

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
INSTITUTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA



Dissertação

**Título: Estudo da transição de fase forte no Universo primordial
e suas implicações cosmológicas**

Vinicius Simoes Aderaldo

Pelotas, 2022

Vinicius Simoes Aderaldo

**Estudo da transição de fase forte no Universo primordial e suas
implicações cosmológicas**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Victor Paulo Barros Gonçalves

Pelotas, 2022

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas
Catalogação na Publicação

A228e Aderaldo, Vinicius Simoes

Estudo da transição de fase forte no universo primordial e suas implicações cosmológicas / Vinicius Simoes Aderaldo ; Victor Paulo Barros Gonçalves, orientador. — Pelotas, 2022.

110 f. : il.

Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Física, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2022.

1. Transição de fase forte. 2. Universo primordial. 3. Hadronização. I. Gonçalves, Victor Paulo Barros, orient. II. Título.

CDD : 523.18

Vinicius Simoes Aderaldo

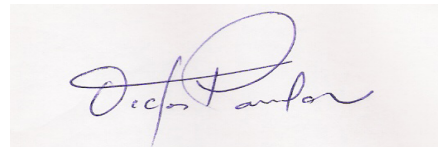
Título: Estudo da transição de fase forte no Universo primordial e suas implicações cosmológicas

Dissertação aprovada, como requisito parcial, para obtenção do grau de Mestre em Física, Programa de Pós-Graduação em Física, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas.

Data da Defesa: 11 de fevereiro de 2022

Banca examinadora:

Victor Paulo Barros Gonçalves (Orientador)



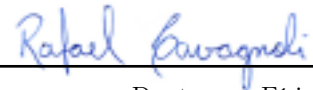
Doutor em Ciências
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

João Thiago de Santana Amaral



Doutor em Ciências
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Rafael Cavagnoli



Doutor em Física
Universidade Federal de Santa Catarina

Werner Krambeck Sauter



Doutor em Ciências
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Dedico esta Dissertação de Mestrado à Camila, minha companheira, meu suporte, a luz que ilumina a minha existência e que faz de mim, dentre todos, o mais afortunado.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Luciana e Marcelo, por todo o incentivo e apoio, sem os quais não seria capaz de chegar ao ponto onde me encontro.

Às minhas irmãs, Gabriela e Natália, por sempre acreditarem em mim.

Ao meu orientador, Dr. Victor P. B. Gonçalves, que, me orientando durante os últimos anos, não negou-me paciência, disponibilidade e o principal: conhecimento. Sem a sua orientação, seus conselhos e apoio esta Dissertação de Mestrado não seria possível.

Ao meu grande amigo, Lucas Lazzari, por todas as discussões, comentários e, principalmente, por toda a amizade.

Ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Pelotas por ajudar-me a solidificar as bases de que necessito em minha jornada.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro.

RESUMO

ADERALDO, Vinicius Simoes, **Estudo da transição de fase forte no Universo primordial e suas implicações cosmológicas** 2022, 110p. Dissertação (Mestrado em Física) - Programa de Pós-Graduação em Física, Departamento de Física, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2022.

Dados observacionais indicam que o Universo se expande e essa expansão é acelerada. Este comportamento é descrito matematicamente pelas equações de Friedmann, as quais têm em conta a geometria e o conteúdo material do Universo. Através da consideração do modelo Λ CDM, cuja sigla remete ao fato de que, além de radiação e matéria bariônica, o Universo também é composto por energia escura, presente através da Constante Cosmológica (Λ), bem como por matéria escura fria (*Cold Dark Matter*), podemos extrair períodos nos quais cada uma dessas componentes domina sobre as demais. Este trabalho tem como foco o período em que o Universo é dominado por radiação. Neste período há transições de fase devido à quebras espontâneas de simetria. Foca-se naquela que diz respeito à transição de fase forte, onde quarks e glúons assintoticamente livres são confinados nos hádrons. Neste trabalho serão considerados diferentes modelos para as equações de estado adequadas a cada uma das fases envolvidas na transição de fase forte, *i.e.*, as fases hadrônica e partônica. Com isso, solucionam-se as equações diferenciais provenientes das equações de Friedmann permitindo a obtenção dos parâmetros cosmológicos e termodinâmicos de interesse. Os primeiros são o parâmetro de Hubble, o parâmetro de desaceleração e o parâmetro *jerk*. Já os parâmetros termodinâmicos são a temperatura, as densidades de energia e entropia, as quantidades ε/T^4 e $3P/T^4$, a anomalia do traço e a velocidade do som ao quadrado. Nosso objetivo é analisar o impacto da modelagem da transição de fase forte nesses distintos parâmetros. Em particular, verifica-se a existência de descontinuidades, tanto nos parâmetros cosmológicos quanto nos parâmetros termodinâmicos, provenientes da escolha de equações de estado que descrevem uma transição de fase de primeira ordem. Em contrapartida, os parâmetros termodinâmicos obtidos a partir da consideração de equações de estado que configuram um *crossover* não apresentam, em geral descontinuidades, demonstrando que a hadronização ocorre suavemente. No tocante aos parâmetros cosmológicos demonstramos que estes são sensíveis à equação de estado considerada e ao tratamento da transição de fase.

Palavras Chave: transição de fase forte, Universo primordial, hadronização

ABSTRACT

ADERALDO, Vinicius Simoes, **Study of the QCD phase transition in the early Universe and its cosmological implications** 2022, 110p. Dissertation (Master Degree in Physics) - Programa de Pós-Graduação em Física, Departamento de Física, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2022.

Observational data indicates that the Universe expands and that this expansion is accelerated. This behavior is mathematically described via Friedmann's equations in which the geometry and the composition of the Universe is taken into account. Considering the Λ CDM model, whose acronym is due to the fact that in addition to radiation and barionic matter the Universe is filled by dark energy that is present through the Cosmological Constant (Λ) and by Cold Dark Matter, it is possible to obtain periods in which there is a dominance of each one of these components over the others. The present work is devoted to the radiation-dominant period. In this period there are phase transitions due to spontaneous symmetry breaking. One focuses on those concerning to the strong phase transition where quarks and gluons asymptotically free are confined inside hadrons. In this work, different models for equations of state that are suitable to hadronic or partonic phases are considered. Thereafter, with these equations of state the differential equation obtained from Friedmann's equation is solved providing the desired cosmological and thermodynamic parameters. The first are the Hubble, deceleration and jerk parameters. The latter are the temperature, energy and entropy densities, the ε/T^4 and $3P/T^4$ quantities, the trace anomaly and squared speed of sound. Our goal is to verify the impact from modeling of the strong phase transition on those parameters. Particularly, the existence of discontinuities is verified both in cosmological and thermodynamic parameters for the choice of equations of state that depicts a first order transition. On the other hand, using crossover equations of state the obtained thermodynamic parameters, in general, do not show discontinuities reporting a smooth hadronization. Turning over to the cosmological parameters one demonstrates that these are sensible to the choice of equations of state and the treatment of the phase transition.

Key-words: QCD phase transition , early Universe, hadronization

SUMÁRIO

Pág.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 21 |
| 2 | COSMOLOGIA | 25 |
| 2.1 | Introdução | 25 |
| 2.2 | Conceitos Básicos | 25 |
| 2.3 | Um Breve Resumo das Etapas de Evolução do Universo | 29 |
| 2.4 | Parâmetros Cosmológicos | 31 |
| 2.5 | Conclusão | 32 |
| 3 | TERMODINÂMICA | 35 |
| 3.1 | Introdução | 35 |
| 3.2 | Conceitos Básicos | 35 |
| 3.3 | Transições de Fase | 38 |
| 3.4 | Conclusão | 41 |
| 4 | TRANSIÇÃO DE FASE FORTE | 43 |
| 4.1 | Introdução | 43 |
| 4.2 | Conceitos Básicos | 43 |
| 4.3 | Modelos Fenomenológicos Para a Transição de Fase Forte | 48 |
| 4.3.1 | Modelo de Sacola do MIT | 49 |
| 4.3.2 | Modelo de Sacola Modificado | 50 |
| 4.3.3 | Lattice Ansatz 1 | 51 |
| 4.3.4 | Lattice Ansatz 2 | 51 |
| 4.3.5 | Gás de Píons | 53 |
| 4.3.6 | Modelo de Ressonâncias Hadrônicas | 54 |
| 4.3.7 | Interpolação | 55 |
| 4.4 | Conclusão | 58 |
| 5 | RESULTADOS: PARÂMETROS TERMODINÂMICOS | 61 |
| 5.1 | Introdução | 61 |
| 5.2 | Temperatura | 61 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 5.3 | Densidade de energia e densidade de entropia | 66 |
| 5.4 | Quantidades ε/T^4 e $3P/T^4$ | 69 |
| 5.5 | Anomalia do Traço | 72 |
| 5.6 | Velocidade do som ao quadrado | 75 |
| 5.7 | Conclusão | 77 |
| 6 | RESULTADOS: PARÂMETROS COSMOLÓGICOS | 79 |
| 6.1 | Introdução | 79 |
| 6.2 | Parâmetro de Hubble | 79 |
| 6.3 | Parâmetro de Desaceleração | 81 |
| 6.4 | Parâmetro <i>jerk</i> | 83 |
| 6.5 | Conclusão | 84 |
| 7 | RESULTADOS COM SETOR ELETROFRACO | 87 |
| 7.1 | Introdução | 87 |
| 7.2 | Parâmetros Termodinâmicos | 88 |
| 7.3 | Parâmetros Cosmológicos | 92 |
| 7.4 | Conclusão | 94 |
| 8 | CONCLUSÕES | 95 |
| A | APÊNDICE A – DA OBTENÇÃO DE $g_{\mu\nu}$ E $R_{\mu\nu}$ | 97 |
| B | APÊNDICE B – DA OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DE FRIEDMANN101 | |
| | REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 105 |

LISTA DE FIGURAS

| | <u>Pág.</u> |
|--|-------------|
| 2.1 Representação da evolução das densidades associadas à radiação (curva contínua), matéria (curva pontilhada) e Constante Cosmológica (curva tracejada). As grandezas a_{rm} e $a_{m\Lambda}$ representam fatores de escala onde há equivalência das contribuições de matéria e radiação, bem como de matéria e da Constante Cosmológica, respectivamente. | 28 |
| 2.2 Um esboço das etapas de evolução do Universo. | 30 |
| 3.1 Para transições de fase de primeira (gráficos superiores) e segunda ordem (gráficos inferiores) são apresentados esboços dos comportamentos do potencial químico μ , entropia S e capacidade térmica à pressão constante C_P | 40 |
| 4.1 Composição, em porcentagem, do Universo. | 43 |
| 4.2 Diagrama representativo do Modelo Padrão da Física de Partículas. | 44 |
| 4.3 Uma aproximação do diagrama de fase da QCD no plano $T-n$, sendo que n é a densidade bariônica e n_0 a densidade da matéria nuclear considerando uma transição de fase de primeira ordem. | 46 |
| 4.4 Ordem da transição de fase forte de acordo com a massa dos <i>quarks</i> | 48 |
| 4.5 Pressão no regime de temperatura da QGP para os modelos utilizados: MIT (curva contínua), C-BM (curva tracejada) e <i>lattice ansatz</i> (curva traço-ponto). | 53 |
| 4.6 Pressão no regime de temperatura da fase hadrônica para os modelos utilizados: PG (curva contínua) e HRG (curva tracejada). | 56 |
| 4.7 Pressão em função da temperatura usando o MIT+PG com $B^{1/4} = 200$ MeV. As curvas pontilhada e traço ponto referem-se à não aplicabilidade das equações de estado correspondentes, enquanto que as curvas contínua e tracejada correspondem a aplicabilidade das respectivas EoS. | 57 |
| 4.8 Pressão em função da temperatura usando o <i>lattice ansatz-1</i> (curva tracejada) e o C-BM (curva contínua). O setor eletrofraco é desconsiderado. As regiões sombreadas dizem respeito às regiões onde se espera um <i>crossover</i> para o C-BM (padrão "\") e para o <i>lattice ansatz-1</i> (padrão "/"). | 58 |
| 5.1 Temperatura em função do tempo para o MIT+PG (à esquerda) e MIT+HRG (à direita) com $B^{1/4} = 145$ MeV (curvas contínuas) e $B^{1/4} = 200$ MeV (curvas tracejadas). | 63 |
| 5.2 Temperatura em função do tempo para o C-BM (curva contínua), <i>lattice ansatz-1</i> (curva tracejada) e <i>lattice ansatz-2</i> (curva traço-ponto). | 64 |

| | | |
|------|--|----|
| 5.3 | Densidade de energia (à esquerda) e densidade de entropia (à direita) em função da temperatura obtidas utilizando o MIT+PG com $B^{1/4} = 145$ MeV (curvas contínuas) e $B^{1/4} = 200$ MeV (curvas tracejadas). | 66 |
| 5.4 | Densidade de energia (à esquerda) e densidade de entropia (à direita) em função da temperatura obtidas utilizando o MIT+HRG com $B^{1/4} = 145$ MeV (curvas contínuas) e $B^{1/4} = 200$ MeV (curvas tracejadas). | 67 |
| 5.5 | Densidade de energia (à esquerda) e densidade de entropia (à direita) em função da temperatura obtidas utilizando o C-BM (curvas contínuas), o <i>lattice ansatz-1</i> (curvas tracejadas) e o <i>lattice ansatz-2</i> (curvas traço-ponto). | 68 |
| 5.6 | Quantidades ε/T^4 (à esquerda) e $3P/T^4$ (à direita) em função da temperatura obtidas utilizando o MIT+PG com $B^{1/4} = 145$ MeV (curvas contínuas) e $B^{1/4} = 200$ MeV (curvas tracejadas). | 69 |
| 5.7 | Quantidades ε/T^4 (à esquerda) e $3P/T^4$ (à direita) em função da temperatura obtidas utilizando o MIT+HRG com $B^{1/4} = 145$ MeV (curvas contínuas) e $B^{1/4} = 200$ MeV (curvas tracejadas). | 70 |
| 5.8 | Quantidades ε/T^4 (à esquerda) e $3P/T^4$ (à direita) em função da temperatura obtidas utilizando o C-BM (curvas contínuas), o <i>lattice ansatz-1</i> (curvas tracejadas) e o <i>lattice ansatz-2</i> (curvas traço-ponto). | 71 |
| 5.9 | Anomalia do traço em função da temperatura para o MIT+PG (à esquerda) e MIT+HRG (à direita) com $B^{1/4} = 145$ MeV (curvas contínuas) e $B^{1/4} = 200$ MeV (curvas tracejadas). | 72 |
| 5.10 | Anomalia do traço em função da temperatura para o C-BM (curva contínua), <i>lattice ansatz-1</i> (curva tracejada) e <i>lattice ansatz-2</i> (curva traço-ponto). | 74 |
| 5.11 | Velocidade do som ao quadrado em função da temperatura para o MIT+PG (à esquerda) e MIT+HRG (à direita) com $B^{1/4} = 145$ MeV (curvas contínuas) e $B^{1/4} = 200$ MeV (curvas tracejadas). | 75 |
| 5.12 | Velocidade do som ao quadrado em função da temperatura para o C-BM (curva contínua) e <i>lattice ansatz</i> (curva tracejada). | 77 |
| 6.1 | Parâmetro de Hubble em função do tempo para o MIT+PG (à esquerda) e MIT+HRG (à direita) com $B^{1/4} = 145$ MeV (curvas contínuas) e $B^{1/4} = 200$ MeV (curvas tracejadas). | 79 |
| 6.2 | Parâmetro de Hubble em função do tempo para o MIT+PG (curva contínua) e MIT+HRG (curva tracejada) com $B^{1/4} = 200$ MeV, bem como para o C-BM (curva traço-ponto), <i>lattice ansatz-1</i> (curva pontilhada) e <i>lattice ansatz-2</i> (curva traço-ponto-ponto). | 80 |
| 6.3 | Parâmetro de desaceleração em função do tempo para o MIT+PG (à esquerda) e MIT+HRG (à direita) com $B^{1/4} = 145$ MeV (curvas contínuas) e $B^{1/4} = 200$ MeV (curvas tracejadas). | 81 |

| | | |
|-----|---|----|
| 6.4 | Parâmetro de desaceleração em função do tempo para o MIT+PG (curva contínua) e MIT+HRG (curva tracejada) com $B^{1/4} = 200 \text{ MeV}$, bem como para o C-BM (curva traço-ponto), <i>lattice ansatz-1</i> (curva pontilhada) e <i>lattice ansatz-2</i> (curva traço-ponto-ponto). | 82 |
| 6.5 | Parâmetro <i>jerk</i> em função do tempo para o MIT+PG (à esquerda) e MIT+HRG (à direita) com $B^{1/4} = 145 \text{ MeV}$ (curvas contínuas) e $B^{1/4} = 200 \text{ MeV}$ (curvas tracejadas). | 83 |
| 6.6 | Parâmetro <i>jerk</i> em função do tempo para o MIT+PG (curva contínua) e MIT+HRG (curva tracejada) com $B^{1/4} = 200 \text{ MeV}$, bem como para o C-BM (curva traço-ponto), <i>lattice ansatz-1</i> (curva pontilhada) e <i>lattice ansatz-2</i> (curva traço-ponto-ponto). | 84 |
| 7.1 | Temperatura em função do tempo para o MIT+PG com $B^{1/4} = 200 \text{ MeV}$ (gráfico de cima), C-BM (gráfico do meio) e <i>lattice ansatz-1</i> (gráfico de baixo). As curvas contínuas e tracejadas dizem respeito a consideração e não consideração do setor eletrofraco, respectivamente. | 87 |
| 7.2 | Quantidades ε/T^4 (à esquerda) e $3P/T^4$ (à direita) em função da temperatura com uso do MIT+PG para $B^{1/4} = 200 \text{ MeV}$ (gráfico de cima), C-BM (gráfico do meio) e <i>lattice ansatz-1</i> (gráfico de baixo). As curvas contínuas e tracejadas dizem respeito a consideração e não consideração do setor eletrofraco, respectivamente. | 89 |
| 7.3 | Anomalia do traço (à esquerda) e velocidade do som ao quadrado (à direita) em função da temperatura para o MIT+PG com $B^{1/4} = 200 \text{ MeV}$ (gráfico de cima), C-BM (gráfico do meio) e <i>lattice ansatz-1</i> (gráfico de baixo). As curvas contínuas e tracejadas dizem respeito a consideração e não consideração do setor eletrofraco, respectivamente. | 90 |
| 7.4 | Parâmetro de Hubble em função do tempo para o MIT+PG com $B^{1/4} = 200 \text{ MeV}$ (gráfico de cima), C-BM (gráfico do meio) e <i>lattice ansatz-1</i> (gráfico de baixo). As curvas contínuas consideram o setor eletrofraco e as tracejadas não o consideram. | 92 |
| 7.5 | Parâmetros de desaceleração (à esquerda) e <i>jerk</i> (à direita) em função do tempo. Os modelos MIT+PG para $B^{1/4} = 200 \text{ MeV}$ (gráfico de cima), C-BM (gráfico do meio) e <i>lattice ansatz-1</i> (gráfico de baixo) foram utilizados. As curvas contínuas e tracejadas dizem respeito a consideração e não consideração do setor eletrofraco, respectivamente. | 93 |

LISTA DE TABELAS

| | <u>Pág.</u> |
|---|-------------|
| 4.1 Parâmetros utilizados na Equação 4.9. | 52 |
| 4.2 Parâmetros utilizados na Equação 4.10. | 52 |
| 5.1 Para os modelos MIT+PG e MIT+HRG são listados os valores obtidos para T_C e Δt para cada valor de $B^{1/4}$ | 64 |
| 5.2 Os valores do máximo da anomalia do traço e seus respectivos valores de temperatura para cada modelo são tabelados. | 73 |
| 5.3 Os valores do mínimo de c_s^2 e seus respectivos valores de temperatura para cada modelo são tabelados. | 76 |
| 7.1 Valores para obtidos para T_C e Δt condierando os modelos MIT+PG e MIT+HRG com o setor eletrofraco. | 88 |
| 7.2 Valores tabelados do mínimo de c_s^2 e seus respectivos valores de temperatura considerando o setor eletrofraco. | 90 |

1 INTRODUÇÃO

Sabemos, atualmente, que o Universo se expande de forma acelerada [1–3] e a descrição dessa expansão é feita através das equações de Friedmann [4, 5]. Tais equações, as quais levam em consideração a composição do Universo, bem como a sua geometria, nos mostram que, durante toda a sua existência, o Universo possuiu três períodos, cada qual sendo dominado por uma das três componentes que o permeiam. Segundo o modelo denominado Λ CDM, o qual configura o modelo que mais se ajusta às atuais observações [6], as componentes são: radiação, matéria (matéria bariônica e matéria escura) e Constante Cosmológica.

Conforme se expande, além de passar por cada um dos períodos citados anteriormente, cujas idades podem ser definidas [7, 8], o conteúdo material do Universo sofre diversas modificações [9], ocasionadas pela variação da temperatura. Considerando-se o período no qual radiação domina sobre as demais componentes, podemos extrair das equações de Friedmann [4, 5] que a temperatura do Universo decresce, conforme este se expande, com o inverso da raiz quadrada do tempo. Devido a esse fato, a Teoria Quântica de Campos nos permite esperar que, durante essa redução na temperatura, ocorram transições de fases devido à quebras espontâneas de simetria [10]. Essas transições, portanto, são previstas pelo Modelo Padrão da Física de Partículas, o modelo unificado das Teorias Eletrofraca e Forte [11] onde, a primeira é a teoria que estuda as interações eletromagnéticas (ocorrem entre partículas carregadas eletricamente) e fracas (ocorrem entre todos os férmions). A Teoria Forte, a qual é descrita pela Cromodinâmica Quântica, tem como escopo o estudo das interações fortes que ocorrem entre partículas que carregam a chamada carga de cor. Sendo assim, temos que as transições de fase eletrofraca e forte são as transições de fase previstas pelo Modelo Padrão da Física de partículas que ocorrem em temperaturas da ordem de $\sim 10^2$ GeV e $\sim 10^2$ MeV, respectivamente [12, 13].

As transições supracitadas ocorrem, como veremos adiante, dentro do período de radiação dominante. A transição de fase eletrofraca resulta na separação das forças eletromagnética e fraca [13]. A transição de fase forte, a qual é o foco deste trabalho, é prevista pela Cromodinâmica Quântica e sustentada por dois fenômenos inerentes a esta: o confinamento [14] e a liberdade assintótica [15–18]. Logo, a transição de fase forte consiste da transição de um sistema de *quarks* e glúons assintoticamente livres (assegurado pela liberdade assintótica) para um sistema onde esses são confinados nos hádrons (assegurado pelo confinamento), estados ligados incolores formados por *quarks* e glúons. O primeiro é um sistema partônico, onde os graus de liberdade principais são *quarks* e glúons e que denominamos por QGP¹, *i.e.*, um plasma de *quark*–glúons. Já o segundo é um sistema

¹Do inglês *Quark Gluon Plasma*.

hadrônico cujos graus de liberdade principais são os hádrons.

Além de esperarmos a transição de fase forte no Universo Primordial, que é o foco deste trabalho, as escalas de energia envolvidas tornam tal transição reproduzível em laboratório através de colisões de íons pesados ultrarelativísticos². Alguns exemplos de tais experimentos são o RHIC³ e o LHC⁴. Além disso, podemos tratá-la fenomenologicamente ou através de simulações computacionais [20]. Dessa forma, temos diversas vias que complementam-se na tratativa da transição de fase forte nas condições de interesse. Assim, podemos correlacionar as transições de fase forte obtidas na colisão de íons pesados ultrarelativísticos (no formalismo do *Little Bang*) com aquela que ocorre no Universo Primordial (no formalismo do *Big Bang*). Todavia, devemos salientar algumas diferenças. Em primeiro lugar, temos a diferença nas escalas temporais onde, no *Big Bang* as escalas temporais são da ordem de $\sim 10\ \mu\text{s}$ e no *Little Bang* essas são da ordem de $\sim 10^{-23}\ \text{s}$ [9]. Devido a essa diferença temos que a presença do setor eletrofraco (fótons e férmions leves) será importante no *Big Bang* mas não no *Little Bang*, já que devido às escalas de tempo baixas a produção leptônica será pequena.

A fim de se efetuar uma abordagem fenomenológica, são necessárias equações de estado (EoS⁵), *i.e.*, relações entre as quantidades termodinâmicas, para cada uma das fases que compõem a transição. Tais EoS podem descrever tanto a transição de fase forte obtida no formalismo do *Little Bang*, *Big Bang* ou ainda os resultados de simulações computacionais dos cálculos de QCD na rede. Com as referidas EoS podemos solucionar a equação diferencial proveniente das equações de Friedmann [4, 5] e, dessa forma, obter as quantidades termodinâmicas de interesse. Não obstante, a própria solução das equações de Friedmann nos fornece a evolução do fator de escala a , fator este que nos diz como as distâncias se comportam em um Universo em expansão [7]. Podemos então expandir o fator de escala em série de Taylor, o que nos permite definir os parâmetros cosmológicos [21–23]: o parâmetro de Hubble (H), o parâmetro de desaceleração (q) e o parâmetro *jerk* (j). Com estes, podemos descrever cinematicamente a evolução do Universo, além de nos proporcionarem uma alternativa de análise da transição de fase forte no Universo primordial através de suas evoluções temporais no regime de interesse.

Uma das questões em aberto na literatura é a própria descrição da transição de fase forte. Enquanto análises realizadas a partir dos resultados de QCD na rede apontem que, para

²Não é nosso objetivo explicar a Física por trás das colisões de íons pesados ultrarelativísticos. Para tanto, indicamos ao leitor a Ref. [19].

³Do inglês *Relativistic Heavy Ion Collider*, o RHIC está localizado no Laboratório Nacional de Brookhaven.

⁴Do inglês *Large Hadron Collider*, o LHC, parte do complexo de aceleradores do CERN, é, atualmente, o maior acelerador de partículas em operação no mundo.

⁵Do inglês *Equation of State*.

altas temperaturas e potencial químico nulo ou baixo, a transição seja, na verdade, um *crossover*⁶ [20, 25, 26], resultados recentes apontam que, na presença de uma assimetria leptônica, essa transição seja de primeira ordem [12, 27, 28]. Tendo em vista essa lacuna, nosso objetivo é estudar o impacto dos distintos tratamentos para a transição de fase forte no comportamento dos parâmetros cosmológicos e termodinâmicos. Desta forma, na presente Dissertação iremos apresentar nossos resultados para os parâmetros termodinâmicos e cosmológicos obtidos através da consideração dos modelos fenomenológicos que nos fornecem as EoS necessárias para a resolução da equação diferencial proveniente das equações de Friedmann [4, 5].

Este trabalho está organizado da seguinte forma. Iniciaremos por apresentar os Princípios Básicos da Cosmologia na Seção 2.1. Na seção seguinte iremos tratar das etapas pelas quais o Universo passou durante sua evolução, salientando aquela que iremos aqui discorrer, a transição de fase forte. Posteriormente, na Seção 2.4, iremos introduzir os parâmetros cosmológicos fechando o Capítulo 2. O Capítulo 3 é dedicado à apresentação de Conceitos Básicos referentes à Termodinâmica e Mecânica Estatística, bem como uma breve discussão sobre transições de fase. No Capítulo 4 trataremos da transição de fase forte em si, principiando pelos seus conceitos básicos na Seção 4.2, onde apresentaremos o Modelo Padrão da Física de Partículas que, por sua vez, determina os graus de liberdade presentes nas fases envolvidas na transição de fase em questão. Apresentaremos ainda os conceitos de confinamento e liberdade assintótica, os quais configuram um dos pilares que sustentam nossa abordagem. Por conseguinte, na Seção 4.3, apresentaremos os modelos fenomenológicos para a fase partônica, que são o modelo de sacola do MIT [29], o modelo C–BM [30–32], o *lattice ansatz-1* [25] e o *lattice ansatz-2* [20]; bem como os modelos para a fase hadrônica que são o gás de píons e o modelo de ressonâncias hadrônicas [33]. Finalizamos o capítulo apresentando a interpolação utilizada para conectar alguns dos resultados para a fase partônica com os resultados para a fase hadrônica utilizando o modelo HRG. No Capítulo 5 apresentaremos nossos resultados, ignorando o setor eletrofraco, para os parâmetros termodinâmicos, a saber: a temperatura T , as densidades de energia ε e entropia s , as quantidades normalizadas ε/T^4 e $3P/T^4$, a anomalia do traço $(\varepsilon - 3P)/T^4$ e a velocidade do som ao quadrado c_s^2 . Em sequência apresentaremos os resultados, também ignorando o setor eletrofraco, para os parâmetros cosmológicos, quais sejam, parâmetro de Hubble H , parâmetro de desaceleração q e parâmetro *jerk* j . Os resultados considerando o setor eletrofraco são apresentados no Capítulo 7. Por fim trazemos nossas conclusões.

Enfatizamos que os resultados desta Dissertação compõem um artigo que será submetido à publicação e foram apresentados no XXIII Encontro de Pós-Graduação da 7^a SIIPE

⁶Em um *crossover* a hadronização ocorre de forma rápida, porém tão suavemente que descontinuidades não estão presentes [24].

da Universidade Federal de Pelotas e no XV *International Workshop on Hadron Physics*, sendo que neste último a apresentação de poster recebeu menção honrosa sendo selecionada para uma apresentação oral.

2 COSMOLOGIA

2.1 Introdução

Neste capítulo iniciaremos por apresentar brevemente os princípios básicos concernentes à Cosmologia. Tais princípios configuram um dos pilares com os quais iremos estruturar este trabalho. Para uma leitura mais completa, indicamos ao leitor a Ref. [8]. Posteriormente iremos identificar as etapas e transições de fase presentes durante a evolução do Universo. Findaremos esse capítulo com a introdução dos parâmetros cosmológicos. Estes proporcionam uma maneira alternativa e útil, uma vez que tais quantidades podem ser obtidas experimentalmente, de descrever a evolução do Universo.

2.2 Conceitos Básicos

Atualmente, o modelo utilizado para se descrever a evolução do Universo, o qual está se expandindo de forma acelerada segundo dados observacionais [1–3], é o **modelo Λ CDM** que é considerado o modelo padrão da Cosmologia, pois melhor descreve os dados experimentais existentes até então [6]. Este modelo leva em consideração o *Hot Big Bang Model*, cuja formulação tem início nos anos 1940 através dos trabalhos de G. Gamow, R. Alpher e outros [34–37]. Neste modelo, o Universo é composto por: matéria bariônica e matéria escura, ambas não relativísticas; bem como radiação e um termo cosmológico, que hoje recebe o nome de Constante Cosmológica e é usualmente denotada pela letra grega Λ .

Outro aspecto importante que está contido no modelo Λ CDM é o chamado **Princípio Cosmológico** [38, 39]. Este princípio estende o Princípio da Relatividade proposto por A. Einstein para a Relatividade Restrita [40] dizendo que o Universo também deve manter sua estrutura seja qual for a localização do observador [38, 39, 41]. À vista disso, o Princípio Cosmológico nos diz que, em escalas cosmológicas, *i.e.*, para distâncias maiores do que 100 Mpc ($1 \text{ pc} = 3,086 \times 10^{16} \text{ m}$), o Universo é homogêneo (invariância perante translações) e isotrópico (invariância perante rotações) além de não possuir um centro absoluto [7].

A teoria que descreve o Universo em larga escala é uma teoria de campo da gravidade: a teoria da **Relatividade Geral**. Essa teoria foi formulada por A. Einstein sendo publicada em 1915 [42]. As equações por Einstein propostas [42], as quais devem obedecer três princípios: os Princípios da Equivalência, Covariância e Consistência, são as equações de

campo, dadas, já com a Constante Cosmológica, por¹

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) - \frac{\Lambda}{c^2} g_{\mu\nu} , \quad (2.1)$$

onde G é a constante gravitacional². O lado esquerdo da equação (2.1) descreve a geometria do espaço-tempo sendo composto pelo chamado tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$. No lado direito, temos os termos referentes à composição do Universo. Estes são representados pelo tensor energia-momento, $T_{\mu\nu}$, tensor este que é responsável por descrever a distribuição de matéria e energia. Além disso, $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico, que nos diz qual é a relação entre as distâncias espaço-temporais e os intervalos das coordenadas. Por fim, T é o escalar energia-momento, que é obtido através da contração $T = T_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$ e Λ é a já citada Constante Cosmológica³.

Quando consideramos o Princípio Cosmológico, temos que a métrica é dada pelo elemento de linha de Robertson-Walker [44–47]

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2/R_0^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) , \quad (2.2)$$

onde k é o termo de curvatura, que está associado à geometria do Universo e pode assumir os valores $k = 1$ para uma geometria esférica, $k = -1$ para a geometria hiperbólica e $k = 0$ para a geometria plana. Por sua vez, R_0 é o raio de curvatura do Universo. Adiante, temos que $a(t)$ é o fator de escala, o qual define o comportamento da escala das distâncias em um Universo homogêneo e isotrópico. Consideraremos, neste trabalho, que $a(t_0) = 1$, onde $t = t_0$ define o presente [7].

A partir do invariante $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, podemos obter os coeficientes métricos através da equação (2.2). Com estes coeficientes podemos determinar, dentre outras coisas, o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$. No Apêndice A procedemos de forma mais detalhada.

No que tange ao tensor energia-momento, temos que este é escrito, de forma geral, como

$$T_\mu^\nu = q_{,\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{,\nu}} - \delta_\mu^\nu \mathcal{L} , \quad (2.3)$$

onde q são coordenadas generalizadas, tal que $q_{,\mu} = \partial q / \partial x^\mu$ e \mathcal{L} é a densidade Lagrangeana [43]. Dada a simetria do tensor energia-momento $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ [48], temos que as originais 16 componentes são reduzidas à apenas 10 componentes linearmente indepen-

¹Para uma derivação completa das equações de campo de Einstein veja o capítulo 11 da Ref. [43].

² $G = 6,673 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$.

³Perceba que estamos usando a convenção de Einstein para somatórios, onde fica implícita a soma sobre os índices repetidos.

dentos. Não obstante, temos que a conservação de energia e momento impõe que a derivada covariante do tensor energia–momento seja nula, *i.e.*,

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0 ,$$

com

$$\nabla_{\mu} = \partial_{\mu} + \Gamma_{\mu\rho}^{\mu} + \Gamma_{\mu\rho}^{\nu} ,$$

sendo a derivada covariante. Todavia, necessitamos de um tensor energia–momentum que obedeça ao Princípio Cosmológico. Utiliza-se aquele que diz respeito a um fluido perfeito com densidade ρ , quadri–velocidade $U_{\mu} = \gamma(c, -\mathbf{v})$ e pressão P , tal que

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) U_{\mu} U_{\nu} - P \eta_{\mu\nu} , \quad (2.4)$$

com $\gamma = [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$ sendo o fator de Lorentz e $\eta_{\mu\nu}$ a métrica de Minkowski em que $\eta_{\mu}^{\mu} = (1, -1, -1, -1)$. Dessa forma, temos que

$$[T_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P \end{pmatrix} , \quad (2.5)$$

o qual descreve um fluido perfeito. Na equação (2.5) temos que $\rho = \varepsilon/c^2$ é a densidade e ε é a densidade de energia, bem como P é a pressão. Inserindo as equações (2.2)–(2.5) na equação (2.1), obtemos a **equação de Friedmann** e a **equação de aceleração** [4, 5], que são dadas por

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2} + \frac{\Lambda}{3} , \quad (2.6)$$

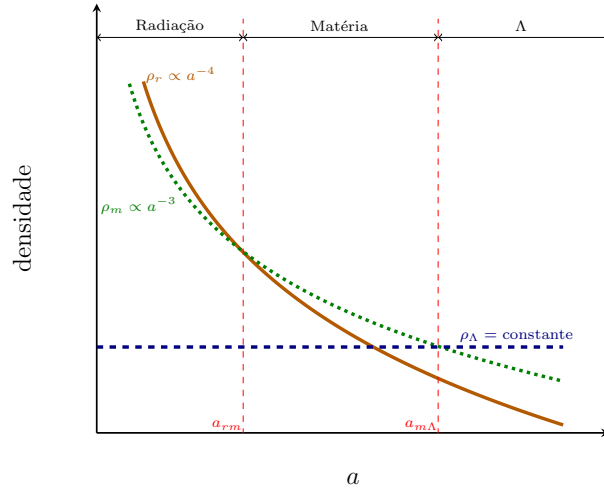
e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\rho c^2 + 3P) + \frac{\Lambda}{3} , \quad (2.7)$$

respectivamente. No Apêndice B derivamos essas equações de forma mais clara. Por fim, podemos, da conservação do tensor energia–momento, obter a **equação de fluido** dada por

$$\dot{\rho} + \frac{3}{c^2} \frac{\dot{a}}{a} (\rho c^2 + P) = 0 . \quad (2.8)$$

Figura 2.1 - Representação da evolução das densidades associadas à radiação (curva contínua), matéria (curva pontilhada) e Constante Cosmológica (curva tracejada). As grandezas a_{rm} e $a_{m\Lambda}$ representam fatores de escala onde há equivalência das contribuições de matéria e radiação, bem como de matéria e da Constante Cosmológica, respectivamente.



Fonte: o autor (2020)

Dados observacionais indicam que o Universo possui geometria plana, isto é, $k = 0$ [6,49]. Utilizando este fato, podemos obter das equações de Friedmann que a idade do Universo é de $\sim 13,8 \times 10^9$ anos (veja, *e.g.*, a Ref. [8]) e pode ser subdividida em três períodos, os quais podem ser observados na Figura 2.1. O primeiro período diz respeito à dominância de radiação sobre as demais componentes e que perdura, aproximadamente, até a idade de 22.951 anos onde o fator de escala e a densidade evoluem com (para uma derivação detalhada veja a Ref. [8])

$$a(t) \propto t^{1/2} \quad \text{e} \quad \rho(a) \propto a^{-4} .$$

A partir dessa idade, o Universo transita para o segundo período onde matéria (bariônica + escura) passa a dominar sobre as demais componentes. Essa fase, cujo fator de escala e densidade evoluem com

$$a(t) \propto t^{2/3} \quad \text{e} \quad \rho(a) \propto a^{-3} ,$$

dura até, aproximadamente, $10,3 \times 10^9$ anos, quando há o início da transição para uma fase onde a Constante Cosmológica possui dominância com idade indefinida para findar.

Nesse período, o fator de escala e a densidade evoluem com

$$a(t) \propto e^{H_0 t} \quad \text{e} \quad \rho(a) = \text{constante} ,$$

onde H_0 é a constante de Hubble, cujo valor é [6]

$$H_0 = 67,4(5) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} . \quad (2.9)$$

2.3 Um Breve Resumo das Etapas de Evolução do Universo

Na seção anterior vimos os diferentes períodos da evolução do Universo. No que tange à descrição da transição de fase forte estamos, de fato, no período dominado por radiação. Logo, em nossas discussões, levaremos em consideração apenas a presença de radiação. Sendo assim, podemos ignorar os dois últimos termos da equação (2.6), uma vez que o termo contendo a contribuição da radiação é dominante. Resulta, portanto, que a equação de Friedmann para radiação-dominante é dada por ($c = 1$),

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} \varepsilon$$

que, inserida na equação de fluido dada pela equação (2.8), recai na seguinte equação diferencial

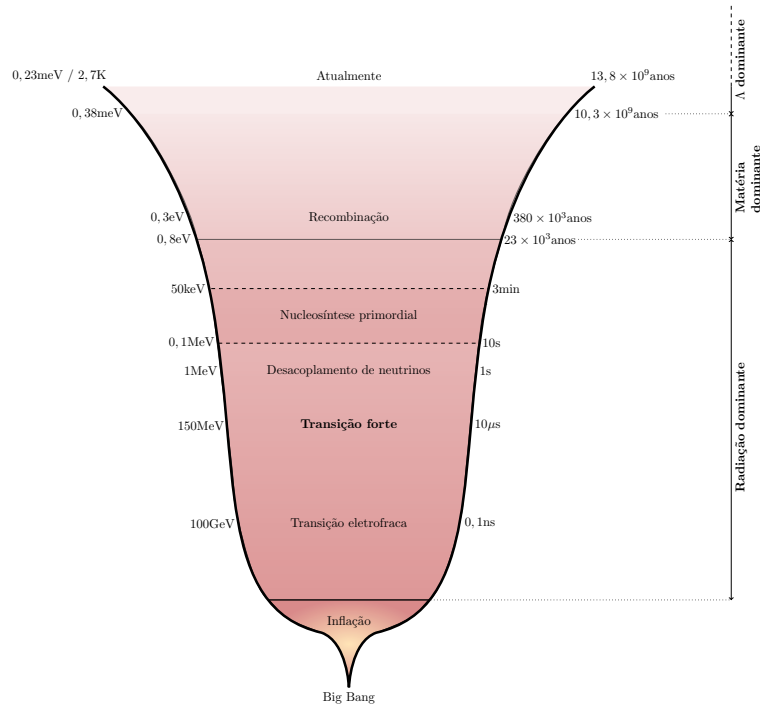
$$\dot{\varepsilon} = -3\sqrt{\frac{8\pi G}{3}} \varepsilon(\varepsilon + P) . \quad (2.10)$$

Dessas equações, como veremos adiante, podemos obter que a temperatura do Universo evolui de acordo com $T \propto t^{-1/2}$ e, à vista disso, temos um Universo primordial com temperatura extremamente elevada que se resfria no decorrer do tempo e conforme se expande.

Temos, portanto, que as etapas de evolução do Universo podem ser analisadas através de sua evolução térmica. Na Figura 2.2 temos um esboço das etapas de evolução do Universo previstas pelo *Hot Big Bang Model*. No princípio, logo após a singularidade a qual chamamos de *Big Bang*, todas as partículas do Modelo Padrão e suas possíveis extensões compõem, em equilíbrio térmico, o plasma primordial que permeia o Universo de modo que, conforme este se expande sua temperatura decresce atingindo, eventualmente, o chamado limiar de massa de uma dada partícula. Neste momento, essa partícula desacopla do plasma [28].

Decorre que o *Hot Big Bang Model* possui algumas limitações, *e.g.*, na explicação dos

Figura 2.2 - Um esboço das etapas de evolução do Universo.



Fonte: Adaptado de [12]

chamados problema de horizonte e problema de planicidade. Estes problemas podem ser solucionados ao considerarmos um curto período no qual o Universo se expande de forma exponencial [12,28]. Chamamos esse período de Período Inflacionário que se inicia $\sim 10^{-35}$ s após o *Big Bang* [13].

O Universo segue a se expandir e sua temperatura a diminuir. Com aproximadamente 0,1 ns de idade o Universo atinge uma temperatura de ~ 100 GeV. Temos a primeira transição de fase predita pelo Modelo Padrão da Física de Partículas, a Transição Eletrofraca. Nessa transição temos a separação das forças eletromagnética e fraca que, anteriormente, estariam unidas em uma única força [13].

Em um dado momento posterior a temperatura atinge o valor de ~ 150 MeV, *quarks* e glúons que anteriormente se propagavam livremente no plasma cósmico são confinados nos hádrons. Temos então a chamada **Transição Forte**, que é acompanhada por uma drástica mudança nos graus de liberdade do sistema [12].

Sucedese que, alcançada a idade de ~ 1 s, temos o Desacoplamento de Neutrinos. Estes passam a se propagar livremente pelo Universo e, dessa forma, temos que o Universo se

torna transparente para neutrinos [12,13], dando origem a um fundo cósmico de neutrinos ($C\nu B$) [12].

De ~ 10 s a ~ 3 min temos a Nucleosíntese Primordial. As temperaturas neste regime temporal são suficientes para que prótons e neutrões, que anteriormente se propagavam livremente, liguem-se formando os primeiros núcleos leves [12,13]. Quando a idade do Universo atinge $\sim 10^4$ anos temos o fim da era de radiação dominante, culminando no início da era de Matéria Dominante.

A Recombinação ocorre em escalas de temperatura da ordem de 0,3 eV onde a idade do Universo é de $\sim 10^5$ anos. Nesta etapa, átomos neutros se formam a partir da ligação de elétrons e núcleos anteriormente livres [12,13]. Com isso, o conteúdo material do Universo se torna um gás neutro, *i.e.*, transparente para fótons que anteriormente eram espalhados pelos elétrons livres. Isso resulta em uma radiação cósmica de fundo (CMB^4) [12]. Esta relíquia do Universo Primordial, a qual também nos mostra a homogeneidade e isotropia do Universo em larga escala mencionadas anteriormente, pode ser observada hoje através dos dados de satélites, como por exemplo o PLANCK [51]. Posterior a isso temos o fim da era de Matéria Dominante e o início da era de Λ Dominante quando a idade do Universo atinge $\sim 10^{10}$ anos.

No presente trabalho iremos nos ater à transição de fase forte. A natureza dessa transição, se de primeira ordem ou ainda se um *crossover*, é tema de intenso debate e interesse, uma vez que são capazes de produzir, com maior ou menor probabilidade [52], remanescentes que podem ser detectáveis [12]. Focaremos, portanto, no regime de temperatura que contém tal transição, onde solucionaremos a equação diferencial dada pela equação (2.10) utilizando equações de estado a fim de completar o conjunto de equações necessárias para tanto. As equações de estado por nós utilizadas tanto para a descrição de fase de primeira ordem quanto para um *crossover* serão apresentadas na Seção 4.3.

2.4 Parâmetros Cosmológicos

A evolução temporal do Universo pode ser especificada através de características cinéticas por meio do estudo dos parâmetros cosmológicos, os quais estão diretamente relacionados com as derivadas temporais de $a(t)$ [22].

Temos que o fator de escala pode ser expresso em termos de uma expansão em série de

⁴Do inglês *Cosmic Microwave Background*, esta relíquia do Universo primordial detectada pela primeira vez pelos astrônomos Arno Penzias e Robert Wilson [50].

Taylor em torno de um instante temporal arbitrário \tilde{t} da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
a(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(\tilde{t})^{(n)}}{n!} (t - \tilde{t})^n \\
&= \frac{a(\tilde{t})^{(0)}}{0!} (t - \tilde{t})^0 + \frac{a(\tilde{t})^{(1)}}{1!} (t - \tilde{t})^1 + \frac{a(\tilde{t})^{(2)}}{2!} (t - \tilde{t})^2 + \frac{a(\tilde{t})^{(3)}}{3!} (t - \tilde{t})^3 + \dots \\
&= a(\tilde{t}) + \frac{\dot{a}(\tilde{t})}{1!} (t - \tilde{t}) + \frac{\ddot{a}(\tilde{t})}{2!} (t - \tilde{t})^2 + \frac{\dddot{a}(\tilde{t})}{3!} (t - \tilde{t})^3 + \dots \\
&= a(\tilde{t}) \left[1 + \frac{\dot{a}(\tilde{t})}{a(\tilde{t})} (t - \tilde{t}) + \frac{\ddot{a}(\tilde{t})}{2!a(\tilde{t})} (t - \tilde{t})^2 + \frac{\dddot{a}(\tilde{t})}{3!a(\tilde{t})} (t - \tilde{t})^3 + \dots \right]. \tag{2.11}
\end{aligned}$$

A partir dessa expansão podemos definir os primeiros três parâmetros cosmológicos como [21–23]

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}, \tag{2.12}$$

$$q \equiv -\frac{\ddot{a}}{aH^2}, \tag{2.13}$$

$$j \equiv \frac{\dddot{a}}{aH^3}, \tag{2.14}$$

onde H é o parâmetro de Hubble, q é o parâmetro de desaceleração e j é o parâmetro *jerk*. Em geral podemos definir outros parâmetros cosmológicos, os quais levam em consideração derivadas temporais do fator de escala de mais alta ordem, subsequentemente teríamos o *snap*, *lerk* e *maxout* [21]. Todavia, focaremos apenas nos três primeiros onde, com estes parâmetros podemos descrever a evolução do Universo reescrevendo a Eq. (2.11) como

$$a(t) = a(\tilde{t}) \left[1 + H(\tilde{t})(t - \tilde{t}) - \frac{(H^2q)(\tilde{t})}{2!} (t - \tilde{t})^2 + \frac{(H^3j)(\tilde{t})}{3!} (t - \tilde{t})^3 + \dots \right]. \tag{2.15}$$

Considerando \tilde{t} como sendo o instante atual, temos que a dinâmica do fator de escala para instantes próximos será completamente definida pelos parâmetros cosmológicos. Tais parâmetros podem ser determinados experimentalmente e trazem consigo informações sobre a dinâmica do Universo. Neste trabalho analisaremos como os parâmetros cosmológicos são afetados pelo tratamento da transição de fase forte.

2.5 Conclusão

Vimos, neste capítulo, que a dinâmica do Universo é descrita através das equações de Friedmann, de aceleração e equação de fluido. Tais equações nos permitem verificar a existência de períodos nos quais há a dominância de uma dada componente: radiação, matéria ou Constante Cosmológica. Observamos que durante a evolução do Universo, com o trans-

correr do tempo e a expansão do Universo, a temperatura decresce com $T \propto t^{-1/2}$ levando a uma série de transições de fase sendo que, neste trabalho, focaremos naquela onde há a hadronização de *quarks* e glúons que anteriormente se propagavam livremente em um plasma de *quark*-glúons. Por fim, verificamos que a evolução do Universo pode ser descrita cinematicamente através dos parâmetros cosmológicos obtidos através da expansão em série de Taylor do fator de escala $a(t)$.

3 TERMODINÂMICA

3.1 Introdução

Neste capítulo iremos apresentar alguns aspectos sobre Mecânica Estatística, Termodinâmica e transições de fase. Iniciamos por apresentar os *ensembles* termodinâmicos mais usuais e as relações que, no limite termodinâmico, conectam Mecânica Estatística e Termodinâmica. Posteriormente apresentaremos algumas das relações que podem ser obtidas através dos potenciais termodinâmicos. Por fim, apresentamos algumas das formas de se caracterizar a natureza de uma transição de fase. Salientamos que o intuito deste capítulo não é esgotar os assuntos abordados, mas meramente apresentar alguns pontos específicos que são importantes na descrição de transições de fase no Universo primordial. Para uma abordagem detalhada sobre Mecânica Estatística e Termodinâmica recomendamos as referências [53–56].

3.2 Conceitos Básicos

Se considerarmos um sistema macroscópico (ou macroestado), temos que este é descrito pela Termodinâmica e estará completamente definido ao discriminarmos as variáveis ou vínculos macroscópicos apropriados, *e.g.*, (U, V, N) para um sistema de N partículas confinadas em um volume V , onde U é a energia interna do sistema [56, 57]. No entanto, quando buscamos uma descrição de muitos corpos entrando, dessa forma, no âmbito da Mecânica Estatística, resulta que há diversos arranjos possíveis que resultam no mesmo macroestado, cada qual constituindo um microestado. Denomina-se *ensemble* termodinâmico o conjunto dos microestados acessíveis, *i.e.*, de todos os microestados que estão de acordo com os vínculos macroscópicos [57].

Para diferentes vínculos, temos diferentes *ensembles*. Por conseguinte, através dos chamados potenciais termodinâmicos a conexão entre a Mecânica Estatística e a Termodinâmica é feita. Assim para cada *ensemble* o limite termodinâmico (onde $N \rightarrow \infty$ e $V \rightarrow \infty$ com $V/N = v$) é obtido através de um dado potencial termodinâmico. Os potenciais termodinâmicos mais usuais são [53]

$$F(T, V, N) = U - TS \quad (\text{potencial de Helmholtz}) , \quad (3.1)$$

$$G(T, P, N) = U - TS + PV \quad (\text{potencial de Gibbs}) , \quad (3.2)$$

$$\Phi(T, V, \mu) = U - TS - \mu N \quad (\text{grande potencial}) , \quad (3.3)$$

onde $S(U, V, N)$ é a entropia e $U(S, V, N)$ a energia interna.

Se lidamos com um sistema cujos vínculos são (U, V, N) o *ensemble* associado é o cha-

mado *ensemble* Microcanônico [57]. O número de microestados acessíveis são dados por $\Omega(U, V, N)$ e a conexão com a Termodinâmica é feita por intermédio da entropia através da relação [55, 56]

$$S(U, V, N) = k_B \ln \Omega , \quad (3.4)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann. O *ensemble* Canônico, por sua vez, é útil quando consideramos um sistema em contato com um reservatório à temperatura T . Neste caso, teremos que os vínculos serão (T, V, N) e a conexão com a Termodinâmica é tal que [55]

$$F(T, V, N) = -k_B T \ln Z , \quad (3.5)$$

onde

$$Z = \sum_j e^{-E_j/k_B T}$$

é a função de partição canônica que é a soma sobre todos os possíveis microestados com energia E_j .

Outras relações entre *ensembles* termodinâmicos e potenciais termodinâmicos podem ser estabelecidas. Uma delas é a relação entre o *ensemble* Grande Canônico e o grande potencial cujos vínculos são (T, V, μ) . Essa relação nos é particularmente útil uma vez que na descrição da evolução do Universo, podemos considerar este como sendo grande o suficiente de modo que o conjunto de partículas que o constitui esteja em equilíbrio térmico e químico com o próprio Universo [12]. A conexão com a Termodinâmica é estabelecida através da seguinte relação [55]

$$\Phi(T, V, \mu) = -k_B T \ln \Xi , \quad (3.6)$$

sendo que

$$\Xi = \sum_N Z e^{(\mu N/k_B T)} \quad (3.7)$$

é a grande função de partição.

Dos potenciais acima podemos extrair outras quantidades importantes. No caso particular do grande potencial termodinâmico, podemos combinar a equação (3.3) com a Primeira

Lei da Termodinâmica, dada por

$$dU = TdS - PdV + \mu dN , \quad (3.8)$$

e obter

$$d\Phi = -SdT + PdV - Nd\mu .$$

Em adição, temos que

$$d\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial T} \right)_{V,\mu} dT + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial V} \right)_{T,\mu} dV + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\mu} \right)_{T,V} d\mu .$$

Comparando as duas últimas equações, obteremos que

$$-S = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial T} \right)_{V,\mu} , \quad P = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial V} \right)_{T,\mu} \quad \text{e} \quad -N = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\mu} \right)_{T,V} . \quad (3.9)$$

Para os demais potenciais termodinâmicos um procedimento similar pode ser empregado de modo a obter-se quantidades termodinâmicas em função de derivadas dos potenciais termodinâmicos.

Um fato importante sobre os potenciais termodinâmicos diz respeito à possibilidade de que cada potencial termodinâmico pode ser obtido através da aplicação de uma transformação de Legendre em um outro potencial. Por exemplo, podemos obter F aplicando uma transformação de Legendre em Φ , de modo que

$$F = -\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\mu + \Phi = N\mu + \Phi ,$$

que é exatamente a equação (3.1).

Podemos ainda obter relações importantes através do exposto acima. Note que, devido ao fato de que Φ depende de apenas uma única variável extensiva, o volume, temos que $\Phi \propto V$. O coeficiente de proporcionalidade pode ser obtido lembrando que $dU = TdS - PdV + \mu dN$ (Primeira Lei da Termodinâmica). Desta equação podemos extrair a relação onde $d\Phi = -PdV$, mostrando-nos que $-P$ é o coeficiente de proporcionalidade [58]. A mesma análise pode ser feita para o potencial de Gibbs, onde temos que $G \propto N$ com μ sendo o coeficiente de proporcionalidade. Ou seja, podemos escrever estes potenciais como [58]

$$\Phi(T, V, \mu) = -PV \quad \text{e} \quad G(T, P, N) = \mu N . \quad (3.10)$$

Dessa forma, podemos escrever a equação (3.3) da seguinte forma

$$-PV = U - TS - \mu N ,$$

que, dividindo pelo volume e definindo as densidades de energia ε , de entropia s e de partículas n como

$$\varepsilon = \frac{U}{V} , \quad s = \frac{S}{V} \quad \text{e} \quad n = \frac{N}{V} ,$$

podemos escrever

$$sT = \varepsilon + P - \mu n , \tag{3.11}$$

que é chamada como relação de Gibbs [9]. Usando as relações de Euler [9] dadas por

$$s = \frac{\partial P}{\partial T} \quad \text{e} \quad n = \frac{\partial P}{\partial \mu} ,$$

podemos reescrever a equação (3.11) como

$$T \frac{\partial P}{\partial T} - P = \varepsilon - \mu \frac{\partial P}{\partial \mu} . \tag{3.12}$$

Assim, quando o sistema físico em estudo requer uma análise de muitos corpos, como no caso da Transição de Fase Forte onde temos que o sistema é composto por férmions e bósons (ver Seção 4.2), devemos iniciar nossa análise por um viés da Mecânica Estatística e, posteriormente, avançar para uma descrição macroscópica através da Termodinâmica. Por essa via, devemos primeiramente determinar os vínculos apropriados do sistema em questão de tal modo que o *ensemble* termodinâmico a ser utilizado seja evidente. Por conseguinte, o limite termodinâmico é aplicado possibilitando a descrição macroscópica do sistema.

3.3 Transições de Fase

Transições de fase ocorrem em diversos sistemas. Muito provavelmente o exemplo mais comum ao cotidiano da maioria das pessoas são as transições de fase sofridas pela água. Sabemos que, em condições normais, *i.e.*, temperatura ambiente e pressão atmosférica, a água está em seu estado líquido. Todavia, ela pode se solidificar ou se tornar gasosa se as condições externas forem alteradas de forma adequada, *e.g.*, se a temperatura decrescer abaixo de 273,15 K ou se elevar acima de 373,15 K, respectivamente [53]. Disso extraímos que uma transição de fase pode ser obtida através da alteração das condições externas

como temperatura, pressão ou ainda campos elétrico e magnético [12]. Propriedades mecânicas, eletromagnéticas ou ainda as simetrias presentes em uma dada fase são aspectos discriminatórios na identificação da fase na qual o sistema se encontra [12].

Imagine um sistema que se encontra em uma fase em equilíbrio termodinâmico estável. Você pode imaginar um recipiente contendo água à condições normais em um instante onde $t \rightarrow \infty$ (isso garante que água e meio tenham atingido o equilíbrio). A condição de equilíbrio estável é tal que o potencial termodinâmico do sistema em questão é mínimo [53] ou, de forma mais geral, o macroestado onde o número de microestados é maximizado [56]. Se as condições externas variam, como mencionado anteriormente, eventualmente o estado de equilíbrio perde sua característica tornando-se instável. Há, então, a transição de fase, *i.e.*, o sistema migra para um estado estável. Durante a transição de fase, digamos que de uma dada fase 1 para uma fase 2, temos que ambas as fases estão em contato térmico e químico e as condições de equilíbrio de Gibbs devem ser satisfeitas. Tais condições são [58]

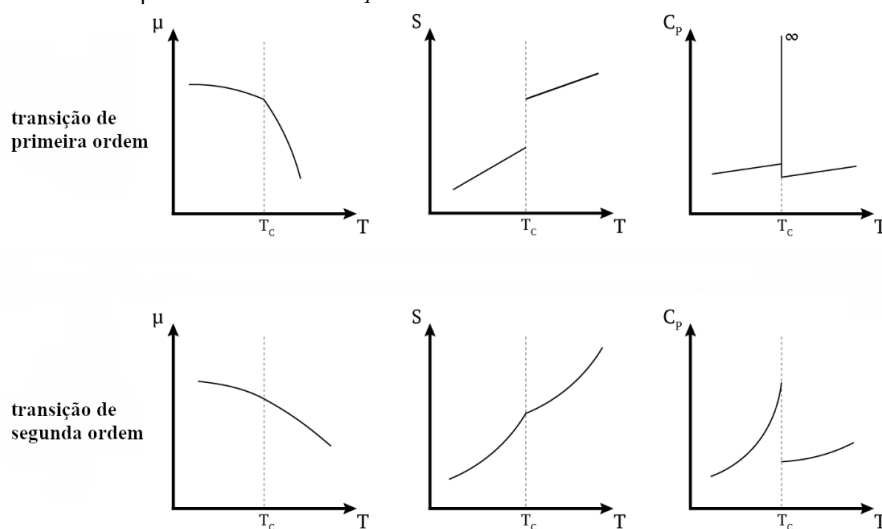
$$\mu_1 = \mu_2, \quad T_1 = T_2 \quad \text{e} \quad P_1 = P_2. \quad (3.13)$$

A ordem da transição de fase pode ser classificada de algumas formas. A primeira delas diz respeito ao calor latente e pode ser enunciada da seguinte forma: uma transição de fase que possui calor latente é dita de primeira ordem enquanto que uma transição de fase sem calor latente é dita contínua ou de ordem superior [12].

Uma outra maneira de classificar uma transição de fase é segundo o proposto por P. Ehrenfest onde analisa-se descontinuidades que porventura surjam nas derivadas dos potenciais termodinâmicos e, conseqüentemente, nas quantidades provenientes dessas derivadas no ponto onde ocorre a transição. Por essa via, temos que uma transição de fase cuja primeira derivada do potencial termodinâmico é descontínua é dita transição de fase de primeira ordem. Uma transição onde a primeira derivada do potencial termodinâmico é contínua mas a segunda derivada é descontínua é dita transição de fase de segunda ordem. Podemos generalizar tal classificação dizendo que uma transição é de n -ésima ordem se as $n - 1$ primeiras derivadas do potencial termodinâmico são contínuas e a n -ésima derivada é descontínua [12].

Na Figura 3.1 apresentamos um esboço do comportamento de algumas quantidades para transições de fase de primeira e segunda ordem nos entornos da temperatura de transição T_c . O potencial químico (μ) e a entropia (S) são definidos em termos de primeiras derivadas do potencial termodinâmico. Note que, tanto para uma transição de primeira ordem quanto para uma transição de segunda ordem o potencial químico é contínuo com

Figura 3.1 - Para transições de fase de primeira (gráficos superiores) e segunda ordem (gráficos inferiores) são apresentados esboços dos comportamentos do potencial químico μ , entropia S e capacidade térmica à pressão constante C_P .



Fonte: Extraído e adaptado da Ref. [12]

a diferença de que há uma pequena dobra no que diz respeito à uma transição de primeira ordem. Já a entropia exibe uma descontinuidade no caso de uma transição de primeira ordem mas evolui continuamente com apenas uma dobra no caso de uma transição de segunda ordem. Neste ponto, podemos relacionar a classificação de uma transição de primeira ordem a partir da liberação de calor latente com aquela concernente à classificação proposta por Ehrenfest. Perceba que a derivada dos potenciais termodinâmicos apresentados nas equações (3.1)–(3.3) em relação à temperatura (mantendo as demais variáveis fixas) resulta em $-S$. Mas vimos que, para uma transição de primeira ordem, S é descontínuo. A relação reside no fato de que essa descontinuidade define o calor latente [12], o qual é escrito como $L = T_c(s_1 - s_2)$, com T_c sendo a temperatura crítica, *i.e.*, a temperatura onde ocorre a transição e que é definida pela primeira condição da equação (3.13). Por fim, a capacidade térmica (C_P), definida em termos da derivada segunda do potencial termodinâmico, diverge para uma transição de primeira ordem e apresenta descontinuidade para uma transição de segunda ordem.

Pode ocorrer que tenhamos dois sistemas que somente podem ser distinguidos assintoticamente onde, localmente, todas as quantidades termodinâmicas evoluem suavemente [24] de tal modo que não tenhamos evidente esses dois estados distintos. Em outras palavras, temos a ausência de singularidades térmicas implicando, portanto, que não há uma transição propriamente dita entre estes dois sistemas. Chamamos essa "transição" de

crossover [11].

3.4 Conclusão

Neste capítulo apresentamos, de forma breve, aspectos essenciais para o decorrer deste trabalho sobre Mecânica Estatística, Termodinâmica e transições de fase. Introduzimos os *ensembles* termodinâmicos e suas conexões com os potenciais termodinâmicos, configurando a conexão entre a Mecânica Estatística e a Termodinâmica. Posteriormente obtivemos algumas relações que se fazem importantes tanto para os estudos que se seguem quanto para o próprio entendimento da Termodinâmica apresentada. Por fim, discorreremos sobre transições de fase através de duas formas de classificação dessa.

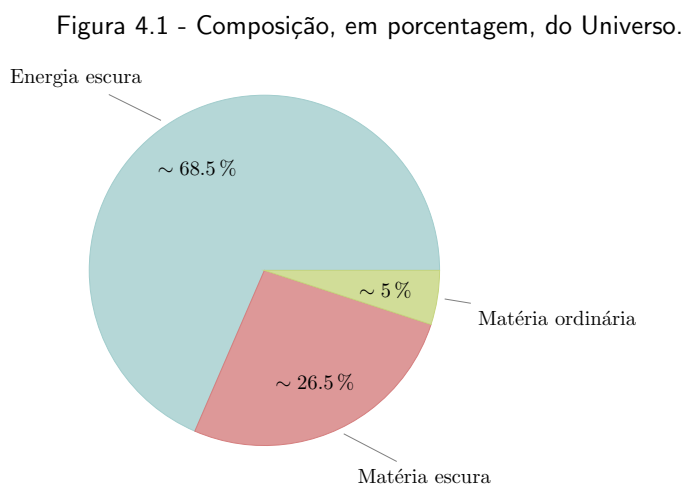
4 TRANSIÇÃO DE FASE FORTE

4.1 Introdução

O presente capítulo tem como objetivo apresentar de forma breve o Modelo Padrão da Física de Partículas (MP) especificando os entes presentes neste, bem como suas interações. Discorreremos sobre confinamento e liberdade assintótica, dois aspectos que são inerentes à Cromodinâmica Quântica e que sustentam a possibilidade de uma transição de fase forte. Posteriormente iremos introduzir modelos fenomenológicos, os quais nos fornecem as equações de estado utilizadas para a resolução da equação (2.10), iniciando por aqueles referentes à fase partônica e, posteriormente, aqueles que dizem respeito a fase hadrônica.

4.2 Conceitos Básicos

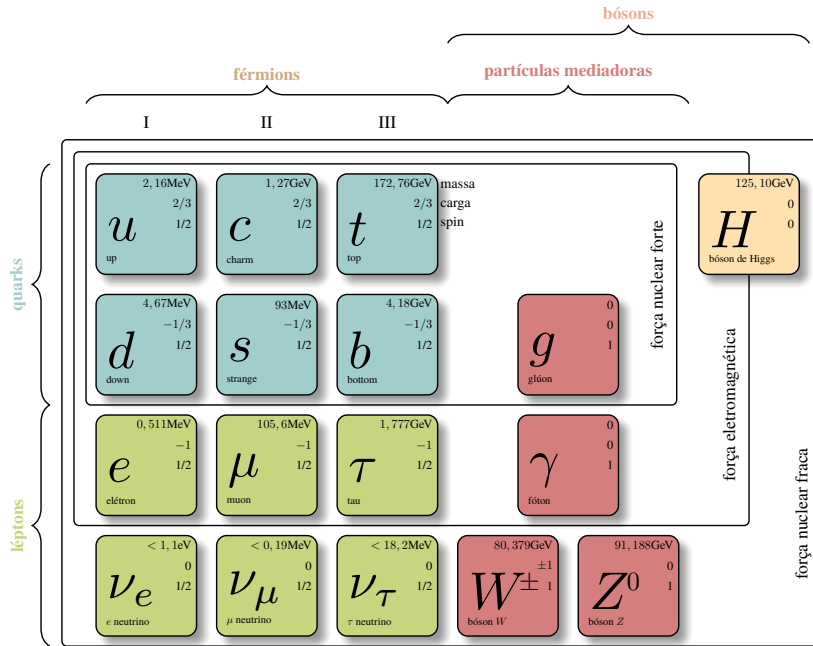
Segundo dados observacionais [6], temos que o conteúdo material do Universo consiste, como esboçado na Figura 4.1, em aproximadamente 68,5% de energia escura, cuja natureza ainda é uma questão em aberto e está presente no modelo Λ CDM através da Constante Cosmológica; cerca de 26,5% de matéria escura, outra componente cuja natureza ainda é tema de intenso debate e cerca de 5% de matéria ordinária.



Fonte: Adaptado de [59]

Se por um lado matéria e energia escura ainda configuram tema de árduos esforços a

Figura 4.2 - Diagrama representativo do Modelo Padrão da Física de Partículas.



Fonte: Adaptado de [60]

fim de se descobrir suas respectivas naturezas¹, matéria ordinária é bem conhecida. Sua descrição é feita através do chamado Modelo Padrão da Física de Partículas (MP) [6]. Na Figura 4.2 temos um diagrama representativo do MP, o qual provê uma descrição das partículas presentes no Universo e suas interações as quais, por sua vez, são descritas através da troca de outras partículas presentes neste mesmo modelo. Assim, o MP nos especifica os graus de liberdade dos sistemas existentes nas transições de fase eletrofraca e forte do Universo primordial.

Dividimos as partículas elementares no MP entre férmions (partículas de spin semi-inteiro) e bósons (partículas de spin inteiro). Os férmions, por sua vez são subdivididos entre *quarks* e léptons. Os *quarks* caracterizam-se por seus sabores os quais somam seis possibilidades, são elas: $up(u)$, $down(d)$, $strange(s)$, $charm(c)$, $top(t)$ e $bottom(b)$. Além disso, os *quarks*, além de possuírem dois estados de spin, carregam número bariônico de $1/3$ e carga de cor. Carga de cor diz respeito a um grau de liberdade interno de partículas que interagem fortemente [63], os *quarks* e glúons (retângulo mais interno da Figura 4.2). A dinâmica entre tais partículas é chamada de Cromodinâmica Quântica (ou QCD²). Há três possibilidades para a carga de cor: vermelho (R), verde (G) e azul (B).

¹Para uma abordagem detalhada sobre matéria e energia escura indicamos as referências [61] e [62].

²Do inglês *Quantum Chromodynamics*.

Para completar os férmions, temos os léptons, que são constituídos pelos léptons carregados, a saber: τ (tau), μ (muon) e o e (elétron); e pelos léptons neutros, a saber os neutrinos associados a cada um dos léptons carregados, ou seja, o neutrino do tau ν_τ , o neutrino do muon ν_μ e o neutrino do elétron ν_e . Enquanto os léptons carregados têm dois estados de spin, os neutrinos possuem apenas um estado de spin. Podemos ainda classificar os férmions através de gerações de modo que (u, d) e (ν_e, e) formam a primeira geração (representada pela coluna I da Figura 4.2), (c, s) e (ν_μ, μ) forma a segunda geração (representada pela coluna II) e a terceira geração (representada pela coluna III) é formada por (t, b) e (ν_τ, τ) .

Os bósons são subdivididos entre o bóson de Higgs, que possui spin-0 e é o responsável pelo mecanismo com o qual todas as demais partículas adquirem massa, bem como os bósons de calibre não massivos e os bósons de calibre massivos. Tanto os bósons de calibre massivos quanto os não massivos são chamados de partículas mediadoras, uma vez que é por meio delas que as forças fundamentais se manifestam. Os bósons de calibre massivos são os bósons Z^0 e W^\pm que possuem dois sabores e três estados de spin, um longitudinal e dois transversais. Tais partículas são as mediadoras da interação fraca, interação esta que ocorre entre todos os férmions e é responsável pelo decaimento β e o processo de fusão nuclear. No tocante aos bósons de calibre não massivos podemos citar primeiramente o fóton γ , que possui dois estados de spin e é a partícula mediadora da interação eletromagnética, aquela que ocorre entre partículas carregadas e que é descrita pela Eletrodinâmica Quântica (ou QED³).

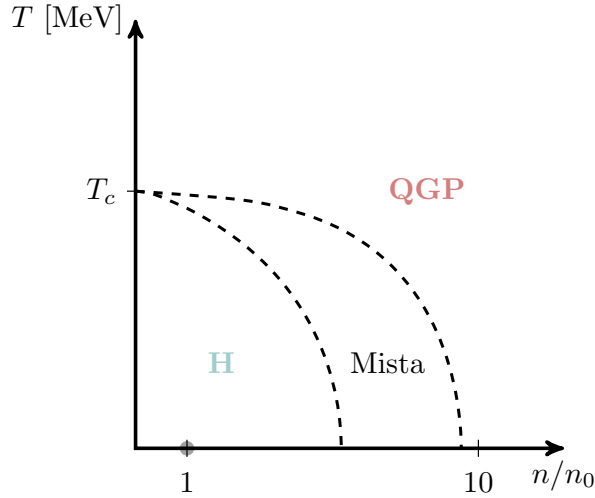
Outro bóson de calibre não massivo é a partícula mediadora da já citada interação forte, *i.e.*, o glúon g , que possui dois estados de polarização. Um aspecto importante presente na QCD e que a difere da QED é o fato de que, se por um lado o fóton não carrega carga elétrica e, dessa forma, não a transfere, por outro, o glúon carrega carga de cor [58], mais especificamente temos que este possui oito estados coloridos [11]. O fato de os glúons carregarem carga de cor é inerente à teoria de calibre de Yang–Mills (ou não–Abeliana) [58, 64] e possibilita, através da emissão de um glúon, que um *quark* mude de cor [11].

A interação forte, portanto, é descrita pela QCD. A intensidade dessa interação é proporcional à constante de acoplamento α_s que, através da renormalização em um laço, é dada por

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}^2}\right)}, \quad \beta_0 = 11 - \frac{2}{3}N_f, \quad (4.1)$$

³Do inglês *Quantum Electrodynamics*.

Figura 4.3 - Uma aproximação do diagrama de fase da QCD no plano $T-n$, sendo que n é a densidade bariônica e n_0 a densidade da matéria nuclear considerando uma transição de fase de primeira ordem.



Fonte: Adaptado de [9]

onde $\Lambda_{QCD} \sim \mathcal{O}(200)\text{MeV}$ [9, 58] é a escala da QCD, N_f é o número de sabores de quarks e Q é a escala dura característica do problema (*e.g.*, momento transferido, temperatura, potencial químico). Em suma, decorre que, dependendo do valor de α_s teremos ou um estado confinado ou desconfinado de *quarks* e glúons. Para compreender melhor tais limites, vamos analisar a Figura 4.3, onde temos um esboço do diagrama de fase no plano $T-n$ para a QCD.

Como dito anteriormente, a transição de fase forte consiste da passagem de um plasma de *quark*-glúons para um estado hadrônico. Isso pode ser obtido aumentando a temperatura, a densidade bariônica ou ainda a temperatura e a densidade bariônica [11]. Com efeito, da Figura 4.3 podemos notar que, se mantivermos a temperatura baixa o suficiente e variarmos a densidade bariônica para valores cada vez maiores, teremos que o sistema hadrônico transita para a QGP. Da mesma forma, para valores de n baixos o bastante, elevando-se a temperatura, podemos ver do diagrama esta mesma transição. Analisando agora em termos da constante de acoplamento, temos que, no regime onde Q^2 é suficientemente pequeno, α_s assume valores elevados e a interação se torna intensa levando ao chamado **confinamento** (ou ainda confinamento de cor) [14]. Nesse regime temos que a temperatura T é baixa e corresponde a região $T < T_c$ da Figura 4.3 onde esperamos um sistema hadrônico. Todavia, para valores de Q^2 elevados, temos que a constante de acoplamento se torna pequena. Como consequência, a interação se torna tão menos intensa quanto maiores forem os valores de Q^2 conduzindo à **liberdade assintótica** [15–18].

Temos, nesse caso, $T > T_C$ correspondendo a região onde esperamos uma fase partônica (QGP) conforme a Figura 4.3.

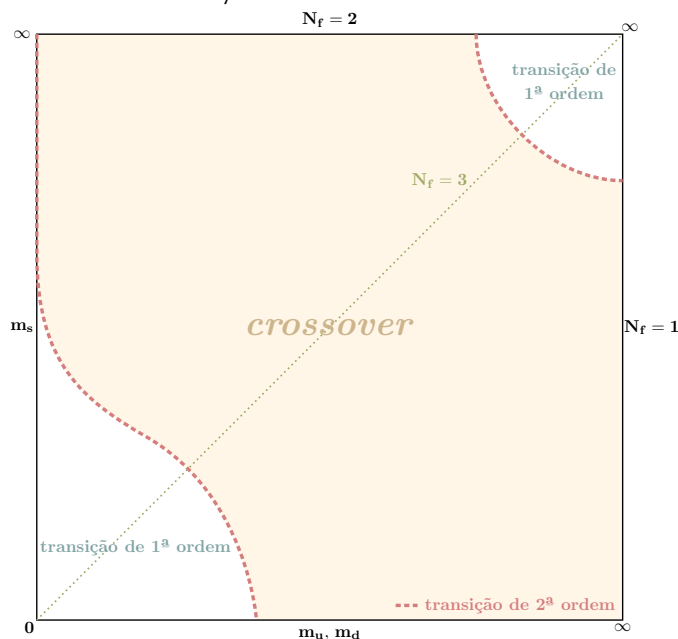
Como dito anteriormente, na tratativa da transição de fase forte que aqui faremos, iremos nos voltar apenas para a temperatura, uma vez que no Universo primordial a densidade bariônica é extremamente baixa, tal que [9, 12, 24]

$$\frac{n}{n_\gamma} = 6,133(27) \times 10^{-10} , \quad (4.2)$$

sendo que n_γ é a densidade de fótons. A partir disso, podemos extrair que o potencial químico bariônico é da ordem de $\mu_B/T \sim 10^{-9}$ [9]. Assumiremos também que o potencial químico leptônico é pequeno em magnitude [9] e, sendo assim, consideraremos de forma geral que $\mu = 0$. Isto posto, decorre que, para tempos primordiais onde a temperatura é extremamente elevada, a liberdade assintótica nos permite esperar a QGP dentro da qual *quarks* e glúons são fracamente interagentes e se comportam como partículas livres [58]. Em contrapartida, decorrido tempo suficiente, a temperatura decresce devido à expansão e, através do confinamento, esperamos que o sistema transite para a fase hadrônica, onde *quarks* e glúons são confinados nos hádrons (estados ligados incolores). A temperatura que delimita em qual das fases o sistema se encontra é a temperatura crítica, denotada por T_C na Figura 4.3.

É importante deixar claro que o diagrama apresentado na Figura 4.3 é uma versão simplificada. A tentativa de se determinar o exato diagrama de fase remonta à metade final do século 20 e é devida a Hagedorn [65], perdurando até os dias de hoje. Resultados recentes indicam que esse diagrama é mais complexo, contendo a possibilidade de um *crossover* para n pequeno ou, de forma similar, potencial químico bariônico pequeno [20, 26, 66]. Já para n grande e T pequeno há resultados indicando a possibilidade de uma fase supercondutora de cor (veja, *e.g.*, a Ref. [67]). Em adição a isso, devemos ter em mente o fato de que os cálculos de QCD na rede estão focados na região de potenciais químicos pequenos ou nulos, uma vez que o problema de sinal impossibilita tais cálculos para potenciais químicos não nulos [12]. Por outro lado, temos que no Universo Primordial, como mencionado há pouco, os potenciais químicos são baixos, menores do que os encontrados em colisões de íons pesados ultrarelativísticos. Como não há um entendimento de quão pequenos são os potenciais químicos encontrados nos primórdios do Universo, podemos conjecturar e analisar as consequências. De fato, estudos recentes indicam que mecanismos de leptogênese no Universo Primordial implicam em potenciais químicos não desprezíveis o que resultaria em uma transição de fase de primeira ordem [12, 27, 28]. Sendo assim, no que segue iremos apresentar os modelos por nós utilizados e que descrevem tanto uma transição de primeira ordem quanto um *crossover*.

Figura 4.4 - Ordem da transição de fase forte de acordo com a massa dos *quarks*.



Fonte: Adaptado de [9]

4.3 Modelos Fenomenológicos Para a Transição de Fase Forte

A existência do confinamento e liberdade assintótica nos obriga a considerar o problema da transição de fase forte de duas maneiras dependendo do regime de energia considerado. A primeira delas concerne à liberdade assintótica, *i.e.*, considerando-se regimes de energia elevada. Neste caso, um tratamento perturbativo, em outras palavras, uma abordagem que leva em consideração potências de α_s , pode ser utilizada. Em contrapartida, quando adentramos em regimes de energia baixa, onde lidamos com o confinamento, a magnitude da constante de acoplamento não mais nos permite utilizar um tratamento perturbativo. Um tratamento não-perturbativo se faz necessário [58, 63]. Neste caso utiliza-se a teoria de calibre na rede proposta por K. G. Wilson [14], corriqueiramente chamada de QCD na rede.

A QCD na rede, portanto, é uma abordagem não-perturbativa no escopo de um espaço-tempo Euclideo discretizado [63]. Discretiza-se o espaço-tempo em uma rede quadri-dimensional cujo espaçamento entre os sítios da rede (espaçamento de rede) é⁴ a . Tal espaçamento tem o papel de evitar os infinitos provenientes dos efeitos de curta distância [6]. Com base nessa abordagem pode-se obter o diagrama apresentado na Figura 4.4.

⁴Não confundir com o fator de escala que também é denotador por a .

Nessa figura temos a natureza da transição de fase forte em termos da massa dos *quarks* u , d e s , para $\mu = 0$ [9, 13]. Se $m_q \rightarrow \infty$ ($SU(3)$ puro) ou $m_q \rightarrow 0$ (simetria quiral) para todos os *quarks*, uma transição de primeira ordem ocorrerá [9, 11, 13]. Por outro lado, para $m_{u,d}$ leves e m_s mais massivo, temos que um *crossover* ocorrerá [9]. Os limiares entre as regiões de transições de primeira ordem e *crossovers* constituem transições de segunda ordem [13]. Podemos explorar ainda mais esse diagrama, todavia, as três possibilidades citadas são as mais interessantes. Não podemos olvidar de mencionar que o diagrama da Figura 4.4 também não está de todo em sua forma final, uma vez que baseia-se em QCD na rede e esta por sua vez é de natureza teórica, de modo a levar-se em consideração diversas aproximações necessárias. Aqui vale mencionar que, a despeito do problema de sinal mencionado anteriormente vários grupos têm se dedicado ao estudo de QCD na rede visando obter a equação de estado associada à sua dependência em relação a temperatura e potencial químico⁵.

Nesta seção, iremos apresentar modelos fenomenológicos que carregam em si os aspectos perturbativos e não-perturbativos de seus respectivos regimes de aplicabilidade. Apresentaremos primeiramente os modelos referentes à fase partônica, que são: o modelo de sacola do MIT [29], o modelo de sacola modificado C [30–32] e a parametrização baseada nos dados obtidos pelos cálculos da QCD na rede segundo a Ref. [25] e segundo a Ref. [20]. Subsequentemente iremos apresentar os modelos hadrônicos, que são: o gás de píons (PG⁶) e o modelo do gás de ressonâncias hadrônicas (HRG⁷), cuja parametrização utilizada é a da Ref. [33]. Por fim, apresentaremos brevemente a interpolação utilizada entre as fases partônica e hadrônica.

4.3.1 Modelo de Sacola do MIT

Iniciamos por considerar, para a fase partônica, o chamado **Modelo de Sacola do MIT** [29]. Neste modelo, *quarks* e glúons são considerados não massivos e não interagentes dentro de uma região finita a qual chamamos de sacola e dentro do qual podem ser tratados de forma perturbativa [63]. Já na parte externa da sacola os *quarks* são considerados infinitamente massivos [29, 63]. Para que haja confinamento, insere-se o parâmetro fenomenológico B . Esse parâmetro também é chamado de parâmetro de sacola ou ainda pressão de sacola, uma vez que pode ser interpretado como sendo a pressão direcionada para o interior da sacola [63]. Sendo assim, temos que o confinamento é obtido através do equilíbrio entre a pressão de sacola B e a pressão resultante da energia cinética dos *quarks* e glúons no interior da sacola [63]. Pode ocorrer que, aumentando-se suficien-

⁵Como exemplo recente temos a Ref. [68] onde é apresentada uma extrapolação dos resultados de QCD na rede para potencial químico finito.

⁶Do inglês *Pion Gas*.

⁷Do inglês *Hadron Resonance Gas*.

temente a temperatura e, conseqüentemente, a energia cinética dos *quarks* e glúons no interior da sacola, a pressão interna exceda a pressão de sacola B . Quando isso ocorre, temos que o equilíbrio entre as pressões não se mantém de forma que a matéria de *quark*–glúons não mais estará confinada, *i.e.*, há o desconfinamento destes, levando à liberdade assintótica e, conseqüentemente, ao plasma de *quark*–glúons. Esse modelo configura uma transição de fase de primeira ordem e, portanto, há liberação de calor latente durante a transição de fase que, como veremos adiante, está relacionado com o parâmetro B .

As EoS segundo o modelo de sacola do MIT [29] para a QGP são dadas por

$$\varepsilon_{\text{QGP}}(T) = g_1 \frac{\pi^2}{30} T^4 + B, \quad (4.3)$$

$$P_{\text{QGP}}(T) = g_1 \frac{\pi^2}{90} T^4 - B, \quad T > T_C, \quad (4.4)$$

onde T_C é a temperatura crítica a ser definida adiante e g_1 são os graus de liberdade do sistema na fase partônica, tal que

$$g_1 = g_F + g_{\text{ef}} = \left[g_g + \frac{7}{8}(g_q + g_{\bar{q}}) \right] + \left[g_\gamma + \frac{7}{8} 2g_{\text{ef}}^F \right] = 47,5 + 14,25. \quad (4.5)$$

Na equação acima temos que g_1 contempla os graus de liberdade referentes ao setor forte g_F e ao setor eletrofraco g_{ef} . O primeiro concerne aos *quarks*, *antiquarks* e glúons sendo que o fator $7/8$ que antecede a parte de *quarks* e *antiquarks* é devido à estatística de Fermi–Dirac. A contribuição dos glúons leva em consideração os oito estados de cor e os dois estados de spin. Já a contribuição dos *quarks* e *antiquarks*, leva em consideração os dois estados de spin e, nesse caso, três sabores de *quarks* (*up*, *down*, *strange*), daí $g_F = 47,5$. A contribuição do setor eletrofraco diz respeito ao fóton e aos férmions leves, *i.e.*, e , μ , ν_e , ν_μ , ν_τ (não consideramos o tau (τ) pois $m_\tau \gg T_C$). Devemos salientar que o parâmetro de sacola é inserido na fase QGP para que o grande potencial seja normalizado como sendo 0 em $T = 0$ [58].

4.3.2 Modelo de Sacola Modificado

O modelo de sacola modificado, o qual denotaremos a partir de agora por C–BM⁸ é um modelo para a fase partônica obtido através de modificações do modelo de sacola do MIT. Tal modelo foi primeiramente considerado por Pisarski [30, 31] e, posteriormente, por Begun e colaboradores [32]. As modificações são efetuadas a fim de incluir fenomenologicamente as interações entre pártons e descrever os pormenores dos dados obtidos

⁸Do inglês *C Bag Model*.

pelos cálculos da QCD na rede [20, 26] para o plasma de *quark*-glúons [32].

Dessa forma, ao contrário do modelo de sacola do MIT [29], o C-BM busca descrever um *crossover* que ocorre suavemente, neste caso, no intervalo $150 \text{ MeV} < T < 200 \text{ MeV}$ [32]. As equações de estado para a fase partônica no C-BM são dadas por [32]

$$\varepsilon_{\text{QGP}}(T) = \sigma T^4 - CT^2 + B, \quad (4.6)$$

$$P_{\text{QGP}}(T) = \frac{\sigma}{3}T^4 - CT^2 - B, \quad T > T_i, \quad (4.7)$$

onde T_i é a temperatura de inflexão da quantidade $(\varepsilon - 3P)/T^4$. Vale ressaltar que neste modelo o sistema é considerado com valores de todas as cargas conservadas iguais a zero [32]. Estas equações demonstram ser uma boa aproximação para com os dados dos cálculos de rede para altas temperaturas [20, 26], *i.e.*, para a QGP e com (2+1) sabores de quarks. Para que as equações (4.6) e (4.7) descrevam de forma adequada os dados dos cálculos de rede é necessário utilizar [32]

$$\sigma = 13,01, \quad C = 6,06T_i^2, \quad B = -2,34T_i^4. \quad (4.8)$$

4.3.3 Lattice Ansatz 1

Subsequentemente temos a parametrização dos dados obtidos pelos cálculos da QCD na rede pela Colaboração HotQCD [25]. Chamá-lo-emos de *lattice ansatz-1*. A parametrização para a pressão é dada por [25]

$$\frac{P}{T^4} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \tanh [c_t (\tilde{t} - t_0)] \right\} \frac{P_{id} + a_n/\tilde{t} + b_n/\tilde{t}^2 + c_n/\tilde{t}^3 + d_n/\tilde{t}^4}{1 + a_d/\tilde{t} + b_d/\tilde{t}^2 + c_d/\tilde{t}^3 + d_d/\tilde{t}^4}, \quad (4.9)$$

cujas constantes possuem os valores expostos na Tabela 4.1 com $T_c = 154 \text{ MeV}$ sendo a temperatura de transição da QCD escolhida por conveniência. Além disso, temos que P_{id} é o valor de P/T^4 para um gás ideal considerando-se os graus de liberdade para a fase partônica como sendo $g = 47,5$ [25]. Portanto, temos que a parametrização dada pela equação (4.9) diz respeito à pressão considerando (2+1) sabores de quarks a qual é válida no intervalo de temperatura $100 \text{ MeV} \leq T \leq 400 \text{ MeV}$ [25]. Essa parametrização descreve um *crossover* que, nesse caso, é esperado que ocorra em $T \in [145 \text{ MeV}, 163 \text{ MeV}]$ [25].

4.3.4 Lattice Ansatz 2

Deixamos por último a parametrização dos resultados obtidos pelos cálculos de QCD na rede fornecida pela Colaboração Wuppertal-Budapest [20], uma vez que essa parametri-

Tabela 4.1 - Parâmetros utilizados na equação (4.9).

| a_n | b_n | c_n | d_n |
|---------|-------------|--------|---------------|
| -8,7704 | 3,9200 | 0 | 0,3419 |
| a_d | b_d | c_d | d_d |
| -1,2600 | 0,8425 | 0 | -0,0475 |
| c_t | \tilde{t} | t_0 | P_{id} |
| 3,8706 | T/T_C | 0,9761 | $95\pi^2/180$ |

Fonte: Adaptado da Ref. [25]

Tabela 4.2 - Parâmetros utilizados na equação (4.10).

| t | h_0 | h_1 | h_2 | f_0 | f_1 | f_2 | g_1 | g_2 |
|---------------------|--------|---------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $T/200 \text{ MeV}$ | 0,1396 | -0,1800 | 0,0350 | 2,76 | 6,79 | -5,29 | -0,47 | 1,04 |

Fonte: Adaptado da Ref. [20]

zação descreve de forma satisfatória, como veremos adiante, o comportamento para um gás de ressonâncias hadrônicas no regime de baixas temperaturas [20]. Daqui em diante tal parametrização, a qual descreve um *crossover* que, tipicamente, ocorre no intervalo $T \in [150 \text{ MeV}, 170 \text{ MeV}]$ [26], será chamada de *lattice ansatz-2*. Assim, a parametrização da anomalia do traço para o *lattice ansatz-2* é dada por [20]

$$\frac{\varepsilon - 3P}{T^4} = \exp\left(-\frac{h_1}{t} - \frac{h_2}{t^2}\right) \left\{ h_0 + \frac{f_0 [\tanh(f_1 t + f_2) + 1]}{1 + g_1 t + g_2 t^2} \right\}. \quad (4.10)$$

Os parâmetros utilizados na equação acima, considerando (2+1) sabores de quarks, são apresentados na Tabela 4.2.

Na Figura 4.5 temos uma comparação entre as pressões obtidas dos modelos partônicos apresentados acima. A curva contínua representa o resultado para o modelo de sacola do MIT considerando-se $B^{1/4} = 200 \text{ MeV}$. As curvas tracejada, traço-ponto e pontilhada representam os modelos C-BM, *lattice ansatz-1* e *lattice ansatz-2*. Note que a pressão para o modelo de sacola do MIT é significativamente maior do que a dos demais modelos.

Isso é devido ao fato de que, nesse modelo, não há interação entre *quarks* e glúons bem como ao fato de que os *quarks* são considerados não massivos.

4.3.5 Gás de Píons

No que tange à fase hadrônica, as equações de estado mais simples são aquelas referentes a um gás de píons não massivos (limite chiral [58]) e não interagentes. Esse cenário é uma boa descrição no regime de temperaturas suficientemente baixas ($\lesssim 60\text{--}100\text{ MeV}$ [20]) onde os píons são dominantes sobre os demais hádrons [33]. As EoS são dadas por

$$\varepsilon_{\text{H}}(T) = g_2 \frac{\pi^2}{30} T^4, \quad (4.11)$$

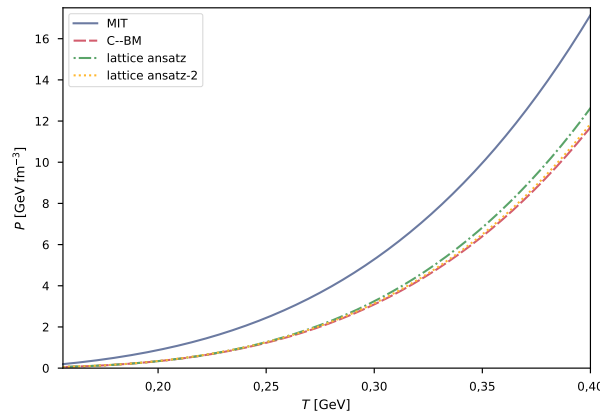
$$P_{\text{H}}(T) = g_2 \frac{\pi^2}{90} T^4, \quad T < T_{\text{C}}. \quad (4.12)$$

Nesse caso, temos que os graus de liberdade são dados por

$$g_2 = g_{\pi} + g_{\text{ef}} = 3 + 14,25, \quad (4.13)$$

Aqui temos que o fator de degenerescência g_2 leva em consideração os graus de liberdade para um gás de píons não massivos, *i.e.*, $g_{\pi} = 3$, dado que há três sabores de píons: π^{-} , π^0 e π^{+} . Assim como para a QGP, podemos, ou não, adicionar aos graus de liberdade da fase hadrônica os graus de liberdade referentes ao setor eletrofraco, g_{ef} . Chamaremos de

Figura 4.5 - Pressão no regime de temperatura da QGP para os modelos utilizados: MIT (curva contínua), C-BM (curva tracejada) e *lattice ansatz* (curva traço-ponto).



Fonte: o autor (2022)

MIT+PG o modelo que utiliza as equações (4.3)–(4.4) na fase partônica e as equações (4.11)–(4.12) na fase hadrônica.

4.3.6 Modelo de Ressonâncias Hadrônicas

Se por um lado no limite de temperaturas suficientemente baixas o sistema hadrônico é dominado por píons, por outro, conforme a temperatura aumenta, estados hadrônicos mais massivos começam a ter importância cada vez maior [20, 33]. Nesse regime um gás de píons não mais é adequado para descrever o sistema hadrônico. Faz-se necessário um modelo mais realista. Para tanto, utilizamos o modelo de ressonâncias hadrônicas (HRG).

O HRG, com o intuito de descrever um sistema hadrônico interagente, considera um sistema de hádrons e ressonâncias hadrônicas livres e não interagentes as quais contribuem para a termodinâmica do sistema [20, 25]. Isto pode ser entendido através dos resultados apresentados na Ref. [69] onde os autores demonstram que o efeito líquido das interações atrativa e repulsiva de um sistema hadrônico pode ser obtido através da inserção de ressonâncias hadrônicas livres [33]. A anomalia do traço para o modelo HRG é [25]

$$\frac{\varepsilon - 3P}{T^4} = \sum_{m_i \leq m_{max}} \frac{d_i}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\eta_i)^{k+1}}{k} \left(\frac{m_i}{T}\right)^3 K_1\left(\frac{km_i}{T}\right), \quad (4.14)$$

onde d_i é o fator de degenerescência da i -ésima espécie de partícula com massa m_i e $\eta_i = -1(+1)$ para bósons (férmions) [25]. No que segue, iremos utilizar a seguinte parametrização para a anomalia do traço do modelo HRG [23, 33]

$$\frac{\varepsilon - 3P}{T^4} = a_1 T + a_2 T^3 + a_3 T^4 + a_4 T^{10}, \quad (4.15)$$

onde

$$a_1 = 4,654 \text{ GeV}^{-1}, \quad a_2 = -879 \text{ GeV}^{-3}, \quad a_3 = 8081 \text{ GeV}^{-4}, \quad a_4 = -7.039.000 \text{ GeV}^{-10}. \quad (4.16)$$

A pressão pode ser obtida da seguinte forma. Por intermédio da equação (3.12), com $\mu = 0$, podemos escrever a anomalia do traço como

$$\frac{\varepsilon - 3P}{T^4} = T \frac{d}{dT} \left(\frac{P}{T^4} \right). \quad (4.17)$$

Integrando a equação (4.17) podemos então obter a pressão, tal que

$$\frac{P(T)}{T^4} - \frac{P(T_\star)}{T_\star^4} = \int_{T_\star}^T \frac{dT'}{T'} \frac{\varepsilon - 3P}{T'^4}, \quad (4.18)$$

onde T_\star é a temperatura inicial. Dessa equação, tendo obtido a pressão a partir da anomalia do traço, podemos obter as demais quantidades termodinâmicas através das relações apresentadas na Seção 3.2, procedimento este que constitui o método da integral [33, 70]. Perceba que este procedimento pode ser aplicado sempre que temos em mãos a anomalia do traço. Sendo assim, aplicamos este procedimento para o *lattice ansatz-2*, e para o MIT+HRG. Na fase hadrônica, onde utilizamos esse procedimento para este último caso, temos que $P(T_\star)/T_\star^4 = 0,1661$ com $T_\star = 70$ MeV [33]. Já para a aplicação no *lattice ansatz-2*, fizemos segundo a Ref. [20] onde a equação (4.18) é escrita como

$$\frac{P(T)}{T^4} = \int_0^T \frac{dT'}{T'} \frac{\varepsilon - 3P}{T'^4}.$$

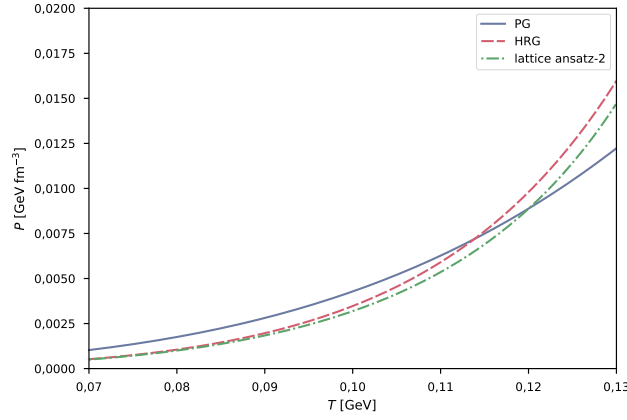
Na Figura 4.6 temos uma comparação entre as pressões obtidas utilizando os modelos PG (curva contínua) e HRG (curva tracejada), os modelos hadrônicos supracitados, bem como o *lattice ansatz-2*. Podemos perceber, como citado anteriormente, que o *lattice ansatz-2* possui relativa concordância com o modelo HRG. De fato, segundo exposto na Ref. [20], o *lattice ansatz-2* aproxima os resultados para o modelo HRG na região onde $T < 100$ MeV de modo que o desvio para com este modelo é tal que $\Delta(P/T^4) \leq 0,02$. Sendo assim, chamaremos, daqui em diante, a parametrização da colaboração Wuppertal–Budapest [20] de *lattice ansatz-2*. Já a combinação entre o modelo HRG com os modelos MIT, C–BM e *lattice ansatz-1* como MIT+HRG, C–BM e *lattice ansatz-1*, respectivamente.

4.3.7 Interpolação

No próximo capítulo iremos iniciar a discussão dos resultados obtidos. Para a obtenção destes resultados, consideramos as EoS apresentadas anteriormente. A presente seção tem como objetivo a apresentação da interpolação que se faz necessária para conectar o modelo HRG com os modelos C–BM e *lattice ansatz-1*. A interpolação é efetuada segundo a Ref. [23], onde

$$P_{\text{HRG}}(T) = P_{\text{mod}}(T_l) \left(\frac{T}{T_l} \right)^4 + g(T), \quad (4.19)$$

Figura 4.6 - Pressão no regime de temperatura da fase hadrônica para os modelos utilizados: PG (curva contínua) e HRG (curva tracejada).



Fonte: o autor (2022)

com $g(T)$ sendo dado por

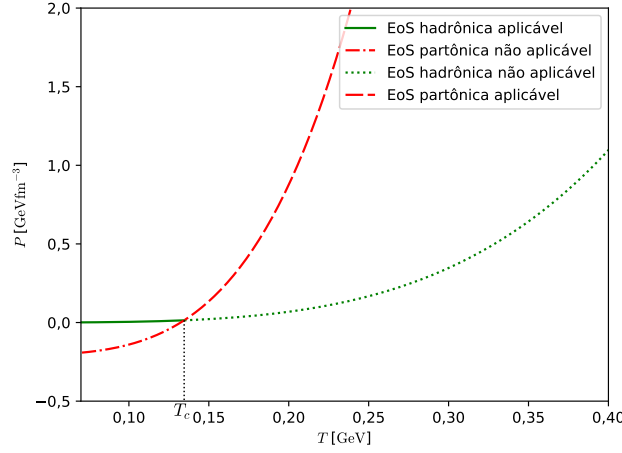
$$g(T) = T^4 \left[a_1 (T - T_l) + \frac{a_2}{3} (T^3 - T_l^3) + \frac{a_3}{4} (T^4 - T_l^4) + \frac{a_4}{10} (T^{10} - T_l^{10}) \right]. \quad (4.20)$$

A quantidade $P_{mod}(T_l)$ é a pressão dada pela equação de estado para a fase partônica do modelo utilizado seja ele o C-BM ou ainda o *lattice ansatz-1*. As constantes presentes na equação (4.20) são aquelas introduzidas na equação (4.16).

Vamos voltar agora ao caso das duas fases 1 e 2 apresentado na Seção 3.3. Como estamos considerando $\mu = 0$, a determinação das condições de coexistência entre tais fases é feita através das duas últimas relações da equação (3.13). Note que essas condições implicam que $P(T)$ deve ser, além de positiva, contínua. Podemos ver isso através da Figura 4.7 onde empregamos o MIT+PG com $B^{1/4} = 200$ MeV, onde a fase 1 pode ser tomada como sendo a fase partônica e a fase 2 como sendo a fase hadrônica. As curvas contínua e tracejada são aquelas onde utilizamos as equações hadrônica e partônica do MIT+PG em seus regimes de aplicabilidade, a saber $T < T_c$ e $T > T_c$, respectivamente onde, como veremos no Capítulo 5, $T_c = 134,6$ MeV. Essas curvas são as curvas que minimizam a energia livre e, por isso, são ditas estáveis [9]. Por outro lado, as extrapolações representadas pelas curvas pontilhada e traço ponto dizem respeito às regiões de não aplicabilidade das equações hadrônica e partônica do MIT+PG, *i.e.*, $T > T_c$ e $T < T_c$, respectivamente. Tais extrapolações são metaestáveis [9].

As condições de Gibbs estarão completamente satisfeitas no ponto de intersecção das

Figura 4.7 - Pressão em função da temperatura usando o MIT+PG com $B^{1/4} = 200$ MeV. As curvas pontilhada e traço ponto referem-se à não aplicabilidade das equações de estado correspondentes, enquanto que as curvas contínua e tracejada correspondem a aplicabilidade das respectivas EoS.



Fonte: o autor (2022)

curvas [9] e podemos determinar a temperatura na qual isso ocorre se definirmos $T_{QGP} = T_H$ como sendo a temperatura crítica T_C , a qual é proveniente da segunda condição da equação (3.13) e, com isso, igualarmos as equações (4.4) e (4.12). Teremos

$$P_{QGP}(T_C) = P_H(T_C) \quad \implies \quad g_1 \frac{\pi^2}{90} T_C^4 - B = g_2 \frac{\pi^2}{90} T_C^4,$$

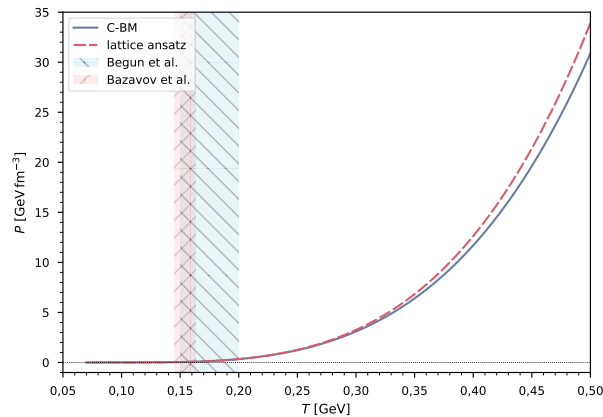
que, ao isolarmos T_C , obteremos

$$T_C = \left[\frac{90B}{(g_1 - g_2)\pi^2} \right]^{1/4}, \quad (4.21)$$

que é a temperatura crítica, *i.e.*, a temperatura na qual ocorre a transição de fase.

Dito isso, temos que as temperaturas de interpolação T_l para cada um dos modelos partônicos utilizados foram escolhidas a fim de se obter as curvas contínuas para $P(T)$ obedecendo, dessa maneira, as condições de Gibbs. Para os casos envolvendo os modelos C-BM e *lattice ansatz-1* utilizamos $T_l = 157$ MeV para o primeiro e $T_l = 130$ MeV para o segundo cujos resultados são os apresentados na Figura 4.8 através das curvas contínua e tracejada respectivamente.

Figura 4.8 - Pressão em função da temperatura usando o *lattice ansatz-1* (curva tracejada) e o C–BM (curva contínua). O setor eletrofraco é desconsiderado. As regiões sombreadas dizem respeito às regiões onde se espera um *crossover* para o C–BM (padrão "\") e para o *lattice ansatz-1* (padrão "/").



Fonte: o autor (2022)

4.4 Conclusão

Neste capítulo apresentamos o Modelo Padrão da Física de Partículas. Este modelo nos diz quais são os graus de liberdade presentes nos sistemas das transições de fase eletrofraca e forte. Posteriormente discorreremos sobre confinamento e liberdade assintótica, dois aspectos inerentes à QCD que possibilitam a transição de um sistema de *quarks* e glúons assintoticamente livres para um sistema hadrônico onde esses são confinados nos hádrons, a transição de fase forte. Enunciamos posteriormente os modelos fenomenológicos utilizados para a descrição dessa transição. Iniciamos pelos modelos partônicos: o modelo de sacola do MIT [29], o C–BM [30–32], o *lattice ansatz-1* [25] e o *lattice ansatz-2* [20]. O primeiro é um modelo simples que nos permite analisar claramente os aspectos essenciais de uma transição de fase de primeira ordem. O *lattice ansatz-1* diz respeito à parametrização dos dados obtidos pelos cálculos de QCD na rede pela colaboração HotQCD. Já o *lattice ansatz-2* é a parametrização dos resultados dos cálculos de QCD na rede obtidos pela colaboração Wuppertal–Budapest. O C–BM, por sua vez, é uma modificação do modelo de sacola do MIT que busca descrever os dados provenientes dos cálculos na rede efetuados pela colaboração Wuppertal–Budapest. Por fim apresentamos os modelos hadrônico de um gás de píons, o caso mais simples, e o modelo HRG [33], uma alternativa mais realista, bem como a interpolação utilizada para conectarmos esse com os resultados para a fase partônica. A parametrização *lattice ansatz-2* é utilizada tanto na fase hadrônica quanto na fase partônica, visto que descreve de forma satisfatória o comportamento do

HRG. Nos próximos capítulos, iremos estimar o impacto destas distintas abordagens para o tratamento da transição de fase forte nos parâmetros termodinâmicos e cosmológicos.

5 RESULTADOS: PARÂMETROS TERMODINÂMICOS

5.1 Introdução

Neste capítulo discorreremos sobre os resultados, na ausência do setor eletrofraco, referentes aos parâmetros termodinâmicos de interesse a saber: a temperatura (T), as densidades de energia (ε) e de entropia (s), as quantidades ε/T^4 e $3P/T^4$, bem como a anomalia do traço ($(\varepsilon - 3P)/T^4$) e a velocidade do som ao quadrado (c_s^2). As regiões sombreadas dos gráficos a serem apresentados referem-se aos intervalos de temperatura dentro dos quais espera-se que ocorra o *crossover* segundo a Ref. [32] (padrão "\"), que consideraremos para o C-BM e *lattice ansatz-2*¹; bem como segundo a Ref. [25] (padrão "/"), para o *lattice ansatz-1*.

5.2 Temperatura

Iremos, antes de mais nada, analisar a evolução temporal da temperatura de forma analítica utilizando o modelo MIT+PG. Temos, das equações (4.3)–(4.4), que

$$\varepsilon = 3P + 4B , \quad (5.1)$$

então, podemos reescrever a equação (2.10) como

$$\dot{\varepsilon} = -4\sqrt{\frac{8\pi G}{3}}\varepsilon(\varepsilon - B) , \quad (5.2)$$

a qual é válida tanto para a fase QGP quando a fase hadrônica (nesse caso $B = 0$).

Para a fase da QGP a equação (5.2) possui solução [71]

$$\varepsilon_1(t) = B \coth^2 \left(\sqrt{\frac{32\pi GB}{3}} t \right) , \quad (5.3)$$

enquanto que para a fase hadrônica a solução é dada por [71]

$$\varepsilon_2(t) = \frac{3}{32\pi G} \frac{1}{t^2} . \quad (5.4)$$

¹Para evitar a poluição visual dos gráficos, restringimo-nos a região fornecida pela Ref. [32]. Em primeiro lugar pois inclui a região $T \in [150 \text{ MeV}, 170 \text{ MeV}]$ fornecida pela colaboração Wuppertal–Budapest [26] e, em segundo lugar, pois o C-BM reproduz os resultados desta mesma colaboração.

Mas $P_c = P_2(t_2) = P_H(T_c)$. Assim, das equações (5.1) e (5.3), temos que

$$P_2(t_2) = \frac{1}{32\pi G} \frac{1}{t_2^2}, \quad (5.5)$$

enquanto que, da equação (4.12)

$$P_H(T_c) = g_2 \frac{\pi^2}{90} T_c^4. \quad (5.6)$$

Igualando as equações (5.5) e (5.6), obtemos

$$\frac{1}{32\pi G} \frac{1}{t_2^2} = g_2 \frac{\pi^2}{90} T_c^4 \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{3}{32\pi G} \right) \frac{1}{t_2^2} = \left(g_2 \frac{\pi^2}{30} \right) T_c^4,$$

o termo entre parênteses do lado direito é igual a $\varepsilon_2(T)/T^4$ enquanto que o parênteses do lado esquerdo é igual a $\varepsilon_2(t)t^2$, logo

$$\left(\frac{t}{t_2} \right)^2 = \left(\frac{T_c}{T} \right)^4 \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{t_2}{t} \right)^2 = \left(\frac{T}{T_c} \right)^4. \quad (5.7)$$

Ou seja, temos que a temperatura de Universo decresce com $T \propto t^{-1/2}$, como havíamos mencionado anteriormente, permitindo-nos esperar um início com temperatura extremamente elevada e evoluído para temperaturas menores conforme ocorre a expansão.

É útil introduzirmos aqui o tempo de transição, Δt , em sua forma analítica. Esse é dado por [24, 58]

$$\Delta t = -\frac{4}{3} t_U \sqrt{r-1} \left(\arctan \sqrt{3} - \arctan \sqrt{4r-1} \right), \quad (5.8)$$

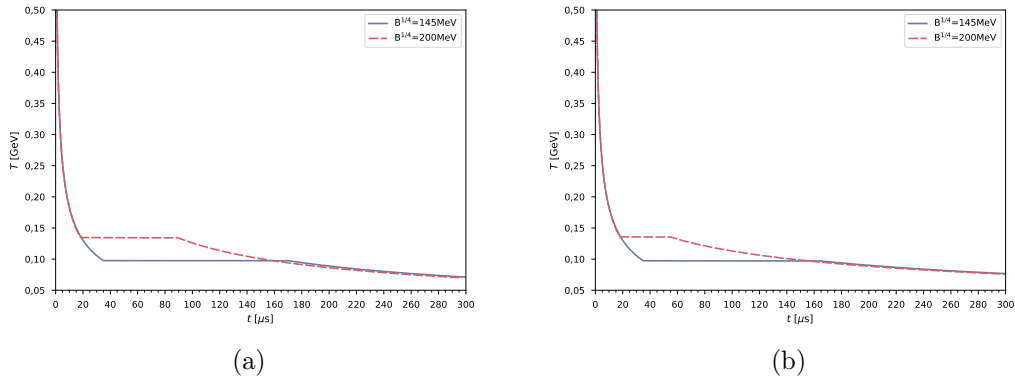
onde

$$t_U = \left(\frac{32\pi G B}{3} \right)^{-1/2} \quad (5.9)$$

é o parâmetro de escala temporal e $r = g_1/g_2$ é a razão dos graus de liberdade entre as fases partônica e hadrônica.

Podemos, agora, explorar o comportamento da temperatura para cada um dos modelos por nós considerados. Podemos, de início, analisar a influência da escolha do parâmetro de sacola B para os modelos MIT+PG e MIT+HRG. Para ambos os casos consideremos os seguintes valores: $B^{1/4} = 145$ MeV (curvas contínuas) e $B^{1/4} = 200$ MeV (curvas traçadas). Utilizaremos, para tais modelos, estes mesmos valores durante todo o restante deste trabalho. A condição inicial considerada para a resolução da equação (2.10) é tal

Figura 5.1 - Temperatura em função do tempo para o MIT+PG (à esquerda) e MIT+HRG (à direita) com $B^{1/4} = 145 \text{ MeV}$ (curvas contínuas) e $B^{1/4} = 200 \text{ MeV}$ (curvas tracejadas).



Fonte: o autor (2022)

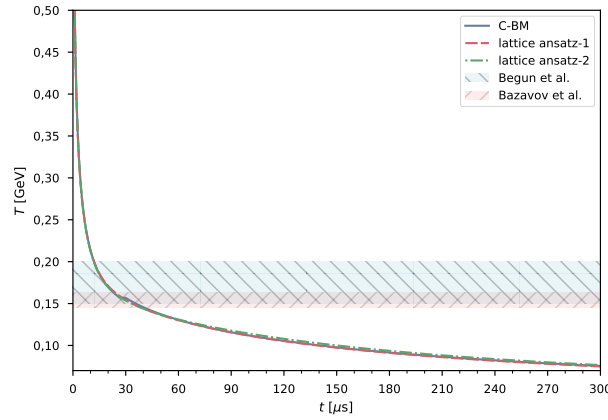
que $T(t_0) = 500 \text{ MeV}$ com $t_0 = 1 \mu\text{s}$.

O resultado para o modelo MIT+PG é apresentado na Figura 5.1(a). Nota-se que, para todos os valores considerados para B , há uma descontinuidade na temperatura, indicando uma transição de primeira ordem. Essa descontinuidade ocorre na temperatura crítica e perdura durante toda a transição cuja duração é dada pela equação (5.8). As temperaturas críticas obtidas, bem como os respectivos valores para a duração da transição Δt , são listados na Tabela 5.1.

Através da análise dos resultados expostos acima, podemos verificar dois aspectos importantes referentes a diferentes escolhas para o parâmetro de sacola. Em primeiro lugar, temos que a temperatura crítica será tanto maior quanto maior for o parâmetro B . Isso é facilmente verificado através da equação (4.21), donde podemos verificar que a temperatura crítica é diretamente proporcional à $B^{1/4}$. Em segundo lugar, é possível verificar que o tempo de transição é reduzido quando aumentamos o valor do parâmetro B . Isso se deve ao fato de que $\Delta t \propto t_U$ e $t_U \propto B^{-1/2}$ como é possível verificar na equação (5.8).

Dando prosseguimento à análise da influência de B , temos o resultado para o MIT+HRG exposto na Figura 5.1(b). A temperatura crítica T_C foi determinada encontrando-se a raiz de $P_{\text{HRG}}(T) - P_{\text{QGP}}(T) = 0$. Os resultados obtidos são listados na Tabela 5.1 juntamente com seus valores para Δt . Podemos perceber o mesmo comportamento que o obtido para o MIT+PG, *i.e.*, $T_C(\Delta t)$ maiores(menores) para maiores valores de B . Em adição, comparando as temperaturas críticas obtidas para os modelos MIT+PG e MIT+HRG podemos perceber que, para os mesmos valores de B , as tempe-

Figura 5.2 - Temperatura em função do tempo para o C–BM (curva contínua), *lattice ansatz-1* (curva tracejada) e *lattice ansatz-2* (curva traço-ponto).



Fonte: o autor (2022)

raturas críticas são próximas. Todavia, os valores para Δt diferem, mais precisamente são menores quando consideramos o MIT+HRG.

Por fim, temos os resultados para o C–BM (curva contínua), *lattice ansatz-1* (curva tracejada) e *lattice ansatz-2* (curva traço-ponto). Estes podem ser visualizados na Figura 5.2. Perceba que no caso das parametrizações, propriamente ditas, dos resultados dos cálculos de QCD na rede, *i.e.*, o *lattice ansatz-1* e *lattice ansatz-2*, a temperatura evolui suavemente durante os respectivos intervalos sombreados. No tocante à curva para o C–BM, cujas equações de estado são uma tentativa de descrever os resultados da rede, podemos

Tabela 5.1 - Para os modelos MIT+PG e MIT+HRG são listados os valores obtidos para T_C e Δt para cada valor de $B^{1/4}$.

| | $B^{1/4}$ | T_C | Δt |
|----------------|-----------|-----------|---------------|
| MIT+PG | 145 MeV | 97,5 MeV | 135,1 μ s |
| | 200 MeV | 134,6 MeV | 71,1 μ s |
| MIT+HRG | 145 MeV | 97,2 MeV | 129,0 μ s |
| | 200 MeV | 135,6 MeV | 37,3 μ s |

Fonte: o autor (2022)

perceber uma leve descontinuidade dentro da região sombreada. Essa descontinuidade, de certo, é devida ao fato de que tal modelo nada mais é do que o Modelo de Sacola do MIT, que descreve uma transição de fase de primeira ordem, modificado.

5.3 Densidade de energia e densidade de entropia

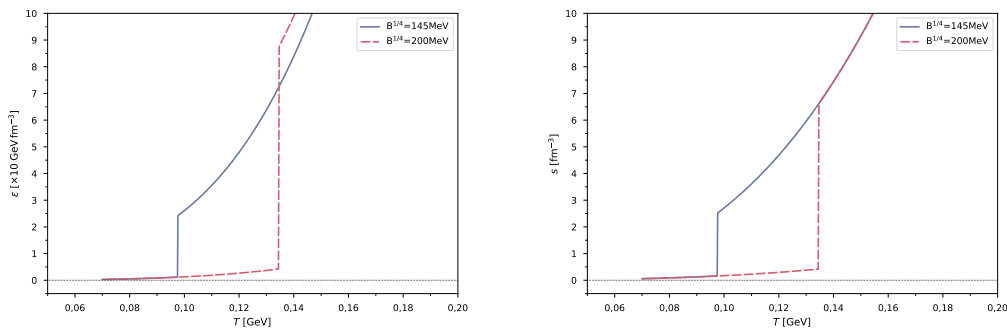
Na presente seção iremos apresentar os resultados obtidos para as densidades de energia ε e de entropia s em função da temperatura explorando primeiramente efeitos que o parâmetro de sacola acarreta nos resultados para o MIT+PG e o MIT+HRG. Posteriormente apresentamos os resultados para o C-BM, *lattice ansatz-1* e *lattice ansatz-2*. A análise dessas quantidades está intimamente relacionada com a natureza da transição. Veja, da equação (3.11) com $\mu = 0$, teremos que

$$s = \frac{\varepsilon + P}{T}.$$

Mas o calor latente L pode ser obtido em termos da densidade de entropia de modo que $L = T_C(s_{\text{QGP}} - s_{\text{H}})$. Assim, tomando a diferença da equação acima entre as fases partônica e hadrônica avaliadas em T_C , obtemos que $L = \varepsilon_{\text{QGP}} - \varepsilon_{\text{H}}$. Sendo assim, a descontinuidade nessas quantidades refletem, ou não, a existência de calor latente e, portanto, salientam a natureza da transição de fase.

Na Figura 5.3 temos, à esquerda, os resultados para a densidade de energia multiplicado por um fator de 10. À direita, apresentamos os resultados para a densidade de entropia. Podemos notar, em todos os casos, descontinuidades em $T \sim T_C$. Isso significa liberação de calor latente e, portanto, transições de fase de primeira ordem. Note que a magnitude da descontinuidade é proporcional ao valor de B . De fato, para ε temos, através das equações

Figura 5.3 - Densidade de energia (à esquerda) e densidade de entropia (à direita) em função da temperatura obtidas utilizando o MIT+PG com $B^{1/4} = 145 \text{ MeV}$ (curvas contínuas) e $B^{1/4} = 200 \text{ MeV}$ (curvas tracejadas).



Fonte: o autor (2022)

(4.3), (4.11) e (4.21) que

$$L = \varepsilon_{\text{QGP}} - \varepsilon_{\text{H}} = 4B .$$

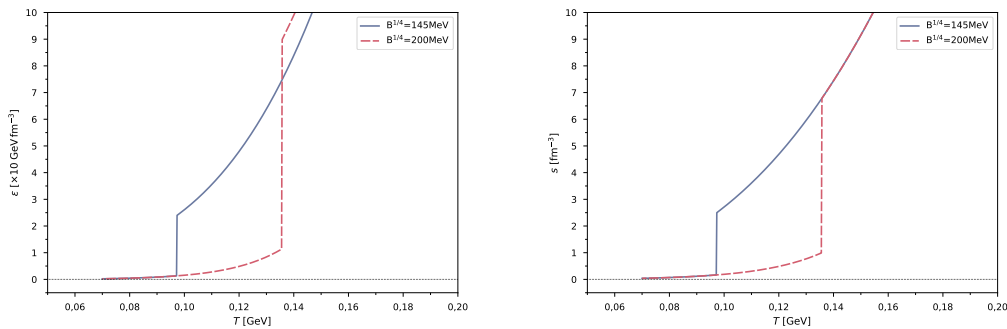
Outra forma de ver essa proporcionalidade é através da interpretação do parâmetro fenomenológico B em si. Podemos correlacionar o parâmetro fenomenológico B com a quantidade de energia necessária para se criar uma região perturbativa no interior do vácuo não perturbativo [63]. Quando, no entanto, há transição entre a QGP e a fase hadrônica, devido à conservação de energia, essa energia na forma do parâmetro de sacola precisa ser liberada. Temos, portanto, que quanto maior o valor de B , maior é essa energia liberada, a qual é o calor latente, e maior será a descontinuidade na densidade de energia. Já no caso da densidade de entropia temos que s não depende, explicitamente, de B . No entanto, igualando as expressões para L , teremos que

$$s_{\text{QGP}} - s_{\text{H}} = \frac{\varepsilon_{\text{QGP}} - \varepsilon_{\text{H}}}{T_{\text{C}}} \propto B^{3/4} ,$$

justificando a proporcionalidade da descontinuidade para com o valor do parâmetro de sacola.

Façamos agora a mesma análise para o MIT+HRG. Os resultados são aqueles da Figura 5.4. É possível notar uma única diferença em relação ao que foi apresentado na Figura 5.3 e essa diz respeito à região de aplicabilidade da equação hadrônica. Enquanto que naquela usamos um modelo que consiste em um gás de píons, nesta usamos o modelo de um gás de ressonâncias hadrônicas, o qual leva em consideração potências da

Figura 5.4 - Densidade de energia (à esquerda) e densidade de entropia (à direita) em função da temperatura obtidas utilizando o MIT+HRG com $B^{1/4} = 145 \text{ MeV}$ (curvas contínuas) e $B^{1/4} = 200 \text{ MeV}$ (curvas tracejadas).

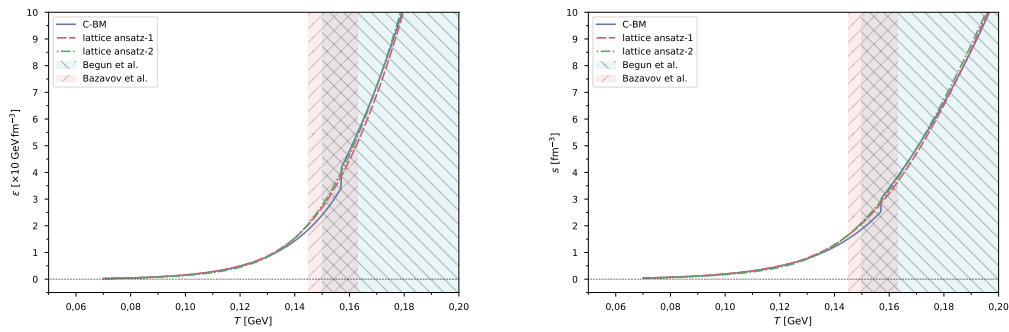


Fonte: o autor (2022)

temperatura de mais alta ordem.

Reservamos a Figura 5.5 para os resultados referentes ao C–BM (curvas contínuas), *lattice ansatz-1* (curvas tracejadas) e *lattice ansatz-2* (curvas traço–ponto). As curvas referentes ao *lattice ansatz-1* e ao *lattice ansatz-2*, demonstram continuidade em todo o intervalo de temperatura onde esperamos que o *crossover* ocorra em cada um dos casos. Por outro lado, as curvas referentes ao C–BM demonstram pequenas descontinuidades. Tais descontinuidades, como anteriormente, são fruto da natureza de primeira ordem por trás das modificações impostas para se obter o descrito pelos dados da rede. Salientamos que os resultados para a densidade de energia estão multiplicados por um fator de 10. Assim sendo, a descontinuidade para o C–BM é muito menor do que o visualizado.

Figura 5.5 - Densidade de energia (à esquerda) e densidade de entropia (à direita) em função da temperatura obtidas utilizando o C–BM (curvas contínuas), o *lattice ansatz-1* (curvas tracejadas) e o *lattice ansatz-2* (curvas traço–ponto).



Fonte: o autor (2022)

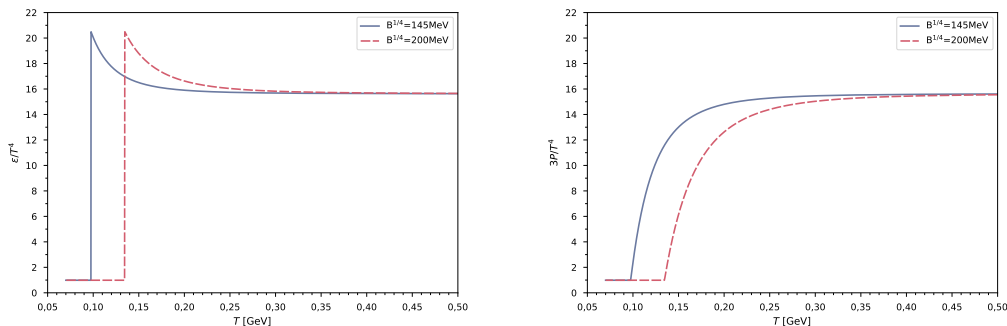
5.4 Quantidades ε/T^4 e $3P/T^4$

As quantidades ε/T^4 e $3P/T^4$ nada mais são do que a densidade de energia e a pressão normalizadas de modo a nos permitir analisar de forma clara o comportamento das EoS nos limites assintóticos. Procederemos em analisar tais quantidades da mesma forma que fizemos nas seções anteriores.

Iniciando pelo modelo MIT+PG, temos o resultado para a quantidade ε/T^4 mostrado no gráfico esquerdo da Figura 5.6. Nota-se que, para temperaturas a partir de ~ 300 MeV, ambas as curvas tendem ao esperado para um gás ideal, *i.e.*, $g_1\pi^2/30$. Já no limite termodinâmico onde $T = T_C$ [32], verifica-se uma descontinuidade. Ocorre que, para $T < T_C$ a quantidade ε/T^4 se comporta de forma constante ($g_2\pi^2/30$), mas para $T > T_C$ essa quantidade evolui com $\propto T^{-4}$ ($g_1\pi^2/30 + B/T^4$), *i.e.*, na transição essa quantidade sofre um salto de $g_2\pi^2/30$ para $g_1\pi^2/30 + B/T_C^4$. Uma vez que essa descontinuidade ocorre justamente em T_C , cujo valor é distinto para cada curva, como podemos ver na Tabela 5.1, resulta que as curvas apresentadas na Figura 5.6 são distintas apenas no que diz respeito à ocorrência da descontinuidade.

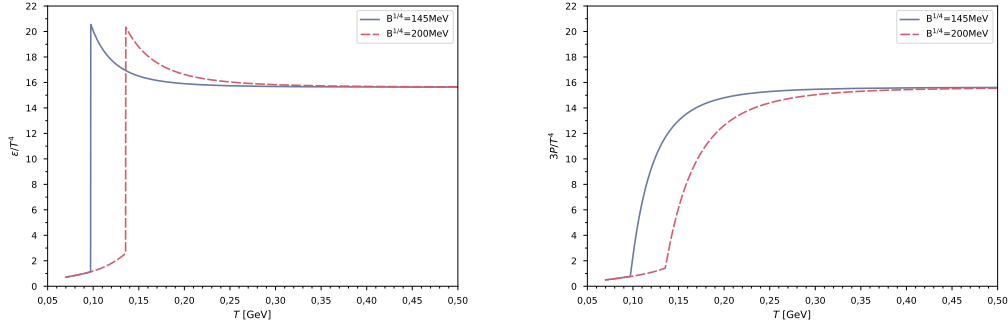
No gráfico direito da Figura 5.6 temos o resultado para a quantidade $3P/T^4$, ainda utilizando o MIT+PG. No limite assintótico para temperaturas suficientemente grandes vemos o mesmo comportamento que o obtido para a quantidade anterior. No que concerne ao limite onde $T = T_C$ notamos que as descontinuidades, as quais ocorrem na mesma ordem e pelo mesmo motivo que para ε/T^4 , são menos abruptas. Tal comportamento pode ser explicado através da análise do termo contendo o parâmetro B . Se por um lado temos

Figura 5.6 - Quantidades ε/T^4 (à esquerda) e $3P/T^4$ (à direita) em função da temperatura obtidas utilizando o MIT+PG com $B^{1/4} = 145$ MeV (curvas contínuas) e $B^{1/4} = 200$ MeV (curvas tracejadas).



Fonte: o autor (2022)

Figura 5.7 - Quantidades ε/T^4 (à esquerda) e $3P/T^4$ (à direita) em função da temperatura obtidas utilizando o MIT+HRG com $B^{1/4} = 145$ MeV (curvas contínuas) e $B^{1/4} = 200$ MeV (curvas tracejadas).



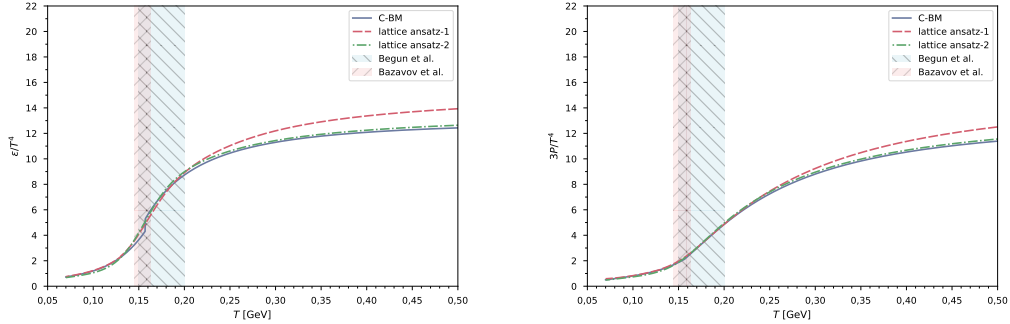
Fonte: o autor (2022)

que, para ε/T^4 , soma-se a quantidade B/T_C^4 ao termo assintótico ($g_1\pi^2/30$), por outro, para $3P/T^4$, subtraímos deste termo a quantidade $3B/T_C^4$.

No tocante às quantidades em questão para o modelo MIT+HRG temos os resultados na Figura 5.7. O cenário aqui difere apenas na região de aplicabilidade do modelo hadrônico. Para ambas as quantidades a região hadrônica evolui com a temperatura devido ao modelo HRG utilizado. No MIT+PG essa região é constante ($g_2\pi^2/30$). Além disso, o acréscimo em ε/T^4 devido à inclusão de ressonâncias hadrônicas [24] é evidente se comparado ao MIT+PG. Por outro lado, temos comportamentos similares aos obtidos anteriormente. As quantidades, seja para $B^{1/4} = 145$ MeV ou ainda para $B^{1/4} = 200$ MeV, tendem à $g_1\pi^2/30$ quando a temperatura é suficientemente elevada. A escolha de B causa o mesmo efeito que obtivemos para o caso anterior, *i.e.*, a ocorrência das descontinuidades em temperaturas maiores nos casos onde o parâmetro de sacola é maior.

Em relação à utilização dos modelos C–BM, *lattice ansatz-1* e *lattice ansatz-2*, temos os resultados da Figura 5.8. Perceba que ambas as quantidades, para o C–BM (curvas contínuas), se aproximam do valor esperado que, para este modelo, é igual a σ . Ademais, temos que esse valor é atingido por baixo, o que é requerido pelos cálculos de QCD na rede, como podemos verificar através da curva para o *lattice ansatz-2* (curvas traço–ponto) que é justamente a parametrização dos dados da rede [20] que o C–BM busca reproduzir. Além disso, podemos notar que a descontinuidade ainda é presente na quantidade ε/T^4 para o C–BM. Mesmo que de magnitude muito menor, essa descontinuidade perdura devido ao mesmo fato que observamos para o comportamento da temperatura em função do tempo. No tocante aos resultados para o *lattice ansatz-1* (curvas tracejadas) e para o

Figura 5.8 - Quantidades ε/T^4 (à esquerda) e $3P/T^4$ (à direita) em função da temperatura obtidas utilizando o C-BM (curvas contínuas), o *lattice ansatz-1* (curvas tracejadas) e o *lattice ansatz-2* (curvas traço-ponto).
 Begun et al. (hatched blue) and Bazavov et al. (hatched red) are also indicated in the legend.



Fonte: o autor (2022)

lattice ansatz-2 notamos, como esperado, uma evolução contínua durante todo o intervalo sombreado correspondente, *i.e.*, durante todo o intervalo onde esperamos um *crossover*. Veja que as curvas são qualitativamente similares, esboçando o mesmo comportamento, cujo limite assintótico para temperaturas elevadas demonstra ser de menor magnitude se comparado aos modelos ideais com o Modelo de Sacola do MIT [29] como modelo partônico. Isso nos mostra a influência da consideração de interações.

5.5 Anomalia do Traço

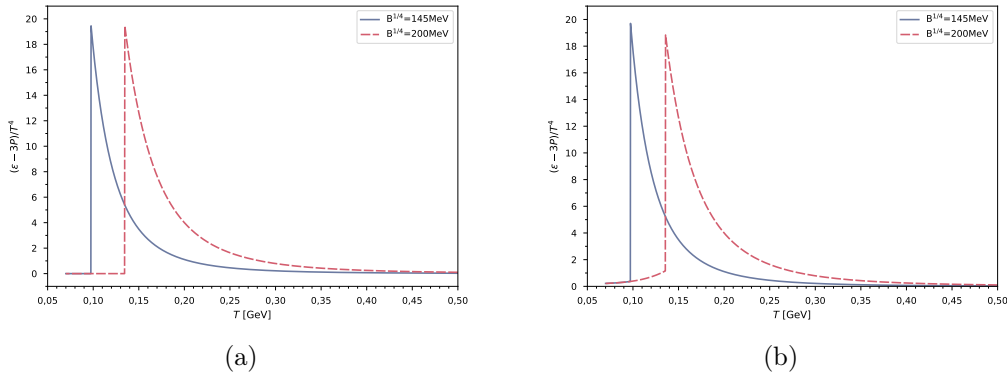
A anomalia do traço, definida como sendo o traço do tensor energia–momentum apresentado no Capítulo 2 dividido por T^4 , também chamada de medida de interação [11, 23] é a quantidade dada por: $(\varepsilon - 3P)/T^4$. Não raro na literatura essa quantidade é denotada por $\Delta(T)$, $I(T)/T^4$ ou ainda $\Theta^{\mu\mu}(T)/T^4$, aqui denotamos na forma explícita. Apresentaremos os resultados conforme feito nas seções anteriores, *i.e.*, iniciaremos por apresentar os modelos MIT+PG e MIT+HRG apontando as implicações das escolhas para o parâmetro fenomenológico B . Seguiremos em seguida com a explanação dos modelos C–BM, *lattice ansatz-1* e *lattice ansatz-2*.

Principiando pelo MIT+PG, temos que os resultados são os da Figura 5.9(a). A magnitude do máximo, bem como a temperatura T_{max} na qual este máximo ocorre, são listados, para cada valor de B , na Tabela 5.2. Após a ocorrência desse máximo, temos que a anomalia do traço decresce com T^{-4} . Por outro lado, para temperaturas menores do que T_{max} , temos que há uma descontinuidade onde, subitamente, a anomalia do traço sai de seu valor máximo para zero. Isso pois, na fase hadrônica, não temos a presença do parâmetro de sacola.

Se rearranjarmos a equação (5.1) e a dividirmos por T^4 , obteremos a anomalia do traço para o modelo MIT+PG

$$\frac{\varepsilon - 3P}{T^4} = \frac{4B}{T^4} = \frac{4(g_1 - g_2)\pi^2}{90} \left(\frac{T_C}{T}\right)^4, \quad (5.10)$$

Figura 5.9 - Anomalia do traço em função da temperatura para o MIT+PG (à esquerda) e MIT+HRG (à direita) com $B^{1/4} = 145$ MeV (curvas contínuas) e $B^{1/4} = 200$ MeV (curvas tracejadas).



Fonte: o autor (2022)

Tabela 5.2 - Os valores do máximo da anomalia do traço e seus respectivos valores de temperatura para cada modelo são tabelados.

| | $B^{1/4}$ | T_{max} | $[(\varepsilon - 3P)/T^4]_{max}$ |
|-------------------------|-----------|-----------|----------------------------------|
| MIT+PG | 145 MeV | 97,6 MeV | 19,4 |
| | 200 MeV | 134,7 MeV | 19,5 |
| MIT+HRG | 145 MeV | 97,3 MeV | 19,7 |
| | 200 MeV | 135,8 MeV | 18,8 |
| C-BM | — | 188,8 MeV | 3,9 |
| <i>lattice ansatz-1</i> | — | 201,2 MeV | 4,0 |
| <i>lattice ansatz-2</i> | — | 191,2 MeV | 4,1 |

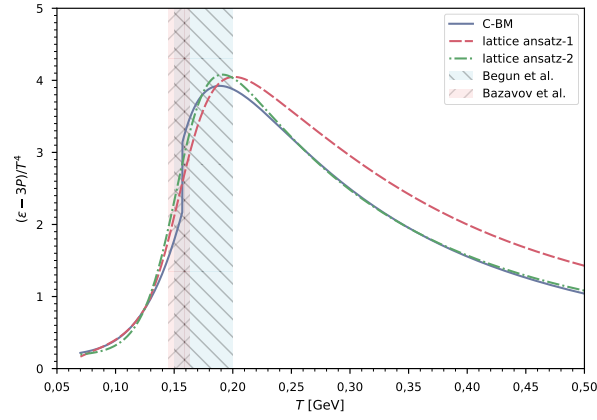
Fonte: o autor (2022)

onde usamos equação (4.21). Mas, na fase hadrônica, $B = 0$. Logo, a anomalia do traço é nula, como o obtido. Podemos ainda notar, da equação (5.10), que na região $T > T_{max}$, onde $B \neq 0$, a anomalia do traço passa a decair com T^{-4} como mencionado anteriormente. Por fim, verifica-se que as magnitudes do máximo são, como podemos notar da Tabela 5.2, similares para ambos os valores de B . Veja, comparando os valores da Tabela 5.2 com as temperaturas críticas da Tabela 5.1, para o mesmo modelo, podemos notar que $T_{max} \sim T_C$. Com isso, a equação (5.10) nos mostra que como esse máximo ocorre em $T_{max} \sim T_C$, temos que o termo entre parênteses se torna próximo da unidade resultando em um termo constante de aproximadamente 19,5.

Em se tratando do MIT+HRG, temos o resultado exposto na Figura 5.9(b). As magnitudes do máximo e suas respectivas temperaturas T_{max} são expostas na Tabela 5.2. Podemos notar o comportamento para $T > T_{max}$ similar ao caso onde usamos o MIT+PG, *i.e.*, $(\varepsilon - 3P) \propto T^{-4}$. Na região $T < T_{max}$ temos que, agora, a anomalia não mais é nula, como no MIT+PG, mas é variante com relação à temperatura devido à escolha do modelo HRG. No tocante à magnitude do máximo, temos que essa difere para diferentes valores do parâmetro de sacola. De fato, obtivemos que, para maiores valores de B menores são as magnitudes.

Finalizando os resultados para a anomalia do traço, temos os resultados apresentados na Figura 5.10. Esses resultados dizem respeito aos modelos C-BM (curva contínua), *lattice ansatz-1* (curva tracejada) e *lattice ansatz-2* (curva traço-ponto). Os seus respectivos valores para T_{max} e $[(\varepsilon - 3P)/T^4]_{max}$ podem ser verificados na Tabela 5.2. Da colabo-

Figura 5.10 - Anomalia do traço em função da temperatura para o C-BM (curva contínua), *lattice ansatz-1* (curva tracejada) e *lattice ansatz-2* (curva traço-ponto).



Fonte: o autor (2022)

ração Wuppertal–Budapest [20, 26] temos que $[(\epsilon - 3P)/T^4]_{max} = 4,1(1)$ com $T_{max} = 191(5)$ MeV. Já da colaboração HotQCD [25] temos que $[(\epsilon - 3P)/T^4]_{max} = 4,05(15)$ com $T \sim 204$ MeV. Dessa maneira, os resultados obtidos e apresentados na Figura 5.10 e na Tabela 5.2 estão de acordo com o esperado.

5.6 Velocidade do som ao quadrado

Na presente seção iremos apresentar o resultados obtidos para a velocidade do som ao quadrado c_s^2 . Seguiremos a mesma lógica das seções anteriores.

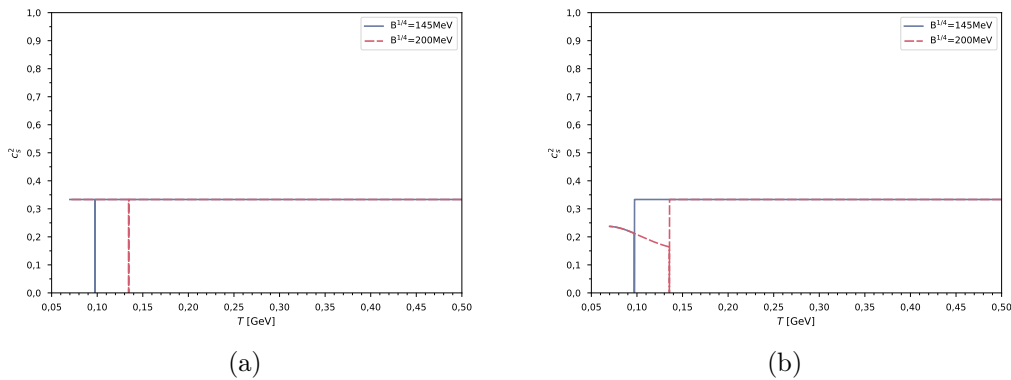
A velocidade do som ao quadrado pode ser escrita como

$$c_s^2 = \frac{\partial P}{\partial \varepsilon}, \quad (5.11)$$

cujos valor mínimo ocorre na transição. No MIT+PG, por exemplo, onde não temos interações e, portanto, esperamos um comportamento de uma gás ideal, temos que $c_s^2 = 1/3$ para $T \neq T_C$. Esse é, de fato, o valor esperado para um gás ideal. Por outro lado, temos que, em $T = T_C$, uma vez que a pressão é constante, resulta que $c_s^2 = 0$, claramente o valor mínimo $c_{s,min}^2$. O mesmo deve ocorrer para o MIT+HRG com exceção da região $T < T_C$ onde não esperamos o comportamento de uma gás ideal.

Na Figura 5.11(a) temos os gráficos para $c_{s,min}^2(T)$ obtidos considerando o MIT+PG. Os resultados para $c_{s,min}^2$ e T_{min} estão contidos na Tabela 5.3. Claramente vemos que c_s^2 se comporta como o esperado para um gás ideal de partículas não massivas para temperaturas diferentes da temperatura crítica, *i.e.*, $c_s^2 = 1/3$. Esse comportamento se deve ao fato de que o modelo MIT+PG descreve justamente um gás ideal de partículas não massivas. Da Tabela 5.3, vemos que para $T \sim T_C$, temos $c_s^2 \sim 0$. De fato, temos que, para qualquer tipo de transição, $c_{s,min}^2$ define onde a transição ocorre [23]. Por isso, como a transição no

Figura 5.11 - Velocidade do som ao quadrado em função da temperatura para o MIT+PG (à esquerda) e MIT+HRG (à direita) com $B^{1/4} = 145$ MeV (curvas contínuas) e $B^{1/4} = 200$ MeV (curvas tracejadas).



Fonte: o autor (2022)

Tabela 5.3 - Os valores do mínimo de c_s^2 e seus respectivos valores de temperatura para cada modelo são tabelados.

| | $B^{1/4}$ | T_{min} | $c_{s,min}^2$ |
|-------------------------|-----------|-----------|---------------|
| MIT+PG | 145 MeV | 97,6 MeV | 0 |
| | 200 MeV | 134,4 MeV | 0 |
| MIT+HRG | 145 MeV | 97,3 MeV | 0 |
| | 200 MeV | 135,8 MeV | 0 |
| C-BM | — | 157,1 MeV | 0,01 |
| <i>lattice ansatz-1</i> | — | 147,6 MeV | 0,14 |
| <i>lattice ansatz-2</i> | — | 143,8 MeV | 0,13 |

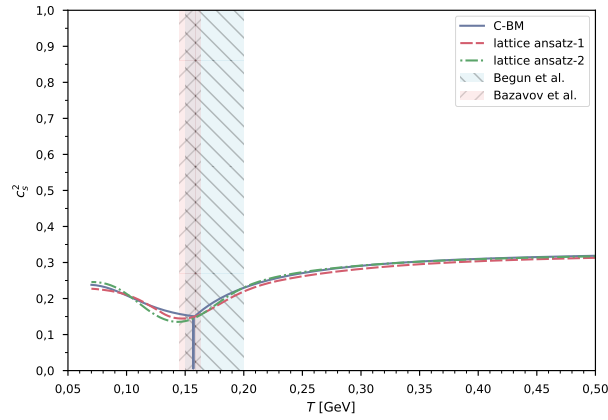
Fonte: o autor (2022)

MIT+PG ocorre em T_C o mínimo para $B^{1/4} = 200$ MeV é posterior se comparado aquele onde $B^{1/4} = 145$ MeV.

Na Figura 5.11(b) temos o resultado para o MIT+HRG. Note que a única diferença se comparado ao caso anterior é o comportamento de c_s^2 na região $T < T_C$, onde, neste caso, varia com a temperatura. Isso é esperado, já que nessa região estamos, agora, utilizando o modelo HRG. Os valores para $c_{s,min}^2$ e T_{min} são expostos na Tabela 5.3 onde vemos que o mínimo é igual a zero, como esperado para uma transição de primeira ordem, e $T_{min} \sim T_C$ implicando que quanto maior o valor de B mais adiante no eixo ordenado o mínimo ocorrerá.

Os resultados para o C-BM, *lattice ansatz-1* e *lattice ansatz-2* são apresentados na Figura 5.12 através das curvas contínua, tracejada e traço-ponto, respectivamente. Os valores de $c_{s,min}^2$ e T_{min} estão listados na Tabela 5.3. No que diz respeito ao *lattice ansatz-1* temos, como podemos ver na Tabela 5.3, que, tanto $c_{s,min}^2$ quanto T_{min} , estão dentro do esperado segundo a colaboração HotQCD, *i.e.*, $c_{s,min}^2 \simeq 0,15$ e $T_{min} \simeq (145 - 150)$ MeV [25]. Da mesma forma, o obtido para o *lattice ansatz-2* está de acordo com o esperado segundo a colaboração Wuppertal-Budapest [20, 26], *i.e.*, $c_{s,min}^2 = 0,133(5)$ e $T_{min} = 145(5)$ MeV. Por outro lado, o resultado para o C-BM, devido ao fato de ser um modelo modificado, esses valores não estão no intervalo esperado segundo a colaboração Wuppertal-Budapest, cujos dados tenta reproduzir, todavia, no regime de altas temperaturas o comportamento é idêntico. Perceba também que o comportamento esperado para um gás ideal não masivo não é atingido rapidamente como nos casos anteriores, mas demandam temperaturas

Figura 5.12 - Velocidade do som ao quadrado em função da temperatura para o C-BM (curva contínua) e *lattice ansatz* (curva tracejada).



Fonte: o autor (2022)

mais elevadas para tanto.

5.7 Conclusão

Esse capítulo consistiu da apresentação dos resultados termodinâmicos para as EoS consideradas. Iniciamos pela temperatura onde verificamos que esta apresenta descontinuidade em $T = T_c$ bem como o fato de que, quanto maior o parâmetro de sacola B menor será o tempo de transição e maior será a temperatura crítica para os casos onde utilizamos as EoS referentes ao modelo de sacola do MIT [29]. Já a temperatura para o modelo C-BM [30–32] apresentou uma leve descontinuidade fruto do fato de que esse modelo é uma modificação do próprio modelo de sacola do MIT [29]. A temperatura para as parametrizações dos cálculos de QCD na rede, ou seja, o *lattice ansatz-1* [25] e o *lattice ansatz-2* [20] são tais que nenhuma descontinuidade é observada, isso pois descrevem um *crossover*. Posteriormente, discorreremos sobre as densidades de energia e entropia demonstrando que as descontinuidades presentes nos casos do MIT+PG e MIT+HRG são relacionadas com a liberação de calor latente e são proporcionais à magnitude do parâmetro B . As mesmas quantidades para as parametrizações não demonstram descontinuidade, uma vez que o calor latente é exclusivo de transições de fase de primeira ordem. No tocante aos resultados para o C-BM notam-se descontinuidades cujo motivo se deve à natureza de primeira ordem do modelo original, aquele no qual o C-BM se baseia para se aplicar as modificações devidas.

No que concerne aos resultados para as quantidades ε/T^4 e $3P/T^4$, temos que estas nos

permitiram visualizar que, assintoticamente, os modelos MIT+PG e MIT+HRG tendem ao comportamento de um gás ideal mais celeremente do que os casos envolvendo o C-BM, *lattice ansatz-1* e *lattice ansatz-2*. Isso é devido ao fato de que, no regime da QGP, os dois primeiros não possuem interações, enquanto que os dois últimos sim. Além disso, vimos que ε/T^4 apresenta grande descontinuidade para os modelos MIT+PG e MIT+HRG. Para essa mesma quantidade, o C-BM carrega a descontinuidade apresentada nas quantidades anteriores pelo mesmo motivo.

De forma subsequente, verificamos o resultado para a anomalia do traço. Vimos que, nos casos onde não se consideram interações, o comportamento para temperaturas elevadas tende rapidamente ao esperado para um gás ideal, *i.e.*, tende a zero. Por outro lado, nos casos onde consideram-se interações esse comportamento é alcançado de forma muito menos celere. Verificamos também um máximo muito mais proeminente para os modelos MIT+PG e MIT+HRG devido a grande descontinuidade obtida na quantidade ε . Por último, apresentamos os resultados para $c_s^2(T)$. Verificamos, como esperado, um mínimo para c_s^2 na transição em todos os casos. Para essa também foi possível notar que os modelos que não consideram interações tendem mais rapidamente ao limite de um gás ideal, *i.e.*, $c_s^2 = 1/3$, se comparado aos demais casos.

Estes resultados demonstram grande sensibilidade para com a natureza da EoS adotada. As parametrizações dos cálculos de QCD na rede esboçam comportamentos contínuos típicos de um *crossover*. Já EoS que descrevem transições de primeira ordem produzem descontinuidades em todas as quantidades assinalando onde a transição ocorre. Uma tentativa de transformar fenomenologicamente o Modelo de Sacola do MIT em um modelo que descreva da melhor forma possível os resultados de QCD na rede, acaba por reduzir essas descontinuidades; todavia, elas ainda se fazem presentes na maioria das quantidades apresentadas, o que nos mostra claramente a sensibilidade mencionada. Portanto, com estes resultados, fica evidente a importância de se investigar as transições de fase em todas as suas ramificações possíveis. Tendo isso em vista, no próximo capítulo iremos apresentar nossos resultados para os parâmetros cosmológicos, onde exploramos a transição de fase por um viés cinemático.

6 RESULTADOS: PARÂMETROS COSMOLÓGICOS

6.1 Introdução

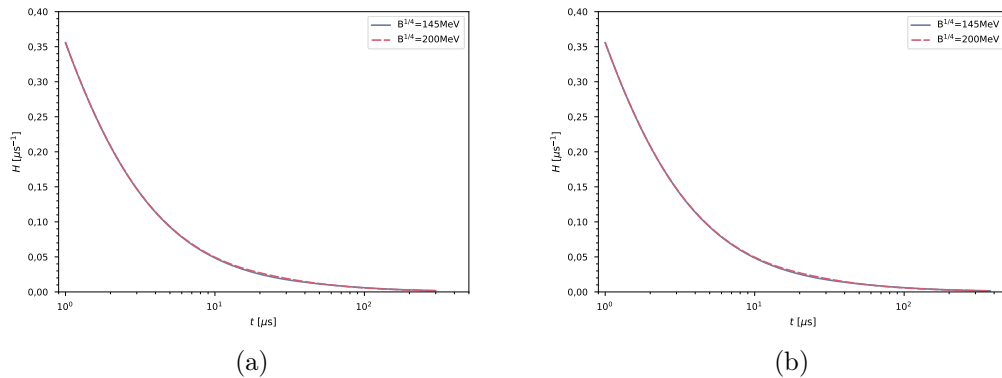
Neste capítulo iremos tratar dos resultados para os parâmetros cosmológicos, introduzidos na Seção 2.4, que são: o parâmetro de Hubble (H), o parâmetro de desaceleração (q) e o parâmetro *jerk* (j). Tais parâmetros configuram uma forma útil de descrever a dinâmica da evolução do Universo e suas possíveis flutuações e descontinuidades são intimamente relacionadas com a transição de fase forte.

6.2 Parâmetro de Hubble

O parâmetro de Hubble, que representa a taxa de expansão do Universo, é dado pela equação (2.12) e leva em consideração a derivada primeira do fator de escala $a(t)$. Iniciaremos por apresentar os resultados para tal quantidade na seguinte ordem: primeiramente os resultados usando o modelo MIT+PG e MIT+HRG, onde analisaremos a escolha para B ; posteriormente os resultados usando o modelo C-BM e por fim usando o *lattice ansatz-1* e o *lattice ansatz-2*.

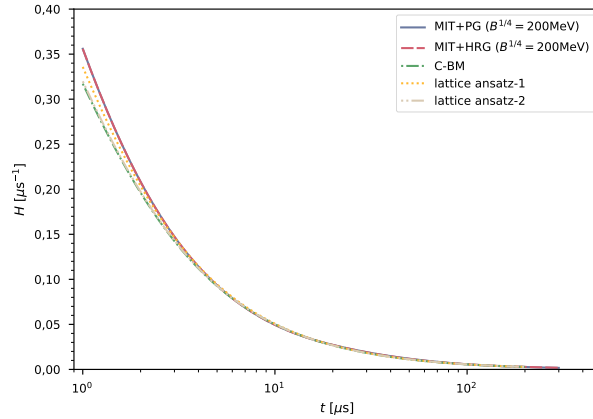
Na Figura 6.1(a) temos o parâmetro de Hubble calculado empregando o modelo MIT+PG. Vemos que não há diferença alguma entre as duas curvas indicando que o comportamento do parâmetro de Hubble não é alterado perante a escolha do parâmetro de sacola. Corroborando este fato, temos o resultado quando da utilização do MIT+HRG apresentado na Figura 6.1(b). Nota-se um comportamento idêntico de ambas as curvas, tanto em relação

Figura 6.1 - Parâmetro de Hubble em função do tempo para o MIT+PG (à esquerda) e MIT+HRG (à direita) com $B^{1/4} = 145 \text{ MeV}$ (curvas contínuas) e $B^{1/4} = 200 \text{ MeV}$ (curvas tracejadas).



Fonte: o autor (2022)

Figura 6.2 - Parâmetro de Hubble em função do tempo para o MIT+PG (curva contínua) e MIT+HRG (curva tracejada) com $B^{1/4} = 200 \text{ MeV}$, bem como para o C-BM (curva traço-ponto), *lattice ansatz-1* (curva pontilhada) e *lattice ansatz-2* (curva traço-ponto-ponto).



Fonte: o autor (2022)

uma a outra quanto se comparado ao caso anterior.

Tendo em vista essa similaridade, na Figura 6.2 temos os resultados para o MIT+PG e MIT+HRG com $B^{1/4} = 200 \text{ MeV}$ e para os modelos C-BM, *lattice ansatz-1* e *lattice ansatz-2*. Com isso podemos ter uma noção mais clara da similaridade dos resultados para o parâmetro de Hubble. De fato, é possível notar que a diferença é muito pequena na região de aplicabilidade das EoS para a QGP, onde podemos notar que os modelos onde não se consideram interações produzem um parâmetro de Hubble ligeiramente maior do que aqueles que dizem respeito ao C-BM e às parametrizações dos cálculos de QCD na rede. Já na região hadrônica, temos que as curvas se comportam de forma análoga.

6.3 Parâmetro de Desaceleração

Outro parâmetro de interesse na descrição da evolução do Universo é o parâmetro de desaceleração. Este parâmetro leva em consideração a segunda derivada do fator de escala, *i.e.*,

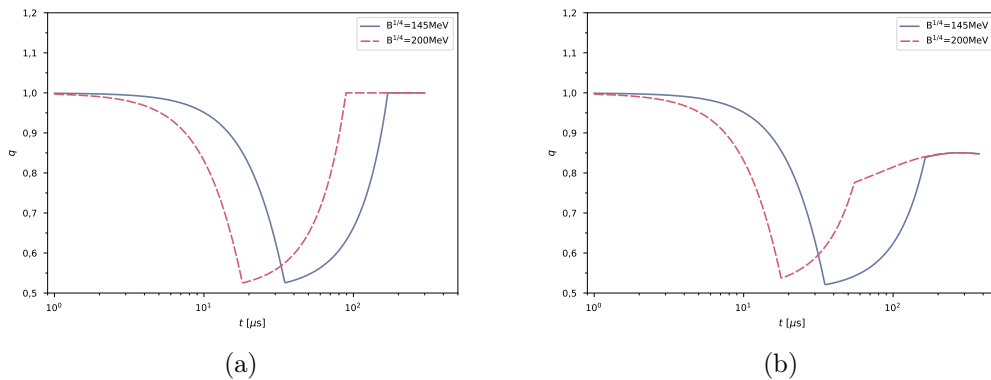
$$q = -\frac{\ddot{a}}{aH^2},$$

como havíamos apresentado anteriormente na equação (2.13).

Os resultados para $q(t)$ através da consideração do MIT+PG são apresentados na Figura 6.3(a). É evidente uma descontinuidade, de mesma magnitude, na transição de fase para ambos os valores de B . Tal descontinuidade, portanto, ocorrerá posteriormente para menores valores de B como é possível verificar na Figura 6.3(a). Isso pode ser compreendido lembrando que a transição ocorre quando a temperatura assume o seu valor crítico T_c . Como T_c é tão maior quanto maior for o valor de B , decorre que, conforme o Universo se expande, a temperatura do Universo decresce e, dessa forma, temperaturas mais elevadas ocorrem anteriormente às menores temperaturas.

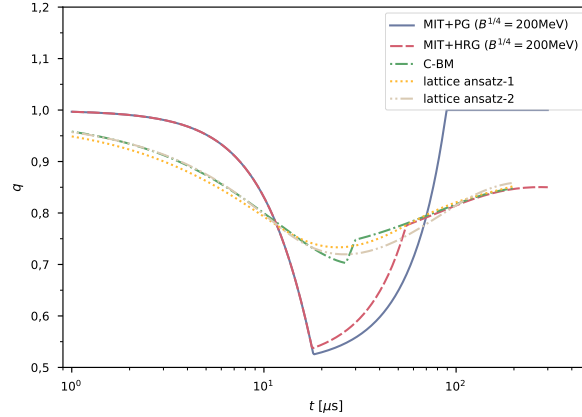
Um comportamento similar pode ser observado nos resultados para o MIT+HRG, os quais são apresentados na Figura 6.3(b). A diferença entre os modelos supracitados reside na região de aplicabilidade das equações de estado hadrônicas que, no presente caso e em detrimento do comportamento contínuo do caso anterior, possuem comportamentos variantes em relação ao tempo. Além disso, é possível notar que a descontinuidade possui

Figura 6.3 - Parâmetro de desaceleração em função do tempo para o MIT+PG (à esquerda) e MIT+HRG (à direita) com $B^{1/4} = 145 \text{ MeV}$ (curvas contínuas) e $B^{1/4} = 200 \text{ MeV}$ (curvas tracejadas).



Fonte: o autor (2022)

Figura 6.4 - Parâmetro de desaceleração em função do tempo para o MIT+PG (curva contínua) e MIT+HRG (curva tracejada) com $B^{1/4} = 200 \text{ MeV}$, bem como para o C-BM (curva traço-ponto), *lattice ansatz-1* (curva pontilhada) e *lattice ansatz-2* (curva traço-ponto-ponto).



Fonte: o autor (2022)

um mínimo menor para $B^{1/4} = 145 \text{ MeV}$, mostrando uma clara ligação entre as discontinuidades apresentadas neste capítulo com aquelas apresentados no Capítulo 5, *e.g.*, as discontinuidades da anomalia do traço.

Por sua vez, os resultados para o parâmetro de desaceleração utilizando os modelos C-BM, *lattice ansatz-1* e *lattice ansatz-2*, estão presentes na Figura 6.4. Inserimos juntamente a esses resultados aqueles referentes aos modelos MIT+PG (curva contínua) e MIT+HRG (curva tracejada) com o parâmetro de sacola $B^{1/4} = 200 \text{ MeV}$. Com isso, é possível notar que as discontinuidades presentes nos resultados destes últimos não são verificadas nos resultados para o C-BM e para as parametrizações *lattice ansatz-1* e *lattice ansatz-2*. Em vez de discontinuidades temos, na verdade flutuações mais suaves. Fica claro, portanto, que a consideração de modelos que descrevem um *crossover* suaviza as discontinuidades.

6.4 Parâmetro *jerk*

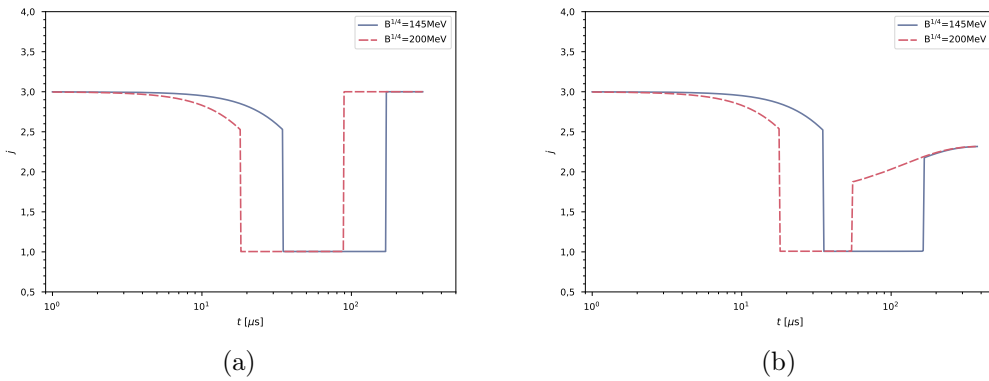
Por fim, temos o último dos parâmetros cosmológicos por nós considerado: o parâmetro *jerk*. Segundo sua definição, dada pela equação (2.14), o parâmetro *jerk* é definido em termos da terceira derivada do fator de escala, *i.e.*,

$$j = \frac{\ddot{a}}{aH^3} .$$

Vimos nas seções anteriores uma diferença na suavidade das curvas referentes aos parâmetros H e q , indicando que derivadas do fator de escala de maior ordem implicam em descontinuidades ou flutuações. Portanto, podemos esperar descontinuidades e flutuações ainda maiores para j . De fato, ao analisarmos os resultados obtidos utilizando os modelos MIT+PG e MIT+HRG, os quais estão presentes na Figura 6.5(a) e na Figura 6.5(b), respectivamente, podemos perceber uma súbita descontinuidade no início e no fim da transição. Algumas diferenças entre os dois modelos podem ser observadas. Em primeiro lugar, pode-se notar que a duração do mínimo, o qual pode ser relacionado com a duração da transição em si, é menor quando da consideração do modelo MIT+HRG para ambos os valores de B . Em segundo lugar, na região de aplicabilidade da EoS hadrônica os dois modelos se diferenciam, como deveríamos esperar.

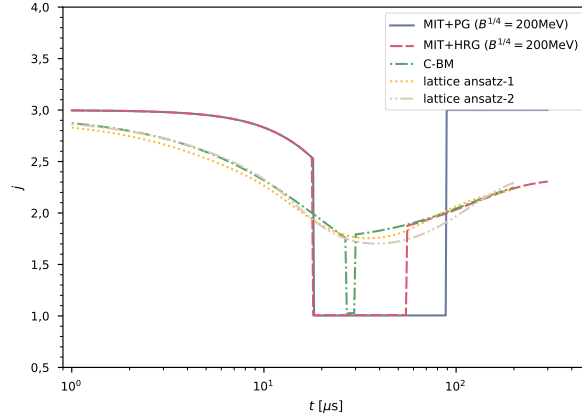
Os resultados obtidos empregando-se os modelos C-BM, *lattice ansatz-1* e *lattice ansatz-2* podem ser vistos na Figura 6.6. Os resultados para o MIT+PG (curva contínua) e MIT+HRG (curva tracejada) são apresentados juntamente a fim de se visualizar as

Figura 6.5 - Parâmetro *jerk* em função do tempo para o MIT+PG (à esquerda) e MIT+HRG (à direita) com $B^{1/4} = 145$ MeV (curvas contínuas) e $B^{1/4} = 200$ MeV (curvas tracejadas).



Fonte: o autor (2022)

Figura 6.6 - Parâmetro $jerk$ em função do tempo para o MIT+PG (curva contínua) e MIT+HRG (curva tracejada) com $B^{1/4} = 200 \text{ MeV}$, bem como para o C-BM (curva traço-ponto), $lattice\ ansatz-1$ (curva pontilhada) e $lattice\ ansatz-2$ (curva traço-ponto-ponto).



Fonte: o autor (2022)

diferentes anomalias presentes. Veja, podemos notar que a curva para $j(t)$ utilizando as parametrizações dos resultados de QCD na rede são mais suaves se comparadas às demais, isso pois descreve um *crossover*. Já a curva para o C-BM carrega uma anomalia mais abrupta, *i.e.*, uma descontinuidade proeminente, cujo motivo está associado ao fato de ser um modelo modificado. Disso extraímos que essa quantidade é mais sensível à natureza das EoS considerada se comparado às outras quantidades cosmológicas.

Ademais, podemos notar outro aspecto importante. Conforme consideramos quantidades que carregam em suas definições derivadas do fator de escala de ordens cada vez mais elevadas, percebemos que as anomalias se tornam mais evidentes. Podemos notar isso comparando os resultados para o parâmetro de Hubble com os resultados para o parâmetro $jerk$, onde vemos que este último demonstra flutuações ou descontinuidades, enquanto o anterior não.

6.5 Conclusão

Investigamos, neste capítulo, os resultados para os parâmetros cosmológicos H , q e j , valendo-se dos modelos fenomenológicos apresentados no Capítulo 4. Verificamos que a natureza da transição implica, com exceção do parâmetro de Hubble, se os parâmetros sofrem descontinuidades ou flutuações, *i.e.*, a natureza da transição está intimamente relacionada com o comportamento das anomalias presentes nas curvas dos parâmetros cosmológicos. Visto que cada um deles leva em consideração derivadas do fator de escala de ordens distintas, enfim verificamos progressivamente que maiores ordens de tal derivada

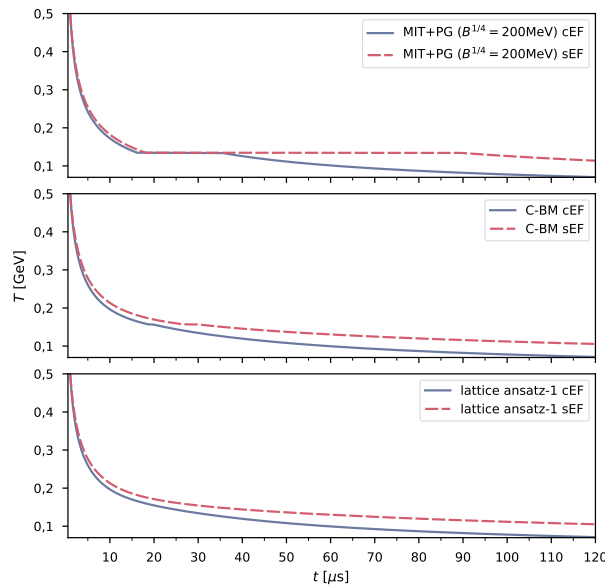
implicam maiores descontinuidades ou flutuações.

7 RESULTADOS COM SETOR ELETROFRACO

7.1 Introdução

Este capítulo é dedicado à apresentação dos resultados quando da consideração do setor eletrofraco. Mesmo tendo obtido resultados para todas as quantidades apresentadas no Capítulo 5 e no Capítulo 6 e para todos os modelos apresentados no Capítulo 4, neste capítulo selecionamos alguns desses resultados para três modelos diferentes. Assim faremos para tornar a leitura menos repetitiva de modo que, na Seção 7.2, apresentaremos os resultados para as quantidades termodinâmicas T , ε/T^4 , $3P/T^4$, $(\varepsilon-3P)/T$ e c_s^2 ; enquanto que, na Seção 7.3, apresentaremos os resultados para os parâmetros cosmológicos H , q e j . Tais resultados serão aqueles referentes à utilização dos modelos MIT+PG ($B^{1/4} = 200 \text{ MeV}$), C-BM e *lattice ansatz-1*. Introduziremos os respectivos resultados sem o setor eletrofraco a título de comparação.

Figura 7.1 - Temperatura em função do tempo para o MIT+PG com $B^{1/4} = 200 \text{ MeV}$ (gráfico de cima), C-BM (gráfico do meio) e *lattice ansatz-1* (gráfico de baixo). As curvas contínuas e tracejadas dizem respeito a consideração e não consideração do setor eletrofraco, respectivamente.



Fonte: o autor (2022)

Tabela 7.1 - Valores para obtidos para T_C e Δt condierando os modelos MIT+PG e MIT+HRG com o setor eletrofraco.

| | $B^{1/4}$ | T_C | Δt |
|----------------|-----------|-----------|--------------|
| MIT+PG | 145 MeV | 97,5 MeV | 36,5 μ s |
| | 200 MeV | 134,6 MeV | 19,2 μ s |
| MIT+HRG | 145 MeV | 97,2 MeV | 36,3 μ s |
| | 200 MeV | 135,6 MeV | 14,8 μ s |

Fonte: o autor (2022)

7.2 Parâmetros Termodinâmicos

A consideração do setor eletrofraco é efetuada através da adição do termo [23, 24, 52]

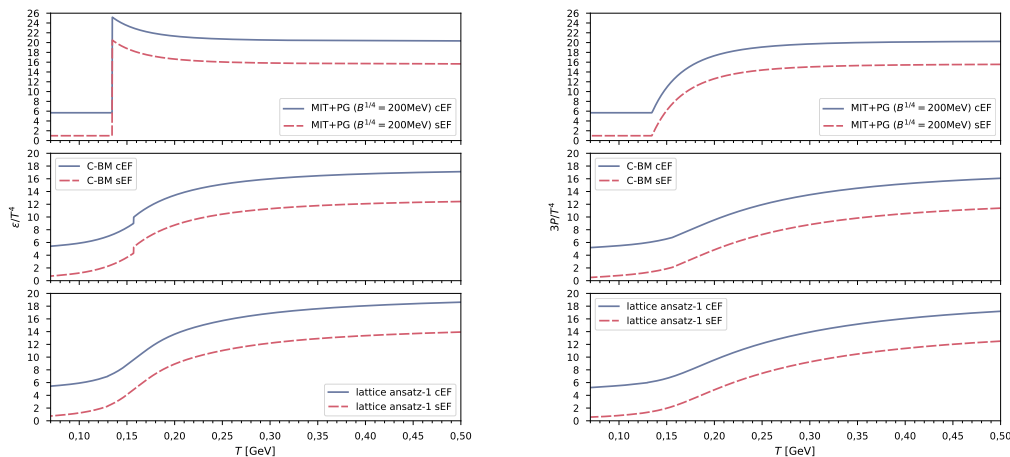
$$P_{\text{ef}} = \frac{\varepsilon_{\text{ef}}}{3} = g_{\text{ef}} \frac{\pi^2}{90} T^4, \quad (7.1)$$

com g_{ef} sendo os graus de liberdade referentes a fótons e férmions leves como apresentado, *e.g.*, na equação (4.5). Perceba, comparando com o modelo de um gás de pions apresentado na Subseção 4.3.5, que a equação (7.1) descreve um gás relativístico constituído por partículas não massivas e não interagentes [23].

Com isso podemos apresentar nossos resultados. Na Figura 7.1 temos os resultados para a temperatura T em função do tempo t . Veja que no caso do MIT+PG o resultado de se adicionar o setor eletrofraco é meramente a redução no tempo de transição e uma consequente temperatura menor. De fato, obtém-se o mesmo para o MIT+HRG. Na Tabela 7.1 temos os resultados para T_C e Δt para esses casos. Para o MIT+PG é fácil ver que isso é razoável através da equação (4.21) e da equação (5.8), onde temos dependências com $(g_1 - g_2)$ e g_1/g_2 , respectivamente. Para o caso do MIT+HRG podemos verificar a igualdade de T_C , com e sem o setor eletrofraco, lembrando que a temperatura crítica é obtida utilizando a condição de Gibbs (3.13), que nos assegura que $P_{\text{QGP}}(T_C) = P_{\text{H}}(T_C)$, de modo que P_{ef} , estando presente em ambos os lados da igualdade, se anula. No tocante aos resultados para o C-BM e *lattice ansatz-1*, notam-se comportamentos tais que as curvas referentes aos casos onde temos o setor eletrofraco apresentam temperaturas menos elevadas se comparadas àquelas onde não temos o setor eletrofraco.

No que diz respeito as quantidades ε/T^4 e $3P/T^4$ temos que a inserção do setor eletrofraco é feita através da adição de um mesmo termo constante que, através da equação (7.1),

Figura 7.2 - Quantidades ε/T^4 (à esquerda) e $3P/T^4$ (à direita) em função da temperatura com uso do MIT+PG para $B^{1/4} = 200 \text{ MeV}$ (gráfico de cima), C–BM (gráfico do meio) e *lattice ansatz-1* (gráfico de baixo). As curvas contínuas e tracejadas dizem respeito a consideração e não consideração do setor eletrofraco, respectivamente.

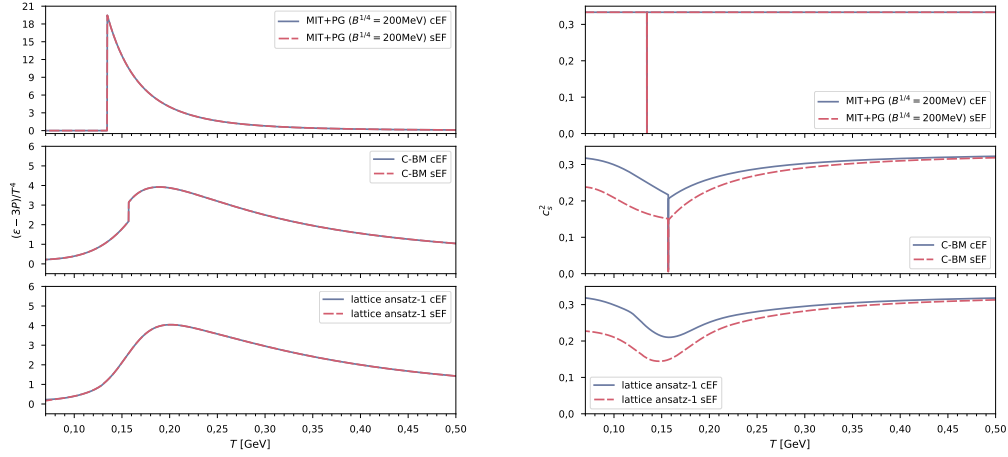


Fonte: o autor (2022)

é escrita simplesmente como $g_{\text{ef}}\pi^2/30$. Sendo assim, ao adicionarmos o setor eletrofraco resulta que essas quantidades serão, como podemos ver na Figura 7.2, $g_{\text{ef}}\pi^2/30$ (lembre-se que $g_{\text{ef}} = 14,25$) unidades maior do que as mesmas quantidades excluindo-se o setor eletrofraco. Esse comportamento é refletido nos resultados para a anomalia do traço exposta na Figura 7.3(a). Ora, se nas quantidades ε/T^4 e $3P/T^4$ adicionamos $g_{\text{ef}}\pi^2/30$, a subtração desses quantidades deve ser indiferente à presença do setor eletrofraco. É importante salientar que a magnitude das discontinuidades se mantêm as mesmas como podemos verificar na Figura 7.2(a) gráfico de cima. Isto pois as discontinuidades referentes a liberação de calor latente para os modelos que às têm é proporcional, apenas, ao parâmetro de sacola.

Por fim, os resultados para a velocidade do som ao quadrado são apresentados na Figura 7.3(b). Do primeiro gráfico podemos notar que o mínimo de c_s^2 ocorre exatamente no mesmo valor de T devido ao fato de que tal mínimo ocorre exatamente na temperatura crítica para os casos onde a transição é de primeira ordem. O mesmo ocorre para o MIT+HRG. Este fato pode ser visto através da Tabela 7.2 comparando-a com a Tabela 5.3. Para o C–BM obtemos o mesmo, *i.e.*, o mínimo de c_s^2 ocorrendo no mesmo valor de T tanto quando da consideração do setor eletrofraco quanto de sua não consideração. Isso é mais uma manifestação do resquício do modelo original, ou seja, do Modelo de

Figura 7.3 - Anomalia do traço (à esquerda) e velocidade do som ao quadrado (à direita) em função da temperatura para o MIT+PG com $B^{1/4} = 200$ MeV (gráfico de cima), C-BM (gráfico do meio) e *lattice ansatz-1* (gráfico de baixo). As curvas contínuas e tracejadas dizem respeito a consideração e não consideração do setor eletrofraco, respectivamente.



Fonte: o autor (2022)

sacola do MIT. Entretanto, vemos que a presença do setor eletrofraco proporciona, em detrimento do ponto de transição, c_s^2 com maior magnitude até $T \sim 300$ MeV. O mesmo pode ser observado para o gráfico para o *lattice ansatz-1*. No que diz respeito a este úl-

Tabela 7.2 - Valores tabelados do mínimo de c_s^2 e seus respectivos valores de temperatura considerando o setor eletrofraco.

| | $B^{1/4}$ | T_{min} | $c_{s,min}^2$ |
|--------------------------------|-----------|-----------|---------------|
| MIT+PG | 145 MeV | 97,6 MeV | 0 |
| | 200 MeV | 134,4 MeV | 0 |
| MIT+HRG | 145 MeV | 97,2 MeV | 0 |
| | 200 MeV | 135,8 MeV | 0 |
| C-BM | — | 157,1 MeV | 0,01 |
| <i>lattice ansatz-1</i> | — | 157,7 MeV | 0,21 |
| <i>lattice ansatz-2</i> | — | 154,7 MeV | 0,20 |

Fonte: o autor (2022)

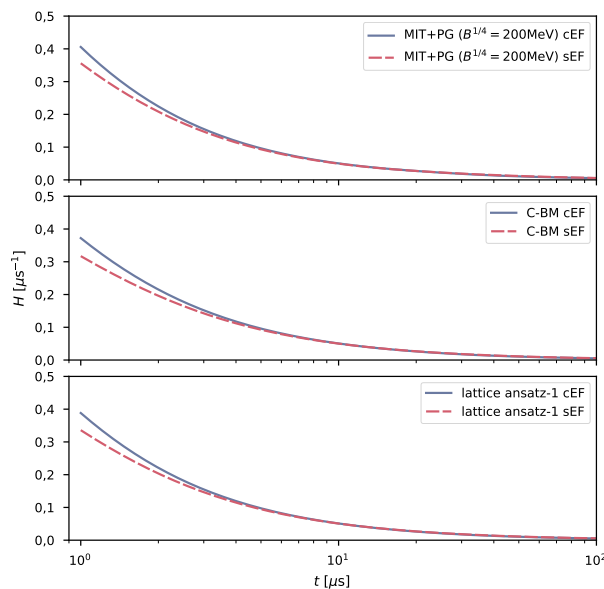
timo, bem como para o *lattice ansatz-2*, podemos notar da Tabela 7.2 que T_{min} é maior quando adicionamos o setor eletrofraco.

7.3 Parâmetros Cosmológicos

Nossos resultados últimos referem-se aos parâmetros cosmológicos considerando o setor eletrofraco. De início temos os resultados para aquele cuja definição é feita em termos da primeira derivada do fator de escala, *i.e.*, o parâmetro de Hubble, que é apresentado na Figura 7.4. Pode-se notar que a adição do setor eletrofraco não acarreta outra modificação senão uma taxa de expansão de maior magnitude na fase partônica.

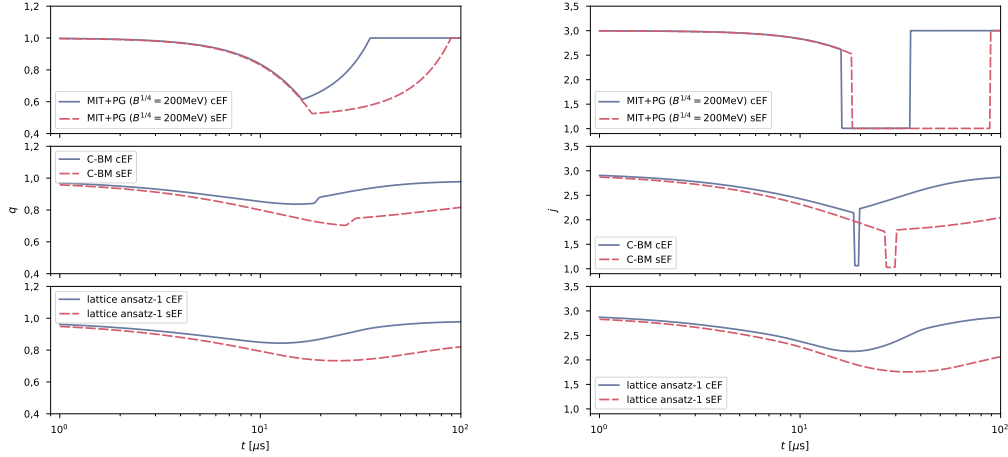
Assim como vimos no Capítulo 6, parâmetros cosmológicos definidos em termos de derivadas temporais de mais alta ordem do fator de escala esboçam anomalias mas proeminentes, *i.e.*, apresentam desvios para com o esperado para a fase de radiação dominante. Este comportamento não poderia ser outro para os resultados onde consideramos o setor eletrofraco, como é possível notar na Figura 7.5. Nessa figura temos os resultados para q à esquerda e j à direita. Vemos que, ao considerarmos transições de fase de primeira ordem, o efeito da adição do setor eletrofraco é a redução na duração da descontinuidade obtida e a antecipação do início desta, fatos estes que também verificamos no resultado para a temperatura em função do tempo. Além disso, para o parâmetro q observa-se um

Figura 7.4 - Parâmetro de Hubble em função do tempo para o MIT+PG com $B^{1/4} = 200 \text{ MeV}$ (gráfico de cima), C-BM (gráfico do meio) e *lattice ansatz-1* (gráfico de baixo). As curvas contínuas consideram o setor eletrofraco e as tracejadas não o consideram.



Fonte: o autor (2022)

Figura 7.5 - Parâmetros de desaceleração (à esquerda) e *jerk* (à direita) em função do tempo. Os modelos MIT+PG para $B^{1/4} = 200 \text{ MeV}$ (gráfico de cima), C-BM (gráfico do meio) e *lattice ansatz-1* (gráfico de baixo) foram utilizados. As curvas contínuas e tracejadas dizem respeito a consideração e não consideração do setor eletrofraco, respectivamente.



Fonte: o autor (2022)

mínimo de magnitude menor. Nos limites assintóticos é possível notar que a consideração ou não dos setor eletrofraco é irrelevante.

Veja agora os resultados para os demais casos. Para o C-BM vemos que o parâmetro de desaceleração exibe uma flutuação menos intensa que a descontinuidade obtida para a mesma quantidade mas utilizando o MIT+PG. Uma flutuação menos intensa é obtida utilizando-se o *lattice ansatz-1*. Nota-se que, para o C-BM e *lattice ansatz-1*, durante todo o intervalo considerado o parâmetro q com setor eletrofraco é maior do que aquele cujos resultados desconsideram tal setor. A similaridade do comportamento de q para todos os modelos reside na ocorrência do mínimo da anomalia. Podemos notar que este sempre ocorre anteriormente quando consideramos o setor eletrofraco.

Se por um lado a consideração do setor eletrofraco no MIT+PG causa apenas a redução da duração da descontinuidade e sua antecipação nas curvas para o parâmetro j , por outro tal consideração causa mais modificações para os demais modelos. Para as parametrizações da rede, nesta seção representado apenas pelo *lattice ansatz-1*, vemos que a consideração do setor eletrofraco causa os mesmos efeitos que aqueles obtidos para q , *i.e.*, um mínimo anterior e j maior durante todo o intervalo temporal considerado com uma tendência assintótica, para pequeno t , de igualdade. No que tange ao resultado para o C-BM, nota-se que a sensibilidade desse parâmetro para com a natureza da EoS é preservada e a

ancestralidade de primeira ordem se manifesta mais claramente. Deste modo, temos, a despeito da antecipação da anomalia que é comum a todos, tanto um comportamento similar ao obtido para o MIT+PG, quanto comportamentos similares obtidos para as parametrizações. O primeiro diz respeito à redução da duração da descontinuidade. Já os comportamentos similares aos obtidos para as parametrizações concernem a maiores valores de j , em todo o intervalo temporal, quando da consideração do setor eletrofraco bem como um comportamento assintótico similar apenas na fase partônica.

7.4 Conclusão

Neste capítulo analisamos a influência da presença do setor eletrofraco em algumas das quantidades termodinâmicas e os três parâmetros cosmológicos por nós considerados nesta Dissertação. Concluímos, portanto, que no caso da temperatura havemos de ter uma transição de fase de primeira ordem menos duradoura bem como temperaturas menores para todos os casos. As quantidades ε/T^4 e $3P/T^4$ são acrescidas por um montante de $g_{\text{ef}}\pi^2/30$ refletindo em uma anomalia do traço invariante perante a presença do setor eletrofraco. Em se tratando de c_s^2 verifica-se que, como o local da descontinuidade, de forma similar, T_C é inalterado, para transições de primeira ordem esta quantidade permanece inalterada. Devido a este mesmo fato a descontinuidade para o C–BM também ocorre no mesmo lugar. A influência da adição do setor eletrofraco é reservada, portanto, para as parametrizações da rede e, em detrimento do ponto de transição, para o C–BM. Vemos que nesses casos a velocidade do som ao quadrado é maior durante boa parte do intervalo de temperatura considerado. Por fim, verificamos que $c_{s,\text{min}}^2$ ocorre anteriormente para as parametrizações da rede quando temos a presença do setor eletrofraco.

Algumas das características obtidas para as quantidades termodinâmicas mencionadas acima são transferidas para os resultados dos parâmetros cosmológicos. No caso do parâmetro de Hubble, *e.g.*, vemos que este exibe magnitude maior quando temos presente o setor eletrofraco. Isso significa uma taxa de expansão maior que por sua vez significa um resfriamento mais intenso e, portanto, temperaturas menores. De fato, observamos isso da Figura 7.1. A redução em Δt é refletida na duração das descontinuidades de q (MIT+PG e MIT+HRG) e j (MIT+PG, MIT+HRG e C–BM). Já q (C–BM) e, para as parametrizações da rede, q e j , vemos um comportamento similar ao de c_s^2 , *i.e.*, magnitudes maiores quando adicionamos o setor eletrofraco, bem como um mínimo anterior.

8 CONCLUSÕES

Durante este trabalho apresentamos nossos resultados parciais concernentes aos parâmetros termodinâmicos e cosmológicos, primeiro desconsiderando o setor eletrofraco, cenário este presente em colisões de íons pesados ultrarelativísticos (*Little Bang*), ou o considerando, cenário mais próximo do esperado para o Universo Primordial. Verificamos a influência de diferentes escolhas para o parâmetro de sacola B no que diz respeito aos modelos que o utilizam. Com isso foi possível notar que diferentes escolhas para esse parâmetro implicam diferentes tempos de transição, mais precisamente, quando maior o valor de B menor o tempo de duração da transição, dado que $\Delta t \propto B^{-1/2}$. Na presença do setor eletrofraco Δt demonstra menores valores. Outra implicação para diferentes escolhas de B compete à ocorrência das descontinuidades, as quais ocorrem para temperaturas maiores, dado que tais descontinuidades ocorrem na transição que por sua vez residem em $T = T_c \propto B^{1/4}$. Tendo em vista que T_c não varia quando da adição do setor eletrofraco, tais descontinuidades permanecem inalteradas neste caso.

No tocante à escolha das EoS foi possível notar que, quando empregamos para a fase partônica aquelas referentes ao modelo de sacola do MIT [29], com ou sem o setor eletrofraco, as descontinuidades, características da própria natureza da transição, *i.e.*, uma transição de fase de primeira ordem, aparecem em todas as quantidades em análise, inclusive nos parâmetros cosmológicos corroborando o fato de que estes parâmetros carregam consigo informações provenientes da transição de fase forte. Quando valemos dos modelos C–BM [30–32], *lattice ansatz-1* [25] e *lattice ansatz-2* [20], os quais descrevem um *crossover* as descontinuidades anteriormente obtidas não mais se fazem presentes nos dois últimos casos. Já para o Modelo de Sacola Modificado [30–32] notam-se pequenas descontinuidades mesmo se tratando de um modelo que busca descrever os dados dos cálculos de QCD na rede [20, 26], os quais descrevem um *crossover*. Tais descontinuidades podem ser imputadas à natureza de primeira ordem do modelo de origem, *i.e.*, o Modelo de Sacola do MIT [29], no qual aplicam-se as modificações necessárias. No que tange aos parâmetros cosmológicos, notam-se flutuações para todos os parâmetros considerados para os casos do *lattice ansatz-1* [25] e *lattice ansatz-2* [20], flutuações estas que são maiores para maiores derivadas do fator de escala. Para o C–BM, notamos estas mesmas flutuações para q com ou sem setor eletrofraco. Todavia, para o parâmetro *jerk* as flutuações dão lugar à descontinuidades similares às obtidas usando o MIT+HRG, novamente devido à natureza de primeira ordem do modelo de origem. Isso mostra a sensibilidade dos parâmetros cosmológicos tanto para com a natureza da transição como para com a ordem da derivada presente em suas definições.

Conclui-se, portanto, que diferentes escolhas de EoS resultam em comportamentos dis-

tintos para as quantidades estudadas. Tais comportamentos são devidos à natureza da transição descrita por cada modelo e são importantes, pois a presença ou não de descontinuidades e flutuações podem produzir remanescentes que podem ser observados experimentalmente, *e.g.*, em detectores de ondas gravitacionais. Em particular salientamos a relação dos parâmetros cosmológicos com as descontinuidades e flutuações. Notamos que tais parâmetros apresentam flutuações para transições de fase de primeira ordem e flutuações para *crossovers*. A sensibilidade para com a natureza da transição fica evidente quando utilizamos o C–BM [30–32]. Enquanto, *e.g.*, o parâmetro de desaceleração demonstra uma flutuação, o parâmetro j apresenta uma descontinuidade similar à de uma transição de primeira ordem, nos mostrando que a natureza de primeira ordem "escondida" através das modificações salta aos olhos quando analisamos os parâmetros cosmológicos.

Como perspectivas futuras temos a análise da transição de fase forte para potenciais químicos não nulos. Este trabalho já está em andamento e será, muito em breve, submetido à publicação. Em adição temos o tratamento microscópico da transição de fase forte e sua influência em ondas gravitacionais.

A APÊNDICE A – DA OBTENÇÃO DE $g_{\mu\nu}$ E $R_{\mu\nu}$

Neste apêndice iremos apresentar brevemente a obtenção dos coeficientes métricos bem como o tensor de Ricci, os quais são essenciais para a derivação das equações de Friedmann e de aceleração, as quais serão obtidas no Apêndice B. Tendo em mente o Princípio Cosmológico, como consequência, devemos ter que a curvatura do Universo seja constante. Dessa forma, tensores responsáveis por descrever a curvatura devem depender apenas do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e não de derivadas deste. Através da geometria de Riemann temos que a curvatura é descrita pelo tensor de curvatura (ou tensor de Riemann) $R_{\mu\nu\lambda}^{\rho}$ que é definido como [72]

$$R_{\mu\nu\lambda}^{\rho} = \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} - \partial_{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\nu}^{\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\lambda}^{\rho} ,$$

onde os Γ 's são os chamados símbolos de Christoffel, o qual definiremos adiante. Uma escolha adequada do tensor de Riemann que satisfaz o requisito citado há pouco é [73]

$$R_{\mu\nu\lambda}^{\sigma}g_{\sigma\rho} = R_{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{k}{R_0^2} (g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}) , \quad (\text{A.1})$$

onde k é o termo de curvatura e R_0 é o raio de curvatura. Desconsiderando a parte temporal a equação (A.1) fica

$$R_{ijkl} = \frac{k}{R_0^2} (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) . \quad (\text{A.2})$$

Todavia, queremos o tensor de Ricci. Este pode ser obtido contraindo o tensor de Riemann. Dessa maneira, a equação (A.2) nos fornece, através dessa contração, o tensor de Ricci tendo desconsiderado a parte temporal

$$R_{jl} = R_{ijkl}g^{ik} = \frac{k}{R_0^2} (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) g^{ik} . \quad (\text{A.3})$$

Podemos simplificar a equação acima ao utilizarmos $g_{jk}g^{ik} = \delta_j^i$. Resulta, portanto, que

$$R_{jl} = \frac{k}{R_0^2} (3g_{jl} - g_{il}\delta_j^i) = 2\frac{k}{R_0^2}g_{jl} . \quad (\text{A.4})$$

De forma geral, podemos escrever o elemento de linha ds^2 como

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} ,$$

o qual é um invariante [74]. Impondo o Princípio Cosmológico, acabamos por excluir

termos cruzados. Logo,

$$ds^2 = g_{00} (dx^0)^2 + g_{11} (dx^1)^2 + g_{22} (dx^2)^2 + g_{33} (dx^3)^2 , \quad (\text{A.5})$$

onde $x^0 = ct$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$ e $x^3 = \phi$. Mas, como dito na Seção 2.2, a métrica que descreve um Universo em concordância com o Princípio Cosmológico é a métrica de Robertson-Walker [44–47] dada pela equação (2.2). Através da comparação entre as equações (2.2) e (A.5) obtemos os coeficientes métricos que compõem o tensor métrico. São eles,

$$g_{00} = 1 , \quad g_{11} = -a(t)^2 \frac{1}{1 - kr^2/R_0^2} , \quad g_{22} = -a(t)^2 r^2 , \quad g_{33} = -a(t)^2 r^2 \sin^2 \theta . \quad (\text{A.6})$$

Nos é útil escrever esses coeficientes de uma forma mais conveniente como

$$g_{00} = 1 \quad , \quad g_{\mu\lambda} = \begin{cases} -a(t)^2 \tilde{g}_{\mu\lambda} & \text{se } \mu = \lambda \\ 0 & \text{se } \mu \neq \lambda \end{cases} , \quad (\text{A.7})$$

onde $\tilde{g}_{\mu\lambda}$ independe do tempo.

Anteriormente, mencionamos os símbolos de Christoffel. Esses são definidos como [72]

$$\Gamma_{\mu\lambda}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\lambda g_{\mu\sigma} + \partial_\mu g_{\lambda\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\lambda}) . \quad (\text{A.8})$$

Dessa definição, resulta que

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} g^{0\sigma} (\partial_0 g_{0\sigma} + \partial_0 g_{0\sigma} - \partial_\sigma g_{00}) ,$$

que será nulo, *i.e.*,

$$\Gamma_{00}^0 = 0 , \quad (\text{A.9})$$

uma vez que a equação (A.7) define como $g_{\mu\nu} = 0$ os coeficientes com $\mu \neq \nu$. Temos ainda, da definição (A.8), que

$$\Gamma_{\mu 0}^0 = \frac{1}{2} g^{0\sigma} (\partial_0 g_{\mu\sigma} + \partial_\mu g_{0\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu 0}) .$$

Inserimos então os resultados da equação (A.7), bem como utilizamos a simetria dos símbolos de Christoffel que nos diz que $\Gamma_{\mu\lambda}^\rho = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho$. Disso, resulta que

$$\Gamma_{\mu 0}^0 = \Gamma_{0\mu}^0 = 0 . \quad (\text{A.10})$$

No tocante aos símbolos de Christoffel não nulos, temos que estes são obtidos de forma similar, *i.e.*, partimos de sua definição e aplicamos a simetria bem como os resultados da equação (A.7). Assim,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu\lambda}^0 &= \frac{1}{2}g^{0\sigma} (\partial_\lambda g_{\mu\sigma} + \partial_\mu g_{\lambda\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\lambda}) \\
&= \frac{1}{2}g^{00} (\partial_\lambda g_{\mu 0} + \partial_\mu g_{\lambda 0} - \partial_0 g_{\mu\lambda}) \\
&= -\frac{1}{2}\partial_0 g_{\mu\lambda} \\
\therefore \Gamma_{\mu\lambda}^0 &= \Gamma_{\lambda\mu}^0 = \frac{1}{c}a(t)\dot{a}(t)\tilde{g}_{\mu\lambda} ,
\end{aligned} \tag{A.11}$$

bem como

$$\begin{aligned}
\Gamma_{0\lambda}^\rho &= \frac{1}{2}g^{\rho\sigma} (\partial_\lambda g_{0\sigma} + \partial_0 g_{\lambda\sigma} - \partial_\sigma g_{0\lambda}) \\
&= \frac{1}{2}g^{\rho\rho} (\partial_\lambda g_{0\rho} + \partial_0 g_{\lambda\rho} - \partial_\rho g_{0\lambda}) \\
&= \frac{1}{2}g^{\rho\rho}\partial_0 g_{\lambda\rho} \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{\tilde{g}^{\rho\rho}}{a(t)^2}\right)\partial_0 (-a(t)^2\tilde{g}_{\lambda\rho}) \\
&= \frac{1}{2c}\frac{\tilde{g}^{\rho\rho}}{a(t)^2}2a(t)\dot{a}(t)\tilde{g}_{\lambda\rho} \\
\therefore \Gamma_{0\lambda}^\rho &= \Gamma_{\lambda 0}^\rho = \frac{1}{c}\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\delta_\lambda^\rho .
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Por fim, definimos

$$\Gamma_{\mu\lambda}^\rho = \frac{1}{2}\tilde{g}^{\rho\sigma} (\partial_\lambda \tilde{g}_{\mu\sigma} + \partial_\mu \tilde{g}_{\lambda\sigma} - \partial_\sigma \tilde{g}_{\mu\lambda}) \equiv \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\rho . \tag{A.13}$$

Além do tensor de Ricci dado pela equação (A.4), podemos obter o termos não nulos de $R_{\mu\nu}$ através de sua definição [72]

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\lambda}^\lambda - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\lambda , \tag{A.14}$$

e dos símbolos de Christoffel derivados anteriormete. Portanto, a equação (A.14), junta-

mente com os referidos símbolos de Christoffel, nos permitem escrever

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \partial_\lambda \Gamma_{00}^\lambda - \partial_0 \Gamma_{0\lambda}^\lambda + \Gamma_{00}^\rho \Gamma_{\rho\lambda}^\lambda - \Gamma_{0\lambda}^\rho \Gamma_{\rho 0}^\lambda \\
&= -\partial_0 \Gamma_{0\lambda}^\lambda - \Gamma_{0\lambda}^\rho \Gamma_{\rho 0}^\lambda \\
&= -(\partial_0 \Gamma_{00}^0 + \partial_0 \Gamma_{01}^1 + \partial_0 \Gamma_{02}^2 + \partial_0 \Gamma_{03}^3) - (\Gamma_{00}^\rho \Gamma_{\rho 0}^0 + \Gamma_{01}^\rho \Gamma_{\rho 0}^1 + \Gamma_{02}^\rho \Gamma_{\rho 0}^2 + \Gamma_{03}^\rho \Gamma_{\rho 0}^3) \\
&= -3\partial_0 \left(\frac{1}{c} \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right) - 3 \left(\frac{1}{c} \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2,
\end{aligned}$$

logo,

$$R_{00} = -\frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}. \quad (\text{A.15})$$

Podemos ainda obter

$$R_{ij} = \tilde{R}_{ij} + \left[\frac{a(t)\ddot{a}(t)}{c^2} + 2\frac{\dot{a}(t)^2}{c^2} \right] \tilde{g}_{ij}. \quad (\text{A.16})$$

Aqui, \tilde{R}_{ij} é a parte espacial do tensor de Ricci obtida puramente através de \tilde{g}_{ij} e que pode ser substituída pela equação (A.4), dado que esta última é justamente a parte sem dependência temporal. Resulta, dessa maneira, que

$$R_{ij} = 2\frac{k}{R_0^2} \tilde{g}_{ij} + \left[\frac{a(t)\ddot{a}(t)}{c^2} + 2\frac{\dot{a}(t)^2}{c^2} \right] \tilde{g}_{ij} = \left[2\frac{k}{R_0^2} + \frac{a(t)\ddot{a}(t)}{c^2} + 2\frac{\dot{a}(t)^2}{c^2} \right] \tilde{g}_{ij}. \quad (\text{A.17})$$

Sendo assim, temos determinados, como desejávamos, os coeficientes métricos dados pela equação (A.6) e o tensor de Ricci, representado por suas componentes não nulas, as quais são dadas pelas equações (A.15) e (A.17).

B APÊNDICE B – DA OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DE FRIEDMANN

Neste apêndice iremos obter as equações de Friedmann e de aceleração partindo das equações de campo dadas pela equação (2.1). As referidas equações de campo são dadas por

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) - \frac{\Lambda}{c^2} g_{\mu\nu} . \quad (\text{B.1})$$

Definimos, então, o tensor $C_{\mu\nu}$, tal que

$$C_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T . \quad (\text{B.2})$$

Lembrando que o tensor energia–momento para um fluido perfeito lê-se

$$[T_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P \end{pmatrix} , \quad (\text{B.3})$$

cujo traço é dado por

$$T = \rho c^2 - 3P , \quad (\text{B.4})$$

podemos determinar $C_{\mu\nu}$.

Sendo assim, iniciando pela componente C_{00} , teremos que

$$\begin{aligned} C_{00} &= T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} (\rho c^2 - 3P) \\ &= \rho c^2 - \frac{1}{2} (\rho c^2 - 3P) , \end{aligned}$$

implicando que

$$C_{00} = \frac{1}{2} (\rho c^2 + 3P) . \quad (\text{B.5})$$

As componentes C_{ij} por sua vez serão dadas por

$$\begin{aligned} C_{ij} &= T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} (\rho c^2 - 3P) \\ &= -\frac{1}{2} (\rho c^2 - P) g_{ij} , \end{aligned}$$

que, através da utilização da equação (A.7), pode ser reescrita como

$$C_{ij} = \frac{1}{2} (\rho c^2 - P) a(t)^2 \tilde{g}_{ij} . \quad (\text{B.6})$$

Temos, a partir dos resultados do presente apêndice bem como do anterior, todos os elementos necessários para solucionar a equação (B.1). A componente "00" da equação (B.1) fica

$$R_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T \right) - \frac{\Lambda}{c^2} g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} C_{00} - \frac{\Lambda}{c^2} g_{00} ,$$

de modo que a inserção das equações (A.7), (A.15) e (B.5) nos permite obter

$$\begin{aligned} -\frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} &= \frac{8\pi G}{c^4} \left[\frac{1}{2} (\rho c^2 + 3P) \right] - \frac{\Lambda}{c^2} \\ &= \frac{4\pi G}{c^4} (\rho c^2 + 3P) - \frac{\Lambda}{c^2} . \end{aligned}$$

Rearranjando a equação acima, obtemos

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\rho c^2 + 3P) + \frac{\Lambda}{3} , \quad (\text{B.7})$$

que é justamente a **equação de aceleração**.

Já a equação de Friedmann pode ser obtida com se segue. Primeiro, escrevemos a equação (B.1) como

$$R_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T \right) - \frac{\Lambda}{c^2} g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} C_{ij} - \frac{\Lambda}{c^2} g_{ij} .$$

Isso nos permite utilizar as equações (A.7), (A.17) e (B.6), fornecendo-nos

$$\begin{aligned} \left[2\frac{k}{R_0^2} + \frac{a(t)\ddot{a}(t)}{c^2} + 2\frac{\dot{a}(t)^2}{c^2} \right] \tilde{g}_{ij} &= \frac{8\pi G}{c^4} \left[\frac{1}{2} (\rho c^2 - P) a(t)^2 \tilde{g}_{ij} \right] + \frac{\Lambda a(t)^2}{c^2} \tilde{g}_{ij} , \\ \left[2\frac{k}{R_0^2} + \frac{a(t)\ddot{a}(t)}{c^2} + 2\frac{\dot{a}(t)^2}{c^2} \right] \tilde{g}_{ij} &= \left[\frac{4\pi G}{c^4} (\rho c^2 - P) a(t)^2 + \frac{\Lambda a(t)^2}{c^2} \right] \tilde{g}_{ij} . \end{aligned}$$

Para que essa igualdade seja verdadeira, devemos ter

$$2\frac{k}{R_0^2} + \frac{a(t)\ddot{a}(t)}{c^2} + 2\frac{\dot{a}(t)^2}{c^2} = \frac{4\pi G}{c^4} (\rho c^2 - P) a(t)^2 + \frac{\Lambda a(t)^2}{c^2} ,$$

que, rearranjando, fica

$$\frac{2}{c^2} \left[\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right]^2 = \frac{4\pi G}{c^4} (\rho c^2 - P) - \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \frac{\Lambda}{c^2} - \frac{2k}{a(t)^2 R_0^2}. \quad (\text{B.8})$$

Por fim, podemos inserir a equação (B.7) na equação (B.8). Juntamos, então, os termos semelhantes e efetuamos simplificações cabíveis de modo a obter

$$\left[\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right]^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{a(t)^2 R_0^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (\text{B.9})$$

que diz respeito à **equação de Friedmann**.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] RIESS, A. G. *et al.* Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. **The Astronomical Journal**, v. 116, n. 3, p. 1009–1038, 1998. 21, 25
- [2] PERLMUTTER, S. *et al.* Discovery of a supernova explosion at half the age of the Universe. **Nature**, v. 391, n. 6662, p. 51–54, 1998. 21, 25
- [3] PERLMUTTER, S. *et al.* Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae. **The Astrophysical Journal**, v. 517, n. 2, p. 565–586, 1999. 21, 25
- [4] FRIEDMANN, A. Über die Krümmung des Raumes. **Zeitschrift für Physik**, v. 10, n. 1, p. 377–386, 1922. 21, 22, 23, 27
- [5] FRIEDMANN, A. Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes. **Zeitschrift für Physik**, v. 21, n. 1, p. 326–332, 1924. 21, 22, 23, 27
- [6] ZYLA, P. A. *et al.* Review of particle physics. **Progress of Theoretical and Experimental Physics**, v. 2020, n. 8, 2020. 083C01. 21, 25, 28, 29, 43, 44, 48
- [7] RYDEN, B. S. **Introduction to Cosmology**. San Francisco: Addison-Wesley, 2003. 248 p. 21, 22, 25, 26
- [8] ADERALDO, V. S.; GONÇALVES, V. P. B. Uma introdução à evolução do Universo segundo sua geometria e composição. **Revista Brasileira de Ensino de Física [online]**, v. 42, p. e20200050, 2020. 21, 25, 28
- [9] KÄMPFER, B. Cosmic phase transitions. **Annalen der Physik**, v. 9, n. 8, p. 605–635, 2000. 21, 22, 38, 46, 47, 48, 49, 56, 57
- [10] KOLB, E. W.; TURNER, M. S. **The Early Universe**. United States of America.: Westview Press, 1994. 596 p. 21
- [11] SATZ, H. **Extreme States of Matter in Strong Interaction Physics: An Introduction**. 2. ed. Cham: Springer, 2018. 288 p. 21, 41, 45, 46, 49, 72
- [12] WYGAS, M. M. **Large Lepton Asymmetry and the Cosmic QCD Transition**. 2018. Tese — Faculty of Physics, Bielefeld University, Bielefeld, 2018. 21, 23, 30, 31, 36, 39, 40, 47

- [13] SOBRINHO, L. **Primordial Black Holes and Cosmological Phase Transitions**. 2008. Tese — Centro de Ciências Matemáticas, Universidade da Madeira, Funchal, 2008. 21, 30, 31, 49
- [14] WILSON, K. G. Confinement of quarks. **Physical Review D**, v. 10, n. 8, p. 2445–2459, 1974. 21, 46, 48
- [15] GROSS, D. J.; WILCZEK, F. Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories. **Physical Review Letters**, v. 30, n. 26, p. 1343–1346, 1973. 21, 46
- [16] GROSS, D. J.; WILCZEK, F. Asymptotically Free Gauge Theories. I. **Physical Review D**, v. 8, n. 10, p. 3633–3652, 1973. 21, 46
- [17] POLITZER, H. D. Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? **Physical Review Letters**, v. 30, n. 26, p. 1346–1349, 1973. 21, 46
- [18] HOOFT, G. The birth of asymptotic freedom. **Nuclear Physics B**, v. 254, p. 11–18, 1985. 21, 46
- [19] VOGT, R. **Ultrarelativistic Heavy-Ion Collisions**. The Netherlands: Elsevier, 2007. 488 p. 22
- [20] BORSÁNYI, S. *et al.* The QCD equation of state with dynamical quarks. **Journal of High Energy Physics**, v. 2010, n. 11, p. 77, 2010. 22, 23, 47, 49, 51, 52, 53, 54, 55, 58, 70, 74, 76, 77, 95
- [21] DUNSBY, P. K. S.; LUONGO, O. On the theory and applications of modern cosmography. **International Journal of Geometric Methods in Modern Physics**, v. 13, n. 3, p. 1630002, 2016. 22, 32
- [22] IVASHTENKO, O. Cosmography of the Dynamical Cosmological «Constant». **East European Journal of Physics**, n. 4, p. 5–12, 2019. 22, 31, 32
- [23] CASTORINA, P.; LANTERI, D.; MANCANI, S. Deconfinement transition effects on cosmological parameters and primordial gravitational waves spectrum. **Physical Review D**, v. 98, n. 2, p. 023007, 2018. 22, 32, 54, 55, 72, 75, 88
- [24] FLORKOWSKI, W. The realistic QCD equation of state in relativistic heavy-ion collisions and the early universe. **Nuclear Physics A**, v. 853, n. 1, p. 173–188, 2011. 23, 40, 47, 62, 70, 88
- [25] BAZAVOV, A. *et al.* Equation of state in $(2 + 1)$ -flavor QCD. **Physical Review D**, v. 90, n. 9, p. 094503, 2014. 23, 49, 51, 52, 54, 58, 61, 74, 76, 77, 95

- [26] BORSÁNYI, S. *et al.* Is there still any T_c mystery in lattice QCD? results with physical masses in the continuum limit III. **Journal of High Energy Physics**, v. 2010, n. 9, p. 73, 2010. 23, 47, 51, 52, 61, 74, 76, 95
- [27] GAO, F.; OLDENGOTT, I. M. Cosmology meets functional QCD: First-order cosmic QCD transition induced by large lepton asymmetries. **arXiv:2106.11991 [hep-ph]**, 2021. 23, 47
- [28] STUKE, M. **The First Second of Leptons**. 2011. Tese — Fakultät für Physik, Universität Bielefeld, Bad Oeynhausen, 2011. 23, 29, 30, 47
- [29] CHODOS, A. *et al.* New extended model of hadrons. **Physical Review D**, v. 9, n. 12, p. 3471–3495, 1974. 23, 49, 50, 51, 58, 71, 77, 95
- [30] PISARSKI, R. D. Effective Theory of Wilson Lines and Deconfinement. **Physical Review D**, v. 74, n. 12, p. 121703, 2006. 23, 49, 50, 58, 77, 95, 96
- [31] PISARSKI, R. D. Fuzzy Bags and Wilson Lines. **Progress of Theoretical Physics Supplement**, v. 168, p. 276–284, 2007. 23, 49, 50, 58, 77, 95, 96
- [32] BEGUN, V.; GORENSTEIN, M.; MOGILEVSKY, O. MODIFIED BAG MODELS FOR THE QUARK–GLUON PLASMA EQUATION OF STATE. **International Journal of Modern Physics E**, v. 20, n. 08, p. 1805–1815, 2011. 23, 49, 50, 51, 58, 61, 69, 77, 95, 96
- [33] HUOVINEN, P.; PETRECKZY, P. QCD equation of state and hadron resonance gas. **Nuclear Physics A**, v. 837, n. 1, p. 26–53, 2010. 23, 49, 53, 54, 55, 58
- [34] GAMOW, G. Expanding Universe and the Origin of Elements. **Physical Review**, v. 70, n. 7–8, p. 572–573, 1946. 25
- [35] ALPHER, R. A.; BETHE, H. A.; GAMOW, G. The Origin of Chemical Elements. **Physical Review**, v. 73, n. 7, p. 803–804, 1948. 25
- [36] ALPHER, R. A.; BETHE, H. A.; GAMOW, G. Thermonuclear Reactions in the Expanding Universe. **Physical Review**, v. 74, n. 9, p. 1198–1199, 1948. 25
- [37] ALPHER, R. A.; HERMAN, R. C. Remarks on the Evolution of the Expanding Universe. **Physical Review**, v. 75, n. 7, p. 1089–1095, 1949. 25
- [38] MILNE, E. A. World-Structure and the Expansion of the Universe. Mit 6 Abbildungen. **Zeitschrift für Astrophysik**, v. 6, p. 1, 1933. 25

- [39] MILNE, E. A. World Structure and the Expansion of the Universe. **Nature**, v. 130, n. 3270, p. 9–10, 1932. 25
- [40] EINSTEIN, A. *et al.* **The Principle of Relativity**: A collection of original memoirs on the special and general theory of relativity. United States of America: Dover Publications, 1952. 216 p. 25
- [41] SOUZA, R. E. de. **Introdução à Cosmologia**. São Paulo: Edusp - Editora da Universidade de São Paulo, 2004. 328 p. 25
- [42] EINSTEIN, A. Die Feldgleichungen der Gravitation. **Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften**, p. 844–847, 1915. 25
- [43] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **The Classical Theory of Fields**. 4. ed. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 1980. 402 p. 26
- [44] ROBERTSON, H. P. Kinematics and World-Structure. **Astrophysical Journal**, v. 82, p. 284, 1935. 26, 98
- [45] ROBERTSON, H. P. Kinematics and World-Structure II. **Astrophysical Journal**, v. 83, p. 187, 1936. 26, 98
- [46] ROBERTSON, H. P. Kinematics and World-Structure III. **Astrophysical Journal**, v. 83, p. 257, 1936. 26, 98
- [47] WALKER, A. G. On Milne's Theory of World-Structure*. **Proceedings of the London Mathematical Society**, s2-42, n. 1, p. 90–127, 1937. 26, 98
- [48] CHENG, T.-P. **A College Course on Relativity and Cosmology**. 1. ed. New York: Oxford University Press, 2015. 304 p. 26
- [49] HINSHAW, G. *et al.* NINE-YEAR WILKINSON MICROWAVE ANISOTROPY PROBE (WMAP) OBSERVATIONS: COSMOLOGICAL PARAMETER RESULTS. **The Astrophysical Journal Supplement Series**, v. 208, n. 2, p. 19, 2013. 28
- [50] PENZIAS, A. A.; WILSON, R. W. A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s. **Astrophysical Journal**, v. 142, p. 419–421, 1965. 31
- [51] EUROPEAN SPACE AGENCY. **Planck's view of the cosmic microwave background**. 2018. Disponível em: <http://www.esa.int/spaceinimages/Images/2018/07/Planck_s_view_of_the_cosmic_microwave_background>. Acesso em: 23 jun. 2021. 31

- [52] SANCHES, S.; NAVARRA, F.; FOGAÇA, D. The quark gluon plasma equation of state and the expansion of the early Universe. **Nuclear Physics A**, v. 937, p. 1–16, 2015. 31, 88
- [53] CALLEN, H. B. **Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics**. 2. ed. Singapore: John Wiley & Sons, 1985. 512 p. 35, 38, 39
- [54] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **Statistical Physics**. 3. ed. China: Butterworth-Heinemann, 1980. 544 p. 35
- [55] SALINAS, S. R. de A. **Introduction to Statistical Physics**. United States of America: Springer, 2001. 378 p. 35, 36
- [56] PATHRIA, R. K.; BEALE, P. D. **Statistical Mechanics**. 3. ed. United States: Academic Press, 2011. 718 p. 35, 36, 39
- [57] MINTZ, B. W. **Nucleação na transição de fase da QCD em colisões de íons pesados e em estrelas compactas**. 2011. Tese — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011. 35, 36
- [58] YAGI, K.; HATSUDA, T.; MIAKE, Y. **Quark-Gluon Plasma: From Big Bang to Little Bang**. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. 468 p. (Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology, v. 23). 37, 39, 45, 46, 47, 48, 50, 53, 62
- [59] MENKE, H. **Pie chart with colors**. 2014. Disponível em: <<https://texample.net/tikz/examples/pie-chart-color/>>. Acesso em: 19 jul. 2021. 43
- [60] BURGARD, C. **Standard model of physics**. 2016. Disponível em: <<https://texample.net/tikz/examples/model-physics/>>. Acesso em: 11 ago. 2021. 44
- [61] BERTONE, G.; HOOPER, D. History of dark matter. **Reviews of Modern Physics**, v. 90, n. 4, p. 045002, 2018. 44
- [62] ARUN, K.; GUDENNAVAR, S.; SIVARAM, C. Dark matter, dark energy, and alternate models: A review. **Advances in Space Research**, v. 60, n. 1, p. 166–186, 2017. 44
- [63] WONG, C.-Y. **Introduction to High-Energy Heavy-Ion Collisions**. Singapore: World Scientific, 1994. 44, 48, 49, 67

- [64] YANG, C.-N.; MILLS, R. L. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. **Physical Review**, v. 96, n. 1, p. 191–195, 1954. 45
- [65] HAGEDORN, R. Statistical thermodynamics of strong interactions at high energies. **Nuovo Cimento, Suppl.**, v. 3, p. 147–186, 1965. 47
- [66] AOKI, Y. *et al.* The order of the quantum chromodynamics transition predicted by the standard model of particle physics. **Nature**, v. 443, n. 7112, p. 675–678, 2006. 47
- [67] ALFORD, M. G. *et al.* Color superconductivity in dense quark matter. **Review of Modern Physics**, v. 80, n. 4, p. 1455–1515, 2008. 47
- [68] BORSÁNYI, S. *et al.* Lattice QCD Equation of State at Finite Chemical Potential from an Alternative Expansion Scheme. **Physical Review Letters**, v. 126, n. 23, p. 232001, 2021. 49
- [69] VENUGOPALAN, R.; PRAKASH, M. Thermal properties of interacting hadrons. **Nuclear Physics A**, v. 546, n. 4, p. 718–760, 1992. 54
- [70] BOYD, G. *et al.* Thermodynamics of SU(3) lattice gauge theory. **Nuclear Physics B**, v. 469, n. 3, p. 419–444, 1996. 55
- [71] LETESSIER, J.; RAFELSKI, J. **Hadrons and Quark–Gluon Plasma**. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. 414 p. (Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology, v. 18). 61
- [72] BAMBI, C. **Introduction to General Relativity: A Course for Undergraduate Students of Physics**. 1. ed. Singapore: Springer, 2018. 591 p. 97, 98, 99
- [73] CHENG, T.-P. **Relativity, Gravitation, and Cosmology: A basic introduction**. New York: Oxford University Press, 2005. 360 p. 97
- [74] DAS, A. **Lectures on Gravitation**. Singapore: World Scientific, 2011. 352 p. 97