

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
INSTITUTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA



Dissertação

Título: Descrição da dinâmica das interações fortes a altas energias além da ordem dominante no regime de saturação

Yan Bueno Bandeira

Pelotas, 2021

Yan Bueno Bandeira

**Descrição da dinâmica das interações fortes a altas energias
além da ordem dominante no regime de saturação**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Victor Paulo Barros Gonçalves

Coorientador: Prof. Dr. João Thiago de Santana Amaral

Pelotas, 2021

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas
Catalogação na Publicação

B214d Bandeira, Yan Bueno

Descrição da dinâmica das interações fortes a altas energias além da ordem dominante no regime de saturação / Yan Bueno Bandeira ; Victor Paulo Barros Gonçalves, orientador ; João Thiago de Santana Amaral, coorientador. — Pelotas, 2021.

158 f. : il.

Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Física, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2021.

1. Cromodinâmica quântica. 2. Dinâmica das interações fortes. 3. Equação de Balitsky-Kovchegov. I. Gonçalves, Victor Paulo Barros, orient. II. Amaral, João Thiago de Santana, coorient. III. Título.

CDD : 530.12

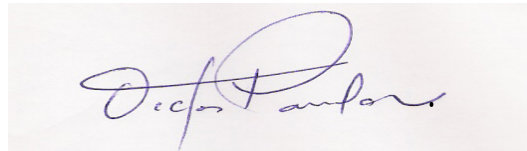
Yan Bueno Bandeira

Título: Descrição da dinâmica das interações fortes a altas energias além da ordem dominante no regime de saturação

Dissertação aprovada, como requisito parcial, para obtenção do grau de Mestre em Física, Programa de Pós-Graduação em Física, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas.

Data da Defesa: 30 de julho de 2021

Banca examinadora:



Victor Gonçalves (Orientador)

Doutor em Ciências
Universidade Federal de Pelotas

Diego Gratieri



Doutor em Ciências
Universidade Federal Fluminense

Werner Sauter



Doutor em Ciências
Universidade Federal de Pelotas

Daniel da Silva



Doutor em Ciências
Universidade Federal de Pelotas

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador, Professor Dr. Victor Paulo Barros Gonçalves, por todos os ensinamentos, pela enorme disponibilidade, pela amizade e por toda sua contribuição no meu desenvolvimento neste dois anos. Uma pessoa especial que sou muito grato por ter conhecido e, principalmente, trabalhado.

Agradeço ao meu coorientador, Professor Dr. João Thiago de Santana Amaral, pelos ensinamentos, pela amizade, pelo apoio e incentivo que me possibilitaram realizar esta Pós-Graduação.

Agradeço a minha namorada, Andreara, que, assim como no período da graduação, esteve presente com muita paciência, compreensão e companherismo.

Aos meus pais e familiares por sempre acreditar e incentivar meus estudos.

A todos meus amigos que estiveram presentes ao longo deste período, com os quais pude compartilhar as mazelas da vida acadêmica.

A Universidade Federal de Pelotas (UFPel), especialmente ao Programa de Pós-Graduação em Física (PPGFis) pela oportunidade de estudo e utilização de suas instalações.

Também gostaria de agradecer à Fundação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo essencial auxílio financeiro.

RESUMO

B. BANDEIRA, Yan, **Descrição da dinâmica das interações fortes a altas energias além da ordem dominante no regime de saturação** 2021, 158p. Dissertação (Mestrado em Física) - Programa de Pós-Graduação em Física, Departamento de Física, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2021.

O regime de altas energias (pequeno x de Bjorken) da Cromodinâmica Quântica (QCD) tem sido intensamente investigado em colisões elétron-hádron e hádron-hádron. Neste regime, espera-se que os efeitos de saturação associados com a alta densidade gluônica modifiquem a dinâmica QCD, implicando na presença de efeitos não-lineares que reduzem o crescimento da distribuição gluônica em pequeno x . A descrição do regime de saturação é dada pelo Condensado de Vidros de Cor (CGC), que é uma teoria efetiva para o regime de alta densidade. A teoria do CGC implica que a amplitude de espalhamento dipolo-hádron satisfaz a equação Balitsky-Kovchegov (BK) na aproximação de campo médio, o que nos permite estimar a contribuição dos efeitos não-lineares. Nos últimos anos, vários autores obtiveram a solução numérica da equação BK em ordem dominante em todo o espaço cinemático, bem como as suas soluções analíticas nos regimes linear e de saturação. Por outro lado, a descrição das correções além da ordem dominante (NLO) para a equação BK é ainda um tema de intenso debate na literatura. Atualmente, existem diferentes abordagens para as correções NLO e distintas prescrições para a escala dura da variável de acoplamento constante. Nesta dissertação, focamos na derivação das soluções da equação BK no regime de saturação, considerando as distintas abordagens e prescrições. Assim, as soluções para a amplitude de espalhamento dipolo-hádron serão derivadas em detalhes e uma comparação entre elas será apresentada pela primeira vez.

Palavras Chave: Cromodinâmica Quântica, Dinâmica das interações fortes, Equação de Balitsky-Kovchegov

ABSTRACT

B. BANDEIRA, Yan, **Description of the dynamics of strong interactions at high energies beyond the dominant orders in the saturation regime** 2021, 158p. Dissertation (Master Degree in Physics) - Programa de Pós-Graduação em Física, Departamento de Física, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2021.

The high energy (small- x) regime of quantum chromodynamics (QCD) has been under intense investigation in electron-hadron and hadron-hadron collisions. In this regime, saturation effects associated with the high gluonic density are expected to modify the QCD dynamics, implying the presence of non-linear effects that reduce the growth of the gluon distribution at small- x . The description of the saturation region is given by the Color Glass Condensate (CGC), which is an effective theory for the high density regime. The CGC theory implies that the dipole-hadron scattering amplitude satisfies the Balitsky-Kovchegov (BK) equation in the mean-field approximation, which allows us to estimate the contribution of the non-linear effects. In recent years, several authors have obtained the numerical solution of the BK equation at leading order in the full kinematical range, as well its analytical solutions in the linear and saturation regimes. On the other hand, the description of the next-to-leading order (NLO) corrections for the BK equation is still a theme of intense debate in the literature. Currently, there are different treatments for the NLO corrections and distinct prescriptions for the hard scale of the running coupling constant. In this dissertation, we focus on the derivation of the solutions of the BK equation in the saturation regime considering these distinct treatments and prescriptions. Then, the solutions for the dipole-hadron scattering amplitude will be derived in detail and a comprehensive comparison between them will be presented for the first time.

Key-words: Quantum Chromodynamics, Dynamics of strong interactions, Balitsky-Kovchegov equation

SUMÁRIO

Pág.

LISTA DE FIGURAS

1	Introdução	15
2	Conceitos básicos	17
2.1	A Cromodinâmica Quântica	17
2.2	A estrutura do próton	21
2.2.1	Espalhamento profundamente inelástico	22
2.3	Dinâmica para pequeno x	31
2.3.1	DGLAP na região de pequeno x	31
2.3.2	A equação BFKL	33
2.4	Efeitos não lineares na QCD	35
2.5	Formalismo de Dipolos	38
2.6	Conclusão	40
3	A Equação Balitsky-Kovchegov e suas soluções em ordem dominante	43
3.1	Derivação da equação BK	43
3.2	Soluções da equação Balitsky - Kovchegov em ordem dominante	54
3.2.1	A equação Balitsky - Kovchegov na região de saturação	56
3.2.2	A equação Balitsky - Kovchegov fora da região de saturação	58
3.2.2.1	Solução da BFKL para uma condição de contorno dada pela física de saturação	64
3.3	Modelos fenomenológicos	70
3.4	Conclusão	71
4	Equação Balitsky - Kovchegov além da ordem dominante: uma comparação entre as soluções assintóticas na região de saturação	73
4.1	A escala de saturação além da ordem dominante	73
4.2	Correções de laço de quarks para a equação de Balitsky-Kovchegov	75
4.2.1	Solução na região de saturação	78
4.3	Correções de laços de quarks e glúons para a equação de Balitsky-Kovchegov	82
4.3.1	Solução na região de saturação	84
4.4	Correção colinear	94

4.5	Comparativo das distintas soluções assintóticas para a equação BK além da ordem dominante	99
4.6	Conclusão	102
5	Conclusões e perspectivas	105
A	Solução da equação DGLAP na região de pequeno x	107
B	Teoria Quântica de Campos no Cone de Luz	113
B.1	Coordenadas no Cone de Luz	113
B.2	A Teoria de Campos	114
C	Função de onda do Fóton virtual	117
D	Emissão de glúons	141
E	Cálculo polarização transversal	151
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	153

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 Renormalização na QED	18
2.2 Renormalização na QCD	18
2.3 Evolução da constante de acoplamento α_s em termos da escala Q . Figura extraída de [1].	19
2.4 Classificação do espalhamento e^-p dependendo do comprimento de onda do fóton virtual.	21
2.5 Representação do espalhamento profundamente inelástico.	23
2.6 Compilado de todos os dados para o DIS em um próton. A função de estrutura do próton F_2 é plotada como função da virtualidade Q^2 para determinados valores de x , como indicado próximo dos dados. É perceptível que, para valores intermediários de x , F_2 é independente de Q^2 , sendo esta uma manifestação do escalonamento de Bjorken. Figura extraída de [2]	26
2.7 Representação da dinâmica dos constituintes do próton. A partir das interações fortes, temos que os quarks podem emitir gúons e os glúons podem se desdobrar em pares quarks e anti-quarks $q\bar{q}$ sem com que os números quânticos do próton sejam alterados.	27
2.8 Ilustração da estrutura do próton, distribuição de pártons, sendo sondada pelo fóton virtual conforme Q^2 aumenta.	28
2.9 Equação DGLAP em sua forma simbólica para o setor de quarks (2.3).	29
2.10 Equação DGLAP em sua forma simbólica para o setor de glúons (2.4).	29
2.11 Ilustração da equação de evolução DGLAP. As bolhas indicam os pártons (quarks e glúons).	29
2.12 Equação DGLAP no plano $Q^2 \times \ln 1/x$	30
2.13 Distribuição partônica de quarks leves e glúons no interior do próton de acordo com as parametrizações CT18, para (a) $Q^2 = 4 \text{ GeV}^2$ e (b) $Q^2 = 100 \text{ GeV}^2$ [3]. Figura gerada usando a ferramenta APFEL [4, 5]	31
2.14 Evolução da equação BFKL no plano $Q^2 \times \ln 1/x$	33
2.15 Ilustração da evolução da dinâmica no interior do próton no plano transversal.	36
2.16 Região de aplicação das equações de evolução no plano transversal.	37
2.17 Diagrama que representa o processo γ^*p na representação de dipolos.	39
3.1 Os diagramas que contribuem para o processo $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g$. No primeiro diagrama, o glúon é emitido pelo quark. Já no segundo diagrama o glúon é emitido pelo antiquark.	43

3.2	A representação dos termos presentes na equação(3.1), onde a imagem (a) retrata o segundo termo, já as imagens (b) e (c) representam o terceiro termo.	44
3.3	O glúon emitido pode ser visto como uma parte da função de onda do alvo (linha tracejada superior) ou como uma parte da função de onda do dipolo (linha tracejada inferior)	51
3.4	No limite de grande número de cor, o glúon pode ser substituído por um par quark-antiquark, formando 2 novos dipolos. Emissões sucessivas de glúons suaves podem ser consideradas como independentes, a evolução se dá à medida que a rapidez aumenta.	52
3.5	Representação dos auto valores do kernel (núcleo) BFKL.	61
3.6	Representação gráfica da equação (3.30) que fornece os valores do ponto de sela.	62
3.7	Ilustração da região de validade das soluções assintóticas da equação BK em ordem dominante.	69
3.8	Gráficos das funções do modelo IIM para $x = 10^{-3}$ à esquerda e para $x = 10^{-6}$ à direita.	71
4.1	A dependência da escala de saturação em rapidez para a constante de acoplamento fixa: $\bar{\alpha}_0 = 0.2$ (linha sólida vermelha) e $\bar{\alpha}_0 = 0.4$ (linha sólida azul). Para a constante de acoplamento variável para $Q_0^2 = 1 \text{ GeV}^2$ (linha pontilhada azul), onde $Y_0 = 10^{-2}$	74
4.2	Ilustração das correções e suas respectivas equações de evolução.	75
4.3	Diagramas que são levadas em consideração pela equação BK com acoplamento variável (rcBK). A linha vertical é o hádron alvo. No lado esquerdo temos os diagramas que contribuem para o caso LO e no lado direito temos os diagramas do laço de quark.	76
4.4	Comparativo entre a soluções assintóticas na região de saturação da solução Levin-Tuchin (LO) e da correção rcBK para Q_s^2 fixo (esquerda) e para r^2 fixo (direita).	81
4.5	Diagramas que são levados em consideração pela equação BK além da ordem dominante. A linha vertical é o hádron alvo. No lado esquerdo temos os diagramas que contribuem para o caso LO, no meio temos os diagramas do laço de quarks e no lado direito temos os diagramas para o laço de glúons. . .	82
4.6	Comparativo entre a soluções assintóticas na região de saturação da solução Levin - Tuchin (LO) e da correção fNLO para Q_s^2 fixo (esquerda) e para r^2 fixo (direita).	87
4.7	Comparativo entre a soluções assintóticas na região de saturação da solução Levin - Tuchin (LO) e da correção fNLO com $\alpha_s(Q_s^2)$ para Q_s^2 fixo (esquerda) e para r^2 fixo (direita).	92

4.8	Comparativo entre a soluções assintóticas na região de saturação da solução Levin - Tuchin (LO) e da correção fnLO na prescrição de menor dipolo (SDRC) para Q_s^2 fixo (esquerda) e para r^2 fixo (direita).	94
4.9	Solução da correção colinear da equação BK - NLO para diferentes valores de A_1 , considerando $Q_s^2 = 1 \text{ GeV}^2$ (esquerda) e para $Q_s^2 = 5 \text{ GeV}^2$ (direita.) . . .	98
4.10	Comparativo entre a soluções assintóticas na região de saturação da solução Levin - Tuchin (LO) e da correção colinear na prescrição de menor dipolo (SDRC) para Q_s^2 fixo (esquerda) e para r^2 fixo (direita).	98
4.11	Comparação entre as soluções assintóticas da equação BK-fnLO para a região de saturação com a escala de saturação fixa à esquerda e com o tamanho de dipolo fixo à direita.	101
4.12	Comparação entre as soluções assintóticas da equação BK para a região de saturação com a escala de saturação fixa no valor de $Q_s^2 = 1 \text{ GeV}^2$ (à esquerda) e com o tamanho de dipolo fixo em $r^2 = 5 \text{ GeV}^{-2}$ (à direita).	102
4.13	Comparação entre as soluções assintóticas da equação BK para a região de saturação com a escala de saturação fixa no valor de $Q_s^2 = 1 \text{ GeV}^2$ (à esquerda) e com o tamanho de dipolo fixo em $r^2 = 5 \text{ GeV}^{-2}$ (à direita).	103
C.1	O fóton virtual fluta em um dipolo quark-antiquark. O momentum e o spin do quark (antiquark) são k (k') e s (s'), respectivamente.	118
C.2	Relação angular entre r e k	131
D.1	Quark com momentum p , spin s e cor α emite um glúon com momentum k , cor c e polarização λ . O momentum, spin e cor do quark após a emissão são $p - k$, β e s' respectivamente.	142
D.2	Diagrama de Feynman que representa a emissão de um glúon.	142
D.3	Relações angulares para a transformação em coordenadas esféricas.	148

1 Introdução

A teoria das interações fortes, Cromodinâmica Quântica (*QCD - Quantum Chromodynamics*), descreve a dinâmica interna dos hádrons através de equações de evolução para as funções de distribuição partônica, as quais caracterizam os constituintes internos dos hádrons. No regime de altas energias, as equações de evolução lineares levam a um crescimento indefinido dos constituintes do hádron, o que viola a unitariedade da seção de choque. Entretanto, neste limite, a QCD prevê que a alta densidade partônica acarreta a necessidade de passar de um regime descrito pela dinâmica linear, onde somente processos de emissão são considerados, para um regime não-linear, no qual os processos de recombinação de pártons tornam-se relevantes. Espera-se que neste regime ocorra a limitação na máxima densidade partônica que pode ser alcançada na função de onda hadrônica, a qual é denominada de “saturação partônica”, caracterizada por valores da intensidade de campo forte muito altos, formando um estado denominado de Condensado de Vidros de Cor (*CGC - Color Glass Condensate*). Neste estado, considera-se como premissa básica a existência de um sistema denso e saturado, i.e., o número de glúons por unidade de volume do espaço de fase está próximo de seu limite e, para grandes densidades, cresce lentamente com a energia, implicando em uma grande modificação da distribuição de glúons se comparada com as previsões da dinâmica linear. Correntemente, o regime não-linear é descrito pela equação de Balitsky-Kovchegov (BK), a qual é uma equação integro-diferencial para amplitude de espalhamento dipolo-hádron. Nas últimas décadas, diversos grupos resolveram numericamente esta equação e derivaram suas soluções assintóticas em ordem dominante, as quais serviram de base para a construção de modelos fenomenológicos que descrevem com sucesso os dados experimentais de HERA (*Hadron-Electron Ring Accelerator*). Por outro lado, a derivação da equação BK além da ordem dominante é ainda um tema de debate na literatura. Atualmente existem diversas propostas para o kernel desta equação e diferentes prescrições para o tratamento das correções associadas ao acoplamento variável. Nosso objetivo nesta dissertação é apresentar uma comparação detalhada das soluções de equação BK no regime de saturação, onde a dinâmica QCD é dominada pelos efeitos não-lineares, considerando as diferentes propostas e prescrições presentes nas distintas abordagens das correções além da ordem dominante. Tal análise é fundamental para a construção de modelos fenomenológicos baseados nas soluções da equação BK além da ordem dominante e posterior comparação com os dados experimentais de colisões elétron-próton no acelerador HERA e próton-próton no Grande Colisor de Hádrons (*LHC - Large Hadron Collider*).

Desta forma, nesta dissertação abordaremos inicialmente os conceitos básicos para a compreensão da dinâmica hadrônica no regime de altas energias, ou seja, ao longo do capítulo 2 partimos de uma introdução breve da QCD e em seguida é feita uma revisão

acerca da estrutura do próton que é provada através do Espalhamento Profundamente Inelástico (*DIS - Deep Inelastic Scattering*). O DIS leva a comprovação de que os hádrons são formados por partículas puntiformes, denominadas de pártons, os quais na QCD são identificados como quarks e glúons, que interagem via força forte. Ainda neste capítulo averiguaremos que a descrição da dinâmica hadrônica é dada por equações de evolução para as funções de distribuições partônicas (*PDF - Parton Distribution Functions*), chamadas de DGLAP. Na sequência, trataremos da dinâmica para o regime de pequeno x , de onde extraímos que as equações de evolução utilizadas para descrever a dinâmica apresentam um crescimento indefinido devido ao seu caráter linear e que este comportamento pode ser regularizado pela introdução de termos não-lineares, associados à recombinação partônica. Portanto, discutiremos quais efeitos não-lineares são estes e o formalismo de dipolos no qual é mais simples abordar estes efeitos não lineares.

No capítulo 3, motivados pela necessidade de inserir efeitos não-lineares nas equações de evolução, iremos derivar a equação integro-diferencial Balitsky-Kovchegov (BK) no limite de grande número de cores e na aproximação de campo médio. Além de derivarmos a equação BK, apresentaremos as soluções para a equação em ordem dominante e a partir da mesma apresentaremos o modelo fenomenológico baseado nestas soluções. Uma parametrização mais recente apontou que o modelo fenomenológico baseado nas soluções da equação BK em ordem dominante não é mais satisfatório para descrever os dados experimentais mais recentes. Disto, temos que é necessário abordar a equação de evolução para a próxima ordem perturbativa o que será feito no capítulo seguinte.

No capítulo 4 desenvolveremos as correções além da ordem dominante para a equação BK, cujas soluções analíticas no regime de saturação serão derivadas em detalhes, comparando suas predições com àquelas obtidas em ordem dominante. Além disso, iremos apresentar pela primeira vez uma comparação detalhada entre as predições além da ordem dominante e discutiremos suas implicações fenomenológicas. Tais resultados fazem parte de um artigo científico em preparação.

No Capítulo 5 iremos revisar os principais resultados obtidos e apresentaremos as perspectivas de estudos futuros.

Por fim, é importante informar que, nesta dissertação, as figuras nas quais não há referência foram feitas pelo próprio autor.

2 Conceitos básicos

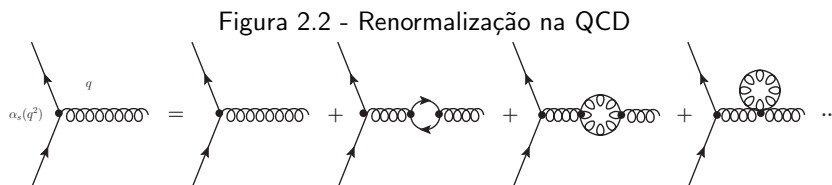
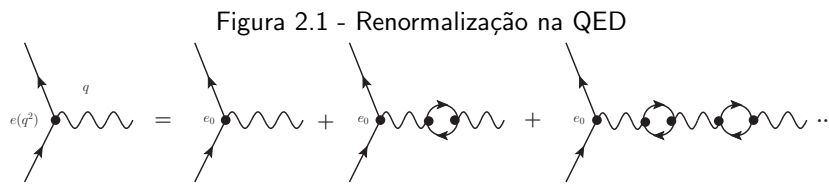
Para começarmos a nossa discussão acerca da dinâmica das interações fortes, vamos neste capítulo abordar os conceitos básicos necessários para a compreensão da teoria das interações fortes. Abordaremos a estrutura do próton descrita pelas funções de distribuição que são obtidas através do estudo do espalhamento profundamente inelástico. Do estudo da distribuição dos constituintes dos hádrons são formuladas as equações de evolução para a dinâmica, as quais serão discutidas de forma qualitativa ao longo deste capítulo. Por fim, trataremos das limitações que as equações de evolução lineares apresentam ao não considerarem efeitos não-lineares associadas aos processos de recombinação.

2.1 A Cromodinâmica Quântica

A Cromodinâmica Quântica é uma teoria quântica de campos que descreve as interações de natureza forte que ocorrem no interior hadrônico entre quarks e glúons, dotada de uma simetria de gauge não-abeliana do grupo $SU(3)$ de cor. Isso é, todos os portadores de cor estão submetidos as interações fortes. Tendo em vista que a cromodinâmica quântica é uma teoria quântica de campos assim como a eletrodinâmica quântica (*QED - Quantum Electrodynamics*) podemos traçar um paralelo entre a QCD e a QED. A QCD é baseada no modelo de partículas elementares, onde temos quarks, férmions de spin $1/2$, massivos, que portam carga elétrica fracionária, e diferentemente dos férmions da QED, os quarks portam carga de cor. Os glúons que são os bósons desta teoria, ao contrário dos fótons, são portadores de carga de cor. Entretanto, os glúons não portam carga elétrica, ou seja, não interagem nos processos eletromagnéticos.

Na QED, os léptons apresentam seis sabores: elétron, múon, tau, neutrino do elétron, neutrino do múon e neutrino do tau. Tendo cada sabor um valor distinto de massa [6]. Além disso, para esta teoria há apenas um tipo de carga, elétrica, e apresenta apenas o seguinte vértice de interação: elétron-fóton.

Já para a QCD os quarks, assim como os léptons da QED, apresentam seis sabores: up (u), down (d), strange (s), charm (c), bottom (b) e top (t). O sabor é sempre conservado em interações fortes e irrelevante para a QCD [7]. Para a QCD interessa a carga de cor, ou melhor, as cargas de cores já que na cromodinâmica quântica existem três tipos de carga de cor (com suas respectivas anticores): vermelho (r), azul (b) e verde (g). Diferentemente da QED, a QCD apresenta três tipos de carga e a mesma apresenta dois vértices de interação: quark-glúon e glúon-glúon, o que indica que de modo distinto da QED o bóson da cromodinâmica quântica é auto interagente o que é consequência do fato de o mesmo possuir carga de cor [8].

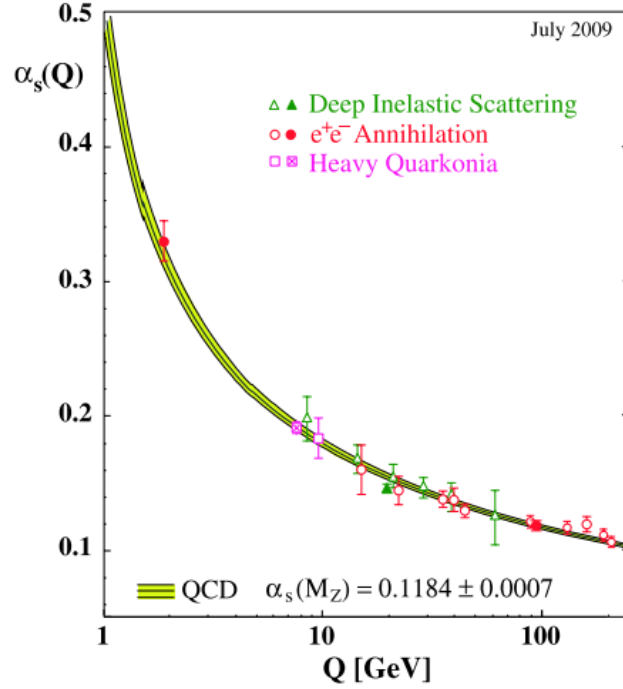


Uma importante característica da QCD surge do processo de renormalização que é utilizada para lidar com infinitos que surgem nas teorias da QED e QCD. No caso da QED a renormalização é utilizada para lidar com os infinitos que surgem do cálculo de diagramas com laços, como os apresentados na Fig. 2.1. Destes cálculos vê-se que a constante de acoplamento varia com a distância, que é inversamente proporcional à escala Q . A soma explícita dos diagramas de laços da aproximação de ordem dominante presentes na Fig. 2.1 leva a uma expressão para o acoplamento eletromagnético, $\alpha_{em}(Q^2)$, e a dependência da distância no caso eletromagnético é fraca, o que implica que a aproximação $\alpha_{em} \simeq 1/137$ é suficientemente boa [8].

Na QED, o elétron é cercado por fótons virtuais e pares elétron-pósitron virtuais que vão constantemente se aniquilando e criando [9]. Devido à atração de cargas opostas, os pósitrons virtuais tendem a se aproximarem do elétron e, com isto, blindam a carga do elétron. Esse fenômeno é análogo à polarização do meio dielétrico na presença de uma carga elétrica e é denominado polarização do vácuo. Esta é a interpretação para o fato de que na QED o acoplamento torna-se mais intenso quando as cargas aproximam-se (maior Q^2).

Na QCD não podemos inferir a mesma interpretação, pois o vácuo da QCD não é constituído unicamente de pares $q\bar{q}$ virtuais mas também é constituído de glúons tendo em vista que os glúons são auto interagentes. Logo, ao contrário da QED, na QCD além dos vértices quark-quark-glúon (laços de quarks), que atua blindando a carga de cor do quark, análogamente a QED, fazendo com que a constante de acoplamento da interação forte cresça em pequenas distâncias, há também vértices glúon-glúon diretos (laços de glúons), como podemos ver na Fig. 2.2, que possuem um efeito contrário aos laços de quarks, produzindo uma antiblindagem que diminui o acoplamento em pequenas distâncias.

Figura 2.3 - Evolução da constante de acoplamento α_s em termos da escala Q . Figura extraída de [1].



A forma da constante de acoplamento da QCD resultante é dado por [10]:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{(11N_c - 2N_f)\ln(Q^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)}, \quad p/ \quad Q \gg \Lambda_{\text{QCD}}. \quad (2.1)$$

O parâmetro Λ_{QCD} é introduzido como uma escala que caracteriza a região não-perturbativa. O valor $\Lambda_{\text{QCD}} \approx 200 - 300$ MeV não é predito teoricamente, mas sim experimentalmente e depende do esquema de renormalização utilizado [1].

No modelo padrão de física de partículas temos que $N_c = 3$ e $N_f = 6$, logo $11N_c > 2N_f$, fazendo com que o efeito de antiblindagem domina e a constante de acoplamento diminua com o aumento de Q^2 . Isso faz com que os quarks contidos no interior dos hádrons comportem-se praticamente como partículas livres, quando sondados a energias suficientemente altas. Essa propriedade das interações fortes é chamada de *liberdade assintótica*. A liberdade assintótica nos permite utilizar a teoria de perturbação, e com isto chegamos a predições quantitativas para observáveis físicos em interações hadrônicas. Por outro lado, ao aumentarmos a distância o acoplamento torna-se tão forte que é impossível isolar um quark de um hádron. Esse mecanismo é chamado de *confinamento*.

O comportamento da constante de acoplamento dado pela eq. (2.1) é apresentado na Fig. 2.3 onde a propriedade de liberdade assintótica e de confinamento ficam explicitadas pelos limites assintóticos da constante de acoplamento. Uma discussão completa sobre esse tópico onde apresentam o gráfico da constante de acoplamento QCD com dados experimentais é realizada na Ref. [1].

Na Fig. 2.3, podemos observar que a intensidade do acoplamento da QCD varia consideravelmente dentro do intervalo de Q relevante para física de partículas no regime de altas energias. O regime de baixo momento transversal, $Q \ll \Lambda_{\text{QCD}}$, onde $\alpha_s \approx 1$, é o regime no qual o uso da teoria de perturbação é impraticável (*soft QCD*), esse é o regime do confinamento de cor. Já, o regime de alto momento transversal, $Q \gg \Lambda_{\text{QCD}}$, no qual α_s é suficientemente pequeno, permite usar a teoria de perturbação, portanto temos a QCD perturbativa (pQCD - *perturbative Quantum Chromodynamics*) [11].

Dependendo do processo avaliado, existem diagramas nos quais α_s aparece acompanhado de logaritmos que têm (ou podem ter) valores altos. Nesse caso é necessário ressomar esses termos (considerar potências maiores¹) [12]. A ressona dos diagramas com grandes logaritmos em Q^2 , onde o parâmetro de ressona é

$$\alpha_s(Q^2) \ln Q^2 ,$$

é conhecida como aproximação de logaritmo dominante (*Leading Log Approximation - LLA*), e leva às equações DGLAP [13–15]. De forma análoga, a ressona com grandes logaritmos em $1/x$, cujo parâmetro de ressona é

$$\alpha_s(Q^2) \ln 1/x ,$$

é conhecida como LL_xA e leva a equação BFKL [16–19]. Há também o caso no qual $\ln Q$ e $\ln 1/x$ são grandes. Sendo o parâmetro da ressona dado por

$$\alpha_s(Q^2) \ln Q^2 \ln 1/x,$$

que é conhecida como aproximação de duplo logaritmo (*Double Log Approximation - DLA*). As equações DGLAP e BFKL serão discutidas em mais detalhes posteriormente.

¹Por exemplo, no DIS onde um fóton com alto valor de Q^2 interage com um próton de uma escala típica de momento transversal Q_0^2 , tal que $Q^2 \gg Q_0^2$, há diagramas em que o alto valor de termos do tipo $\ln Q^2/Q_0^2$ compensam o baixo valor de α_s .

2.2 A estrutura do próton

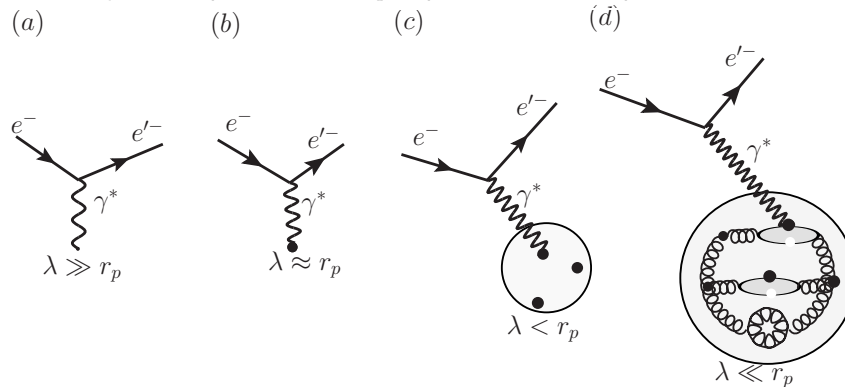
A maneira de sondar o mundo das quantas se dá a partir do estudo de suas interações em processos de espalhamento em colisores.

Para o caso da interação ou colisão elétron-pósitron, $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$, as partículas do estado inicial e final são férmions fundamentais, logo a determinação da seção de choque desta interação é dada pela matriz de elementos da Eletrodinâmica Quântica e pela cinemática da colisão [20]. Entretanto, se formos estudar um processo que ocorra entre um férmion fundamental e um hádron, notaremos que o cálculo da seção de choque da colisão depende dos constituintes do hádron, isso faz com que essas interações entre partículas fundamentais e os hádrons - como por exemplo o caso elétron-próton - sejam usadas para sondar a estrutura dos hádrons.

O espalhamento elétron-próton é uma poderosa ferramenta para sondar a estrutura do próton. O processo pode ser classificado entre elástico ou inelástico, onde a classificação depende do estado final já a energia envolvida no processo categorizada o potencial de sondar a estrutura do próton. À baixas energias, o próton permanece intacto no estado final, isto configura o espalhamento como elástico onde a interação do fóton virtual é com o próton como um todo. Para altas energias, o processo dominante é o espalhamento profundamente inelástico (DIS), onde o próton se parte e o processo subjacente é o espalhamento elástico do elétron com um dos quarks pertencentes ao próton.

A classificação precisa do processo de espalhamento elétron-próton depende do comprimento de onda do fóton virtual em comparação com o raio do próton. O espalhamento elétron-próton pode ser categorizado sistematicamente assim como pode ser visto na Fig.2.4

Figura 2.4 - Classificação do espalhamento e^-p dependendo do comprimento de onda do fóton virtual.



onde temos:

- (a) Espalhamento a baixíssimas energias, onde o comprimento de onda do fóton virtual é grande ao compará-lo com o raio do próton, $\lambda \gg r_p$. Assim, o processo pode ser definido como o espalhamento elástico entre um elétron com um potencial ou um próton pontual.
- (b) Ao elevarmos a energia do elétron, temos que $\lambda \approx r_p$, vemos que o processo de espalhamento não é mais de natureza puramente eletrostática, assim a distribuição de carga e o momento magnético do próton deve ser levada em consideração para o cálculo da seção de choque.
- (c) Quando $\lambda < r_p$, o comprimento de onda do fóton virtual é relativamente pequeno, temos o caso onde o processo é inelástico pelo fato de que o fóton irá interagir com o constituinte do próton e conseqüentemente o mesmo irá se partir.
- (d) Para o elétron altamente energético, o comprimento de onda do fóton virtual é suficiente pequeno para sondar detalhadamente a dinâmica da estrutura do próton.

No que segue, apresentaremos uma breve revisão dos conceitos necessários à compreensão do processo de espalhamento profundamente inelástico.

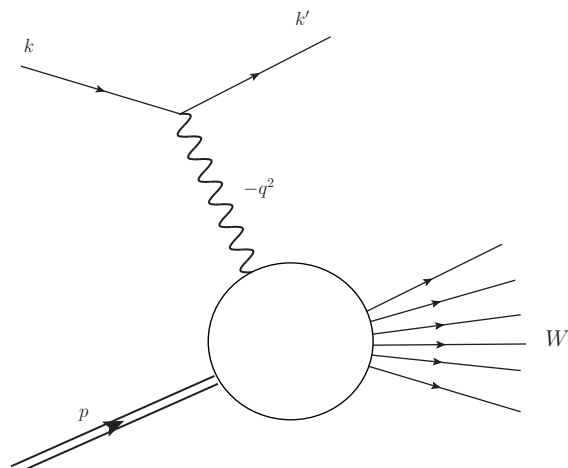
2.2.1 Espalhamento profundamente inelástico

O espalhamento profundamente inelástico é um processo de espalhamento de um lépton, carregado ou neutro, com um núcleon com grande transferência de momentum. O processo pode ser exclusivo onde temos que tanto o lépton quanto o núcleon é detectado no estado final assim como pode ser inclusivo onde somente o lépton é detectado no estado final. O processo inclusivo pode ser expresso por

$$l(k) + N(p) \rightarrow l'(k') + X(p_x), \quad (2.2)$$

e é representado na figura 2.5. Para o processo de corrente neutra, o lépton, que inicialmente possui quadri-momentum k^μ interage com o núcleon, cujo quadri-momentum é p^μ , através da troca de um bóson de gauge (γ^* , Z^0), podemos também ter corrente carregada onde o bosón de gauge será W^\pm e neste caso haverá a troca do sabor do lépton incidente. Considerando o DIS inclusivo, isso é, o mesmo é caracterizado pela detecção - no estado final - apenas do lépton. No caso onde o lépton é um elétron ou um múon, e a corrente é neutra, o DIS ocorre pela troca de um fóton virtual.

Figura 2.5 - Representação do espalhamento profundamente inelástico.



O DIS é descrito por várias variáveis cinemáticas que independentes de referencial, são elas:

I O quadrado do momentum transferido

$$q^2 \equiv -Q^2,$$

onde $Q^2 > 0$ é chamada de virtualidade do bóson de gauge.

II A variável

$$\nu \equiv \frac{p \cdot q}{M},$$

onde M é a massa do núcleon.

III A variável cinemática denominada de x de Bjorken, que é definida por

$$x \equiv \frac{Q^2}{2p \cdot q}.$$

IV A variável chamada de inelasticidade,

$$y = \frac{p \cdot q}{p \cdot k}.$$

A massa invariante do estado final do sistema hadrônico X é

$$W^2 = (p + q)^2 = M^2 + 2p \cdot q + q^2 \quad (\equiv p_X).$$

Ao mínimo, a massa invariante de X dever ser igual ao núcleo incidente, desde que o número bariônico é conservado no processo de espalhamento. Isto nos fornece a desigualdade:

$$m_X^2 \geq m^2 \implies M^2 + 2p \cdot q - Q^2 \geq M^2.$$

Implementando na variável x ficamos com:

$$x = \frac{Q^2}{W^2 - M^2 + Q^2} = \frac{1}{1 + \frac{(W^2 + M^2)}{Q^2}}.$$

Como Q^2 e ν são positivos, x será um número positivo maior do que zero mas menor do que 1. A perda de energia do lépton $E - E'$ deve estar entre zero e E , então a região cinemática permitida é

$$0 \leq x \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq 1.$$

A cinemática do DIS é descrita por um par de variáveis independentes (além da dependência trivial do ângulo azimutal ϕ): E' , θ , ou x e Q^2 , ou x e y . Já que x e y são adimensionais, quando a cinemática do DIS é descrita por esse par a mesma assume um caráter adimensional.

É, também, conveniente termos em mãos as variáveis de Mandelstan, as quais são utilizadas para representar o canal de interação,

$$\begin{aligned} s &\equiv (k + p)^2 = (k' + p')^2, \\ t &\equiv (k - k')^2 = (p' - p)^2, \\ u &\equiv (k - p')^2 = (p - k')^2, \end{aligned}$$

onde s é o quadrado da energia de centro de massa do espalhamento lépton-núcleo. Para o regime energético que constitui o DIS podemos aproximar a variável $s \approx 2p \cdot k$, pois $s \gg M^2 \gg m_l$.

As variáveis Q^2 , x e y se relacionam a partir de

$$Q^2 \approx yxs.$$

A seção de choque do DIS pode ser expressa da seguinte forma [21]:

$$\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} = \frac{2\pi\alpha_{em}^2}{xQ^4} [(1 + (1 - y)^2)F_2(x, Q^2) - y^2 F_L(x, Q^2)],$$

onde F_2 e F_L caracterizam o vértice hadrônico e dependem da estrutura do próton e da dinâmica das interações fortes.

É possível relacionar as funções de estrutura às seções de choque totais de foto absorção virtual, obtidas a partir da interação γ^*p , tendo como resultado [12]:

$$\begin{aligned}\sigma_L^{\gamma^*p} &= \frac{4\pi^2\alpha^2}{Q^2}(F_2 - 2xF_1), \\ \sigma_T^{\gamma^*p} &= \frac{4\pi^2\alpha^2}{Q^2}2xF_1,\end{aligned}$$

onde $\sigma_{L,T}^{\gamma^*p}$ são as seções de choque de foto absorção longitudinal e transversal, respectivamente [20, 22]. Definindo as funções de estrutura longitudinal e transversal como

$$\begin{aligned}F_L &= F_2 - 2xF_1, \\ F_T &= 2xF_1,\end{aligned}$$

logo, tem-se

$$\sigma_{L,T}^{\gamma^*p} = \frac{4\pi^2\alpha^2}{Q^2}2xF_{L,T}(x, Q^2).$$

A partir da definição das funções de estrutura transversal e longitudinal, podemos perceber que $F_2 = F_L + F_T$, conseqüentemente a seção de choque de foto absorção virtual σ^{γ^*p} é proporcional a F_2

$$\sigma^{\gamma^*p} = \frac{4\pi^2\alpha^2}{Q^2}F_2(x, Q^2).$$

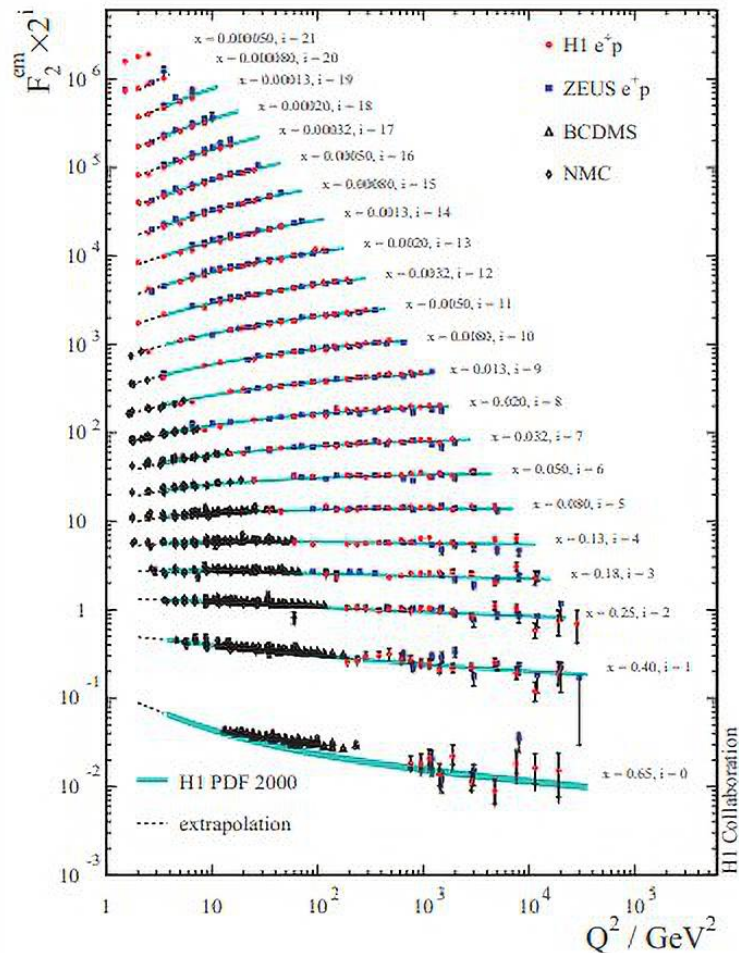
Se o próton fosse uma partícula puntiforme, assim como o elétron, a seção de choque de foto absorção seria simplesmente

$$\sigma^{\gamma^*e} = \frac{4\pi^2\alpha^2}{Q^2}\delta(x - 1),$$

onde a função delta corresponde à conservação de momentum.

Sendo assim, temos que a informação acerca da estrutura do próton está contida no estudo

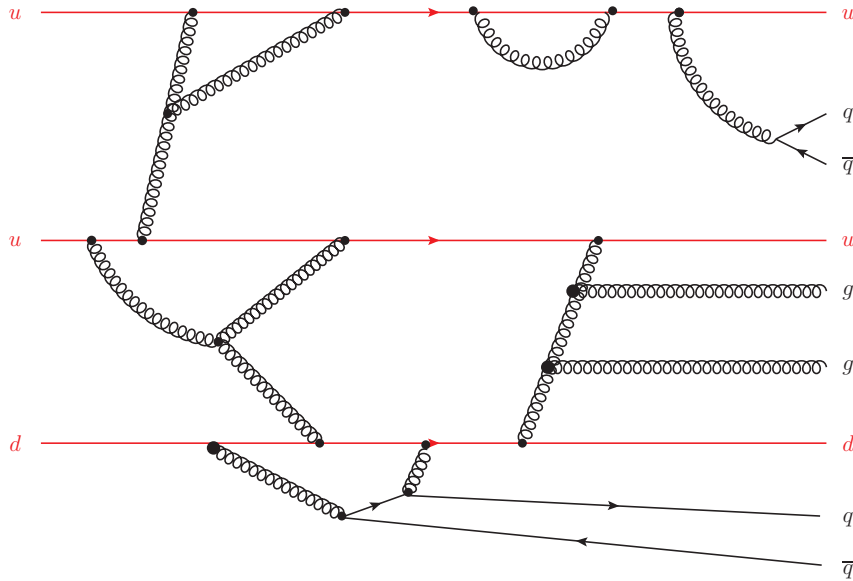
Figura 2.6 - Compilado de todos os dados para o DIS em um próton. A função de estrutura do próton F_2 é plotada como função da virtualidade Q^2 para determinados valores de x , como indicado próximo dos dados. É perceptível que, para valores intermediários de x , F_2 é independente de Q^2 , sendo esta uma manifestação do escalonamento de Bjorken. Figura extraída de [2]



da função de estrutura F_2 . A partir disto, os experimentos de espalhamento nos fornecem dados da função de estrutura em função de Q^2 e x . Vemos na Fig.2.6, os dados da função de estrutura F_2 em função da virtualidade, Q^2 , para vários valores da variável x de Bjorken obtidos em HERA.

A partir dos dados é possível identificar que a um determinado regime dos valores de x ($x \approx 0,1$) a função F_2 independe de Q^2 . Esse comportamento foi denominado de *escalonamento de Bjorken* [23–25]. Em linhas gerais podemos afirmar que o escalonamento é a confirmação de espalhamentos pontuais entre o fóton e os constituintes do próton que portam uma fração de momentum x , como predito pelo modelo de pártons proposta na era pré-QCD. Por outro lado, temos uma violação de escala para valores de x cada vez

Figura 2.7 - Representação da dinâmica dos constituintes do próton. A partir das interações fortes, temos que os quarks podem emitir glúons e os glúons podem se desdobrar em pares quarks e anti-quarks $q\bar{q}$ sem com que os números quânticos do próton sejam alterados.



menores.

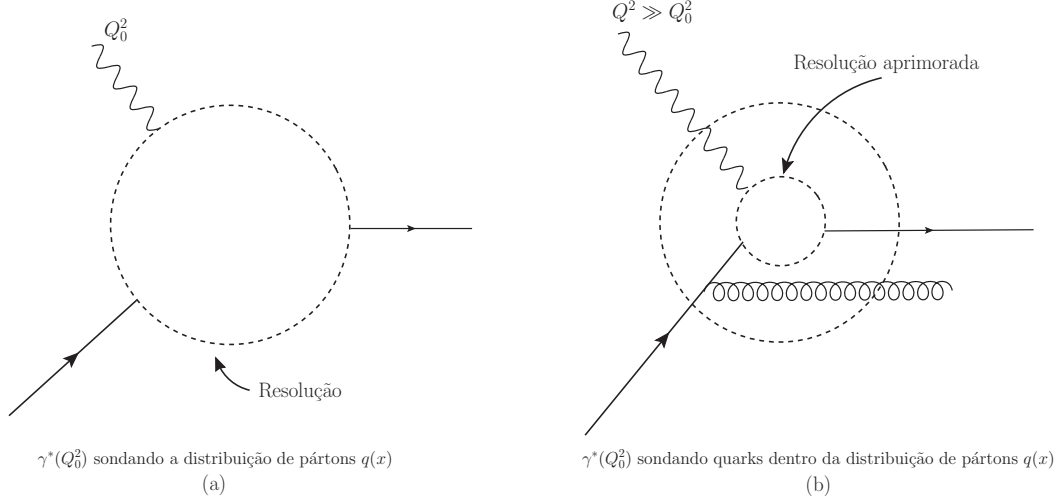
Essa dependência de Q^2 é causada por processos da QCD presentes na dinâmica do próton, como os processos de emissão de glúons e formação de pares quark-antiquark $q\bar{q}$. Como podemos ver na figura 2.7, além dos três quarks de valência uud que formam os números quânticos do próton, a QCD prediz que a presença de glúons e pares quark-antiquark, gerados a partir dos glúon, denominados de quarks de mar.

A QCD prediz que $F_2(x, Q^2) = \sum_i e_i^2 q_i(x, Q^2)$, onde q_i é a densidade de quarks com fração de momentum x quando o próton é sondado por um fóton com virtualidade Q^2 . Temos que se os quarks não interagissem entre si, somente os quarks de valência seriam observados com o aumento de Q^2 , e o escalonamento de Bjorken deveria manter-se. Entretanto, a QCD prevê que com o aumento da resolução ($Q^2 \gg Q_0^2$), vemos que cada quark tem em sua vizinhança uma nuvem de pártons, como pode é representado em Fig. 2.8.

O número de pártons (compartilhando o momentum do próton) que podem ser investigados pelo fóton virtual aumenta com Q^2 . Também há um aumento na probabilidade de encontrar um quark com pequeno x , enquanto há uma diminuição da possibilidade de encontrar um quark com grande x , já que quarks com grande momentum irradiam glúons, o mesmo pode ser visto em Fig. 2.6.

A evolução de $q_i(x, Q^2)$ em Q^2 é determinada pela QCD através das equações propostas

Figura 2.8 - Ilustração da estrutura do próton, distribuição de pártons, sendo sondada pelo fóton virtual conforme Q^2 aumenta.



por Dokshitzer, Gribov, Lipatov, Altarelli e Parisi [13–15] as quais são dadas expressas da seguinte forma:

$$\frac{\partial q_i(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} [q_i(y, Q^2) P_{qq}(x/y) + g(y, Q^2) P_{qg}(x/y)], \quad (2.3)$$

para a distribuição de quarks de sabor i , e por

$$\frac{\partial g(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[\sum_i q_i(y, Q^2) P_{gq}(x/y) + g(y, Q^2) P_{gg}(x/y) \right], \quad (2.4)$$

para glúons. As funções P representam a probabilidade de um glúon de fração de momentum x vir de um quark com fração de momentum y do párton.

As equações (2.3) e (2.4) são as equações DGLAP (*Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi*) e foram obtidas separadamente por Dokshitzer [13], Gribov e Lipatov [14], e Altarelli e Parisi [15]. Para facilitar a interpretação das equações DGLAP, apresentamos nas Fig. 2.9 e Fig. 2.10 as equações DGLAP de forma simbólica.

Uma representação física da equação de evolução DGLAP é apresentada na Fig. 2.11 a qual usa o próton na representação do plano transversal. No lado esquerdo da Fig. 2.11 mostramos o pártons dentro do próton, visto a partir do fóton virtual com virtualidade Q_0 que corresponde a escala de resolução $1/Q_0$ no plano transversal. O lado direito apresenta o que acontece quando o mesmo próton é visto por um fóton virtual com uma virtualidade

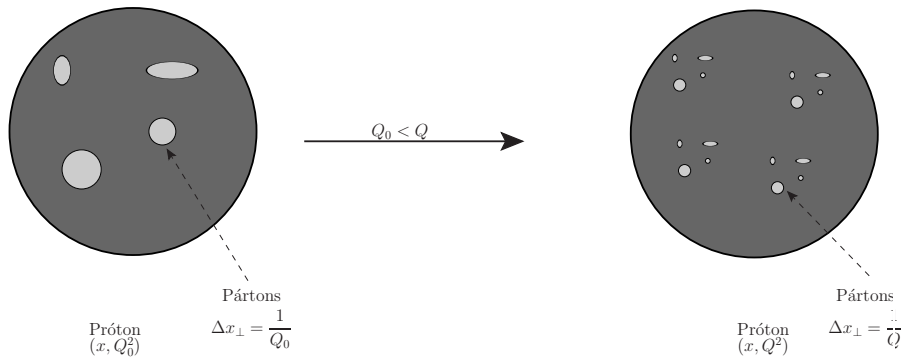
Figura 2.9 - Equação DGLAP em sua forma simbólica para o setor de quarks (2.3).

$$\frac{\partial}{\partial \ln Q^2} \left(q_i(x, Q^2) \right) = \begin{array}{c} q_i(y, Q^2) \\ \nearrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ P_{qq} \left(\frac{x}{y} \right) \end{array} + \begin{array}{c} g(y, Q^2) \\ \text{---} \\ \searrow \\ \nearrow \\ P_{gq} \left(\frac{x}{y} \right) \end{array}$$

Figura 2.10 - Equação DGLAP em sua forma simbólica para o setor de glúons (2.4).

$$\frac{\partial}{\partial \ln Q^2} \left(g(x, Q^2) \right) = \sum_i \begin{array}{c} q_i(y, Q^2) \\ \nearrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ P_{gq} \left(\frac{x}{y} \right) \end{array} + \begin{array}{c} g(y, Q^2) \\ \text{---} \\ \searrow \\ \nearrow \\ P_{gg} \left(\frac{x}{y} \right) \end{array}$$

Figura 2.11 - Ilustração da equação de evolução DGLAP. As bolhas indicam os pártons (quarks e glúons).

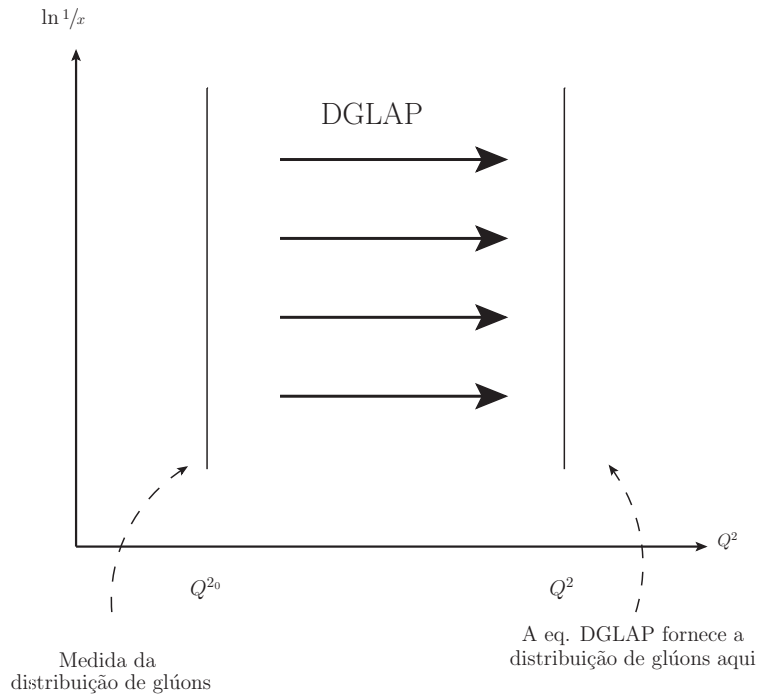


mais elevada, $Q > Q_0$, a qual permite uma resolução do próton a pequenas distâncias no plano transversal, $1/Q$. Quando os pártons (quarks) são sondados a pequenas distâncias o fóton pode distinguir que cada quark pode flutuar em si mesmo junto com vários glúons e/ou pares quark-antiquark, assim como visto a partir das funções de desdobramento, P_{ij} .

A Fig. 2.12 apresenta de maneira lúdica como a equação DGLAP funciona no plano $Q^2 \times \ln 1/x$. O valor inicial da função de distribuição para a evolução DGLAP é dado por uma escala inicial Q_0^2 para todos os valores de x relevantes, i. e., os valores iniciais estão representados pelos valores que formam a linha vertical mais a esquerda na Fig.2.12. Dada a condição inicial, as equações DGLAP fornecem a função de distribuição para outro valor de virtualidade Q^2 , assim como representado na figura.

A pQCD, através das equações DGLAP, permite somente determinar a evolução das distribuições partônicas. Já os parâmetros iniciais das equações DGLAP são de natureza não perturbativa. Logo, os mesmos precisam ser extraídos experimentalmente para uma dada virtualidade inicial Q_0^2 . Uma vez que as PDFs são assumidas universais, e independem do processo considerado, após determiná-las para um determinado valor de Q^2 podemos

Figura 2.12 - Equação DGLAP no plano $Q^2 \times \ln 1/x$.



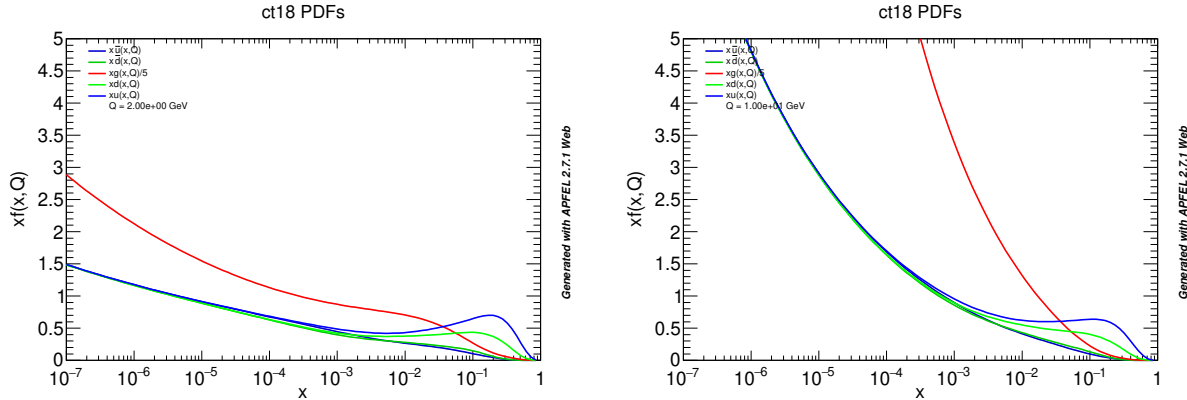
determinar seus valores para outras escalas de resolução, e assim utilizá-las no cálculo do processo de interesse [22].

As PDFs são normalmente determinadas através de análises globais dos dados do DIS e processos relacionados. As análises incluem o maior número possível de observáveis para restringir as várias PDFs, pois cada processo fornece uma informação específica para uma dada distribuição em uma região cinemática. Vários grupos, utilizando diferentes técnicas, produzem parametrizações para as PDFs.

Na Fig. 2.13, podemos ver a PDF obtida pelo grupo CTEQ [26] denominada de parametrização CT18, na qual é apresentada a distribuição de quarks leves e glúons para os valores de virtualidade $Q^2 = 4 \text{ GeV}^2$ e $Q^2 = 100 \text{ GeV}^2$ respectivamente.

Observamos que as distribuições de quark u e d dominam para grande x devido à contribuição dos quarks de valência. Por outro lado, observa-se que as distribuições de quarks e glúons crescem para pequeno x . Além disso, verifica-se que a evolução DGLAP, a qual descreve a evolução entre $Q^2 = 4$ e $Q^2 = 100 \text{ GeV}^2$, implica num crescimento mais acentuado destas distribuições com o crescimento da virtualidade. Os resultados apresentados demonstram que no regime de pequenos valores de x , a estrutura do próton é dominada por glúons e, portanto, a dinâmica QCD neste regime é determinada pela dinâmica de interação gluônica.

Figura 2.13 - Distribuição partônica de quarks leves e glúons no interior do próton de acordo com as parametrizações CT18, para (a) $Q^2 = 4 \text{ GeV}^2$ e (b) $Q^2 = 100 \text{ GeV}^2$ [3].
 Figura gerada usando a ferramenta APFEL [4, 5]



2.3 Dinâmica para pequeno x

Nos processos do DIS o comportamento da QCD para altas energias é sondado por meio da análise de observáveis. O experimento ep realizado em HERA forneceu dados da região cinemática de pequenos x ($\geq 10^{-6}$). Uma das mais importantes observações obtidas em HERA foi o forte crescimento da função de estrutura $F_2(x, Q^2)$, e portanto o crescimento da seção de choque do processo conforme o decréscimo de x .

A interpretação e descrição desse comportamento motiva intensas pesquisas. O principal aspecto em discussão refere-se à determinação da dinâmica da QCD no regime cinemático de pequeno x . Nesta seção, apresentaremos uma análise dos diferentes modelos para dinâmica na região de pequeno x .

2.3.1 DGLAP na região de pequeno x

Vamos considerar as equações DGLAP apresentadas na seção anterior, eq. (2.3) e eq.(2.4). Da análise das funções de desdobramento P_{ij} para o regime de pequeno x , a função de desdobramento para o setor de glúons, $P_{gq}(z)$ e $P_{gg}(z)$, tem singularidades para $z \rightarrow 0$. As outras funções de desdobramento, associadas ao setor de quarks, são regulares neste limite. Logo, o comportamento das distribuições partônicas para pequeno x é determinado pela dinâmica gluônica. Da análise realizada na seção anterior tem-se que, para pequeno x , a dinâmica é dominada por glúons. Neste regime, a equação DGLAP para glúons pode ser aproximada por

$$\frac{\partial g(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} g(y, Q^2) P_{gg}(x/y). \quad (2.5)$$

No apêndice A apresentamos as soluções analíticas desta equação para os casos em que a condição inicial é singular ou bem comportada. Tais resultados demonstram que a DGLAP no regime de pequeno x prediz os seguintes comportamentos para a distribuição de glúons:

- Para o caso singular:

$$xg(x, Q^2) = e^{\left(\omega_0 Y + \frac{\alpha_s N_c \Gamma}{\pi \omega_0}\right)};$$

- Para o caso bem comportado:

$$xg(x, Q^2) \approx e^{2\sqrt{\frac{\alpha_s N_c \Gamma Y}{\pi}}};$$

Para $Y \equiv \ln 1/x$ e $\Gamma \equiv \ln Q^2/Q_0^2$. Comparando as duas equações acima, podemos concluir que para a região $\omega_0 \gg \sqrt{\frac{\alpha_s N_c \Gamma Y}{\pi}}$ a condição inicial define a solução e o comportamento assintótico, porém para grande virtualidade, ($\alpha_s \Gamma \gg Y$), o ponto de sela determina o comportamento assintótico de $xg(x, Q^2)$. Assim o comportamento assintótico da função de distribuição tem a seguinte forma:

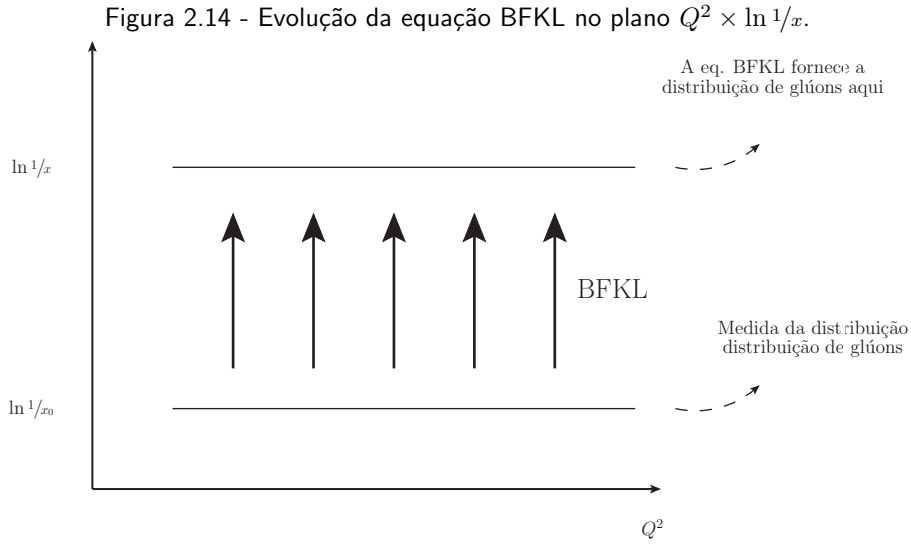
$$xg(x, Q^2) \approx \exp\left(\sqrt{\frac{\alpha_s N_c \Gamma Y}{\pi}}\right) = \exp\left(\frac{\alpha_s N_c}{\pi} \ln\left(\frac{Q^2}{Q_0^2}\right) \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Ou, com crescimento muito mais acentuado a partir do aumento de Q^2 ou da diminuição de x . Então, concluímos que no limite de pequeno x a solução da DGLAP é determinado por um crescimento assintótico na distribuição de glúons [27]. Além disso, temos que no limite de pequeno x e grande Q^2 a equação DGLAP ressona os logaritmos $\alpha_s \ln 1/x \ln Q^2$. Esta aproximação, denominanda aproximação de duplo logaritmo (DLA) é válida na região $\alpha_s \ll 1$, $\alpha_s \ln 1/x \ll 1$ e $\alpha_s \ln 1/x \ln Q^2 \approx 1$.

Até então determinamos os possíveis comportamentos para a distribuição de glúons na região de pequeno x . Agora, se considerarmos que a função de estrutura é $F_2(x, Q^2) = \sum_i e_i^2 q_i(x, Q^2)$. Obtemos que no regime cinemático onde a distribuição de glúons domina,

$$\frac{\partial F_2(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \sum_f e_f^2 xg(x, Q^2) = \frac{2\alpha_s}{9\pi} xg(x, Q^2),$$

para $N_f = 3$. Sendo assim, a distribuição de glúons determina o comportamento de violação de escalonamento da função de estrutura e o crescimento do conteúdo de quarks para



pequeno x .

2.3.2 A equação BFKL

Para valores muito pequenos de x , o logaritmo da energia torna-se muito grande, implicando em $\alpha_s \ln 1/x \approx 1$ e os diagramas associados devem ser ressomadas.

O procedimento para a ressona de grandes logaritmos de $1/x$ foi proposto por *Balitsky, Fadin, Kuraev e Lipatov* (BFKL) [16–19], sendo dada, em ordem dominante, por:

$$\frac{\partial f(x, k^2)}{\partial \ln(1/x)} = \frac{1}{\pi} \int d^2Q K_{\text{BFKL}}(k, Q) f(x, Q^2), \quad (2.6)$$

onde $f(x, Q^2)$ é a distribuição de glúons não integrada, a qual nos dá a probabilidade de encontrar um glúon com fração de momentum x do hádron e momentum transversal k_\perp , a relação entre a eq. BFKL e a distribuição de glúons usual, é dada por

$$xg(x, Q^2) = \int_0^{Q^2} \frac{dk_\perp^2}{k_\perp^2} f(x, k_\perp^2). \quad (2.7)$$

A equação BFKL nos fornece a evolução em x da função de distribuição, o mesmo é demonstrado na Fig. 2.14 onde é ilustrada a implementação da equação BFKL no plano $Q^2 \times \ln 1/x$. Ao comparar a Fig. 2.14 com a Fig. 2.12 podemos notar a diferença essencial entre a evolução BFKL em x e a evolução DGLAP em Q^2 .

A representação diferencial da eq. BFKL em ordem dominante, com α_s fixo, pode ser

expressa por [12, 27]:

$$\frac{\partial f(x, k^2)}{\partial \ln(1/x)} = \frac{\alpha_s N_c}{\pi^2} \int \frac{d^2 Q}{(k-Q)^2} \left[f(x, Q^2) - \frac{k^2}{2Q^2} f(x, k^2) \right]. \quad (2.8)$$

A solução geral da eq. BFKL é dada pela expansão sobre as autofunções do Kernel BFKL, K_{BFKL} , que são do tipo

$$k_{\perp}^{2(\gamma-1)} e^{in\phi_k},$$

onde γ é um número complexo qualquer, ϕ_k é o ângulo entre \vec{k}_{\perp} e um eixo qualquer, e n um número inteiro.

Definindo $\gamma \equiv 1/2 + i\nu$, para ν real, a solução geral fica

$$f(x, k^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{\alpha_s N_c}{\pi} \chi(n, \nu) Y\right) l^{-1+2i\nu} k^{-1-2i\nu} e^{in(\phi_l - \phi'_k)} \frac{d\nu}{2\pi^2}, \quad (2.9)$$

onde

$$\chi(n, \nu) = 2\Psi(1) - \Psi\left(\frac{1+|n|}{2} + i\nu\right) - \Psi\left(\frac{1+|n|}{2} - i\nu\right),$$

é o autovalor das autofunções do operador do Kernel e

$$\Psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) = \int_0^1 \frac{t^{z-1} - 1}{t-1} dt + \Psi(1),$$

com $z \equiv e^{i(\phi_q - \phi_k)}$.

A solução da equação BFKL na aproximação de difusão, em que $l_{\perp} \sim k_{\perp}$, i.e., em que a escala dos dois momentum transversos envolvidos no problema não são tão diferentes um do outro é dada por:

$$f(x, k^2) \approx \frac{1}{2\pi^2 l_{\perp} k_{\perp}} \sqrt{\frac{\pi^2}{14\zeta(3)\alpha_s N_c Y}} \exp\left((\alpha_p - 1)Y - \frac{\pi \ln^2(l_{\perp}/l'_{\perp})}{14\zeta(3)\alpha_s N_c Y}\right), \quad (2.10)$$

onde $\alpha_p - 1 = \frac{4\alpha_s N_c}{\pi} \ln 2$.

A característica essencial da eq. (2.10) é que a distribuição de glúons não integrada cresce com potência de $1/x$,

$$f(x, k^2) \sim \left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha_p - 1}.$$

Tal crescimento da distribuição de glúons em pequeno x é ainda mais rápido do que aquele

previsto pela DGLAP, ou seja, a solução de difusão da BFKL cresce mais rapidamente do que a DGLAP-DLA na região de pequeno x .

2.4 Efeitos não lineares na QCD

A dinâmica DGLAP para a região de pequeno x prevê um crescimento indefinido do número de glúons no interior do próton conforme ocorre o aumento de Q^2 , do mesmo modo a equação BFKL tem a mesma conclusão com a diminuição de x . Podemos ver isto de modo ilustrativo na Fig. 2.15, que mostra como se dá a evolução da dinâmica no interior do próton. Como afirmado anteriormente, seja aumentando os valores de Q^2 ou diminuindo os valores de x o número de glúons dentro do próton cresce indefinidamente, segundo as equações DGLAP e BFKL. Em particular, o crescimento ilimitado do número de glúons implica que a área ocupada por estes pode tornar-se maior do que a área do próton, o que seria não-físico. Tal resultado indica o limite de validade destas dinâmicas e a necessidade de levarmos em consideração efeitos associados à alta densidade de glúons presente no regime de pequeno x . Devemos atentar de que tanto a DGLAP quanto a BFKL somente consideram o processo de decaimento $A \rightarrow B + C$, sendo por isso denominadas dinâmicas lineares. Gribov, Levin e Ryskin [28, 29] propuseram que a energias muito altas devemos considerar processos de recombinação $A + B \rightarrow C$. Quando este processo é considerado, a equação DGLAP para glúons no regime de pequeno x , é alterada pela introdução de um termo quadrático, e passa a ser dada por

$$Q^2 \frac{\partial^2 xg(x, Q^2)}{\partial \ln(1/x) \partial Q^2} = \frac{\alpha_s N_c}{\pi} xg(x, Q^2) - \frac{4\alpha_s^2 N_c}{3C_F R^2} \frac{1}{Q^2} [xg(x, Q^2)]^2. \quad (2.11)$$

O sinal negativo do termo não linear evidencia que o crescimento acentuado da distribuição de glúons é diminuído pelo termo responsável pela recombinação de glúons. Essa equação é denominada equação GLR [28].

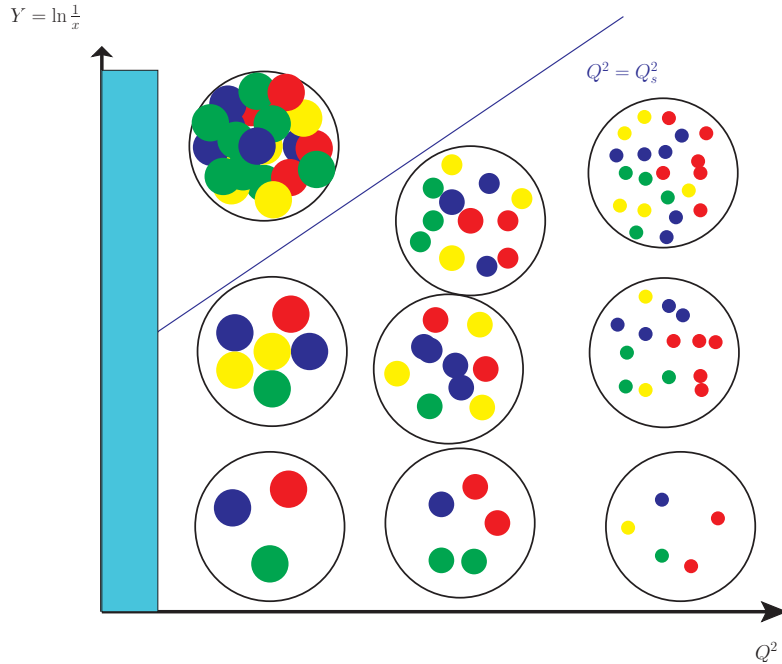
A partir da equação GLR, eq. (2.11), podemos estimar a escala na qual os efeitos não lineares passam a contribuir a fim de que obtenhamos a saturação do crescimento de $xg(x, Q^2)$, a qual ocorrerá quando os termos não-linear e linear se tornarem idênticos, i.e., $Q^2 \equiv Q_s^2$:

$$Q_s^2 = \frac{4\pi\alpha_s}{3C_F R^2} xg(x, Q_s^2).$$

Na Fig. 2.15 podemos ver a ilustração da escala de saturação Q_s^2 , a qual separa o regime linear $Q^2 > Q_s^2$ do regime não-linear, ou de saturação, $Q^2 < Q_s^2$.

Apesar de que a GLR implicar na saturação ao levar a sua solução ao regime assintótico,

Figura 2.15 - Ilustração da evolução da dinâmica no interior do próton no plano transversal.



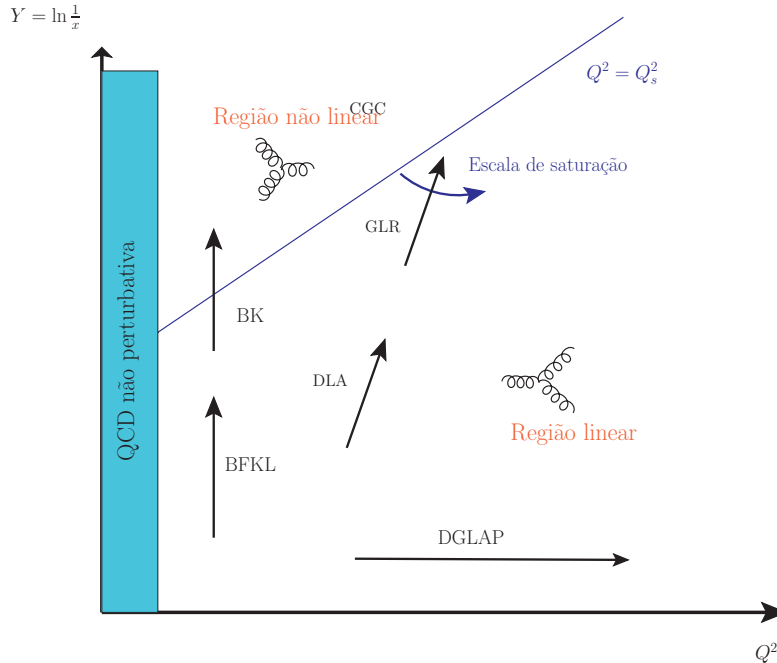
seu regime de validade termina antes que a saturação seja alcançada. Isto deve-se ao fato que a equação GLR é um truncamento no primeiro termo não linear do desenvolvimento em série de potências da densidade. Por isso, antes que a saturação esteja presente, os termos de mais alta ordem serão importantes e não podem ser desconsiderados. Então, a equação GLR não é válida no regime de x muito pequeno.

A partir do trabalho de Gribov, Levin e Ryskin gerou-se vários trabalhos, cujo objetivo era desenvolver uma teoria da saturação. e McLerran e Venugopalan (MV) propuseram uma nova abordagem para tratar o campo de glúons no regime de altas densidades partônicas [30–32]. A evolução da abordagem constitui hoje a teoria efetiva da QCD em altas energias, denominada de Condensado de Vidros de Cor (Color Glass Condensate) [33, 34], o que levou às equações Jalilian-Iancu-McLerran-Weigert-Leonidov-Kovner (JIMWLK) [35–37]. O CGC ganha seu nome devido as principais características do sistema que a teoria descreve: a “cor” vem por ser um sistema composto de glúons, o “vidro” é devido a sua dinâmica interna estar congelado, nas escalas de tempo envolvidas no processo de espalhamento o sistema não varia, e o “condensado” é porque o sistema é caracterizado por um grande número de ocupação e fortes campos coloridos.

Uma derivação alternativa a JIMWLK, seguida por Balitsky, e derivada independentemente por Kovchegov no formalismo de dipolo levaram aos mesmos resultados, conhecida como a equação de Balitsky - Kovchegov (BK), a qual será abordada mais a frente. Apesar de não

se conhecer uma solução analítica completa da equação BK, suas soluções assintóticas são usadas para estudos analíticos e numéricos.

Figura 2.16 - Região de aplicação das equações de evolução no plano transversal.



Com intenção de sintetizarmos as implicações dos estudos dos efeitos não-lineares para as equações de evolução, podemos observar na Fig. 2.16 o regime de aplicação/válidade das diferentes equações de evolução em relação à variável que é evoluída, assim como indicamos a região não perturbativa, a linha que separa as regiões linear e não-linear e o processo avaliado em cada umas das regiões. A equação de evolução DGLAP evolui em Q^2 conforme fixamos x , desta forma o sistema torna-se diluído, com o aumento da virtualidade, já que mesmo que o número de glúons cresça, a área efetiva para interação de cada um torna-se menor. Já a equação BFKL evolui em x para Q^2 fixo, conforme a energia aumenta o número de pártons dentro do próton aumenta, ao contrário do caso DGLAP, a área de cada glúon permanece a mesma, uma vez que Q^2 é fixo. A aproximação DLA é um limite comum para as equações DGLAP e BFKL onde a evolução se dá tanto em Q^2 quando em x . A equação GLR também evolui tanto em Q^2 quando em x , porém a mesma é responsável por definir a escala de saturação, que é a linha que separa as regiões linear e não-linear, e pode ser compreendida como o inverso da área transversa dentro da qual a probabilidade de encontrar mais que um glúon é da ordem de um.

A equação BK generaliza a equação BFKL pela consideração das correções não-lineares associadas a alta densidade gluônica e descreve a transição entre os regimes lineares e não-

liares, assim como o regime saturado onde o CGC é formado. Como veremos na próxima seção, a evolução dinâmica da distribuição de glúons determina o comportamento dos observáveis atuais e futuros, e é fundamental para a interpretação dos dados experimentais e predição dos observáveis.

2.5 Formalismo de Dipolos

Até então trabalhamos a partir do referencial de momentum infinito onde o fóton virtual interage com o próton, o qual é descrito como um sistema de quarks e glúons, os pártons. Aliás, toda a evolução da QCD se deu dentro do próton, e suas distribuições partônicas evoluem como uma função da virtualidade Q^2 e do x de Bjorken.

Por outro lado, podemos descrever o mesmo espalhamento fóton virtual-próton, γ^*p , em um referencial no qual o momentum do próton é pequeno. Neste referencial, o espalhamento profundamente inelástico elétron-próton é descrito da seguinte maneira: primeiramente o elétron incidente emite um fóton virtual γ^* , que então flutua em um dipolo de cor quark-antiquark ($q\bar{q}$), e o dipolo espalha com o próton.

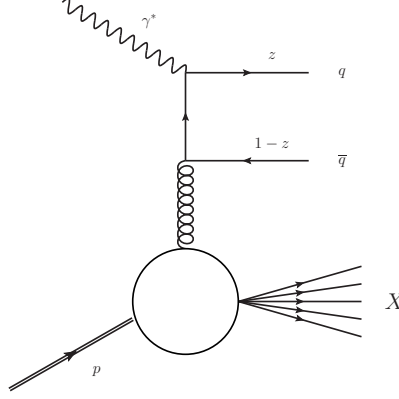
Tal representação, denominada representação (ou formalismo) de dipolos, é válida no regime de pequeno x , onde o tempo de vida da flutuação quântica que produz o par $q\bar{q}$ é maior que a escala de tempo típica da interação [12]. A descrição do DIS nesta representação nos permite introduzir uma forma mais simples as correções não-lineares na dinâmica QCD e por isso será considerada no restante desta dissertação.

No formalismo de dipolos, a seção de choque total do processo γ^*p pode ser expressa de seguinte forma [12]:

$$\sigma_{TL}^{\gamma^*p}(Q^2, Y) = \sum_i \int d^2r_{\perp} \int_0^1 dz |\psi_{TL}^i(r_{\perp}, z; Q^2)|^2 \sigma_{q\bar{q}}(r_{\perp}, Y),$$

onde a seção de choque total é escrita de forma fatorizada, seguindo a descrição do processo detalhado na Fig. 2.17, das convoluções entre a função de onda longitudinal e transversal do fóton virtual e a seção de choque transversal do dipolo-próton $\sigma_{q\bar{q}}$. Além disso, Y é definido como $Y \equiv \ln 1/x$ e $|\psi_{TL}^i(r_{\perp}, z; Q^2)|$ são as funções de onda do fóton virtual (transversal e longitudinal) que fornecem as densidades de probabilidade para um fóton se separar em um dipolo com tamanho transversal r_{\perp} , as quais podem ser obtidas explicitamente a partir da QED perturbativa, sendo dadas por:

Figura 2.17 - Diagrama que representa o processo γ^*p na representação de dipolos.



$$\sum_{s,s',\text{cor}} |\psi_L(z,r_\perp)|^2 = e_i^2 \frac{2N_c \alpha_{em}}{\pi^2} Q^2 z^2 (1-z)^2 K_0^2(\epsilon r_\perp) \quad (2.12)$$

e

$$\sum_{s,s',\text{cor}} |\psi_{ss'}^T(z,r_\perp)|^2 = e_i^2 \frac{N_c \alpha_{em}}{2\pi^2} \{ [z^2 + (1-z)^2] \epsilon^2 K_1^2(\epsilon r) + m^2 K_0^2(\epsilon r) \}. \quad (2.13)$$

Estas funções podem ser derivadas a partir da teoria de campos nas coordenadas de cone de luz, apresentado no apêndice B, tal como consta no apêndice C.

Do que foi visto no início desse capítulo, a seção de choque conecta-se com a função de estrutura, F_2 , através da seguinte relação

$$F_2(x, Q_s^2) = \frac{Q^2}{4\pi^2 \alpha_{em}} \left[\sigma_T^{\gamma^*p}(x, Q_s^2) + \sigma_L^{\gamma^*p}(x, Q_s^2) \right].$$

Do teorema óptico [12], a seção de choque dipolo-próton, a qual deve ser modelada, pode ser expressa em termos da amplitude de espalhamento $N(Y, r_\perp, b)$, para o caso independente do parâmetro de impacto a seção de choque é dada por

$$\sigma_{q\bar{q}} = \sigma_0 N(Y, r_\perp),$$

onde o parâmetro de impacto é fatorado para dentro da constante σ_0 que é igual a $2\pi R_p^2$ onde R_p^2 é o raio do próton. Perceba que neste formalismo o fator de fluxo está incluído

na definição da amplitude de espalhamento, e N é uma quantidade adimensional. A sua interpretação é nada mais do que a probabilidade para o dipolo $q\bar{q}$ espalhar-se com o próton.

Portanto, no formalismo de dipolos, a amplitude de espalhamento, $N(r_{\perp}, Y)$, carrega toda a informação sobre a dinâmica QCD, sendo solução da equação de evolução considerada. Como veremos no próximo capítulo, quando os efeitos não-lineares são considerados, a evolução de $N(r_{\perp}, Y)$ é descrita pela equação BK. Já no regime linear, $N(r_{\perp}, Y)$ satisfaz a equação BFKL e/ou a DGLAP no regime de duplo logaritmo dominante. Nestes limites é possível expressar $N(r_{\perp}, Y)$ em função da distribuição de glúons não integrada $f(x, k_{\perp})$ e da distribuição de glúons integrada $g(x, Q^2)$, recuperando os resultados derivados no referencial de momentum infinito para o regime linear da dinâmica QCD.

2.6 Conclusão

Ao longo deste capítulo, abordamos os conceitos base para se descrever e compreender a dinâmica das interações fortes. Assim, abordamos o estudo da estrutura do próton que comprova a dinâmica hadrônica através das funções de distribuição partônicas que são obtidas a partir das equações de evolução. Da análise global dos dados do DIS, como visto, infere-se parametrizações para as funções de distribuição partônicas que evoluem através das equações de evolução. Os dados apresentados pela parametrização CT18 trazem que a dinâmica em altas energias, regime de pequeno x , é dominada pela dinâmica de interação gluônica, i.e., a distribuição partônica é dominada por glúons.

Portanto, apresentamos a dinâmica dominada pelas interações gluônicas que é o regime de pequeno x o qual é dado pela equação DGLAP na aproximação DLA e pela equação BFKL na aproximação de difusão. Vimos que as equações de evolução lineares, DGLAP e BFKL, fornecerem soluções para o regime de pequeno x , mas aumentando os valores de Q^2 ou diminuindo os valores de x o número de glúons dentro do próton cresce indefinidamente. Isto implica que a área ocupada por estes pode tornar-se maior do que a área do próton, o que seria não-físico. Logo isso indica que há um limite de validade destas dinâmicas e, portanto, devemos considerar efeitos de recombinação que estão associados a alta densidade de glúons presentes no regime de pequeno x . Por fim, trabalhamos de maneira qualitativa o formalismo de dipolos que é um modo mais simples de descrevermos os efeitos não-lineares fazendo que toda a nossa ignorância em relação à dinâmica hadrônica esteja na amplitude espalhamento.

No próximo capítulo abordaremos os efeitos não-lineares a partir da construção de uma equação de evolução não-linear cuja solução não viole a unitariedade e assim descreva o

regime saturado.

3 A Equação Balitsky-Kovchegov e suas soluções em ordem dominante

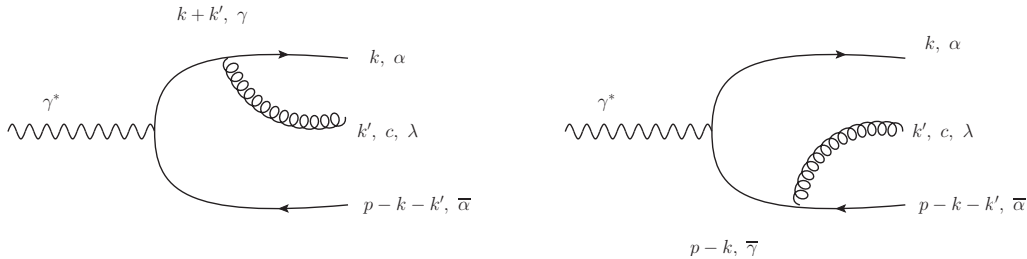
No capítulo anterior trabalhamos o DIS e seus desdobramentos nas equações de evolução lineares e os efeitos não lineares que não são incorporados pelas mesmas. Neste capítulo iremos derivar a equação Balitsky-Kovchegov (BK) que é obtida a partir da inclusão dos efeitos não-lineares. Após, iremos solucionar a equação em ordem dominante. Tais estudos formam a base da análise que será realizada no próximo capítulo, onde estudaremos as soluções da equação BK no regime saturado considerando as correções além da ordem dominante.

3.1 Derivação da equação BK

Seja um dipolo singleto de cor formado por um quark e um antiquark, gerado a partir de um fóton virtual. Temos que se o dipolo sofre um *boost* para uma rapidez maior, i.e., é fornecida maior energia ao dipolo, e assim, haverá mais espaço de fase disponível, portanto tanto o quark quanto o antiquark podem emitir um glúon. A emissão de glúons é uma correção de ordem superior ($\sim \alpha_s$) para a função de onda do fóton virtual.

No que segue iremos derivar a dependência energética da amplitude de espalhamento a partir do cálculo da amplitude do processo $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g$, representado na Fig. 3.1, onde temos os diagramas de emissão do glúons pelo dipolo singleto de cor.

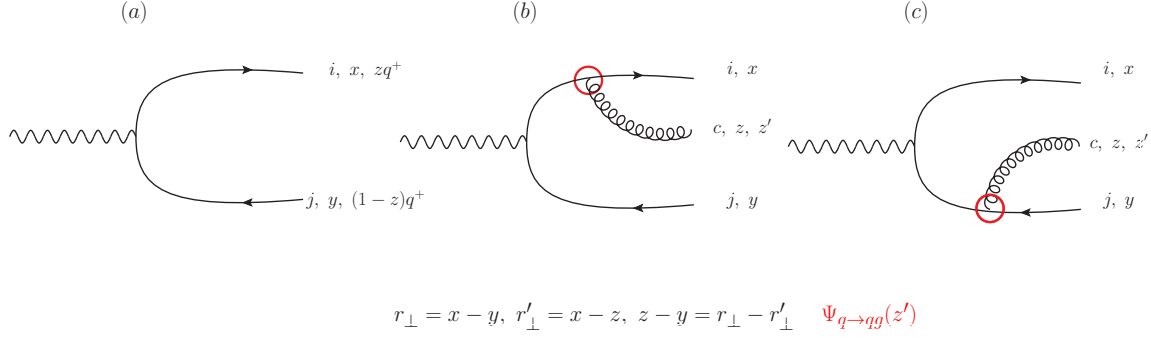
Figura 3.1 - Os diagramas que contribuem para o processo $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g$. No primeiro diagrama, o glúon é emitido pelo quark. Já no segundo diagrama o glúon é emitido pelo antiquark.



Os diagramas que contribuem para o processo $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g$ apresentados na Fig. 3.1 são: à esquerda, temos a emissão de um glúon com momentum k' , cor c e polarização λ a partir de um quark com momentum k e cor α . À direita, temos a emissão de um glúon com momentum k' , cor c e polarização λ a partir de um antiquark com momentum $p - k - k'$ e cor $\bar{\alpha}$.

Usando os resultados derivados no apêndice C, as funções de onda do fóton virtual com

Figura 3.2 - A representação dos termos presentes na equação(3.1), onde a imagem (a) retrata o segundo termo, já as imagens (b) e (c) representam o terceiro termo.



polarização longitudinal e transversal, $\psi_{L,T}(z, r_{\perp})$, e o resultado para a amplitude de emissão do glúon $\Psi_{q \rightarrow qg}(z, r_{\perp})$ podemos escrever a função de onda do fóton virtual agora na ordem dominante, com as contribuições em α_{em} e em α_s como:

$$\begin{aligned} |\gamma^+\rangle &= |\gamma^*\rangle_0 + \frac{1}{\sqrt{N_c}} \int dz d^2 r_{\perp} \Psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(z, r_{\perp}) C(r_{\perp}) |q_{\alpha}(x) \bar{q}_{\bar{\alpha}}(y)\rangle_0 \\ &+ \frac{1}{\sqrt{N_c}} \int dz d^2 r_{\perp} dz' d^2 r'_{\perp} \Psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g}(z, z', r_{\perp}, r'_{\perp}) |q_{\alpha}(x) \bar{q}_{\bar{\alpha}}(y) g_c(z)\rangle_0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Aqui, os fatores $1/\sqrt{N_c}$ foram adicionados com o objetivo de manter o produto interno $\langle \gamma^* | \gamma^* \rangle$ normalizado. O produto interno $\langle \gamma^* | \gamma^* \rangle$ contém uma soma sobre todas as cores de quarks i, j e sobre a cor do glúon c de forma implícita que fica mais clara ao representarmos a equação (3.1) na Fig. 3.2, onde x, y e z representam as coordenadas transversais do quark, antiquark e glúon, respectivamente. Além disso, a função $C(r_{\perp})$ é adicionada ao segundo termo do lado direito da eq. (3.1), com a finalidade de não alterar a normalização da função de onda.

Vamos então encontrar a expressão da função $\Psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g}(z, z', r_{\perp}, r'_{\perp})$ para escrevermos a função de onda do fóton virtual de forma completa. Temos que $\Psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g}(z, z', r_{\perp}, r'_{\perp})$ é a soma das contribuições apresentadas na Fig. 3.1, logo:

$$\begin{aligned} \Psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g}(z, z', r_{\perp}, r'_{\perp}) &= \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\bar{\alpha}\gamma}(k_{\perp} + k'_{\perp}, z) \Psi_{q \rightarrow qg}^{\gamma\alpha}(k'_{\perp}, z') \\ &+ \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\bar{\gamma}\alpha}(k_{\perp} + k'_{\perp}, z) \Psi_{\bar{q} \rightarrow \bar{q}g}^{\bar{\gamma}\alpha}(k'_{\perp}, z'). \end{aligned}$$

Das regras de Feynman apresentadas no apêndice D ao calcularmos a probabilidade de emissão do glúon, mais especificamente a terceira regra, vemos que $\Psi_{\bar{q} \rightarrow \bar{q}g}^{\bar{\gamma}\alpha}(k'_{\perp}, z') =$

$-\Psi_{q \rightarrow qg}^{\bar{\alpha}\gamma}(k'_\perp, z')$. Com isso,

$$\begin{aligned}\Psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g}(z, z', r_\perp, r'_\perp) &= \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\bar{\alpha}\gamma}(k_\perp + k'_\perp, z) \Psi_{q \rightarrow qg}^{\gamma\alpha}(k'_\perp, z') \\ &\quad - \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\bar{\gamma}\alpha}(k_\perp + k'_\perp, z) \Psi_{q \rightarrow qg}^{\bar{\alpha}\gamma}(k'_\perp, z').\end{aligned}$$

A partir da solução da função $\Psi_{q \rightarrow qg}(k'_\perp, z')$ obtida em detalhes no apêndice D, temos:

$$\Psi_{q \rightarrow qg}^{\alpha\beta}(k_\perp) = -\frac{\sqrt{2}g_s t_{\alpha\beta}^c}{\sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{z}} \frac{k_\perp \cdot \varepsilon_\perp^\lambda}{k_\perp^2} \delta_{s,s'},$$

ficamos com

$$\begin{aligned}\Psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g}(z, z', r_\perp, r'_\perp) &= \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\bar{\alpha}\gamma}(k_\perp + k'_\perp, z) \left(-\frac{\sqrt{2}g_s t_{\gamma\alpha}^c}{\sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{z}} \frac{k_\perp \cdot \varepsilon_\perp^\lambda}{k_\perp^2} \delta_{s,s'} \right) \\ &\quad - \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\bar{\gamma}\alpha}(k_\perp + k'_\perp, z) \left(-\frac{\sqrt{2}g_s t_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}}^c}{\sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{z}} \frac{k_\perp \cdot \varepsilon_\perp^\lambda}{k_\perp^2} \delta_{s,s'} \right) \\ &= -\frac{g_s}{\sqrt{4\pi^3} z'} \frac{k_\perp \cdot \varepsilon_\perp^\lambda}{k_\perp^2} \\ &\quad \times [\psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\bar{\alpha}\gamma}(k_\perp + k'_\perp, z) t_{\gamma\alpha}^c - \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\bar{\gamma}\alpha}(k_\perp + k'_\perp, z) t_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}}^c].\end{aligned}$$

A transformada de Fourier de $\Psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g}(z, z', r_\perp, r'_\perp)$ para o espaço de coordenadas, é dada por:

$$\begin{aligned}\Psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g}(z, z', r_\perp, r'_\perp) &= -\int \frac{d^2 k'_\perp}{\sqrt{(2\pi)^2}} \frac{d^2 k_\perp}{\sqrt{(2\pi)^2}} e^{ik_\perp \cdot r_\perp} e^{ik'_\perp \cdot r'_\perp} \frac{g_s}{\sqrt{4\pi^3} z'} \frac{k_\perp \cdot \varepsilon_\perp^\lambda}{k_\perp^2} \\ &\quad \times [\psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\bar{\alpha}\gamma}(k_\perp + k'_\perp, z) t_{\gamma\alpha}^c - \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\bar{\gamma}\alpha}(k_\perp + k'_\perp, z) t_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}}^c].\end{aligned}$$

O sobrescrito $\bar{\gamma}\alpha$ presente na função $\psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\bar{\gamma}\alpha}$ significa que é produzido um quark com cor α e um antiquark com cor $\bar{\gamma}$. A soma sobre índices repetidos de cor é subentendida, e devido a conservação da carga de cor, assim como a necessidade de o dipolo ser um singlete de

cor $\psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\bar{\alpha}\gamma} \sim \delta^{\bar{\alpha}\gamma}$, e assim $\psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\bar{\alpha}\gamma} t_{\gamma\alpha}^c \sim \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\bar{\alpha}\alpha} t_{\bar{\alpha}\alpha}^c$:

$$\begin{aligned} \Psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g}(z, z', r_\perp, r'_\perp) &= -\frac{g_s}{\sqrt{4\pi^3} z'} \int \frac{d^2 k'_\perp}{\sqrt{(2\pi)^2}} \int \frac{d^2 k_\perp}{\sqrt{(2\pi)^2}} \\ &\times \left[\psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(k_\perp + k'_\perp, z) t_{\bar{\alpha}\alpha}^c e^{ik_\perp \cdot r_\perp} e^{ik'_\perp \cdot r'_\perp} \right. \\ &\left. - \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\bar{\alpha}\alpha}(k_\perp, z) t_{\bar{\alpha}\alpha}^c e^{ik_\perp \cdot r_\perp} e^{ik'_\perp \cdot r'_\perp} \right] \frac{k'_\perp \cdot \varepsilon_\perp^\lambda}{k'_\perp{}^2}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

No primeiro termo da expressão acima, realizamos a mudança de variáveis $k \rightarrow k - k'$ e integramos sobre k ,

$$\int \frac{d^2 k_\perp}{2\pi} \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(k_\perp, z) t_{\bar{\alpha}\alpha}^c e^{i(k_\perp - k'_\perp) \cdot r_\perp} e^{ik'_\perp \cdot r'_\perp} = \int \frac{d^2 k_\perp}{2\pi} \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(k_\perp, z) t_{\bar{\alpha}\alpha}^c e^{ik'_\perp \cdot (r'_\perp - r_\perp)}.$$

Como

$$\int \frac{d^2 k_\perp}{2\pi} \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(k_\perp, z) e^{ik_\perp \cdot r_\perp} = \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(r_\perp, z), \quad (3.3)$$

temos que,

$$\int \frac{d^2 k_\perp}{2\pi} \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(k_\perp, z) t_{\bar{\alpha}\alpha}^c e^{i(k_\perp - k'_\perp) \cdot r_\perp} e^{ik'_\perp \cdot r'_\perp} = \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(r_\perp, z) t_{\bar{\alpha}\alpha}^c e^{ik'_\perp \cdot (r'_\perp - r_\perp)}.$$

Para o segundo termo,

$$\int \frac{d^2 k_\perp}{2\pi} \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(k_\perp, z) t_{\bar{\alpha}\alpha}^c e^{ik_\perp \cdot r_\perp} e^{ik'_\perp \cdot r'_\perp} = \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(r_\perp, z) t_{\bar{\alpha}\alpha}^c e^{ik'_\perp \cdot r'_\perp},$$

onde usamos o resultado obtido na expressão (3.3). Retornando para os resultados para a equação (3.2), obtemos

$$\begin{aligned} \Psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g}(z, z', r_\perp, r'_\perp) &= -\frac{g_s t_{\bar{\alpha}\alpha}^c}{4\pi^2 \sqrt{\pi} z'} \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(r_\perp, z) \\ &\times \int d^2 k'_\perp \left[e^{ik'_\perp \cdot (r'_\perp - r_\perp)} - e^{ik'_\perp \cdot r'_\perp} \right] \frac{k'_\perp \cdot \varepsilon_\perp^\lambda}{k'_\perp{}^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Antes de efetuarmos a integração, vamos observar a interpretação geométrica de r' . No primeiro caso, quando o glúon é emitido pelo quark, o momentum do glúon, k'_\perp , é o conjugado canônico de $r'_\perp - r_\perp$. Isso sugere que $r'_\perp - r_\perp$ seja a separação entre o quark e o glúon. De maneira similar, quando o glúon é emitido pelo antiquark, r'_\perp é o conjugado

canônico de k'_\perp , e assim r'_\perp é a separação entre o glúon e o antiquark. Em ambos os casos, r_\perp é a distância entre o quark e o antiquark, ou seja, r_\perp é o tamanho do dipolo.

Voltando para a transformação de Fourier, ainda precisamos calcular as duas integrais presentes. Podemos calculá-las usando o resultado apresentado no apêndice C e D ao calcular a transformação de Fourier para $\Psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g}$, logo:

$$\int d^2k'_\perp \left(e^{ik'_\perp \cdot (r'_\perp - r_\perp)} \right) \frac{k'_\perp \cdot \varepsilon_\perp^\lambda}{k'^2_\perp} = 2\pi i \frac{\varepsilon_\perp^\lambda \cdot (r'_\perp - r_\perp)}{(r'_\perp - r_\perp)^2},$$

e

$$\int d^2k'_\perp \left(-e^{ik'_\perp \cdot r'_\perp} \right) \frac{k'_\perp \cdot \varepsilon_\perp^\lambda}{k'^2_\perp} = -2\pi i \frac{\varepsilon_\perp^\lambda \cdot r'_\perp}{(r'_\perp - r_\perp)^2}.$$

Retornando para a expressão (3.4),

$$\Psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g}(z, z', r_\perp, r'_\perp) = -\frac{ig_s}{2\pi\sqrt{\pi z'}} \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(r_\perp, z) \left[\frac{\varepsilon_\perp^\lambda \cdot r'_\perp}{r'^2_\perp} - \frac{\varepsilon_\perp^\lambda \cdot (r'_\perp - r_\perp)}{(r'_\perp - r_\perp)^2} \right].$$

Considerando agora a função de onda do fóton virtual, eq. (3.1), a qual para a mais baixa ordem é dada por:

$$|\gamma^*\rangle = |\gamma^*\rangle_0 + \frac{1}{\sqrt{N_c}} \int dz d^2r_\perp \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(r_\perp, z) |q_\alpha(k)\bar{q}_{\bar{\alpha}}(k')\rangle_0.$$

Realizando o produto interno, resulta

$$\begin{aligned} \langle \gamma^* | \gamma^* \rangle &= 1 + \frac{1}{N_c} \int dz \int d^2r_\perp |\psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(r_\perp, z)|^2 \\ &= 1 + \int dz \int d^2r_\perp |\psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(r_\perp, z)|^2, \end{aligned} \tag{3.5}$$

onde utilizamos que

$$\begin{aligned} {}_0\langle \gamma^* | \gamma^* \rangle_0 &= 1 & \langle q_\alpha(k)\bar{q}_{\bar{\alpha}}(k') | \gamma^* \rangle_0 &= 0 \\ {}_0\langle \gamma^* | q_\alpha(k)\bar{q}_{\bar{\alpha}}(k') \rangle &= 0 & \langle q_\alpha(k)\bar{q}_{\bar{\alpha}}(k') | q_\alpha(k)\bar{q}_{\bar{\alpha}}(k') \rangle &= 1 \end{aligned}$$

Por outro lado, quando consideramos o termo de radiação de glúons, o produto interno é

obtido partindo de

$$|\gamma^*\rangle = |\gamma^*\rangle_0 + \frac{1}{\sqrt{N_c}} \int dz d^2 r_\perp C(r_\perp) \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(r_\perp, z) |q_\alpha(x) \bar{q}_{\bar{\alpha}}(y)\rangle_0 \\ + \frac{1}{\sqrt{N_c}} \int dz d^2 r_\perp dz' d^2 r'_\perp \Psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g}(r, r'_\perp, z, z') |q_\alpha(k) \bar{q}_{\bar{\alpha}}(k') g_c(z)\rangle_0,$$

onde

$$\Psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g}(z, z', r_\perp, r'_\perp) = -\frac{ig_s}{2\pi\sqrt{\pi z'}} \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(r_\perp, z) \left[\frac{\varepsilon_\perp^\lambda \cdot r'_\perp}{r'^2_\perp} - \frac{\varepsilon_\perp^\lambda \cdot (r'_\perp - r_\perp)}{(r'_\perp - r_\perp)^2} \right].$$

Assumindo que

$$\begin{cases} {}_0\langle \gamma^* | \gamma^* \rangle_0 = 1 \\ \langle q_\alpha(k) \bar{q}_{\bar{\alpha}}(k') | q_\alpha(k) \bar{q}_{\bar{\alpha}}(k') \rangle = 1 \\ \langle q_\alpha(k) \bar{q}_{\bar{\alpha}}(k') g_c(z) | q_\alpha(k) \bar{q}_{\bar{\alpha}}(k') g_c(z) \rangle = 1 \end{cases}$$

e zero para as demais combinações, resulta que o produto será dado por:

$$\langle \gamma^* | \gamma^* \rangle = {}_0\langle \gamma^* | \gamma^* \rangle_0 + \frac{1}{N_c} \int dz d^2 r_\perp C^*(r_\perp) C(r_\perp) \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{*\alpha\bar{\alpha}}(r_\perp, z) \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(r_\perp, z) \\ + \frac{1}{N_c} \int dz d^2 r_\perp dz' d^2 r'_\perp \frac{g_s^2}{4\pi^3 z'} t_{\bar{\alpha}\alpha}^{*c} t_{\bar{\alpha}\alpha}^c \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{*\alpha\bar{\alpha}}(r_\perp, z) \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(r_\perp, z) \\ \times \left(\frac{\varepsilon_\perp^\lambda \cdot r'_\perp}{r'^2_\perp} - \frac{\varepsilon_\perp^\lambda \cdot (r'_\perp - r_\perp)}{(r'_\perp - r_\perp)^2} \right)^* \left(\frac{\varepsilon_\perp^\lambda \cdot r'_\perp}{r'^2_\perp} - \frac{\varepsilon_\perp^\lambda \cdot (r'_\perp - r_\perp)}{(r'_\perp - r_\perp)^2} \right). \quad (3.6)$$

Usando que

$$C^*(r_\perp) C(r_\perp) = |C(r_\perp)|^2, \\ \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{*\alpha\bar{\alpha}}(r_\perp, z) \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(r_\perp, z) = |\psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(r_\perp, z)|^2, \\ t_{\bar{\alpha}\alpha}^{*c} = t_{\bar{\alpha}\alpha}^c$$

e

$$\left(\frac{\varepsilon_\perp^\lambda \cdot r'_\perp}{r'^2_\perp} - \frac{\varepsilon_\perp^\lambda \cdot (r'_\perp - r_\perp)}{(r'_\perp - r_\perp)^2} \right)^* \left(\frac{\varepsilon_\perp^\lambda \cdot r'_\perp}{r'^2_\perp} - \frac{\varepsilon_\perp^\lambda \cdot (r'_\perp - r_\perp)}{(r'_\perp - r_\perp)^2} \right) = \left| \varepsilon_\perp^\lambda \cdot \left(\frac{r'_\perp}{r'^2_\perp} + \frac{(r_\perp - r'_\perp)}{(r'_\perp - r_\perp)^2} \right) \right|^2,$$

ficamos com

$$\begin{aligned} \langle \gamma^* | \gamma^* \rangle &= 1 + \frac{1}{N_c} \int dz d^2 r_\perp N_c |C(r_\perp)|^2 |\psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(r_\perp, z)|^2 \\ &\quad + \frac{1}{N_c} \int dz d^2 r_\perp dz' d^2 r'_\perp \frac{g_s^2}{4\pi^3 z'} t_{\alpha\bar{\alpha}}^c t_{\bar{\alpha}\alpha}^c |\psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(r_\perp, z)|^2 \\ &\quad \times \left| \varepsilon_\perp^\lambda \cdot \left(\frac{r'_\perp}{r'_\perp{}^2} + \frac{(r_\perp - r'_\perp)}{(r_\perp - r'_\perp)^2} \right) \right|^2. \end{aligned}$$

Aqui usamos o fato de que as matrizes t^c são hermitianas: $(t_{\alpha\bar{\alpha}}^c)^* = t_{\bar{\alpha}\alpha}^c$. A soma é tomada sobre os estados de polarização transversal $\lambda = 1, 2$ do glúon produzido e dos índices de cores do quark, do antiquark e do glúon $\alpha, \bar{\alpha}, c$. Podemos então usar a propriedade

$$\sum_{\lambda=1, 2} \varepsilon_\perp^{*\lambda} \cdot x_\perp \varepsilon_\perp^\lambda \cdot x'_\perp = x_\perp \cdot x'_\perp$$

cuja demonstração é apresentada no apêndice E. E sabendo-se que

$$t_{\alpha\bar{\alpha}}^c t_{\bar{\alpha}\alpha}^c = \frac{N_c^2 - 1}{2},$$

resulta

$$\begin{aligned} \langle \gamma^* | \gamma^* \rangle &= 1 + \frac{1}{N_c} \int dz d^2 r_\perp N_c |C(r_\perp)|^2 |\psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(r_\perp, z)|^2 \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{N_c}} \int dz d^2 r_\perp dz' d^2 r'_\perp \frac{g_s^2}{4\pi^3 z'} \frac{N_c^2 - 1}{2} |\psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(r_\perp, z)|^2 \\ &\quad \times \left(\frac{r'_\perp}{r'_\perp{}^2} + \frac{(r_\perp - r'_\perp)}{(r_\perp - r'_\perp)^2} \right)^2 \\ \langle \gamma^* | \gamma^* \rangle &= 1 + \frac{1}{N_c} \int dz d^2 r_\perp |\psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(r_\perp, z)|^2 [N_c |C(r_\perp)|^2 \\ &\quad \times + \int d^2 r'_\perp \frac{dz'}{z'} \frac{g_s^2}{4\pi^3 z'} \frac{N_c^2 - 1}{2} \left(\frac{r_\perp^2}{r'_\perp{}^2 (r_\perp - r'_\perp)^2} \right)]. \end{aligned} \tag{3.7}$$

A integral sobre r'_\perp apresentada logo acima é divergente nos limites $r'_\perp \rightarrow 0$ e $r'_\perp \rightarrow r_\perp$. Comparando a eq. (3.7) com o produto interno em ordem mais baixo, (3.5), vemos que

$$1 + \int dz d^2 r_\perp |\psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(r_\perp, z)|^2 = 1 + \frac{1}{N_c} \int dz d^2 r_\perp |\psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(r_\perp, z)|^2 \left[N_c |C(r_\perp)|^2 + \int d^2 r'_\perp \frac{dz'}{z'} \frac{g_s^2}{4\pi^3 z'} \frac{N_c^2 - 1}{2} \left(\frac{r_\perp^2}{r'^2_\perp (r_\perp - r'_\perp)^2} \right) \right],$$

a qual implica:

$$1 = |C(r_\perp)|^2 + \int d^2 r'_\perp \frac{dz'}{z'} \frac{g_s^2}{4\pi^3 z'} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \left(\frac{r_\perp^2}{r'^2_\perp (r_\perp - r'_\perp)^2} \right).$$

No limite de grande número de cores ($N_c \rightarrow \infty$) temos que [38]:

$$\frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \approx \frac{N_c}{2},$$

o que implica

$$|C(r_\perp)|^2 = 1 - \int d^2 r'_\perp \frac{dz'}{z'} \frac{g_s^2}{4\pi^3 z'} \frac{N_c}{2} \frac{r_\perp^2}{r'^2_\perp (r_\perp - r'_\perp)^2},$$

como $\alpha_s = g_s^2/4\pi$ e $Y \equiv \ln(1/z') \rightarrow dY = dz'/z'$,

$$|C(r_\perp)|^2 = 1 - \int d^2 r'_\perp dY \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \frac{r_\perp^2}{r'^2_\perp (r_\perp - r'_\perp)^2}.$$

Com o segundo termo surgindo devido à emissão do glúon pelo quark ou antiquark.

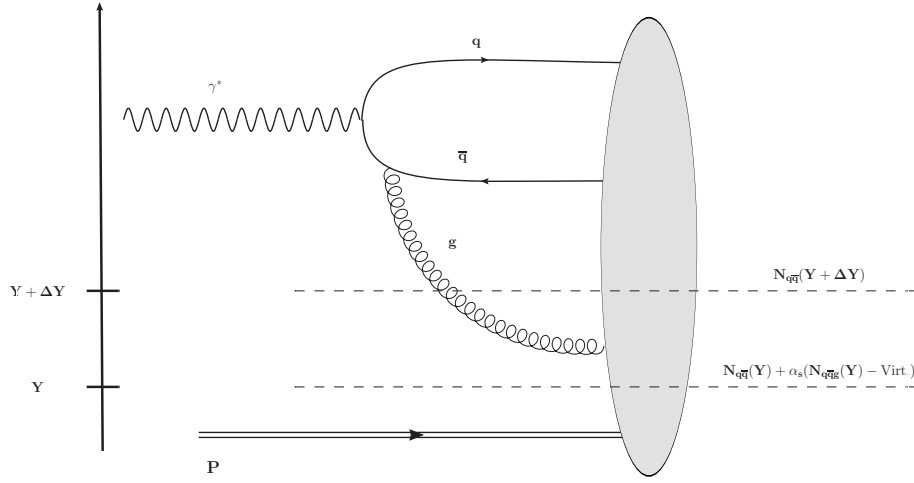
Os resultados acima nos permitem derivar a probabilidade de emissão de um glúon, a qual será dada por:

$$\begin{aligned} \int \sum \frac{1}{N_c} |\Psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g}(z, z', r_\perp, r'_\perp)|^2 dz' d^2 r'_\perp &= \sum \int \frac{dz' d^2 r'_\perp}{N_c} \frac{g_s^2}{4\pi^3 z'} \\ &\times t_{\bar{\alpha}\alpha}^{*c} t_{\bar{\alpha}\alpha}^c \left(\frac{\varepsilon_\perp^\lambda \cdot r'_\perp}{r'^2_\perp} - \frac{\varepsilon_\perp^\lambda \cdot (r'_\perp - r_\perp)}{(r'_\perp - r_\perp)^2} \right)^* \\ &\times \left(\frac{\varepsilon_\perp^\lambda \cdot r'_\perp}{r'^2_\perp} - \frac{\varepsilon_\perp^\lambda \cdot (r'_\perp - r_\perp)}{(r'_\perp - r_\perp)^2} \right), \end{aligned}$$

usando os mesmos passos feitos para obtermos a eq. (3.7), temos que

$$\sum \frac{z'}{N_c} |\Psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g}(Y', Y, r_\perp, r'_\perp)|^2 dY d^2 r'_\perp = \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \frac{r_\perp^2}{r'^2_\perp (r_\perp - r'_\perp)^2} dY d^2 r'_\perp.$$

Figura 3.3 - O glúon emitido pode ser visto como uma parte da função de onda do alvo (linha tracejada superior) ou como uma parte da função de onda do dipolo (linha tracejada inferior)



A partir destes resultados podemos escrever uma equação para a amplitude de espalhamento fronta dipolo-hádron $N(Y, r_\perp)$. Consideremos dois referenciais distintos. O primeiro no qual o sistema que interage com o alvo é composto pelo dipolo e pelo glúon. Neste caso teremos que a amplitude total será dada pela amplitude $N_{q\bar{q}}$ adicionada da amplitude $N_{q\bar{q}g}$ pesada pela probabilidade de emissão de um glúon calculada anteriormente. Além disso, devemos considerar que a probabilidade do estado $q\bar{q}$ é reduzida pelo fator $1 - |C(r_\perp)|^2$. Consequentemente, a amplitude será dada por:

$$N_{q\bar{q}}(Y, r_\perp) + \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \int dY d^2 r'_\perp \frac{r_\perp^2}{r'_\perp{}^2 (r_\perp - r'_\perp)^2} [N_{q\bar{q}g}(Y, r_\perp, r'_\perp) - N_{q\bar{q}}(Y, r_\perp)]. \quad (3.8)$$

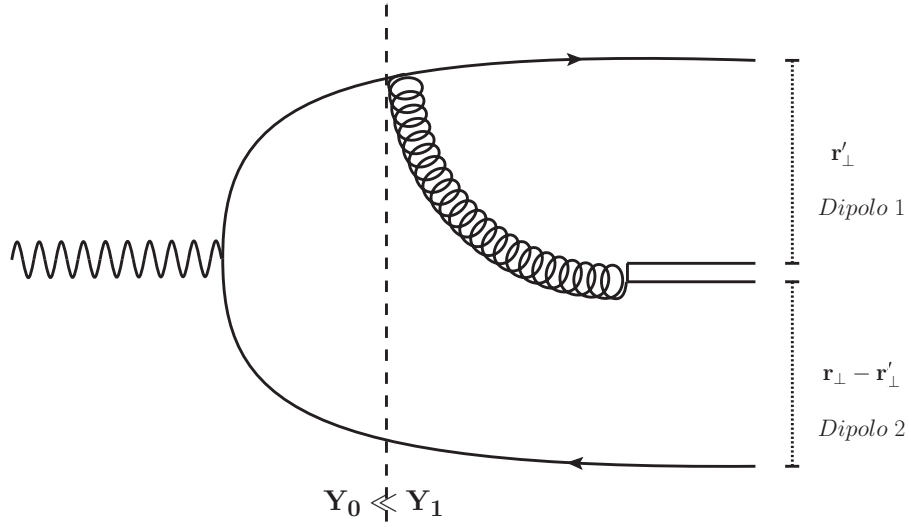
Por outro lado, se consideramos outro referencial, caracterizado por uma rapidez $Y + \Delta Y$, no qual o sistema que interage é um dipolo $q\bar{q}$, a amplitude será dada por $N_{q\bar{q}}(Y + \Delta Y)$. Tais situações são representadas na Fig. 3.3.

Como os observáveis físicos devem depender de referencial, podemos exigir que as amplitudes de espalhamento se equivalham, deste modo temos a seguinte equação:

$$N_{q\bar{q}}(Y + \Delta Y, r_\perp) = N_{q\bar{q}}(Y, r_\perp) + \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \Delta Y \int d^2 r'_\perp \frac{r_\perp^2}{r'_\perp{}^2 (r_\perp - r'_\perp)^2} \times [N_{q\bar{q}g}(Y, r_\perp, r'_\perp) - N_{q\bar{q}}(Y, r_\perp)]. \quad (3.9)$$

A contribuição real contida no termo $N_{q\bar{q}g}$ provém do novo processo onde um glúon é emitido e a correção virtual $-N_{q\bar{q}}$ é um resultado da exigência de normalização da função

Figura 3.4 - No limite de grande número de cor, o glúon pode ser substituído por um par quark-antiquark, formando 2 novos dipolos. Emissões sucessivas de glúons suaves podem ser consideradas como independentes, a evolução se dá à medida que a rapidez aumenta.



de onda.

Note que a terminologia é um pouco diferente da normalmente utilizada em cálculos da QCD perturbativa: por contribuição real nos referimos a um termo resultante devido a uma nova partícula no estado final, enquanto que uma contribuição virtual decorre da exigência de normalização e ela é proporcional à amplitude original. Note também que assumimos que a diferença de rapidez é pequena, o que nos permitiu substituir a integral em Y por um fator ΔY na eq. (3.9).

O que ainda nos resta é entender a amplitude de espalhamento $N_{q\bar{q}g}$ para um sistema de dipolo-glúon interagindo com o alvo. O mesmo pode ser compreendido considerando o processo no limite de grande número de cor.

A estrutura de cor do glúon emitido é um estado de cor-anticor, $N_c^2 - 1$, já que o estado de singleto de cor não é permitido. No limite de grande número de cor, temos $N_c^2 - 1 \approx N_c^2$, e o glúon pode ser substituído por dois quarks, visto que o número de estados de cores diferentes para um quark é N_c . Assim, assumimos que o glúon emitido é um novo par quark-antiquark, $q\bar{q}$, como podemos ver na Fig. 3.4,

Perceba que r'_\perp e $r_\perp - r'_\perp$ são as distâncias entre o quark/antiquark e o glúon respectivamente, e agora devido ao limite de grande N_c temos efetivamente dois novos dipolos de cor com tamanhos transversais r'_\perp e $r_\perp - r'_\perp$. A probabilidade deste sistema não interagir com o

hádron é

$$S_{q\bar{q}g}(r_\perp, r'_\perp) = S_{q\bar{q}}(r'_\perp)S_{q\bar{q}}(r_\perp - r'_\perp),$$

e tendo em mente que $S = 1 - N$, ficamos com

$$\begin{aligned} 1 - N_{q\bar{q}g}(r_\perp, r'_\perp) &= (1 - N_{q\bar{q}}(r'_\perp))(1 - N_{q\bar{q}}(r_\perp - r'_\perp)) \\ N_{q\bar{q}g}(r_\perp, r'_\perp) &= N_{q\bar{q}}(r_\perp - r'_\perp) + N_{q\bar{q}}(r'_\perp) - N_{q\bar{q}}(r'_\perp)N_{q\bar{q}}(r_\perp - r'_\perp), \end{aligned}$$

em que a dependência em Y é mantida implícita.

Substituindo este resultado de volta à equação (3.9) e dividindo por ΔY ,

$$\begin{aligned} \frac{N_{q\bar{q}}(Y + \Delta Y, r_\perp)}{\Delta Y} &= \frac{N_{q\bar{q}}(Y, r_\perp)}{\Delta Y} + \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \int d^2 r'_\perp \frac{r_\perp^2}{r'^2_\perp (r_\perp - r'_\perp)^2} [N_{q\bar{q}}(Y, r'_\perp) \\ &\quad + N_{q\bar{q}}(Y, r_\perp - r'_\perp) - N_{q\bar{q}}(Y, r'_\perp)N_{q\bar{q}}(Y, r_\perp - r'_\perp) - N_{q\bar{q}}(Y, r_\perp)], \end{aligned}$$

tomando o limite para pequeno ΔY ,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta Y \rightarrow 0} \frac{N_{q\bar{q}}(Y + \Delta Y, r_\perp) - N_{q\bar{q}}(Y, r_\perp)}{\Delta Y} &= \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \int d^2 r'_\perp \frac{r_\perp^2}{r'^2_\perp (r_\perp - r'_\perp)^2} [N_{q\bar{q}}(Y, r'_\perp) \\ &\quad + N_{q\bar{q}}(Y, r_\perp - r'_\perp) - N_{q\bar{q}}(Y, r'_\perp)N_{q\bar{q}}(Y, r_\perp - r'_\perp) \\ &\quad - N_{q\bar{q}}(Y, r_\perp)], \end{aligned}$$

resulta:

$$\begin{aligned} \partial_Y N(r_\perp) &= \frac{\bar{\alpha}_s}{2\pi} \int d^2 r'_\perp \frac{r_\perp^2}{r'^2_\perp (r_\perp - r'_\perp)^2} [N(r'_\perp) + N(r_\perp - r'_\perp) \\ &\quad - N(r_\perp) - N(r'_\perp)N(r_\perp - r'_\perp)], \end{aligned} \quad (3.10)$$

em que $\bar{\alpha}_s = \alpha_s N_c / \pi$, e abrimos mão do subscrito $q\bar{q}$. Esta equação foi derivada primeiramente por *Balitsky* na ref. [39] e por *Kovchegov* na ref. [40], sendo usualmente denotada equação BK. É importante enfatizar que na derivação acima assumimos a constante de acoplamento forte como sendo constante. Por isso, a forma acima é válida em ordem dominante.

A eq. (3.10) é uma equação integro-diferencial e fornece a amplitude de espalhamento $N(r_\perp, Y)$ para todos valores de rapidez $Y > 0$ se a condição inicial, $N(Y = 0, r_\perp)$, é conhecida. Essa informação, entretanto, tem origem não perturbativa e deve ser modelada.

A evolução com a energia decorre da emissão de glúons que se torna possível quando o dipolo sofre um boost para uma rapidez maior. A integração ao longo do intervalo de rapidez corresponde a várias emissões de glúons e, portanto temos um grande número de dipolos presentes na função de onda do fóton virtual.

A equação BK foi derivada no limite de grande número de cor e na aproximação de campo médio. Se esse pressuposto não for realizado, a derivação da equação BK pode ser feita a partir da equação de evolução mais geral conhecida como equação JIMWLK (Jalilian-Marian, Iancu, McLerran, Weigert, Leonidov, Kovner). A equação JIMWLK é teoricamente e numericamente mais difícil de ser estudada, já que consiste de uma hierarquia infinita de equações de funcionais acopladas [41].

No que segue focaremos na análise das soluções da equação BK.

3.2 Soluções da equação Balitsky - Kovchegov em ordem dominante

Até o presente momento, não há uma solução analítica exata da equação Balitsky-Kovchegov em todo regime cinemático. Entretanto, a mesma apresenta solução analítica em regiões assintóticas bem definidas. Nesta seção apresentaremos duas soluções analíticas aproximadas, são elas: as soluções na região de saturação e na vizinhança da linha de saturação.

Antes de apresentarmos as soluções analíticas, é importante enfatizar que os estudos realizados nas Refs. [42, 43] demonstraram que as soluções da equação BK satisfazem a propriedade de escalonamento geométrico, ou seja, as soluções não são mais funções das variáveis r e Y separadamente, e assim dependem de uma única variável:

$$\tau \equiv rQ_s(Y),$$

onde a escala de saturação é uma função da rapidez. A eq. BK pode ser escrita em termos das variáveis $\tau = Q_s r$, $\tau_1 = Q_s r_1$ e $\tau_2 = Q_s r_2$. Assim, $N(r, Y) \equiv N(\tau)$ e conseqüentemente a equação BK é escrita da seguinte forma:

$$\partial_Y N(\tau) = \int \frac{d^2 z}{2\pi} \mathcal{K}(\tau, \tau_1, \tau_2) [N(\tau_1) + N(\tau_2) - N(\tau) - N(\tau_1)N(\tau_2)], \quad (3.11)$$

reescrevendo a derivada do lado esquerdo da expressão acima usando a regra da cadeia, temos que

$$\partial_Y N(\tau) = \frac{\partial N}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial Y},$$

como $\tau = Q_s r$, ficamos com

$$\frac{\partial N(\tau)}{\partial Y} = \frac{\partial \ln [Q_s^2(Y)/\Lambda_{\text{QCD}}^2]}{\partial Y} r^2 \frac{\partial N}{\partial r^2}.$$

Integrando em $\frac{d^2 r}{r^2}$,

$$\int \frac{d^2 r}{r^2} \frac{\partial N(\tau)}{\partial Y} = \frac{\partial \ln [Q_s^2(Y)/\Lambda_{\text{QCD}}^2]}{\partial Y} \pi [N(\infty) - N(0)],$$

usando as condições de contorno $N(\infty) = 1$ e $N(0) = 0$,

$$\int \frac{d^2 r}{r^2} \frac{\partial N(\tau)}{\partial Y} = \pi \frac{\partial \ln [Q_s^2(Y)/\Lambda_{\text{QCD}}^2]}{\partial Y}. \quad (3.12)$$

Realizando o mesmo só que para o lado direito da eq. (3.11), e lembrando que

$$\frac{d^2 r}{r^2} = \frac{d^2 \tau}{\tau^2},$$

temos que o lado direito da eq. (3.11) será:

$$\int \frac{d^2 \tau}{\tau^2} \frac{d^2 z}{2\pi} \bar{\alpha}_s \frac{\tau^2}{\tau_1^2 \tau_2^2} [N(\tau_1) + N(\tau_2) - N(\tau) - N(\tau_1)N(\tau_2)]. \quad (3.13)$$

Igualando (3.12) e (3.13),

$$\pi \frac{\partial \ln [Q_s^2(Y)/\Lambda_{\text{QCD}}^2]}{\partial Y} = \int \frac{d^2 \tau d^2 z}{2\pi} \frac{\bar{\alpha}_s}{\tau_1^2 \tau_2^2} [N(\tau_1) + N(\tau_2) - N(\tau) - N(\tau_1)N(\tau_2)], \quad (3.14)$$

podemos notar que o lado esquerdo da expressão acima depende somente de Y já o lado direito não. Analisando somente os termos dependentes de Y , temos

$$\frac{\partial \ln [Q_s^2(Y)/\Lambda_{\text{QCD}}^2]}{\partial Y} = c \bar{\alpha}_s, \quad (3.15)$$

onde

$$c \equiv \int \frac{d^2\tau d^2z}{2\pi} \frac{1}{\tau_1^2 \tau_2^2} [N(\tau_1) + N(\tau_2) - N(\tau) - N(\tau_1)N(\tau_2)],$$

a qual é dependente do Kernel a ser estudado, e representa todos os termos não dependentes de Y , e devido ao fato de que a constante de acoplamento é constante para o kernel em ordem dominante, a mesma não fica contida dentro da integral presente na eq. (3.14), o que resulta na EDO apresentada na eq. (3.15). Resolvendo a equação diferencial, obtem-se que

$$Q_s^2(Y) = \Lambda_{\text{QCD}}^2 e^{c\bar{\alpha}_s Y},$$

o que é a expressão para a escala de saturação com α_s fixo e, além disso, a expressão demonstra que a escala de saturação cresce com a energia. A presença da variável Λ_{QCD}^2 se dá porque definimos anteriormente a mesma como o limite inicial para a faixa de energia a ser estudada. Essa é a forma da escala de saturação dependente da rapidez para o caso da constante de acoplamento fixa.

3.2.1 A equação Balitsky - Kovchegov na região de saturação

Como já visto, podemos escrever a equação BK, eq. (3.10), em termos de S , que é o elemento da matriz de espalhamento dipolo-hádron, usando a relação $S = 1 - N$, assim:

$$\partial_Y S(r) = - \int \frac{d^2z}{2\pi} \bar{\alpha}_s \frac{r^2}{r_1^2 r_2^2} [S(r) - S(r_1)S(r_2)], \quad (3.16)$$

para

$$\begin{aligned} r &= r_\perp = x - y, \\ r_1 &= r'_\perp = x - z, \\ r_2 &= r_\perp - r'_\perp = y - z. \end{aligned}$$

No regime de grande dipolos (regime de saturação), $r \gg 1/Q_s(Y)$, temos que a amplitude de espalhamento aproxima-se de 1, $N \approx 1$, e com isso conseqüentemente $S \ll 1$. Neste limite a equação acima pode ser linearizada, desprezando o termo quadrático em S . Essa linearização só é válida porque a contribuição dominante vem de z satisfazendo a seguinte condição: $1/Q_s(Y) \ll |z - x| \ll r$.

Assim, a equação (3.16) torna-se:

$$\partial_Y S(r) = -\frac{\bar{\alpha}_s S(r)}{2\pi} \underbrace{\int d^2 z \frac{r^2}{r_1^2 r_2^2}}_I,$$

resolvendo a integral I ,

$$I = \int d^2 z \frac{r^2}{r_1^2 r_2^2}, \quad \text{com } r_1, r_2 > \rho$$

obtemos,

$$I = 4\pi \ln r Q_s(Y),$$

substituindo tal na expressão para derivada de S :

$$\partial_Y S(r) = -\bar{\alpha}_s S(r) \ln r^2 Q_s^2(Y). \quad (3.17)$$

Podemos definir a variável de Scaling como $\eta \equiv \ln(r^2 Q_s^2(Y))$. Desta definição temos que a derivada de S em relação a Y apresentada na expressão da eq. BK no regime de saturação, eq. (3.17), será dada pela regra da cadeia assim como já visto anteriormente. Logo,

$$\frac{\partial S}{\partial Y} = \frac{\partial S}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial Y},$$

o que acarreta em

$$\frac{\partial S}{\partial Y} = \frac{\partial S}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial Y} = \frac{\partial S}{\partial \eta} c\bar{\alpha}_s.$$

Assim sendo, a equação BK no regime de saturação, eq. (3.17), escrita em função de variável de Scaling, η , será

$$\frac{\partial S(\eta)}{\partial \eta} c\bar{\alpha}_s = -\bar{\alpha}_s S(\eta)\eta,$$

a qual é uma equação diferencial ordinária cuja solução é

$$S(\eta) = S_0 e^{-\eta^2/2c}.$$

Agora, retornemos o resultado obtido para a amplitude de espalhamento dipolo-hádron,

N , temos que

$$N(r,Y) = 1 - S_0 \exp\left(-\frac{\ln^2[r^2 Q_s^2(Y)]}{2c}\right), \quad (3.18)$$

onde S_0 e c são constantes a se determinar. A eq. (3.18) é conhecida como *lei de Levin-Tuchin* [42], na qual fica explícito o escalonamento geométrico.

3.2.2 A equação Balitsky - Kovchegov fora da região de saturação

Fora da região de saturação, a eq. BK encontra-se na região linear que é quando o tamanho do dipolo é pequeno comparado a escala de saturação, $r \ll 1/Q_s(Y)$, o que implica que $x \approx y$. Assim, a eq. (3.10) reduz-se a

$$\partial_Y N(r,Y) = \int \frac{d^2 z}{2\pi} \bar{\alpha}_s \frac{r^2}{r_1^2 r_2^2} [N(r_1,Y) + N(r_2,Y) - N(r,Y) - N(r_1,Y)N(r_2,Y)].$$

No regime linear, o termo $N(r_1,Y)N(r_2,Y) \approx 0$ e conseqüentemente pode ser desprezado. Além disso, como $x \approx y$ temos que $N(r_1,Y) + N(r_2,Y) \approx 2N(z)$ e $r_1^2 r_2^2 \approx (r-z)^2 z^2$.

Portanto, neste cenário a equação de evolução (3.10) pode ser expressa da seguinte forma

$$\frac{\partial N(r)}{\partial Y} = \bar{\alpha}_s \int \frac{d^2 z}{\pi} \frac{r^2}{(r-z)^2 z^2} \left(N(z) - \frac{1}{2} N(r) \right), \quad (3.19)$$

a qual é a equação BFKL no espaço de coordenadas para a amplitude N . As soluções da eq. BFKL são amplamente estudadas na literatura. No que segue iremos revisar a solução geral da BFKL e apresentaremos a solução desta equação para uma condição de contorno associada à física de saturação.

Para obtermos a solução da eq. (3.19) é conveniente usarmos a transformada de Mellin com respeito a coordenada transversal:

$$N(r) = \int \frac{d\gamma}{2\pi i} \left(\frac{r^2}{l^2} \right)^\gamma N(\gamma), \quad (3.20)$$

onde $l^2 \equiv 1/\Lambda_{\text{QCD}}^2$ e $r^2 \ll l^2$. Então, podemos idealizar a eq. (3.19) como [44]

$$\partial_Y N(r) = \mathcal{K} \otimes N(r), \quad (3.21)$$

onde

$$\mathcal{K} = \bar{\alpha}_s \chi(\gamma) = \bar{\alpha}_s (2\Psi(1) - \Psi(\gamma) - \Psi(1 - \gamma)),$$

$\chi(\gamma)$ é o autovalor do Kernel BFKL e Ψ é a função di-gamma que é: $\Psi^{(n)}(x) = (d/dx)^{(n+1)} \ln \Gamma(x)$.

Implementando a transformação (3.20) em (3.21), temos que, uma vez que a eq. BFKL é invariante perante a transformação de escala, a equação resultante para $N(\gamma)$ é local em γ :

$$\partial_Y N(\gamma) = \bar{\alpha}_s \chi(\gamma) N(\gamma).$$

Solucionando a equação acima, obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{N(\gamma)} \partial N(\gamma) &= \bar{\alpha}_s \chi(\gamma) \partial Y \\ N(\gamma) &= N_0(\gamma) e^{\bar{\alpha}_s \chi(\gamma) Y}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Para retornarmos às coordenadas espaciais, devemos retornar o resultado da eq. (3.22) para a transformação de Mellin, eq. (3.20),

$$N(r) = \int_C \frac{d\gamma}{2\pi i} e^{\gamma \ln(r^2/l^2)} N(\gamma), \quad (3.23)$$

agora, vamos definir $\rho \equiv \ln(r^2/l^2)$, o qual é negativo já que $r^2 \ll l^2$.

Implementando a eq. (3.22) na integral (3.23), ficamos com

$$N(r) = \int_C \frac{d\gamma}{2\pi i} e^{\gamma \rho} e^{\bar{\alpha}_s \chi(\gamma) Y} N_0(\gamma),$$

podemos definir $F(\gamma, \rho, Y) \equiv \rho \gamma + \bar{\alpha}_s \chi(\gamma) Y$. Portanto,

$$N(r) = \int_C \frac{d\gamma}{2\pi i} e^{F(\gamma, \rho, Y)}, \quad (3.24)$$

onde consideramos a condição inicial $N_0(\gamma)$ um valor constante, dado que sua contribuição para a função $F(\gamma, \rho, Y)$ no expoente não fica mais importante do que ρ ou $\bar{\alpha}_s Y$, conseqüentemente desprezamos o mesmo.

Para calcularmos a integral (3.24) vamos usar o seguinte contorno

$C = \{\gamma = a + i\nu, -\infty < \nu < \infty\}$ já que a função (3.22) tem singularidades essenciais em todos os inteiros positivos $\gamma \geq 1$, e $0 < a < 1$. Podemos solucionar a integral (3.24) a partir da aproximação do ponto de sela, a qual é uma boa aproximação quando ρ e $\bar{\alpha}_s Y$ são grandes.

Primeiramente, vamos expandir a função $F(\gamma, \rho, Y)$ em torno do ponto de sela, γ_0 , até a segunda ordem:

$$F(\gamma, \rho, Y) = F(\gamma_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial \gamma} \right|_{\gamma_0} (\gamma - \gamma_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial \gamma^2} \right|_{\gamma_0} (\gamma - \gamma_0)^2. \quad (3.25)$$

Temos que o ponto de sela é determinado do seguinte modo:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \gamma} \right|_{\gamma_0} = 0, \quad (3.26)$$

onde $\gamma_0(\rho, Y)$. Portanto, a expansão (3.25) resume-se a

$$F(\gamma, \rho, Y) = F(\gamma_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial \gamma^2} \right|_{\gamma_0} (\gamma - \gamma_0)^2. \quad (3.27)$$

Implementando a expansão, eq. (3.27), na integral (3.24), ficamos com (o contorno será $C = \{\gamma = \gamma_0 + i\nu, -\infty < \nu < \infty\}$):

$$N(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_C d\gamma e^{\left(F(\gamma_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial \gamma^2} \right|_{\gamma_0} (\gamma - \gamma_0)^2 \right)},$$

já que $\gamma = \gamma_0 + i\nu$, temos que $d\gamma = i d\nu$ e $\gamma - \gamma_0 = i\nu$. Logo,

$$\begin{aligned} N(r) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} i d\nu e^{\left(F(\gamma_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial \gamma^2} \right|_{\gamma_0} (\gamma - \gamma_0)^2 \right)} \\ &= \frac{e^{F(\gamma_0)}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu e^{-\frac{\nu^2}{2} F''(\gamma_0)}, \end{aligned}$$

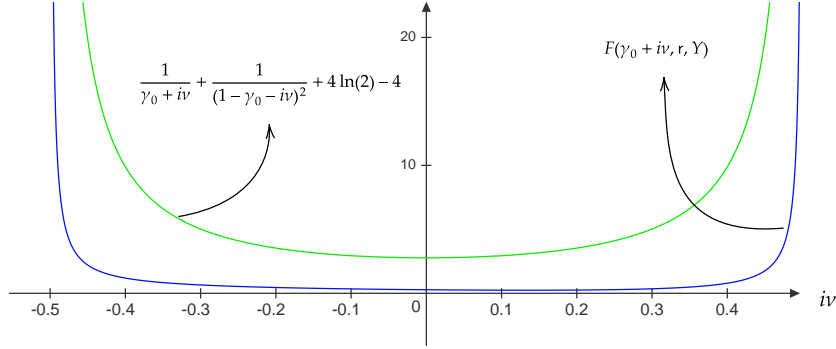
a integral presente na expressão acima é similar a integral gaussiana, i.e.,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Então,

$$\begin{aligned} N(r) &= \frac{e^{F(\gamma_0)}}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{F''(\gamma_0)}} \\ &= e^{F(\gamma_0)} \frac{1}{\sqrt{2\pi F''(\gamma_0)}}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Figura 3.5 - Representação dos auto valores do kernel (núcleo) BFKL.



A fim de obter o ponto de sela, γ_0 , devemos realizar a derivada (3.26), e para isto temos que ter em mente que os auto valores do kernel BFKL, $\chi(\gamma)$, na região $0 < \gamma < 1$ podem ser aproximados como

$$\chi(\gamma) = 2\Psi(1) - \Psi(\gamma) - \Psi(1 - \gamma) \approx \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{1 - \gamma} + 4 \ln 2 - 4,$$

a mesma é uma função convexa com mínimo em $\gamma = 1/2$ e polos simples em $\gamma = 0$ e $\gamma = 1$.

Sendo assim,

$$F = \rho\gamma + \bar{\alpha}_s Y \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{1 - \gamma} + 4 \ln 2 - 4 \right),$$

o qual é representado graficamente pela Fig. 3.5. Aplicando este resultado a eq. (3.26), teremos

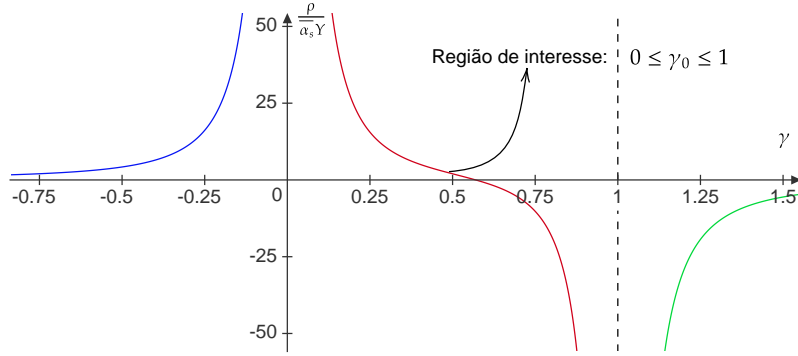
$$\left. \frac{\partial F}{\partial \gamma} \right|_{\gamma_0} = \left[\frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\rho\gamma + \bar{\alpha}_s Y \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{1 - \gamma} + 4 \ln 2 - 4 \right) \right) \right]_{\gamma_0}, \quad (3.29)$$

o que implica

$$\left[\frac{1}{\gamma^2} - \frac{\gamma}{(1 - \gamma)^2} \right]_{\gamma_0} = \frac{\rho}{\bar{\alpha}_s Y}. \quad (3.30)$$

A equação acima é gráficamente representada pela Fig. (3.6) onde notamos que para a região de nosso interesse, $0 < \gamma_0 < 1$, há um único ponto de sela γ_0 cuja posição altera - se

Figura 3.6 - Representação gráfica da equação (3.30) que fornece os valores do ponto de sela.



entre 0 e 1 dependendo do valor da razão $\rho/\alpha_s Y$.

Da Fig. (3.6) vemos que existem três casos limites na região de interesse, são eles:

- a) Quando $\rho/\alpha_s Y \rightarrow \infty$ temos que o ponto de sela aproxima-se de $\gamma \rightarrow 0$
- b) Quando $\rho/\alpha_s Y \sim 0$ temos que $\gamma \rightarrow 1/2$;
- c) Quando $\rho/\alpha_s Y \rightarrow -\infty$ temos que $\gamma \rightarrow 1$;

O primeiro caso é relevante quando consideramos a equação BFKL no espaço de momento, onde $\rho \equiv \ln k^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2$ é sempre positivo na região de interesse. Similarmente, o terceiro caso aplica-se somente para o espaço de coordenadas, onde $\rho \equiv \ln r^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2$ é negativo. O primeiro e o terceiro caso correspondem a aproximação de duplo logaritmo (DLA), a qual descreve o comportamento dominante da solução BFKL para grande k^2 (ou pequeno r^2) e Y fixo. Por outro lado, o segundo caso aplica-se tanto para o espaço de momento, $\rho > 0$, quanto para o espaço de coordenadas, $\rho < 0$. Em uma análise padrão da equação BFKL, este é o caso que descreve o limite de altas energias ($Y \rightarrow \infty$ para ρ fixo) [43] sendo este o regime de interesse para nós.

Para o segundo caso, temos que o ponto de sela é $\gamma \rightarrow 1/2$, o que resulta em

$$\gamma_0 \approx \frac{1}{2} - \frac{\rho}{\beta \alpha_s Y} = \frac{1}{2} - \delta \quad \text{para } \delta \equiv \frac{\rho}{\beta \alpha_s Y}, \quad (3.31)$$

onde $\beta \equiv 28\zeta(3)$.

Substituindo na função F ,

$$F(\gamma_0) = \rho \left(\frac{1}{2} - \delta \right) + \bar{\alpha}_s Y \chi \left(\frac{1}{2} - \delta \right),$$

para o caso dos auto valores do kernel vamos desconsiderar a variável δ , então

$$\begin{aligned} F(\gamma_0) &\approx \rho \left(\frac{1}{2} - \delta \right) + \bar{\alpha}_s Y (2 + 2 + 4 \ln 2 - 4) \\ &\approx \rho \left(\frac{1}{2} - \delta \right) + \bar{\alpha}_s Y \omega, \end{aligned}$$

onde $\omega = 4 \ln 2 = \chi(1/2)$.

Já a segunda derivada de F ,

$$F''(\gamma_0) \simeq \bar{\alpha}_s Y \chi''(1/2),$$

onde

$$\chi''(1/2) = \left(\frac{2}{\gamma^3} + \frac{1}{(1-\gamma)^2} + \frac{2\gamma}{(1-\gamma)^3} \right) \equiv \beta,$$

logo

$$F''(\gamma_0) = \bar{\alpha}_s Y \beta,$$

retornando para a eq. (3.28):

$$\begin{aligned} N(r) &\simeq \exp \left(\frac{\rho}{2} - \rho\delta + \bar{\alpha}_s Y \omega \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta\bar{\alpha}_s Y}} \\ &\simeq \exp \left(\frac{\rho}{2} - \frac{\rho^2}{\beta\bar{\alpha}_s Y} + \bar{\alpha}_s Y \omega \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta\bar{\alpha}_s Y}} \\ &\simeq e^{\omega\bar{\alpha}_s Y} e^{\rho/2} \exp \left(-\frac{\rho^2}{2\beta\bar{\alpha}_s Y} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta\bar{\alpha}_s Y}}. \end{aligned}$$

Quando $\rho \equiv \ln k^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2$, a equação acima corresponde à solução usual da equação BFKL no espaço de momento. Por outro lado, quando $\rho \equiv \ln r^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2$, ela também é solução da eq. BK linearizada no espaço de coordenadas:

$$N(r) = \sqrt{\frac{r^2}{l^2}} \frac{e^{\omega\bar{\alpha}_s Y}}{\sqrt{2\pi\beta\bar{\alpha}_s Y}} \exp \left(-\frac{\ln^2(r^2/l^2)}{2\beta\bar{\alpha}_s Y} \right). \quad (3.32)$$

O ponto de sela na eq. (3.31) permanece próximo de $1/2$ para todo ρ tal que $\delta \ll 1/4$. Isto

é realizado quando

$$\ln \left(\frac{k^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \right) \ll 8\bar{\alpha}_s Y.$$

Ao analisarmos a solução da eq. BFKL, notamos que ao contrário da solução da eq. BK no regime de saturação a solução da BFKL não satisfaz a propriedade de escalonamento geométrico quando assume-se que a dinâmica BFKL é válida para todos os valores de rapidez. Entretanto, como já discutido no capítulo anterior, esta equação deixará de ser válida próxima da linha de saturação, onde os efeitos não-lineares tornam-se importantes. Na próxima subseção iremos resolver novamente a equação BFKL considerando a presença da linha de saturação, caracterizada por $Q_s(Y)$, e que nesta linha $N(r = 1/Q_s) = 1$.

3.2.2.1 Solução da BFKL para uma condição de contorno dada pela física de saturação

Inicialmente vamos estimar a escala de saturação, $Q_s(Y)$, que definirá a condição de contorno para a equação BFKL. Para tanto, iremos usar as aproximações do método do ponto de sela nas equações (3.26) e (3.28), e então estudar as propriedades de scaling da solução da eq. BFKL acima da escala de saturação. Para este objetivo é importante notar que a partir da eq. (3.26), a qual é reescrita como

$$\begin{aligned} \rho + \bar{\alpha}_s Y [-\Psi'(\gamma) - \Psi'(1 - \gamma)]_{\gamma_0} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} (\Psi(\gamma) + \Psi(1 - \gamma)) \Big|_{\gamma_0} &= \frac{\rho}{\bar{\alpha}_s Y} \equiv -R, \end{aligned} \quad (3.33)$$

e que o ponto de sela, γ_0 , é atualmente função de uma única variável R :

$$\gamma_0(\rho, Y) = \gamma_0(R).$$

Se estimarmos a integral de Mellin apenas pelo ponto de sela, obtemos

$$N(r) \simeq e^{\bar{\alpha}_s Y F(\gamma_0(R), R)}, \quad (3.34)$$

onde, ao compararmos com as equações (3.26) e (3.28), percebemos a mudança na definição de $F(\gamma, \rho, Y)$ colocando em evidência o fator $\bar{\alpha}_s Y$. Isto é conveniente desde que, quando calculamos o ponto de sela, a nova função $F(\gamma_0(R), R)$ é somente função de R . Também negligenciamos o fator proveniente da integral gaussiana.

O critério de saturação, $N(r = 1/Q_s(Y)) = 1$, dá a seguinte condição para F :

$$F(\gamma_0(R), R) = 0, \quad (3.35)$$

para

$$R_s = \frac{1}{\bar{\alpha}_s Y} \ln \frac{Q_s^2(Y)}{\Lambda_{\text{QCD}}^2}, \quad (3.36)$$

a qual é uma equação para R_s , e finalmente para $Q_s(Y)$.

Para a eq. (3.33),

$$\left. \frac{\partial}{\partial \gamma} (\Psi(\gamma) + \Psi(1 - \gamma)) \right|_{\gamma_0} = -R_s,$$

multiplicando ambos os lados da eq. por γ_0 , temos

$$\gamma_0 \left. \frac{\partial}{\partial \gamma} (\Psi(\gamma) + \Psi(1 - \gamma)) \right|_{\gamma_0} = \gamma_0 R_s,$$

onde

$$\gamma_0 R_s = \gamma_0 \left(-\frac{\rho}{\bar{\alpha}_s Y} \right).$$

Da eq. (3.35), temos que $F(\gamma_0(R_s), R_s) = 0$, conseqüentemente

$$\begin{aligned} \rho_s \gamma_0 + \bar{\alpha}_s Y \chi(\gamma_0) &= 0 \\ \chi(\gamma_0) &= -\frac{\rho_s \gamma_0}{\bar{\alpha}_s Y} \\ \chi(\gamma_0) &= \gamma_0 R_s, \end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned} -\gamma_0 \left. \frac{\partial \chi(\gamma)}{\partial \gamma} \right|_{\gamma_0} &= \chi(\gamma_0) \\ \chi'(\gamma_0) &= \frac{\chi(\gamma_0)}{\gamma_0}. \end{aligned}$$

Resolvendo numericamente essa equação, encontra-se [43]:

$$R_s = c \simeq 4,88 \quad \text{e} \quad \gamma_0 \simeq 0,63. \quad (3.37)$$

Note que o valor de γ_0 não está tão afastado de $1/2$, o que é consistente com o fato que o valor de R_s apresentado acima está na faixa em que esperamos um comportamento BFKL

“genuíno”, ou seja, $R_s < 8$.

Assim, temos que a solução R_s para $F(\gamma_0(R), R) = 0$ é um número puro, $R_s \equiv c$, e não uma função de Y , o que ao implementarmos na eq. (3.36) ficamos com

$$c = \frac{1}{\bar{\alpha}_s Y} \ln \frac{Q_s^2(Y)}{\Lambda_{\text{QCD}}^2}$$

$$Q_s^2(Y) = \Lambda_{\text{QCD}}^2 e^{c\bar{\alpha}_s Y},$$

o que é consistente com o resultado anterior obtido ao estudarmos as propriedades de escalonamento da eq. BK, porém o resultado obtido aqui advém da evolução (BFKL) que não apresenta a propriedade de escalonamento geométrico.

Agora vamos calcular a eq. (3.34) para R um pouco acima de R_s , ou seja, para distâncias r que, ainda sendo muito mais curtas do que o comprimento de saturação $1/Q_s(Y)$, estão próximas em unidades logarítmicas. Precisamos que

$$0 < R - R_s \ll R_s,$$

ou

$$1 < \ln \frac{Q^2}{Q_s^2(Y)} \ll \ln \frac{Q_s^2(Y)}{\Lambda_{\text{QCD}}^2},$$

com $Q^2 \equiv 1/r^2$.

A condição $R > R_s$ (ou $Q^2 \gg Q_s^2(Y)$) assegura que estamos no regime linear. A condição $R - R_s \ll R_s$ nos permite estudar a aproximação de $N(r)$ na direção da saturação em uma expansão limitada em potências de $R - R_s$,

$$F(\gamma_0(R), R) \simeq F(\gamma_0(R), R) + \left. \frac{d}{dR} F(\gamma_0(R), R) \right|_{R=R_s} (R - R_s)$$

$$+ \left. \frac{d^2}{dR^2} F(\gamma_0(R), R) \right|_{R=R_s} (R - R_s)^2 + \dots$$

Em primeira ordem a expansão torna-se,

$$F(\gamma_0(R), R) \simeq F(\gamma_0(R), R) + \left. \frac{d}{dR} F(\gamma_0(R), R) \right|_{R=R_s} (R - R_s),$$

usando a condição de saturação, (3.35), ficamos com

$$F(\gamma_0(R), R) \simeq \left. \frac{d}{dR} F(\gamma_0(R), R) \right|_{R=R_s} (R - R_s),$$

a diferencial pode ser reescrita como

$$\left. \frac{d}{dR} F(\gamma_0(R), R) \right|_{R=R_s} = \left. \frac{\partial F(R)}{\partial R} \right|_{R=R_s} + \left. \frac{\partial F}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=\gamma_0} \left. \frac{\partial \gamma_0}{\partial R} \right|_{R=R_s},$$

já que $\gamma_0(R_s)$ é a solução da equação do ponto de sela e da eq. (3.26) temos que

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=\gamma_0} = 0,$$

assim,

$$\left. \frac{d}{dR} F(\gamma_0(R), R) \right|_{R=R_s} = -\gamma_0.$$

Portanto, acima da escala de saturação, a amplitude de espalhamento dipolo-hádron é

$$N(r) \simeq \kappa e^{-\bar{\alpha}_s Y \gamma_0(R-R_s)},$$

usando que $R - R_s = \ln Q^2/Q_s^2(Y)$, e para $Q^2 \equiv 1/r^2$ temos que $R - R_s = \ln 1/r^2 Q_s^2(Y)$ o que implica em

$$N(r) \simeq \kappa (r^2 Q_s^2(Y))^{\gamma_0}, \quad (3.38)$$

para $\kappa < 1$, onde κ representa a constante da condição de contorno.

A eq. (3.38) apresenta a propriedade de escalonamento geométrico com dimensão anômala $\lambda = 1 - \gamma_0 \simeq 0,37$ que é determinada pelo valor do ponto de sela γ_0 na região de saturação. Observamos que dentro da região $Q_s^2 \leq Q^2 \leq Q_s^4/\Lambda_{\text{QCD}}^2$, a equação BFKL tem uma solução que prediz o escalonamento geométrico.

Ao incluirmos os termos de segunda ordem da expansão de $F(\gamma_0(R), R)$, a equação para $N(r)$ fica:

$$N(r) \simeq \kappa (r^2 Q_s^2(Y))^{\gamma_0} \exp \left[-\frac{\gamma'_0}{2\bar{\alpha}_s Y} (\ln 1/r^2 Q_s^2(Y))^2 \right], \quad (3.39)$$

onde definimos $\gamma'_0 \equiv \frac{d\gamma_0(R)}{dR} R_s$. Claramente, o termo $\frac{\gamma'_0}{2\bar{\alpha}_s Y}$ presente na exponencial viola o escalonamento, assim todo este termo proveniente da segunda ordem é denominado de termo de difusão.

Notemos que o resultado obtido a partir da condição de contorno é similar a solução

“genuína” BFKL, eq. (3.32). Outra observação importante é que a janela cinemática para este escalonamento estendido é praticamente toda localizada dentro da região cinemática controlada pelo ponto de sela BFKL, $\gamma = 1/2$.

Para verificarmos isto, vamos impor a condição de contorno diretamente para a solução “genuína” BFKL, eq. (3.32), a fim de obter a “escala de saturação BFKL”, i.e., (para $\rho = \ln \Lambda^2/Q_s^2$)

$$\sqrt{\frac{\Lambda^2}{Q_s^2}} e^{\omega \bar{\alpha}_s \tau} \exp\left(-\frac{\ln^2(Q_s^2/\Lambda^2)}{2\beta \bar{\alpha}_s \tau}\right) = 1,$$

o que a partir da definição de R_s , temos que a equação acima torna-se

$$\exp\left(-\frac{\bar{\alpha}_s \tau R_s}{2} + \omega \bar{\alpha}_s \tau - \frac{\bar{\alpha}_s \tau R_s^2}{2\beta}\right) = 1,$$

assim, resolvendo para R_s , temos

$$R_s^2 + \beta R_s - 2\beta\omega = 0,$$

a qual é uma eq. de segundo grau, cuja solução positiva é:

$$\gamma_0 \Big|_{\text{BFKL}} = \frac{1}{2} \left(-\beta \sqrt{\beta(\beta + 8\omega)} \right) = 4,8473 \dots$$

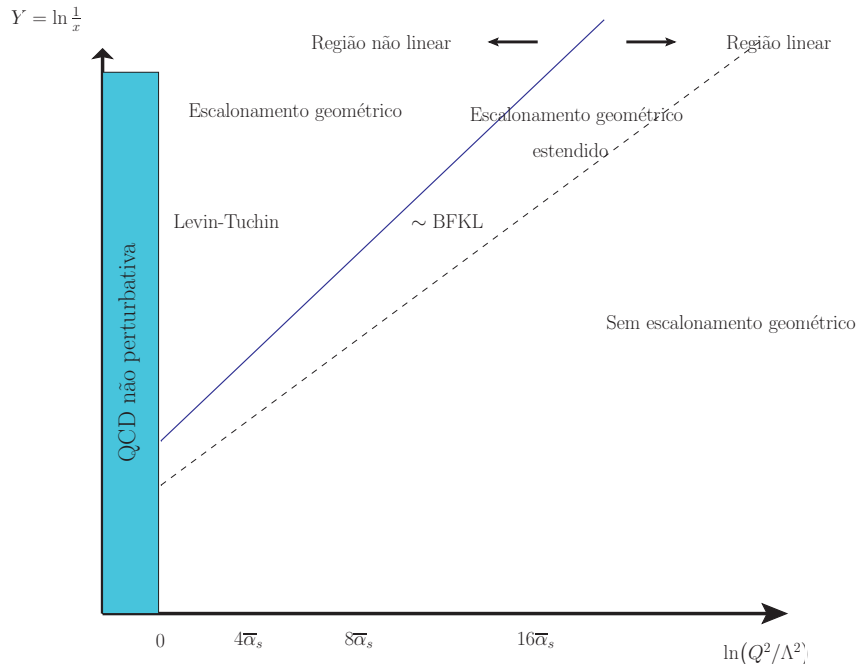
esta solução é numericamente muito próxima do que foi obtido anteriormente ao definirmos $R_s \equiv c$. Usando este resultado e a expressão do ponto de sela $\gamma \rightarrow 1/2$,

$$\gamma_0 \Big|_{\text{BFKL}} \simeq \frac{1}{2} + \frac{R_s}{\beta} = 0,644 \dots,$$

o qual de fato é muito próxima do valor do ponto de sela “verdadeiro” para a condição de contorno, eq. (3.37). Isto mostra que, para fins práticos, pode-se usar a solução BFKL, eq. (3.32), para qualquer $Q^2 = 1/r^2$ em uma janela cinemática próxima da linha de saturação. Na verdade, sem qualquer aproximação, a eq. (3.32) pode ser fundida na forma da “expansão de 2ª ordem”, eq. (3.39), com $\gamma_0 \Big|_{\text{BFKL}} \simeq \frac{1}{2} + \frac{R_s}{\beta} = 0,644$ e consequentemente $\gamma'_0 \Big|_{\text{BFKL}} = 1/\beta \simeq 1/33,67$.

Como γ'_0 é um número bastante pequeno, isso demonstra que as violações de escalonamento devido ao termo exponencial são minúsculas. Isto é, em todo seu domínio de aplicabilidade, à solução BFKL, eq. (3.32), é quase uma solução exata de escalonamento. O que válida a solução apresentada na eq. (3.39) para o regime de saturação apesar do termo de difusão.

Figura 3.7 - Ilustração da região de validade das soluções assintóticas da equação BK em ordem dominante.



A Fig. 3.7 ilustra o que constatamos anteriormente de modo matemático, através do gráfico do plano $Y \times \ln(Q^2/\Lambda^2)$ onde podemos ver as regiões da validade para as soluções assintóticas da equação BK. Para a região de $\ln(Q^2/\Lambda^2)$ muito baixo temos a região da QCD não perturbativa (que não é de nosso interesse) e para além dessa região temos a região linear e a região não linear que são separadas pela escala de saturação, Q_s , representada na figura pela linha azul. Para valores $Q^2 < Q_s^2$ temos a região não linear, ou região de saturação, já para valores $Q^2 > Q_s^2$ temos a região linear. Das soluções vistas, temos que a lei de Levin-Tuchin, eq. (3.18), está na região não-linear, pois basta lembrarmos que a mesma é a solução assintótica da equação BK na região de saturação e além disto a mesma apresenta a propriedade de escalonamento geométrico. A solução BFKL genuína, eq. (3.32), está totalmente inserida na região linear e obviamente a mesma não apresenta a propriedade de escalonamento geométrico como vismos anteriormente. Porém, como trabalhamos, a solução BFKL com condição de contorno, eq. (3.39), apresenta a propriedade de escalonamento geométrico, entretanto a mesma não está na região não-linear, mas como podemos ver na ilustração a mesma consta na região denominada de *escalonamento geométrico estendido* que é a região onde se está tão próxima da saturação que a solução apresenta a propriedade de escalonamento.

3.3 Modelos fenomenológicos

Com o intuito de descrever os efeitos não lineares e tendo em vista que toda a informação sobre a dinâmica das interações fortes no formalismo de dipolos está na amplitude de espalhamento do processo, alguns modelos fenomenológicos foram propostos para descrever os dados experimentais de HERA [45, 46]. Golec - Biernat e Wüsthoff propuseram um modelo que descreve a seção de choque de espalhamento lépton-próton usando um modelo que descreve a amplitude de espalhamento dipolo-próton, que considera as principais características de saturação [45]. Tal modelo é puramente fenomenológico, i.e., não se baseia em qualquer equação de evolução. Para este modelo a amplitude de espalhamento é dada por:

$$N(r_{\perp}, Y) = \left[1 - \exp\left(-\frac{(rQ_s(Y))^2}{4}\right) \right], \quad (3.40)$$

com a escala de saturação dada por

$$Q_s^2 = Q_0^2 \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\lambda}.$$

Os parâmetros σ_0 , λ e x_0 , são parâmetros livres ajustáveis a partir dos dados de DIS. Embora a parametrização GBW forneça uma boa descrição, conforme os dados tornam-se mais precisos as limitações do modelo vem a tona.

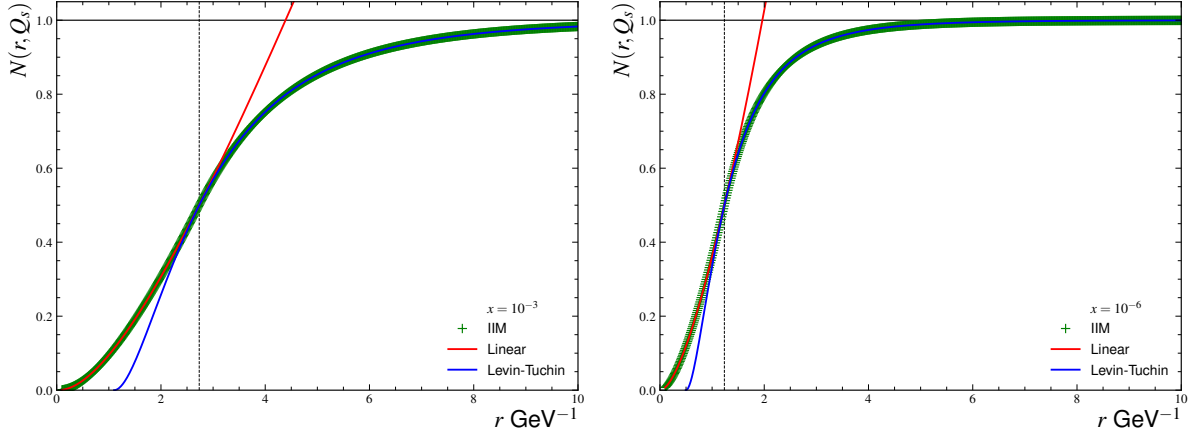
Iancu, Itakura e Munier propuseram um modelo fenomenológico [46] pautado nas soluções assintóticas da equação BK vistas anteriormente, a amplitude de espalhamento do modelo é

$$N(r, Y) = \begin{cases} N_0 \left(\frac{rQ_s}{2}\right)^{2\left(\gamma_s + \frac{\ln(2/rQ_s)}{\kappa\lambda Y}\right)} & , \text{ para } rQ_s \leq 2; \\ 1 - e^{-A \ln^2(BrQ_s)} & , \text{ para } rQ_s > 2; \end{cases} \quad (3.41)$$

onde os parâmetros A e B são obtidos a partir da condição de continuidade na condição de saturação $rQ_s = 2$,

$$A = -\frac{N_0^2 \gamma_s^2}{(1 - N_0)^2 \ln(1 - N_0)} \quad , \quad B = \frac{1}{2}(1 - N_0)^{-\frac{1 - N_0}{N_0^2 \gamma_s^2}}.$$

Figura 3.8 - Gráficos das funções do modelo IIM para $x = 10^{-3}$ à esquerda e para $x = 10^{-6}$ à direita.



Os parâmetros livres deste modelo são: o valor inicial da evolução, x_0 , a taxa de crescimento da escala de saturação, λ , e o raio do próton, R . Lembremos que $\sigma_{q\bar{q}}(x, r) = 2\pi R^2 N(r, Y)$. Diferentemente do modelo GBW, que não se baseia em soluções das equações de evolução, o modelo IIM é construído a partir das soluções assintóticas e, portanto, tem um lastro na equação BK em ordem dominante.

Na Fig. 3.8 apresentamos uma comparação entre as soluções válidas para o regime linear e para o regime saturado, assim como a solução completa para N proposta pelo modelo IIM, onde apresentamos a função $N(r, Q_s)$ para $x = 10^{-3}$ e para $x = 10^{-6}$. A linha vertical pontilhada é $r = 2/Q_s$ que é o ponto onde ocorre a mudança de comportamento. Da Fig. 3.8 temos que conforme o valor de x diminui a saturação ocorre para menores valores do tamanho de dipolo.

Na Ref. [46] os autores utilizaram o modelo IIM para descrever os dados de HERA até o ano de 2002 usando γ_s fixo em 0,623 a qual é a previsão teórica em ordem dominante. Por outro lado os autores Rezaeian e Schmidt [47] demonstraram que os dados de HERA mais modernos são melhores descritos assumindo γ_s como um parâmetro livre, cujo valor difere do que a solução em ordem dominante prevê. Tal resultado demonstra que os cálculos realizados em ordem dominante não são os melhores para descrever os dados atualizados de HERA e por tratarmos de problemas perturbativos isso significa que devemos calcular a equação BK para além da ordem dominante.

3.4 Conclusão

Neste capítulo foi derivada a equação BK em ordem dominante, assim como suas soluções. Analisamos as soluções assintóticas da equação BK tanto para região de saturação quanto

para a região linear próximo da linha de saturação. Como visto, na região de saturação a solução da equação BK é a lei de Levin-Tuchin a qual satisfaz a propriedade de escalonamento geométrico. Já para a região linear, a equação BK resume-se na equação BFKL cuja solução foi trabalhada em detalhes, porém a mesma não apresenta a propriedade de escalonamento geométrico quando se assume que esta é válida para todos os valores de Y . Por outro lado, verificamos que, quando se considera a existência do regime de saturação, e se impõem uma condição de contorno associada, esta apresenta a propriedade de escalonamento geométrico. Notemos que as soluções vistas neste capítulo foramam a base do modelo IIM, o qual é utilizado para realizar a descrição para os dados de HERA em 2002 para γ_s dado pelos cálculos em ordem dominante.

Resultados recentes apontam que os dados precisos de HERA são melhor descritos pelo modelo IIM assumindo um valor para o ponto de sela distinto daquele derivado em ordem dominante. Isto indica que correções além da ordem dominante já são relevantes na região cinemática provada no experimento HERA. Este resultado motiva a análise das soluções da equação BK além da ordem dominante o qual é o objetivo do próximo capítulo.

4 Equação Balitsky - Kovchegov além da ordem dominante: uma comparação entre as soluções assintóticas na região de saturação

No capítulo anterior salientamos que os dados experimentais de HERA indicam que o modelo IIM, baseado nas soluções assintóticas da equação BK em ordem dominante não é satisfatório, sendo, portanto, necessário estimar as correções além desta ordem perturbativa. Consequentemente, devemos considerar as correções além da ordem dominante (*NLO - Next-to-Leading Order*) para a equação BK, sendo este o objetivo deste capítulo.

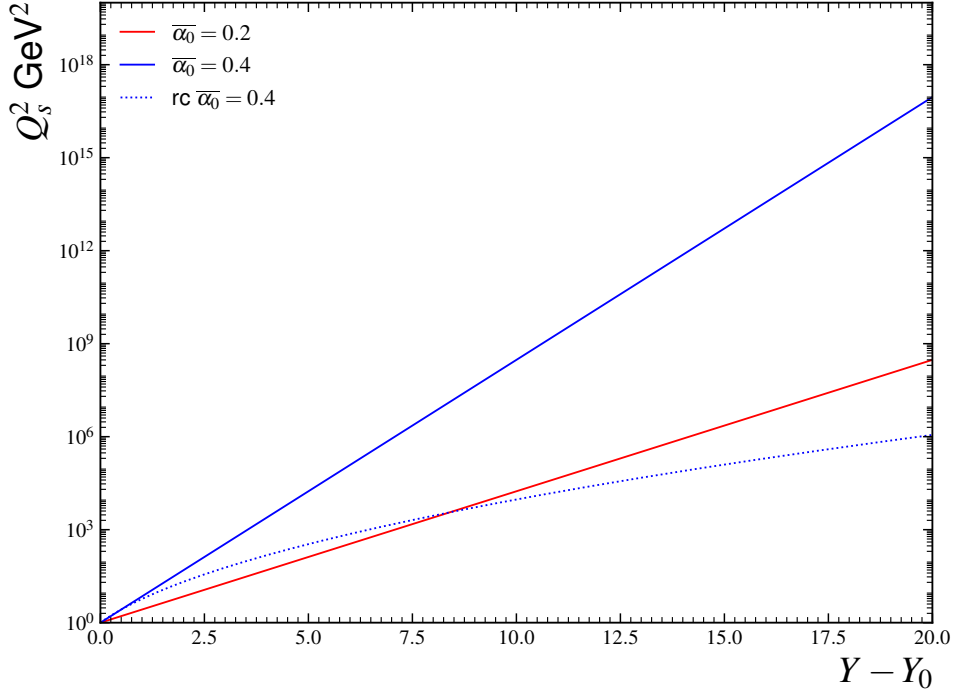
O tratamento da equação BK além da ordem dominante é um tema de intenso debate na literatura. Em particular, correntemente existem diferentes propostas para o kernel da equação, derivados considerando diferentes aproximações e distintas prescrições para o tratamento das correções associadas a uma constante de acoplamento variável. Estes estudos apontam que a solução no regime linear próximo à linha de saturação apresenta o escalonamento geométrico derivado em ordem dominante, mas com um valor distinto para o γ_s . Por outro lado, a solução no regime de saturação é fortemente dependente do kernel considerado. Nosso objetivo neste capítulo é analisar em detalhe as diferentes abordagens para as correções além da ordem dominante, derivar a solução da BK no regime de saturação para as diferentes correções NLO e distintas prescrições para a escala da constante de acoplamento e, por fim, apresentar (pela primeira vez) a comparação entre as soluções. Tal análise nos permitirá identificar a importância relativa de cada uma das contribuições para as correções além da ordem dominante, assim como estimar a região em que o regime de saturação deverá ocorrer. Tais aspectos são fundamentais para a construção de um modelo fenomenológico baseado nas soluções da equação BK além da ordem dominante.

4.1 A escala de saturação além da ordem dominante

As soluções tratadas no capítulo anterior foram obtidas a partir da equação BK em ordem dominante para o Kernel BFKL onde a constante de acoplamento é fixa. Do que foi visto anteriormente, temos que a escala de saturação dependente da rapidez se conecta com a constante de acoplamento da seguinte forma

$$Q_s^2(Y) = Q_0^2 \exp(c\bar{\alpha}_0(Y - Y_0)). \quad (4.1)$$

Figura 4.1 - A dependência da escala de saturação em rapidez para a constante de acoplamento fixa: $\bar{\alpha}_0 = 0.2$ (linha sólida vermelha) e $\bar{\alpha}_0 = 0.4$ (linha sólida azul). Para a constante de acoplamento variável para $Q_0^2 = 1 \text{ GeV}^2$ (linha pontilhada azul), onde $Y_0 = 10^{-2}$.



Porém, ao considerarmos a constante de acoplamento variável com a prescrição de um laço

$$\bar{\alpha}_s(Q_s^2(Y)) = \frac{N_c}{\pi b \ln(Q_s^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)}, \quad (4.2)$$

os autores da Ref. [48] demonstram que a escala de saturação passa a ser dada por:

$$Q_s^2 = \Lambda_{\text{QCD}}^2 \exp \left\{ \sqrt{\frac{2cN_c}{\pi b} (Y - Y_0) + \ln^2 \left(\frac{Q_0^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \right)} \right\}. \quad (4.3)$$

Das soluções para $\bar{\alpha}_s$ fixo e $\bar{\alpha}_s$ variável, eq. (4.1) e eq. (4.3) respectivamente, derivamos os resultados apresentados na Fig. (4.1) para $\bar{\alpha}_0 = 0,2$ e $\bar{\alpha}_0 = 0,4$ para o caso da constante de acoplamento fixo e $Q_0^2 = 1 \text{ GeV}^2$ para o caso da constante de acoplamento variável. Na Fig. (4.1) fica evidente que a dependência da escala de saturação em relação à rapidez é mais fraca para o caso da constante de acoplamento variável do que para o caso de acoplamento fixo. Disto, fica evidente que a simples consideração de $\bar{\alpha}_s$ variável traz consigo uma modificação considerável para a escala de saturação. Tal resultado motiva a

análise detalhada das correções além da ordem dominante para a equação BK que será apresentada a seguir neste capítulo.

A primeira correção NLO para a eq. BK-LO foi derivada pelas referências [49, 50], onde se considera a contribuição de laços de quark no Kernel de evolução da eq. BK e a ressonância dos termos proporcionais a $\alpha_s N_f$ para todas as ordens, geralmente denominadas de correções de acoplamento variável (*running coupling - rc*). Ao implementarmos a parte do quark combinada com a parte da contribuição de glúons obtemos a correção completa além da ordem dominante completa (*full Next-to-Leading Order - fNLO*). Como este é um tema em aberto há várias proposições de correções e prescrições, as quais serão apresentadas neste capítulo.

Figura 4.2 - Ilustração das correções e suas respectivas equações de evolução.



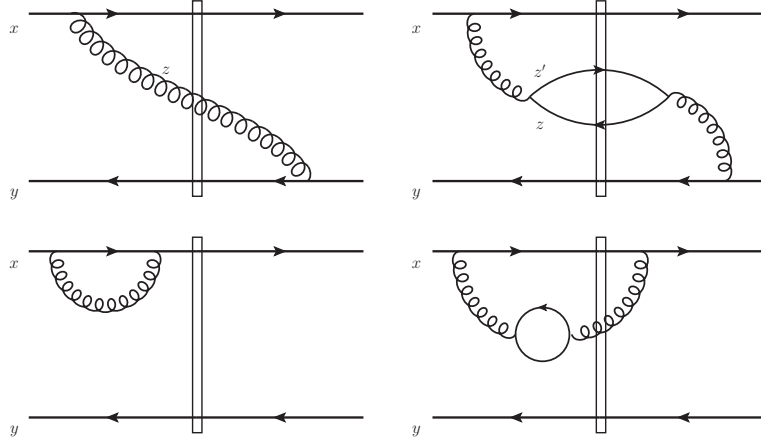
A Fig. (4.2) sumariza as correções que serão abordadas neste capítulo, partindo da equação BK ao incluímos a correção de laço de quark vamos da equação BK em ordem dominante (BK-LO) para a equação BK com a correção de acoplamento variável (rcBK), ao implementarmos a correções de laço de glúon para a equação rcBK obtemos a equação BK-fNLO e ao implementarmos correções colineares para a equação BK-fNLO temos a equação BK-fNLO corrigida pelas correções colineares. Ao longo deste capítulo derivaremos a solução assintótica na região de saturação para cada uma destas correções da equação BK e apresentaremos um comparativo dentre tais soluções o que é inédito no âmbito da literatura atual.

4.2 Correções de laço de quarks para a equação de Balitsky-Kovchegov

Em ordem dominante, a equação BK considera somente os diagramas apresentados no lado esquerdo da Fig. 4.3, não considerando às contribuições que geram a evolução da constante de acoplamento. Nas Refs. [49–53], os autores consideraram as contribuições com laços de quarks representados nos diagramas apresentados no lado direito da Fig. 4.3, ressonando os termos proporcionais a $\alpha_s N_f$. Estes termos implicam a alteração da equação BK, a qual passa ser dada por:

$$\frac{\partial S(r, Y)}{\partial Y} = \mathcal{R}[S] - S[S]. \quad (4.4)$$

Figura 4.3 - Diagramas que são levadas em consideração pela equação BK com acoplamento variável (rcBK). A linha vertical é o hádron alvo. No lado esquerdo temos os diagramas que contribuem para o caso LO e no lado direito temos os diagramas do laço de quark.



onde a qual é usualmente denominada equação BK com acoplamento variável (rcBK-*running coupling BK*).

A eq. (4.4) é representada diagramaticamente na Fig. 4.3. Os diagramas do lado esquerdo, que representam o caso de ordem dominante estão incluídos dentro de $\mathcal{R}[S]$, assim como o diagrama que representa o laço de quark (parte inferior à direita). O diagrama que representa o glúon flutuando em um par $q\bar{q}$ (lado superior à direita) é representado pelo termo $\mathcal{S}[S]$ na eq. (4.4).

O primeiro termo do lado direito da eq. (4.4), \mathcal{R} , refere-se a correção de acoplamento variável. Como já dito, \mathcal{R} tem uma forma similar ao lado direito da eq. BK-LO exceto pelo seu kernel, i.e.,

$$\mathcal{R}[S(r,Y)] = \int d^2z \bar{K}(r,r_1,r_2) [S(r_1,Y)S(r_2,Y) - S(r,Y)]. \quad (4.5)$$

O segundo termo do lado direito da eq. (4.4), \mathcal{S} , refere-se a contribuição de *subtração*, que é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[S(r,Y)] = & \alpha_\mu^2 \int d^2z d^2z' K_{\odot}(x,y; z,z') [S(x-\omega,Y)S(\omega-y,Y) \\ & - S(x-z,Y)S(z'-y,Y)], \end{aligned} \quad (4.6)$$

com α_μ sendo a constante de acoplamento, K_{\odot} é o kernel JIMWLK [53] e ω é um termo dependente do esquema de subtração.

As modificações presentes na eq. (4.5) estão contidas no Kernel $\overline{K}(r, r_1, r_2)$, o qual difere do Kernel BFKL do caso LO, $K_{\text{LO}}(r, r_1, r_2)$, porque o propagador do glúon emitido pelo dipolo pai contém o laço de quark. Isto modifica a probabilidade de emissão do glúon, porém não altera os termos de interação de ordem dominante, parte de baixo do lado direito da Fig. 4.3.

Há duas expressões para o kernel modificado, são elas:

- Kernel de Balitsky [49]:

$$\overline{K}_{\text{Bal}} = \frac{N_c \alpha_s(r^2)}{2\pi^2} \left[\frac{r^2}{r_1^2 r_2^2} + \frac{1}{r_1^2} \left(\frac{\alpha_s(r_1^2)}{\alpha_s(r_2^2)} - 1 \right) + \frac{1}{r_2^2} \left(\frac{\alpha_s(r_2^2)}{\alpha_s(r_1^2)} - 1 \right) \right];$$

- Kernel de Kovchegov-Weigert [50]:

$$\overline{K}_{\text{KW}} = \frac{N_c}{2\pi^2} \left[\alpha_s(r_1^2) \frac{1}{r_1^2} - 2 \frac{\alpha_s(r_1^2) \alpha_s(r_2^2)}{\alpha_s(R^2)} \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{r_1^2 r_2^2} + \alpha_s(r_2^2) \frac{1}{r_2^2} \right],$$

para

$$R^2 = r_1 r_2 \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{\frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} - 2} \frac{r_1^2 r_2^2}{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2} \frac{1}{r_1^2 - r_2^2};$$

O kernel do termo de subtração da equação (4.6) modifica-se desde que o par $q\bar{q}$ formado a partir do dipolo pai é adicionado na função de onda. Dependendo do esquema de subtração, \mathcal{S} assume duas formas distintas. São elas:

- Esquema de subtração de Balitsky [49]:

Substitui-se $\omega = z$ ou $\omega = z'$ na eq. (4.6) e obtemos o termo de subtração,

$$S^{\text{Bal}}[S] = \alpha_\mu^2 \int d^2 z d^2 z' K_{\textcircled{1}}(x, y; z, z') [S(x - z, Y) S(z - y, Y) - S(x - z, Y) S(z' - y, Y)].$$

- Esquema de Kovchegov-Weigert [50]:

Substitui-se $\omega = z$ na eq. (4.6), obtendo

$$S^{\text{KW}}[S] = \alpha_\mu^2 \int d^2 z d^2 z' K_{\textcircled{1}}(x, y; z, z') [S(x - z, Y) S(z - y, Y) - S(x - z, Y) S(z' - y, Y)].$$

O kernel da equação acima modifica-se quando o par $q\bar{q}$ formado a partir do dipolo pai é adicionado na função de onda.

A eq. (4.6) mostra que $\mathcal{S}[S]$ é da ordem de α_μ^2 enquanto $\mathcal{R}[S]$ é da ordem de α_s e todos os termos de $\mathcal{S}[S]$ são quadráticos em S . Portanto, para grandes valores de rapidez e pequenos valores de S (região de saturação), a correção de subtração é pequena em comparação com a correção de acoplamento variável.

4.2.1 Solução na região de saturação

Na região de saturação, $rQ_s \gg 1$, temos que $N \approx 1$, então $S \rightarrow 0$ o que implica que os termos quadráticos da eq. (4.5) e eq. (4.6) podem ser desprezados.

Logo, a equação de evolução incluindo a correção de acoplamento variável no regime de saturação pode ser expressa da seguinte forma:

$$\partial_Y S(r, Y) = - \int d^2 z \bar{K}(r, r_1, r_2) S(r, Y), \quad (4.7)$$

Nesta região, a principal contribuição para a integração do lado direito da eq. (4.7) procede tanto de

$$1/Q_s \ll r_1 \ll r \quad r_2 \sim r, \quad (4.8)$$

ou de

$$1/Q_s \ll r_2 \ll r \quad r_1 \sim r. \quad (4.9)$$

Assumindo que a principal contribuição vem da primeira região, eq. (4.8), os dois Kernel irão sofrer alterações. O Kernel de Balitsky resume-se a

$$\bar{K}_{\text{Bal}} = \frac{N_c \alpha_s(r^2)}{2\pi^2} \left[\frac{1}{r_1^2} \frac{\alpha_s(r_1^2)}{\alpha_s(r^2)} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\alpha_s(r^2)}{\alpha_s(r_1^2)} - 1 \right) \right].$$

No regime de saturação, temos que $r_1 \ll r$ o que implica que podemos desprezar a fração $1/r^2$ do Kernel de Balitsky. Então,

$$\bar{K}_{\text{Bal}} \approx \frac{N_c \alpha_s(r_1^2)}{2\pi^2 r_1^2}.$$

Por outro lado, na região de saturação, o Kernel de Kovchegov-Weigert escreve-se como

$$\bar{K}_{\text{KW}} = \frac{N_c}{2\pi^2} \left[\alpha_s(r_1^2) \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r^2} \frac{2\alpha_s(r_1^2)\alpha_s(r^2)}{\alpha_s(r_1^2)} \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}}{r_1^2} + \alpha_s(r^2) \frac{1}{r^2} \right],$$

para $R = r_1$. Assim, temos que a constante de acoplamento do primeiro termo depende do menor dipolo e como já visto, na região de saturação podemos desprezar a fração $1/r^2$. Portanto,

$$\bar{K}_{\text{KW}} \approx \frac{N\alpha_s(r_1^2)}{2\pi^2 r_1^2}.$$

Consequentemente, podemos concluir que os dois Kernel para a correção de acoplamento variável no regime de saturação assumem a mesma forma, que é:

$$\bar{K}^{\text{rc}} = \frac{N_c \alpha_s(r_1^2)}{2\pi^2 r_1^2}.$$

Assim, a eq. BK no regime de saturação é dada por

$$\partial_Y S(r, Y) = -2 \int d^2 z \frac{N_c \alpha_s(r_1^2)}{2\pi^2 r_1^2} S(r, Y),$$

onde o pré-fator 2 está associado às duas regiões que contribuem para a integração, eq. (4.8) e eq. (4.9).

Como $d^2 z = z dz d\Omega$ e assumindo

$$\alpha_s(r_1^2) = \frac{1}{b \ln\left(\frac{1}{r_1^2 \Lambda^2}\right)},$$

onde b é o primeiro coeficiente da função beta. Ficamos com

$$\frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial Y} = -\frac{2N_c}{b\pi} \int_{1/Q_s}^r \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{r_1^2 \Lambda^2}\right)} \frac{dr_1}{r_1}, \quad (4.10)$$

cuja solução pode ser expressa da seguinte forma:

$$\ln\left(\frac{S}{S_0}\right) = -\frac{N_c}{b\pi} \int_{Y_0}^Y \ln\left[d \ln\left(\frac{Q_s^2(Y')}{\Lambda^2}\right)\right] \partial Y',$$

onde definimos $d = 1/\ln\left(\frac{1}{r^2\Lambda^2}\right)$.

Usando a expressão da taxa de crescimento da escala de saturação,

$$\ln\left(\frac{Q_s^2(Y)}{\Lambda^2}\right) = \sqrt{c(Y - Y_0)} + \mathcal{O}(Y^{1/6}),$$

ficamos com

$$\ln\left(\frac{S}{S_0}\right) = -\frac{N_c}{b\pi} \int_{Y_0}^Y \ln\left[d\sqrt{c(Y' - Y_0)}\right] \partial Y', \quad (4.11)$$

integrando sobre a rapidez, obtemos que

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{S}{S_0}\right) &= -\frac{N_c}{\pi cb} \left[\ln^2\left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2}\right) \ln\left[\frac{\ln\left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2}\right)}{\ln\left(\frac{1}{r^2\Lambda^2}\right)}\right] - \frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2}\right) \right] \\ &= -\frac{N_c}{\pi cb} \left\{ \ln^2\left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2}\right) \left[\ln\left(\frac{\ln\left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2}\right)}{\ln\left(\frac{1}{r^2\Lambda^2}\right)}\right) - \frac{1}{2} \right] \right\}, \end{aligned}$$

o que implica em

$$S = S_0 \exp \left\{ -\frac{N_c}{\pi cb} \left[\ln^2\left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2}\right) \left(\ln\left(\frac{\ln\left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2}\right)}{\ln\left(\frac{1}{r^2\Lambda^2}\right)}\right) - \frac{1}{2} \right) \right] \right\}. \quad (4.12)$$

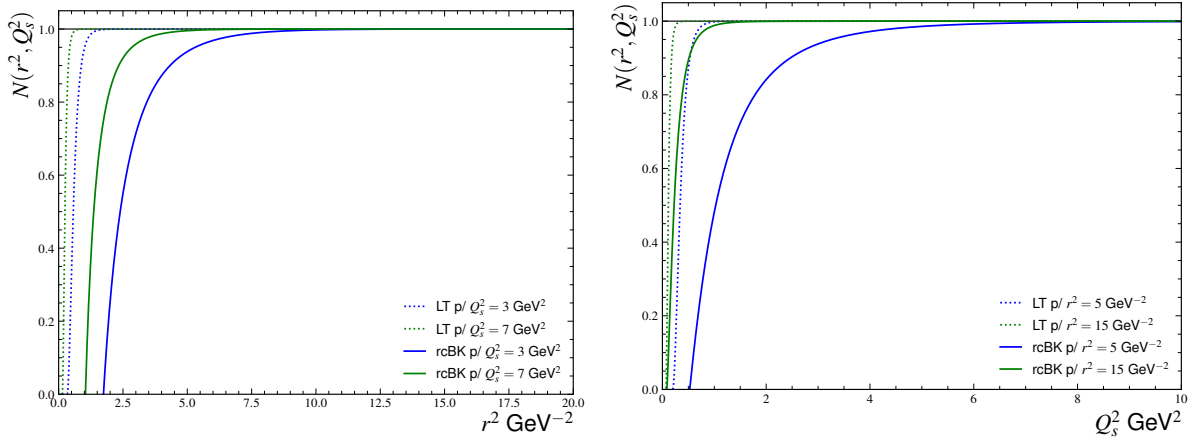
a qual é a solução assintótica da correção rcBK na região de saturação.

Na Fig. 4.4, apresentamos às predições da amplitude de espalhamento na escala de saturação e no tamanho de dipolo obtidas considerando as correções de laço de quarks discutidas acima. Para comparação, também apresentamos a solução no regime de saturação predita em ordem dominante, a qual é dada pela lei de Levin-Tuchin.

Da Fig. 4.4 temos que a solução de ordem dominante alcança saturação para valores mais baixos do tamanho do dipolo ou da escala de saturação, já a correção NLO alcança a saturação para maiores valores de r^2 ou Q_s^2 . Sendo assim podemos afirmar que a correção de laço de quark implica em uma modificação na solução assintótica na região não-linear. Em particular, estas correções implicam que o regime de saturação é retardado em comparação às predições de ordem dominante.

O cálculo realizado até aqui foi realizado assumindo a prescrição de acoplamento variável

Figura 4.4 - Comparativo entre a soluções assintóticas na região de saturação da solução Levin-Tuchin (LO) e da correção rcBK para Q_s^2 fixo (esquerda) e para r^2 fixo (direita).

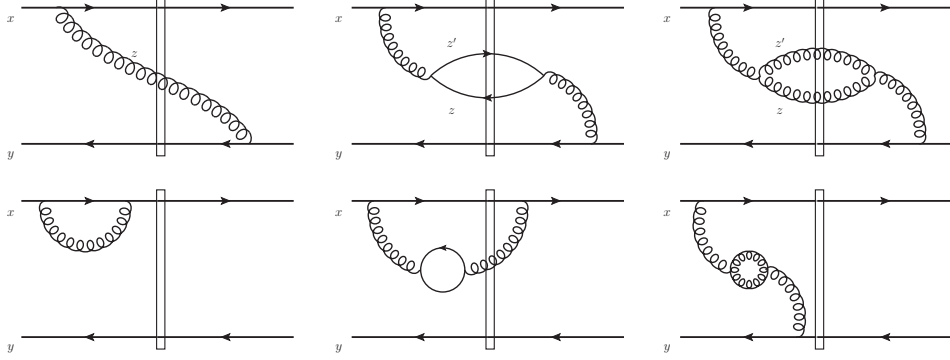


do dipolo pai (*PDRC - Parent Dipole Running Coupling Prescription*) [51, 54, 55] na qual a constante de acoplamento é estimada para uma escala determinada pelo tamanho do dipolo que gera a cascata (dipolo pai), entretanto há outras prescrições para a escala da variável de acoplamento. A mais intuitiva é assumir que a escala que determina o valor da constante de acoplamento é a escala de saturação Q_s , i.e., $\alpha_s(Q_s^2)$. Ao usarmos tal prescrição para a equação rcBK na região de saturação teremos que sua solução corresponde a lei de Levin-Tuchin que é o mesmo obtido em ordem dominante. Portanto, tal prescrição para o caso da correção de laço de quark não impacta nenhuma correção a solução assintótica.

Além da prescrição $\alpha_s(Q_s^2)$ temos a prescrição de acoplamento variável do menor dipolo (*SDRC - Smallest Dipole Running Coupling Prescription*) [51, 56]. Ao implementarmos tal prescrição na equação rcBK temos que a solução na região de saturação será exatamente a mesma obtida na prescrição PDRC, eq. (4.12), logo o comparativo entre a solução rcBK e a solução assintótica em ordem dominante será dada pela Fig. 4.4 a demonstra que correção de laço de quark faz com que a saturação ocorra para maiores valores de r .

Estudos recentes [57–59] apontam que a equação de evolução com a prescrição de acoplamento variável do menor dipolo é a prescrição mais adequada à descrição de acoplamento variável, dado que é favorecido pelos dados de HERA ao nível fenomenológico. Na Ref. [56], também foi apontado que a interpretação correta do argumento do acoplamento QCD varia de acordo com o tamanho do menor dipolo para a equação BK para além da ordem dominante.

Figura 4.5 - Diagramas que são levados em consideração pela equação BK além da ordem dominante. A linha vertical é o hádron alvo. No lado esquerdo temos os diagramas que contribuem para o caso LO, no meio temos os diagramas do laço de quarks e no lado direito temos os diagramas para o laço de glúons.



4.3 Correções de laços de quarks e glúons para a equação de Balitsky-Kovchegov

Até então consideramos a equação BK em ordem dominante e a correção do laço de quarks cujos diagramas fazem-se presentes na Fig. 4.3. Entretanto, correções associadas a laços de glúons também contribuem além da ordem dominante e devem ser consideradas. Os diagramas associados são representados no lado direito da Fig. 4.5. A equação resultante ao inserirmos as contribuições de laços de quarks e glúons é usualmente denotada *full Next-to-Leading Order Balitsky - Kovchegov equation* (BK-fNLO). No que segue discutiremos as características desta equação e apresentamos suasolução no regime de saturação.

Incluindo todas as correções apresentadas na Fig. 4.5, temos a equação de evolução BK-fNLO que é dada por [51, 52]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(r,Y)}{\partial Y} = & \int d^2z K_1 [S(r_1,Y)S(r_2,Y) - S(r,Y)] \\ & + \int d^2z d^2r'_2 K_2 [S(r_1,Y)S(r_3,Y)S(r'_2,Y) - S(r_1,Y)S(r_2,Y)] \\ & + \int d^2z d^2r'_2 K_3 [S(r'_1,Y)S(r_2,Y) - S(r_1,Y)S(r_2,Y)], \end{aligned}$$

onde os distintos Kernel são dados por:

$$K_1 = \frac{\bar{\alpha}_s(r^2)}{2\pi} \frac{r^2}{r_1^2 r_2^2} \left[1 + \bar{\alpha}_s(r^2) \left(b \ln r^2 \mu^2 - b \frac{r_1^2 - r_2^2}{r^2} \ln \frac{r_1^2}{r_2^2} + \frac{67}{36} - \frac{\pi^2}{12} - \frac{5N_f}{18N_c} - \frac{1}{2} \ln \frac{r_1^2}{r^2} \ln \frac{r_2^2}{r^2} \right) \right], \quad (4.13)$$

$$K_2 = \frac{\bar{\alpha}_s^2(r^2)}{8\pi^2} \left[-\frac{2}{r_3^4} + \left(\frac{r_1^2 r_2'^2 + r_1'^2 r_2^2 - 4r^2 r_3^2}{r_3^4 (r_1^2 r_2'^2 - r_1'^2 r_2^2)} + \frac{r^4}{r_1^2 r_2'^2 (r_1^2 r_2'^2 - r_1'^2 r_2^2)} + \frac{r^2}{r_1^2 r_2'^2 r_3^2} \right) \ln \frac{r_1^2 r_2'^2}{r_1'^2 r_2^2} \right], \quad (4.14)$$

$$K_3 = \frac{\bar{\alpha}_s^2(r^2) N_f}{8\pi^2 N_c} \left(\frac{2}{r_3^4} - \frac{r_1'^2 r_2^2 + r_2'^2 r_1^2 - r^2 r_3^2}{r_3^4 (r_1^2 r_2'^2 - r_1'^2 r_2^2)} \ln \frac{r_1^2 r_2'^2}{r_1'^2 r_2^2} \right), \quad (4.15)$$

para

$$r = x_\perp - y_\perp,$$

$$r_1 = x_\perp - z_\perp,$$

$$r_2 = y_\perp - z_\perp,$$

$$r_1' = x_\perp - z'_\perp,$$

$$r_2' = y_\perp - z'_\perp,$$

$$r_3 = z_\perp - z'_\perp,$$

que são o tamanho transversal dos dipolos.

Na eq. (4.13), b é o primeiro coeficiente da função β , e μ é a escala de renormalização.

Podemos simplificar K_1 como:

$$K_1 = \frac{\bar{\alpha}_s(r^2)}{2\pi} \left[\frac{r^2}{r_1^2 r_2^2} + \frac{1}{r_1^2} \left(\frac{\alpha_s(r_1^2)}{\alpha_s(r_2^2)} - 1 \right) + \frac{1}{r_2^2} \left(\frac{\alpha_s(r_2^2)}{\alpha_s(r_1^2)} - 1 \right) + \frac{\bar{\alpha}_s(r^2) r^2}{r_1^2 r_2^2} \left(\frac{67}{36} - \frac{\pi^2}{12} - \frac{5N_f}{18N_c} - \frac{1}{2} \ln \frac{r_1^2}{r^2} \ln \frac{r_2^2}{r^2} \right) \right].$$

Na região de saturação há duas regiões que contribuem para a integração da eq. BK:

$$1/Q_s \ll r_1 \ll r \quad r_2 \sim r,$$

ou

$$1/Q_s \ll r_2 \ll r \quad r_1 \sim r.$$

Ao escolhermos a primeira região de contribuição ficamos com $r_2 \sim r$ que implica em

$$K_1 = \frac{\overline{\alpha}_s(r^2)}{2\pi} \left\{ \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_1^2} \left(\frac{\alpha_s(r_1^2)}{\alpha_s(r^2)} - 1 \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\alpha_s(r_2^2)}{\alpha_s(r^2)} - 1 \right) \right. \\ \left. + \frac{\overline{\alpha}_s(r^2)}{r_1^2} \left(\frac{67}{36} - \frac{\pi^2}{12} - \frac{5N_f}{18N_c} - \frac{1}{2} \ln \frac{r_1^2}{r^2} \ln \frac{r^2}{r_1^2} \right) \right\}.$$

Ademais, no regime de saturação, temos que $r_1 \ll r$ o que implica que podemos desprezar a fração $1/r^2$. Então,

$$K_1 = \frac{\overline{\alpha}_s(r^2)}{2\pi} \left[\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_1^2} \left(\frac{\alpha_s(r_1^2)}{\alpha_s(r^2)} - 1 \right) + \frac{\overline{\alpha}_s(r^2)}{r_1^2} \left(\frac{67}{36} - \frac{\pi^2}{12} - \frac{5N_f}{18N_c} \right) \right], \\ K_1 = \frac{\overline{\alpha}_s(r_1^2)}{2\pi r_1^2} + \frac{\overline{\alpha}_s^2(r^2)}{2\pi r_1^2} \left(\frac{67}{36} - \frac{\pi^2}{12} - \frac{5N_f}{18N_c} \right).$$

4.3.1 Solução na região de saturação

A equação BK-fNLO na região de saturação pode ser expressa da seguinte forma:

$$\partial_Y S(r, Y) = -2 \int d^2z \left[\frac{\overline{\alpha}_s(r_1^2)}{2\pi r_1^2} + \frac{\overline{\alpha}_s^2(r^2)}{2\pi r_1^2} \left(\frac{67}{36} - \frac{\pi^2}{12} - \frac{5N_f}{18N_c} \right) \right] S(r, Y).$$

Usando que $d^2z = r_1 dr_1 d\Omega$, resulta

$$\partial_Y S(r, Y) = -2 \int r_1 dr_1 d\Omega \left[\frac{\overline{\alpha}_s(r_1^2)}{2\pi r_1^2} + \frac{\overline{\alpha}_s^2(r^2)}{2\pi r_1^2} \left(\frac{67}{36} - \frac{\pi^2}{12} - \frac{5N_f}{18N_c} \right) \right] S(r, Y), \\ \frac{1}{S(r, Y)} \frac{\partial S(r, Y)}{\partial Y} = - \frac{2N_c}{\pi} \underbrace{\int_{1/Q_s}^r dr_1 \frac{\alpha_s(r_1^2)}{r_1}}_{(I)} - \frac{2N_c^2}{\pi^2} \left(\frac{67}{36} - \frac{\pi^2}{12} - \frac{5N_f}{18N_c} \right) \underbrace{\int_{1/Q_s}^r dr_1 \frac{\alpha_s^2(r^2)}{r_1}}_{(II)}, \quad (4.16)$$

usamos que $\overline{\alpha}_s = \frac{N_c \alpha_s}{\pi}$. Vamos realizar as integrações de (I) e (II) separadamente,

- P/ (I), vamos partir de $\alpha_s(r_1^2) = \frac{1}{b \ln\left(\frac{1}{r_1^2 \Lambda^2}\right)}$ então

$$(I) = \int_{1/Q_s}^r dr_1 \frac{\alpha_s(r_1^2)}{r_1} = \frac{1}{b} \int_{1/Q_s}^r \frac{dr_1}{r_1 \ln\left(\frac{1}{r_1^2 \Lambda^2}\right)},$$

realizando a seguinte transformação de variável:

$$U = \ln\left(\frac{1}{r_1^2 \Lambda^2}\right) \longrightarrow dU = -2 \frac{dr_1}{r_1},$$

ficamos com

$$\begin{aligned} (I) &= -\frac{1}{2b} \int \frac{dU}{U} \\ &= -\frac{1}{2b} \ln\left(\frac{1}{r_1^2 \Lambda^2}\right) \Big|_{1/Q_s}^r \\ (I) &= -\frac{1}{2b} \ln\left[\frac{\ln\left(\frac{1}{r^2 \Lambda^2}\right)}{\ln\left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2}\right)}\right]; \end{aligned}$$

- Para (II), temos que $\alpha_s^2(r^2)$ independe de r_1 logo

$$\begin{aligned} (II) &= \int_{1/Q_s}^r dr_1 \frac{\alpha_s^2(r^2)}{r_1} = \alpha_s^2(r^2) \int_{1/Q_s}^r \frac{dr_1}{r_1} \\ (II) &= \alpha_s^2(r^2) \left[\ln r - \ln \frac{1}{Q_s} \right]; \end{aligned}$$

Retornando para a eq. (4.16),

$$\begin{aligned} \frac{1}{S(r,Y)} \frac{\partial S(r,Y)}{\partial Y} &= \frac{2N_c}{\pi} \frac{1}{2b} \ln\left[\frac{\ln\left(\frac{1}{r^2 \Lambda^2}\right)}{\ln\left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2}\right)}\right] - \frac{2N_c^2}{\pi^2} \left(\frac{67}{36} - \frac{\pi^2}{12} - \frac{5N_f}{18N_c}\right) \alpha_s^2(r^2) \left[\ln r - \ln \frac{1}{Q_s} \right] \\ \frac{1}{S(r,Y)} \frac{\partial S(r,Y)}{\partial Y} &= \frac{N_c}{\pi b} \ln\left[\frac{\ln\left(\frac{1}{r^2 \Lambda^2}\right)}{\ln\left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2}\right)}\right] - \frac{BN_c^2}{\pi^2 b^2} \left[\ln(r^2 \Lambda^2) + \ln\left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2}\right) \right], \end{aligned}$$

onde se somou e subtraiu $\ln(\Lambda^2)$ e $B = \frac{1}{\ln^2(1/r^2 \Lambda^2)} \left(\frac{67}{36} - \frac{\pi^2}{12} - \frac{5N_f}{18N_c}\right)$. Vamos solucionar a

equação diferencial,

$$\int_{S_0}^S \frac{\partial S'}{S'} = -\frac{N_c}{\pi b} \int_{Y_0}^Y \ln \left[\frac{\ln \left(\frac{Q_s^2(Y')}{\Lambda^2} \right)}{\ln \left(\frac{1}{r^2 \Lambda^2} \right)} \right] \partial Y' - \frac{BN_c^2}{\pi^2 b^2} \int_{Y_0}^Y \left[-\ln \left(\frac{1}{r^2 \Lambda^2} \right) + \ln \left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2} \right) \right] \partial Y',$$

definindo $d \equiv \frac{1}{\ln(1/r^2 \Lambda^2)}$, ficamos com

$$\ln \left(\frac{S}{S_0} \right) = -\frac{N_c}{\pi b} \int_{Y_0}^Y \ln \left[d \ln \left(\frac{Q_s^2(Y')}{\Lambda^2} \right) \right] \partial Y' + \frac{BN_c^2}{\pi^2 b^2} \int_{Y_0}^Y \frac{1}{d} \partial Y' - \frac{BN_c^2}{\pi^2 b^2} \int_{Y_0}^Y \ln \left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2} \right) \partial Y',$$

usando a expressão da taxa de crescimento da escala de saturação:

$$\ln \left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2} \right) = \sqrt{c(Y - Y_0)} + \mathcal{O}(Y^{1/6}).$$

Temos então,

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{S}{S_0} \right) = & -\frac{N_c}{\pi b} \int_{Y_0}^Y \ln \left[d \sqrt{c(Y' - Y_0)} \right] \partial Y' \\ & + \frac{BN_c^2}{\pi^2 b^2 d} (Y - Y_0) - \underbrace{\frac{BN_c^2}{\pi^2 b^2} \int_{Y_0}^Y \sqrt{c(Y' - Y_0)} \partial Y'}_{(III)}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

para calcularmos a integral (III), realizamos a seguinte substituição:

$$z' = c(Y' - Y_0) \longrightarrow dz' = cdY',$$

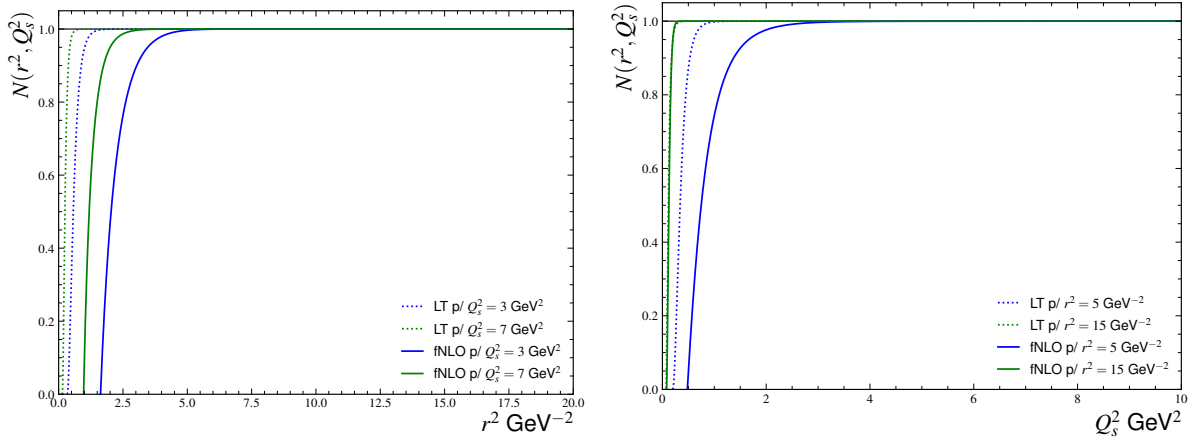
logo,

$$(III) = \int_0^z z'^{1/2} \frac{dz'}{c} = \frac{2}{3c} z'^{3/2} \Big|_0^{c(Y-Y_0)} = \frac{2}{3c} [c(Y - Y_0)]^{3/2}.$$

Retornando para a eq. (4.17), resulta

$$\ln \left(\frac{S}{S_0} \right) = -\frac{N_c}{\pi b} \int_{Y_0}^Y \ln \left[d \sqrt{c(Y' - Y_0)} \right] \partial Y' + \frac{BN_c^2}{\pi^2 b^2 d} (Y - Y_0) - \frac{BN_c^2}{\pi^2 b^2} \frac{2}{3c} [c(Y - Y_0)]^{3/2}.$$

Figura 4.6 - Comparativo entre a soluções assintóticas na região de saturação da solução Levin - Tuchin (LO) e da correção fNLO para Q_s^2 fixo (esquerda) e para r^2 fixo (direita).



Usando novamente a expressão da taxa de crescimento da escala de saturação:

$$\ln \left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2} \right) = [c(Y - Y_0)]^{1/2},$$

temos que

$$\ln \left(\frac{S}{S_0} \right) = - \frac{N_c}{\pi b} \int_{Y_0}^Y \ln \left[d \sqrt{c(Y' - Y_0)} \right] \partial Y' + \frac{BN_c^2}{c\pi^2 b^2 d} \ln^2 \left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2} \right) - \frac{2BN_c^2}{3c\pi^2 b^2} \ln^3 \left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2} \right). \quad (4.18)$$

Resolvendo a integral no primeiro termo resulta

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{S}{S_0} \right) = & - \frac{2BN_c^2}{3c\pi^2 b^2} \ln^3 \left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2} \right) - \frac{N_c}{c\pi b} \left[\ln \left(\frac{\ln(Q_s^2/\Lambda^2)}{\ln(1/r^2\Lambda^2)} \right) - \frac{1}{2} \right] \ln^2 \left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2} \right) \\ & + \frac{BN_c^2 \ln(1/r^2\Lambda^2)}{c\pi^2 b^2} \ln^2 \left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2} \right), \end{aligned}$$

o que é equivalente a

$$\begin{aligned} S = S_0 \exp \left\{ - \frac{2BN_c^2}{3c\pi^2 b^2} \ln^3 \left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2} \right) - \frac{N_c}{c\pi b} \left[\ln \left(\frac{\ln(Q_s^2/\Lambda^2)}{\ln(1/r^2\Lambda^2)} \right) - \frac{1}{2} \right] \ln^2 \left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{BN_c^2 \ln(1/r^2\Lambda^2)}{c\pi^2 b^2} \ln^2 \left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

que é a solução da correção fNLO da equação BK.

Na figura 4.6 temos que a solução de ordem dominante alcança saturação para valores mais baixos do tamanho do dipolo ou da escala de saturação, já a correção fNLO alcança a saturação para maiores valores de r^2 ou Q_s^2 .

Como visto ao tratarmos a correção do laço de quark na região de saturação há outras prescrições para o acoplamento variável. A seguir iremos apresentar as soluções para a prescrição de $\alpha_s(Q_s^2)$ e após trabalharemos com a prescrição de menor dipolo.

A) Prescrição de $\alpha_s(Q_s^2)$:

Como visto anteriormente, no regime de saturação a equação BK-fNLO pode ser expressa da seguinte forma:

$$\partial_Y S(r, Y) = - \int d^2 z K_1 S(r, Y),$$

onde, para a prescrição de $\alpha_s(Q_s^2)$, o kernel K_1 é

$$K_1 = \frac{\bar{\alpha}_s(Q_s^2)}{2\pi} \frac{r^2}{r_1^2 r_2^2} \left[1 + \bar{\alpha}_s(Q_s^2) \left(b \ln r^2 \mu^2 - b \frac{r_1^2 - r_2^2}{r^2} \ln \frac{r_1^2}{r_2^2} + \frac{67}{36} - \frac{\pi^2}{12} - \frac{5N_f}{18N_c} - \frac{1}{2} \ln \frac{r_1^2}{r^2} \ln \frac{r_2^2}{r^2} \right) \right].$$

Na região de saturação temos duas contribuições para a integração da equação BK - fNLO,

$$1/Q_s \ll r_1 \ll r \quad r_2 \sim r,$$

e

$$1/Q_s \ll r_2 \ll r \quad r_1 \sim r.$$

Por isso implementamos o pré-fator 2 na eq. BK - fNLO, i.e.,

$$\partial_Y S = -2 \int d^2 z K_1 S,$$

e ao escolhermos a região $r_2 \sim r$, obtemos que

$$K_1 = \frac{\overline{\alpha}_s(Q_s^2)}{2\pi} \frac{1}{r_1^2} \left[1 + \overline{\alpha}_s(Q_s^2) \left(b \ln r^2 \mu^2 - b \frac{r_1^2}{r^2} \ln \frac{r_1^2}{r^2} + b \ln \frac{r_1^2}{r^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{67}{36} - \frac{\pi^2}{12} - \frac{5N_f}{18N_c} - \frac{1}{2} \ln \frac{r_1^2}{r^2} \ln 1 \right) \right]$$

$$K_1 = \frac{\overline{\alpha}_s(Q_s^2)}{2\pi r_1^2} + \frac{\overline{\alpha}_s^2(Q_s^2)}{2\pi r_1^2} b \ln r^2 \mu^2 - \frac{\overline{\alpha}_s^2(Q_s^2)}{2\pi r^2} b \ln \frac{r_1^2}{r^2} \\ + \frac{\overline{\alpha}_s^2(Q_s^2)}{2\pi r_1^2} b \ln \frac{r_1^2}{r^2} + \left(\frac{67}{36} - \frac{\pi^2}{12} - \frac{5N_f}{18N_c} \right) \frac{\overline{\alpha}_s^2(Q_s^2)}{2\pi r_1^2}.$$

Como $\int d^2z = 2\pi \int_{1/Q_s}^r r_1 dr_1$, temos a eq. BK-fNLO torna-se

$$\partial_Y S(r, Y) = -4\pi \int_{1/Q_s}^r r_1 dr_1 \left[\frac{\overline{\alpha}_s(Q_s^2)}{2\pi r_1^2} + \frac{\overline{\alpha}_s^2(Q_s^2)}{2\pi r_1^2} b \ln r^2 \mu^2 - \frac{\overline{\alpha}_s^2(Q_s^2)}{2\pi r^2} b \ln \frac{r_1^2}{r^2} \right. \\ \left. + \frac{\overline{\alpha}_s^2(Q_s^2)}{2\pi r_1^2} b \ln \frac{r_1^2}{r^2} + \left(\frac{67}{36} - \frac{\pi^2}{12} - \frac{5N_f}{18N_c} \right) \frac{\overline{\alpha}_s^2(Q_s^2)}{2\pi r_1^2} \right] S(r, Y)$$

$$\partial_Y S(r, Y) = \left\{ -2 \left[\overline{\alpha}_s(Q_s^2) + \overline{\alpha}_s^2(Q_s^2) b \ln r^2 \mu^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{67}{36} - \frac{\pi^2}{12} - \frac{5N_f}{18N_c} \right) \overline{\alpha}_s^2(Q_s^2) \right] \int_{1/Q_s}^r \frac{dr_1}{r_1} \right. \\ \left. + \frac{2\overline{\alpha}_s^2(Q_s^2) b}{r^2} \int_{1/Q_s}^r r_1 \ln \frac{r_1^2}{r^2} dr_1 - 2\overline{\alpha}_s^2(Q_s^2) b \int_{1/Q_s}^r \ln \frac{r_1^2}{r^2} \frac{dr_1}{r_1} \right\} S(r, Y).$$

Resolvendo as integrais, obtemos que:

$$\partial_Y S(r, Y) = \left\{ - \left[\overline{\alpha}_s(Q_s^2) + \overline{\alpha}_s^2(Q_s^2) b \ln r^2 \mu^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{67}{36} - \frac{\pi^2}{12} - \frac{5N_f}{18N_c} \right) \overline{\alpha}_s^2(Q_s^2) \right] \ln (r^2 Q_s^2) \right. \\ \left. + \frac{2\overline{\alpha}_s^2(Q_s^2) b}{r^2} \left[\frac{1}{2Q_s^2} \ln (r^2 Q_s^2) - \frac{r^2}{2} + \frac{1}{2Q_s^2} \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \overline{\alpha}_s^2(Q_s^2) b \ln^2 (r^2 Q_s^2) \right\} S(r, Y),$$

assumindo $\mu^2 = Q_s^2$, ficamos com

$$\begin{aligned} \partial_Y S(r, Y) = & \left\{ - \left[\bar{\alpha}_s(Q_s^2) + \frac{1}{2} \bar{\alpha}_s^2(Q_s^2) b \ln r^2 Q_s^2 \right. \right. \\ & + \left. \left. \left(\frac{67}{36} - \frac{\pi^2}{12} - \frac{5N_f}{18N_c} \right) \bar{\alpha}_s^2(Q_s^2) \right] \ln(r^2 Q_s^2) \right. \\ & \left. + \bar{\alpha}_s^2(Q_s^2) b \left[\frac{1}{r^2 Q_s^2} \ln(r^2 Q_s^2) - 1 + \frac{1}{r^2 Q_s^2} \right] \right\} S(r, Y). \end{aligned}$$

Tendo em vista que no limite que estamos trabalhando temos que $r^2 Q_s^2 \gg 1$, logo a fração $1/r^2 Q_s^2$ será um valor muito pequeno que pode ser desprezado, no caso $1/r^2 Q_s^2 \ln(r^2 Q_s^2)$ a fração cresce mais rápido que o logaritmo e conseqüentemente podemos desprezar este termo também. Portanto, no regime de saturação a eq. BK-fNLO resume-se a

$$\begin{aligned} \partial_Y S(r, Y) = & \left\{ - \left[\bar{\alpha}_s(Q_s^2) + \frac{1}{2} \bar{\alpha}_s^2(Q_s^2) b \ln r^2 Q_s^2 \right. \right. \\ & + \left. \left. \left(\frac{67}{36} - \frac{\pi^2}{12} - \frac{5N_f}{18N_c} \right) \bar{\alpha}_s^2(Q_s^2) \right] \ln(r^2 Q_s^2) \right. \\ & \left. - \bar{\alpha}_s^2(Q_s^2) b \right\} S(r, Y). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Definindo $\tau = \ln(r^2 Q_s^2)$ como a variável de escalonamento, vamos escrever a eq. BK - fNLO em termo de τ , para tal realizamos a seguinte regra da cadeia:

$$\frac{\partial S}{\partial Y} = \frac{\partial S}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial Y},$$

como $\tau = \ln(r^2 Q_s^2)$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial Y} &= \frac{\partial}{\partial Y} [\ln(r^2 Q_s^2)] \\ \frac{\partial \tau}{\partial Y} &= \frac{1}{Q_s^2} \frac{\partial Q_s^2}{\partial Y}, \end{aligned}$$

multiplicando por Λ^2/Λ^2 ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial Y} &= \frac{\Lambda^2}{Q_s^2} \frac{\partial}{\partial Y} (Q_s^2/\Lambda^2) \\ \frac{\partial \tau}{\partial Y} &= \frac{\partial}{\partial Y} \left[\ln \left(\frac{Q_s^2(Y)}{\Lambda^2} \right) \right], \end{aligned}$$

e usando que $\ln\left(\frac{Q_s^2(Y)}{\Lambda^2}\right) = \sqrt{c(Y - Y_0)}$, ficamos com

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tau}{\partial Y} &= \frac{\partial}{\partial Y} \left[\sqrt{c(Y - Y_0)} \right] \\ \frac{\partial\tau}{\partial Y} &= \frac{c}{2} \frac{1}{\ln\left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2}\right)}.\end{aligned}$$

Usando agora que $\alpha_s(Q_s^2) = \frac{1}{b \ln\left(\frac{Q_s^2(Y)}{\Lambda^2}\right)}$, resulta

$$\frac{\partial\tau}{\partial Y} = \frac{cb}{2} \alpha_s(Q_s^2),$$

e portanto

$$\frac{\partial S}{\partial Y} = \frac{\partial S}{\partial\tau} \frac{cb}{2} \alpha_s(Q_s^2).$$

Assim, a eq. (4.20) escreve-se do seguinte modo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{S} &= \frac{2N_c}{cb\pi} \left\{ -\tau - \frac{N_cb}{2\pi} \alpha_s(Q_s^2) \tau^2 - \frac{N_c}{\pi} \left(\frac{67}{36} - \frac{\pi^2}{12} - \frac{5N_f}{18N_c} \right) \alpha_s(Q_s^2) \tau \right. \\ &\quad \left. - \frac{N_c}{\pi} \alpha_s(Q_s^2) b \right\} \partial\tau.\end{aligned}$$

Cuja solução é:

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{S}{S_0}\right) &= \frac{2N_c}{cb\pi} \left\{ -\frac{\tau^2}{2} - \frac{N_cb}{6\pi} \alpha_s(Q_s^2) \tau^3 \right. \\ &\quad \left. - \frac{N_c}{2\pi} \left(\frac{67}{36} - \frac{\pi^2}{12} - \frac{5N_f}{18N_c} \right) \alpha_s(Q_s^2) \tau^2 - \frac{N_c}{\pi} \alpha_s(Q_s^2) b \tau \right\}\end{aligned}$$

o que resulta em

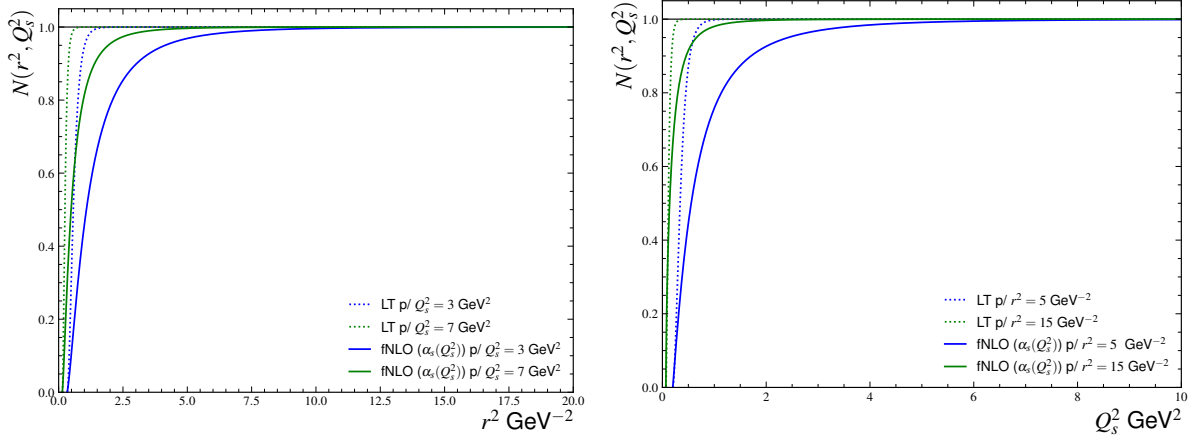
$$S(\tau) = S_0 e^{-\Upsilon}, \quad (4.21)$$

onde

$$\Upsilon = \frac{N_c}{cb\pi} \left\{ \tau^2 + \frac{N_cb}{3\pi} \alpha_s(Q_s^2) \tau^3 + \frac{N_c}{\pi} \left(\frac{67}{36} - \frac{\pi^2}{12} - \frac{5N_f}{18N_c} \right) \alpha_s(Q_s^2) \tau^2 + \frac{2N_c}{\pi} \alpha_s(Q_s^2) b \tau \right\};$$

A eq. (4.21) é a solução da correção fNLO para $\alpha_s(Q_s^2)$. Na Fig. 4.7 é feito o comparativo da solução obtida na eq. (4.21) com a solução Levin - Tuchin onde podemos conferir o impacto da correção além da ordem dominante a qual faz

Figura 4.7 - Comparativo entre a soluções assintóticas na região de saturação da solução Levin - Tuchin (LO) e da correção fNLO com $\alpha_s(Q_s^2)$ para Q_s^2 fixo (esquerda) e para r^2 fixo (direita).



com que a solução NLO alcance a saturação para maiores valores de r^2 ou Q_s^2 do que a solução em ordem dominante.

B) Prescrição de menor dipolo:

A equação BK-fNLO na região de saturação para a prescrição de acoplamento variável do menor dipolo é

$$\partial_Y S(r, Y) = -2 \int d^2z \left[\frac{\bar{\alpha}_s(r_1^2)}{2\pi r_1^2} + \frac{\bar{\alpha}_s^2(r_1^2)}{2\pi r_1^2} \left(\frac{67}{36} - \frac{\pi^2}{12} - \frac{5N_f}{18N_c} \right) \right] S(r, Y).$$

Ao compararmos com a expressão na prescrição do dipolo pai, percebemos que na expressão acima no segundo termo do lado direito temos que a variável da constante de acoplamento é o tamanho do menor dipolo ao invés do tamanho do dipolo pai como visto anteriormente na prescrição PDRC.

Como $d^2z = r_1 dr_1 d\Omega$,

$$\partial_Y S(r, Y) = -\frac{1}{\pi} \int r_1 dr_1 d\Omega \left[\frac{N_c \alpha_s(r_1^2)}{\pi r_1^2} + \frac{N_c^2 \alpha_s^2(r_1^2)}{\pi^2 r_1^2} \left(\frac{67}{36} - \frac{\pi^2}{12} - \frac{5N_f}{18N_c} \right) \right] S(r, Y),$$

para $\bar{\alpha}_s = \frac{N_c \alpha_s}{\pi}$. Definindo $B' = \left(\frac{67}{36} - \frac{\pi^2}{12} - \frac{5N_f}{18N_c} \right)$, ficamos com

$$\begin{aligned} \partial_Y S(r, Y) &= -2 \int_{1/Q_s}^r r_1 dr_1 \left[\frac{N_c \alpha_s(r_1^2)}{\pi r_1^2} + \frac{N_c^2 \alpha_s^2(r_1^2)}{\pi^2 r_1^2} B' \right] S(r, Y) \\ \frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial Y} &= - \frac{2N_c}{\pi} \underbrace{\int_{1/Q_s}^r \frac{\alpha_s(r_1^2)}{r_1} dr_1}_{(I)} - \frac{2N_c^2 B'}{\pi^2} \underbrace{\int_{1/Q_s}^r \frac{\alpha_s^2(r_1^2)}{r_1} dr_1}_{(II)}. \end{aligned}$$

Resolvendo as integrais resulta

$$\frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial Y} = - \frac{N_c}{\pi b} \ln \left[\frac{\ln(Q_s^2/\Lambda^2)}{\ln(1/r^2\Lambda^2)} \right] - \frac{N_c^2 B'}{\pi^2 b^2} \frac{1}{\ln(1/r^2\Lambda^2)} + \frac{N_c^2 B'}{\pi^2 b^2} \frac{1}{\ln(Q_s^2/\Lambda^2)}.$$

Usando que

$$\ln \left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2} \right) = \sqrt{c(Y - Y_0)},$$

e definindo $d \equiv \frac{1}{\ln(1/r^2\Lambda^2)}$ ficamos com

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{S}{S_0} \right) &= - \frac{N_c}{\pi b} \int_{Y_0}^Y \ln \left[d \sqrt{c(Y - Y_0)} \right] \partial Y' - \frac{N_c^2 B' d}{\pi^2 b^2} \int_{Y_0}^Y \partial Y' \\ &\quad + \frac{N_c^2 B'}{\pi^2 b^2} \int_{Y_0}^Y [c(Y' - Y_0)]^{-1/2} \partial Y', \end{aligned}$$

a qual implica

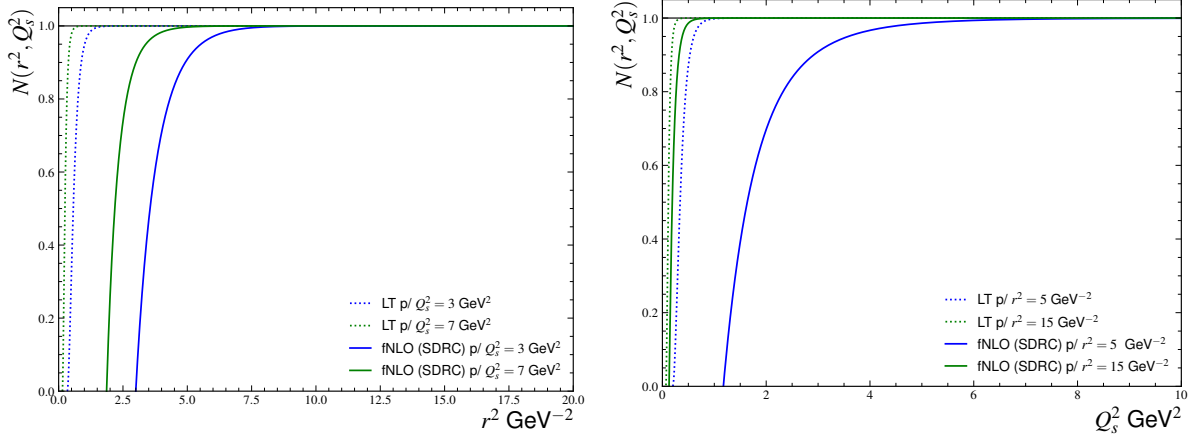
$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{S}{S_0} \right) &= - \frac{N_c}{\pi b} \frac{\ln^2(Q_s^2/\Lambda^2)}{c} \left[\ln \left[\frac{\ln(Q_s^2/\Lambda^2)}{\ln(1/r^2\Lambda^2)} \right] - \frac{1}{2} \right] - \frac{N_c^2 B' d}{\pi^2 b^2} \frac{1}{c} \ln^2 \left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2} \right) \\ &\quad + \frac{N_c^2 B'}{\pi^2 b^2} \frac{2}{c} \ln \left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2} \right) \\ \ln \left(\frac{S}{S_0} \right) &= - \frac{N_c}{c\pi b} \left[\ln \left[\frac{\ln(Q_s^2/\Lambda^2)}{\ln(1/r^2\Lambda^2)} \right] + \frac{N_c B'}{\pi b \ln(1/r^2\Lambda^2)} - \frac{1}{2} \right] \ln^2 \left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2} \right) \\ &\quad + \frac{2N_c^2 B'}{c\pi^2 b^2} \ln \left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2} \right), \end{aligned}$$

o que é o mesmo que

$$\begin{aligned} S(r, Y) &= S_0(r, Y) \exp \left\{ - \frac{N_c}{c\pi b} \left[\ln \left[\frac{\ln(Q_s^2/\Lambda^2)}{\ln(1/r^2\Lambda^2)} \right] + \frac{N_c B'}{\pi b \ln(1/r^2\Lambda^2)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \right] \ln^2 \left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2} \right) + \frac{2N_c^2 B'}{c\pi^2 b^2} \ln \left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

a qual é a solução assintótica para a correção fNLO na prescrição de menor

Figura 4.8 - Comparativo entre a soluções assintóticas na região de saturação da solução Levin - Tuchin (LO) e da correção fNLO na prescrição de menor dipolo (SDRC) para Q_s^2 fixo (esquerda) e para r^2 fixo (direita).



dipolo.

Na Fig. 4.8 comparamos a solução BK-fNLO, obtida na prescrição de menor dipolo, com a predição derivada em ordem dominante. Temos que, assim como no caso da prescrição de dipolo pai, a inclusão das correções fNLO implicam em um atraso do momento de saturação para maiores dipolos ou maiores valores de Q_s^2 .

4.4 Correção colinear

Importante destacar que apesar de obtermos uma solução analítica para equação BK-fNLO na região de saturação, estudos mais recentes [60] indicam através de soluções numéricas que a eq. BK-fNLO torna-se instável para variadas condições iniciais. A amplitude de espalhamento pode decrescer com a energia e pode modificar seu comportamento para valores negativos, o que está em desacordo com as expectativas teóricas. Tal instabilidade deve-se em grande parte a contribuição de grandes duplos logaritmos no momentum transversal que foram desconsiderados nos estudos discutidos anteriormente. Por isso, alguns autores [61–64] propuseram a inclusão de correções colineares as quais levam à modificação do kernel da equação BK, o qual passa a ser dado por [62]:

$$\begin{aligned}
K^{\text{CL}} = & K^{\text{DLA}} K^{\text{STL}} \frac{\bar{\alpha}_s}{2\pi} \left[\frac{r^2}{r_1^2 r_2^2} + \frac{1}{r_1^2} \left(\frac{\alpha_s(r_1^2)}{\alpha_s(r_2^2)} - 1 \right) + \frac{1}{r_2^2} \left(\frac{\alpha_s(r_2^2)}{\alpha_s(r_1^2)} - 1 \right) \right] \\
& - \frac{\bar{\alpha}_s(r^2)}{2\pi} \frac{r^2}{r_1^2 r_2^2} \left(-\bar{\alpha}_s(r^2) A_1 \left| \ln \frac{r^2}{\min\{r_1^2, r_2^2\}} \right| \right) \\
& + \frac{\bar{\alpha}_s^2(r^2)}{2\pi} \frac{r^2}{r_1^2 r_2^2} \left(\frac{67}{36} - \frac{\pi^2}{12} - \frac{5N_f}{18N_c} \right),
\end{aligned}$$

onde K^{DLA} é o kernel DLA

$$K^{\text{DLA}} \approx 1 - \frac{\bar{\alpha}_s \sqrt{\ln r_1^2/r^2 \ln r_2^2/r^2}}{2} + \mathcal{O}(\bar{\alpha}_s^2),$$

e K^{STL} é o kernel STL (*Single Transverse Logarithms*) que descreve as correções de logaritmos únicos que é dado por:

$$K^{\text{STL}} = \exp \left\{ -\bar{\alpha}_s(r^2) A_1 \left| \ln \frac{r^2}{\min\{r_1^2, r_2^2\}} \right| \right\}.$$

É importante salientar que embora os termos colineares sejam esperados que contribuam, pois, espera-se que a BK além da ordem dominante reproduza as predições da equação DGLPA NLO no limite de duplo logaritmo dominante, a forma final do kernel corrigido ainda é tema de intenso debate [61–64]. Resultados fenomenológicos usando o kernel descrito acima apontam que os dados de HERA podem ser descritos, desde que se assumam um dado conjunto de valores para os parâmetros livres presentes na condição inicial, tendo por consequência uma escala de saturação que cresce mais lentamente com a rapidez do que as predições fNLO [51]. Por completeza, nesta dissertação iremos discutir estas correções, tendo em mente que se trata de uma contribuição cuja forma final ainda está em construção.

No que segue iremos derivar a solução da equação BK-fNLO corrigida pela correções colineares no regime de saturação. Neste regime, esta equação passa a ser dada por:

$$\partial_Y S(r, Y) = \int d^2z K^{\text{CL}} [S(r_1, Y) S(r_2, Y) - S(r, Y)], \quad (4.23)$$

a qual assume a seguinte forma na prescriao de menor dipolo [51]:

$$\begin{aligned} \partial_Y S(r, Y) = -2 \int d^2z \left[\frac{\bar{\alpha}_s(r_1^2)}{2\pi r_1^2} + \frac{\bar{\alpha}_s^2(r_1^2)}{2\pi r_1^2} A_1 \ln \frac{r^2}{r_1^2} \right. \\ \left. + \frac{\bar{\alpha}_s^2(r_1^2)}{2\pi r_1^2} \left(\frac{67}{36} - \frac{\pi^2}{12} - \frac{5N_f}{18N_c} \right) \right] S(r, Y). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Como $d^2z = r_1 dr_1 d\Omega$, $\bar{\alpha}_s = \frac{N_c \alpha_s}{\pi}$ e $B' = \left(\frac{67}{36} - \frac{\pi^2}{12} - \frac{5N_f}{18N_c} \right)$,

$$\frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial Y} = -\frac{1}{\pi} \int r_1 dr_1 d\Omega \left[\frac{N_c \alpha_s(r_1^2)}{\pi r_1^2} + \frac{N_c^2 \alpha_s^2(r_1^2)}{\pi^2 r_1^2} A_1 \ln \frac{r^2}{r_1^2} + \frac{N_c^2 \alpha_s^2(r_1^2)}{\pi^2 r_1^2} B' \right].$$

Dos calculos anteriores, sabemos que:

$$\begin{aligned} \int_{1/Q_s}^r \frac{\alpha_s(r_1^2)}{r_1} dr_1 &= \frac{1}{2b} \ln \left[\frac{\ln(Q_s^2/\Lambda^2)}{\ln(1/r^2\Lambda^2)} \right] \\ \int_{1/Q_s}^r \frac{\alpha_s^2(r_1^2)}{r_1} dr_1 &= \frac{1}{2b^2} \left[\frac{1}{\ln(1/r^2\Lambda^2)} - \frac{1}{\ln(Q_s^2/\Lambda^2)} \right], \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial Y} = -\frac{N_c}{\pi b} \ln \left[\frac{\ln(Q_s^2/\Lambda^2)}{\ln(1/r^2\Lambda^2)} \right] - \frac{2N_c^2 A_1}{\pi^2} \int_{1/Q_s}^r \frac{\alpha_s^2(r_1^2)}{r_1} \ln \frac{r^2}{r_1^2} dr_1 \\ - \frac{N_c^2 B'}{b^2 \pi^2} \left[\frac{1}{\ln(1/r^2\Lambda^2)} - \frac{1}{\ln(Q_s^2/\Lambda^2)} \right]. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Resolvendo a ultima integral, teremos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial Y} = -\frac{N_c}{\pi b} \left(1 - \frac{N_c A_1}{\pi b} \right) \ln \left[\frac{\ln(Q_s^2/\Lambda^2)}{\ln(1/r^2\Lambda^2)} \right] \\ + \frac{N_c^2}{b^2 \pi^2} \left(A_1 \ln \left(\frac{1}{r^2\Lambda^2} \right) - B' \right) \left[\frac{1}{\ln(1/r^2\Lambda^2)} - \frac{1}{\ln(Q_s^2/\Lambda^2)} \right]. \end{aligned}$$

Definindo $d \equiv \frac{1}{\ln(1/r^2\Lambda^2)}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial Y} = -\frac{N_c}{\pi b} \left(1 - \frac{N_c A_1}{\pi b} \right) \ln [d \ln(Q_s^2/\Lambda^2)] + \frac{N_c^2}{b^2 \pi^2} \left(\frac{A_1}{d} - B' \right) d \\ - \frac{N_c^2}{b^2 \pi^2} \left(\frac{A_1}{d} - B' \right) \frac{1}{\ln(Q_s^2/\Lambda^2)}, \end{aligned}$$

resulta

$$\ln\left(\frac{S}{S_0}\right) = -\frac{N_c}{\pi b}\left(1 - \frac{N_c A_1}{\pi b}\right) \int_{Y_0}^Y \ln[d \ln(Q_s^2(Y')/\Lambda^2)] \partial Y' + \frac{N_c^2}{b^2 \pi^2} (A_1 - B' d) \int_{Y_0}^Y \partial Y' - \frac{N_c^2}{b^2 \pi^2} \left(\frac{A_1}{d} - B'\right) \int_{Y_0}^Y \frac{1}{\ln(Q_s^2(Y')/\Lambda^2)} \partial Y'.$$

Como

$$\ln\left(\frac{Q_s^2(Y')}{\Lambda^2}\right) = \sqrt{c(Y' - Y_0)},$$

ficamos com

$$\ln\left(\frac{S}{S_0}\right) = -\frac{N_c}{\pi b}\left(1 - \frac{N_c A_1}{\pi b}\right) \int_{Y_0}^Y \ln[d \sqrt{c(Y' - Y_0)}] \partial Y' + \frac{N_c^2}{b^2 \pi^2} (A_1 - B' d) \int_{Y_0}^Y \partial Y' - \frac{N_c^2}{b^2 \pi^2} \left(\frac{A_1}{d} - B'\right) \int_{Y_0}^Y [c(Y' - Y_0)]^{-1/2} \partial Y'.$$

Consequentemente:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{S}{S_0}\right) &= -\frac{N_c}{\pi b c} \left(1 - \frac{N_c A_1}{\pi b}\right) \left(\ln\left(\frac{\ln(Q_s^2/\Lambda^2)}{\ln(1/r^2 \Lambda^2)}\right) - \frac{1}{2}\right) \ln^2\left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2}\right) \\ &\quad + \frac{N_c^2}{c b^2 \pi^2} (A_1 - B' d) \ln^2\left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2}\right) \\ &\quad - \frac{2 N_c^2}{c b^2 \pi^2} \left(\frac{A_1}{d} - B'\right) \ln\left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2}\right) \\ \ln\left(\frac{S}{S_0}\right) &= -\frac{N_c}{\pi b c} \left[\left(1 - \frac{N_c A_1}{\pi b}\right) \ln\left(\frac{\ln(Q_s^2/\Lambda^2)}{\ln(1/r^2 \Lambda^2)}\right) - \frac{1}{2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{N_c A_1}{b \pi} + \frac{N_c B'}{b \pi} \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{r^2 \Lambda^2}\right)} \right] \ln^2\left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2}\right) \\ &\quad + \frac{2 N_c^2}{c b^2 \pi^2} \left(B' - A_1 \ln\left(\frac{1}{r^2 \Lambda^2}\right) \right) \ln\left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2}\right). \end{aligned}$$

Portanto, temos que

Figura 4.9 - Solução da correção colinear da equação BK - NLO para diferentes valores de A_1 , considerando $Q_s^2 = 1 \text{ GeV}^2$ (esquerda) e para $Q_s^2 = 5 \text{ GeV}^2$ (direita.)

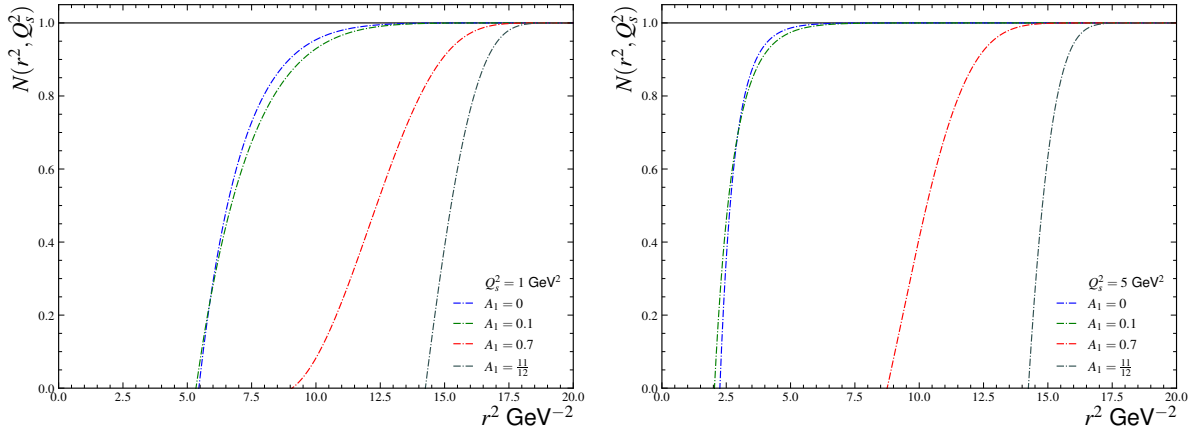
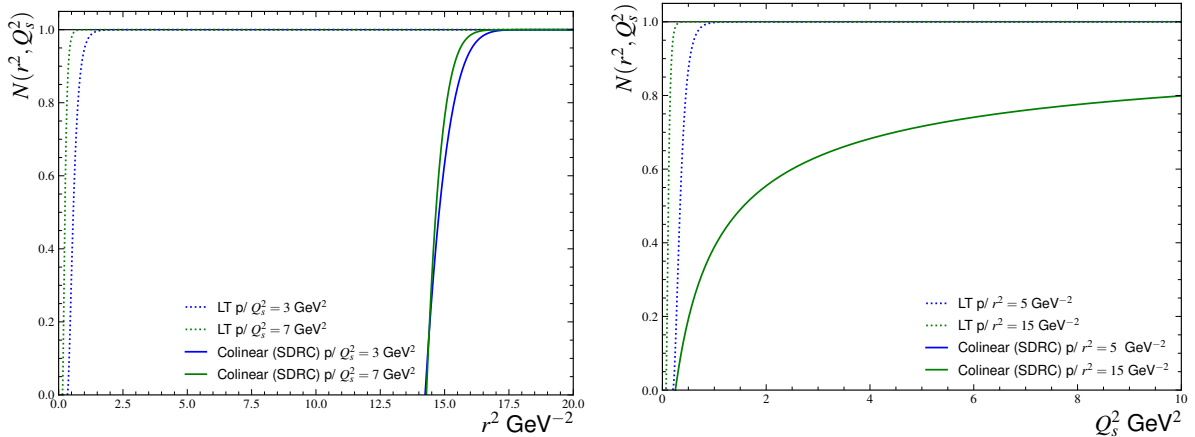


Figura 4.10 - Comparativo entre a soluções assintóticas na região de saturação da solução Levin - Tuchin (LO) e da correção colinear na prescrição de menor dipolo (SDRC) para Q_s^2 fixo (esquerda) e para r^2 fixo (direita).



$$\begin{aligned}
 S(r, Q_s) = S_0 \exp \left\{ -\frac{N_c}{\pi b c} \left[\left(1 - \frac{N_c A_1}{\pi b} \right) \ln \left(\frac{\ln(Q_s^2/\Lambda^2)}{\ln(1/r^2\Lambda^2)} \right) - \frac{1}{2} \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{N_c A_1}{2b\pi} + \frac{N_c B'}{b\pi} \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{r^2\Lambda^2}\right)} \right] \ln^2 \left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2} \right) \right. \\
 \left. + \frac{2N_c^2}{cb^2\pi^2} \left(B' - A_1 \ln \left(\frac{1}{r^2\Lambda^2} \right) \right) \ln \left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2} \right) \right\}, \quad (4.26)
 \end{aligned}$$

que é a solução da correção colinear da equação BK-fNLO na região de saturação. Ao analisarmos a equação (4.26) notamos que para o caso onde a constante A_1 é igual a 0

a equação (4.26) resume-se a solução da equação BK-fNLO para a prescrição de menor dipolo, eq. (4.22). Logo a correção colinear se faz presente a partir dos termos que contém a constante A_1 . Conforme a constante assume valores distintos de zero e aproxima-se um, a solução vai sendo deslocada para maiores valores de r^2 . Isto fica claro ao analisarmos a Fig. (4.9) onde percebemos como $A_1 = 11/12$ faz com a que solução mude de comportamento em comparação à predição fNLO ($A_1 = 0$).

Na Fig. 4.10 apresentamos a comparação entre a solução fNLO, com as correções colineares, e a solução derivada em ordem dominante. Observamos que há uma modificação expressiva na região em que a solução fNLO satura em comparação com a solução em ordem dominante. Em particular temos que não há solução para pequenos dipolos no intervalo de valores considerado para a escala de saturação. Tal comportamento anômalo, completamente distinto daqueles derivados anteriormente nos leva a questionar a forma assintótica do kernel fNLO corrigido pela correções colineares assumida em nossa análise. Uma possível interpretação deste resultado é que termos adicionais devem ser considerados na estrutura do kernel. Pretendemos investigar tal aspecto em mais detalhe em futuros estudos.

4.5 Comparativo das distintas soluções assintóticas para a equação BK além da ordem dominante

Ao longo deste capítulo abordamos as várias correções além da ordem dominante para a equação BK e suas soluções assintóticas na região de saturação e a partir disto, comparamos as mesma em relação à solução assintótica da equação BK em ordem dominante na região de saturação, a lei Levin-Tuchin. Nesta seção, iremos realizar outros comparativos entre estas soluções analíticas as quais são rerepresentadas na Tabela 4.1. Podemos perceber que a forma destas soluções é fortemente dependente das correções consideradas e da prescrição assumida para o tratamento da escala da constante de acoplamento. Uma possível interpretação da dependência da solução fNLO na prescrição é que os termos da próximo ordem, NNLO, não são desprezíveis e são necessários para estabilizar a solução. Dado o grande desafio teórico presente na realização destes cálculos, podemos questionar sobre o impacto fenomenológico dos distintos resultados fNLO. Em outras palavras, se devemos esperar que estes distintos resultados impliquem em predições significativamente diferentes para o comportamento da amplitude de espalhamento no regime de saturação. Outro ponto que temos interesse em esclarecer são as implicações da inclusão das correções colineares cuja forma final ainda está em construção. No que segue iremos apresentar um comparativo entre as soluções apresentadas na Tab. 4.1 considerando o seu comportamento no quadrado do tamanho do dipolo e na escala de saturação.

Inicialmente apresentamos na figura 4.11 uma comparação entre as soluções fNLO em

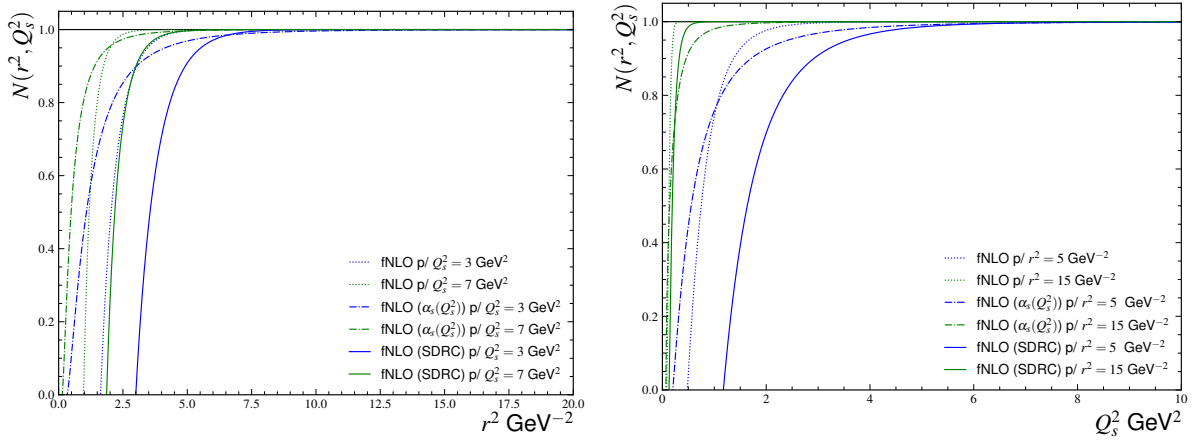
função de r^2 (painel esquerdo) e de Q_s^2 (painel direito). Podemos observar que todas as soluções predizem que $N \rightarrow 1$ para dipolos grandes e para valores elevados da escala de saturação. Tal resultado é esperado porque nestes dois limites o sistema será caracterizado por uma elevada densidade partônica, e, portanto, os efeitos não lineares tornam-se significativos. Entretanto, os valores nos quais o limite $N = 1$ é atingido depende da prescrição considerada, com a solução BK-fNLO para a prescrição de acoplamento variável do dipolo pai predizendo que este ocorra mais rapidamente, ou seja, para menores valores de r^2 e Q^2 . Portanto, tal prescrição implica um maior impacto do regime de saturação do que as demais prescrições.

Na Fig. 4.12 apresentamos a comparação entre as soluções fNLO na prescrição de dipolo pai com as soluções em ordem dominante, dada pela Lei de Levin-Tuchin, e obtida considerando apenas a correção de laço de quarks, denotada rcBK na figura. Nesta

Tabela 4.1 - Tabela das soluções da equação BK além da ordem dominante no regime de saturação para diferentes correções e prescrições.

rcBK	$S = S_0 \exp \left\{ -\frac{N_c}{\pi c b} \left[\ln^2 \left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2} \right) \left(\ln \left(\frac{\ln \left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2} \right)}{\ln \left(\frac{1}{r^2 \Lambda^2} \right)} \right) - \frac{1}{2} \right) \right] \right\}$
BK-fNLO (PDRC)	$S = S_0 \exp \left\{ -\frac{2BN_c^2}{3c\pi^2 b^2} \ln^3 \left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2} \right) - \frac{N_c}{c\pi b} \left[\ln \left(\frac{\ln(Q_s^2/\Lambda^2)}{\ln(1/r^2\Lambda^2)} \right) - \frac{1}{2} \right] \ln^2 \left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2} \right) + \frac{BN_c^2 \ln(1/r^2\Lambda^2)}{c\pi^2 b^2} \ln^2 \left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2} \right) \right\}$
BK-fNLO ($\alpha_s(Q_s^2)$)	$S = S_0 \exp \left\{ -\frac{N_c}{cb\pi} \left\{ \ln(r^2 Q_s^2)^2 + \frac{N_c b}{3\pi} \alpha_s(Q_s^2) \ln(r^2 Q_s^2)^3 + \frac{N_c}{\pi} \left(\frac{67}{36} - \frac{\pi^2}{12} - \frac{5N_f}{18N_c} \right) \alpha_s(Q_s) \ln(r^2 Q_s^2)^2 + \frac{2N_c}{\pi} \alpha_s(Q_s) b \ln(r^2 Q_s^2) \right\} \right\}$
BK-fNLO (SDRC)	$S = S_0 \exp \left\{ -\frac{N_c}{c\pi b} \left[\ln \left[\frac{\ln(Q_s^2/\Lambda^2)}{\ln(1/r^2\Lambda^2)} \right] + \frac{N_c B'}{\pi b \ln(1/r^2\Lambda^2)} - \frac{1}{2} \right] \ln^2 \left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2} \right) + \frac{2N_c^2 B'}{c\pi^2 b^2} \ln \left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2} \right) \right\}$
Colinear (SDRC)	$S = S_0 \exp \left\{ -\frac{N_c}{\pi b c} \left[\left(1 - \frac{N_c A_1}{\pi b} \right) \ln \left(\frac{\ln(Q_s^2/\Lambda^2)}{\ln(1/r^2\Lambda^2)} \right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{N_c A_1}{b\pi} + \frac{N_c B'}{b\pi} \frac{1}{\ln(1/r^2\Lambda^2)} \right] \ln^2 \left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2} \right) + \frac{2N_c^2}{cb^2 \pi^2} (B' - A_1 \ln(1/r^2\Lambda^2)) \ln \left(\frac{Q_s^2}{\Lambda^2} \right) \right\}$

Figura 4.11 - Comparação entre as soluções assintóticas da equação BK-fNLO para a região de saturação com a escala de saturação fixa à esquerda e com o tamanho de dipolo fixo à direita.

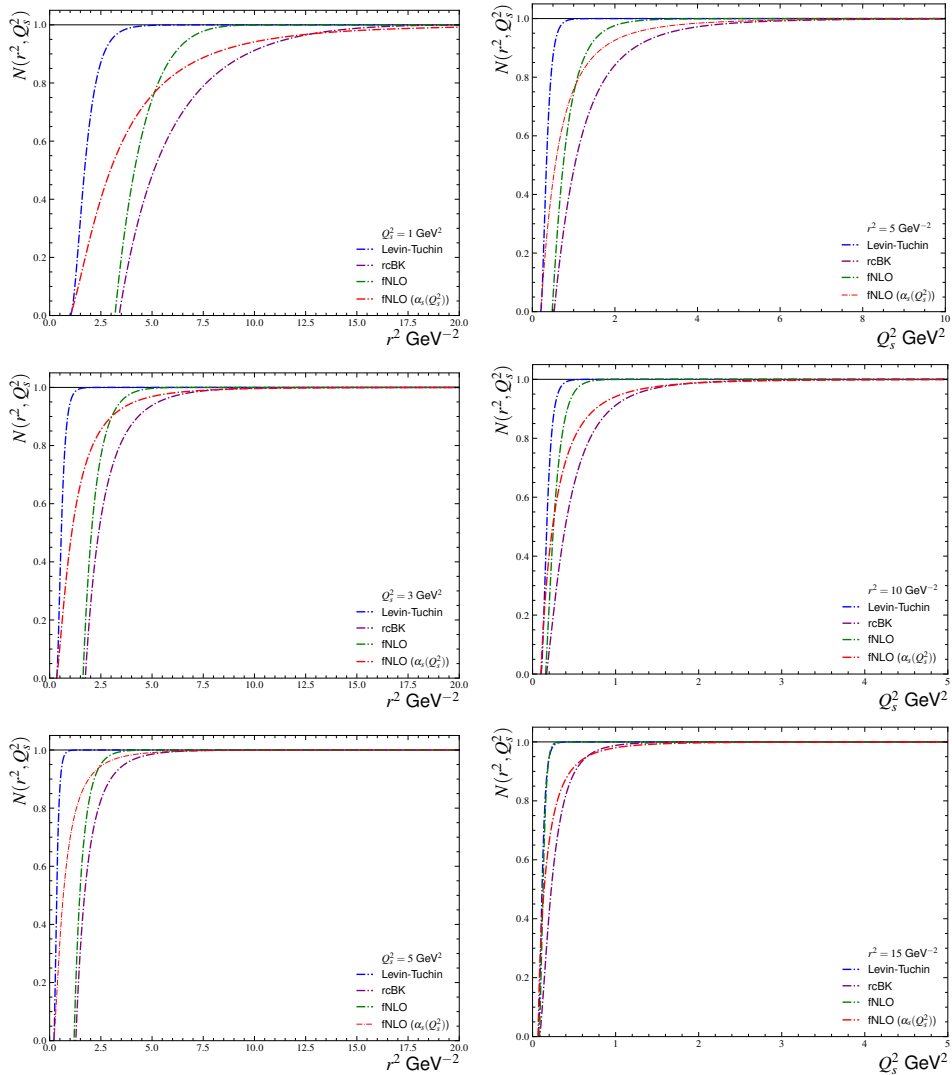


comparação consideramos três valores para a escala de saturação (painéis à esquerda) e para o quadrado do tamanho do dipolo (painéis à direita). Observamos que a inclusão das correções além da ordem dominante implica que o limite $N = 1$ ocorre para maiores valores de r^2 e de Q_s^2 . Um aspecto interessante é que as soluções fNLO acarretam no limite assintótico precocemente em comparação à solução rcBK, ou seja, estas soluções causam a ampliação do regime de saturação, o que deve implicar em uma maior alteração dos observáveis pelos efeitos não lineares.

Na Fig. 4.13 apresentamos a comparação da solução para a prescrição de menor dipolo com a Lei de Levin-Tuchin e a solução fNLO que inclui as correções colineares. Salientamos que para alguns valores de r^2 a solução colinear não ocorre no intervalo de valores de Q_s^2 considerado. Novamente temos que a solução em ordem dominante prediz que o limite $N = 1$ ocorre mais rapidamente que as demais soluções. Outro aspecto que fica evidente na figura é o grande impacto das correções colineares que faz com que o regime de saturação ocorra para dipolos extremamente grandes, onde também espera-se a contribuição de efeitos não-perturbativos e, portanto, a validade da solução passa a ser questionável, ou ainda para valores muito elevados da escala de saturação, os quais não são atingíveis pelos aceleradores atuais. Como enfatizado anteriormente, tais resultados colocam em dúvida se termos adicionais devem ser considerados no kernel da equação.

Vale salientar que compreender o comportamento analítico das soluções das correções NLO é importante para a realização de parametrizações fenomenológicas para a amplitude de espalhamento. Outro aspecto importante é que da análise das soluções assintóticas, analiticamente, para as correções NLO da equação BK vemos que as mesmas são sensíveis às distintas correções o que é um indicativo da necessidade de um avanço teórico na série

Figura 4.12 - Comparação entre as soluções assintóticas da equação BK para a região de saturação com a escala de saturação fixa no valor de $Q_S^2 = 1 \text{ GeV}^2$ (à esquerda) e com o tamanho de dipolo fixo em $r^2 = 5 \text{ GeV}^{-2}$ (à direita).



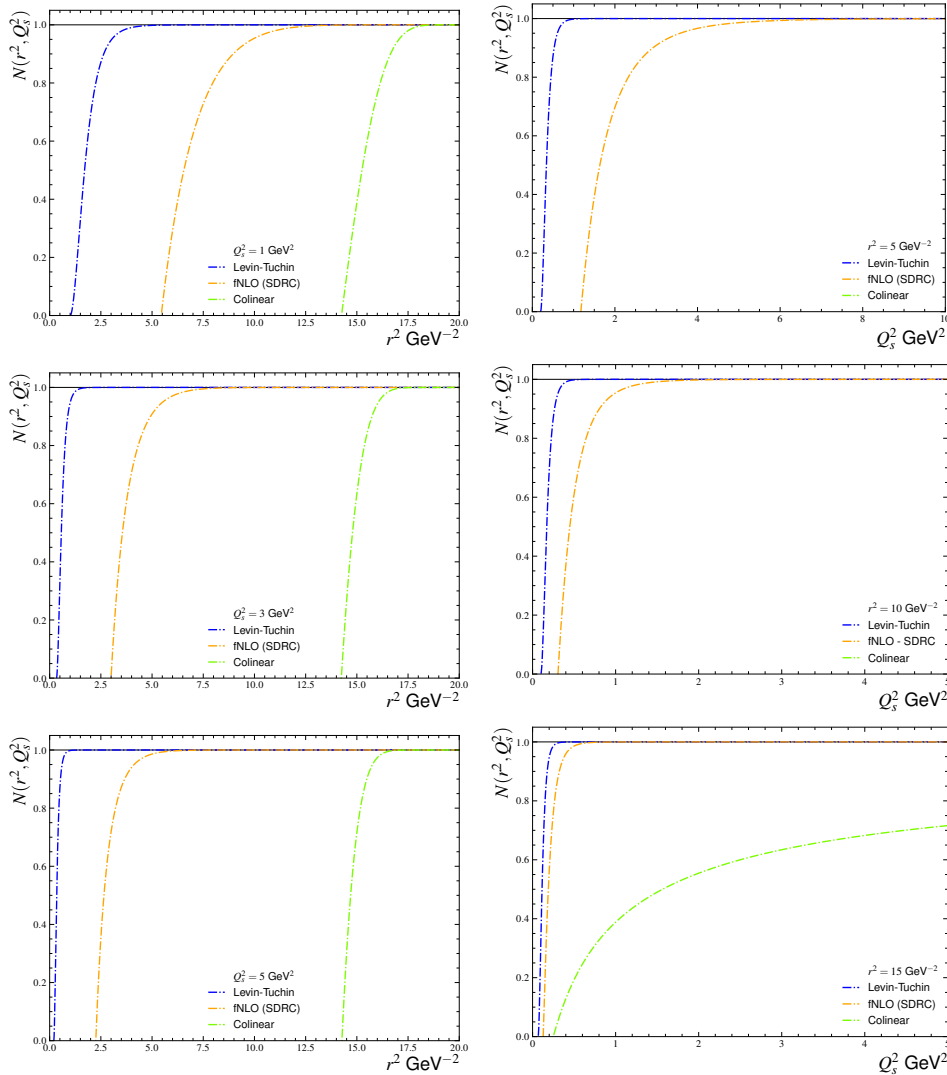
perturbativa.

4.6 Conclusão

Neste capítulo abordamos as correções além da ordem dominante para a equação Balitsky-Kovchegov e suas soluções para o regime de saturação. A partir disto realizamos uma análise das soluções analíticas derivadas ao longo das seções aqui apresentadas. Além das correções para equação BK, vimos distintas prescrições para a constante de acoplamento.

Trabalhamos a correção de laços de quarks para a equação BK que resulta na equação rcBK e após isso tratamos a correção de laços de quarks e glúons para a equação BK

Figura 4.13 - Comparação entre as soluções assintóticas da equação BK para a região de saturação com a escala de saturação fixa no valor de $Q_s^2 = 1 \text{ GeV}^2$ (à esquerda) e com o tamanho de dipolo fixo em $r^2 = 5 \text{ GeV}^{-2}$ (à direita).



que resulta na equação BK-fNLO. Além destas, abordamos as correções colineares para equação BK-fNLO.

No estudo das correções vimos as prescrições de acoplamento variável do dipolo pai (PDRC), do valor da constante de acoplamento é escala de saturação ($\alpha_s(Q_s^2)$) e de acoplamento variável do menor dipolo (SDRC) onde obtemos que a equação rcBK não difere para a prescrição PDRC e SDRC. Além disso, obtivemos que as soluções da correção fNLO são sensíveis à mudança de prescrição para o acoplamento variável.

Por fim, apresentamos um comparativo das diferentes soluções assintóticas para a equação BK-NLO onde mostramos que as soluções da equação BK para além da ordem dominante

são sensíveis as correções e as prescrições apresentadas.

Nossos resultados indicam que o atual conhecimento para as correções além da ordem dominante implicam em diferentes soluções da equação na região de saturação, as quais dependem da prescrição considerada para o tratamento da escala da constante de acoplamento. Além disso, nossos resultados apontam que a inclusão das correções colineares altera drasticamente o comportamento da solução, fazendo com que o regime assintótico somente seja atingido em um regime não-perturbativo ou de energias extremas, além daquelas presentes nos aceleradores atuais e/ou previstos para os próximos anos. Ambos resultados indicam que mais estudos teóricos são necessários, em particular, sobre as correções de próxima ordem.

5 Conclusões e perspectivas

O espalhamento profundamente inelástico comprova a dinâmica hadrônica através das funções de distribuição partônicas obtidas das equações de evolução. Da análise global dos dados do DIS, como visto, realiza-se parametrizações para as funções de distribuição partônicas que evoluem através das equações de evolução. Os dados apresentados pela parametrização CT18 [3] mostram que em altas energias, regime de pequeno x , a dinâmica QCD é dominada pela dinâmica de interação gluônica. Ao analisar as equações de evolução DGLAP e BFKL para o regime de pequeno x tem-se que as mesmas apresentam soluções que predizem um crescimento indefinido para o número de constituents - ou para o formalismo de dipolos $N(Y \rightarrow \infty) > 1$ - logo isso é não-físico. O resultado não físico das equações DGLAP e BFKL advém do caráter linear de processos que essas equações consideram. Portanto, efeitos não-lineares devem ser considerados.

A equação Balitsky-Kovchegov é uma equação de evolução integro-diferencial obtida através da aproximação de campo médio que, ao contrário da DGLAP e BFKL, considera efeitos não lineares. Até o presente momento a equação BK não apresenta solução analítica exata em todo o regime cinemático, entretanto a mesma apresenta duas soluções analíticas assintóticas para duas regiões distintas, a região de saturação e a vizinhança da linha de saturação. Destas soluções em ordem dominante, Iancu, Itakura e Munier propuseram um modelo fenomenológico [46]. Rezaeian e Schmidt em uma parametrização mais recente do modelo IIM demonstraram que os dados experimentais de HERA são melhores descritos assumindo γ_s como parâmetro livre onde o mesmo difere dos valores obtidos em ordem dominante o que evidencia que os cálculos realizados em ordem dominante não são os melhores para descrever os dados atualizados de HERA [47]. Portanto, para descrever a dinâmica QCD à altas energias devemos ir para a próxima ordem da equação BK.

A equação BK além da ordem dominante é um tema de intenso debate na literatura que apresenta diversas propostas para seu kernel, derivados considerando diferentes aproximações e distintas prescrições para a constante de acoplamento. Importante lembrar que estudos apontam que a solução no regime linear próximo à linha de saturação apresentam o escalonamento geométrico derivado em ordem dominante, mas com um valor distinto para γ_s . Por outro lado, a solução no regime de saturação é fortemente dependente do kernel considerado.

Nesta dissertação trabalhamos em detalhes a derivação da equação Balitsky-Kovchegov assim como suas soluções em ordem dominante. Entretanto, como as soluções assintóticas da eq. BK em ordem dominante não são as melhores para descrever os dados experimentais e a correção além da ordem dominante para a equação BK na região da vizinhança da

linha de saturação é equivalente a elevar o ponto de sela a um parâmetro livre. Nosso foco neste trabalho se deu em apresentar, calcular e analisar as distintas correções para a equação BK para além da ordem dominante e prescrições para a abordagem da escala da constante de acoplamento de forma analítica, algo ainda não realizado na literatura.

Nossos resultados indicam que o atual estado da arte para as correções além da ordem dominante implica em diferentes soluções da equação no regime de saturação, as quais dependem da prescrição considerada para o tratamento da escala da constante de acoplamento. Além disso, nossos resultados apontam que a inclusão das correções colineares altera drasticamente o comportamento da solução, fazendo com que o regime assintótico somente seja atingido em um regime não-perturbativo ou de energias extremas, além daquelas presentes nos aceleradores atuais e/ou previstos para os próximos anos. Ambos resultados indicam que mais estudos teóricos são necessários, em particular, sobre as correções de próxima ordem.

Uma alternativa é a construção de parametrizações fenomenológicas construídas a partir das soluções assintóticas apresentadas nesta dissertação, seguindo a metodologia presente no modelo IIM, e a sua comparação com os dados experimentais. O sucesso (ou fracasso) destas parametrizações poderiam indicar a preferência (ou não) por uma das soluções consideradas. Tal aspecto é um dos nossos objetivos futuros. Além disto, a solução numérica da equação BK com as distintas abordagens para o kernel também pode ser ilustrativa para ampliar a nossa compreensão, sendo este outro dos temas que pretendemos avançar no futuro.

Por fim, salientamos que os resultados apresentados nesta dissertação fazem parte de um artigo científico atualmente em elaboração.

A Solução da equação DGLAP na região de pequeno x

A equação DGLAP para a região de pequeno x pode ser aproximada para $xg(x, Q^2)$, i.e.,

$$\frac{\partial g(x, Q^2)}{\partial Q(k^2)} = \int_x^1 \frac{dx'}{x'} \frac{1}{Q^2} \frac{x'}{x} \frac{\alpha_s N_c}{\pi} g(x', Q^2),$$

onde

$$P_{gg}^{z \rightarrow 0} = \frac{2N_c}{z}, \quad \text{para } z = \frac{x}{x'},$$

e N_c é o número de cor. A qual pode ser reescrita como,

$$\begin{aligned} xg(x, Q^2) &= \int dW x' g(x', k_\perp^2) \\ &= \int_x^1 \frac{\alpha_s N_c}{\pi} \frac{dx'}{x'} \int \frac{dk_\perp^2}{k_\perp^2} x' g(x', k_\perp^2), \end{aligned}$$

onde dW é a probabilidade de emissão do glúon [65, 66]. Se $x'g(x', k_\perp^2)$ é a probabilidade de encontrar um glúon com a fração de energia x' e momentum transversal k_\perp , então a probabilidade de encontrar um glúon com fração de energia x e momentum transversal Q é dado por $xg(x, Q^2)$.

Para determinarmos a região de integração de dk_\perp^2 , temos que o comprimento de onda $\lambda = 1/Q$ deverá ser menor que $\approx 1/k_\perp$ o qual é o tamanho do glúon emissor, sendo assim $Q > k_\perp$, então integramos no momentum quadrado de Q_0 até Q^2 ,

$$xg(x, Q^2) = \int_x^1 \frac{dx'}{x'} \int_{Q_0^2}^{Q^2} \frac{dk_\perp^2}{k_\perp^2} \frac{\alpha_s N_c}{\pi} x' g(x', k_\perp^2), \quad (\text{A.1})$$

definindo, por simplicidade, a variável de rapidez como

$$Y \equiv \ln \frac{1}{x'},$$

da mesma forma $x' = e^{-Y}$.

Para constante de acoplamento fixa, a eq. (A.1) pode ser reescrita como

$$xg(x, Q^2) = \frac{\alpha_s N_c}{\pi} \int_0^Y dY' \int_{Q_0}^{Q^2} \frac{dk_{\perp}^2}{k_{\perp}^2} x' g(x', k_{\perp}^2).$$

Também, se definirmos

$$\Gamma \equiv \ln \frac{Q^2}{Q_0^2},$$

da mesma forma $k_{\perp}^2 = Q_0^2 e^{\Gamma}$. A equação acima para a distribuição dos glúons irá assumir a forma

$$xg(x, Q^2) = \frac{\alpha_s N_c}{\pi} \int_0^Y dY' \int_0^{\Gamma} d\Gamma' x' g(x', k_{\perp}^2). \quad (\text{A.2})$$

Para calcularmos a expressão da distribuição do glúon a partir da equação (A.2), que é uma equação integro-diferencial, temos que introduzir a transformada de Mellin para retirar as convoluções presentes na expressão.

Assumindo $xg(x, Q^2) = G(Y, \Gamma)$, a transformação de Mellin com ω como a variável conjugada a Y é [65, 66]:

$$G(\omega, \Gamma) = \int_0^{\infty} dY e^{-\omega Y} G(Y, \Gamma),$$

e, sua inversa

$$G(Y, \Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\omega e^{\omega Y} G(\omega, \Gamma). \quad (\text{A.3})$$

Como $xg(x, Q^2) = G(Y, \Gamma)$, a equação (A.2) é reescrita como

$$G(Y, \Gamma) = \frac{\alpha_s N_c}{\pi} \int_0^Y dY' \int_0^{\Gamma} d\Gamma' G(Y', \Gamma'),$$

inserindo a transformada de Mellin inversa na expressão acima

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\omega e^{\omega Y} G(\omega, \Gamma) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\alpha_s N_c}{\pi} \int_0^Y dY' \int_0^\Gamma d\Gamma' \int_{-i\infty}^{i\infty} d\omega e^{\omega Y'} G(\omega, \Gamma') \\ \int_{-i\infty}^{i\infty} d\omega e^{\omega Y} G(\omega, \Gamma) &= \frac{\alpha_s N_c}{\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\omega \frac{e^{\omega Y}}{\omega} \int_0^\Gamma d\Gamma' G(\omega, \Gamma').\end{aligned}$$

Podemos observar que

$$G(Y, \Gamma) = \frac{\alpha_s N_c}{\pi \omega} \int_0^\Gamma d\Gamma' G(\omega, \Gamma'), \quad (\text{A.4})$$

derivando com respeito a Γ' ,

$$\begin{aligned}\frac{dG}{d\Gamma'} &= \frac{\alpha_s N_c}{\pi \omega} G(\omega, \Gamma') \\ \frac{dG}{G} &= \frac{\alpha_s N_c}{\pi \omega} d\Gamma'\end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

como a equação (A.5) é uma equação diferencial, a mesma tem a seguinte solução

$$G(\omega, \Gamma) = G(\omega, \Gamma_0) e^{\frac{\alpha_s N_c}{\pi \omega} \Gamma}.$$

Retornando este resultado para a transformada de Mellin (A.3),

$$G(Y, \Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\omega e^{\omega Y} G(\omega, \Gamma_0) e^{\left(\frac{\alpha_s N_c \Gamma}{\pi \omega}\right)} \quad (\text{A.6})$$

A partir da transformada de Mellin, conectamos a variável conjugada real Y com a variável complexa ω . Assumindo que a integral complexa (A.6) não apresenta singularidade na condição inicial, mas sim na região de pequeno x (grande Y) e grande Γ (grande Q^2) onde uma singularidade no argumento da exponencial é observada. Podemos usar o método do ponto de sela para solucionarmos esta integral [67]. Então, aplicando o método do ponto de sela para a equação (A.6), temos o argumento da exponencial na forma $Ag(x)$, i.e.,

$$u = \omega Y + \frac{\alpha_s N_c \Gamma}{\pi \omega},$$

para encontrarmos o ponto de sela, o teste da primeira derivada deve ser feito,

$$\frac{du}{d\omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{\alpha_s N_c \Gamma}{\pi Y}} \equiv \omega_s,$$

expandindo a variável u entorno do ponto de sela, ω_s , até a segunda ordem

$$u = u(\omega_s) + \left. \frac{\partial u}{\partial \omega} \right|_{\omega_s} (\omega - \omega_s) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2} \right|_{\omega_s} (\omega - \omega_s)^2.$$

Substituindo a expansão na equação (A.6), ficamos com

$$G(Y, \Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{i\infty}^{-i\infty} d\omega G(\omega, \Gamma_0) e^{(u(\omega_s) + \frac{1}{2} u''(\omega - \omega_s)^2)}, \quad (\text{A.7})$$

realizando a seguinte substituição: $\omega - \omega_s = i\gamma$, que implica em $id\gamma = d\omega$.

$$\begin{aligned} G(Y, \Gamma) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma G(\omega_0, \Gamma_0) e^{(u(\omega_s) + \frac{u''}{2}(\gamma)^2)} \\ G(Y, \Gamma) &= \frac{1}{2\pi} G(\omega_0, \Gamma_0) e^{u(\omega_s)} \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma e^{-\frac{u''}{2} \gamma^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Analizando a expressão (A.8), a integral é similar a integral Gaussiana,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

por isso, a expressão para a distribuição de glúons é

$$G(Y, \Gamma) = \frac{1}{2\pi} G(\omega_0, \Gamma_0) \sqrt{\frac{2\pi}{u''}} e^{u(\omega_s)},$$

como $u'' = \frac{2\alpha_s N_c \Gamma}{\pi \omega_s^3}$,

$$\begin{aligned} G(Y, \Gamma) &= \frac{1}{2\pi} G(\omega_0, \Gamma_0) \sqrt{\frac{2\pi^2 \omega_s^3}{2\alpha_s N_c \Gamma}} e^{\left(\omega_s Y + \frac{\alpha_s N_c \Gamma}{\pi \omega_s}\right)} \\ G(Y, \Gamma) &= \frac{G(\omega_0, \Gamma_0)}{2} \sqrt{\frac{\omega_s^3}{\alpha_s N_c \Gamma}} e^{\left(\omega_s Y + \frac{\alpha_s N_c \Gamma}{\pi \omega_s}\right)} \end{aligned}$$

já que $\omega_s \equiv \sqrt{\frac{\alpha_s N_c \Gamma}{\pi Y}}$, ao inserirmos o ponto de sela na equação acima:

$$\begin{aligned}
G(Y, \Gamma) &= \frac{G(\omega_0, \Gamma_0)}{2} \left(\frac{1}{\alpha_s N_c \Gamma} \right)^{1/2} \left[\left(\frac{\alpha_s N_c \Gamma}{\pi Y} \right)^{1/2} \right]^{3/2} \exp \left[\frac{\pi \omega_s^2 Y + \alpha_s N_c \Gamma}{\pi \omega_s} \right] \\
G(Y, \Gamma) &= \frac{G(\omega_0, \Gamma_0)}{2} \left(\frac{\alpha_s N_c \Gamma}{\pi^3 Y^3} \right)^{1/4} \exp \left[2 \left(\frac{\alpha_s N_c \Gamma}{\pi} \right)^1 \left(\frac{\alpha_s N_c \Gamma}{\pi} \right)^{-1/2} \left(\frac{1}{Y} \right)^{-1/2} \right] \\
G(Y, \Gamma) &= \frac{G(\omega_0, \Gamma_0)}{2} \left(\frac{\alpha_s N_c \Gamma}{\pi^3 Y^3} \right)^{1/4} e^{\left(2 \sqrt{\frac{\alpha_s N_c \Gamma Y}{\pi}} \right)}. \tag{A.9}
\end{aligned}$$

Para obter a equação (A.9), assumimos uma singularidade fora da condição inicial. Agora, vamos considerar uma singularidade na condição inicial. Para uma condição inicial do tipo $G(Y, \Gamma_0) = e^{\omega_0 Y}$, usando a transformação de Mellin na condição inicial,

$$\begin{aligned}
G(\omega, \Gamma_0) &= \int_0^\infty dY e^{-\omega Y} e^{\omega_0 Y} \\
G(\omega, \Gamma_0) &= \int_0^\infty dY e^{(\omega_0 - \omega) Y},
\end{aligned}$$

resolvendo a integral usando o método de substituição,

$$G(\omega, \Gamma_0) = \frac{1}{\omega - \omega_0}.$$

E, sua transformada de Mellin inversa é

$$G(Y, \Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\omega e^{\omega Y} \frac{1}{\omega - \omega_0} e^{\left(\frac{\alpha_s N_c \Gamma}{\pi \omega} \right)}. \tag{A.10}$$

Para calcular esta integral complexa, a melhor maneira é usar o teorema dos resíduos. Para isso, expandimos $\frac{1}{\omega - \omega_0}$ em uma série de Laurent para determinar a ordem do polo [67],

$$\frac{1}{\omega - \omega_0} = \frac{1}{\omega \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0} \right)},$$

como $\left| \frac{\omega}{\omega_0} \right| \leq 1$, podemos expandir em uma série geométrica

$$\frac{1}{\omega - \omega_0} = \sum_0^{\infty} \omega_0^n \omega^{-n-m}$$

para $m = 1$. Então podemos notar que $\omega = \omega_0$   um polo simples que configura uma singularidade essencial.

Portanto, a soluço da integral complexa (A.10)  

$$G(Y, \Gamma) = \frac{1}{2\pi i} 2\pi i \text{Res}[G(\omega_0, \Gamma)],$$

para

$$\text{Res}[G(\omega_0, \Gamma)] = (\omega - \omega_0) \frac{1}{(\omega - \omega_0)} e^{\left(\omega_0 Y + \frac{\alpha_s N_c \Gamma}{\pi \omega_0} \right)},$$

então

$$G(Y, \Gamma) = e^{\left(\omega_0 Y + \frac{\alpha_s N_c \Gamma}{\pi \omega_0} \right)}. \quad (\text{A.11})$$

O comportamento assintótico vem da competi o entre as duas singularidades presentes na fun o de distribui o dos glúons como pode ser visto. As singularidades são:

- O polo $\omega = \omega_0$, quem implica na eq. (A.11)

$$G(Y, \Gamma) = e^{\left(\omega_0 Y + \frac{\alpha_s N_c \Gamma}{\pi \omega_0} \right)}.$$

- O ponto de sela na eq. (A.8)

$$G(Y, \Gamma) \approx e^{2\sqrt{\frac{\alpha_s N_c \Gamma Y}{\pi}}} \quad \text{para} \quad \omega = \omega_s$$

B Teoria Quântica de Campos no Cone de Luz

B.1 Coordenadas no Cone de Luz

As coordenadas no cone de luz, x^+, x^- e x^\perp , são dadas a partir da combinação linear da coordenada temporal e uma das coordenadas espaciais, convencionalmente por x^3 . As componentes referentes ao cone de luz para o quadrivetor x^μ são [68]:

$$x^+ = \frac{x^0 + x^3}{\sqrt{2}} \quad x^- = \frac{x^0 - x^3}{\sqrt{2}} \quad x^\perp = (x^1, x^2) .$$

No sistema de coordenadas no cone de luz, (x^0, x^3) são trocadas por (x^+, x^-) , porem as outras coordenadas (x^1, x^2) são mantidas. Assim, expressamos o quadrivetor x^μ como $x^\mu = (x^+, x^\perp, x^-)$.

Para esse sistema de coordenadas o tensor métrico é dado por

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e o produto escalar

$$x \cdot y = x^+ y^- + x^- y^+ - x^\perp \cdot y^\perp = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \quad (\text{B.1})$$

para a soma dos índices gregos como $(+, 1, 2, -)$.

Considerando $x \cdot y = x_\mu y^\mu$, e expandindo a soma sobre os índices μ usando a sequência do sistema de coordenadas no cone de luz $(+, 1, 2, -)$:

$$x \cdot y = x_+ y^+ + x_- y^- + x_\perp y^\perp$$

comparando com a expressão (B.1), temos que

$$x_+ = x^- , \quad x_- = x^+ , \quad x_\perp = -x^\perp$$

deste modo sabemos como se dá a troca de notação entre covariante e contravariante neste

novo sistema de coordenadas.

Para o 4-momentum p^μ , as suas componentes no cone de luz serão da mesma forma que apresentamos anteriormente para o quadrivetor x^μ , i.e., $p^\mu = (p^+, p^\perp, p^-)$, onde p^- representa a energia no cone de luz (já que a mesma está conjugada com a componente temporal do cone de luz x^+) A componente p^+ é denominada de momentum longitudinal e p^\perp é o momentum transverso

Neste novo sistema de coordenadas, o escalar de lorentz é:

$$p^2 = m^2 \quad \Rightarrow \quad p^- = \frac{p_\perp^2 + m^2}{2p^+}$$

que advêm de:

$$\begin{aligned} p^2 &= p_\mu p^\mu = m^2 \\ m^2 &= p_\mu p^\mu = p_+ p^+ + p_- p^- + p_\perp p^\perp \\ m^2 &= p^- p^+ + p^+ p^- - p_\perp p_\perp \\ m^2 &= 2p^- p^+ - p_\perp^2 . \end{aligned}$$

Essa relação é mais simples do que a obtida no sistema usual de coordenadas relativísticas, $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, já que a expressão acima não tem uma raiz quadrada e sim uma relação linear em p_\perp^2 e m^2 .

B.2 A Teoria de Campos

Neste sistema de coordenadas um campo escalar $\phi(x)$ pode ser quantizado em termos dos operadores de criação e aniquilação, \tilde{a}^\dagger e \tilde{a} , como

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\bar{p}}{\sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{2p^+}} [e^{ip \cdot x} \tilde{a}^\dagger(\bar{p}) + e^{-ip \cdot x} \tilde{a}(\bar{p})]. \quad (\text{B.2})$$

O vetor \bar{p} é a parte espacial do momentum no cone de luz, $\bar{p} = (p^+, p_\perp)$. O fator $1/\sqrt{2p^+}$ foi incluído na expressão acima, mais precisamente no integrando devida a convenção escolhida, Kogut-Soper (KS) [69].

Os operadores \tilde{a}^\dagger e \tilde{a} satisfazem a seguinte relação de comutação

$$[\tilde{a}(\bar{p}), \tilde{a}^\dagger(\bar{q})] = \delta^{(3)}(\bar{p} - \bar{q}).$$

Similarmente, para um campo fermiônico ψ , temos

$$\psi(x) = \sum_s \int \frac{d^3\bar{p}}{\sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{2p^+}} [e^{-ip \cdot x} b_s(\bar{p}) u_s(p) + e^{ip \cdot x} d_s^\dagger(\bar{p}) v_s(p)] \quad (\text{B.3})$$

para o caso do campo fermiônico, $b_s(\bar{p})$ aniquila um férmion que possui spin s e momentum p , já $d_s^\dagger(\bar{p})$ cria um antiférmion que consequentemente possui spin s e momentum p . E, $u_s(p)$ e $v_s(p)$ são os espinores para férmions e antiférmions respectivamente. No campo de férmions, ao contrário do campo escalar, a quantização se dá pela satisfação das relações de anticomutação:

$$\{b_s(\bar{p}), b_{s'}^\dagger(\bar{q})\} = \delta^3(\bar{p} - \bar{q}) \delta_{ss'} \quad \text{e} \quad \{d_s(\bar{p}), d_{s'}^\dagger(\bar{q})\} = \delta^3(\bar{p} - \bar{q}) \delta_{ss'}.$$

Um campo bosônico, mais especificamente um campo para bósons de gauge A_μ , pode ser escrito como

$$A_\mu(x) = \sum_\lambda \int \frac{d^3\bar{p}}{\sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{2p^+}} [e^{-ip \cdot x} a^\lambda(\bar{p}) \epsilon_\mu^\lambda(p) + e^{ip \cdot x} a^{\lambda\dagger}(\bar{p}) \epsilon_\mu^{*\lambda}(p)] \quad (\text{B.4})$$

onde λ é a polarização do campo e ϵ é o vetor de polarização. Os operadores $a^{\lambda\dagger}$ e a^λ satisfazem a relação de comutação

$$[a^{\lambda'}(\bar{p}), a^{\lambda\dagger}(\bar{q})] = \delta^{(3)}(\bar{p} - \bar{q}) \delta_{\lambda\lambda'}$$

que é a mesma relação dos operadores do campo escalar \tilde{a}^\dagger e \tilde{a} , com o fator adicional $\delta_{\lambda\lambda'}$.

O termo de interação da Hamiltoniana da QED é (lembrando que P^- é a energia no cone de luz)

$$P_{\text{int}}^- = e \int d^3\bar{x} \bar{\psi} \not{A} \psi + e^2 \int d^3\bar{x} \left[\bar{\psi} x^+ \psi \frac{1}{(i\partial_-)} \bar{\psi} \gamma^+ \psi + \psi \not{A} \frac{\gamma^+}{i\partial_-} \not{A} \psi \right], \quad (\text{B.5})$$

em que $\not{A} = A_\mu \gamma^\mu$, e é a carga elementar do elétron, $\gamma^+ = 1/\sqrt{2}(\gamma^0 + \gamma^3)$, em que γ^0 e γ^3 são as matrizes gama, e $\partial_- = \partial^+$ é uma derivada tipo espaço [68].

Os dois últimos termos da equação (B.5) descrevem interações como $f f \bar{f} \bar{f}$ e $\gamma \gamma f \bar{f}$ (onde f representa um férmion, \bar{f} representa um antiférmion e γ representa um fóton), que não estão presentes na forma instantânea da QED.

C Função de onda do Fóton virtual

A probabilidade do fóton virtual flutuar em um dipolo pode ser calculada em termos da teoria de perturbação no cone de luz.

Primeiramente, vamos definir um estado de fóton virtual com momentum \bar{q} e polarização λ na teoria livre como

$$|\gamma^*(\bar{q})\rangle_0 = a^{\lambda\dagger}(\bar{q}) |0\rangle.$$

Se denotarmos o Hamiltoniana da teoria livre por P_0^- ,

$$P_0^- |\gamma^*\rangle = q^- |\gamma^*\rangle.$$

Similarmente, nesta teoria, podemos escrever um estado de dipolo como

$$|q_s(\bar{k})\bar{q}_{s'}(\bar{k}')\rangle_0 = b_s^\dagger(\bar{k})d_{s'}^\dagger(\bar{k}') |0\rangle,$$

da qual segue que

$$P_0^- |q_s(\bar{k})\bar{q}_{s'}(\bar{k}')\rangle_0 = (k^- - k'^-) |q_s(\bar{k})\bar{q}_{s'}(\bar{k}')\rangle_0.$$

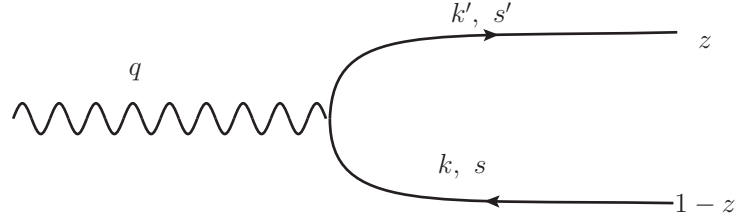
k e s representam o momenta e o spin do quark, já k' e s' representam o momenta e o spin do antiquark. O cenário é apresentado esquematicamente na Fig. C.1, onde temos um diagrama que representa o fóton virtual flutuando em um par $q\bar{q}$.

Vamos assumir que o estado do fóton virtual na teoria interagente, $|\gamma^*\rangle$, pode ser escrito como um estado da teoria livre $|\gamma^*\rangle_0$ acrescido de uma pequena perturbação (a flutuação no par $q\bar{q}$)

$$|\gamma^*\rangle = |\gamma^*\rangle_0 + \sum_{s,s'} \int d^3\bar{l}d^3\bar{l}'\delta^{(3)}(\bar{q} - \bar{l} - \bar{l}')\psi_{ss'}(\bar{l}) |q_s(\bar{l})\bar{q}_{s'}(\bar{l}')\rangle_0 + \mathcal{O}(e^2)$$

em que a ainda desconhecida função $\psi_{ss'}$ é denominada função de onda do fóton virtual.

Figura C.1 - O fóton virtual fluta em um dipolo quark-antiquark. O momentum e o spin do quark (antiquark) são k (k') e s (s'), respectivamente.



Aqui, l e l' representam os momenta do quark e do antiquark, e, s e s' seus spins. Como o desdobramento $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}$ inclui um acoplamento entre uma linha fermiônica e um campo de gauge, i.e., teremos somente um vértice, e portanto, esperamos que $\psi_{ss'} \approx e$, e com isso, podemos desprezar os termos envolvendo ordens mais altas no acoplamento eletromagnético $\alpha_{\text{em}} = g_e^2/4\pi$, ou equivalentemente na carga elementar e .

Aplicando o estado dual ${}_0 \langle q_{\hat{s}}(\bar{k})\bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}') |$ no estado do fóton virtual na teoria interagente, $|\gamma^*\rangle_0$, e usando a ortogonalidade dos estados não interagentes,

$${}_0 \langle q_{\hat{s}}(\bar{k})\bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}') | q_s(\bar{l})\bar{q}_{s'}(\bar{l}') \rangle_0 = \delta^{(3)}(\bar{k} - \bar{l})\delta^{(3)}(\bar{k}' - \bar{l}')\delta_{s\hat{s}}\delta_{s'\hat{s}'}$$

obtemos,

$$\begin{aligned} {}_0 \langle q_{\hat{s}}(\bar{k})\bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}') | \gamma^* \rangle &= \underbrace{{}_0 \langle q_{\hat{s}}(\bar{k})\bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}') | \gamma^* \rangle_0}_{=0} + \sum_{ss'} \int d^3\bar{l}d^3\bar{l}'\delta^{(3)}(\bar{q} - \bar{l} - \bar{l}')\psi_{ss'}(\bar{l}) \\ &\quad \times \underbrace{{}_0 \langle q_{\hat{s}}(\bar{k})\bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}') | q_s(\bar{l})\bar{q}_{s'}(\bar{l}') \rangle_0}_{=\delta^{(3)}(\bar{k}-\bar{l})\delta^{(3)}(\bar{k}'-\bar{l}')\delta_{s\hat{s}}\delta_{s'\hat{s}'}} + \mathcal{O}(e^2) \\ &= 0 + \sum_{ss'} \int d^3\bar{l}d^3\bar{l}'\delta^{(3)}(\bar{q} - \bar{l} - \bar{l}')\psi_{ss'}(\bar{l}) \\ &\quad \times \delta^{(3)}(\bar{k} - \bar{l})\delta^{(3)}(\bar{k}' - \bar{l}')\delta_{s\hat{s}}\delta_{s'\hat{s}'} + \mathcal{O}(e^2) \\ &= 0 + \sum_{ss'} \int d^3\bar{l}\delta^{(3)}(\bar{q} - \bar{l} - \bar{l}')\psi_{ss'}(\bar{l})\delta^{(3)}(\bar{k} - \bar{l})\delta_{s\hat{s}}\delta_{s'\hat{s}'} + \mathcal{O}(e^2) \\ &= 0 + \sum_{ss'} \delta^{(3)}(\bar{q} - \bar{l} - \bar{l}')\psi_{ss'}(\bar{l})\delta_{s\hat{s}}\delta_{s'\hat{s}'} + \mathcal{O}(e^2). \end{aligned}$$

As funções $\delta_{s\hat{s}}$ e $\delta_{s'\hat{s}'}$ resolvem a soma, e portanto, ficamos com

$${}_0 \langle q_{\hat{s}}(\bar{k}) \bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}') | \gamma^* \rangle = 0 + \delta^{(3)}(\bar{q} - \bar{l} - \bar{l}') \psi_{\hat{s}\hat{s}'}(\bar{l}) + \mathcal{O}(e^2). \quad (\text{C.1})$$

Por outro lado, também podemos aplicar ${}_0 \langle q_{\hat{s}}(\bar{k}) \bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}') | (P_0^- + P_{\text{int}}^-) \rangle$ no estado $|\gamma^*\rangle$, em que $P^- = P_0^- + P_{\text{int}}^-$ é o Hamiltoniano total da teoria interagente e P_{int}^- é dado pela equação (B.5). Assim:

$$\begin{aligned} {}_0 \langle q_{\hat{s}}(\bar{k}) \bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}') | P^- | \gamma^* \rangle &= {}_0 \langle q_{\hat{s}}(\bar{k}) \bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}') | P^- | \gamma^* \rangle_0 \\ &\quad + \sum_{s,s'} \int d^3\bar{l} d^3\bar{l}' \delta^{(3)}(\bar{q} - \bar{l} - \bar{l}') \psi_{ss'}(\bar{l}) \\ &\quad \times {}_0 \langle q_{\hat{s}}(\bar{k}) \bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}') | P^- | q_s(\bar{l}) \bar{q}_{s'}(\bar{l}') \rangle_0 + \mathcal{O}(e^2) \\ q^- {}_0 \langle q_{\hat{s}}(\bar{k}) \bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}') | \gamma^* \rangle &= \underbrace{{}_0 \langle q_{\hat{s}}(\bar{k}) \bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}') | P_0^- | \gamma^* \rangle_0}_{=q^- {}_0 \langle q_{\hat{s}}(\bar{k}) \bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}') | \gamma^* \rangle} + {}_0 \langle q_{\hat{s}}(\bar{k}) \bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}') | P_{\text{int}}^- | \gamma^* \rangle_0 \\ &\quad + \sum_{s,s'} \int d^3\bar{l} d^3\bar{l}' \delta^{(3)}(\bar{q} - \bar{l} - \bar{l}') \psi_{ss'}(\bar{l}) \left[\underbrace{{}_0 \langle q_{\hat{s}}(\bar{k}) \bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}') | P_0^- | q_s(\bar{l}) \bar{q}_{s'}(\bar{l}') \rangle_0}_{=(l^- + l'^-) {}_0 \langle q_{\hat{s}}(\bar{k}) \bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}') | q_s(\bar{l}) \bar{q}_{s'}(\bar{l}') \rangle_0} \right. \\ &\quad \left. + {}_0 \langle q_{\hat{s}}(\bar{k}) \bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}') | P_{\text{int}}^- | q_s(\bar{l}) \bar{q}_{s'}(\bar{l}') \rangle_0 \right] + \mathcal{O}(e^2), \end{aligned}$$

sendo $\psi_{ss'} \sim e$ e $P_{\text{int}}^- \sim e$, podemos incluir o termo

$$\psi_{ss'}(\bar{l}) {}_0 \langle q_{\hat{s}}(\bar{k}) \bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}') | P_{\text{int}}^- | q_s(\bar{l}) \bar{q}_{s'}(\bar{l}') \rangle_0,$$

aos termos de mais alta ordem $\mathcal{O}(e^2)$, logo o termo é desconsiderado. Deste modo,

$$\begin{aligned}
q^- \langle q_{\hat{s}}(\bar{k}) \bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}') | \gamma^* \rangle &= q^- \underbrace{\langle q_{\hat{s}}(\bar{k}) \bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}') | \gamma^* \rangle}_{{=0}} + \langle q_{\hat{s}}(\bar{k}) \bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}') | P_{\text{int}}^- | \gamma^* \rangle_0 \\
&+ \sum_{s,s'} \int d^3 \bar{l} d^3 \bar{l}' \delta^{(3)}(\bar{q} - \bar{l} - \bar{l}') \psi_{ss'}(\bar{l})(l^- + l'^-) \\
&\times \underbrace{\langle q_{\hat{s}}(\bar{k}) \bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}') | q_s(\bar{l}) \bar{q}_{s'}(\bar{l}') \rangle_0}_{=\delta^{(3)}(\bar{k}-\bar{l})\delta^{(3)}(\bar{k}'-\bar{l}')\delta_{\hat{s}s}\delta_{\hat{s}'s'}} \\
&= \langle q_{\hat{s}}(\bar{k}) \bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}') | P_{\text{int}}^- | \gamma^* \rangle_0 + \sum_{s,s'} \int d^3 \bar{l} d^3 \bar{l}' \delta^{(3)}(\bar{q} - \bar{l} - \bar{l}') \psi_{ss'}(\bar{l})(l^- + l'^-) \\
&\quad \times \delta^{(3)}(\bar{k} - \bar{l}) \delta^{(3)}(\bar{k}' - \bar{l}') \delta_{\hat{s}s} \delta_{\hat{s}'s'} \\
q^- \langle q_{\hat{s}}(\bar{k}) \bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}') | \gamma^* \rangle &= \langle q_{\hat{s}}(\bar{k}) \bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}') | P_{\text{int}}^- | \gamma^* \rangle_0 \\
&+ \delta^{(3)}(\bar{q} - \bar{k} - \bar{k}') \psi_{\hat{s}\hat{s}'}(\bar{k})(k^- + k'^-), \tag{C.2}
\end{aligned}$$

substituindo a equação (C.1), desprezando os termos de ordem $\mathcal{O}(e^2)$, na equação (C.2), ficamos com

$$\begin{aligned}
q^- \delta^{(3)}(\bar{q} - \bar{k} - \bar{k}') \psi_{\hat{s}\hat{s}'}(\bar{k}) &= \langle q_{\hat{s}}(\bar{k}) \bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}') | P_{\text{int}}^- | \gamma^* \rangle_0 \\
&\quad + \delta^{(3)}(\bar{q} - \bar{k} - \bar{k}') \psi_{\hat{s}\hat{s}'}(\bar{k})(k^- + k'^-) \\
(q^- - k^- - k'^-) \delta^{(3)}(\bar{q} - \bar{k} - \bar{k}') \psi_{\hat{s}\hat{s}'}(\bar{k}) &= \langle q_{\hat{s}}(\bar{k}) \bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}') | P_{\text{int}}^- | \gamma^* \rangle_0,
\end{aligned}$$

efetuando a troca de índices $\hat{s}, \hat{s}' \rightarrow s, s'$,

$$\delta^{(3)}(\bar{q} - \bar{k} - \bar{k}') \psi_{ss'}(\bar{k}) = \frac{\langle q_s(\bar{k}) \bar{q}_{s'}(\bar{k}') | P_{\text{int}}^- | \gamma^* \rangle_0}{q^- - k^- - k'^-}. \tag{C.3}$$

Podemos escrever o produto interno $\langle q_s(\bar{k}) \bar{q}_{s'}(\bar{k}') | P_{\text{int}}^- | \gamma^* \rangle_0$ presente na equação acima substituindo P_{int}^- conforme apresentado em eq. Logo,

$$\langle q_s(\bar{k}) \bar{q}_{s'}(\bar{k}') | P_{\text{int}}^- | \gamma^* \rangle_0 = \langle q_s(\bar{k}) \bar{q}_{s'}(\bar{k}') | e \int d^3 \bar{x} \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi | \gamma^* \rangle_0.$$

Realizando a substituição do campo bosônico A_μ e do campo fermiônico ψ , dados pelas

equações e respectivamente, encontramos

$$\begin{aligned}
{}_0 \langle q_s(\bar{k}) \bar{q}_{s'}(\bar{k}') | P_{\text{int}}^- |\gamma^*\rangle_0 &= {}_0 \langle q_s(\bar{k}) \bar{q}_{s'}(\bar{k}') | e \int d^3\bar{x} \\
&\times \sum_{\hat{s}} \int \frac{d^3\bar{p}}{\sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{2p^+}} \left[e^{-ip \cdot x} d_{\hat{s}}(\bar{p}) \bar{v}_{\hat{s}}(p) + e^{ip \cdot x} b_{\hat{s}}^\dagger(\bar{p}) \bar{u}_{\hat{s}}(p) \right] \\
&\times \gamma^\mu \sum_{\lambda'} \int \frac{d^3\bar{l}}{\sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{2l^+}} \left[e^{-il \cdot x} a^{\lambda'}(\bar{l}) \varepsilon_\mu^{\lambda'}(l) + e^{il \cdot x} a^{\lambda'\dagger}(\bar{l}) \varepsilon_\mu^{*\lambda'}(l) \right] \\
&\times \sum_{\hat{s}'} \int \frac{d^3\bar{p}'}{\sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{2p'^+}} \left[e^{-ip' \cdot x} b_{\hat{s}'}(\bar{p}') u_{\hat{s}'}(p') + e^{ip' \cdot x} d_{\hat{s}'}^\dagger(\bar{p}') v_{\hat{s}'}(p') \right] |\gamma^*\rangle_0.
\end{aligned}$$

Incluindo os fatores $1/\sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{2l^+}$, $1/\sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{2l^+}$, $1/\sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{2p'^+}$ nas medidas de integração $d^3\bar{p}$, $d^3\bar{l}$ e $d^3\bar{p}'$ respectivamente,

$$\begin{aligned}
{}_0 \langle q_s(\bar{k}) \bar{q}_{s'}(\bar{k}') | P_{\text{int}}^- |\gamma^*\rangle_0 &= ee_i \sum_{\hat{s}, \hat{s}', \lambda'} \int d^3\bar{x} d^3\bar{p} d^3\bar{l} d^3\bar{p}' {}_0 \langle q_s(\bar{k}) \bar{q}_{s'}(\bar{k}') | \\
&\times \left[e^{-ip \cdot x} d_{\hat{s}}(\bar{p}) \bar{v}_{\hat{s}}(p) + e^{ip \cdot x} b_{\hat{s}}^\dagger(\bar{p}) \bar{u}_{\hat{s}}(p) \right] \\
&\times \gamma^\mu \left[e^{-il \cdot x} a^{\lambda'}(\bar{l}) \varepsilon_\mu^{\lambda'}(l) + e^{il \cdot x} a^{\lambda'\dagger}(\bar{l}) \varepsilon_\mu^{*\lambda'}(l) \right] \\
&\times \left[e^{-ip' \cdot x} b_{\hat{s}'}(\bar{p}') u_{\hat{s}'}(p') + e^{ip' \cdot x} d_{\hat{s}'}^\dagger(\bar{p}') v_{\hat{s}'}(p') \right] |\gamma^*\rangle_0,
\end{aligned}$$

sendo o estado do fóton dado por

$$|\gamma^*\rangle_0 = a^{\lambda\dagger}(\bar{q}) |0\rangle,$$

e o estado de dipolo por

$$|q_s(\bar{k}) \bar{q}_{s'}(\bar{k}')\rangle_0 = b_s^\dagger(\bar{k}) d_{s'}^\dagger(\bar{k}') |0\rangle,$$

ao retornarmos para ${}_0 \langle q_s(\bar{k}) \bar{q}_{s'}(\bar{k}') | P_{\text{int}}^- |\gamma^*\rangle_0$, obtemos que

$$\begin{aligned}
{}_0 \langle q_s(\bar{k}) \bar{q}_{s'}(\bar{k}') | P_{\text{int}}^- |\gamma^*\rangle_0 &= ee_i \sum_{\hat{s}, \hat{s}', \lambda'} \int d^3\bar{x} d^3\bar{p} d^3\bar{l} d^3\bar{p}' \langle 0 | b_s(\bar{k}) d_{s'}(\bar{k}') \\
&\times \left[e^{-ip \cdot x} d_{\hat{s}}(\bar{p}) \bar{v}_{\hat{s}}(p) + e^{ip \cdot x} b_{\hat{s}}^\dagger(\bar{p}) \bar{u}_{\hat{s}}(p) \right] \\
&\times \left[e^{-il \cdot x} a^{\lambda'}(\bar{l}) \not{x}^{\lambda'}_\mu(l) + e^{il \cdot x} a^{\lambda'\dagger}(\bar{l}) \not{x}^{*\lambda'}_\mu(l) \right] \\
&\times \left[e^{-ip' \cdot x} b_{\hat{s}'}(\bar{p}') u_{\hat{s}'}(p') + e^{ip' \cdot x} d_{\hat{s}'}^\dagger(\bar{p}') v_{\hat{s}'}(p') \right] a^{\lambda'}(\bar{q}) |0\rangle,
\end{aligned}$$

onde $\not{x} = \gamma^\mu \varepsilon_\mu$. Realizando os produtos do termos em colchetes, achamos 8 termos, i.e.,

$$\begin{aligned}
(a + b)(c + d)(e + f) &= (ac + bc + ad + bd)(e + f) \\
&= ace + bce + ade + bde + acf + bcf + adf + bdf
\end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned}
a &= d_{\hat{s}}(\bar{p}) \bar{v}_{\hat{s}}(p) e^{-ip \cdot x}, \\
b &= b_{\hat{s}}^\dagger(\bar{p}) \bar{u}_{\hat{s}}(p) e^{ip \cdot x}, \\
c &= a^{\lambda'}(\bar{l}) \not{x}^{\lambda'}_\mu(l) e^{-il \cdot x}, \\
d &= a^{\lambda'\dagger}(\bar{l}) \not{x}^{*\lambda'}_\mu(l) e^{il \cdot x}, \\
e &= b_{\hat{s}'}(\bar{p}') u_{\hat{s}'}(p') e^{-ip' \cdot x} \\
f &= d_{\hat{s}'}^\dagger(\bar{p}') v_{\hat{s}'}(p') e^{ip' \cdot x}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | b_s(\bar{k}) d_{s'}(\bar{k}') \times \left[e^{-ip \cdot x} d_{\hat{s}}(\bar{p}) \bar{v}_{\hat{s}}(p) + e^{ip \cdot x} b_{\hat{s}}^\dagger(\bar{p}) \bar{u}_{\hat{s}}(p) \right] \\
& \quad \times \left[e^{-il \cdot x} a^{\lambda'}(\bar{l}) \not{x}_{\mu}^{\lambda'}(l) + e^{il \cdot x} a^{\lambda'\dagger}(\bar{l}) \not{x}_{\mu}^{*\lambda'}(l) \right] \\
& \quad \times \left[e^{-ip' \cdot x} b_{s'}(\bar{p}') u_{s'}(p') + e^{ip' \cdot x} d_{s'}^\dagger(\bar{p}') v_{s'}(p') \right] a^{\lambda\dagger}(\bar{q}) |0\rangle = \\
& = \langle 0 | b_s(\bar{k}) d_{s'}(\bar{k}') \left[d_{\hat{s}}(\bar{p}) \bar{v}_{\hat{s}}(p) a^{\lambda'}(\bar{l}) \not{x}_{\mu}^{\lambda'}(l) b_{s'}(\bar{p}') u_{s'}(p') e^{i(-p-l-p') \cdot x} \right. \\
& \quad + b_{\hat{s}}^\dagger(\bar{p}) \bar{u}_{\hat{s}}(p) a^{\lambda'}(\bar{l}) \not{x}_{\mu}^{\lambda'}(l) b_{s'}(\bar{p}') u_{s'}(p') e^{i(p-l-p') \cdot x} \\
& \quad + d_{\hat{s}}(\bar{p}) \bar{v}_{\hat{s}}(p) a^{\lambda'\dagger}(\bar{l}) \not{x}_{\mu}^{*\lambda'}(l) b_{s'}(\bar{p}') u_{s'}(p') e^{i(-p+l-p') \cdot x} \\
& \quad + b_{\hat{s}}^\dagger(\bar{p}) \bar{u}_{\hat{s}}(p) a^{\lambda'\dagger}(\bar{l}) \not{x}_{\mu}^{*\lambda'}(l) b_{s'}(\bar{p}') u_{s'}(p') e^{i(p+l-p') \cdot x} \\
& \quad + d_{\hat{s}}(\bar{p}) \bar{v}_{\hat{s}}(p) a^{\lambda'}(\bar{l}) \not{x}_{\mu}^{\lambda'}(l) d_{s'}^\dagger(\bar{p}') v_{s'}(p') e^{i(-p-l+p') \cdot x} \\
& \quad + b_{\hat{s}}^\dagger(\bar{p}) \bar{u}_{\hat{s}}(p) a^{\lambda'}(\bar{l}) \not{x}_{\mu}^{\lambda'}(l) d_{s'}^\dagger(\bar{p}') v_{s'}(p') e^{i(p-l+p') \cdot x} \\
& \quad + d_{\hat{s}}(\bar{p}) \bar{v}_{\hat{s}}(p) a^{\lambda'\dagger}(\bar{l}) \not{x}_{\mu}^{*\lambda'}(l) d_{s'}^\dagger(\bar{p}') v_{s'}(p') e^{i(-p+l+p') \cdot x} \\
& \quad \left. + b_{\hat{s}}^\dagger(\bar{p}) \bar{u}_{\hat{s}}(p) a^{\lambda'\dagger}(\bar{l}) \not{x}_{\mu}^{*\lambda'}(l) d_{s'}^\dagger(\bar{p}') v_{s'}(p') e^{i(p+l+p') \cdot x} \right] a^{\lambda\dagger}(\bar{q}) |0\rangle. \tag{C.4}
\end{aligned}$$

Vamos prosseguir aplicando $\langle 0 | b_s(\bar{k}) d_{s'}(\bar{k}')$ pela esquerda e $a^{\lambda\dagger}(\bar{q}) |0\rangle$ pela direita em cada termo da expressão acima. Analisando termo a termo utilizando as regras de comutação e anti-comutação dos operadores de criação e aniquilação, de maneira que o operador de aniquilação seja movido para à direita ou o operador de criação seja movido para à esquerda com a finalidade de usarmos o fato de que o operador de aniquilação destrói o vácuo, i.e., $b_p |0\rangle = 0$ e $\langle 0 | b_p^\dagger = 0$. Sendo assim, a equação (C.4) torna-se:

$$\begin{aligned}
{}_0 \langle q_s(\bar{k}) \bar{q}_{s'}(\bar{k}') | P_{\text{int}}^- | \gamma^* \rangle_0 &= -ee_i \sum_{\hat{s}, \hat{s}', \lambda'} \int d^3 \bar{x} d^3 \bar{p} d^3 \bar{l} d^3 \bar{p}' \\
& \quad \times \left[\delta^{(3)}(\bar{k} - \bar{p}) \delta_{\hat{s}\hat{s}} \delta^{(3)}(\bar{k}' - \bar{p}') \delta_{s's'} \delta^{(3)}(\bar{l} - \bar{q}) \delta_{\lambda'\lambda} \right. \\
& \quad \left. \times \bar{u}_{\hat{s}}(p) \not{x}_{\mu}^{\lambda'}(l) v_{s'}(p') e^{i(p-l+p') \cdot x} \right]
\end{aligned}$$

Reorganizando os termos,

$$\begin{aligned}
{}_0 \langle q_s(\bar{k}) \bar{q}_{s'}(\bar{k}') | P_{\text{int}}^- | \gamma^* \rangle_0 &= -ee_i \sum_{\hat{s}, \hat{s}', \lambda'} \int d^3 \bar{x} e^{i(p-l+p') \cdot x} \\
& \quad \times \int d^3 \bar{p} d^3 \bar{l} d^3 \bar{p}' \bar{u}_{\hat{s}}(p) \not{x}_{\mu}^{\lambda'}(l) v_{s'}(p') \delta_{\hat{s}\hat{s}} \delta_{s's'} \delta_{\lambda'\lambda} \\
& \quad \times \delta^{(3)}(\bar{k} - \bar{p}) \delta^{(3)}(\bar{k}' - \bar{p}') \delta^{(3)}(\bar{l} - \bar{q}).
\end{aligned}$$

A integral $d^3\bar{x}(x^+ = 0)$, é igual a

$$\int d^3\bar{x} e^{i(p-l+p') \cdot x} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\bar{p} + \bar{p}' - \bar{l}).$$

Além disso, as funções $\delta_{s\hat{s}}$, $\delta_{s'\hat{s}'}$ e $\delta_{\lambda'\lambda}$ eliminam as somas $\sum_{\hat{s}, \hat{s}', \lambda}$. Logo,

$$\begin{aligned} {}_0 \langle q_s(\bar{k}) \bar{q}_{s'}(\bar{k}') | P_{\text{int}}^- | \gamma^* \rangle_0 &= -ee_i (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\bar{p} + \bar{p}' - \bar{l}) \int \frac{d^3\bar{p}}{\sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{2p^+}} \\ &\times \int \frac{d^3\bar{l}}{\sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{2l^+}} \int \frac{d^3\bar{p}'}{\sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{2p'^+}} \bar{u}_s(p) \not{\epsilon}_\mu^\lambda(l) v_{s'}(p') \\ &\times \delta^{(3)}(\bar{k} - \bar{p}) \delta^{(3)}(\bar{k}' - \bar{p}') \delta^{(3)}(\bar{l} - \bar{q}). \end{aligned}$$

As funções delta resolvem as integrais sobre o momentum e assim,

$$\begin{aligned} {}_0 \langle q_s(\bar{k}) \bar{q}_{s'}(\bar{k}') | P_{\text{int}}^- | \gamma^* \rangle_0 &= -ee_i \left(\frac{\bar{u}_s(k)}{\sqrt{(2\pi)^3 2k^+}} \right) \left(\frac{\not{\epsilon}^\lambda(q)}{\sqrt{(2\pi)^3 2q^+}} \right) \\ &\times \left(\frac{v_{s'}(k')}{\sqrt{(2\pi)^3 2k'^+}} \right) (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\bar{p} + \bar{p}' - \bar{l}), \end{aligned}$$

retornando a equação acima para a equação (C.3),

$$\psi_{ss'}(\bar{k}) = ee_i \left(\frac{\bar{u}_s(k)}{\sqrt{(2\pi)^3 2k^+}} \right) \left(\frac{\not{\epsilon}^\lambda(q)}{\sqrt{(2\pi)^3 2q^+}} \right) \left(\frac{v_{s'}(k')}{\sqrt{(2\pi)^3 2k'^+}} \right) \frac{(2\pi)^3}{q^- - k^- - k'^-},$$

que é a função de onda do fóton virtual. Ainda precisamos calcular alguns termos desta função.

Portanto, sabendo que

$$q = (q^+, q^-, q^\perp),$$

temos que a partir do que foi trabalhado na seção sobre as coordenadas no cone de luz:

$$q^2 = q \cdot q = q^+ q^- + q^- q^+ - q_\perp^2.$$

Como $q_{\perp}^2 = 0$, teremos

$$q^2 = 2q^+q^-.$$

Lembrando que $Q^2 = -q^2$, encontramos

$$q^- = -\frac{Q^2}{2q^+}.$$

Similarmente, sabendo que

$$k = (k^+, k^-, k_{\perp}^2),$$

a partir do que já é sabido, temos

$$k^2 = k \cdot k = 2k^+k^- - k_{\perp}^2,$$

lembrando que $m_i^2 = k^2$,

$$k^- = \frac{m_i^2 + k_{\perp}^2}{2zq^+}$$

em que m é a massa do quark e z é a fração de momentum carregada pelo quark ($k^+ = zq^+$).

Igualmente, para k'^-

$$k'^- = \frac{m_i^2 + k_{\perp}^2}{2(1-z)q^+},$$

em que $(/1-z)$ é a fração de momentum carregada pelo antiquark.

Assim, pelas expressões para q^- , k^- e k'^- , encontramos

$$\begin{aligned} q^- - k^- - k'^- &= -\frac{Q^2}{2q^+} - \frac{(m_i^2 + k_{\perp}^2)}{2zq^+} - \frac{(m_i^2 + k_{\perp}^2)}{2(1-z)q^+} \\ q^- - k^- - k'^- &= -\frac{Q^2(1-z)z + m_i^2 + k_{\perp}^2}{2q^+z(1-z)}. \end{aligned}$$

Apesar do nosso último resultado apresentado acima, ainda nos falta obtermos o termo

$$\bar{u}_s(k)\not{\epsilon}^{\lambda}(q)v_{s'}(k').$$

Para tal, precisamos especificar o vetor de polarização ε . Primeiramente, considerando um fóton virtual que possui somente polarização longitudinal, podemos escrever em um gauge covariante¹ [22],

$$\varepsilon_L(q) = \left(\frac{q^+}{Q}, \frac{Q^2}{2q^+}, 0_\perp \right),$$

note que a componente transversal é zero.

Podemos realizar uma transformação de gauge para o gauge do cone de luz, $A^+ = 0$, no qual $\varepsilon^+ = 0$. Então,

$$\begin{aligned} \varepsilon_L^\mu(q) \rightarrow \varepsilon_L^\mu(q) - \frac{q^\mu}{Q} &= \left(0, \frac{Q}{2q^+} - \frac{q^-}{Q}, 0_\perp \right) \\ &= \left(0, \frac{Q^2 - 2q^+q^-}{2Qq^+}, 0_\perp \right), \end{aligned}$$

como $-Q^2 = 2q^+q^-$, encontramos

$$\varepsilon_L^\mu(q) \rightarrow \varepsilon_L^\mu(q) - \frac{q^\mu}{Q} = \left(0, \frac{Q}{q^+}, 0_\perp \right).$$

Já que somente a componente ε^- é não nula, a operação $\not{\varepsilon} = \gamma_\mu \varepsilon^\mu$ torna-se simplesmente em $\not{\varepsilon} = \gamma_- \varepsilon^- = \gamma^+ \varepsilon^-$, consequentemente podemos escrever

$$\begin{aligned} \bar{u}_s(k) \not{\varepsilon}^\lambda(q) v_{s'}(k') &= \bar{u}_s(k) \gamma^+ \varepsilon^-(q) v_{s'}(k') \\ &= \bar{u}_s(k) \gamma^+ \frac{Q}{q^+}(q) v_{s'}(k') \\ &= \frac{Q}{q^+} \bar{u}_s(k) \gamma^+ v_{s'}(k'), \end{aligned}$$

sabendo que $\bar{u}_s(k) = u_s^\dagger(k) \gamma^0$, teremos

$$\bar{u}_s(k) \not{\varepsilon}^\lambda(q) v_{s'}(k') = \left(\frac{Q}{q^+} \right) u_s^\dagger(k) \gamma^0 \gamma^+ v_{s'}(k'). \quad (\text{C.5})$$

Agora, nos resta encontrar $u_s^\dagger(k) \gamma^0 \gamma^+ v_{s'}(k')$. Para isso, usaremos as formas explícitas das

¹Onde o vetor de polarização é invariante para transformações de Lorentz.

matrizes gama e dos espinores de Dirac na convenção KS (*Kogut-Soper*) [68,69], dados em [69]. Os espinores são:

$$u(k, \uparrow) = \frac{1}{\sqrt[4]{2}\sqrt{k^+}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}k^+ \\ k_1 + ik_2 \\ m \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad u(k, \downarrow) = \frac{1}{\sqrt[4]{2}\sqrt{k^+}} \begin{pmatrix} 0 \\ m \\ -k_1 + ik_2 \\ \sqrt{2}k^+ \end{pmatrix}$$

$$v(k, \uparrow) = \frac{1}{\sqrt[4]{2}\sqrt{k^+}} \begin{pmatrix} 0 \\ -m \\ -k_1 + ik_2 \\ \sqrt{2}k^+ \end{pmatrix} ; \quad v(k, \downarrow) = \frac{1}{\sqrt[4]{2}\sqrt{k^+}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}k^+ \\ k_1 + ik_2 \\ -m \\ 0 \end{pmatrix}.$$

As matrizes gama são dadas por

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix},$$

em que σ^i , para $i = 1,2,3$, são as matrizes de spin de Pauli, a matriz γ^+ é definida como:

$$\gamma^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^0 + \gamma^3).$$

A partir das matrizes gama dadas a pouco, teremos que

$$\gamma^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\gamma^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daí, o produto $\gamma^0\gamma^+$ presente na equação (C.5) é

$$\gamma^0\gamma^+ = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^0\gamma^+ = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Retornando para a equação (C.5) nos deparamos com

$$u_{\uparrow}^{\dagger}(k)\gamma^0\gamma^+v_{\downarrow}(k') = \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{k^+}} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{k'^+}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}k^+ & k_1 - ik_2 & m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}k'^+ \\ k'_1 + ik'_2 \\ -m \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k^+\sqrt{k'^+}}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}k^+ & k_1 - ik_2 & m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}k'^+ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k^+\sqrt{k'^+}}} \sqrt{2}k^+ \sqrt{2}k'^+ = \sqrt{2}\sqrt{k^+}\sqrt{2}\sqrt{k'^+},$$

para o caso onde $s = \uparrow$ e $s' = \downarrow$. Resta analisarmos os outros 3 casos, são eles:

Para $s = \uparrow$, $s' = \uparrow$,

$$u_{\uparrow}^{\dagger}(k)\gamma^0\gamma^+v_{\uparrow}(k') = \frac{1}{\sqrt{k^+\sqrt{k'^+}}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}k^+ & k_1 - ik_2 & m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -m \\ -k_1 + ik_2 \\ \sqrt{2}k^+ \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k^+\sqrt{k'^+}}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}k^+ & k_1 - ik_2 & m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2}k^+ \end{pmatrix} = 0.$$

Para $s = \downarrow$, $s' = \downarrow$,

$$\begin{aligned}
u_{\downarrow}^{\dagger}(k)\gamma^0\gamma^+v_{\downarrow}(k') &= \frac{1}{\sqrt{k^+\sqrt{k'^+}}}\begin{pmatrix} 0 & m & -k_1 - ik_2 & \sqrt{2}k^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}k'^+ \\ k'_1 + ik'_2 \\ -m \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{k^+\sqrt{k'^+}}}\begin{pmatrix} 0 & m & -k_1 - ik_2 & \sqrt{2}k^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}k'^+ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.
\end{aligned}$$

Para $s = \downarrow$, $s' = \uparrow$,

$$\begin{aligned}
u_{\downarrow}^{\dagger}(k)\gamma^0\gamma^+v_{\uparrow}(k') &= \frac{1}{\sqrt{k^+\sqrt{k'^+}}}\begin{pmatrix} 0 & m & -k_1 - ik_2 & \sqrt{2}k^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -m \\ -k_1 + ik_2 \\ \sqrt{2}k^+ \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{k^+\sqrt{k'^+}}}\begin{pmatrix} 0 & m & -k_1 - ik_2 & \sqrt{2}k^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2}k^+ \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{k^+\sqrt{k'^+}}}\sqrt{2}k^+\sqrt{2}k'^+ = \sqrt{2}\sqrt{k^+}\sqrt{2}\sqrt{k'^+}.
\end{aligned}$$

Ao analisamos os resultados dos 4 casos, vemos que podemos sintetizá-los da seguinte forma:

$$u_s^{\dagger}(k)\gamma^0\gamma^+v_{s'}(k') = \sqrt{2}\sqrt{k^+}\sqrt{2}\sqrt{k'^+}\delta_{s,-s'}.$$

Consequentemente, a função de onda do fóton virtual, levando em consideração somente a polarização longitudinal, será

$$\begin{aligned}
\psi_{ss'}^L(k) &= e_i e \frac{\sqrt{2k^+ 2k'^+} \delta_{s,-s'}}{\sqrt{(2\pi)^3 2k^+ (2\pi)^3 2q^+ (2\pi)^3 2k'^+}} \left(\frac{Q}{q^+}\right) \left[-\frac{2q^+ z(1-z)}{Q^2 z(1-z) + m^2 + k_\perp^2} \right] (2\pi)^3 \\
&= -e_i e \left[\frac{\sqrt{q^+} z(1-z)}{Q^2 z(1-z) + m^2 + k_\perp^2} \right] \frac{Q}{q^+} \frac{\delta_{s,-s'}}{2\pi\sqrt{2\pi}},
\end{aligned}$$

definindo $\epsilon^2 = Q^2 z(1-z) + m_i^2$, onde i é o sabor do quark. Ficamos com

$$\psi_{ss'}^L(k) = -e_i e \left[\frac{\sqrt{q^+} z(1-z)}{\epsilon^2 + k_\perp^2} \right] \frac{Q}{q^+} \frac{\delta_{s,-s'}}{2\pi\sqrt{2\pi}}.$$

A função de onda acima foi construída sob o espaço de momentum. Para levar nossa análise para o espaço de coordenadas, vamos definir uma nova função $\psi_{s,s'}^L(z, k_\perp)$ que necessita satisfazer a seguinte condição de normalização:

$$\int dk^+ |\psi_{s,s'}^L(k_\perp)|^2 = \int dz |\psi_{s,s'}^L(z, k_\perp)|^2.$$

Como $k^+ = zq^+$,

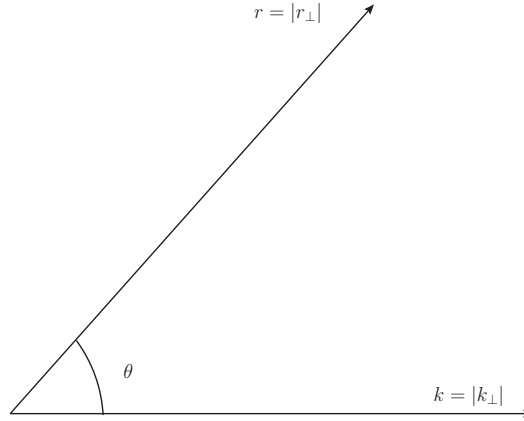
$$\begin{aligned}
\int dk^+ |\psi_{s,s'}^L(k)|^2 &= \int dz |\psi_{s,s'}^L(z, k_\perp)|^2 \\
q^+ \int dz |\psi_{s,s'}^L(k)|^2 &= \int dz |\psi_{s,s'}^L(z, k_\perp)|^2 \\
\psi_{s,s'}^L(z, k_\perp) &= \sqrt{q^+} \psi_{s,s'}^L(k).
\end{aligned}$$

Assim, o resultado pode ser levado para o espaço de coordenadas via transformada de Fourier nas coordenadas transversais:

$$\begin{aligned}
\psi_{s,s'}^L(z, r_\perp) &= \int \frac{d^2 k_\perp}{2\pi} e^{ik_\perp \cdot r_\perp} \psi_{s,s'}^L(z, k_\perp) \\
&= \int \frac{d^2 k_\perp}{2\pi} e^{ik_\perp \cdot r_\perp} \sqrt{q^+} \left\{ -e_i e \left[\frac{\sqrt{q^+} z(1-z)}{\epsilon^2 + k_\perp^2} \right] \left(\frac{Q}{q^+}\right) \frac{\delta_{s,-s'}}{2\pi\sqrt{\pi}} \right\} \\
&= -\frac{e_i e}{2\pi\sqrt{\pi}} Q z(1-z) \delta_{s,-s'} \int \frac{d^2 k_\perp}{2\pi} e^{ik_\perp \cdot r_\perp} \left[\frac{1}{\epsilon^2 + k_\perp^2} \right] \\
&= -\frac{e_i e}{(2\pi)^2 \sqrt{\pi}} Q z(1-z) \delta_{s,-s'} \int \frac{d^2 k_\perp}{\epsilon^2 + k_\perp^2} e^{ik_\perp \cdot r_\perp}
\end{aligned}$$

sendo a relação angular entre r e k dada do modo apresentado na Fig. C.2 podemos

Figura C.2 - Relação angular entre r e k .



realizar a transformação da integral para coordenadas esféricas, i.e.,

$$\int \frac{d^2 k_{\perp}}{\epsilon^2 + k_{\perp}^2} e^{i k_{\perp} \cdot r_{\perp}} = \int_0^{\infty} dk \int_0^{2\pi} d\theta k \frac{e^{i k r \cos \theta}}{k^2 + \epsilon^2}$$

para θ sendo o ângulo entre r_{\perp} e k_{\perp} , $k = |k_{\perp}|$ e $r = |r_{\perp}|$.

Ao analisarmos a integral acima, vemos que a mesma assemelha-se a função de Bessel J_0 ,

$$\int_0^{2\pi} d\theta e^{i k r \cos \theta} = 2\pi J_0(kr),$$

assim

$$\int \frac{d^2 k_{\perp}}{\epsilon^2 + k_{\perp}^2} e^{i k_{\perp} \cdot r_{\perp}} = 2\pi \int_0^{\infty} dk J_0(kr) \frac{k}{k^2 + \epsilon^2}.$$

A integral acima tem o seguinte resultado:

$$\int \frac{d^2 k_{\perp}}{\epsilon^2 + k_{\perp}^2} e^{i k_{\perp} \cdot r_{\perp}} = 2\pi K_0(\epsilon r_{\perp})$$

em que K_0 é a função de Bessel de segunda ordem modificada [67].

Logo, voltando para a função de onda, teremos

$$\psi_{ss'}^L(z, r_\perp) = -\frac{e_i e}{(2\pi)\sqrt{\pi}} Qz(1-z)K_0(\epsilon r_\perp)\delta_{s,-s'}.$$

O resultado final para a função de onda do fóton virtual com polarização longitudinal, somada sobre os spins e sobre as cores dos quarks é

$$\begin{aligned} \sum_{s,s',\text{cor}} |\psi_L(z, r_\perp)|^2 &= \sum_{s,s',\text{cor}} \left| -\frac{e_i e}{(2\pi)^2\sqrt{\pi}} Qz(1-z)K_0^2(\epsilon r_\perp)\delta_{s,-s'} \right|^2 \\ &= \sum_{s,s',\text{cor}} \frac{e_i^2 e^2}{(2\pi)^2\pi} Q^2 z^2 (1-z)^2 K_0^2(\epsilon r_\perp)\delta_{s,-s'} \\ &= \sum_{s,s',\text{cor}} \frac{e^2}{4\pi} \frac{e_i^2}{\pi^2} Q^2 z^2 (1-z)^2 K_0^2(\epsilon r_\perp)\delta_{s,-s'} \\ &= \sum_{s,s',\text{cor}} e_i^2 \frac{N_c \alpha_{em}}{\pi^2} Q^2 z^2 (1-z)^2 K_0^2(\epsilon r_\perp)\delta_{s,-s'} \\ &= e_i^2 \frac{2N_c \alpha_{em}}{\pi^2} Q^2 z^2 (1-z)^2 K_0^2(\epsilon r_\perp) \end{aligned}$$

onde N_c é o número de cores de quarks.

A função de onda para um fóton virtual que possui polarização transversal, a função de probabilidade pode ser calculada de maneira similar, a diferença está no vetor de polarização que, no gauge do cone de luz, é dado por

$$\varepsilon_\perp^\lambda(q) = \left(0, \frac{q_\perp \cdot \varepsilon_\perp^\lambda}{q^+}, \varepsilon_\perp^\lambda \right),$$

em que $\varepsilon_\perp^\lambda$ ($\lambda = \pm 1$) são os vetores de polarização transversal. As expressões explícitas são $\varepsilon_\perp^1 = (1, i)/\sqrt{2}$ e $\varepsilon_\perp^{-1} = (1, -i)/\sqrt{2}$ [70]. Note que no nosso caso, o fóton virtual não possui momentum transversal, e assim $q_\perp = 0$ e $k_\perp = -k'_\perp$.

Para calcular a função de onda precisamos determinar o elemento de matriz $\bar{u}_s(k)\varepsilon_\perp^\lambda(q) \cdot \gamma_\perp v_{s'}(k')$. Isso pode ser feito usando as expressões para os espinores e para as matrizes gama de forma explicita, conforme dadas anteriormente. Se $s = s'$, no caso $s = 1$ e $s' = 1$,

$$\begin{aligned}
\bar{u}_1(k)\varepsilon_\perp^\lambda(q) \cdot \gamma_\perp v_1(k') &= \bar{u}_1(k)[\varepsilon_1^\lambda \gamma_1 + \varepsilon_2^\lambda \gamma_2]v_1(k') \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{k^+}\sqrt{k'^+}} [-(1+\lambda)mk^+ - (\lambda+1)mk'^+] \\
&= \frac{(1+\lambda)m}{\sqrt{2}\sqrt{k^+}\sqrt{k'^+}} (k^+ + k'^+),
\end{aligned}$$

como $k^+ = zq^+$ e $k'^+ = (1-z)q^+$, temos

$$\begin{aligned}
\bar{u}_1(k)\varepsilon_\perp^\lambda(q) \cdot \gamma_\perp v_1(k') &= -\frac{(1-\lambda)mq^+}{\sqrt{2}q^+\sqrt{z(1-z)}}(z+1-z) \\
&= -\frac{(\lambda+1)m}{\sqrt{2}\sqrt{z(1-z)}}.
\end{aligned} \tag{C.6}$$

Para o caso onde $s = -1$ e $s' = -1$,

$$\begin{aligned}
\bar{u}_{-1}(k)\varepsilon_{\perp}^{\lambda}(q) \cdot \gamma_{\perp} v_{-1}(k') &= \frac{1}{\sqrt{2}q^+ \sqrt{z(1-z)}} \begin{pmatrix} 0 & m & -k_1 - ik_2 & \sqrt{2}k^+ \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} 0 & \frac{1+\lambda}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1-\lambda}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1+\lambda}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{\lambda-1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}k'^+ \\ k'_1 + ik'_2 \\ -m \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}q^+ \sqrt{z(1-z)}} \begin{pmatrix} 0 & m & -k_1 - ik_2 & \sqrt{2}k^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\lambda}{\sqrt{2}}(k'_1 + ik'_2) \\ (1-\lambda)k'^+ \\ 0 \\ -\frac{\lambda-1}{\sqrt{2}}m \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}q^+ \sqrt{z(1-z)}} [(1-\lambda)k'^+m - (\lambda-1)k^+m] \\
&= \frac{m}{\sqrt{2}q^+ \sqrt{z(1-z)}} [k'^+ - \lambda k'^+ - \lambda k^+ + k^+] \\
&= \frac{mq^+}{\sqrt{2}q^+ \sqrt{z(1-z)}} [1 - z - \lambda + \lambda z - \lambda z + z] \\
&= -\frac{m(\lambda-1)}{\sqrt{2}\sqrt{z(1-z)}}.
\end{aligned} \tag{C.8}$$

Juntando as expressões para $s = s' = 1$ e $s = s' = -1$, (C.6) e (C.8), ficamos com

$$\bar{u}_{-1}(k)\varepsilon_{\perp}^{\lambda}(q) \cdot \gamma_{\perp} v_{-1}(k') = -\frac{(\lambda+s)}{\sqrt{2}} \frac{m}{\sqrt{z(1-z)}} \delta_{s,s'}. \tag{C.9}$$

Observe que agora o elemento de matriz tem uma dependência da massa dos quarks.

Similarmente, se $s = -s'$, mais especificamente $s = 1$, $s' = -1$, $\lambda = 1$, obtemos

$$\gamma^0(\varepsilon_{\perp}^1 \cdot \gamma_{\perp}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

logo, usando $k^+ = zq^+$ e $k'^+ = (1-z)q^+$,

$$\begin{aligned} \bar{u}_1(k)\gamma^0(\varepsilon_{\perp}^1 \cdot \gamma_{\perp})v_{-1}(k') &= \frac{1}{\sqrt{2}q^+ \sqrt{z(1-z)}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}k^+ & k_1 - ik_2 & m & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}k'^+ \\ k'_1 + ik'_2 \\ -m \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}q^+ \sqrt{z(1-z)}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}k^+ & k_1 - ik_2 & m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}}(k'_1 + ik'_2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}q^+ \sqrt{z(1-z)}} [2k^+(k'_1 + ik'_2)] \end{aligned}$$

como $k'_1 + ik'_2 = (\varepsilon_{\perp}^1 \cdot k'_{\perp})\sqrt{2}$ e $k_{\perp} = -k'_{\perp}$,

$$\bar{u}_1(k)\gamma^0(\varepsilon_{\perp}^1 \cdot \gamma_{\perp})v_{-1}(k') = \frac{-2z}{\sqrt{z(1-z)}} \varepsilon_{\perp}^1 \cdot k_{\perp}. \quad (\text{C.10})$$

Agora, para $s = -1$, $s' = 1$, $\lambda = 1$,

$$\bar{u}_{-1}(k)\gamma^0(\varepsilon_{\perp}^1 \cdot \gamma_{\perp})v_1(k') = \frac{1}{\sqrt{2}q^+ \sqrt{z(1-z)}} \begin{pmatrix} 0 & m & -k_1 - ik_2 & \sqrt{2}k^+ \end{pmatrix} \quad (\text{C.11})$$

$$\begin{aligned} & \times \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -m \\ -k'_1 + ik'_2 \\ \sqrt{2}k'^+ \end{pmatrix} \\ & = \frac{1}{\sqrt{2}q^+ \sqrt{z(1-z)}} \begin{pmatrix} 0 & m & -k_1 - ik_2 & \sqrt{2}k^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{2}}m \\ 0 \\ -2k'^+ \\ 0 \end{pmatrix} \\ & = \frac{1}{\sqrt{2}q^+ \sqrt{z(1-z)}} [2k'^+(k_1 + ik_2)] \\ & = \frac{2(1-z)}{\sqrt{z(1-z)}} \varepsilon_{\perp}^1 \cdot k_{\perp}, \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

para $k_1 + ik_2 = (\varepsilon_{\perp}^1 \cdot k_{\perp})\sqrt{2}$ e $k'^+ = (1-z)q^+$.

Anexando os dois casos para $\lambda = 1$, (C.10) e (C.12), temos que

$$\bar{u}_s(k)\gamma^0(\varepsilon_{\perp}^1 \cdot \gamma_{\perp})v_{s'}(k') = -\frac{2}{\sqrt{z(1-z)}} (z\delta_{s,1}\delta_{s',-1} - (1-z)\delta_{s,-1}\delta_{s',1})\varepsilon_{\perp}^1 \cdot k_{\perp}. \quad (\text{C.13})$$

De forma análogo, calculemos para $\lambda = -1$, logo

$$\gamma^0(\varepsilon_{\perp}^{-1} \cdot \gamma_{\perp}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

para $s = 1$ e $s' = -1$,

$$\bar{u}_1(k)\gamma^0(\varepsilon_\perp^{-1} \cdot \gamma_\perp)v_{-1}(k') = \frac{1}{\sqrt{2}q^+\sqrt{z(1-z)}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}k^+ & k_1 - ik_2 & m & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.14})$$

$$\begin{aligned} & \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}k'^+ \\ k'_1 + ik'_2 \\ -m \\ 0 \end{pmatrix} \\ & = \frac{1}{\sqrt{2}q^+\sqrt{z(1-z)}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}k^+ & k_1 - ik_2 & m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2k'^+ \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2}}m \end{pmatrix} \\ & = \frac{1}{\sqrt{2}q^+\sqrt{z(1-z)}} [2k'^+(k_1 - ik_2)] \\ & = \frac{2(1-z)}{\sqrt{z(1-z)}} \varepsilon_\perp^{-1} \cdot k_\perp, \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

para $k'^+ = (1-z)q^+$ e $k_1 - ik_2 = (\varepsilon_\perp^{-1} \cdot k_\perp)\sqrt{2}$.

Já para $s = -1$ e $s' = 1$,

$$\bar{u}_1(k)\gamma^0(\varepsilon_\perp^{-1} \cdot \gamma_\perp)v_{-1}(k') = \frac{1}{\sqrt{2}q^+\sqrt{z(1-z)}} \begin{pmatrix} 0 & m & -k_1 - ik_2 & \sqrt{2}k^+ \end{pmatrix} \quad (\text{C.16})$$

$$\begin{aligned} & \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -m \\ -k'_1 + ik'_2 \\ \sqrt{2}k'^+ \end{pmatrix} \\ & = \frac{1}{\sqrt{2}q^+\sqrt{z(1-z)}} \begin{pmatrix} 0 & m & -k_1 - ik_2 & \sqrt{2}k^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2}}(k'_1 - ik'_2) \end{pmatrix} \\ & = \frac{1}{\sqrt{2}q^+\sqrt{z(1-z)}} [2k^+(k'_1 - ik'_2)] \\ & = \frac{-2z}{\sqrt{z(1-z)}} \varepsilon_\perp^{-1} \cdot k_\perp, \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

aglutinando (C.15) e (C.17), temos que

$$\bar{u}_s(k)\gamma^0(\varepsilon_\perp^{-1} \cdot \gamma_\perp)v_{s'}(k') = -\frac{2}{\sqrt{z(1-z)}} [z\delta_{s,-1}\delta_{s',1} - (1-z)\delta_{s,1}\delta_{s',-1}] \varepsilon_\perp^{-1} \cdot k_\perp \quad (\text{C.18})$$

Podemos juntar os elementos de matriz apresentados nas equações (C.9), (C.13) e (C.18), como:

$$\bar{u}_s(k)\not{\varepsilon}_\perp^\lambda(q)v_{s'}(k') = -\frac{2}{\sqrt{z(1-z)}} \left\{ [z\delta_{s,\pm 1}\delta_{s',\mp 1} - (1-z)\delta_{s,\mp 1}\delta_{s',\pm 1}] \varepsilon_\perp^{\pm 1} \cdot k_\perp + \frac{m}{\sqrt{2}} \delta_{s,\pm 1}\delta_{s',\mp 1} \right\}.$$

Assim, retornando tal expressão para a função de onda do fóton virtual $\psi_{ss'}(\bar{k})$, a fim de obtermos a expressão da função de onda transversa. Sendo assim,

$$\begin{aligned}
\psi_{ss'}^T(k_\perp) &= e_i e \frac{\bar{u}_s(k) \not{\epsilon}_\perp^\lambda(q) v_{s'}(k')}{(2\pi)^3 \sqrt{(2\pi)^3 2k^+ 2k'^+ 2q^+} q^- - k^- - k'^-} \frac{(2\pi)^3}{(2\pi)^3} \\
&= \frac{e_i e}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2q^+ 2\sqrt{k^+ k'^+}} \sqrt{z(1-z)}} \frac{-2}{\sqrt{z(1-z)}} \\
&\quad \times \left\{ [z\delta_{s,\pm 1} \delta_{s',\mp 1} - (1-z)\delta_{s,\mp 1} \delta_{s',\pm 1}] \epsilon_\perp^{\pm 1} \cdot k_\perp + \frac{m}{\sqrt{2}} \delta_{s,\pm 1} \delta_{s',\mp 1} \right\} \\
&\quad \times \frac{-2q^+ z(1-z)}{Q^2(1-z)z + m^2 + k_\perp^2}
\end{aligned}$$

sendo $\epsilon^2 = Q^2 z(1-z) + m^2$,

$$\begin{aligned}
\psi_{ss'}^T(k_\perp) &= \frac{e_i e}{\sqrt{(2\pi)^3 \sqrt{2} \sqrt{q^+} 2q^+ \sqrt{z(1-z)} \sqrt{z(1-z)}}} \frac{2}{\sqrt{z(1-z)}} \\
&\quad \times \left\{ [z\delta_{s,\pm 1} \delta_{s',\mp 1} - (1-z)\delta_{s,\mp 1} \delta_{s',\pm 1}] \epsilon_\perp^{\pm 1} \cdot k_\perp + \frac{m}{\sqrt{2}} \delta_{s,\pm 1} \delta_{s',\mp 1} \right\} \\
&\quad \times \frac{2q^+ z(1-z)}{\epsilon^2 k_\perp^2} \\
\psi_{ss'}^T(k_\perp) &= \frac{e_i e}{\sqrt{(2\pi)^3 \sqrt{q^+}} \sqrt{2}} \frac{2}{\sqrt{2}} \\
&\quad \times \left\{ [z\delta_{s,\pm 1} \delta_{s',\mp 1} - (1-z)\delta_{s,\mp 1} \delta_{s',\pm 1}] \epsilon_\perp^{\pm 1} \cdot k_\perp + \frac{m}{\sqrt{2}} \delta_{s,\pm 1} \delta_{s',\mp 1} \right\} \\
&\quad \times \frac{1}{\epsilon^2 + k_\perp^2} \\
\psi_{ss'}^T(k_\perp) &= \frac{e_i e}{\sqrt{(2\pi)^3 \sqrt{q^+}} \epsilon^2 + k_\perp^2} \frac{1}{\epsilon^2 + k_\perp^2} \\
&\quad \times \left\{ \sqrt{2} [z\delta_{s,\pm 1} \delta_{s',\mp 1} - (1-z)\delta_{s,\mp 1} \delta_{s',\pm 1}] \epsilon_\perp^{\pm 1} \cdot k_\perp + \frac{m}{\sqrt{2}} \delta_{s,\pm 1} \delta_{s',\mp 1} \right\}.
\end{aligned}$$

Podemos levar o resultado para o espaço de coordenadas, da mesma forma que fazemos anteriormente com a polarização longitudinal:

$$\begin{aligned}\psi_{ss'}^T(z, r_\perp) &= \int \frac{d^2 k_\perp}{2\pi} e^{ik_\perp \cdot r_\perp} \psi_{ss'}^T(k_\perp) \\ \psi_{ss'}^T(z, r_\perp) &= \frac{e_i e}{\sqrt{(2\pi)^3}} \frac{i\sqrt{2}\varepsilon_\perp^{\pm 1} \cdot r_\perp}{|r|} K_1(\epsilon r) [z\delta_{s,\pm 1}\delta_{s',\mp 1} - (1-z)\delta_{s,\mp 1}\delta_{s',\pm 1}] \delta_{s,-s'} \\ &\quad + \frac{e_i e}{\sqrt{(2\pi)^3}} m K_0(\epsilon r) \delta_{s,\pm 1} \delta_{s',\pm 1},\end{aligned}$$

em que K_1 é a função de Bessel de segunda ordem modificada [67], e usamos o resultado $\psi_{ss'}^T(z, k_\perp) = \sqrt{q^\mp} \psi_{ss'}^T(k_\perp)$. O índice T indica que a função de onda do fóton virtual possui polarização transversal.

O quadrado da função de onda dos fótons virtuais que possuem polarização transversal é obtida como uma média das funções de onda ao quadrado para fótons com $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$.

O resultado é:

$$\sum_{s,s',\text{cor}} |\psi_{ss'}^T(z, r_\perp)|^2 = e_i^2 \frac{N_c \alpha_{\text{em}}}{2\pi^2} \{ [z^2 + (1-z)^2] \epsilon^2 k_1^2(\epsilon r) + m^2 k_0^2(\epsilon r) \}.$$

Estas funções podem ser encontradas na literatura [71]. Observamos também que a função de onda do fóton com polarização longitudinal vai para zero no limite $Q^2 \rightarrow 0$. Já para a função correspondente ao fóton com polarização transversal não observamos esse tipo de comportamento, o que já era esperado, pois o fóton real só pode ter uma polarização transversal.

D Emissão de glúons

Após termos calculado a função de onda do fóton virtual indo em um dipolo, neste apêndice iremos estudar a emissão de glúons a partir de quarks, o que é sabido a partir do capítulo anterior, tendo como objetivo calcular a amplitude para o processo apresentado na Fig. D.1, em que o quark com momentum inicial p , spin s e cor α emite um glúon com momentum k , cor c e polarização λ . O momentum, spin e cor do quark após a emissão são $p - k, \beta$ e s' respectivamente.

Estamos trabalhando no limite de altas energias, no qual p^+ é grande e o glúon emitido é suave ($x \ll 1$). Podemos calcular o vértice $q \rightarrow qg$ usando as regras de Feynman para a QCD no cone de luz. As quais podem ser encontradas, e.g., na referência [68]. As regras mais relevantes para o nosso caso são:

- I. Para um férmion incidente com momentum p , cor α e spin s , adiciona-se um fator

$$\frac{u_s(p)}{\sqrt{(2\pi)^3 2p^+}}.$$

- II. Para um férmion emergente com momentum $p - k$, cor β e spin s' , adiciona-se um fator

$$\frac{\bar{u}_{s'}(p - k)}{\sqrt{(2\pi)^3 2(p - k)^+}}.$$

- III. Para transformar as linhas que entram em linhas que saem, ou vice versa, basta realizar a troca $u \leftrightarrow v$, $\bar{u} \leftrightarrow -\bar{v}$ e $\varepsilon \leftrightarrow \varepsilon^*$.

- IV. Para o vértice quark-glúon com momentum k , cor c e polarização λ , adiciona-se um fator

$$\frac{g_s t_{\alpha\beta}^c \gamma_\mu \varepsilon_\lambda^\mu(k)}{\sqrt{(2\pi)^3 2k^+}},$$

em que $t_{\alpha\beta}^c$ é o gerador da representação fundamental do $SU(3)$.

- V. Multiplica-se toda a expressão pelo denominador da energia do cone de luz

$$\frac{(2\pi)^3}{(P_{\text{inicial}}^- - P_{\text{final}}^-)} = \frac{(2\pi)^3}{p^- - k^- - (p - k)^-}.$$

Diagramaticamente, temos que a partir das regras o diagrama de Feynman correspondente ao processo apresentado na Fig. D.1 é possível construirmos a amplitude de espalhamento do processo.

Figura D.1 - Quark com momentum p , spin s e cor α emite um glúon com momentum k , cor c e polarização λ . O momentum, spin e cor do quark após a emissão são $p - k$, β e s' respectivamente.

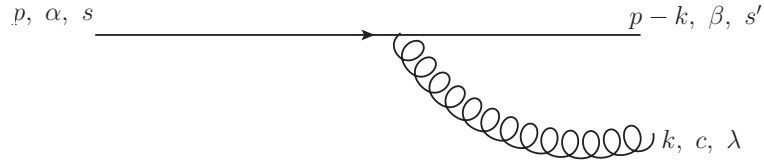
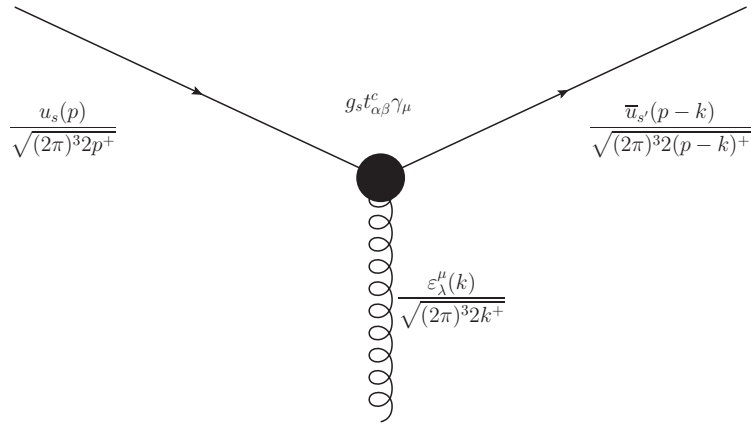


Figura D.2 - Diagrama de Feynman que representa a emissão de um glúon.



E, assim, de acordo com as regras a amplitude para a emissão de um glúon é dada por:

$$\Psi_{q \rightarrow qg}(k, z) = \frac{\bar{u}_{s'}(p-k)}{\sqrt{(2\pi)^3 2(p-k)^+}} \frac{g_s t_{\alpha\beta}^c \gamma_\mu \varepsilon_\lambda^\mu(k)}{\sqrt{(2\pi)^3 2k^+}} \frac{u_s(p)}{\sqrt{(2\pi)^3 2p^+}} \frac{(2\pi)^3}{p^- - k^- - (p-k)^-},$$

onde o pré-fator $\sqrt{p^+}$ é adicionado devido à mudança para a variável z , a fração do momentum longitudinal do quark carregado pelo glúon é $k^+ = zp^+$. A notação $(p-k)^-$ presente na expressão para a energia do cone de luz, corresponde ao componente negativo do momentum de uma partícula na camada de massa possuindo um tri-momentum $(\vec{p} - \vec{k})$. No limite de altas energias, no qual o glúon emitido é suave, temos que $z \ll 1$.

Como queremos que o glúon produzido seja físico, ou seja, que esteja na camada de massa, por isso este glúon só pode ter polarização transversa. O vetor polarização para o glúon é o mesmo que para o fóton na seção anterior, e no gauge $\varepsilon^+ = 0$, ele se torna

$$\varepsilon^\lambda(k) = \left(0, \frac{k_\perp \cdot \varepsilon_\perp^\lambda}{k^+}, \varepsilon_\perp^\lambda \right).$$

Como k^+ é pequeno, ε^- domina sobre ε_\perp , e assim, podemos fazer a aproximação

$$\gamma_\mu \varepsilon^\mu = \gamma_- \varepsilon^- = \gamma^+ \varepsilon^-.$$

Podemos calcular o elemento de matriz $\bar{u}_s(p-k) \not{\varepsilon}^\lambda(k) u_{s'}(p)$ usando explicitamente os espinores e as matrizes gama apresentadas anteriormente. Assim,

$$\begin{aligned} \bar{u}_s(p-k) \not{\varepsilon}^\lambda(k) u_{s'}(p) &= \bar{u}_s(p-k) \gamma^+ \varepsilon^- u_{s'}(p) \\ &= \bar{u}_s(p-k) \gamma^+ \left(\frac{k_\perp \cdot \varepsilon_\perp^\lambda}{k^+} \right) u_{s'}(p) \\ &= \left(\frac{k_\perp \cdot \varepsilon_\perp^\lambda}{k^+} \right) \bar{u}_s(p-k) \gamma^+ u_{s'}(p), \end{aligned}$$

já que $\bar{u}_s(p-k) = u_s^+(p-k) \gamma^0$, teremos

$$\bar{u}_s^+(p-k) \not{\varepsilon}^\lambda(k) u_{s'}(p) = \left(\frac{k_\perp \cdot \varepsilon_\perp^\lambda}{k^+} \right) u_s(p-k) \gamma^0 \gamma^+ u_{s'}(p). \quad (\text{D.1})$$

Para calcularmos $u_s(p-k) \gamma^0 \gamma^+ u_{s'}(p)$, devemos realizar o cálculo utilizando a forma explícita dos espinores e das matrizes gama para cada combinação de s e s' . Dessa forma, para $s = -1$ e $s = 1$:

$$\begin{aligned}
u_{-1}^+(p-k)\gamma^0\gamma^+u_1(p) &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{l^+}}\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{p^+}}\begin{pmatrix} 0 & m & -l_1-il_2 & \sqrt{2}l^+ \end{pmatrix} \\
&\quad \times \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}p^+ \\ p_1+ip_2 \\ m \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{l^+}\sqrt{p^+}}\begin{pmatrix} 0 & m & -l_1+il_2 & \sqrt{2}l^+ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}p^+ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= 0. \tag{D.2}
\end{aligned}$$

onde $l = p - k$.

Para $s = 1$ e $s' = -1$,

$$\begin{aligned}
u_1^+(p-k)\gamma^0\gamma^+u_{-1}(p) &= \frac{1}{\sqrt{l^+}\sqrt{p^+}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}l^+ & l_1-il_2 & m & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ m \\ -p_1+ip_2 \\ \sqrt{2}p^+ \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{l^+}\sqrt{p^+}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}l^+ & l_1-il_2 & m & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2}p^+ \end{pmatrix} = 0. \tag{D.3}
\end{aligned}$$

Para $s = -1$ e $s' = -1$,

$$\begin{aligned}
u_{-1}^+(p-k)\gamma^0\gamma^+u_1(p) &= \frac{1}{\sqrt{l^+}\sqrt{p^+}} \begin{pmatrix} 0 & m & -l_1 - il_2 & \sqrt{2}l^+ \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ m \\ -p_1 + ip_2 \\ \sqrt{2}p^+ \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{l^+}\sqrt{p^+}} \begin{pmatrix} 0 & m & -l_1 - il_2 & \sqrt{2}l^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2}p^+ \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{l^+p^+}} \sqrt{2}l^+ \sqrt{2}p^2 \\
&= \sqrt{2}\sqrt{(p^+ - k^+)}\sqrt{2}\sqrt{p^+}. \tag{D.4}
\end{aligned}$$

Para o último caso $s = 1$ e $s' = 1$,

$$\begin{aligned}
u_1^+(p-k)\gamma^0\gamma^+u_1(p) &= \frac{1}{\sqrt{l^+}\sqrt{p^+}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}l^+ & l_1 - il_2 & m & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ m \\ -p_1 + ip_2 \\ \sqrt{2}p^+ \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{l^+}\sqrt{p^+}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}l^+ & l_1 - il_2 & m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}p^+ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{l^+}\sqrt{p^+}} \sqrt{2}l^+ \sqrt{2}p^+ \\
&= \sqrt{2}\sqrt{(p^+ - k^+)}\sqrt{2}\sqrt{p^+}. \tag{D.5}
\end{aligned}$$

Então, ao analisarmos os quatro casos e seus devidos resultados: eq. (D.2), eq. (D.3), eq. (D.4) e eq. (D.5), encontramos

$$u_s^+(p-k)\gamma^0\gamma^+u_{s'}(p) = \sqrt{2(p^+ - k^+)2p^+}\delta_{s,s'},$$

retornando para a eq. (D.1),

$$\bar{u}_s(p-k)\not{\epsilon}^\lambda(k)u_{s'}(p) = \left(\frac{k_\perp \cdot \epsilon_\perp^\lambda}{k^+}\right) \sqrt{2(p^+ - k^+)2p^+} \delta_{s,s'}.$$

Além disso, precisamos calcular

$$p^- - k^- - (p-k)^-. \quad (\text{D.6})$$

Logo,

$$k^- = \frac{k_\perp^2}{2k^+}.$$

Do mesmo modo,

$$(p-k)^- = \frac{(p-k)_\perp^2}{2(p-k)^+},$$

consequentemente, a eq.(D.6) torna-se

$$p^- - k^- - (p-k)^- = p^- - \frac{k_\perp^2}{2k^+} - \frac{k_\perp^2}{2k^+} \approx -\frac{k_\perp^2}{2k^+}.$$

já que k^+ é pequeno. Lembrando que $k^+ = zp^+$ e que $\epsilon^- = (k_\perp \cdot \epsilon_\perp^\lambda)/k^+$, encontramos, voltando à equação da amplitude:

$$\begin{aligned}
\Psi_{q \rightarrow qg}(k, z) &= -(2\pi)^3 \sqrt{p^+} \frac{g_s t_{\alpha\beta}^c \sqrt{2(p-k)^+ 2p^+}}{\sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{2k^+} \sqrt{2(p-k)^+ 2p^+}} \\
&\quad \times \delta_{s,s'} \frac{2k^+}{k_{\perp}^2} \left(\frac{k_{\perp} \cdot \varepsilon_{\perp}^{\lambda}}{k^+} \right) \\
&= -\frac{2g_s t_{\alpha\beta}^c}{\sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{2}} \frac{\sqrt{p^+}}{\sqrt{k^+}} \left(\frac{k_{\perp} \cdot \varepsilon_{\perp}^{\lambda}}{k_{\perp}^2} \right) \delta_{s,s'} \\
&= -\frac{\sqrt{2} g_s t_{\alpha\beta}^c}{\sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{z}} \left(\frac{k_{\perp} \cdot \varepsilon_{\perp}^{\lambda}}{k_{\perp}^2} \right) \delta_{s,s'} \tag{D.7}
\end{aligned}$$

No espaço de coordenadas, a expressão torna-se

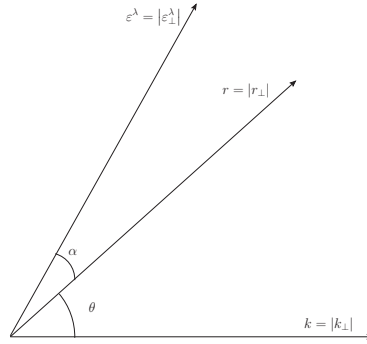
$$\begin{aligned}
\Psi_{q \rightarrow qg}(r_{\perp}, z) &= \int \frac{d^2 k_{\perp}}{\sqrt{(2\pi)^3}} e^{ik_{\perp} \cdot r_{\perp}} \Psi_{q \rightarrow qg}(k_{\perp}, z) \\
&= \int \frac{d^2 k_{\perp}}{\sqrt{(2\pi)^3}} e^{ik_{\perp} \cdot r_{\perp}} \left[-\frac{\sqrt{2} g_s t_{\alpha\beta}^c}{\sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{z}} \left(\frac{k_{\perp} \cdot \varepsilon_{\perp}^{\lambda}}{k_{\perp}^2} \right) \delta_{s,s'} \right] \\
&= -\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \frac{\sqrt{2} g_s t_{\alpha\beta}^c}{\sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{z}} \delta_{s,s'} \underbrace{\int d^2 k_{\perp} e^{ik_{\perp} \cdot r_{\perp}} \frac{k_{\perp} \cdot \varepsilon_{\perp}^{\lambda}}{k_{\perp}^2}}_{=I}
\end{aligned}$$

Para realizarmos a integração I , podemos transformar as coordenadas da integral para coordenadas esféricas, visto que podemos relacionar as variáveis através de relações angulares como podemos ver na Fig. D.3. Assim, temos que α é o ângulo entre $\varepsilon_{\perp}^{\lambda}$ e r_{\perp} , e θ é o ângulo entre r_{\perp} e k_{\perp} . Portanto,

$$\begin{aligned}
I &= \int k dk_{\perp} d\theta e^{ikr \cos \theta} \frac{k \varepsilon^{\lambda}}{k^2} \cos(\alpha + \theta) \\
&= \int dk_{\perp} d\theta \varepsilon^{\lambda} e^{ikr \cos \theta} \cos(\alpha + \theta)
\end{aligned}$$

para $k = |k_{\perp}|$ e $\varepsilon^{\lambda} = |\varepsilon_{\perp}^{\lambda}|$. Usando a identidade trigonométrica: $\cos(\alpha + \theta) = \cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta$, temos

Figura D.3 - Relações ângulares para a transformação em coordenadas esféricas.



$$\begin{aligned}
 I &= \int dk_{\perp} d\theta \varepsilon^{\lambda} e^{ikr \cos \theta} [\cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta] \\
 &= \cos \alpha \int dk_{\perp} d\theta e^{ikr \cos \theta} \cos \theta - \sin \alpha \int dk_{\perp} d\theta e^{ikr \cos \theta} \sin \theta
 \end{aligned}$$

como $\int dk_{\perp} d\theta e^{ikr \cos \theta} \sin \theta = \int d\theta \frac{d(e^{ikr \cos \theta})}{d\theta} \frac{1}{ikr}$ que é

$$\int dk_{\perp} d\theta e^{ikr \cos \theta} \sin \theta = \frac{1}{ikr} e^{ikr \cos \theta} \Big|_0^{2\pi} = 0,$$

assim, o segundo termo é igual a zero, logo

$$= \varepsilon^{\lambda} \cos \alpha \int dk_{\perp} d\theta e^{ikr \cos \theta} \cos \theta.$$

A partir da análise das funções de Bessel, apresentadas na Ref. [67], podemos afirmar que

$$\int_0^{2\pi} e^{ikr \cos \theta} \cos \theta d\theta = 2\pi i J_1(kr),$$

e, usando o caso especial das relações de recorrência, temos que

$$-J_0'(x) = J_1(x)$$

então,

$$\begin{aligned} I &= \int d^2k_{\perp} e^{ik_{\perp} \cdot r_r} \frac{k_{\perp} \cdot \varepsilon_{\perp}^{\lambda}}{k_{\perp}^2} = 2\pi i \varepsilon^{\lambda} \cos \alpha \int dk_{\perp} - \frac{d(J_0(kr))}{dkr} \frac{dkr}{r} \\ &= \frac{2\pi i}{r} \varepsilon^{\lambda} \cos \alpha + J_0(kr) \Big|_{\infty}^0 \\ &= \frac{2\pi i}{r} \varepsilon^{\lambda} \cos \alpha (1 - 0) \\ &= \frac{2\pi i \varepsilon^{\lambda}}{r} \cos \alpha \end{aligned}$$

multiplicando a expressão acima por r/r , temos que $\varepsilon^{\lambda} r \cos \alpha = \varepsilon_{\perp}^{\lambda} \cdot r_{\perp}$, logo:

$$\int d^2k_{\perp} e^{ik_{\perp} \cdot r_r} \frac{k_{\perp} \cdot \varepsilon_{\perp}^{\lambda}}{k_{\perp}^2} = 2\pi i \frac{\varepsilon_{\perp}^{\lambda} \cdot r_{\perp}}{r_{\perp}^2}.$$

a equação acima é a transformada de Fourier do produto escalar. Logo, a função de onda $\Psi_{q \rightarrow qg}(r_{\perp}, z)$ é dada por

$$\Psi_{q \rightarrow qg}(r_{\perp}, z) = -i \frac{\sqrt{2} g_s t_{\alpha\beta}^c}{\sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{z}} \frac{\varepsilon_{\perp}^{\lambda} \cdot r_{\perp}}{r_{\perp}^2} \delta_{s,s'}.$$

E Cálculo polarização transversal

Do cálculo da polarização transversal temos a seguinte propriedade:

$$\sum_{\lambda=1, 2} \varepsilon_{\perp}^{*\lambda} \cdot x_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{\lambda} \cdot x'_{\perp} = x_{\perp} \cdot x'_{\perp},$$

a qual podemos demonstrar:

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=1, 2} \varepsilon_{\perp}^{*\lambda} \cdot x_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{\lambda} \cdot x'_{\perp} &= \sum_{\lambda=1, 2} (\varepsilon_1^{*\lambda} x_1 + \varepsilon_2^{*\lambda} x_2) (\varepsilon_1^{\lambda} x'_1 + \varepsilon_2^{\lambda} x'_2) \\ &= \sum_{\lambda=1, 2} [\varepsilon_1^{*\lambda} \varepsilon_1^{\lambda} x_1 x'_1 + \varepsilon_2^{*\lambda} \varepsilon_1^{\lambda} x_2 x'_1 + \varepsilon_1^{*\lambda} \varepsilon_2^{\lambda} x_1 x'_2 + \varepsilon_2^{*\lambda} \varepsilon_2^{\lambda} x_2 x'_2] \end{aligned}$$

realizando o somatório sobre λ para cada um dos termos separadamente, para

$$\begin{cases} \varepsilon_{\perp}^1 &= (1/\sqrt{2}, i/\sqrt{2}) \\ \varepsilon_{\perp}^2 &= (1/\sqrt{2}, -i/\sqrt{2}) \end{cases}$$

temos que:

- Para o 1^o termo,

$$\sum_{\lambda=1, 2} \varepsilon_1^{*\lambda} \varepsilon_1^{\lambda} = \varepsilon_1^{*1} \varepsilon_1^1 + \varepsilon_1^{*2} \varepsilon_1^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 1.$$

- Para o 2^o termo,

$$\sum_{\lambda=1, 2} \varepsilon_2^{*\lambda} \varepsilon_1^{\lambda} = \varepsilon_2^{*1} \varepsilon_1^1 + \varepsilon_2^{*2} \varepsilon_1^2 = \left(\frac{-i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0.$$

- Para o 3^o termo,

$$\sum_{\lambda=1, 2} \varepsilon_1^{*\lambda} \varepsilon_2^{\lambda} = \varepsilon_1^{*1} \varepsilon_2^1 + \varepsilon_1^{*2} \varepsilon_2^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{i}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{-i}{\sqrt{2}} \right) = 0.$$

- Para o 4^o termo,

$$\sum_{\lambda=1, 2} \varepsilon_2^{*\lambda} \varepsilon_2^{\lambda} = \varepsilon_2^{*1} \varepsilon_2^1 + \varepsilon_2^{*2} \varepsilon_2^2 = \left(\frac{-i}{\sqrt{2}} \frac{i}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{-i}{\sqrt{2}} \right) = 1.$$

Consequentemente obtemos,

$$\sum_{\lambda=1, 2} \varepsilon_{\perp}^{*\lambda} \cdot x_{\perp} \varepsilon_{\perp}^{\lambda} \cdot x'_{\perp} = x_1 x'_1 + x_2 x'_2 = x_{\perp} \cdot x'_{\perp}.$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BETHKE, S. The 2009 world average of α_s . **The European Physical Journal C**, v. 64, n. 4, p. 689–703, oct 2009. 11, 19, 20
- [2] NEWMAN, P. Deep inelastic lepton - nucleon scattering at hera. In: **Lepton and Photon Interactions at High Energies**. [S.l.]: World Scientific, 2004. 11, 26
- [3] NADOLSKY, P.; GAO, J.; GUZZI, M.; HUSTON, J.; LAI, H.-L.; LI, Z.; PUMPLIN, J.; STUMP, D.; YUAN, C.-P. Progress in cteq-tea pdf analysis. In: . [S.l.]: Deutsches Elektronen-Synchrotron, DESY, Hamburg, 2013. p. 413–416; DESY. 11, 31, 105
- [4] CARRAZZA, S.; FERRARA, A.; PALAZZO, D.; ROJO, J. APFEL web: a web-based application for the graphical visualization of parton distribution functions. **Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics**, IOP Publishing, v. 42, n. 5, p. 057001, mar 2015. 11, 31
- [5] BERTONE, V.; CARRAZZA, S.; ROJO, J. APFEL: A PDF evolution library with QED corrections. **Computer Physics Communications**, Elsevier BV, v. 185, n. 6, p. 1647–1668, jun 2014. 11, 31
- [6] GROUP, P. D.; ZYLA, P. A. et al. Review of particle physics. **Progress of Theoretical and Experimental Physics**, Oxford University Press (OUP), v. 2020, n. 8, aug 2020. 17
- [7] GREINER, W.; SCHRAMM, S.; STEIN, E. **Quantum Chromodynamics**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007. ISBN 9783540485353. 17
- [8] GRIFFITHS, D. **Introduction to elementary particles**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008. ISBN 9783527406012. 17, 18
- [9] GREINER, W.; REINHARDT, J. **Quantum electrodynamics**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2008. ISBN 9783540875604. 18
- [10] MUTA, T. **Foundations of Quantum Chromodynamics: An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories**. [S.l.]: World Scientific, 2009. ISBN 9812793534. 19
- [11] COLLINS, J. **Foundations of perturbative QCD**. New York, NY: Cambridge University Press, 2011. (Cambridge monographs on particle physics, nuclear physics, and cosmology). 20

- [12] BARONE, V.; PREDAZZI, E. **High-energy particle diffraction**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. ISBN 9783662047248. 20, 25, 34, 38, 39
- [13] DOKSHITZER, Y. L. Calculation of the Structure Functions for Deep Inelastic Scattering and $e^+ e^-$ Annihilation by Perturbation Theory in Quantum Chromodynamics. **Journal of Experimental and Theoretical Physics**, v. 46, p. 641–653, 1977. 20, 28
- [14] GRIBOV, V. N.; LIPATOV, L. N. Deep inelastic electron scattering in perturbation theory. **Physics Letters B**, Elsevier BV, v. 37, n. 1, p. 78–80, nov 1971. 20, 28
- [15] ALTARELLI, G.; PARISI, G. Asymptotic Freedom in Parton Language. **Nuclear Physics B**, Elsevier BV, v. 126, n. 2, p. 298–318, aug 1977. 20, 28
- [16] FADIN, V. S.; KURAEV, E. A.; LIPATOV, L. N. On the Pommeranchuk Singularity in Asymptotically Free Theories. **Physics Letters B**, v. 60, p. 50–52, 1975. 20, 33
- [17] KURAEV, E. A.; LIPATOV, L. N.; FADIN, V. S. Multi - Reggeon Processes in the Yang-Mills Theory. **Journal of Experimental and Theoretical Physics**, v. 44, p. 443–450, 1976. 20, 33
- [18] _____. The Pommeranchuk Singularity in Nonabelian Gauge Theories. **Journal of Experimental and Theoretical Physics**, v. 45, p. 199–204, 1977. 20, 33
- [19] BALITSKY, I. I.; LIPATOV, L. N. The Pommeranchuk Singularity in Quantum Chromodynamics. **Soviet Journal of Nuclear Physics**, v. 28, p. 822–829, 1978. 20, 33
- [20] THOMSON, M. **Modern particle physics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013. ISBN 9781107289772. 21, 25
- [21] DEVENISH, R.; COOPER-SARKAR, A. **Deep inelastic scattering**. Oxford New York: OUP Oxford, 2011. ISBN 9780198506713. 25
- [22] HALZEN, A. D. M. F. **Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1984. ISBN 0471887412. 25, 30, 126
- [23] BJORKEN, J. D. Inequality for electron and muon scattering from nucleons. **Physical Review Letters**, APS, v. 16, n. 10, p. 408, 1966. 26
- [24] BJORKEN, J. D. Current algebra at small distances. In: **Conf. Proc.** [S.l.: s.n.], 1967. v. 670717, n. SLAC-PUB-0338, p. 55–81. 26
- [25] BJORKEN, J. D. Asymptotic sum rules at infinite momentum. **Physical Review**, APS, v. 179, n. 5, p. 1547, 1969. 26

- [26] HOU, T.-J.; XIE, K.; GAO, J.; DULAT, S.; GUZZI, M.; HOBBS, T. J.; HUSTON, J.; NADOLSKY, P.; PUMPLIN, J.; SCHMIDT, C.; SITIWALDI, I.; STUMP, D.; YUAN, C. P. **Progress in the CTEQ-TEA NNLO global QCD analysis**. [S.l.], ago. 2019. 30
- [27] KOVCHegov, Y. V.; LEVIN, E. **Quantum chromodynamics at high energy**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2012. ISBN 9781139022187. 32, 34
- [28] GRIBOV, L. V.; LEVIN, E. M.; RYSKIN, M. G. Semihard Processes in QCD. **Physics Reports**, v. 100, p. 1–150, 1983. 35
- [29] GRIBOV, L.; LEVIN, E.; RYSKIN, M. Extending the QCD leading logs up to reggeon field theory. **Physics Letters B**, Elsevier BV, v. 101, n. 3, p. 185–189, may 1981. 35
- [30] MCLERRAN, L.; VENUGOPALAN, R. Computing quark and gluon distribution functions for very large nuclei. **Physical Review D**, v. 49, p. 2233–2241, 1994. 36
- [31] _____. Gluon distribution functions for very large nuclei at small transverse momentum. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 49, n. 7, p. 3352–3355, apr 1994. 36
- [32] _____. Green’s functions in the color field of a large nucleus. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 50, n. 3, p. 2225–2233, aug 1994. 36
- [33] IANCU, E.; VENUGOPALAN, R. The color glass condensate and high-energy scattering in QCD. In: **Quark–Gluon Plasma 3**. [S.l.]: World Scientific, 2004. p. 249–363. 36
- [34] IANCU, E.; LEONIDOV, A.; MCLERRAN, L. D. Nonlinear gluon evolution in the color glass condensate. 1. **Nuclear Physics A**, v. 692, p. 583–645, 2001. 36
- [35] JALILIAN-MARIAN, J.; KOVNER, A.; LEONIDOV, A.; WEIGERT, H. The BFKL equation from the Wilson renormalization group. **Nuclear Physics B**, v. 504, p. 415–431, 1997. 36
- [36] _____. The Wilson renormalization group for low x physics: Towards the high density regime. **Physical Review D**, v. 59, p. 014014, 1998. 36
- [37] JALILIAN-MARIAN, J.; KOVNER, A.; WEIGERT, H. The Wilson renormalization group for low x physics: Gluon evolution at finite parton density. **Physical Review D**, v. 59, p. 014015, 1998. 36

- [38] HOOFT, G. A planar diagram theory for strong interactions. **Nuclear Physics B**, Elsevier BV, v. 72, n. 3, p. 461–473, apr 1974. 50
- [39] BALITSKY, I. Operator expansion for high-energy scattering. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 463, n. 1, p. 99–157, 1996. 53
- [40] KOVCHEGOV, Y. V. Small- x F_2 structure function of a nucleus including multiple pomeron exchanges. **Physical Review D**, APS, v. 60, n. 3, p. 034008, 1999. 53
- [41] WEIGERT, H. Evolution at small x_{bj} : The color glass condensate. **Progress in Particle and Nuclear Physics**, Elsevier, v. 55, n. 2, p. 461–565, 2005. 54
- [42] LEVIN, E.; TUCHIN, K. Solution to the evolution equation for high parton density QCD. **Nuclear Physics B**, Elsevier BV, v. 573, n. 3, p. 833–852, may 2000. 54, 58
- [43] IANCU, E.; ITAKURA, K.; MCLERRAN, L. Geometric scaling above the saturation scale. **Nuclear Physics A**, Elsevier BV, v. 708, n. 3-4, p. 327–352, oct 2002. 54, 62, 65
- [44] ASKEW, A.; KWIECINSKI, J.; MARTIN, A. D.; SUTTON, P. Properties of the BFKL equation and structure function predictions for DESY HERA. **Physical Review D**, APS, v. 49, n. 9, p. 4402, 1994. 58
- [45] GOLEC-BIERNAT, K. J.; WUSTHOFF, M. Saturation effects in deep inelastic scattering at low Q^2 and its implications on diffraction. **Physical Review D**, v. 59, p. 014017, 1998. 70
- [46] IANCU, E.; ITAKURA, K.; MUNIER, S. Saturation and BFKL dynamics in the HERA data at small x . **Physics Letters B**, v. 590, p. 199–208, 2004. 70, 71, 105
- [47] REZAEIAN, A. H.; SCHMIDT, I. Impact-parameter dependent color glass condensate dipole model and new combined HERA data. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 88, n. 7, p. 074016, oct 2013. 71, 105
- [48] ALBACETE, J. L.; ARMESTO, N.; MILHANO, J. G.; SALGADO, C. A.; WIEDEMANN, U. A. Numerical analysis of the Balitsky-Kovchegov equation with running coupling: Dependence of the saturation scale on nuclear size and rapidity. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 71, n. 1, p. 014003, jan 2005. 74
- [49] BALITSKY, I. Quark contribution to the small- x evolution of color dipole. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 75, p. 014001, Jan 2007. 75, 77
- [50] KOVCHEGOV, Y. V.; WEIGERT, H. Triumvirate of running couplings in small- x evolution. **Nuclear Physics A**, v. 784, n. 1, p. 188–226, 2007. ISSN 0375-9474. 75, 77

- [51] XIANG, W.; CAI, Y.; WANG, M.; ZHOU, D. High energy asymptotic behavior of the S -matrix in the saturation region with the smallest dipole running coupling prescription. **Physical Review D**, v. 101, n. 7, p. 076005, 2020. 75, 81, 82, 95, 96
- [52] _____. Rare fluctuations of the S -matrix at NLO in QCD. **Physical Review D**, v. 99, n. 9, p. 096026, 2019. 75, 82
- [53] XIANG, W. High energy scattering in the saturation regime including running coupling and rare fluctuation effects. **Physical Review D**, v. 79, p. 014012, 2009. 75, 76
- [54] ALBACETE, J. L.; KOVCHEGOV, Y. V. Solving the high energy evolution equation including running coupling corrections. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 75, n. 12, p. 125021, jun 2007. 81
- [55] ALBACETE, J. L.; ARMESTO, N.; MILHANO, J. G.; SALGADO, C. A. Nonlinear QCD meets data: A global analysis of lepton-proton scattering with running coupling Balitsky-Kovchegov evolution. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 80, p. 034031, Aug 2009. 81
- [56] BALITSKY, I.; CHIRILLI, G. A. Next-to-leading order evolution of color dipoles. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 77, n. 1, p. 014019, jan 2008. 81
- [57] IANCU, E.; MADRIGAL, J.; MUELLER, A.; SOYEZ, G.; TRIANTAFYLLOPOULOS, D. The collinearly-improved Balitsky–Kovchegov equation. **Nuclear Physics A**, Elsevier BV, v. 956, p. 557–560, dec 2016. 81
- [58] BENDOVA, D.; CEPILA, J.; CONTRERAS, J.; MATAS, M. Solution to the Balitsky-Kovchegov equation with the collinearly improved kernel including impact-parameter dependence. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 100, n. 5, p. 054015, sep 2019. 81
- [59] MATAS, M.; CEPILA, J.; CONTRERAS, J. G. Collinearly improved impact-parameter dependent Balitsky-Kovchegov evolution. In: **Proceedings of XXVII International Workshop on Deep-Inelastic Scattering and Related Subjects — PoS(DIS2019)**. [S.l.]: Sissa Medialab, 2019. 81
- [60] LAPPI, T.; MÄNTYSAARI, H. Direct numerical solution of the coordinate space Balitsky-Kovchegov equation at next-to-leading order. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 91, n. 7, p. 074016, apr 2015. 94

- [61] IANCU, E.; MADRIGAL, J.; MUELLER, A.; SOYEZ, G.; TRIANTAFYLLOPOULOS, D. Collinearly-improved BK evolution meets the HERA data. **Physics Letters B**, Elsevier BV, v. 750, p. 643–652, nov 2015. 94, 95
- [62] LAPPI, T.; MÄNTYSAARI, H. Next-to-leading order balitsky-kovchegov equation with resummation. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 93, n. 9, p. 094004, may 2016. 94, 95
- [63] IANCU, E.; MADRIGAL, J.; MUELLER, A.; SOYEZ, G.; TRIANTAFYLLOPOULOS, D. Resumming double logarithms in the QCD evolution of color dipoles. **Physics Letters B**, Elsevier BV, v. 744, p. 293–302, may 2015. 94, 95
- [64] ALBACETE, J. L. Resummation of double collinear logs in BK evolution versus HERA data. **Nuclear Physics A**, Elsevier BV, v. 957, p. 71–84, jan 2017. 94, 95
- [65] GONÇALVES, V. P. B. **QCD para sistemas densos**. Tese (Doutorado) — UFRGS, 2000. 107, 108
- [66] LEVIN, E. M. **Orsay lectures on low X deep inelastic scattering**. [S.l.], 1991. 107, 108
- [67] ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. **Mathematical methods for physicists**. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 1999. 109, 111, 131, 140, 148
- [68] BRODSKY, S. J.; PAULI, H.-C.; PINSKY, S. S. Quantum chromodynamics and other field theories on the light cone. **Physics Reports**, Elsevier, v. 301, n. 4-6, p. 299–486, 1998. 113, 116, 127, 141
- [69] KOGUT, J. B.; SOPER, D. E. Quantum electrodynamics in the infinite-momentum frame. **Physical Review D**, APS, v. 1, n. 10, p. 2901, 1970. 114, 127
- [70] PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. **An Introduction To Quantum Field Theory**. [S.l.]: Taylor & Francis Ltd, 2019. ISBN 0367320568. 132
- [71] DOSCH, H. G.; GOUSSET, T.; KULZINGER, G.; PIRNER, H. Vector meson leptoproduction and nonperturbative gluon fluctuations in QCD. **Physical Review D**, APS, v. 55, n. 5, p. 2602, 1997. 140