre $3,5 \text{ GeV}^2$ a 45 GeV^2 . Esta escolha de virtualidade se deve ao fato de que Q^2 pequeno efeitos de saturação são mais evidentes e a Q^2 grande, contribuições colineares se tornam cada vez mais relevantes.

O ajuste da função de estrutura F_2 foi feito mediante utilização do Minuit que é um programa de minimização numérica produzida pelo CERN [54, 55], onde comparamos 58 pontos experimentais de $H1$ [56].

polos	x_o	η_{np}	w_1	w_2	w_3	w_4	χ^2/N_{df}
2	0,000035678	-1,24740	0,43193	0,21828			62,53099/56
3	0,000007515	-0,84075	0,38337	0,20515	0,14004		66,69527/56
4	0,000001745	-0,23821	0,32861	0,18835	0,13201	0,10161	122,9235/56

Tabela 6.1 - Resultado do ajuste de F_2 Equação (6.1). Aqui a primeira coluna é referente a quantidade de polos, a segunda a variável de Bjorken inicial, a terceira a fase não perturbativa, da quarta a sétima é o resultado do autovalor e por fim a última coluna descreve uma medida de divergência entre a distribuição dos dados e uma distribuição esperada pelo número de graus de liberdade.

Na Tabela (6.1) é exposto os resultados que obtiveram os melhores χ^2 , que foram para 2, 3 e 4 polos. Na Figura (6.2) e na Figura (6.3) apresentamos como se comportam as curvas do nosso ajuste, onde 2 polos é representado pela curva tracejada, 3 polos pela sólida e 4 polos pela pontilhada. Vale salientar, novamente, que o ajuste foi feito de Q^2 entre $3,5 \text{ GeV}^2$ a 45 GeV^2 , as demais faixas de Q^2 expostas nessas figuras mostram a extrapolação do modelo.

Uma vez fixado o valor dos ajustes para um observável com grande número de pontos experimentais, vamos aplicar o resultado em outro observável relacionado. Se considerarmos que $F_2 \sim x^{-\lambda_{eff}}$ a Q^2 fixo, então podemos dizer que $\lambda_{eff} = dF_2/d\ln(1/x)$. A Figura (6.4) nos mostra a taxa de crescimento de λ_{eff} em relação a Q^2 . A área sombreada representa a região onde $3,5 \text{ GeV} \leq Q \leq 45 \text{ GeV}$, que corresponde a faixa de energia pela qual foi realizado o ajuste. Podemos observar que os melhores valores de χ^2 que são

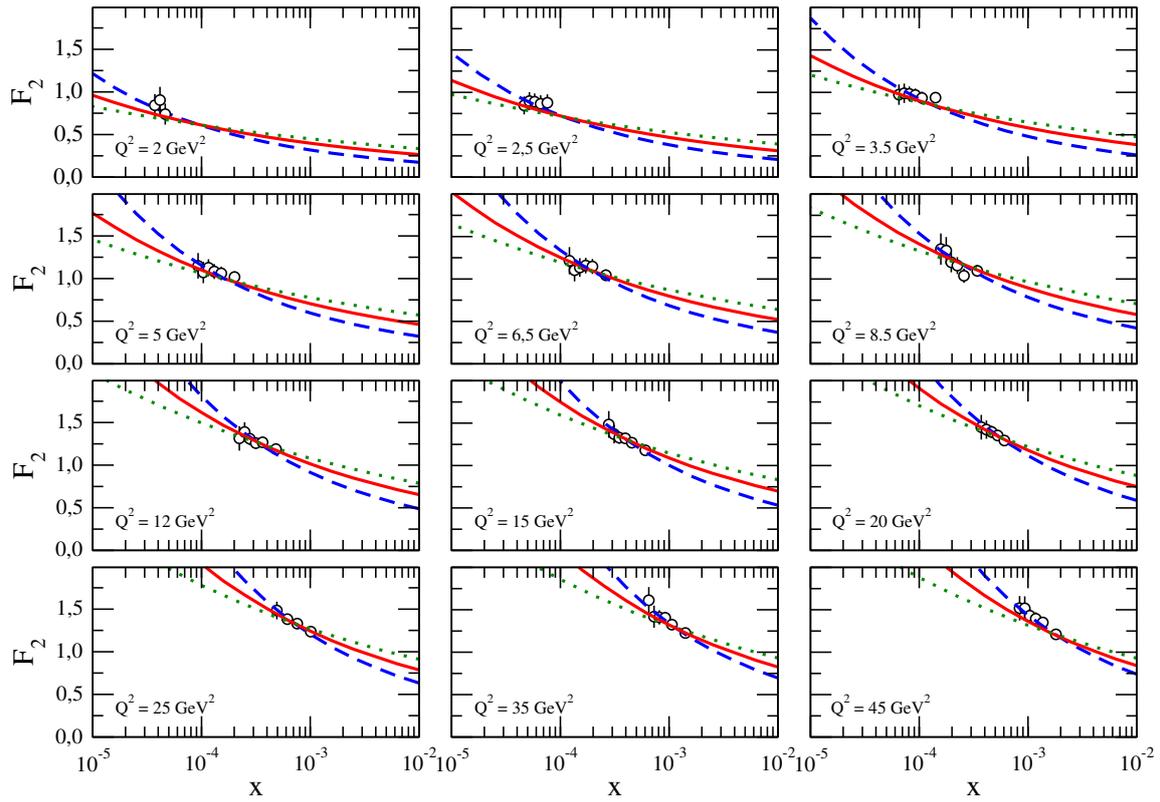


Figura 6.2 - Gráfico de F_2 versus x feito a partir dos dados obtidos da Tabela (6.1). A curva tracejada (azul) são 2 polos, sólida (vermelha) são 3 polos e pontilhada (verde) são 4 polos. Dados extraídos de [56].

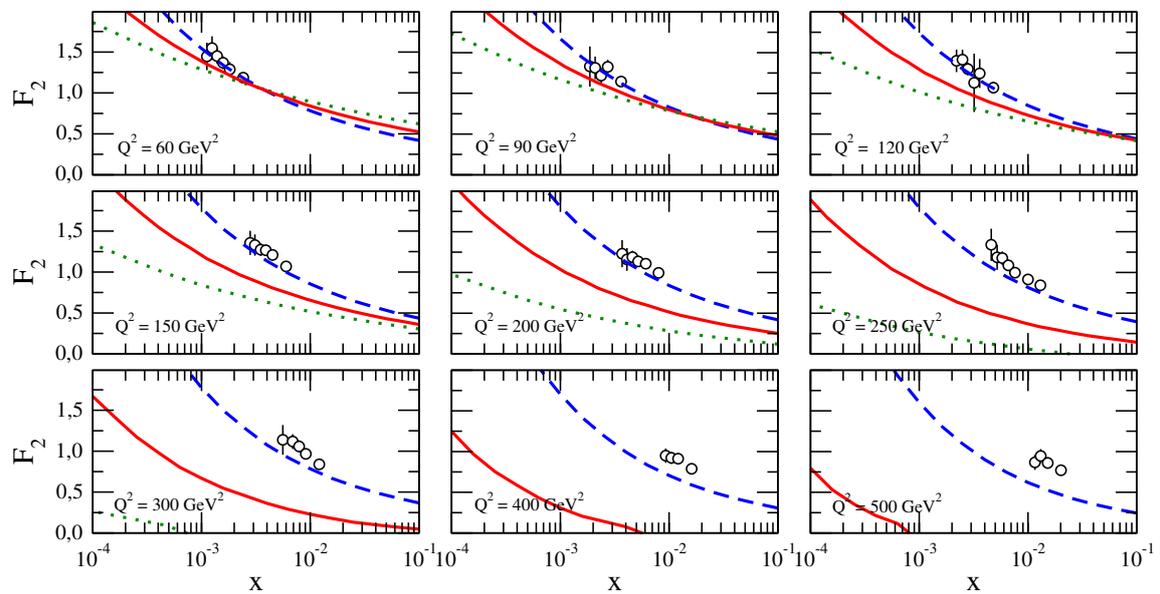


Figura 6.3 - Gráfico de F_2 versus x feito a partir dos dados obtidos da Tabela (6.1). A curva tracejada (azul) são 2 polos, sólida (vermelha) são 3 polos e pontilhada (verde) são 4 polos. Dados extraídos de [56].

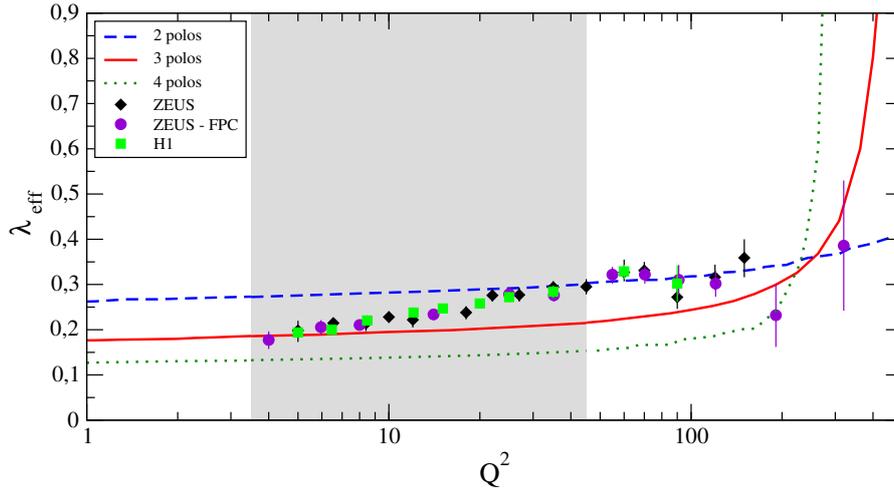


Figura 6.4 - Gráfico de λ_{eff} versus Q^2 . A curva tracejada (azul) são 2 polos, sólida (vermelha) são 3 polos e pontilhada (verde) são 4 polos. Dados extraídos de [57–59].

de 2 e 3 polos, também são os que melhor descrevem os resultados de λ_{eff} na faixa de energia pela qual foi feito o ajuste. É notório que a medida em que aumentamos n , ou seja, o número de polos o λ_{eff} diminui, sendo que para $n \geq 4$ eles não descrevem bem os resultados experimentais, mostrando que não necessitamos aumentar o número de polos $n > 4$ para que tenhamos melhores resultados de χ^2 com o ajuste de F_2 . Outra coisa que observamos é que quando $Q^2 > 200 \text{ GeV}$ para 3 e 4 polos a função tem um crescimento abrupto. Isto provavelmente é consequência da perda de normalização vista na Figura (6.3) quando extrapolamos o resultado do ajuste a valores grandes de Q^2 .

Obtivemos os melhores resultados com 2 e 3 polos para os observáveis até aqui analisados. Quantitativamente esses dois resultados foram muito semelhantes. Uma maneira de investigar qual deles é a melhor escolha para descrever o Pomeron seria aplicando para a produção de mésons vetoriais J/Ψ e Υ , pois em tais processos temos dados experimentais do LHC com maior energia do centro de massa, possibilitando analisar escalas de x muito pequenas, consequentemente analisar a restrição da dinâmica da QCD em altas energias.

6.2 Produção de quarks pesados

Nesta seção aplicaremos o formalismo da seção anterior para produção de quarks pesados, mais especificamente para produção do quark charm. A aplicação para produção do quark charm é possível, pois se trata de uma partícula massiva, permitindo a utilização das regras de Feynman. É importante salientar que apesar de termos incluído o quark charm para fazer o ajuste de F_2 , não incluímos sua massa como parâmetro livre, portanto devemos definir uma escala de massa dentro de seu limite de incerteza. Definimos o valor da massa do quark charm como sendo $m_c = 1,27 \text{ GeV}$ [60]. Calcularemos a função de estrutura do

quark charm mediante equação [61]

$$F_2^{c\bar{c}} = \frac{Q^2}{4\pi^2\alpha_{em}} \int_0^1 dz \int d^2R \{ |\Psi_T^{c\bar{c}}(z, R)|^2 + |\Psi_L^{c\bar{c}}(z, R)|^2 \} \sigma_{dp}(x, R). \quad (6.4)$$

As superposição das funções de onda transversal e longitudinal do fóton indo a um dipolo de cor são

$$|\Psi_T^{c\bar{c}}(z, R)|^2 = \frac{2\alpha_{em}}{3\pi^2} \{ [z^2 + (1-z^2)]\epsilon^2 K_1^2(\epsilon R) + m_c^2 K_0^2(\epsilon R) \}, \quad (6.5)$$

$$|\Psi_L^{c\bar{c}}(z, R)|^2 = \frac{8\alpha_{em}}{3\pi^2} 4Q^2 z^2 (1-z^2) K_0^2(\epsilon R),$$

onde K_0 e K_1 são funções de Bessel modificadas de segundo tipo, z fração de momentum do fóton e R é o tamanho do dipolo, $\epsilon^2 \equiv z(1-z)Q^2 + m_c^2$ e a quantidade

$$\sigma_{dp}(x, R) = \frac{4\pi}{N_c} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{\mathbf{k}^4} (1 - e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}})_{\alpha_s} \mathcal{F}(x, \mathbf{k}), \quad (6.6)$$

representa a seção de choque dipolo-próton em relação ao espaço do momentum. Note que a equação nos dá a possibilidade de termos o vínculo com a equação BFKL através da distribuição de glúon não integrada. Portanto para uma eventual aplicação basta usar a mesma distribuição de glúon não integrada utilizada para o cálculo de F_2 , Equação (6.2), com os devidos parâmetros fixados que se encontram na Tabela (6.1).

Por fim, utilizaremos na seção de choque de dipolo a seguinte expressão para a fração de momento

$$x_m = \left(1 + \frac{4m_c^2}{Q^2} \right) x. \quad (6.7)$$

Nosso resultado se encontra na Figura (6.5). Novamente extrapolamos a faixa de energia para valores $Q^2 > 45 \text{ GeV}^2$ para observar o comportamento das curvas em relação aos polos. Com isso observamos que para energia de 160 GeV^2 acontece a perda de normalização para 3 e 4 polos, conforme também pode ser observado esse comportamento em F_2 . Além disso, podemos observar que o número de polos é fortemente dependente de x para escalas muito pequenas e que no geral conseguimos descrever bem os dados experimentais para $F_2^{c\bar{c}}$ com o modelo baseado na equação BFKL em termos de polos discretos. Agora calcularemos a seção de choque reduzida que é descrita em termos da função de estrutura

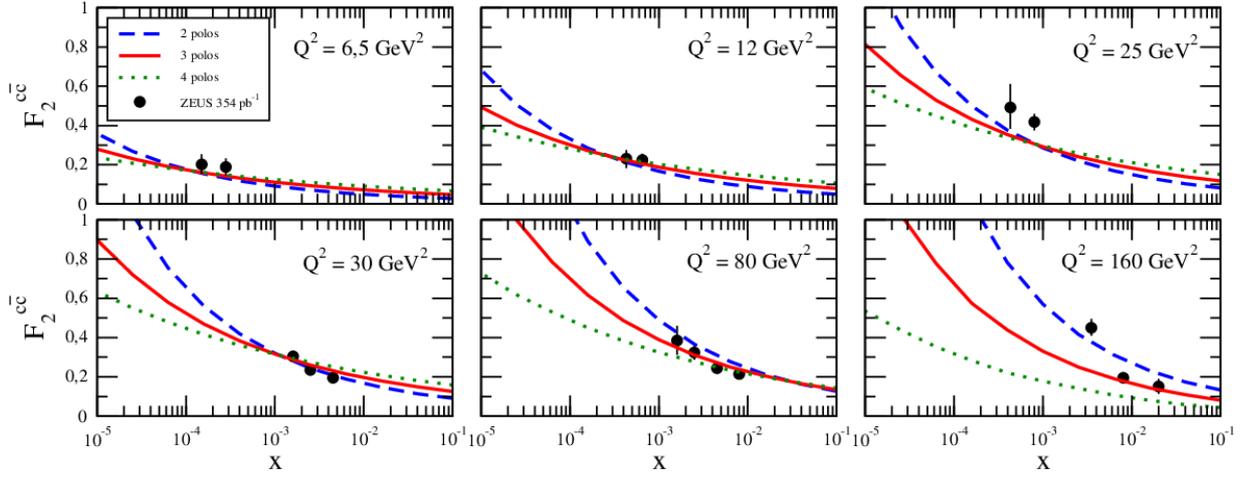


Figura 6.5 - Gráfico de $F_2^{c\bar{c}}$ versus x feito a partir dos dados obtidos da Tabela (6.1). A curva tracejada (azul) são 2 polos, sólida (vermelha) são 3 polos e pontilhada (verde) são 4 polos. Dados extraídos de [62].

do quark charm $F_2^{c\bar{c}}$ e a função de estrutura longitudinal do quark charm $F_L^{c\bar{c}}$

$$\sigma_r^{c\bar{c}}(x, Q^2, \bar{y}) = F_2^{c\bar{c}}(x, Q^2) - \frac{\bar{y}^2}{1 + (1 - \bar{y})^2} F_L^{c\bar{c}}(x, Q^2), \quad (6.8)$$

onde \bar{y} é a inelasticidade dada por $\bar{y} = Q^2/xs$. A quantidade \sqrt{s} é a energia do centro de massa do colisor, que no caso do HERA é de $\sqrt{s} = 318$ GeV [62,63]. Delimitamos o limite máximo de inelasticidade em $\bar{y} = 0,7$ conforme [63]. Note que a seção de choque reduzida é fortemente dependente do colisor devido a variável de inelasticidade.

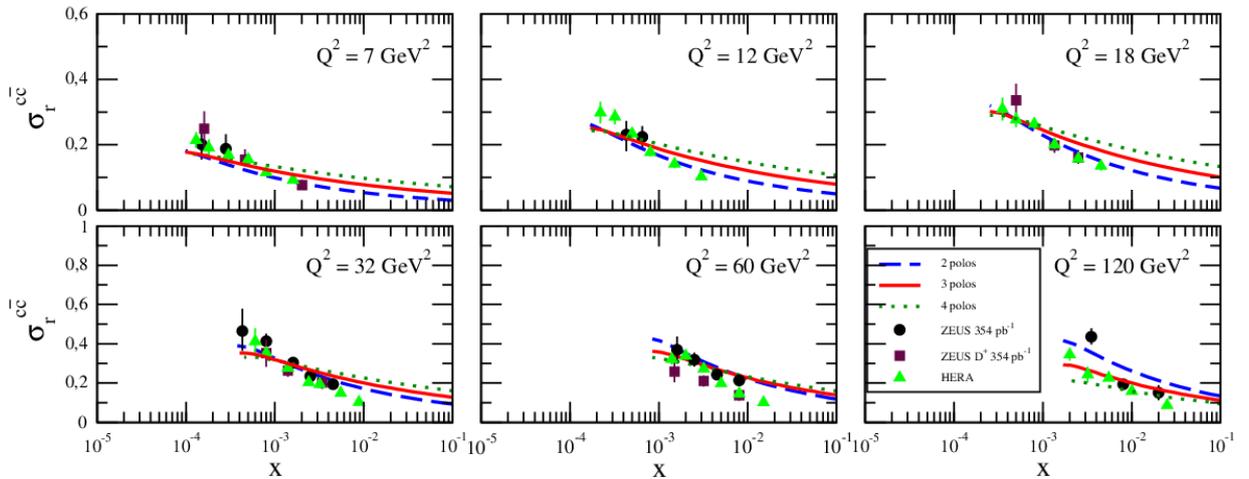


Figura 6.6 - Gráfico de $\sigma_r^{c\bar{c}}$ versus x feito a partir dos dados obtidos da Tabela (6.1). A curva tracejada (azul) são 2 polos, sólida (vermelha) são 3 polos e pontilhada (verde) são 4 polos. Dados extraídos de [62–64].

Nosso resultado para seção de choque reduzida se encontra na Figura (6.6). Observamos que para 2, 3 e 4 polos os resultados são melhores para escalas de x pequenas para cada respectivo Q^2 analisado. Além disso, em $Q^2 = 120 \text{ GeV}^2$ observamos que $\sigma_r^{c\bar{c}}$ perde normalização para 3 e 4 polos e que o resultado é fortemente dependente de x . Na próxima seção aplicaremos novamente o formalismo BFKL com polos discretos, agora para produção de mésons vetoriais, onde utilizaremos de novo a seção de choque de dipolo-próton para descrever o processo em questão.

6.3 Produção de mésons vetoriais J/Ψ e Υ

Uma vez obtido os parâmetros livres através do ajuste da função de estrutura F_2 , vamos aplicá-lo, de forma inédita, para outro processo em que a troca do Pomeron duro é relevante, por exemplo a produção de mésons vetoriais. É de conhecimento que os mésons [2] são partículas formadas pela união de um quark com um antiquark de cores opostas. Eles apresentam um curto período de vida e decaem em elétrons, neutrinos e fótons. Além de serem produzidos no HERA, os mésons podem ser produzidos no LHC. Nele as seções de choque para o processo $\gamma p \rightarrow Vp$, podem ser obtidas através de colisões ultraperiféricas, por exemplo do próton-próton (pp) e próton-chumbo (pPb). Estas colisões proporcionam a experimentação da distribuição de glúons no próton até uma escala de fração de momentum muito pequena do núcleon, atingindo valores $x > 4 \times 10^{-6}$ [65]. Temos que nesse regime de altas energias as massas dos mésons J/Ψ e Υ fornecem uma escala dura, permitindo a possibilidade de uma descrição dentro da QCD perturbativa.

Na QCD perturbativa utilizaremos o modelo de dipolos, onde o DIS é considerado como sendo uma interação de dipolos de cor [66]. O processo pelo qual investigaremos está ilustrado na Figura (6.7). Tal processo de espalhamento é considerado quase-elástico, pois o próton permanece intacto no seu estado final. Podemos descrevê-lo através de três etapas: flutuação do fóton em um par quark-antiquark, o par quark-antiquark interage com próton e por fim o par quark-antiquark se recombina gerando no estado final um méson vetorial. No modelo de dipolos o par de quark-antiquark possui um raio de tamanho \mathbf{R} , transportando uma fração de momentum z do fóton. Temos que a amplitude de espalhamento para o processo $\gamma^* p \rightarrow Vp$, integrada nessas variáveis é descrita por

$$\mathcal{A}_{T,L}^{\gamma^* p \rightarrow Vp}(x, Q, \Delta) = \int d^2 \mathbf{R} \int_0^1 \frac{dz}{4\pi} (\Psi_V^* \Psi)_{TL} \mathcal{A}_{q\bar{q}}(x, R, \Delta). \quad (6.9)$$

Note que amplitude de espalhamento usada neste trabalho [66] é diferente das convenções habituais [8, 67], pelo fator $1/4\pi$, que tem origem na normalização da função de onda do méson vetorial. Os índices T e L representam a polarização transversa e longitudinal do fóton virtual, respectivamente, $\mathcal{A}_{q\bar{q}}(x, R, \Delta)$ corresponde a amplitude elementar de um

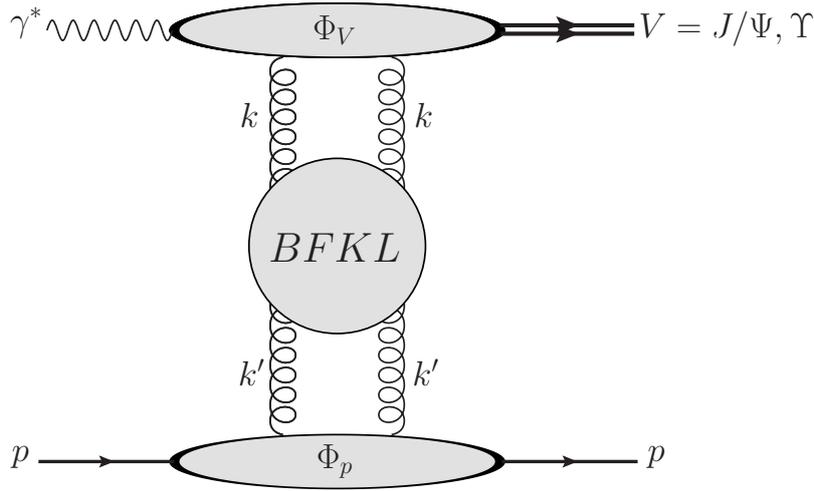


Figura 6.7 - Espalhamento fóton-próton ($\gamma^* p \rightarrow V p$), cujo estado final se encontra os mésons vetoriais J/Ψ ou Υ e o próton intacto. Temos que Φ_V e Φ_p são os fatores de impacto do méson vetorial e próton, respectivamente. Tal processo é mediado pelo Pomeron através da equação BFKL que é representada por $G(x, \mathbf{k}, \mathbf{k}')$, onde k e k' são momenta transversos. Figura do autor.

dipolo com tamanho R indo ao próton, $t = -\Delta^2$ é o momentum transversal perdido pelo próton emergente no estado final e $(\Psi_V^* \Psi)_{TL}$ denota a superposição das funções de ondas do fóton com o méson vetorial. Elas são representadas pelas relações [66]

$$(\Psi_V^* \Psi)_T(R) = e_f e \frac{N_c}{\pi z(1-z)} [m_f^2 K_0(\epsilon R) \varphi_T(R, z) - (z^2 + (1-z)^2) \epsilon K_1(\epsilon R) \partial_R \varphi_T(R, z)], \quad (6.10)$$

$$(\Psi_V^* \Psi)_L(R) = e_f e \frac{N_c}{\pi} 2Qz(1-z) K_0(\epsilon R) \left(M_V \varphi_L(R, z) + \delta \frac{m_f^2 - \nabla_R^2}{M_V z(1-z)} \varphi_L(R, z) \right), \quad (6.11)$$

onde $f = c, b$ denota os sabores dos quarks com carga e_f , referentes ao méson J/Ψ e Υ , respectivamente, $\epsilon^2 \equiv z(1-z)Q^2 + m_f^2$ e $K_0(\epsilon R)$ e $K_1(\epsilon R)$ são funções de Bessel modificadas de segundo tipo. Para a função de onda no estado fundamental (1S) $\varphi_{T,L}^{1s}(R, z)$, utilizamos o modelo Boosted Gaussian [68–70]

$$\varphi_{T,L}^{1s}(R, z) = \mathcal{N}_{T,L} z(1-z) \exp \left(-\frac{m_f^2 \mathcal{R}_{1s}^2}{8z(1-z)} - \frac{2z(1-z)R^2}{\mathcal{R}_{1s}^2} + \frac{m_f^2 \mathcal{R}_{1s}^2}{2} \right). \quad (6.12)$$

Veja que trabalharemos no limite de $Q \rightarrow 0$ (fóton quase real), portanto não teremos polarização longitudinal. Os valores dos parâmetros utilizados no modelo de Boosted Gaussian, Equações (6.12), se encontram na Tabela (6.2).

A amplitude de espalhamento para $q\bar{q}$, encontrada na Equação (6.9), pode ser expressa

Meson	m_f/GeV	\mathcal{N}_T	$\mathcal{R}^2/\text{GeV}^{-2}$	M_V/GeV	e_f
J/Ψ	$m_c = 1,27$	0,596	2,45	3,097	2/3
Υ	$m_b = 4,2$	0,481	0,57	9,460	1/3

Tabela 6.2 - Tabela com parâmetros do modelo Boosted Gaussian de J/Ψ e Υ . Dados extraídos de [60, 67].

por

$$\mathcal{A}_{q\bar{q}}(x, R, \Delta) = \int d^2\mathbf{b} e^{-i\mathbf{b}\cdot\Delta} \mathcal{A}_{q\bar{q}}(x, R, b). \quad (6.13)$$

Substituindo a Equação (6.13) na Equação (6.9), obtemos

$$\mathcal{A}_T^{\gamma^* p \rightarrow Vp}(x, \Delta) = \int d^2\mathbf{R} \int d^2\mathbf{b} \int_0^1 \frac{dz}{4\pi} (\Psi_V^* \Psi)_T e^{-i\mathbf{b}\cdot\Delta} \mathcal{A}_{q\bar{q}}(x, R, b). \quad (6.14)$$

Se considerarmos as correções não frontais da função de onda [66], devemos multiplicar a Equação (6.14) por $e^{i(1-z)\mathbf{R}\Delta}$, assim ficamos com

$$\mathcal{A}_T^{\gamma^* p \rightarrow Vp}(x, \Delta) = \int d^2\mathbf{R} \int d^2\mathbf{b} \int_0^1 \frac{dz}{4\pi} (\Psi_V^* \Psi)_T e^{-i[\mathbf{b} - (1-z)\mathbf{R}]\cdot\Delta} \mathcal{A}_{q\bar{q}}(x, R, b). \quad (6.15)$$

A amplitude de espalhamento pode ser expressa em termos da matriz-S por $\mathcal{A}_{q\bar{q}}(x, R, b) = 2i[1 - S(x, R, b)]$, portanto podemos escrever que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_T^{\gamma^* p \rightarrow Vp}(x, \Delta) &= i \int d^2\mathbf{R} \int d^2\mathbf{b} \int_0^1 \frac{dz}{4\pi} (\Psi_V^* \Psi)_T e^{-i[\mathbf{b} - (1-z)\mathbf{R}]\cdot\Delta} 2[1 - S(x, R, b)] \\ &= 2i \int d^2\mathbf{R} \int d^2\mathbf{b} \int_0^1 \frac{dz}{4\pi} (\Psi_V^* \Psi)_T e^{-i[\mathbf{b} - (1-z)\mathbf{R}]\cdot\Delta} \mathcal{N}(x, R, b). \end{aligned} \quad (6.16)$$

A quantidade $\mathcal{N}(x, R, b)$ representa a amplitude de espalhamento do dipolo-núcleon, na qual contém a informação do espalhamento em um determinado parâmetro de impacto \mathbf{b} . Temos que a seção de choque de dipolos contém toda a informação sobre o alvo. No caso de $\Delta = 0$ a dependência do integrando em relação ao parâmetro de impacto fica exclusivamente vinculada a seção de choque de dipolo-próton dada por

$$\sigma_{dp}(x, R) = 2 \int d^2\mathbf{b} \mathcal{N}(x, R, b). \quad (6.17)$$

Portanto, podemos escrever a parte imaginária da amplitude de espalhamento da Equação (6.16) da forma

$$\text{Im} \mathcal{A}_T^{\gamma^* p \rightarrow Vp}(x, 0) = \int d^2\mathbf{R} \int_0^1 \frac{dz}{4\pi} (\Psi_V^* \Psi)_T \sigma_{dp}(x, R). \quad (6.18)$$

Pelo fato deste trabalho estar focado no cálculo de observáveis em relação ao espaço dos momenta, queremos uma expressão da seção de choque de dipolo em termos da densidade do glúon não integrada [71], usaremos em substituição a Equação (6.17), a seguinte relação de seção de choque dipolo-próton

$$\sigma_{dp}(x,R) = \frac{4\pi}{N_c} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{\mathbf{k}^4} (1 - e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}) \alpha_s \mathcal{F}(x,\mathbf{k}). \quad (6.19)$$

Escolhemos a quantidade Q'^2 como sendo nossa escolha de escala, que entra no limite superior de integração em relação ao quadrado do momentum transversal da Equação (6.19). Na literatura é encontrado as seguintes convenções $Q'^2 \sim Q^2 + M_V^2/4$ e $Q'^2 \sim Q^2 + M_V^2$ [21]. Como $Q^2 = 0$, a nossa escala vai ser representada pelas duas quantidades $M_V^2/4$ e M_V^2 . Note que a Equação (6.19) nos dá o vínculo com a equação BFKL com polos discretos, através da distribuição de glúon não integrada, a mesma utilizada em F_2 , pela qual fixamos os parâmetros livres. Portanto somos capazes de usar o mesmo formalismo aplicando os parâmetros fixados que se encontram na Tabela (6.1).

Algumas correções podem ser feitas para a amplitude de espalhamento como a correção da parte real. Essa correção ocorre por que a matriz-S foi considerada puramente real, conseqüentemente a amplitude de espalhamento será puramente imaginária. A priori precisamos saber como escrever a parte real da amplitude de espalhamento; podemos fazer isso mediante as seguintes relações de dispersão

$$\frac{\text{Re}\mathcal{A}(x,\Delta)}{\text{Im}\mathcal{A}(x,\Delta)} = \tan \frac{\lambda\pi}{2}, \quad \lambda \equiv \frac{d\ln\text{Im}\mathcal{A}(x,\Delta)}{d\ln(1/x)}. \quad (6.20)$$

Além da correção da parte real, temos que o par $q\bar{q}$ podem apresentar diferentes frações de momentum do próton x e x' , levando a mais uma correção que chamamos de torção dada por [72]

$$R_g(\lambda) = \frac{2^{2\lambda+3} \Gamma(\lambda + 5/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\lambda + 4)}. \quad (6.21)$$

Conseqüentemente, juntando todas as correções, Equações (6.21) e (6.20), teremos

$$\mathcal{A}_T^{\gamma^*p \rightarrow Vp}(x,0) = \int d^2\mathbf{R} \int_0^1 \frac{dz}{4\pi} \left(i + \tan \frac{\lambda\pi}{2} \right) (\Psi_V^* \Psi)_T \sigma_{dp}(x,R) R_g. \quad (6.22)$$

Usaremos um modelo que relaciona a seção de choque total com a seção de choque diferencial a zero momentum transferido, assumindo que a integração em t suficientemente pequeno é da forma $\sigma \sim e^{-B_D(W)t}$, onde B_D é um parâmetro de inclinação [73, 74]. A ligação da amplitude de espalhamento com a seção de choque diferencial a zero momen-

tum transferido, pode ser escrita por

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\sigma}{dt}(\gamma p \rightarrow Vp) \right|_{\Delta=0} &= \frac{1}{16\pi} |\mathcal{A}_T^{\gamma p \rightarrow Vp}(x, 0)|^2 \\ &= \frac{1}{16\pi} \left| \int d^2\mathbf{R} \int_0^1 \frac{dz}{4\pi} \left(i + \tan \frac{\lambda\pi}{2} \right) (\Psi_V^* \Psi)_{T\sigma_{dp}}(x, R) R_g \right|^2 \end{aligned} \quad (6.23)$$

Por fim, a seção de choque total devido a fotoprodução de méson vetorial é dada por

$$\sigma^{\gamma p \rightarrow Vp}(W) = \frac{1}{B_D(W)} \left. \frac{d\sigma}{dt}(\gamma p \rightarrow Vp) \right|_{\Delta=0} \quad x = \frac{M_V^2}{W^2}, \quad (6.24)$$

sendo que

$$B_D(W) = b_0 + 4\alpha' \ln \frac{W}{W_0}. \quad (6.25)$$

Os parâmetros da equação acima são $\alpha' = 0,06 \text{ GeV}^{-2}$ e $W_0 = 90 \text{ GeV}$. Para o méson J/Ψ temos que $b_0 = 4,9 \text{ GeV}^{-2}$ e para Υ temos que $b_0 = 4,63 \text{ GeV}^{-2}$ [73, 74].

Como a distribuição de glúon não integrada já foi devidamente ajustada através de F_2 , aplicaremos o mesmo ajuste na obtenção dos resultados referentes a mésons vetoriais. Como foi feito em [21], ajustamos uma normalização que chamamos de fator de normalização NO aos resultados para a produção do J/Ψ e Υ . A Tabela (6.3) e Tabela (6.4) mostra os resultados dos fatores NO com seus respectivos χ^2 para 2, 3 e 4 polos. Representamos as curvas sólidas das Figuras (6.8 - 6.10) como $M_V^2/4$ e as tracejadas como M_V^2 . Ajustamos uma constante de normalização aos dados experimentais para a produção do J/Ψ [65, 75–84] e Υ [83, 85–88] e obtivemos resultado satisfatório de χ^2/N_{df} para 3 polos com a escolha de escala $M_V^2/4$ como pode ser visto na Tabela (6.3) e na Tabela (6.4). Em outra análise focada na utilização de uma sequência de polos para descrever o Pomeron também se obteve o melhor resultado com 3 polos [89], evidenciando que nosso resultado está concordando com o que se encontra na literatura. Se considerarmos como solução somente os melhores χ^2 , obtidos através de F_2 que são de 2 e 3 polos, podemos observar na Figura (6.8) que nossas curvas não descrevem bem os resultados para LHCb (2018), ou seja, não descrevem muito bem para grandes energias do centro de massa, evidenciando que talvez podemos ter alguma contribuição proveniente dos efeitos de saturação. Nosso estudo da produção de mésons vetoriais utilizando o formalismo BFKL com polos discretos nos rendeu uma publicação [23]. Daremos início nas próximas seções a aplicação para outros processos e faremos nossas previsões para futuros aceleradores de partículas.

Polos	Q'^2	NO	χ^2/N_{df}
2	$M_V^2/4$	0,9887	2627,295/98
2	M_V^2	0,4492	2959,066/98
3	$M_V^2/4$	1,9246	262,6539/98
3	M_V^2	1,1274	365,2832/98
4	$M_V^2/4$	1,8180	731,8597/98
4	M_V^2	1,2348	610,5878/98

Tabela 6.3 - Ajuste da normalização para a produção do méson J/Ψ . Na primeira coluna se encontra o número de polos, na segunda coluna a escala escolhida, na terceira coluna a constante de normalização ajustada aos dados experimentais e na quarta coluna a quantidade estatística que descreve uma medida de divergência entre a distribuição dos dados e uma distribuição esperada pelo número de graus de liberdade.

Polos	Q'^2	NO	χ^2/N_{df}
2	$M_V^2/4$	0,9306	14,3556/10
2	M_V^2	0,7619	17,6874/10
3	$M_V^2/4$	1,9353	2,6033/10
3	M_V^2	2,4542	4,2685/10
4	$M_V^2/4$	4,4003	7,0079/10
4	M_V^2	2,2296	4,6888/10

Tabela 6.4 - Ajuste da normalização para a produção do méson Υ . Na primeira coluna se encontra o número de polos, na segunda coluna a escala escolhida, na terceira coluna a constante de normalização ajustada aos dados experimentais e na quarta coluna a quantidade estatística que descreve uma medida de divergência entre a distribuição dos dados e uma distribuição esperada pelo número de graus de liberdade.

6.4 Produção de dois fótons em altas energias

Nesta seção calcularemos a seção de choque para os processos fóton virtual - fóton virtual ($\gamma^*\gamma^*$) e fóton real - fóton real ($\gamma\gamma$) e a função de estrutura para um fóton real (F_2^γ). Os resultados aqui apresentados foram publicados em forma de um artigo em [22]. Conforme foi feito para produção de mésons vetoriais e a produção do quark charm, utilizaremos novamente nosso resultado do ajuste de F_2 do processo γ^*p , cuja a intenção é testar sua universalidade e fazer previsões para o Colisor Linear Internacional (*International Linear Collider*, ILC) [90] ou para o Futuro Colisor Circular (*Future Circular Collider*, FCC) [91]. Temos que o cálculo do espalhamento de dois fótons tem uma vantagem em relação aos outros, pois ambos fatores de impacto do fóton são calculáveis via QED/QCD, ao contrário dos outros que tinham incertezas quanto a parte não-perturbativa do próton (confinamento) e a função de onda dos mésons. A priori colocamos a definição da seção de choque de dois fótons virtuais que interagem via dois dipolos coloridos, na qual os

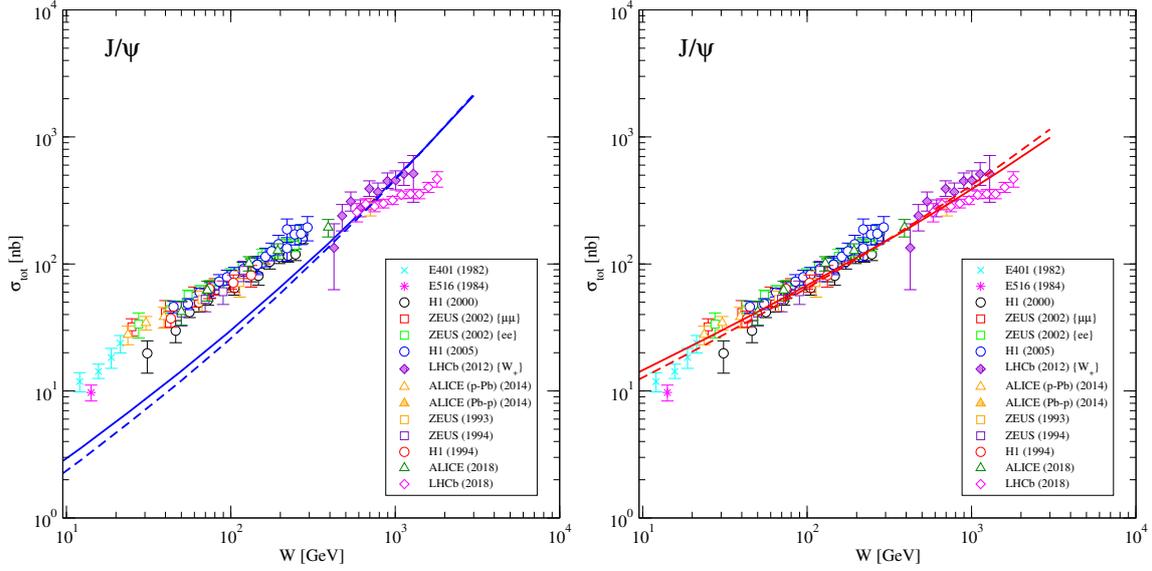


Figura 6.8 - A Figura da esquerda está relacionada ao ajuste de J/Ψ , onde a curva sólida (azul) é referente a escala $M_V^2/4$ e a tracejada (azul) é referente a escala M_V^2 , ambas para 2 polos. Já a Figura à direita também está relacionada ao ajuste de J/Ψ , onde a curva sólida (vermelha) é referente a escala $M_V^2/4$ e a tracejada (vermelha) é referente a escala M_V^2 , ambas para 3 polos.

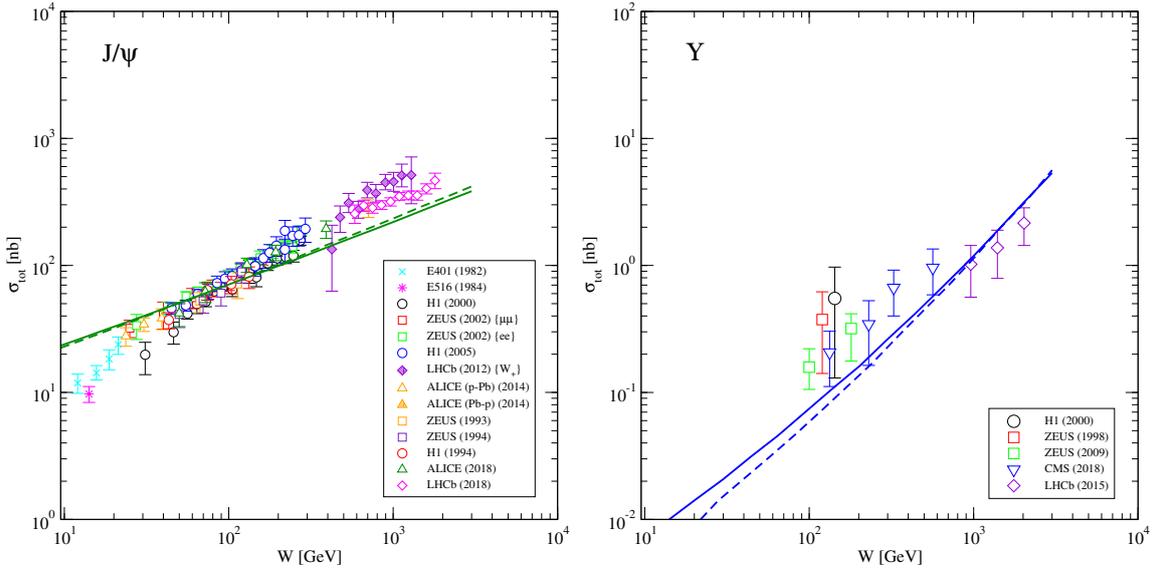


Figura 6.9 - A Figura da esquerda está relacionada ao ajuste de J/Ψ , onde a curva sólida (verde) é referente a escala $M_V^2/4$ e a tracejada (verde) é referente a escala M_V^2 , ambas para 4 polos. Já a Figura à direita está relacionada ao ajuste de Υ , onde a curva sólida (azul) é referente a escala $M_V^2/4$ e a tracejada (azul) é referente a escala M_V^2 , ambas para 2 polos.

fótons virtuais flutuam. Com esta mesma definição podemos generalizar para os casos de produção de $\gamma\gamma$ e F_2^γ .

O processo de espalhamento mostrado na Figura (6.11) descreve que um fóton virtual proveniente de uma fonte carregada (elétron, hádron) flutua em um par quark-antiquark, o par quark-antiquark interage com o outro fóton e por fim o par quark-antiquark se

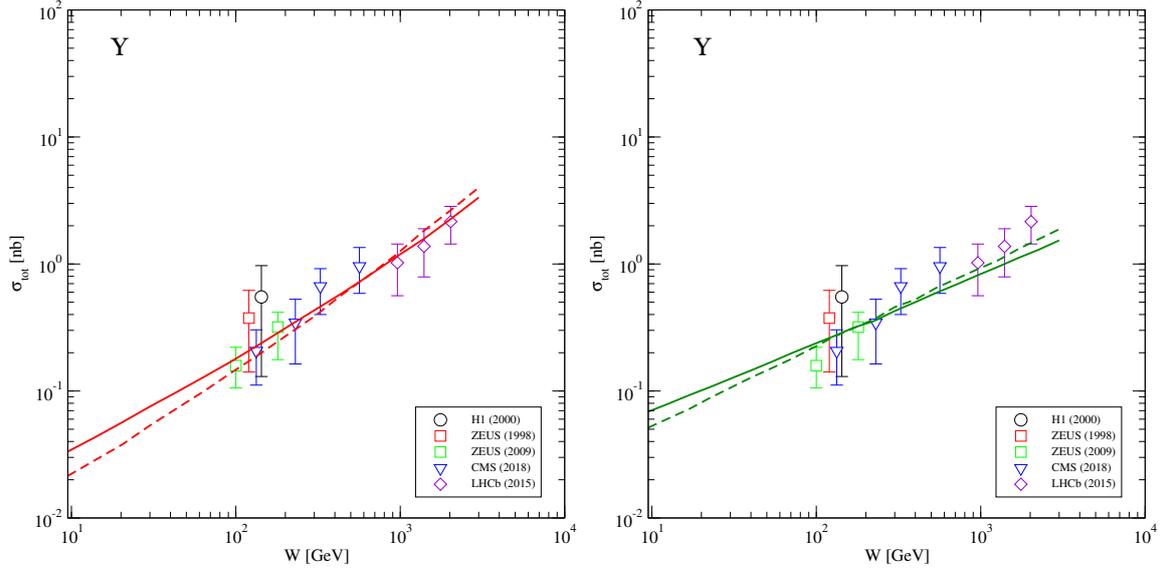


Figura 6.10 - A Figura da esquerda está relacionada ao ajuste de Υ , onde a curva sólida (vermelha) é referente a escala $M_V^2/4$ e a tracejada (vermelha) é referente a escala M_V^2 , ambas para 3 polos. Já a Figura à direita também está relacionada ao ajuste de Υ , onde a curva sólida (verde) é referente a escala $M_V^2/4$ e a tracejada (verde) é referente a escala M_V^2 , ambas para 4 polos.

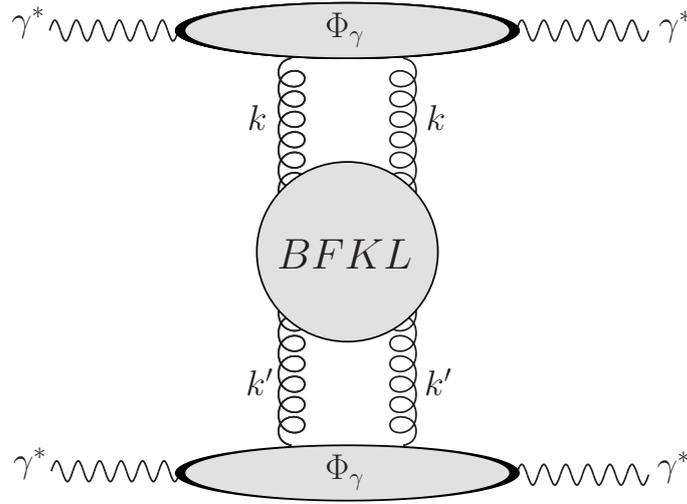


Figura 6.11 - Espalhamento fóton-fóton ($\gamma^*\gamma^* \rightarrow \gamma^*\gamma^*$), na qual Φ_γ representa o fator de impacto do fóton. Tal processo é mediado pelo Pomeron através da equação BFKL que é representada por $G(x, \mathbf{k}, \mathbf{k}')$, onde k e k' são momenta transverso. Figura do autor.

recombina gerando no estado final um fóton virtual. A seção de choque para tal processo pode ser expressa por [8]

$$\sigma_{\gamma^*\gamma^*} = \frac{N_c^2 - 1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2} \int \frac{d^2\mathbf{k}'}{\mathbf{k}'^2} \Phi_\gamma(\mathbf{k}) \Phi_\gamma(\mathbf{k}') G(x, \mathbf{k}, \mathbf{k}'). \quad (6.26)$$

Como pode ser visto em [92–95] a seção de choque Equação (6.26), onde temos somente

troca de graus de liberdade gluônicos pode ser escrita em termos da seção de choque de dipolo, conforme

$$\sigma_{ij}^G(W^2, Q_1^2, Q_2^2) = \sum_{a,b=1}^{n_f} \int_0^1 dz_1 \int d^2\mathbf{R}_1 |\psi_i^a(z_1, \mathbf{R}_1)|^2 \times \int_0^1 dz_2 \int d^2\mathbf{R}_2 |\psi_j^b(z_2, \mathbf{R}_2)|^2 \sigma_{dd}(x_{ab}, R_1, R_2), \quad (6.27)$$

onde Q_1^2 e Q_2^2 são as virtualidades dos fótons, z_1 e z_2 são a frações de momentum longitudinais dos quarks indo aos fótons, R_1 e R_2 são a separação dos pares q e \bar{q} , W é a energia do centro de massa, x_{ab} é a variável de Bjorken, σ_{dd} é a seção de choque de dipolo-dipolo, os estados de polarização do fóton i e j podem ser transversal (T) ou longitudinal (L), os sabores dos quarks $a, b = u, d, s, c$. A função de onda do fóton é dada em termos da sua decomposição em relação aos sabores dos quarks, ou seja,

$$|\psi_{T,L}(z, \mathbf{R})|^2 = \sum_f |\psi_{T,L}^f(z, \mathbf{R})|^2, \quad (6.28)$$

onde os sabores dos quarks podem ser $f = a, b$. A superposição das funções de onda do fóton transversal e longitudinal são, respectivamente,

$$|\psi_T^f(z, \mathbf{R})|^2 = \frac{6\alpha_{em}}{4\pi^2} \sum_f e_f^2 \{ [z^2 + (1-z)^2] \epsilon_f^2 K_1^2(\epsilon_f R) + m_f^2 K_0^2(\epsilon_f R) \} \quad (6.29)$$

e

$$|\psi_L^f(z, \mathbf{R})|^2 = \frac{6\alpha_{em}}{4\pi^2} \sum_f e_f^2 4Q^2 z^2 (1-z)^2 K_0^2(\epsilon_f R), \quad (6.30)$$

com

$$\epsilon_f^2 = z(1-z)Q^2 + m_f^2. \quad (6.31)$$

Aqui K_0 e K_1 são funções de Bessel modificadas de segundo tipo, e_f é a carga dos quarks e m_f é a massa dos quarks. Note que quando aplicamos a Equação (6.29) e Equação (6.30) na Equação (6.27), temos que $R = R_1, R_2$ e $z = z_1, z_2$.

A seção de choque de dipolo Equação (6.19) deve sofrer algumas modificação a fim de que seja possível sua aplicação na Equação (6.27). Seguimos a proposta definida em [95], onde a variável de Bjorken é substituída pela expressão

$$x_{ab} = \frac{Q_1^2 + Q_2^2 + 4m_a^2 + 4m_b^2}{W^2 + Q_1^2 + Q_2^2} \quad (6.32)$$

e o tamanho de dipolo é definido em termos de um tamanho de dipolo efetivo, dado por

$$R_{eff} = \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2}. \quad (6.33)$$

Usamos a definição de R_{eff} do modelo 1 de [95]. Essa escolha ocorre devido a boa descrição dos dados experimentais com a utilização do modelo Golec-Biernat e Wüsthoff (GBW) [96] para o caso do espalhamento de dois fótons [95]. Uma característica importante é que a utilização desta parametrização nos leva a transparência de cor, quer dizer que, quando $R_1 \rightarrow 0$ e $R_2 \rightarrow 0$, temos $\sigma_{dd}(x_{ab}, R_1, R_2) \rightarrow 0$.

As seções de choque de dipolo são formuladas no regime de altas energias, no entanto para grande valores da variável de Bjorken há a necessidade de correção do limiar, levando-a a ser multiplicada pelo fator $(1 - x_{ab})^5$. Aparentemente esta correção não vai surtir muito efeito no nosso resultado, pois estamos analisando escalas de x muito pequenas. Ela começa a se tornar importante quando sondamos valores de x grande. Por fim e não menos importante, a seção de choque de dipolo precisa ser multiplicada pela razão de $2/3$. Essa medida é fundamentada na regra de contagem de quarks, ou seja, é a razão do número de quarks constituintes em um fóton pelo número de quarks constituintes do próton. Portanto, podemos escrever que a seção de dipolo-dipolo em termos da seção de choque dipolo-próton, através da relação

$$\sigma_{dd}(x_{ab}, R_1, R_2) = \frac{2}{3} \sigma_{dp}(x_{ab}, R_{eff}). \quad (6.34)$$

Calcularemos a seção de choque do processo $\gamma^* \gamma^* \rightarrow \gamma^* \gamma^*$, utilizando a solução da equação BFKL com constante de acoplamento dinâmica Equação (5.97). Neste processo usamos a variável rapidez da forma $y = \ln(W^2/Q_1 Q_2)$. Consideramos as massas dos quarks leves como $m_u = m_d = m_s = 0,14 \text{ GeV}$ e a massa do quark charm $m_c = 1,27 \text{ GeV}$. Visto que estamos analisando a seção de choque onde no estado inicial e final temos dois fótons virtuais a seção de choque fica

$$\sigma_{\gamma^* \gamma^*} = \sigma_{\gamma^* \gamma^*}^G = \sigma_{T,T}^G + \sigma_{T,L}^G + \sigma_{L,T}^G + \sigma_{L,L}^G. \quad (6.35)$$

A Figura (6.12) mostra nosso resultado de $\sigma_{\gamma^* \gamma^*}$, onde consideramos dados experimentais $y \geq 5$. Note que aqui só calculamos a contribuição da parte gluônica. Outras contribuições da seção de choque total que decrescem com a energia, como a do diagrama caixa QPM (Quark Parton Model) [97] e a parte reggeônica [94], que corresponde a um fenômeno não perturbativo relacionado às trajetórias de Regge dos mésons leves, não foram acrescentadas, pois em nosso resultado investigamos uma região cinemática onde elas não são tão significativas. Além disso, escolhemos como escala na integração em momentum transversal

na seção de choque de dipolo Equação (6.19) a média da soma do quadrado da energia de cada fóton virtual, ou seja, $Q'^2 = (Q_1^2 + Q_2^2)/2$.

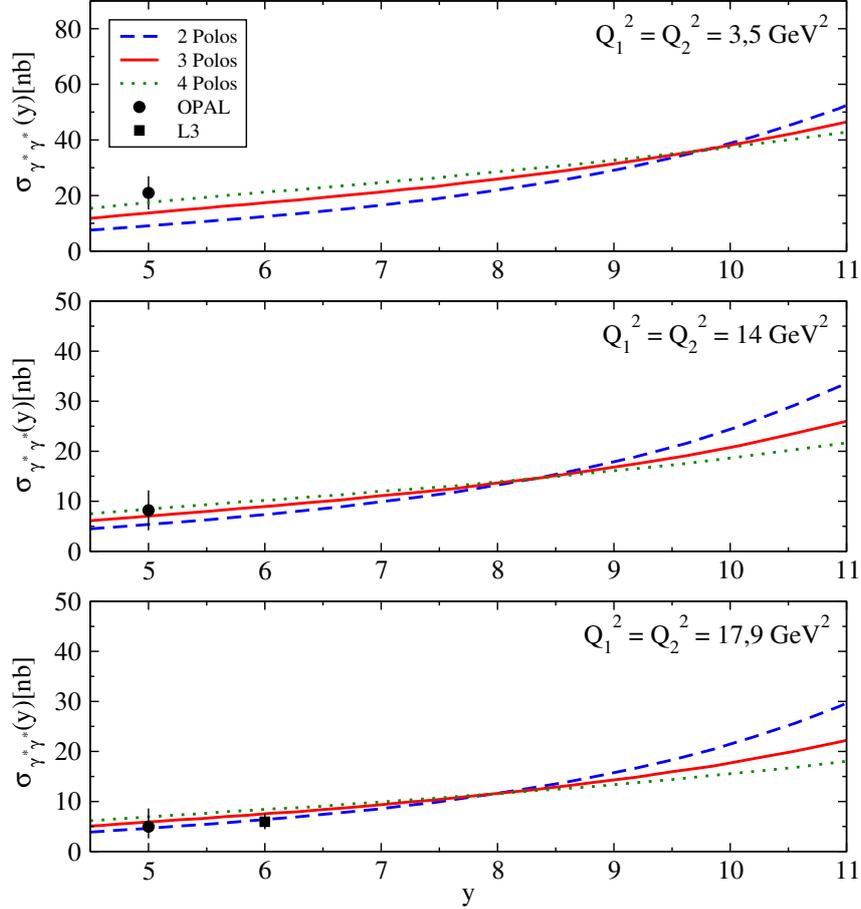


Figura 6.12 - Seção de choque $\sigma_{\gamma^*\gamma^*}$ versus rapidez y . A curva tracejada (azul) são 2 polos, sólida (vermelha) são 3 polos e pontilhada (verde) são 4 polos. Dados extraídos de [98, 99].

Agora calcularemos a função de estrutura F_2^γ . No caso da medição da função de estrutura do próton a energia da partícula alvo é conhecida. O que não acontece no caso da função de estrutura do fóton, fazendo com que a cinemática do processo dependa da medição do estado final hadrônico. Porém, ele é parcialmente observado no detector, acarretando que a obtenção de dados experimentais de F_2^γ fique vinculada a modelagem do estado final hadrônico via método Monte Carlo.

Em nossos cálculos escolhemos que $Q_1^2 = Q^2$ e $Q_2^2 = 0$. Essa convenção nos indica que temos um fóton fora da camada de massa com virtualidades Q e outro dentro da camada de massa sem virtualidade. Portanto, podemos definir a função de estrutura do fóton real

da seguinte maneira:

$$F_2^\gamma = \frac{Q^2}{4\pi^2\alpha_{em}} [\sigma_{T,T}^G(W^2, Q^2, Q_2^2 = 0) + \sigma_{T,L}^G(W^2, Q^2, Q_2^2 = 0)]. \quad (6.36)$$

Com $x = Q^2/(W^2 + Q^2)$. Nosso resultado se encontra na Figura (6.13), com escolha de escala $Q'^2 = Q^2$. Consideramos valores experimentais da variável de Bjorken com $x \leq 10^{-2}$. Apesar de descrever bem os dados no intervalo de $x \approx 10^{-2} - 10^{-3}$ é observável que em F_2^γ/α_{em} o número de polos é fortemente dependente de x quando analisamos escalas $x < 10^{-4}$ como pode ser visto na Figura (6.13).

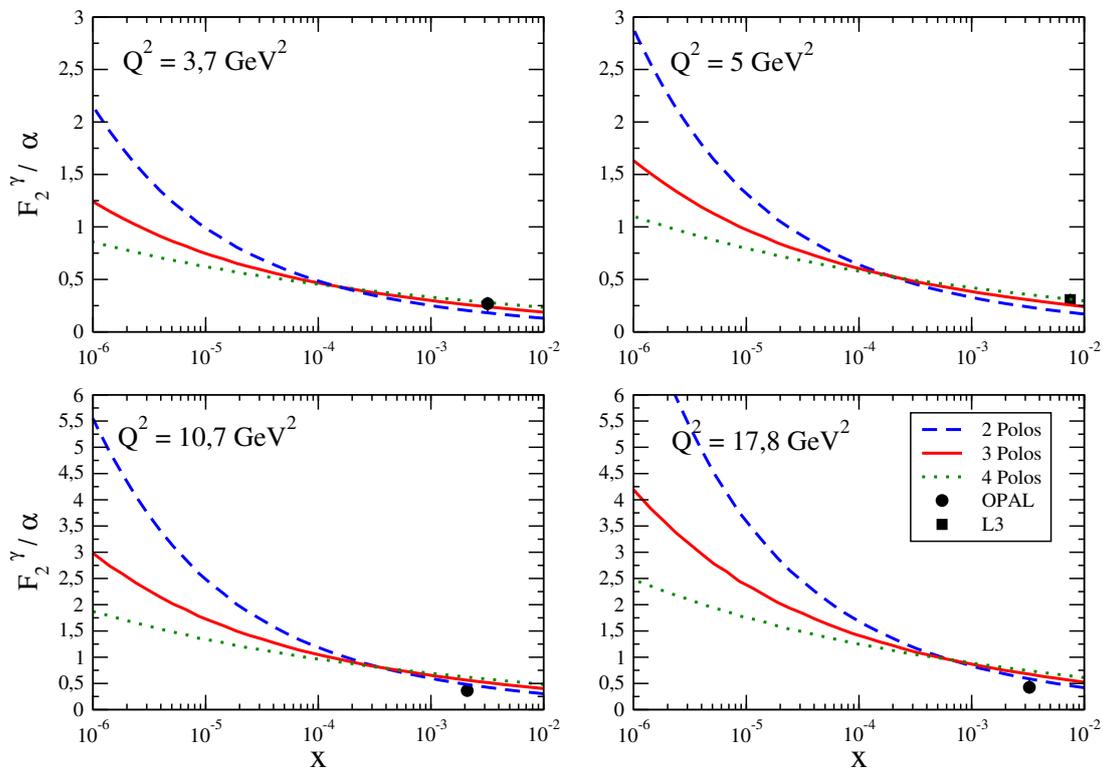


Figura 6.13 - Função de estrutura do fóton real F_2^γ/α versus x . A curva tracejada (azul) são 2 polos, sólida (vermelha) são 3 polos e pontilhada (verde) são 4 polos. Dados extraídos de [100, 101].

Podemos também calcular $\sigma_{\gamma\gamma}$. Para obter a seção de choque da parte gluônica devemos impor na Equação (6.27) que $Q_1^2 = 0$ e $Q_2^2 = 0$. Isso seria a mesma coisa que considerarmos na Figura (6.11) ao invés de fótons virtuais somente fótons reais. Portanto impondo esta condição, temos que

$$\sigma_{\gamma\gamma} = \sigma_{T,T}^G. \quad (6.37)$$

Adotamos como escala a soma do quadrado das massas dos quark up, down, strange e charm, totalizando $Q'^2 = 1,6717 \text{ GeV}^2$. As nossas predições se encontram na Figura (6.14). Consideramos os dados experimentais com $W > 50 \text{ GeV}$. Em geral, esse tipo de processo nos leva a muita incerteza em relação aos pontos experimentais. Aparentemente um dos motivos é que são obtidos a partir de experimentos com virtualidades diferentes de zero e necessitam do método de Monte Carlo através dos geradores de eventos Phojet [102] e Pythia [103] para obterem resultados da seção de choque total fóton real - fóton real ($\gamma\gamma$). Vale ressaltar que existe uma certa inconsistência no que diz respeito aos resultados do Pythia em relação ao Phojet para grande W . Uma alternativa talvez seria tomar a média desses resultados.

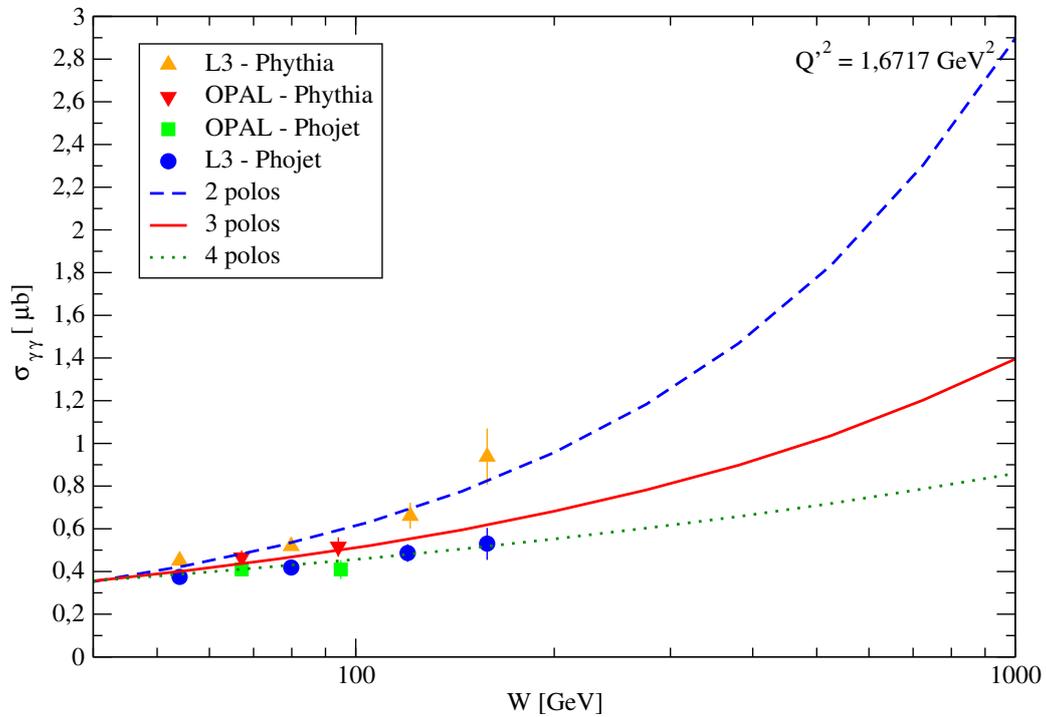


Figura 6.14 - Seção de choque $\sigma_{\gamma\gamma}$ versus energia do centro de massa W . A curva tracejada (azul) são 2 polos, sólida (vermelha) são 3 polos e pontilhada (verde) são 4 polos. Dados extraídos de [104, 105].

Os resultados obtidos para F_2^γ e seção de choque $\gamma^*\gamma^*$ são promissores na região de $x \approx 10^2 - 10^3$ e rapidez $y \approx 5 - 6$, respectivamente. Uma análise mais detalhada a respeito de qual resultado em relação ao número de polos que melhor descreve a troca do Pomeron nesses processos necessitam de mais dados experimentais. Deixamos aqui nossa contribuição fazendo predições para o ILC ou FCC, diminuindo os valores de x até 10^{-6} para F_2^γ e estendendo os valores de y para seção de choque $\gamma^*\gamma^*$ até 11. A respeito da seção de choque $\gamma\gamma$ para os dados experimentais obtidos de Phojet 2 polos

descrevem bem os resultados, em contrapartida para os dados experimentais obtidos de Pythia 4 polos descrevem bem os resultados, mas se levarmos em conta a curva que melhor minimiza a diferença em relação aos resultados que retornam esses dois geradores de eventos, certamente é a curva que é obtida com 3 polos. Podemos observar também que para menores valores de energia do centro de massa, temos que as previsões são semelhantes, mas essa diferença aumenta com a energia. Além disso, estendemos a energia do centro de massa W para uma futura análise com os dados experimentais do ILC ou FCC. Esta análise é importante para restringir a dinâmica da QCD em altas energias.

6.5 Conclusão

Até agora grande parte do trabalho esteve dedicado à descrição das soluções da equação BFKL. Este capítulo está focado em sua aplicação. Determinamos o ajuste da equação BFKL através de pontos experimentais de F_2 , fixando assim a condição inicial de Bjorken x_0 e a fase não perturbativa η_{np} para 2, 3 e 4 polos, e em geral temos um ajuste muito bom aos dados disponíveis. Aplicamos nosso resultado para a produção do quark charm, onde calculamos sua função de estrutura e o sigma reduzido. Além disso, utilizamos o formalismo para produção de mésons vetoriais, onde reajustamos uma constante de normalização aos dados experimentais de J/Ψ e Υ e obtivemos como melhor resultado a escolha da troca do Pomeron através de 3 polos. Aplicamos também nosso resultado para produção de dois fótons em altas energias, onde calculamos as seções de choque de $\gamma^*\gamma^*$ e $\gamma\gamma$ e a função de estrutura F_2^γ , comparamos com dados do LEP e fizemos previsões para futuros aceleradores de partículas.

7 CONCLUSÃO

Esta tese tem como tema central o estudo da equação BFKL com acoplamento dinâmico. Embora este tema seja o foco do trabalho, iniciamos a tese implementando uma revisão de conceitos básicos que estão relacionados a Cromodinâmica Quântica e ao espalhamento. Além disso, fizemos um resumo da teoria de Regge para mostrar o carácter não perturbativo do Pomeron. Foi apresentado o cálculo da solução da equação BFKL com acoplamento fixo, na qual é obtido como solução um corte no plano complexo do momentum angular. A seguir exploramos várias abordagens a respeito da solução da equação BFKL com constante de acoplamento dinâmico, cuja solução característica destas abordagens é a sequência infinita de polos no plano complexo do momentum angular. Definimos qual delas será fonte de aplicação em processos difrativos e a partir disto fizemos um ajuste da função de estrutura F_2 do processo fóton-próton ($\gamma^*p \rightarrow \gamma^*p$), onde obtivemos a condição inicial de variável de Bjorken x_0 e nosso vínculo com as propriedades infravermelhas que é a fase η_{np} . Uma vez que fixados os parâmetros livres de F_2 , definimos um λ_{eff} que é equivalente a solução do plano complexo do momentum angular, e comparamos o nosso resultado a dados experimentais em relação a evolução em Q^2 . Obtivemos como melhores resultados 2 e 3 polos na região de $3,5 \leq Q^2 \leq 45$. Paralelamente esses também foram os melhores χ^2/N_{df} do ajuste da função de estrutura F_2 . Além disso, estendemos a aplicação a outros processos cujo a troca do Pomeron seja relevante. Um deles é a produção do quark charm, onde calculamos a função de estrutura $F_2^{c\bar{c}}$ e a seção de choque reduzida $\sigma_r^{c\bar{c}}$ e obtivemos resultados pertinentes dentro da região cinemática que foi feito o ajuste de F_2 . Outro processo é a produção de mésons vetoriais J/Ψ e Υ , na qual reajustamos uma normalização aos dados experimentais e obtivemos como melhor solução a troca do Pomeron através de 3 polos, além disso podemos observar que este resultado com 3 polos não descreve bem os pontos experimentais do LHCb (2018) para grandes energias de centro de massa e isso acaba dando margem a interpretação de que outras correções devem ser levadas em conta como por exemplo efeitos de saturação. Por fim, aplicamos nosso resultado também para o processo de troca de dois fótons no cálculo da seção de choque fóton virtual - fóton virtual ($\gamma^*\gamma^*$), fóton real - fóton real ($\gamma\gamma$) e função de estrutura do fóton real (F_2^γ), onde só consideramos a troca de graus de liberdade gluônicos, obviamente dentro de uma cinemática onde eles são dominantes. Nossa abordagem se restringe a análise de poucos dados experimentais. Embora sejam poucos pontos nosso resultado consegue descrevê-los de forma satisfatória os dados do LEP. Estendemos a solução para os processos de produção de dois fótons para cinemáticas além do que nossos dados experimentais atuais podem descrever. Dependemos de resultados de novos aceleradores para análises mais profundas a respeito da restrição da dinâmica da QCD em altas energias. Embora todos os cálculos expostos neste trabalho sejam em LO, também há a possibilidade

de uma aplicação em próxima ordem dominante (*Next to Leading Order, NLO*). Outra possibilidade de trabalho, seria utilizar a solução da equação BFKL com acoplamento dinâmico em LO para o caso da troca de momentum transferido diferente de zero ($t \neq 0$). Uma aplicação viável também seria a utilização do nosso resultado para a produção de jatos Mueller-Navelet.

A MÉTODOS MATEMÁTICOS

A.1 Método do ponto de sela

O método do ponto de sela [106] é um artifício matemático que utiliza uma extensão do método de Laplace com o propósito de fazer aproximação de uma integral no plano complexo. A idéia é deformar o contorno no plano complexo para poder passar perto do ponto estacionário. Vamos considerar a seguinte integral

$$I(N) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} g(z)e^{Nf(z)} dz, \quad (\text{A.1})$$

onde $f(z)$ é uma função complexa. No caso desta integral, temos que considerar grande N , pois é onde se acentuam as propriedades extremas. É possível fazer uma aproximação da Equação (A.1), de forma que ficamos com

$$I(N) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(z)e^{Nf(z)} dz. \quad (\text{A.2})$$

O ponto estacionário satisfaz a relação

$$\frac{df(z)}{dz} = 0. \quad (\text{A.3})$$

Se z_0 é onde a Equação A.3 é satisfeita, a expansão em seu entorno nos dá que

$$f(z) \approx f(z_0) + \frac{1}{2}f''(z_0)(z - z_0)^2, \quad g(z) \approx g(z_0). \quad (\text{A.4})$$

Substituindo (A.4) em (A.2), chegamos a uma generalização do método, que se restringe ao cálculo de uma integral gaussiana, dada por:

$$I(N) \approx \frac{g(z_0)e^{Nf(z_0)}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}Nf''(z_0)(z-z_0)^2} dz. \quad (\text{A.5})$$

A.2 Expansão da função $\chi(\gamma)$ em série de Taylor para $\gamma = 1/2$.

A expansão em série de Taylor de $\psi(\gamma)$ e $\psi(1 - \gamma)$ em $\gamma = 1/2$, resulta em

$$\psi(\gamma) = \psi^{(0)}\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\gamma - \frac{1}{2}\right) \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)^2 \psi^{(2)}\left(\frac{1}{2}\right) + \dots \quad (\text{A.6})$$

e

$$\psi(1 - \gamma) = \psi^{(0)}\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\gamma - \frac{1}{2}\right) \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)^2 \psi^{(2)}\left(\frac{1}{2}\right) + \dots \quad (\text{A.7})$$

A função $\psi(\gamma)$ é equivalente a $\psi^{(0)}(\gamma)$ para γ iguais. Então, para o caso de $\gamma = 1/2$, obtemos que

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) \equiv \psi^{(0)}\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \ln(2) + \psi(1). \quad (\text{A.8})$$

Além disso, precisamos de uma fórmula que generalize a função ψ em termos de suas derivadas com a função zeta de Riemann. Para nosso contexto ela é representada por [107]

$$\psi^n\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^{n+1} n! (2^{n+1} - 1) \zeta(n + 1). \quad (\text{A.9})$$

Finalmente, se usarmos as Equações (A.6), (A.7), (A.8) e (A.9) na Equação (4.180), chegamos ao resultado da Equação (4.197).

A.3 Integrais angulares

Colocamos aqui algumas integrais úteis para o cálculo da equação BFKL que são “facilmente” calculáveis através do teorema dos resíduos. Definimos as seguintes integrais [27]:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(\mathbf{k}^2 - \boldsymbol{\kappa}^2)^2} = \frac{2\pi}{|k^2 - \kappa^2|}, \quad (\text{A.10})$$

onde ϕ é o ângulo que se encontra entre \mathbf{k} e $\boldsymbol{\kappa}$.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\boldsymbol{\kappa}^2 + (\boldsymbol{\kappa} - \mathbf{k})^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{4\kappa^4 + k^4}}. \quad (\text{A.11})$$

A.4 Transformada de Mellin

Nesta seção de apêndice colocaremos a definição da transformada de Mellin e sua inversa. Primeiramente empregamos a definição da transformada de Mellin que é

$$\tilde{f}(x) = \int_1^\infty d\left(\frac{y}{y_0}\right) \left(\frac{y}{y_0}\right)^{-x-1} f(y), \quad (\text{A.12})$$

onde y_0 é uma escala introduzida com a finalidade de regularizar a dimensão.

A inversa de (A.12) é dada por

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} dx \left(\frac{y}{y_0}\right)^x \tilde{f}(x). \quad (\text{A.13})$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] THOMSON, M. **Modern Particle Physics**. New York: Cambridge University Press, 2013. ISBN 9781107034266. 19, 24, 40, 41, 71
- [2] GRIFFITHS, J. **Introduction to Elementary Particle Physics**. [S.l.]: Wiley VCH, 2008. 19, 104
- [3] SNYDER, S. Higgs boson search at ATLAS. In: **Proceedings, PLHC2012: Physics at the LHC 2012 (PLHC2012): Vancouver, BC, Canada, June 4-9, 2012**. [S.l.: s.n.], 2012. 19
- [4] WANG, H. Discovery of the Higgs boson by the ATLAS and CMS experiments at the LHC. **Science China Physics Mechanics Astronomy.**, v. 57, n. 10, p. 1822–1834, 2014. 19
- [5] DONNACHIE, S.; DOSCH, G.; LANDSHOFF, P. V.; NACHTMANN, O. **Pomeron Physics and QCD**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2002. 13, 19, 33, 37
- [6] FORSHAW, J. R.; ROSS, D. A. **Quantum Chromodynamics and the Pomeron**. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 19, 20, 33, 34, 35, 36, 39, 44, 57, 58, 67, 79, 90, 91, 95, 98
- [7] DONNACHIE, A.; LANDSHOFF, P. Total cross-sections. **Physics Letters B**, v. 296, p. 227–232, 1992. 13, 19, 35, 36, 37
- [8] BARONE, V.; PREDAZZI, E. **High-Energy Particle Diffraction**. Berlin: Springer-Verlag, 2002. 13, 19, 25, 27, 28, 30, 31, 33, 34, 35, 39, 40, 41, 42, 43, 47, 50, 54, 57, 66, 71, 72, 98, 104, 111
- [9] THORNE, R. S. NLO BFKL equation, running coupling and renormalization scales. **Physical Review D**, v. 60, p. 054031, 1999. 20
- [10] LEVIN, E. Renormalons at low x . **Nuclear Physics B**, v. 453, p. 303–333, 1995. 17, 20, 79, 81, 84
- [11] HAAKMAN, L.; KANCHELI, O.; KOCH, J. The BFKL pomeron with running coupling constant: How much of its hard nature survives? **Nuclear Physics B**, v. 518, p. 275–302, 1998. 14, 20, 72, 79, 85, 87, 89
- [12] LEVIN, E. The BFKL high-energy asymptotics in the next-to-leading approximation. **Nuclear Physics B**, v. 545, p. 481–504, 1999. 20, 79

- [13] LIPATOV, L. The Bare Pomeron in Quantum Chromodynamics. **Soviet Physics Journal of Experimental and Theoretical Physics**, v. 63, p. 904–912, 1986. 20, 65, 79, 95
- [14] KOWALSKI, H.; LIPATOV, L.; ROSS, D. BFKL Evolution as a Communicator Between Small and Large Energy Scales. **Physics of Particles and Nuclei**, v. 44, p. 547–567, 2013. 20, 79
- [15] KOWALSKI, H.; LIPATOV, L. N.; ROSS, D. A.; SCHULZ, O. Decoupling of the leading contribution in the discrete BFKL Analysis of High-Precision HERA Data. **The European Physical Journal C**, v. 77, n. 11, p. 777, 2017. 20, 79, 99
- [16] KOWALSKI, H.; LIPATOV, L.; ROSS, D. The Green Function for the BFKL Pomeron and the Transition to DGLAP Evolution. **The European Physical Journal C**, v. 74, n. 6, p. 2919, 2014. 20, 79, 93, 95
- [17] ROSS, D. A.; SABIO VERA, A. The Effect of the Infrared Phase of the Discrete BFKL Pomeron on Transverse Momentum Diffusion. **Journal of High Energy Physics**, v. 08, p. 071, 2016. 20
- [18] _____. The Effect of a Rapidity Gap Veto on the Discrete BFKL Pomeron. **Physics Letters B**, v. 760, p. 428–431, 2016. 20
- [19] KOWALSKI, H.; LIPATOV, L. N.; ROSS, D. A. The Behaviour of the Green Function for the BFKL Pomeron with Running Coupling. **The European Physical Journal C**, v. 76, n. 1, p. 23, 2016. 20
- [20] _____. The Green function for the discrete BFKL pomeron. **AIP Conference Proceedings**, v. 1654, p. 070005, 2015. 20
- [21] BAUTISTA, I.; FERNANDEZ TELLEZ, A.; HENTSCHINSKI, M. BFKL evolution and the growth with energy of exclusive J/ψ and Υ photoproduction cross sections. **Physical Review D**, v. 94, n. 5, p. 054002, 2016. 20, 98, 99, 107, 108
- [22] GONÇALVES, V. P.; KRUMREICH, C. E.; SAUTER, W. K. Discrete BFKL approach for photon-photon interactions at high energies. **International Journal of Modern Physics A**, v. 35, n. 7, p. 2050047, 2020. 21, 109
- [23] _____. Exclusive vector meson photoproduction at high energies using the discrete BFKL approach. **International Journal of Modern Physics A**, v. 35, n. 10, p. 2050057, 2020. 21, 108

- [24] GAILLARD, M. K.; GRANNIS, P. D.; SCIULLI, F. J. The Standard model of particle physics. **Reviews of Modern Physics**, v. 71, p. 96, 1999. 23
- [25] HALZEN, F.; MARTIN, A. D. **Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics**. [S.l.: s.n.], 1984. ISBN 0471887412, 9780471887416. 23, 28, 30, 31
- [26] GREINER, W.; SCHÄFER, A. **Quantum chromodynamics**. New York: Springer-Verlag, 1994. 24, 27
- [27] KOVCHEGOV, Y. V.; LEVIN, E. **Quantum Chromodynamics at High Energy**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2012. ISBN 9780521112574, 9780521112574, 9781139557689. 28, 39, 122
- [28] PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. **An Introduction to quantum field theory**. Reading, USA: Addison-Wesley, 1995. ISBN 9780201503975, 0201503972. 24
- [29] FADDEEV, L. D.; POPOV, V. N. Feynman Diagrams for the Yang-Mills Field. **Physics Letters B**, v. 25, p. 29–30, 1967. 25
- [30] ANSELMINO, M.; CARUSO, F.; MAHON, J. R.; OGURI, V. **Introdução a QCD Perturbativa**. Rio de Janeiro: LTC, 2013. 27
- [31] BERINGER, J. et al. Review of Particle Physics (RPP). **Physical Review**, D86, p. 010001, 2012. 13, 28
- [32] BAHIA, C. A. S.; BROILO, M.; LUNA, E. G. S. Regge Phenomenology at LHC Energies. **International Journal of Modern Physics: Conference Series.**, v. 45, p. 1760064, 2017. 33
- [33] KASHEVAROV, V. L.; TIATOR, L.; OSTRICK, M. η and η' photoproduction with η MAID including Regge phenomenology. p. 1–5, 2017. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/1801.02196v1>. 33
- [34] EDEN, R. J.; LANDSHOFF, P. V.; OLIVE, D. I.; POLKINGHORNE, J. C. **The Analytic S-Matrix**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2002. 33
- [35] COVOLAN, R. J. M.; MONTANHA, J.; GOULIANOS, K. A. A New determination of the soft pomeron intercept. **Physics Letters B**, v. 389, p. 176–180, 1996. 36
- [36] CUDELL, J. R.; KANG, K.; KIM, S. K. Simple pole fits to pp and $\bar{p}p$ total cross-sections and real parts. **Physics Letters B**, v. 395, p. 311–331, 1997. 36

- [37] MUELLER, A. H. Unitarity and the BFKL pomeron. **Nuclear Physics B**, v. 437, p. 107–126, 1995. 36
- [38] MUELLER, A. H.; SALAM, G. Large multiplicity fluctuations and saturation effects in onium collisions. **Nuclear Physics B**, v. 475, p. 293–320, 1996. 36
- [39] SALAM, G. Studies of unitarity at small x using the dipole formulation. **Nuclear Physics B**, v. 461, p. 512–538, 1996. 36
- [40] ABATZIS, S. et al. Observation of a narrow scalar meson at 1450-MeV in the reaction $pp \rightarrow p(f)(\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-)p(s)$ at 450-GeV/c using the CERN Omega Spectrometer. **Physics Letters B**, v. 324, p. 509–514, 1994. 13, 38
- [41] LOW, F. A Model of the Bare Pomeron. **Physical Review D**, v. 12, p. 163–173, 1975. 39
- [42] NUSSINOV, S. Colored Quark Version of Some Hadronic Puzzles. **Physical Review Letters**, v. 34, p. 1286–1289, 1975. 39
- [43] OLIVEIRA, E. C.; RODRIGUES JR., W. A. **Funções Analíticas Com Aplicações**. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006. 222 p. 63, 71
- [44] ALTARELLI, G.; PARISI, G. Asymptotic Freedom in Parton Language. **Nuclear Physics B**, v. 126, p. 298, 1977. 68
- [45] GRIBOV, V.; LIPATOV, L. Deep inelastic ep scattering in perturbation theory. **Soviet Journal of Nuclear Physics**, v. 15, p. 438–450, 1972. 68
- [46] DOKSHITZER, Y. Calculation of the Structure Functions for Deep inelastic scattering and e^+e^- Annihilation by Perturbation Theory in Quantum chromodynamics. **Soviet Physics Journal of Experimental and Theoretical Physics**, v. 46, p. 641–653, 1977. 68
- [47] GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK'S, I. M. **Tables of Integrals, Series, and Products**. 5. ed. San Diego: Academic Press, 1979. 69, 71, 73
- [48] HANCOCK, R.; ROSS, D. Regge trajectories from the Lipatov equation. **Nuclear Physics B**, v. 394, p. 200–220, 1993. 79
- [49] _____. Solving the modified Lipatov equation. **Nuclear Physics B**, v. 383, p. 575–606, 1992. 79
- [50] LEVIN, E. An Introduction to pomerons. In: **Proceedings, LAFEX International School, Workshop on Diffractive Physics, Rio de Janeiro, Brazil**. [S.l.: s.n.], 1998. p. 261–336. 14, 85

- [51] CHACHAMIS, G.; DEÁK, M.; HENTSCHINSKI, M.; RODRIGO, G.; SABIO VERA, A. Single bottom quark production in k_t -factorisation. **Journal of High Energy Physics**, v. 09, p. 123, 2015. 98
- [52] HENTSCHINSKI, M.; SABIO VERA, A.; SALAS, C. The hard to soft Pomeron transition in small x DIS data using optimal renormalization. **Physical Review Letters**, v. 110, p. 041601, 2013. 99
- [53] _____. Description of F_2 and F_L at small x using a collinearly improved BFKL resummation. **Physical Review D**, v. 87, p. 076005, 2013. 99
- [54] JAMES, F.; ROOS, M. Minuit: A System for Function Minimization and Analysis of the Parameter Errors and Correlations. **Computer Physics Communications**, v. 10, p. 343–367, 1975. 99
- [55] JAMES, F. MINUIT Function Minimization and Error Analysis: Reference Manual Version 94.1. **CERN Program Library entry D506**, 1994. 99
- [56] ANDREEV, V. et al. Measurement of inclusive ep cross sections at high Q^2 at $\sqrt{s} = 225$ and 252 GeV and of the longitudinal proton structure function F_L at HERA. **The European Physical Journal C**, v. 74, n. 4, p. 2814, 2014. 14, 99, 100
- [57] BREITWEG, J. et al. Measurement of the proton structure function F_2 at very low Q^2 at HERA. **Physics Letters B**, v. 487, p. 53–73, 2000. 14, 101
- [58] ADLOFF, C. et al. Deep inelastic inclusive $e p$ scattering at low x and a determination of $\alpha(s)$. **The European Physical Journal C**, v. 21, p. 33–61, 2001. 14, 101
- [59] CHEKANOV, S. et al. Measurement of the neutral current cross-section and F_2 structure function for deep inelastic e^+p scattering at HERA. **The European Physical Journal C**, v. 21, p. 443–471, 2001. 14, 101
- [60] ARMESTO, N.; REZAEIAN, A. H. Exclusive vector meson production at high energies and gluon saturation. **Physical Review D**, v. 90, p. 054003, 2014. 17, 101, 106
- [61] NIKOLAEV, N. N.; ZOLLER, V. R. How open charm production probes the rightmost hard BFKL pole exchange. **Physical Letters B**, v. 509, p. 283–293, 2001. 102
- [62] ABRAMOWICZ, H. et al. Measurement of beauty and charm production in deep inelastic scattering at HERA and measurement of the beauty-quark mass. **Journal of High Energy Physics**, v. 09, p. 127, 2014. 14, 103

- [63] ABT, I. et al. Measurement of D^\pm production in deep inelastic ep scattering with the ZEUS detector at HERA. **Journal of High Energy Physics**, v. 05, p. 023, 2013. 14, 103
- [64] ABRAMOWICZ, H. et al. Combination and QCD Analysis of Charm Production Cross Section Measurements in Deep-Inelastic ep Scattering at HERA. **The European Physical Journal C**, v. 73, n. 2, p. 2311, 2013. 14, 103
- [65] ACHARYA, S. et al. Energy dependence of exclusive J/ψ photoproduction off protons in ultra-peripheral pPb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ TeV. **The European Physical Journal C**, v. 79, n. 5, p. 402, 2019. 104, 108
- [66] KOWALSKI, H.; MOTYKA, L.; WATT, G. Exclusive diffractive processes at HERA within the dipole picture. **Physical Review D**, v. 74, p. 074016, 2006. 104, 105, 106
- [67] GONÇALVES, V. P.; MOREIRA, B. D.; NAVARRA, F. S. Exclusive Υ photoproduction in hadronic collisions at CERN LHC energies. **Physics Letters B**, v. 742, p. 172–177, jan. 2015. 17, 104, 106
- [68] BRODSKY, S. J.; HUANG, T.; LEPAGE, G. P. The Hadronic Wave Function in Quantum Chromodynamics. In: . [s.n.], 1980. Disponível em: <http://www-public.slac.stanford.edu/sciDoc/docMeta.aspx?slacPubNumber=SLAC-PUB-2540>. 105
- [69] COX, B.; FORSHAW, J.; SANDAPEN, R. Diffractive upsilon production at the LHC. **Journal of High Energy Physics**, v. 0906, p. 034, 2009. 105
- [70] NEMCHIK, J.; NIKOLAEV, N. N.; PREDAZZI, E.; ZAKHAROV, B. Color dipole systematics of diffractive photoproduction and electroproduction of vector mesons. **Physics Letters B**, v. 374, p. 199–204, 1996. 105
- [71] KUTAK, K.; STASTO, A. M. Unintegrated gluon distribution from modified BK equation. **The European Physical Journal C**, v. 41, p. 343–351, 2005. 107
- [72] SHUVAEV, A. G.; GOLEC-BIERNAT, K. J.; MARTIN, A. D.; RYSKIN, M. G. Off diagonal distributions fixed by diagonal partons at small x and ξ . **Physical Review D**, v. 60, p. 014015, 1999. 107
- [73] JONES, S.; MARTIN, A.; RYSKIN, M.; TEUBNER, T. Probes of the small x gluon via exclusive J/ψ and Υ production at HERA and the LHC. **Journal of High Energy Physics**, v. 1311, p. 085, 2013. 107, 108

- [74] _____. Predictions of exclusive $\Psi(2S)$ production at the LHC. **Journal of Physics G**, v. 41, p. 055009, 2014. 107, 108
- [75] ABELEV, B. B. et al. Exclusive J/Ψ photoproduction off protons in ultra-peripheral pPb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ TeV. **Physical Review Letters**, v. 113, n. 23, p. 232504, 2014. 108
- [76] AAIJ, R. et al. Exclusive J/ψ and $\psi(2S)$ production in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV. **Journal of Physics G**, G40, p. 045001, 2013.
- [77] _____. Updated measurements of exclusive J/ψ and $\psi(2S)$ production cross-sections in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV. **Journal of Physics G**, v. 41, p. 055002, 2014. 108
- [78] AKTAS, A. et al. Elastic J/ψ production at HERA. **The European Physical Journal C**, v. 46, p. 585–603, 2006. 108
- [79] ALEXA, C. et al. Elastic and Proton-Dissociative Photoproduction of J/ψ Mesons at HERA. **The European Physical Journal C**, v. 73, n. 6, p. 2466, 2013. 108
- [80] CHEKANOV, S. et al. Exclusive photoproduction of J/ψ mesons at HERA. **The European Physical Journal C**, v. 24, p. 345–360, 2002. 108
- [81] BINKLEY, M. E. et al. J/ψ Photoproduction from 60 GeV/c to 300 GeV/c. **Physical Review Letters**, v. 48, p. 73, 1982. 108
- [82] DENBY, B. H. et al. Inelastic and Elastic Photoproduction of J/ψ (3097). **Physical Review Letters**, v. 52, p. 795–798, 1984. 108
- [83] ADLOFF, C. et al. Elastic photoproduction of J/ψ and Υ mesons at HERA. **Physics Letters B**, v. 483, p. 23–35, 2000. 108
- [84] AAIJ, R. et al. Central exclusive production of J/ψ and $\psi(2S)$ mesons in pp collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV. **Journal of High Energy Physics**, v. 10, p. 167, 2018. 108
- [85] CHEKANOV, S. et al. Exclusive photoproduction of Υ mesons at HERA. **Physics Letters B**, v. 680, p. 4–12, 2009. 108
- [86] BREITWEG, J. et al. Measurement of elastic Υ photoproduction at HERA. **Physics Letters B**, v. 437, p. 432–444, 1998. 108
- [87] AAIJ, R. et al. Measurement of the exclusive Υ production cross-section in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV and 8 TeV. **Journal of High Energy Physics**, v. 09, p. 084, 2015. 108

- [88] SIRUNYAN, A. M. et al. Measurement of exclusive Υ photoproduction from protons in pPb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ TeV. **The European Physical Journal C**, v. 79, n. 3, p. 277, 2019. 108
- [89] ELLIS, J.; KOWALSKI, H.; ROSS, D. Evidence for the discrete asymptotically-free BFKL Pomeron from HERA data. **Physics Letters B**, v. 668, p. 51–56, 2008. 108
- [90] AIHARA, H. et al. The International Linear Collider. A Global Project. p. 1–15, 2019. Disponível em: <http://arxiv.org/pdf/1901.09829.pdf>. 109
- [91] ABADA, A. et al. FCC-ee: The Lepton Collider. **The European Physical Journal Special Topics**, v. 228, n. 2, p. 261–623, 2019. 109
- [92] DONNACHIE, A.; DOSCH, H. G.; RUETER, M. Two photon reactions at high-energies. **Physical Review D**, v. 59, p. 074011, 1999. 111
- [93] DOSCH, H. G. Two photon reactions at high-energies. **Nuclear Physical B - Proceedings Supplements**, v. 96, p. 118–127, 2001. 111
- [94] DONNACHIE, A.; DOSCH, H. G.; RUETER, M. $\gamma^*\gamma^*$ reactions at high-energies. **The European Physical Journal C**, v. 13, p. 141–150, 2000. 111, 113
- [95] TIMNEANU, N.; KWIECINSKI, J.; MOTYKA, L. Saturation model for two photon interactions at high-energies. **The European Physical Journal C**, v. 23, p. 513–526, 2002. 111, 112, 113
- [96] GOLEC-BIERNAT, K. J.; WUSTHOFF, M. Saturation effects in deep inelastic scattering at low Q^2 and its implications on diffraction. **Physical Review D**, v. 59, p. 014017, 1998. 113
- [97] BUDNEV, V. M.; GINZBURG, I. F.; MELEDIN, G. V.; SERBO, V. G. The Two photon particle production mechanism. Physical problems. Applications. Equivalent photon approximation. **Physics Reports**, v. 15, p. 181–281, 1975. 113
- [98] ACCIARRI, M. et al. Measurement of the cross-section for the process $\gamma^*\gamma^*$ hadrons at LEP. **Physics Letters B**, v. 453, p. 333–342, 1999. 15, 114
- [99] ABBIENDI, G. et al. Measurement of the hadronic cross-section for the scattering of two virtual photons at LEP. **The European Physical Journal C**, v. 24, p. 17–31, 2002. 15, 114
- [100] ACCIARRI, M. et al. Study of the hadronic photon structure function F_2^γ at LEP. **Physics Letters B**, v. 436, p. 403–416, 1998. 15, 115

- [101] ABBIENDI, G. et al. Measurement of the low x behavior of the photon structure function F_2^γ . **The European Physical Journal C**, v. 18, p. 15–39, 2000. 15, 115
- [102] ENGEL, R. Photoproduction within the two component dual parton model. 1. Amplitudes and cross-sections. **Zeitschrift für Physik C**, v. 66, p. 203–214, 1995. 116
- [103] SJOSTRAND, T. PYTHIA 5.7 and JETSET 7.4: Physics and manual. p. 1–327, 1994. Disponível em: <http://arxiv.org/pdf/hep-ph/9508391.pdf>. 116
- [104] ABBIENDI, G. et al. Total hadronic cross-section of photon-photon interactions at LEP. **The European Physical Journal C**, v. 14, p. 199–212, 2000. 15, 116
- [105] ACCIARRI, M. et al. Total cross-section in $\gamma\gamma$ collisions at LEP. **Physical Letters B**, v. 519, p. 33–45, 2001. 15, 116
- [106] BUTKOV, E. **Física Matemática** . [S.l.]: LTC, 1988. 121
- [107] OLVER, F. W. J.; LOZIER, D. W.; BOISVERT, R. F.; CLARK, C. W. **NIST Handbook of mathematical functions**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. 122

