

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
INSTITUTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

UM MODELO NÃO LOCAL PARA A EMISSÃO SOLAR DO TIPO V

Michel Silva dos Santos

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Rudi Gaelzer, apresentada ao Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal de Pelotas, em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Pelotas
Setembro de 2011

Este trabalho é dedicado

a meus pais

Antonio Carlos Cunha dos Santos e Maria Lucia da Silva

AGRADECIMENTOS

- Em primeiro lugar agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Rudi Gaelzer pela extrema sabedoria, dedicação e paciência para desenvolver este trabalho e me orientar nos vários momentos de dificuldades. Desde os tempos de iniciação científica até a conclusão desta dissertação de mestrado. Além da atenciosa orientação agradeço também a amizade para auxiliar e compreender nos percalços desta longa mas prazerosa trajetória.
- Aos professores e amigos Dr. Fábio Teixeira Dias e Dr. Victor Paulo Barros Gonçalves que desde a graduação até a conclusão do mestrado estiveram dispostos a ajudar e ensinar nas mais variadas situações. Desde as disciplinas de Quântica e Estrutura da Matéria até os jogos de futebol e churrascos aos finais de semestre.
- Aos sábios e espetaculares colegas Anelise, Moisés e Sandra pela ótima companhia nos momentos de estudos e descontração desde os tempos de graduação.
- Aos amigos d'A Diretoria Daniel, Fábio, Luciano e Tiago pela amizade sem preço, noites de estudos regadas a whisky e churrascos sem fim desde os tempos de graduação até o fim do dinheiro. Sem dúvida esta amizade foi fundamental para minha formação intelectual e pessoal. Ou o que seria de mim sem as guerras de mostarda e catchup, discussões no sofá do Mega e banho na lagoa as 3 da madrugada. Dalhe Grêmioooooo!!!!
- A Michele Zanatto pela cumplicidade e companheirismo nestes últimos três anos e também por ter me dado meu maior presente, meu filho, Micael.
- Aos meus irmãos Daiane e Jean pelo incentivo, amizade e companheirismo.
- Aos queridos amigos Carmen e Mateus Teixeira que me ajudaram na fundamentação desta jornada e que foram essenciais para este momento acontecer.
- Aos meus alunos e colegas das escolas Alfredo Simon, CLMD-UFPeL, CAVG-IFSUL, Objetivo e Santa Mônica que muito me ensinaram no decorrer desta minha curta mas inicial carreira de professor.

RESUMO

Existem vários fenômenos diferentes de emissão de rádio que se originam no Sol e estão relacionados com a injeção de partículas energéticas a partir da fotosfera e cromosfera solares para a coroa solar e o meio interplanetário. Neste trabalho, a Emissão Solar de Rádio do Tipo V é considerada, assumindo que a radiação é gerada pelo mecanismo do maser de elétron-cíclotron. Um modelo para os parâmetros físicos de uma região de origem localizada diretamente acima uma região ativa na fotosfera solar é empregada. Este modelo se baseia em modelos padrão encontrados na literatura e em observações realizadas por observatórios terrestres e por sondas interplanetárias. A fim de melhorar a eficiência do mecanismo de radiação de cíclotron, o modelo assume que uma cavidade de densidade é formada na região de origem, de tal forma que a frequência de plasma local é menor do que a frequência de cíclotron local. Usando a teoria magneto-iônica dos plasmas, a relação de dispersão e as equações de traçado de raios são resolvidas numericamente para o modo extraordinário lento (modo Z) propagando-se no interior da cavidade de densidade. Além disso, o coeficiente de emissão para o modo de Z também é obtido em cada ponto ao longo do caminho do raio. Sendo o modo Z preso no interior da cavidade coronal, é assumida uma conversão linear de modo a partir do modo Z para o modo ordinário (O) e, em cada ponto da trajetória de raios, é verificada a condição da janela de Ellis, que determina a posição no espaço de fase onde a conversão ocorre. Uma vez convertida para o modo O , a radiação pode se propagar para o espaço interplanetário. Após variar os valores da frequência da radiação e do ângulo de propagação inicial, respectivos ao campo magnético ambiente, os raios no modo Z com um valor positivo do coeficiente de emissão no ponto de partida são seguidos em sua trajetória até que a condição de Ellis é satisfeita ou a onda é atenuada tornando-se ruído de fundo. Os resultados indicam que o maser de elétron-cíclotron é um mecanismo viável para a geração da Emissão Rádio Solar Tipo V.

ABSTRACT

There are several different radio emission phenomena that originate from the Sun and are related to the injection of energetic particles from the solar photosphere and chromosphere into the solar corona and the interplanetary medium. In this work, the Type V Solar Radio Emission is considered, assuming that the radiation is generated by the electron cyclotron maser mechanism. A model for the physical parameters of a source region located directly above an active region on the solar photosphere is employed, which is based in standard models and in recent observations taken by remote spacecraft. In order to enhance the efficiency of the cyclotron maser mechanism, the model assumes that a density cavity is formed in the source region, in such a way that the local plasma frequency is lower than the local cyclotron frequency. Using the magnetoionic theory of plasmas, the dispersion relation and the ray tracing equations are numerically solved for the slow extraordinary mode (Z mode) propagating inside the density cavity. Additionally, the emission coefficient for the Z mode is also obtained at each point along the ray's path. Since the Z mode is trapped inside the coronal cavity, linear mode conversion from the Z mode to the Ordinary (O) mode is assumed, and at each point of the ray trajectory the Ellis window condition, which determines the position in the phase space where the conversion takes place, is verified. Once converted to the O mode, the radiation is allowed to propagate to the interplanetary space. Upon varying the values of the frequency of the radiation and the initial propagation angle, respective to the ambient magnetic field, the Z mode rays with a positive value of the emission coefficient at the starting point are followed in their trajectory until either the Ellis condition is satisfied or the wave is attenuated back into the background noise. The results indicate that the electron cyclotron maser is a viable mechanism for the generation of the Type V Solar Radio Emission.

SUMÁRIO

1	Introdução	1
2	O Sol e as Características de suas Emissões de Rádio	3
2.1	A estrutura solar	3
2.1.1	O núcleo solar	3
2.1.2	Zona de Radiação	4
2.1.3	Zona de Convecção	4
2.1.4	Fotosfera	5
2.1.5	Cromosfera	5
2.1.6	Coroa Solar e Vento Solar	5
2.1.7	Flares Solares	6
2.2	Emissões solares de rádio	6
2.2.1	Emissões do Tipo I	7
2.2.2	Emissões do Tipo II	8
2.2.3	Emissões do Tipo III	9
2.2.4	Emissões do Tipo IV	10
2.2.5	Emissões do Tipo V	11
3	O Maser de Elétron-Cíclotron	16
3.1	Introdução	16
3.2	Emissão espontânea de radiação por partículas em um plasma	17
3.2.1	Equação da onda	17
3.2.1.1	Relação constitutiva entre $J(k, \omega)$ e $E(k, \omega)$	17
3.2.1.2	O tensor dielétrico: propriedades gerais	18
3.2.2	Soluções da equação da onda.	19
3.2.2.1	Propagação de ondas em um plasma com baixa absorção.	20
3.2.3	Conservação de energia em um plasma dispersivo.	23
3.2.4	A potência e a energia irradiadas no plasma	25
3.2.5	Movimento de cíclotron de uma partícula carregada	26
3.2.5.1	Equações de movimento	27
3.2.5.2	A densidade de corrente associada a uma carga em movimento em torno do campo magnético	28
3.2.6	Emissividade da partícula no modo σ	29
3.3	Emissão induzida de radiação por partículas em um plasma	30
3.3.1	O formalismo semi-clássico	30
3.3.2	O processo de emissão induzida	32
3.3.3	A equação cinética no limite semi-clássico	33
3.3.3.1	Frequência do fóton emitido	33
3.3.3.2	Expressões semi-clássicas para a probabilidade e a taxa de probabilidade de transição	34
3.3.3.3	A equação cinética e o coeficiente de emissão	35
3.4	As equações de traçado de raios e da transferência radiativa	36
3.4.1	Equações de traçado de raios	36
3.4.2	Equação de transferência radiativa	39
3.5	Teoria magneto-iônica	41
3.5.1	Ondas em um plasma frio magnetizado	41
3.5.2	A relação de dispersão de Appleton-Hartree	43
3.5.3	Ondas propagando-se paralelamente ao campo magnético	44

3.5.4 Ondas propagando-se perpendicularmente ao campo magnético	45
3.5.5 Propagação em direções arbitrárias	47
3.6 Conversão de modos e a teoria das janelas de Ellis	48
3.6.1 Conversão linear de modos: uma breve descrição	48
3.6.2 A teoria das janelas de Ellis	50
4 Modelo Teórico	57
4.1 Introdução	57
4.2 Modelos Teóricos Anteriores	57
4.3 Modelo não local para Emissões Solares do Tipo V	62
4.3.1 Modelo de parâmetros físicos	63
4.3.1.1 Campo magnético	63
4.3.1.2 Densidade eletrônica	64
4.3.1.3 Distribuições eletrônicas	65
4.3.2 As relações de dispersão e as equações de traçado de raios empregadas	66
4.3.2.1 Relações de dispersão para os modos X e O	67
4.3.2.2 Equações de traçados de raios	67
4.3.3 Os coeficientes de emissão espontânea e induzida e a equação de transferência radiativa	68
4.3.3.1 O coeficiente de emissão espontânea	68
4.3.3.2 O coeficiente de emissão induzida	69
4.3.3.3 A equação de transferência radiativa	69
4.4 Resultados Obtidos	70
4.4.1 Taxas locais de amplificação para os modos magneto-iônicos	71
4.4.2 Propagação e amplificação não local do modo Z na cavidade solar	73
5 Conclusão	83
A Transformações de Fourier	85
A.1 Propriedades das transformadas de Fourier	85
A.1.1 Condição de realidade	85
A.1.2 Transformada da distribuição $\delta(r)$	85
A.1.3 Teorema da convolução	86
A.1.4 Teorema da potência	87
B Cálculos Detalhados para o Mecanismo do Maser de Elétron-Cíclotron	88
B.1 Forma alternativa para $R_E(k)$	88
B.2 Vetor de polarização para ondas de cíclotron	89
B.3 Cálculo da velocidade de grupo	90
C Cálculos Detalhados para o Modelo Teórico	92
C.1 Equações para traçado de raios no modo X	92
C.2 O coeficiente de emissão espontânea	94
C.3 O coeficiente de emissão induzida	96
C.4 A equação de transferência radiativa	97

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Ao longo dos últimos anos houve uma crescente necessidade de se conhecer o comportamento e interação do Sol com a Terra. Cada vez se faz mais presente a influência das distintas formas de emissão de radiação do Sol com objetos e estruturas terrestres, bem como com o seres vivos e o meio ambiente. Com o advento de avanços tecnológicos na área espacial e de satélites, foi preciso aprofundar-se no conhecimento do meio no qual esses iriam permanecer, a fim de poder-se criar mecanismos de defesas para evitar danos às estruturas eletrônicas e físicas destes. Não somente estruturas que estão fora da área de proteção da magnetosfera terrestre sofrem com a radiação solar. Estruturas de transmissão de energia e dados localizados na superfície terrestre e também submarinas necessitam de sistemas que conciliem seu funcionamento com possíveis eventos extremos solares. Muitos outros desenvolvimentos de carácter tecnológico são observadas, mas também é primordial o estudo de eventos solares a fim de alcançar um desenvolvimento científico que possa fazer com que a humanidade conheça a estrutura do meio universal no qual está inserida. Por ser tratar da estrela mais próxima da Terra, é essencial buscar no Sol respostas para questões que intrigam os homens desde o início das civilizações. Explicando a estrutura e evolução solar podemos conhecer parte da forma como o universo caminha em seu desenvolvimento. Muitas questões a esse respeito já foram respondidas mas muito ainda tem-se por explicar.

Este trabalho busca sanar uma lacuna existente na explicação de emissões solares. Muito se sabe a este respeito, e com o avanço do conhecimento da interação da matéria na forma de plasma, uma gama de possibilidades tecnológicas e científicas vêm sendo desenvolvidas nas mais diversas áreas. Esta dissertação firma-se no carácter científico do conhecimento, mas sabe-se que deste podem desenvolver-se as mais variadas respostas para problemas de ordem tecnológica. Emissões Solares podem ser divididas em 5 classes distintas. Essa divisão depende de suas características morfológicas como frequência, tempo de duração, mecanismo gerador e outros. Uma breve descrição dos variados tipos de emissões e das características básicas do Sol será dada já no capítulo 2. Neste mesmo capítulo serão explicitadas algumas características observacionais desenvolvidas por *Robinson (1977)* [48] em estudos pioneiros a respeito da Emissão Solar do Tipo V. Emissão esta que será alvo principal de estudo neste trabalho.

Ao longo dos anos foi dada pouca ênfase a emissão do Tipo V. E talvez por isso esta seja pobre em referências observacionais e teóricas. Aparatos de antenas para detecção de radiação solar e satélites são os principais meios observacionais, mas ao longo do tempo estes foram sendo desenvolvidos para detectar radiação com frequências na ordem de gigahertz. Com isso pouco se evoluiu no conhecimento de Radiação Solar do Tipo V, enquanto que a emissão solar do Tipo III domina esta área de estudo no meio acadêmico.

Nenhum mecanismo ainda hoje é definitivo como sendo fonte de emissões solares do Tipo V. É proposto aqui que essas são geradas através do mecanismo conhecido como Maser de Elétron-Cíclotron. Este mecanismo é amplamente caracterizado e explicado no capítulo 3, que apresenta a teoria utilizada no modelo adotado neste trabalho. Ainda neste capítulo é explicitado o modelo da Janela de Ellis para explicar a conversão de modos de propagação para ondas no Plasma. Considerações importantes a respeito de taxas de emissividade são feitas neste mesmo capítulo.

Já no capítulo 4 é apresentado o modelo adotado nesta dissertação, com suas características básicas nos parâmetros físicos da região-fonte da Emissão do Tipo V e outras propriedades. Nesse mesmo capítulo, é discursado a respeito da proposta da formação de uma cavidade na baixa coroa solar na qual seriam geradas as emissões no Modo Z e ainda nesta seriam con-

vertidas do Modo Z para o Modo O, podendo assim se propagar para o meio interplanetário. A seguir são apresentados alguns resultados numéricos obtidos que viabilizam o mecanismo, aqui defendido, como fonte de emissões solares do Tipo V. Considerações a respeito da taxa de amplificação e conversão de modo são mostradas de forma qualitativa e quantitativa a fim de corroborar com a proposta do Maser de Elétron-Cíclotron.

Finalmente, uma breve conclusão do que foi discutido e possibilidades de evolução deste trabalho são apresentadas a fim de instigar acadêmicos interessados em ajudar no desenvolvimento desta área específica de emissão solar.

Ao final desta dissertação, são anexados apêndices nos quais algumas informações a respeito de propriedades matemáticas e desenvolvimentos teóricos empregados neste trabalho são apresentados. Nestes apêndices pode ser vista melhor a ligação entre a teoria geral de Física dos Plasmas apresentada no capítulo 3 e o modelo específico deste trabalho apresentados no capítulo 4.

CAPÍTULO 2

O SOL E AS CARACTERÍSTICAS DE SUAS EMISSÕES DE RÁDIO

2.1 A estrutura solar

Sendo o Sol, a estrela fonte de luz e vida em nosso planeta, é de suma importância conhecer suas características e estrutura. Assim como outras 100 bilhões de estrelas, só em nossa galáxia, o Sol é uma grande esfera de plasma incandescente em cujo núcleo ocorre geração de energia através do processo de fusão nuclear. A raio solar é de aproximadamente $R = 695.500 \text{ km} = 10^9 R_{Terra}$ com densidade média de 1409 kg/m^3 e composto majoritariamente de Hidrogênio (91,2%) e Hélio (8,7%) e está posicionado a uma distância da Terra, com valor em torno de 149.600.000 km. Sua temperatura em média é de 5800 kelvins na superfície e de 15.000.000 kelvins no centro.

Uma das principais regiões do Sol é a **fotosfera**. Com cerca de 330 km de espessura e temperatura em torno de 5800 kelvins, como já relatado, é a parte visível do Sol. Logo abaixo, se localiza a **zona convectiva**, que se estende por cerca de 15% do raios solar. Nesta região o transporte de energia ocorre através de movimentos de convecção das partículas do plasma. Deste efeito que provem o nome da região. Indo em direção ao centro solar encontra-se a região denominada **zona radiativa**. Nesta parte do Sol não ocorre movimento mecânico das partículas e a energia se propaga através de fótons. Devido a energia se propagar por radiação é que esta região recebe seu nome. A região mais baixa do Sol é denominada **núcleo**. Como já mencionado esta é a região fonte de energia do Sol, pois nesta região a densidade e temperatura são suficientemente altas para ocorrer o processo de fusão nuclear, o qual é o mecanismo fonte de energia do Sol. Fazendo parte da estrutura solar temos a **cromosfera**. Esta faz parte da camada atmosférica solar, localiza-se logo acima da fotosfera e tem cor vermelha. Pode ser observada quando ocorrem eclipses solares. É uma camada bastante fina, em torno de 10.000 km, e sua temperatura cresce da base para o topo atingindo um valor médio de 15.000 kelvins. Ainda acima da cromosfera se encontra a **coroa** que também só é visível durante eclipses solares. A coroa se estende por cerca de dois raios solares.

O campo magnético do Sol é muito intenso e muito variável (comparado com os padrões terrestres). Suas linhas definem a *heliosfera*, a qual é a região do meio interestelar local onde o plasma é dominado pelo campo magnético solar e que compreende todo o sistema solar, estendendo-se para além da órbita de Plutão. A interação entre as emissões solares e o campo magnético terrestre é responsável por uma ampla gama de fenômenos estudados e que interferem diretamente no cotidiano terrestre [4, 6].

Os tópicos discutidos nesta seção (seção 2.1) usam como referências os livros de *Aschwanden (2006)* [4], *Kepler & Saraiva (2004)* [44] e *Silva (2006)* [51].

2.1.1 O núcleo solar

Se estendendo até cerca de 0,3 raios solares, o núcleo solar é o responsável pela geração de energia do Sol, através do processo de fusão conforme mencionado anteriormente. De forma simples, o que ocorre no núcleo é que quatro núcleos de hidrogênio são transformados em um núcleo de hélio, e a diferença de massa entre os quatro núcleos de hidrogênio e o núcleo de hélio é, através da equação de Einstein $E = mc^2$, responsável pela energia que alimenta o Sol. A cada

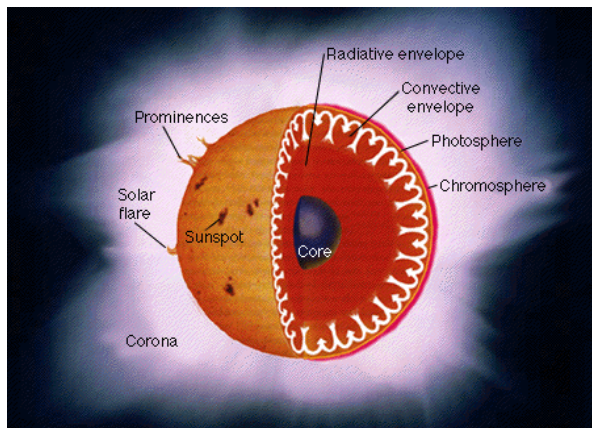


Figura 2.1: Representação artística das camadas do Sol [1].

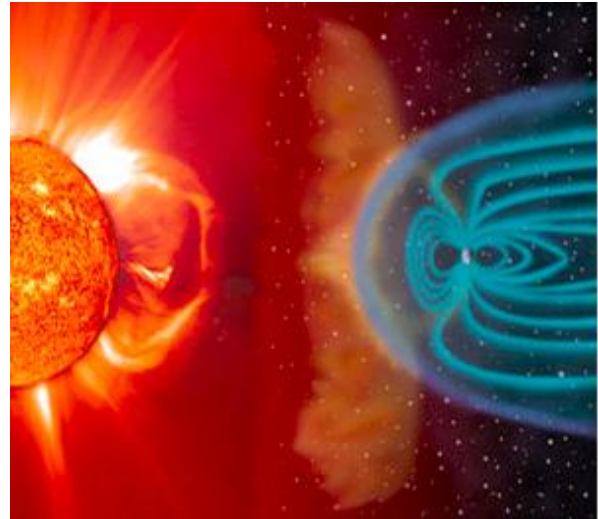


Figura 2.2: Figura representativa da interação do sol com o campo magnético terrestre.

segundo são consumidos cerca de 700 milhões de toneladas de hidrogênio formando cerca de 10^{38} novos núcleos de hélio. A diferença de massa, cerca de 5 milhões de toneladas é convertida em raios gama. – O núcleo solar é a única parte do Sol que produz energia em quantidade significativa via fusão nuclear. O restante do Sol é aquecido pela energia transferida do núcleo para as regiões externas. Toda a radiação eletromagnética produzida pela fusão precisa passar por várias camadas até a fotosfera antes de escapar para o espaço, em um processo contínuo de absorção e reemissão tal que estima-se que um fóton gerado no núcleo do Sol leva milhares de anos para atingir a fotosfera.

2.1.2 Zona de Radiação

Entre 0,3 e 0,7 raios solares de distância do centro do Sol, a energia solar é transportada através do processo de radiação. Da borda do núcleo até a zona de convecção a radiação flui, sendo absorvida e reemitida pelos íons do plasma. A temperatura do plasma solar vai diminuindo de dentro para fora de 7 para 2 milhões de kelvins. A densidade também diminui de 20.000 Kg/m^3 (aproximadamente a densidade do ouro) para 200 Kg/m^3 , menor do que a densidade da água. Entre a camada radiativa e a convectiva existe uma camada intermediária muito fina chamada de **tacoclina**. Na parte mais interna desta camada praticamente não existe fluxo de matéria ao passo que na parte externa existe um grande fluxo de matéria, como ocorre na zona convectiva. Por ser uma curta camada e ter uma grande variação de velocidade, por isso esta fronteira é destacada.

2.1.3 Zona de Convecção

Iniciando em aproximadamente 0,7 raios solares até a superfície solar, a zona de convecção é a camada externa do Sol. Da fronteira interna até a superfície a energia é transportada através de processos de convecção. Por volta de 0,7 raios solar a temperatura tem valor de cerca de 10.000 kelvins. A essas temperaturas relativamente baixas, formam-se íons de hidrogênio, carbono, nitrogênio, oxigênio e ferro, potentes absorvedores de radiação proveniente do núcleo. Isto impede o livre fluxo de radiação, tornando o plasma instável à convecção. A partir desta fronteira a energia é transportada por convecção. Assim como na zona radiativa a temperatura e densidade do plasma continuam diminuindo até a superfície do Sol. Os movimentos convectivos podem ser vistos na superfície do Sol como grânulos que evidenciam o processo de convecção. O plasma aquecido ascende pelo centro do grânulo, perde energia para o exterior e, uma vez resfriado, este plasma desce pelas bordas do grânulo de volta ao interior, sendo novamente aquecido e começando um novo ciclo.

Uma ilustração figurativa das camadas do Sol pode ser vista na figura 2.1.

2.1.4 Fotosfera

A maior parte do espectro visível do Sol tem origem na fotosfera. Uma camada com cerca de 300 km de extensão e temperatura variando entre 5500 e 4200 kelvins, que é a região de menor temperatura do Sol. A atmosfera solar é bastante rarefeita, o que permite que a radiação oriunda das camadas internas do Sol escape para o meio interplanetário. Observando-se com cuidado a fotosfera solar, pode-se notar que o centro do disco solar é mais brilhante que suas bordas. Este fato é conhecido como obscurecimento do limbo solar e ocorre porque a temperatura do plasma da fina camada fotosférica decresce com a altura. Esta é a camada limite da estrutura solar. O raio solar é medido do centro até a fotosfera.

2.1.5 Cromosfera

A cromosfera fica logo acima da fotosfera. Nada mais é que uma camada heterogênea da atmosfera solar, de cor avermelhada, que pode ser vista durante eclipses solares totais. O plasma desta camada está a uma temperatura de 10.000 kelvins e aumenta até 20.000 kelvins em apenas 10.000 km. Imagens feitas da cromosfera, através de filtros ópticos mostra uma série de estruturas observadas, como manchas escuras rodeadas pelas brilhantes *plages*, além dos filamentos e proeminências. *Plages* são regiões brilhantes ao redor das manchas solares associadas às regiões com campos magnéticos intensos. Também é visualizado a presença de filamentos escuros que são estruturas mais frias e densas do que o plasma ambiente, estruturas essas que são suspensas pelos campos magnéticos solares. Estas mesmas estruturas são vistas como arcos mais brilhantes quando vistas na regiões de borda do Sol e, nestes casos, são chamadas de proeminências. Filamentos e proeminências correspondem ao mesmo tipo de estrutura.

2.1.6 Coroa Solar e Vento Solar

Com espessura mais concentrada em cerca de até 2 raios solares a coroa solar é a camada mais externa da atmosfera solar e estende-se por todo meio interplanetário. É uma camada extremamente tênue, mas muito quente, com temperaturas entre 2 e 4 milhões de kelvins. Por conta de sua baixa densidade, a coroa solar só pode ser observada na faixa do visível durante eclipses ou com a utilização de um aparelho específico chamado coronógrafo. Imagens do Sol na faixa dos raios X mostram regiões brilhantes formadas por arcos magnéticos que são delineados pelo plasma completamente ionizado atrelado a esses campos magnéticos. Os fenômenos de explosões solares também ocorrem na região da coroa solar.

O Sol emite, além da radiação, partículas carregadas que formam o conhecido vento solar. A coroa solar é a fonte destas partículas, onde as altas temperaturas geram uma pressão térmica maior do que a pressão gravitacional. A velocidade das partículas é maior do que a velocidade de escape do Sol. Assim, a gravidade solar não detém as partículas no plasma coronal e estas escapam para o meio interplanetário formando o vento solar. O vento solar é o responsável pela cauda dos cometas. Tem uma densidade em média de 10^7 partículas por metro cúbico, temperaturas da ordem de 10^5 kelvins e atinge uma velocidade de 450 km/s próximo à órbita da terra. A interação do vento solar com os planetas traz uma série de fenômenos físicos que são foco de estudo de vários grupos de pesquisa. Desde interação com satélites artificiais que interferem no sistema de comunicação até a interação com a geometria dos campos magnéticos dos planetas.

-A figura 2.2 representa as interações entre o sistema composto Sol-Vento Solar-Terra.

Na figura 2.3 mostra-se a relação da temperatura e da densidade em função da altitude a partir da fotosfera em três camadas diferentes do Sol.

Manchas Solares

O conhecido fenômeno de manchas solares, nada mais são que regiões irregulares que aparecem mais escuras do que a fotosfera circundante e que por vezes podem ser observadas a olho nu. As manchas são constituídas de uma parte central mais escura chamada umbra, com temperaturas em torno de 3800 kelvins e a penumbra, região um pouco mais clara. As manchas solares são mais frias porque o campo magnético local impede a convecção e, portanto, que o calor das partes internas suba à fotosfera. As manchas solares tendem a se formar em grupos e estão associadas a intensos campos magnéticos no Sol. As manchas solares ocorrem em maior número com uma periodicidade de 11 anos, chamada de *ciclo solar*. Sua vida média é de alguns dias, mas alguns eventos de mancha solar podem durar várias semanas.

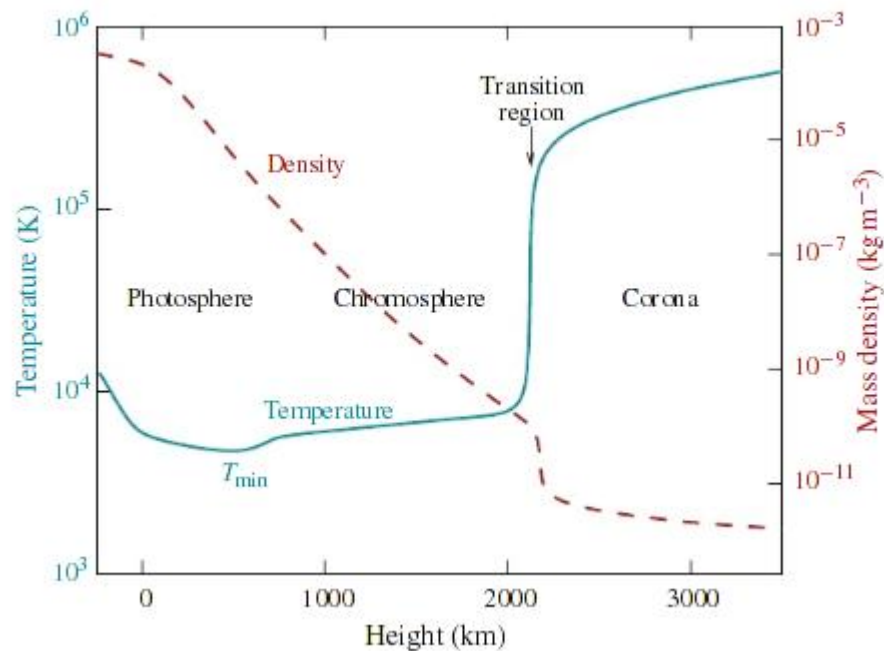


Figura 2.3: Relação entre temperatura, densidade em função das camadas com suas respectivas alturas [34].

2.1.7 Flares Solares

São fenômenos explosivos que podem liberar grandes quantidades de energia. Este fenômeno ocorre devido à conversão de energia magnética gerada na reconexão das linhas de campo presentes em regiões ativas. Esta energia é liberada na forma de radiação eletromagnética. Geralmente ocorre um aquecimento súbito de uma região ativa na atmosfera solar devido a reconfigurações das linhas de campos magnéticos. Após esta energia acelera partículas e aquece o plasma em regiões ativas, aumentando a taxa de radiação e partículas emitidas que seguem as linhas de campo e dão a forma característica de um flare solar. As energias liberadas em um evento de flare ficam em torno de 10^{27} erg/s e 10^{32} erg/s.

2.2 Emissões solares de rádio

O Sol emite radiação em todas as faixas do espectro eletromagnético. A banda denominada de forma genérica como rádio-frequência, a qual cobre todas as frequências até 3 THz, a partir de onde a radiação passa a ser denominada radiação infravermelha, também está presente no espectro observado do Sol.

A parte da astronomia solar que estuda as emissões de rádio do Sol, denominada *rádio-astronomia solar*, foi criada durante a Segunda Guerra Mundial, quando estações inglesas de radar passaram a receber sinais intensos de rádio que não podiam ser atribuídos a fontes terrestres e que foram finalmente identificados de origem solar. A primeira observação sistemática da rádio-astronomia solar foi reportada por Grote Reber, em 1944. Em pouco tempo, esta atividade de pesquisa foi adotada por outros países, com a construção de diversas antenas e espectrômetros na Europa, Estados Unidos da América, Japão, União Soviética e Austrália.

A instrumentação utilizada e as faixas de frequência observadas evoluíram significativamente desde então, passando de alguns mega-hertz para cerca de 30 GHz, atualmente. Ao longo dos anos, as observações mostraram que a fotosfera, cromosfera e coroa solares apresentam distintas fontes de emissão de rádio, que se distinguem pelo objeto emissor (flares, arcos, emissões coronais de massa, etc), frequência, fonte energética e mecanismo emissor.

Os mecanismos de emissão de rádio são geralmente classificados como mecanismos de emissão incoerente ou coerente. Emissões incoerentes resultam de processos contínuos tais como distribuições de partículas térmicas que produzem, por meio de colisões coulombianas, *emissões livre-livre* na faixa de micro-ondas, com frequências entre 300 MHz e 300 GHz e compri-

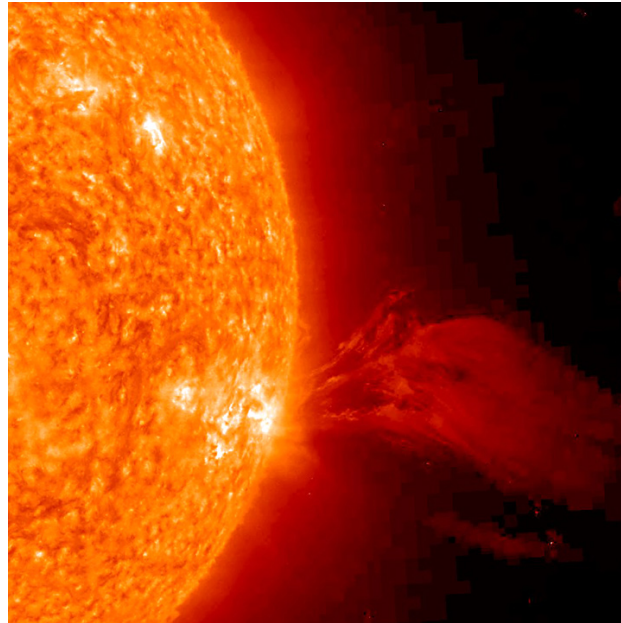


Figura 2.4: Flare Solar observado pelo SOHO em 15 de julho de 2011, disponível em <http://sohowww.nascom.nasa.gov/pickoftheweek/>.

mentos de onda de 1 m a 1 mm. Outra fonte de radiação incoerente consiste de distribuições eletrônicas térmicas ou moderadamente relativísticas que produzem espontaneamente *emissão de giro-cíclotron* ou *giro-sínctroton*. Este mecanismo emissor será considerado em detalhes no capítulo 3.

Emissões coerentes, em contraste, ocorrem devidas a instabilidades cinéticas geradas por distribuições de partículas instáveis. Quando uma função de distribuição de partículas $f(v_{\parallel}, v_{\perp})$ apresenta uma região de inversão de população ($\partial f / \partial v_{\parallel} > 0$ ou $\partial f / \partial v_{\perp} > 0$), sendo as velocidades v_{\parallel} e v_{\perp} identificadas como as componentes da velocidade das partículas na direção paralela e perpendicular, respectivamente, em relação ao campo magnético ambiente, as interações onda-partícula entre o plasma e o campo de radiação se tornam favoráveis à denominada *emissão estimulada* ou *induzida* de radiação, a qual é responsável pela radiação emitida por um laser ou maser.

Emissões espontâneas (incoerentes) e estimuladas (coerentes) de radiação estão relacionadas entre si em um plasma térmico e uma discussão a respeito desta relação é realizada no capítulo 3. Nesta dissertação, serão realizadas também análises sobre feixes de elétrons acelerados ao longo das linhas do campo magnético solar durante um flare solar, por exemplo. Através de observações pode-se separar as emissões solares através de suas morfologias, em função de características como mecanismo gerador, frequência, período de duração e outras características observáveis. As denominações mais comuns distinguem as emissões solares de rádio como sendo do Tipo I até o Tipo V [20, 34]. Adicionalmente, pode-se encontrar na literatura descrições de subcategorias de emissões, tais como as ondas do Tipo J ou Tipo U [4, 34]. A figura 2.5 apresenta de forma ilustrativa os diferentes tipos de emissão em função de suas frequências e tempo de duração. Por sua vez, a tabela 2.1 relaciona os diferentes tipos de emissão com alguns de seus mecanismos geradores.

A seguir, realiza-se uma descrição mais detalhada dos distintos tipos de emissões de rádios observados no Sol baseada em trabalhos de *Robinson et al. (1977)* [48, 49], *Khotyaintsev (2006)* [34] e *Aschwanden (2006)* [4].

2.2.1 Emissões do Tipo I

A emissão do Tipo I, também denominada *tempestade do tipo I*, é o fenômeno de emissão de rádio mais observado no Sol. Esta emissão não está associada com flares, mas ocorre em uma tempestade que pode durar horas ou dias. O termo *Erupção* ou *Rajada (burst)* do Tipo I é aplicado quando o fenômeno é de curta duração, em torno de 1s e com uma largura de banda estreita ($\Delta f / f \approx 0.025$), sendo emitida em ondas de comprimento da ordem de 1 m. A emissão

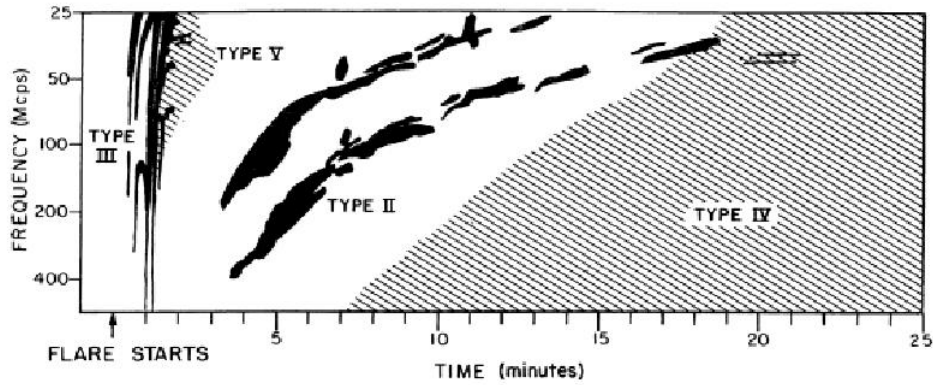


Figura 2.5: Ilustração das emissões do Tipo II ao Tipo V em função da frequência e período de duração [4].

Tabela 2.1: Emissões solares de rádio e seus respectivos mecanismos geradores [4].

Emission mechanism	Frequency	Source/Exciter
(1) Incoherent radio emission:		
(1a) Free-free emission (<i>bremstrahlung</i>) – Microwave postbursts	$\nu \gtrsim 1 \text{ GHz}$	Thermal plasma Thermal plasma
(1b) Gyroemission	$\omega = s\Omega_e$	
Gyroresonance emission	($s = 1, 2, 3, 4$)	Thermal electrons
Gyrosynchrotron emission	($s \approx 10 - 100$)	Mildly relativistic electrons
– Type IV moving		Trapped electrons
– Microwave type IV		Trapped electrons
(2) Coherent radio emission:		
(2a) Plasma emission	$\nu_{pe} = 9000\sqrt{n_e}$	Electron beams
– Type I storms		Langmuir turbulence
– Type II bursts		Beams from shocks
– Type III bursts		Upward propagating beams
– Reverse slope (RS) bursts		Downward propagating beams
– Type J bursts		Beams along closed loops
– Type U bursts		Beams along closed loops
– Type IV continuum		Trapped electrons
– Type V		Slow electron beams
(2b) Electron-cyclotron maser: – Decimetric ms spike bursts	$\omega = s\Omega_e/\gamma + k_{\parallel}v_{\parallel}$	Losscones Losscones

do Tipo I tem polarização fortemente circular (aproximadamente 90%), com uma temperatura de brilho da ordem de 10^7 K a 10^9 K , e contem somente um harmônico fundamental. Emissões de ondas podem variar para valores de maior ou menor frequência, mas nesta a deriva é geralmente insignificante.

A curta duração de ondas individuais sugere uma aceleração local de elétrons para valores de energia equivalentes a algumas vezes o valor da energia térmica do plasma. É geralmente aceito que ondas do tipo I podem ser originadas por algum tipo de emissão fundamental do plasma, tal como turbulência de Langmuir. Esta hipótese explica importantes características observadas em tempestades do tipo I; notavelmente a temperatura de fundo e a forte polarização no modo O.¹ A figura 2.6 apresenta um espectro de onda do Tipo I observado pelo Solar Radio Observatory Potsdam-Tremsdorf, Alemanha, no dia 31 de Maio de 1999.

2.2.2 Emissões do Tipo II

Ondas do Tipo II mostram uma pequena deriva decrescente em frequência, em taxas de ordem $\lesssim 1 \text{ MHz s}^{-1}$ e possuem, geralmente, uma componente próxima ao harmônico fundamental

¹Modo ordinário. Ver capítulo 3

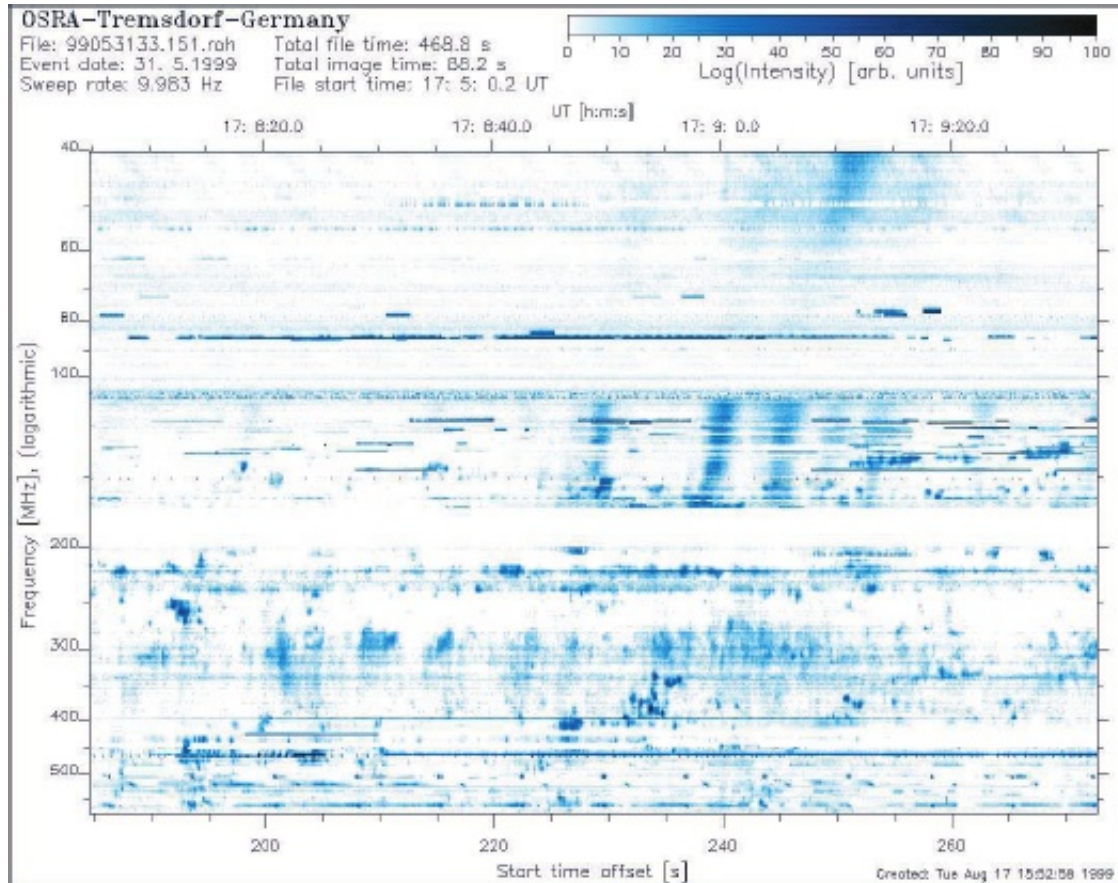


Figura 2.6: Espectro de emissão do tipo I. Disponível em: <http://pt.scribd.com/doc/55821830/5/Radio-emission-of-the-Sun>.

(componente F) da frequência local de plasma ($f = f_{pe}$), combinada com componentes adicionais próximas aos harmônicos superiores (componente H) ($f \approx s f_{pe}$, $s = 2, 3, \dots$). Sua largura de banda instantânea pode ser estreita, da ordem de poucos mega-hertz, mas este não é sempre o caso. A frequência inicial da componente fundamental é usualmente menor que 150 MHz, mas frequências de partida da ordem de 500 MHz também podem ser observadas.

Ondas do Tipo II somente são vistas no meio interplanetário, embora a maioria esteja fora da linha de visada. Com exceção para eventos interplanetários de longa vida, a duração típica de ondas do tipo II é em torno de 5 a 15 minutos. Muitas das explosões mostram uma divisão de banda do fundamental para o primeiro harmônico. Algumas observações mostram que ondas do tipo II são usualmente não polarizadas ou somente pouco polarizadas.

As emissões do tipo II podem ser causadas por ondas de choque propagando-se da baixa coroa para o meio interplanetário. Isto explica as pequenas derivações observadas na dinâmica do espectro. É amplamente aceito que a emissão de rádio em si ocorre como o passo final em uma série de processos físicos: início do choque, aceleração de partículas, a geração de ondas de plasma e, finalmente, conversão de ondas de plasma em ondas eletromagnéticas (mecanismo de emissão de plasma). A figura 2.7 apresenta um espectrograma típico deste tipo de emissão.

2.2.3 Emissões do Tipo III

Ondas do tipo III ocorrem em frequências entre 10 KHz e 1 GHz, correspondendo a uma faixa de altitudes acima da fotosfera solar que se estende da baixa coroa até além da órbita da Terra. Emissões do tipo III foram originalmente identificadas por uma rápida deriva em frequência ($df/dt \sim -0,01 f^{1.84}$, sendo f em MHz), curta duração ($\Delta t \sim 220/f$) e uma largura de banda relativamente grande em qualquer momento, devido à sua alta taxa de deriva. Rajadas do tipo III ocorrem esporadicamente de forma isolada ou em grupos, durante tempestades persistentes. Uma fração significativa das ondas do tipo III exibem uma estrutura harmônica: as componentes F e H são vistas simultaneamente, com suas relações de frequência no intervalo de 1:1,6 a 1:2,0.

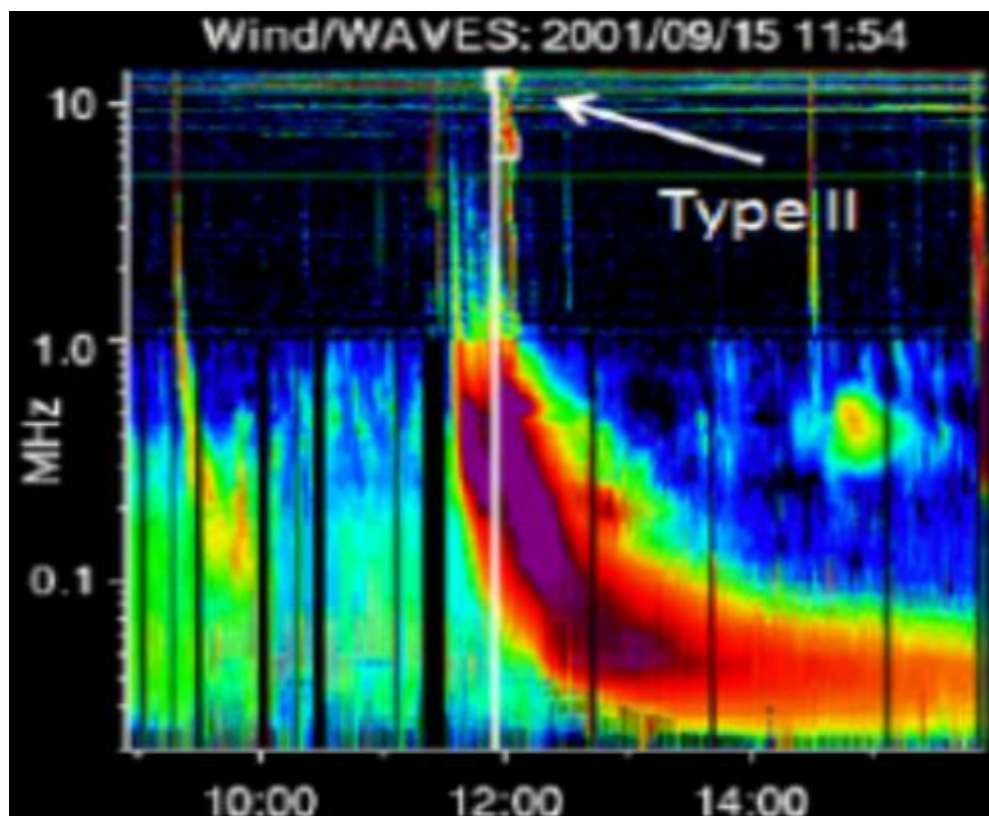


Figura 2.7: Espectrograma da emissão solar do Tipo II observado no dia 15 de setembro de 2001 pela espaçonave WIND [29].

A emissão fundamental é altamente polarizada no modo O e o primeiro harmônico é fracamente polarizado ($\sim 15\%$) no modo X.²

A emissão do tipo III possui várias subclasses. **Emissão tipo U-invertida**, que parte de baixas frequências, evoluem para frequências mais altas e finalmente retornam para baixas frequências. **Emissões do tipo J**, as quais são similares às do tipo U, contudo sofrem uma interrupção no início do ramo descendente. As explosões do tipo III de 1 GHz geralmente são designadas como **emissão tipo III-dm** (decimétricas). Em geral, as explosões decimétricas são mais numerosas do que as explosões tipo III métricas. Todas estas diversas variantes do tipo III, que apresentam aspectos morfológicos semelhantes, são geradas pelo mecanismo de emissão de plasma. Temos ainda outras derivações do tipo III, como **tipo N**, **tipo M** ou emissões **tipo "blips,"** mas, por não serem alvo do presente estudo, não será realizada uma discussão detalhada a respeito das mesmas.

O agente de geração para ondas do tipo III é um feixe de elétrons energéticos, com velocidades entre $0,1c$ e $0,6c$, propagando-se para fora do Sol através da coroa solar. Esses feixes geram a energia para o mecanismo de emissão de plasma. A figura 2.8 representa algumas das distintas variantes da emissão do tipo III, ilustrando a geometria e os espectros de emissão.

2.2.4 Emissões do Tipo IV

Emissões do tipo IV são classificadas em duas categorias: *Tipo IV estacionária* ou *não estacionária* (ou *móvel*). As emissões do tipo IV estacionárias têm como característica principal sua origem em uma tempestade que segue um flare de grande intensidade. Iniciam com poucas rajadas contínuas intensas, evoluindo em seguida para uma tempestade do tipo I, sem qualquer mudança observável na posição da fonte nos seus estágios finais. Durante o estágio inicial do evento, o grau de polarização circular aumenta de um valor muito baixo para aproximadamente 100%. O início do fenômeno em um determinado valor de frequência indica a chegada, ao correspondente nível do plasma, de uma fonte energética de expansão lenta, dentro da qual ocorre o processo de emissão do tipo I.

²Modo extraordinário rápido. Ver capítulo 3

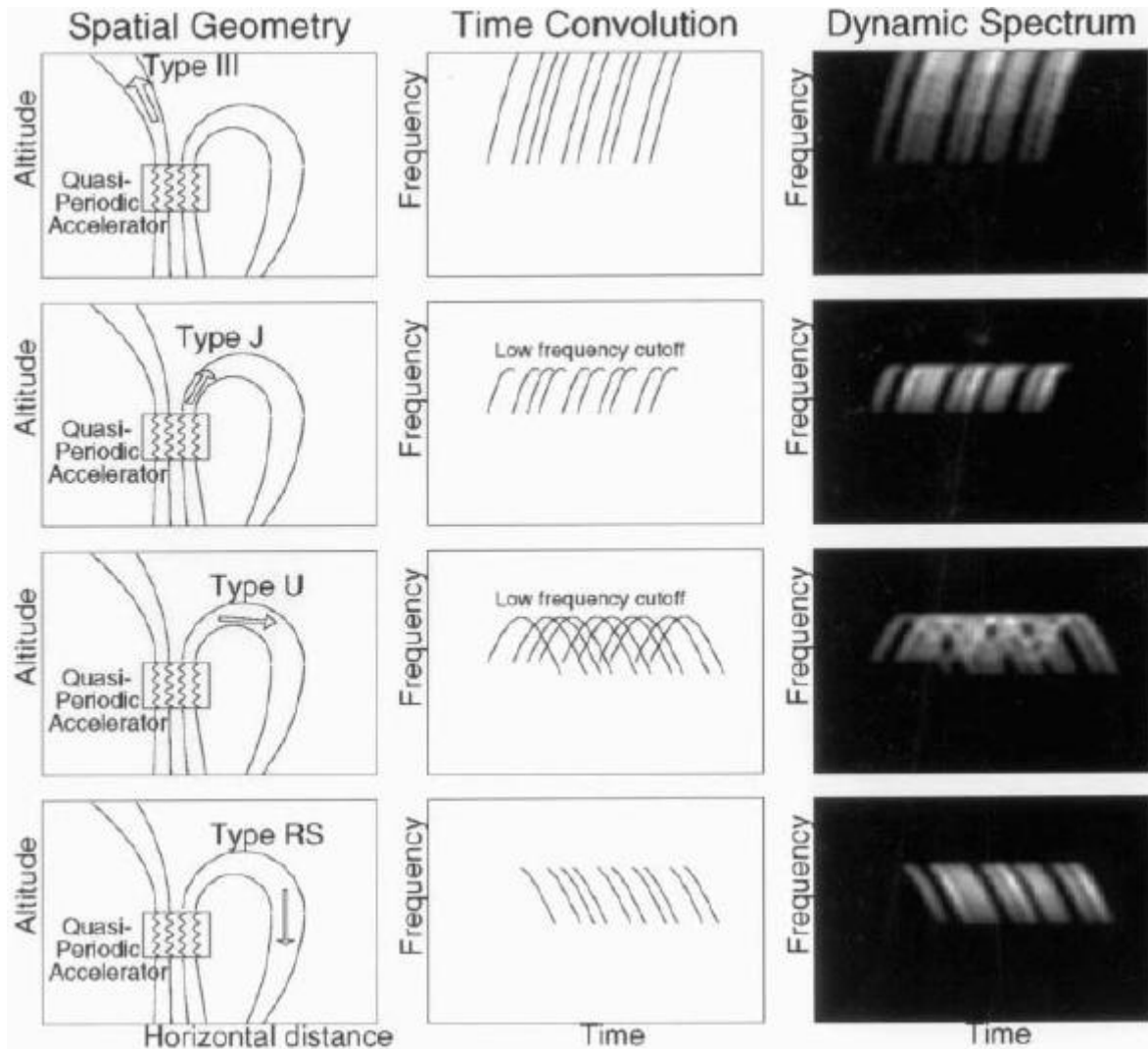


Figura 2.8: Geometria e espectros de emissões do Tipo III e alguma de suas variantes [4].

Já a emissão do tipo IV móvel corresponde a uma fonte de emissão contínua em movimento, caracterizada por um plasma denso (ou *plasmóide*) ejetado durante um flare e que perde a intensidade após 1 raio solar. Tem um tempo médio de duração observado da ordem de 30 minutos a 80 MHz, mas com eventos que podem durar pouco mais de 2 horas. A velocidade da fonte pode variar desde cerca de 200 km/s a até 1.600 km/s. Esta emissão pode ser gerada por uma emissão girossíncrotron de elétrons energéticos, de aproximadamente 100 keV, na presença de um campo magnético intenso ou pelo processo de emissão de plasma. A figura 2.9 apresenta um espectrograma onde se observam emissões do Tipo II, III e IV em função do tempo de duração e frequência.

2.2.5 Emissões do Tipo V

Este é o tipo de emissão alvo deste trabalho. Esta emissão se inicia pouco tempo após uma explosão do tipo III e dura cerca de 2 minutos. São emissões particularmente fortes e de longa duração, em frequências entre 20 MHz e 100 MHz. O grau de polarização circular é geralmente baixo, mas, quando mensurável, o sentido de polarização geralmente é oposto ao das emissões tipo III precedentes. As primeiras teorias invocavam emissão por síncrotron ou emissão de plasma por elétrons aprisionados em *loops* altos sobre a cromosfera solar, mas estas com o tempo foram rejeitadas. Uma discussão mais detalhada sobre os modelos alternativos para a geração da emissão do tipo V será apresentada na seção 4.2. Neste trabalho, apresenta-se como mecanismo gerador o maser de eletron-cíclotron. Em um estudo realizado por *Robinson (1977)* [48] entre Setembro de 1973 e Janeiro de 1975, foram analisados eventos de emissões de

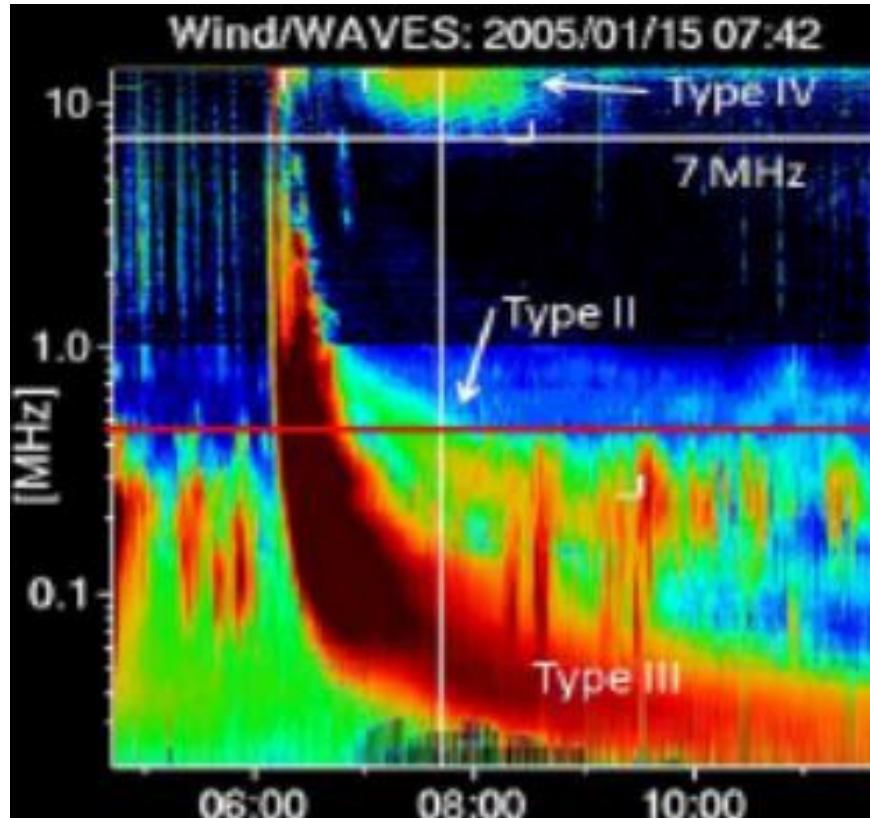


Figura 2.9: Espectrograma onde são identificadas ondas dos tipos II, III e IV [28].

ondas dos Tipos III e V. Este período foi escolhido devido a disponibilidade de eventos na faixa de frequências de 160, 80 e 43 MHz que estão todos nos espectros de ambos modos de emissão. De 30 eventos analisados, 10 são classificados como emissões do Tipo III de longa duração e os outros 20 como emissões do tipo III seguidas de emissões do tipo V, estas com mais de 1 minuto de duração. A figura 2.10 apresenta um espectrograma típico de uma emissão do tipo V harmônica. Já a figura 2.11 apresenta um espectrograma de emissões conjuntas dos tipos III e V. Pode-se identificar essa radiação no espectrograma por características básicas como ter um valor inferior limite em torno de 30MHz e um corte na região de 60MHz, além de poder-se notar que ocorre de forma contínua a baixas frequências.

Neste estudo observacional foram feitas considerações acerca da dinâmica espectral das ondas e do tamanho e formas elípticas das regiões-fonte das mesmas, seus harmônicos e suas temperaturas de brilho. A partir deste estudo sistemático, *Robinson (1977)* [48] concluiu que:

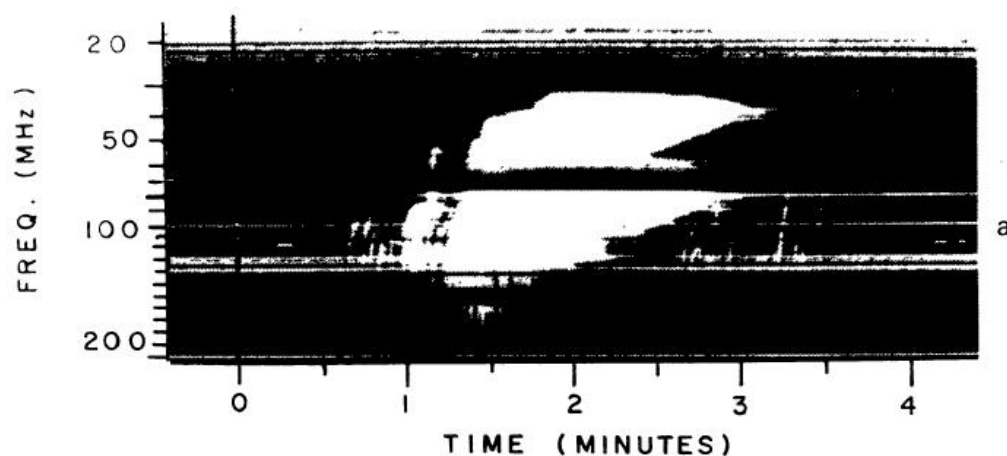


Figura 2.10: Espectrograma típico de uma emissão do Tipo V com estrutura harmônica [48].

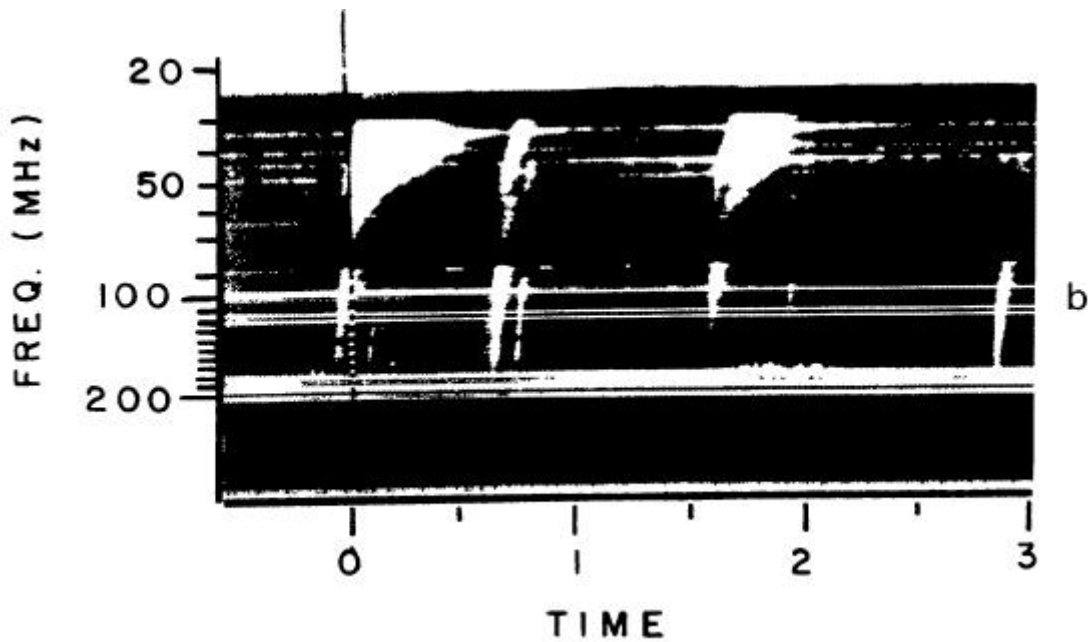


Figura 2.11: Espectrograma mostrando uma emissão do Tipo III no harmônico fundamental e com uma curta duração e concomitantemente uma emissão do Tipo V como segundo Harmônico e de duração maior [48].

1. Fontes de baixa frequência muitas vezes têm uma lenta fase de diminuição que precede o decaimento final da onda;
2. O decaimento final da radiação é independente da frequência e dura em média 7,5 - 8,0s;
3. O tamanho da fonte aumenta com o decréscimo da frequência;
4. As fontes das emissões do tipo V são geralmente maiores que as do tipo III;
5. Os espalhamentos na inhomogeneidade coronal podem influenciar no tamanho da fonte, ocasionalmente dominando os efeitos das variações internas da fonte. Em muitos casos este espalhamento parece ser quase isotrópico;
6. Fontes de emissão de ondas do Tipo V são paralelamente alongadas para as bordas;
7. Há uma dispersão das altitudes das regiões fonte com a frequência. Com as fontes de menor frequência localizados em maiores altitudes;
8. As fontes do Tipo V e os feixes de ondas do tipo III propagam-se com um ângulo em direção normal entre si.
9. A relação entre as posições das fontes de emissões do Tipo V e do Tipo III associadas varia consideravelmente. Em alguns eventos as fontes se sobrepõem enquanto que em outros as fontes são amplamente separadas.
10. As fontes do Tipo V por vezes movem-se com uma grande velocidade aparente, em média $1,5 \times 10^4$ km/s. O movimento é geralmente direcionado em sentido de afastamento do local de origem da fonte da emissão do Tipo III.
11. Normalmente as fontes do Tipo V estão localizadas aproximadamente na mesma altura das fontes do Tipo III, porem eventualmente, algumas fontes do Tipo V estão consideravelmente mais elevadas.
12. Fontes do Tipo V são ocasionalmente observadas a alturas maiores que as previstas pelo modelo padrão de *streamer*³.

³*Streamers* são estruturas que se estendem em vários raios solares da base da coroa solar, com orientação radial e longa duração. Uma subclasse, denominada *streamers de capacete (helmet streamers)*, são centradas sobre proeminências que geralmente conectam diferentes manchas solares, resultando a forma de um capacete.

13. As fontes das ondas do Tipo V de 80 MHz ocasionalmente apresentam uma estrutura de fonte dupla, onde uma das fontes está próxima e a outra distante da fonte do Tipo III associada. Para fontes de 43 MHz isso não ocorre.
14. Enquanto que as fontes de 43 MHz do Tipo V estão sempre próximas do local da fonte do Tipo III, ocasionalmente, as fontes de 80MHz são deslocadas em 13 arcmin na direção equatorial.
15. Para as fontes Tipo V de 43 MHz ocorrem temperaturas de brilho da ordem de $10^{10} - 10^{11}$ K, que são comparáveis às das fontes do Tipo III.
16. Estruturas harmônicas são ocasionalmente observadas para ondas do Tipo V.
17. Há uma correlação confirmada entre os flares e 40% das emissões do Tipo III-V. Já entre as unicamente do Tipo III não há correlação confirmada.
18. Há 45% de correlação entre ondas do Tipo III-V e micro-ondas. Já entre emissões puras do Tipo III e micro-ondas não há correlação.
19. Para emissões do Tipo V de 80 MHz, em todos os casos as ondas são não polarizadas. Já para emissões do Tipo III nenhuma informação sobre polarização está disponível.
20. O desenvolvimento das ondas do Tipo III-V e ondas do Tipo III são eventos idênticos, exceto pelas durações dos eventos.

A figura 2.12 apresenta as posições estimadas das regiões-fonte de emissões do tipo III e V associadas. Na primeira coluna é associada a posição centrada da emissões do Tipo III e Tipo V. Essas são diferenciadas em função das frequências de valores 160, 80 e 43MHz que são respectivamente associadas as figuras de um círculo, um triângulo e um quadrado. Figuras preenchidas representam emissões do Tipo V enquanto que figuras vazias representam emissões do Tipo III. Na coluna do meio estão dispostas, de forma mais ampla, as regiões de fonte de emissões do Tipo III enquanto que na coluna da direita estão as fontes para emissões do Tipo V. Contornos fechados, tracejados e pontilhados representam respectivamente frequências de valores 43, 80 e 160MHz.

Poucos estudos como este foram realizados, pois com o passar do tempo, emissões do Tipo V foram perdendo espaço e interesse para estudos de emissões do Tipo III. Estas sim ocupam um grande espaço no estudos das emissões solares. Modelos teóricos para descrever a emissão do tipo V foram propostos já por *Zheleznyakov & Zaitsev (1968)* [66]. Posteriormente, e a partir das conclusões do estudo de *Robinson (1977)*, outras teorias envolvendo as emissões do Tipo V foram propostas por *Robinson (1978)* [49], *Winglee & Dulk (1986)* [59] e *Raoult et al. (1990)*, [47] as quais trouxeram maiores colaborações para o desenvolvimento do conhecimento destas emissões. Especificamente, *Winglee & Dulk (1986)* [59] propuseram o Maser de Eletron-ciclotron como o mecanismo fonte deste tipo de radiação. Uma discussão mais extensa de alguns destes modelos teóricos será apresentada no capítulo 4. No capítulo 3 será apresentado o formalismo necessário para descrever a dinâmica da emissão solar bem como do mecanismo proposto neste trabalho como sendo o gerador da emissão solar do Tipo V.

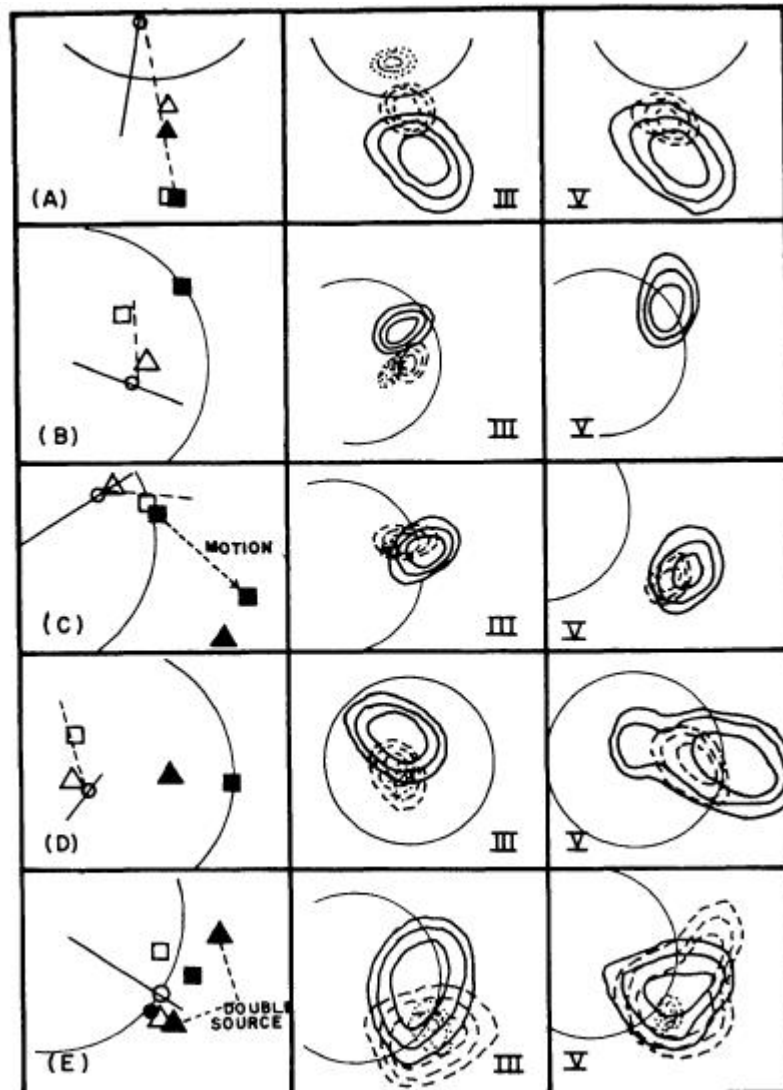


Figura 2.12: Relação entre às posições das fontes do Tipo III e Tipo V [48].

CAPÍTULO 3

O MASER DE ELÉTRON-CÍCLOTRON

3.1 Introdução

O maser¹ de elétron-cíclotron consiste em um mecanismo emissor de radiação eletromagnética a partir de um plasma magnetizado que tem, como fonte principal de energia livre, eventuais inversões de população e outras anisotropias da função de distribuição eletrônica, características de um sistema fora do equilíbrio termodinâmico.

A radiação é emitida na faixa de frequência de cíclotron eletrônica e de seus harmônicos e é devida somente à interação entre os elétrons e as ondas. Esta radiação, também denominada *emissão giromagnética*, é denominada genericamente de *emissão de cíclotron* ou *giro-cíclotron*, quando a temperatura eletrônica é baixa o suficiente para justificar uma aproximação não-relativística ou fracamente relativística, e de *emissão de síncrotron* (ou *giro-síncrotron*), quando a radiação é emitida por partículas ultra-relativísticas.

A emissão giromagnética e a correspondente absorção giromagnética ocorrem devido à interação ressonante entre uma onda eletromagnética e uma partícula espiralando em torno de uma linha de campo magnético. Esta ressonância é denominada *ressonância de cíclotron* ou *giromagnética* e satisfaz a *condição de ressonância*

$$\omega - s\Omega_\alpha/\gamma - k_\parallel v_\parallel = 0, \quad (3.1)$$

sendo ω a frequência angular e k o vetor de onda da radiação, $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $\Omega_\alpha = |q_\alpha| B_0/m_\alpha c$ a frequência angular de cíclotron da partícula da espécie α , sendo q_α a sua carga elétrica e m_α a sua massa de repouso,

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_\alpha^2 c^2}}$$

o fator γ de Lorentz e v a velocidade da partícula.

Neste capítulo, a emissão giromagnética será tratada fazendo-se uso da denominada *aproximação semi-clássica* [38]. Nesta aproximação, tanto as partículas quanto as ondas são tratadas classicamente mas a notação e os princípios físicos são adotados da mecânica quântica. As principais justificativas para esta abordagem são:

- Energia e *momentum* são garantidamente conservados ao nível microscópico.
- O formalismo quântica possibilita o tratamento da emissão ou absorção de radiação pelas partículas ao nível microscópico.
- Permite o emprego do Princípio de Balanço Detalhado através dos coeficientes de Einstein, que relacionam a emissão com a absorção da radiação.

Esta abordagem difere da tradicionalmente empregada em física dos plasmas atualmente, a qual é baseada em um tratamento de mecânica estatística de não-equilíbrio clássica, como descrita pela hierarquia BBGKY² de equações cinéticas. Neste tratamento estatístico, a emissão giromagnética é descrita a partir das soluções linearizadas da equação cinética estatística de mais baixa ordem, denominada *equação de Vlasov*, acoplada com as equações de Maxwell [23].

¹Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation.

²Hierarquia Bogoliubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon

O tratamento estatístico é considerado mais geral e é mais largamente empregado na literatura; contudo, Melrose (1980) [38, capítulo 5] argumenta que ambos os formalismos são equivalentes quando estão sendo tratadas flutuações com fases incoerentes, como com frequência se observa em fenômenos que ocorrem no plasma do sistema solar e outros ambientes astrofísicos.

3.2 Emissão espontânea de radiação por partículas em um plasma

3.2.1 Equação da onda

As equações de Maxwell no sistema Gaussiano são:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) \quad (3.2a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (3.2b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi\rho(\mathbf{r}, t) \quad (3.2c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (3.2d)$$

sendo $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ e $\rho(\mathbf{r}, t)$ respectivamente as densidade de corrente e de carga. Definem-se agora os campos no espaço de Fourier de acordo com (A.1a,b), sendo aqui $A(\mathbf{r}, t)$ uma componente qualquer dos campos nas equações de Maxwell ou alguma outra quantidade física relacionada com a eletrodinâmica do plasma. Portanto, as equações de Maxwell (3.2a-d) ficam escritas da seguinte maneira no espaço de Fourier:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\omega}{c} \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) \quad (3.3a)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{\omega}{c} \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) - \frac{4\pi i}{c} \mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega) \quad (3.3b)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = -4\pi i \rho(\mathbf{k}, \omega) \quad (3.3c)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) = 0. \quad (3.3d)$$

Por outro lado, a equação da onda eletromagnética é obtida pela combinação das equações (3.2a) e (3.2b),

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t) + \nabla \times [\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}(\mathbf{r}, t), \quad (3.4)$$

a qual se reduz à seguinte equação no espaço de Fourier:

$$\frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) + \mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)] = -\frac{4\pi i \omega}{c^2} \mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega). \quad (3.5)$$

3.2.1.1 Relação constitutiva entre $\mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega)$ e $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$

A densidade de corrente no espaço de Fourier que está presente na equação (3.5) é suposta ser composta por duas partes: uma parte *induzida* (ind) e uma parte *extrânea*³ (ext).

A parte induzida descreve a resposta linear do meio à perturbação introduzida pela onda eletromagnética que está se propagando. Esta perturbação é introduzida pelo campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ da onda e é descrita, em um meio homogêneo e estacionário, pela *relação constitutiva*

$$\mathbf{J}^{\text{ind}}(\mathbf{r}, t) = \int d^3 r' \int_{-\infty}^t dt' \overset{\leftrightarrow}{\sigma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t'), \quad (3.6)$$

sendo $\overset{\leftrightarrow}{\sigma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$ o *tensor de condutividade* do plasma. O campo magnético da onda está relacionado por (3.2b). Fazendo-se uso do teorema da convolução (A.6) e somando sobre os índices, obtém-se a mesma relação constitutiva no espaço de Fourier.

$$J_i^{\text{ind}}(\mathbf{k}, \omega) = \sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega) E_j(\mathbf{k}, \omega), \quad (3.7)$$

³Do inglês *extraneous*.

sendo $\overleftrightarrow{\sigma}(\mathbf{k}, \omega)$ o tensor de condutividade no espaço de Fourier. Relacionado com $\sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$, é costumeiro descrever-se também a resposta do meio através do *tensor dielétrico* do plasma,

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega). \quad (3.8)$$

Escrevendo então

$$J_i(\mathbf{k}, \omega) = J_i^{\text{ind}}(\mathbf{k}, \omega) + J_i^{\text{ext}}(\mathbf{k}, \omega) = \sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega) E_j(\mathbf{k}, \omega) + J_i^{\text{ext}}(\mathbf{k}, \omega)$$

em (3.5), esta pode ser reduzida a:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} + \frac{c^2}{\omega^2} [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{k} - k^2 \mathbf{E}] &= -\frac{4\pi i}{\omega} \mathbf{J}, \\ \Lambda_{ij}(\mathbf{k}, \omega) E_j(\mathbf{k}, \omega) &= -\frac{4\pi i}{\omega} J_i^{\text{ext}}(\mathbf{k}, \omega), \end{aligned} \quad (3.9)$$

sendo

$$\Lambda_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{c^2}{\omega^2} (k_i k_j - k^2 \delta_{ij}) + \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \quad (3.10)$$

o *tensor de dispersão* das ondas.

3.2.1.2 O tensor dielétrico: propriedades gerais

Existem três propriedades gerais do tensor dielétrico (3.8) que refletem princípios físicos básicos.

Respostas dissipativa e não dissipativa. O tensor dielétrico pode ser separado em uma parte hermiteana (ε_{ij}^h) e uma parte anti-hermiteana (ε_{ij}^a), isto é,

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon_{ij}^h(\mathbf{k}, \omega) + \varepsilon_{ij}^a(\mathbf{k}, \omega), \quad (3.11a)$$

$$\varepsilon_{ij}^h(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2} [\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) + \varepsilon_{ji}^*(\mathbf{k}, \omega)] \quad (3.11b)$$

$$\varepsilon_{ij}^a(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2} [\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) - \varepsilon_{ji}^*(\mathbf{k}, \omega)]. \quad (3.11c)$$

A parte hermiteana descreve a resposta *reativa*, isto é, não dissipativa do plasma frente a propagação da onda, ao passo que a parte anti-hermiteana descreve a resposta *resistiva*, isto é, dissipativa do plasma. Isto é demonstrado ao se calcular a média temporal de $\mathbf{J}^{\text{ind}} \cdot \mathbf{E}$, isto é, o trabalho médio realizado pela onda sobre o plasma. Esta quantidade é nula se somente a parte hermiteana de ε_{ij} (ou seja, a parte anti-hermiteana de σ_{ij}) é mantida em (3.7). Por outro lado, a mesma quantidade é não nula se ε_{ij}^a é mantida.

Observa-se as seguintes propriedades de ε_{ij}^h e ε_{ij}^a frente à operação de *conjugação hermiteana*,

$$\left(\overleftrightarrow{\varepsilon}^h\right)^\dagger = \left(\overleftrightarrow{\varepsilon}^{h*}\right)^T = \overleftrightarrow{\varepsilon}^h \implies \varepsilon_{ji}^{h*} = \varepsilon_{ij}^h,$$

$$\left(\overleftrightarrow{\varepsilon}^a\right)^\dagger = \left(\overleftrightarrow{\varepsilon}^{a*}\right)^T = -\overleftrightarrow{\varepsilon}^a \implies \varepsilon_{ji}^{a*} = -\varepsilon_{ij}^a.$$

Relações de Onsager. A segunda propriedade está relacionada com a reversão temporal. Uma vez que ε_{ij}^h descreve a resposta não dissipativa do plasma, esta parte deve se transformar de uma maneira par frente a transformação $t \rightarrow -t$, ao passo que ε_{ij}^a deve se transformar de uma maneira ímpar, uma vez que esta descreve a resposta dissipativa do meio.

Esta propriedade está descrita pelas relações de Onsager, as quais mostram como os coeficientes de relações constitutivas fenomenológicas devem se transformar frente à reversibilidade temporal das equações cinéticas que descrevem o comportamento microscópico dos constituintes do sistema físico. Uma descrição mais detalhada destas relações pode ser encontrada em [24, seção III.4]. Quando as partículas do plasma (ou de outro sistema físico) estão submetidas a um campo vetorial axial, como o campo magnético, a transformação $t \rightarrow -t$ deve ser acompanhada da transformação $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$. Neste caso, as relações de Onsager são

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{B}) = \varepsilon_{ji}(-\mathbf{k}, \omega; -\mathbf{B}).$$

Para as partes hermiteana e anti-hermiteana, obtém-se então

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}^h(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{B}) &= \varepsilon_{ij}^h(\mathbf{k}, -\omega; -\mathbf{B}) \\ \varepsilon_{ij}^a(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{B}) &= -\varepsilon_{ij}^a(\mathbf{k}, -\omega; -\mathbf{B}),\end{aligned}$$

conforme foi afirmado. Na obtenção das propriedades acima, a condição de realidade (A.2) foi empregada.

Relações de Kramers-Krönig. Estas relações são impostas ao tensor dielétrico pelo princípio da causalidade. Sem demonstração, as mesmas são dadas por

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}^h(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{i}{\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_{ij}^a(\mathbf{k}, \omega')}{\omega - \omega'} d\omega' \\ \varepsilon_{ij}^a(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{i}{\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_{ij}^h(\mathbf{k}, \omega')}{\omega - \omega'} d\omega',\end{aligned}$$

sendo \oint a parte principal de Cauchy das integrais acima.

3.2.2 Soluções da equação da onda.

Retornando à equação da onda escrita no espaço de Fourier, eq. (3.9), o tensor de dispersão será dividido em suas partes hermiteana e anti-hermiteana, de acordo com (3.11a-c), resultando para o lado esquerdo de (3.9),

$$\Lambda_{ij}(\mathbf{k}, \omega) E_j(\mathbf{k}, \omega) = \Lambda_{ij}^h(\mathbf{k}, \omega) E_j(\mathbf{k}, \omega) + \Lambda_{ij}^a(\mathbf{k}, \omega) E_j(\mathbf{k}, \omega),$$

existindo a correspondência direta $\Lambda_{ij}^h \longleftrightarrow \varepsilon_{ij}^h$ e $\Lambda_{ij}^a \longleftrightarrow \varepsilon_{ij}^a$, isto é, resposta reativa do plasma determina Λ_{ij}^h , ao passo que a parte resistiva determina Λ_{ij}^a . Esta parte resistiva, associada com a dissipação irreversível de energia entre partículas e campos, estará associada à corrente extrânea presente no lado direito da equação da onda. Portanto, para o presente tratamento da emissão espontânea de radiação pelo plasma, a equação (3.9) será escrita como

$$\Lambda_{ij}^h(\mathbf{k}, \omega) E_j(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{4\pi i}{\omega} J_i^{\text{ext}}(\mathbf{k}, \omega), \quad (3.12a)$$

sendo

$$J_i^{\text{ext}}(\mathbf{k}, \omega) \equiv -\frac{i\omega}{4\pi} \Lambda_{ij}^a(\mathbf{k}, \omega) E_j(\mathbf{k}, \omega). \quad (3.12b)$$

Em (3.12b), qualquer outra fonte de corrente extrânea deve ser acrescida à expressão apresentada; contudo, esta será considerada o termo de fonte relevante para descrever a dissipação irreversível de energia entre ondas e partículas no presente tratamento. A justificativa para a definição realizada em (3.12b) pode ser obtida quando se considera a forma correta do teorema de Poynting em um meio contínuo linear, dispersivo e com termos de perdas (ver, por exemplo, Jackson 1999) [32, seção 6.8]. A equação de conservação da energia em um sistema campos + partículas no vácuo é dada pela expressão bem conhecida [32, eq. 6.108]

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{E^2 + B^2}{8\pi} + \nabla \cdot \left(\frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right) = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E},$$

onde o termo $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ descreve a taxa de realização de trabalho, por unidade de volume, dos campos sobre as partículas. Em um meio linear, dispersivo e com perdas por dissipação, este termo contém a contribuição de um processo irreversível de dissipação de energia entre partículas e campos e de um processo reversível associado ao movimento das partículas sob a ação dos campos. Estas contribuições são discutidas em mais detalhes na seção 3.2.3. O termo (3.12b) consiste justamente na absorção irreversível mencionada.

A solução da equação (3.12) pode ser obtida fazendo-se uso da matriz $\lambda_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ dos cofatores de Λ_{ij}^h .⁴ Observa-se que os elementos de λ_{ij} são:

$$\lambda_{11} = (-)^{1+1} \det \begin{vmatrix} \Lambda_{22}^h & \Lambda_{32}^h \\ \Lambda_{23}^h & \Lambda_{33}^h \end{vmatrix} = \Lambda_{22}^h \Lambda_{33}^h - \Lambda_{23}^h \Lambda_{32}^h \quad \lambda_{12} = (-)^{1+2} \det \begin{vmatrix} \Lambda_{12}^h & \Lambda_{32}^h \\ \Lambda_{13}^h & \Lambda_{33}^h \end{vmatrix} = \Lambda_{13}^h \Lambda_{32}^h - \Lambda_{12}^h \Lambda_{33}^h$$

⁴É importante notar-se a transposição dos índices de Λ_{ij}^h . Esta matriz também é denominada *adjunta*.

$$\begin{aligned}
 \lambda_{13} &= (-)^{1+3} \det \begin{vmatrix} \Lambda_{12}^h & \Lambda_{22}^h \\ \Lambda_{13}^h & \Lambda_{23}^h \end{vmatrix} = \Lambda_{12}^h \Lambda_{23}^h - \Lambda_{13}^h \Lambda_{22}^h & \lambda_{21} &= (-)^{2+1} \det \begin{vmatrix} \Lambda_{21}^h & \Lambda_{31}^h \\ \Lambda_{23}^h & \Lambda_{33}^h \end{vmatrix} = \Lambda_{23}^h \Lambda_{31}^h - \Lambda_{21}^h \Lambda_{33}^h \\
 \lambda_{22} &= (-)^{2+2} \det \begin{vmatrix} \Lambda_{11}^h & \Lambda_{31}^h \\ \Lambda_{13}^h & \Lambda_{33}^h \end{vmatrix} = \Lambda_{11}^h \Lambda_{33}^h - \Lambda_{13}^h \Lambda_{31}^h & \lambda_{23} &= (-)^{2+3} \det \begin{vmatrix} \Lambda_{11}^h & \Lambda_{21}^h \\ \Lambda_{13}^h & \Lambda_{23}^h \end{vmatrix} = \Lambda_{13}^h \Lambda_{21}^h - \Lambda_{11}^h \Lambda_{23}^h \\
 \lambda_{31} &= (-)^{3+1} \det \begin{vmatrix} \Lambda_{21}^h & \Lambda_{31}^h \\ \Lambda_{22}^h & \Lambda_{32}^h \end{vmatrix} = \Lambda_{21}^h \Lambda_{32}^h - \Lambda_{22}^h \Lambda_{31}^h & \lambda_{32} &= (-)^{3+2} \det \begin{vmatrix} \Lambda_{11}^h & \Lambda_{31}^h \\ \Lambda_{12}^h & \Lambda_{32}^h \end{vmatrix} = \Lambda_{12}^h \Lambda_{31}^h - \Lambda_{11}^h \Lambda_{32}^h \\
 \lambda_{33} &= (-)^{3+3} \det \begin{vmatrix} \Lambda_{11}^h & \Lambda_{21}^h \\ \Lambda_{12}^h & \Lambda_{22}^h \end{vmatrix} = \Lambda_{11}^h \Lambda_{22}^h - \Lambda_{12}^h \Lambda_{21}^h.
 \end{aligned}$$

Neste momento, é interessante apresentar uma série de identidades entre as matrizes Λ_{ij}^h e λ_{ij} [52, eqs. 4.4, 4.5, 4.17],

$$\Lambda_{ij}^h \lambda_{jk} = \lambda_{ij} \Lambda_{jk}^h = \Lambda \delta_{ik}, \quad (3.13a)$$

$$\lambda_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} \Lambda_{mk}^h \Lambda_{nl}^h \quad (3.13b)$$

$$\lambda_{ij} \lambda_{kl} = \lambda_{il} \lambda_{kj} + \Lambda \varepsilon_{ikm} \varepsilon_{jln} \Lambda_{nm}^h \quad (3.13c)$$

sendo $\Lambda(\mathbf{k}, \omega) = \det |\Lambda_{ij}^h(\mathbf{k}, \omega)|$, em (3.12a) podemos realizar as operações:

$$\lambda_{mi} \Lambda_{ij}^h E_j = -\frac{4\pi i}{\omega} \lambda_{mi} J_i^{\text{ext}},$$

$$\Lambda \delta_{jm} E_j = -\frac{4\pi i}{\omega} \lambda_{mi} J_i^{\text{ext}},$$

ou seja,

$$E_i = -\frac{4\pi i}{\omega} \frac{\lambda_{ij}(\mathbf{k}, \omega)}{\Lambda(\mathbf{k}, \omega)} J_j^{\text{ext}}(\mathbf{k}, \omega), \quad (3.14)$$

a qual é a solução desejada da equação da onda.

Algumas consequências das soluções da equação da onda no espaço de Fourier, eq. (3.12), serão consideradas agora.

3.2.2.1 Propagação de ondas em um plasma com baixa absorção.

Relação de dispersão. Vamos considerar agora a propagação de ondas eletromagnéticas em um plasma homogêneo, anisotrópico e fracamente dissipativo. Por um meio fracamente dissipativo (ou com baixa absorção) pode-se entender um meio tal que uma dada frente de onda monocromática, de número de onda $k = 2\pi/\lambda$ e frequência angular ω , ao se propagar neste, tem a sua componente elétrica substancialmente amortecida ao longo de uma distância típica $L \gg \lambda$. Nesta situação, assume-se que

$$|\Lambda_{ij}^a(\mathbf{k}, \omega)| \ll |\Lambda_{ij}^h(\mathbf{k}, \omega)|. \quad (3.15)$$

Um plasma não pode sustentar a propagação de qualquer tipo de ondas. Somente podem se propagar os denominados *modos normais* de oscilação, os quais são determinados pela equação da onda (3.4), (3.9) ou (3.12). Em uma situação ideal de dissipação desprezível, a equação (3.12) se reduz simplesmente a

$$\Lambda_{ij}^h(\mathbf{k}, \omega) E_j(\mathbf{k}, \omega) = 0, \quad (3.16)$$

uma vez que a corrente extrânea $\mathbf{J}^{\text{ext}}(\mathbf{k}, \omega)$ é a responsável pela dissipação irreversível no plasma. Neste caso, a equação (3.16) somente possui solução não trivial se

$$\Lambda^h(\mathbf{k}, \omega) \equiv \det |\Lambda_{ij}^h(\mathbf{k}, \omega)| = 0. \quad (3.17)$$

A equação (3.17) é usualmente denominada *equação de dispersão*. As soluções da mesma determinam uma relação entre ω e \mathbf{k} , denominada *relação de dispersão*, a qual consiste nos modos normais de oscilação do plasma. Como a matriz Λ_{ij}^h é hermiteana, os modos normais resultantes serão puramente reais. As relações de dispersão podem ser escritas de duas maneiras:

$$\omega = \omega^\sigma(\mathbf{k}) \equiv \omega_{\mathbf{k}}^\sigma, \quad \text{ou} \quad (3.18a)$$

$$k_i = k_i^\sigma(k_j, k_\ell, \omega), \quad (3.18b)$$

sendo $\{k_i, k_j, k_\ell\}$ distintos componentes de \mathbf{k} . O índice σ identifica distintos *modos de propagação*, uma vez que há sempre mais que uma solução de (3.17). Neste capítulo será adotada a primeira forma.

Amplitude do campo elétrico. Uma vez que a relação de dispersão (3.18a) indica os modos normais de oscilação do plasma, a amplitude do campo elétrico associado ao modo de propagação σ deve necessariamente ser escrita como

$$[\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)]^\sigma = 2\pi \mathbf{E}^\sigma(\mathbf{k}) \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}^\sigma). \quad (3.19a)$$

Somando sobre as contribuições de todos os modos normais, resulta

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = [\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)]^\sigma = 2\pi \sum_{\sigma} \mathbf{E}^\sigma(\mathbf{k}) \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}^\sigma). \quad (3.19b)$$

Fazendo uso agora da condição de realidade (A.2), resultam as seguintes propriedades matemáticas de $\omega_{\mathbf{k}}^\sigma$ e $\mathbf{E}^\sigma(\mathbf{k})$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^\sigma(\mathbf{k}) &= \mathbf{E}^{\sigma*}(-\mathbf{k}) \\ \omega_{\mathbf{k}}^\sigma &= -\omega_{-\mathbf{k}}^\sigma. \end{aligned}$$

Taxa de absorção. Em muitos tratamentos, deseja-se obter soluções complexas da equação de dispersão. Isto é realizado resolvendo-se a equação (3.9), incorporando-se de volta Λ_{ij}^σ no tensor de dispersão. Desta forma, ao se desprezar novamente $\mathbf{J}^{\text{ext}}(\mathbf{k}, \omega)$, resulta

$$\Lambda_{ij}(\mathbf{k}, \omega) E_j(\mathbf{k}, \omega) = 0,$$

cuja solução é fornecida por

$$\Lambda(\mathbf{k}, \omega) \equiv \det |\Lambda_{ij}(\mathbf{k}, \omega)| = 0. \quad (3.20)$$

As soluções da equação de dispersão, chamadas de *relações de dispersão*, podem ser escritas de duas formas equivalentes,

$$\omega = \omega(\mathbf{k}) \text{ ou } k_i = k_i(k_j, k_\ell, \omega),$$

sendo que a segunda forma indica que um componente do vetor de onda pode ser escrito em termos dos demais e da frequência. Como as soluções da equação (3.20) são, em geral, complexas:

$$\omega = \omega_r + i\gamma,$$

a presença da parte imaginária, a *taxa de absorção*, está justamente relacionada com a absorção das ondas no plasma, uma vez que a amplitude de qualquer componente de Fourier do campo elétrico irá decair, ao longo da sua propagação, grosseiramente como

$$E(\mathbf{r}, t) \sim E_0 e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = E_0 e^{-\gamma t} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_r t)}.$$

Portanto, a hipótese de fraca absorção somente é admissível se a condição

$$|\gamma| \ll \omega_r$$

for adicionada a (3.15).

Neste caso, é possível escrever $\Lambda_{ij} = \text{Re}\Lambda_{ij} + i\text{Im}\Lambda_{ij}$ e desenvolver a equação de dispersão em séries de potências em torno de ω_r , resultando

$$\text{Re}\Lambda(\mathbf{k}, \omega_r) - \gamma \frac{\partial}{\partial \omega_r} \text{Im}\Lambda(\mathbf{k}, \omega_r) = 0$$

$$\gamma \frac{\partial}{\partial \omega_r} \text{Re}\Lambda(\mathbf{k}, \omega_r) + \text{Im}\Lambda(\mathbf{k}, \omega_r) = 0.$$

Denominando a relação de dispersão para um determinado modo de propagação σ como $\omega_r = \omega_{\mathbf{k}}^\sigma$, as equações acima levam aos resultados

$$\text{Re}\Lambda(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^\sigma) = 0, \quad (3.21a)$$

$$\gamma_{\mathbf{k}}^\sigma = -\frac{\text{Im}\Lambda(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^\sigma)}{\frac{\partial}{\partial \omega_{\mathbf{k}}^\sigma} \text{Re}\Lambda(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^\sigma)}, \quad (3.21b)$$

sendo (3.21a) a equação de dispersão que determina o modo normal de propagação σ . Então, (3.21b) determina a taxa de absorção deste modo.

Obviamente, (3.21a) recai a (3.17) no limite de dissipação desprezível. Uma outra relação útil é [52, eq. 4.10]

$$i\text{Im}\Lambda(\mathbf{k}, \omega) = \Lambda_{ij}^a \lambda_{ij}^{h*}.$$

Vetores de polarização. A equação de dispersão (3.21a) é a condição para uma solução da equação da onda (3.16) existir. Para cada modo σ existe uma solução para o campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{\sigma})$. Contudo, a solução da equação da onda no limite de absorção desprezível mantém a amplitude e a fase arbitrárias. Somente é possível obter-se informações a respeito da direção de polarização do campo. Por isso, é conveniente escrever-se o campo elétrico do modo de propagação σ em termos de seu vetor de polarização $\hat{e}^{\sigma}(\mathbf{k})$, definido por

$$\hat{e}^{\sigma}(\mathbf{k}) \equiv \frac{\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{\sigma})}{|\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{\sigma})|}. \quad (3.22)$$

A partir de (3.16), observa-se que o vetor de polarização deve satisfazer a equação

$$\Lambda_{ij}^h(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{\sigma}) e_j^{\sigma}(\mathbf{k}) = 0. \quad (3.23)$$

Portanto, de acordo com a identidade (3.13), observa-se que este pode ser escrito como

$$e_i^{\sigma}(\mathbf{k}) = C \lambda_{ij}^{\sigma}(\mathbf{k}) a_j,$$

sendo $\lambda_{ij}^{\sigma}(\mathbf{k}) \equiv \lambda_{ij}(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{\sigma})$, \mathbf{a} um vetor em princípio arbitrário e C uma constante determinada pela condição de normalização

$$\hat{e}^{\sigma}(\mathbf{k}) \cdot \hat{e}^{\sigma*}(\mathbf{k}) = 1.$$

Então, dada a identidade (3.13c) no limite de absorção desprezível,⁵ onde $\Lambda(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{\sigma}) \approx 0$, esta se reduz a $\lambda_{ij}^{\sigma}(\mathbf{k}) \lambda_{k\ell}^{\sigma}(\mathbf{k}) = \lambda_{i\ell}^{\sigma}(\mathbf{k}) \lambda_{kj}^{\sigma}(\mathbf{k})$. No mesmo limite, pode-se desprezar a parte anti-hermiteana de λ_{ij} , isto é, pode-se escrever $\lambda_{ij} \approx \lambda_{ji}^*$, e a identidade em questão é escrita, de forma aproximada, como

$$\lambda_{ij}^{\sigma}(\mathbf{k}) \lambda_{\ell k}^{\sigma*}(\mathbf{k}) = \lambda_{i\ell}^{\sigma}(\mathbf{k}) \lambda_{kj}^{\sigma}(\mathbf{k}).$$

Multiplicando-se ambos os lados pelos componentes a_j e a_k^* do vetor \mathbf{a} e somando sobre os índices repetidos, resulta

$$\lambda_{i\ell}^{\sigma}(\mathbf{k}) = \frac{\lambda_{ij}^{\sigma}(\mathbf{k}) a_j \lambda_{\ell k}^{\sigma*}(\mathbf{k}) a_k^*}{\lambda_{kj}^{\sigma}(\mathbf{k}) a_j a_k^*}. \quad (3.24a)$$

Da mesma forma, multiplicando-se a mesma identidade pelos mesmos componentes de um outro vetor \mathbf{a}' , a seguinte relação resulta,

$$\frac{\lambda_{ij} a_j \lambda_{\ell k}^* a_k^*}{\lambda_{kj} a_j a_k^*} = \frac{\lambda_{ij} a'_j \lambda_{\ell k}^* a_k'^*}{\lambda_{kj} a'_j a_k'^*}. \quad (3.24b)$$

Portanto, a condição de normalização de $\hat{e}^{\sigma}(\mathbf{k})$ pode ser escrita como

$$|C|^2 \lambda_{ij}^{\sigma}(\mathbf{k}) a_j \lambda_{ik}^{\sigma*}(\mathbf{k}) a_k^* = 1 \implies |C|^2 = \frac{1}{\lambda_{ii}^{\sigma}(\mathbf{k}) \lambda_{kj}^{\sigma}(\mathbf{k}) a_j a_k^*},$$

sendo $\lambda_{ii}^{\sigma}(\mathbf{k})$ o traço da matriz $\lambda_{ij}^{\sigma}(\mathbf{k})$. Assim, a menos de um fator de fase constante, pode-se escrever $\hat{e}^{\sigma}(\mathbf{k})$ como

$$e_i^{\sigma}(\mathbf{k}) = \frac{\lambda_{ij}^{\sigma}(\mathbf{k}) a_j}{\left[\lambda_{ii}^{\sigma}(\mathbf{k}) \lambda_{kj}^{\sigma}(\mathbf{k}) a_k^* a_j \right]^{1/2}}. \quad (3.25)$$

As identidades (3.24a,b) mostram que diferentes definições do vetor \mathbf{a} levam ao mesmo vetor de polarização $\hat{e}^{\sigma}(\mathbf{k})$, exceto por um fator de fase constante. Portanto, pode-se aplicar uma rotação arbitrária a \mathbf{a} , o que resultará no mesmo $\hat{e}^{\sigma}(\mathbf{k})$, exceto por um fator de fase. Obviamente, a condição de normalização é invariante frente a qualquer transformação do vetor \mathbf{a} quando $\hat{e}^{\sigma}(\mathbf{k})$ é dado por (3.25).

Finalmente, a expressão recíproca de (3.25) também pode ser obtida. Comparando (3.23) com a primeira equação de (3.13a), levando-se em conta que $\Lambda(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{\sigma}) = 0$, observa-se que as linhas de λ_{ij}^{σ} devem ser proporcionais a e_j^{σ} . Por outro lado, aplicando a conjugação complexa sobre (3.16) e usando a hermiticidade de Λ_{ij}^h ,

$$\Lambda_{ij}^{h*}(\mathbf{k}, \omega) e_j^{\sigma*}(\mathbf{k}) = 0 \implies e_j^{\sigma*}(\mathbf{k}) \Lambda_{ji}^h(\mathbf{k}, \omega) = 0.$$

Comparando agora com a segunda equação de (3.13a), observa-se que as colunas de λ_{ij}^{σ} devem ser proporcionais a $e_j^{\sigma*}$. Empregando então a condição de normalização dos vetores de polarização, obtém-se

$$\lambda_{ij}^{\sigma}(\mathbf{k}) = \lambda_{ss}^{\sigma}(\mathbf{k}) e_i^{\sigma}(\mathbf{k}) e_j^{\sigma*}(\mathbf{k}). \quad (3.26)$$

⁵O qual Sitenko (1982) [52] denomina *plasma transparency domain*.

3.2.3 Conservação de energia em um plasma dispersivo.

As expressões que serão utilizadas no cálculo dos coeficientes de emissão espontânea e induzida, a ser realizado nas seções posteriores, baseiam-se nos diferentes termos da equação de conservação de energia em um plasma térmico, considerado como um meio espacial e temporalmente dispersivo.

Para se obter a referida equação de conservação, retorna-se às equações de Maxwell (3.2a-d) e obtém-se o Teorema de Poynting. A derivação usual deste teorema inicia a partir do cálculo da taxa de realização de trabalho dos campos sobre as partículas dentro de um volume V do plasma, delimitado pela superfície S . Este cálculo é realizado pela integral [32, seção 6.7]

$$\int d^3r \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t),$$

realizada em um volume qualquer V , contido dentro do plasma e delimitado pela superfície gaussiana S . Eliminando-se $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ com o uso da lei de Ampère (3.2b), resulta

$$\int d^3r \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{4\pi} \int d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{4\pi} \int d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(\mathbf{r}, t).$$

Usando a identidade

$$\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}),$$

em conjunto com a lei de Faraday (3.2a) e o teorema da divergência, resulta

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d^3r \left[\frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) \right] + \oint_S da \left[\frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} = - \int d^3r \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (3.27a)$$

sendo $\hat{\mathbf{n}}$ o vetor unitário perpendicular à superfície S em todos os seus pontos. As quantidades

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) \quad \text{e} \quad \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (3.27b)$$

são, respectivamente, a densidade de energia contida no campo eletromagnético e o vetor de Poynting, interpretado como o fluxo de energia, isto é, energia/ (tempo \times área), através da superfície S . Sem fazer uso do teorema da divergência, o mesmo resultado pode ser escrito na forma local como

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (3.27c)$$

O teorema (3.27a-c) mostra que a variação temporal da energia contida no campo no volume V , adicionada ao fluxo total de energia através da superfície S é igual a menos o trabalho realizado pelos campos sobre as partículas.

O teorema de Poynting na forma da equação (3.27a) ou (3.27c), embora geral, não mostra explicitamente o papel do plasma na troca de energia entre ondas e partículas. Em um plasma, a média de $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$, tomada sobre um certo número de períodos de oscilação e comprimentos de onda, difere da potência dissipada pela onda eletromagnética por unidade de volume por duas quantidades interpretadas como correções devidas ao movimento coerente das partículas do plasma sob a ação do campo. Este ponto é discutido, por exemplo, por Bernstein (1975) [7], McVey *et alli* (1985) [37], Vaclavik & Appert (1987) [57], Brambilla & Krücken (1988) [10] e Stix (1992) [54].

Em um tratamento baseado no formalismo WKB⁶, Bernstein (1975) [7] assume que o meio apresenta uma inhomogeneidade suave e que seja ligeiramente não estacionário, o que implica em uma variação tanto espacial quanto temporal nas relações constitutivas do plasma. Neste caso, ao invés da relação constitutiva (3.6), válida para um plasma homogêneo e estacionário, é suposto que

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \int d^3r' \int_{-\infty}^t dt' \overleftrightarrow{\sigma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'; \frac{1}{2}(\mathbf{r} + \mathbf{r}'), \frac{1}{2}(t + t')) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t'). \quad (3.28)$$

Como o plasma apresenta apenas uma suave variação dos parâmetros físicos, o tratamento usual consiste em escrever os campos na forma eikonal [7, 54],

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) e^{i\psi(\mathbf{r}, t)} + c.c. \quad (3.29a)$$

⁶Hierarquia Wentzel-Kramers-Brillouin

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}, t) e^{i\psi(\mathbf{r}, t)} + c.c., \quad (3.29b)$$

sendo que $\psi(\mathbf{r}, t)$ é a *função eikonal* e o símbolo *c.c.* denota o complexo conjugado da forma eikonal proposta para o campo em consideração. No formalismo WKB, é assumido que as funções \mathbf{E}_0 e \mathbf{B}_0 descrevem uma suave modulação espaço-temporal nas amplitudes dos campos, ao passo que $\psi(\mathbf{r}, t)$ descreve a parte ondulatória da perturbação. Em outras palavras, as primeiras funções estabelecem uma escala lenta de variação dos campos no espaço e no tempo, enquanto que a eikonal estabelece a escala rápida para os mesmos.

A partir da eikonal, definem-se as funções $\omega(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{k}(\mathbf{r}, t)$ por

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}, t) = \nabla\psi(\mathbf{r}, t) \quad \text{e} \quad \omega(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial\psi}{\partial t}(\mathbf{r}, t). \quad (3.30)$$

É introduzido agora o parâmetro de ordenamento δ , o qual mede o grau de não uniformidade do plasma, sempre medido frente às características da onda eletromagnética em consideração. Por exemplo, se o maior gradiente do meio estiver na densidade de partículas e se λ for o comprimento da onda em questão, então

$$\delta = \frac{\lambda}{L_n} \equiv \lambda |\nabla \ln n| \ll 1,$$

sendo L_n o comprimento típico de variação da densidade das partículas. Considera-se formalmente que, em termos de ordem de grandeza, $|\psi| = \mathcal{O}(\delta^{-1})$, ao passo que $|\mathbf{E}_0| \sim |\mathbf{B}_0| = \mathcal{O}(\delta^0)$. Da mesma forma, cada operador derivada é formalmente considerado $\partial/\partial x_i \sim \partial/\partial t = \mathcal{O}(\delta)$; assim, $|\mathbf{k}| \sim |\omega| = \mathcal{O}(\delta^0)$. Finalmente, define-se a função

$$\overset{\leftrightarrow}{\sigma}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{r}, t) = \int d^3r' \int_0^\infty dt' \overset{\leftrightarrow}{\sigma}(\mathbf{r}', t'; \mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}' - \omega t')}, \quad (3.31)$$

o qual se reduz à transformada de Fourier do tensor de condutividade no limite de plasma homogêneo. No limite de fraca absorção, $|\overset{\leftrightarrow}{\sigma}^h| / |\overset{\leftrightarrow}{\sigma}^a| = \mathcal{O}(\delta)$.

Com base neste ordenamento, é realizado um desenvolvimento da equação da onda em termos das potências de δ . Em ordem zero, obtém-se novamente a equação (3.16), a qual resulta na equação de dispersão (3.17), porém agora em termos das funções $\mathbf{k}(\mathbf{r}, t)$ e $\omega(\mathbf{r}, t)$. Em ordem um, obtém-se novamente a equação de conservação de energia, porém agora escrita de tal forma que a contribuição do plasma para os diversos termos aparece explicitamente.

Do ponto de vista de uma escala macroscópica, a variação que ocorre na escala lenta é a mais relevante, pois a escala rápida tende a possuir um valor médio desprezível frente a primeira para qualquer intervalo de alguns períodos e alguns comprimentos de onda. De qualquer forma, como as perturbações que se propagam pelo plasma sempre possuem um espectro de largura finito, não faz sentido considerar-se a variação na energia que ocorre para valores individuais de frequência e comprimento de onda. Portanto, realiza-se um processo de média sobre as expressões acima ao longo de um intervalo de tempo igual a alguns períodos característicos do plasma e ao longo de uma distância igual a alguns comprimentos característicos. O cálculo dos valores médios, representados por $\langle \dots \rangle$, fornece, no lugar de (3.27c), a equação

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle W_{tot} \rangle + \nabla \cdot \langle \mathbf{S}_{tot} \rangle = -P_{abs}, \quad (3.32a)$$

onde

$$P_{abs} = \frac{\omega}{8\pi} E_{0i}^* \varepsilon_{ij}^a E_{0j} \quad (3.32b)$$

é a potência dissipada por unidade de volume pela onda eletromagnética devido às interações onda-partícula,

$$\langle W_{tot} \rangle = \frac{1}{16\pi} (E_{0i}^* E_{0i} + B_{0i}^* B_{0i}) + W_{cin},$$

sendo

$$W_{cin} = \frac{\omega}{16\pi} E_{0i}^* \frac{\partial \varepsilon_{ij}^h}{\partial \omega} E_{0j} \quad (3.32c)$$

a contribuição à densidade total de energia oriunda do movimento coerente das partículas do plasma sob a ação dos campos, sendo ε^h a parte hermiteana do tensor dielétrico (3.8) e

$$\langle \mathbf{S}_{tot} \rangle = \frac{c}{16\pi} (\mathbf{E}_0^* \times \mathbf{B}_0 + \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0^*) + \mathbf{S}_{cin},$$

sendo

$$S_{cin} = \frac{\omega}{16\pi} E_{0i}^* \frac{\partial \epsilon_{ij}^h}{\partial \mathbf{k}} E_{0j} \quad (3.32d)$$

a contribuição ao fluxo de radiação oriunda, também, do movimento coerente das partículas do plasma sob a ação dos campos.

De particular importância é a expressão para P_{abs} , dada por (3.32b). Brambilla & Krücken (1988) [10] mostraram que para um plasma maxwelliano, $P_{abs} > 0$ sempre; isto é, se as partículas estão em um equilíbrio termodinâmico local, então energia somente flui das ondas para as partículas. Isto significa que somente é possível ocorrer instabilidades na presença de fontes de energia livre no plasma, tais como derivas, inversões de população ou outras contribuições não térmicas na função de distribuição. Os mesmos autores também mostraram que, embora a média de $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ contenha as contribuições do movimento coerente das partículas,

$$\langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \rangle = P_{abs} + \nabla \cdot \mathbf{S}_{cin},$$

este último termo consiste em uma contribuição reversível, a qual desaparece quando a equação acima é integrada sobre todo o plasma,

$$\int d^3r \langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \rangle = \int d^3r P_{abs}. \quad (3.33)$$

3.2.4 A potência e a energia irradiadas no plasma

O resultado (3.33) mostra a validade do tratamento empregado por Melrose (1980) [38] para o cálculo da emissividade espontânea e do coeficiente de absorção/emissão do plasma. Este cálculo é realizado considerando-se inicialmente a taxa de realização de trabalho pela corrente extrânea, associada com a parte anti-hermiteana do tensor dielétrico, sobre os campos. Esta taxa descreve a potência instantânea gerada na forma de ondas no plasma pelos termos dissipativos da interação onda-partícula. Contudo, enfatiza-se novamente aqui que a taxa instantânea não é relevante do ponto de vista macroscópico; a quantidade relevante é a média sobre um intervalo de tempo arbitrariamente grande para envolver diversos períodos de oscilação. Sendo assim, a potência média gerada pela corrente extrânea é calculada por

$$P = - \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt \int d^3r \mathbf{J}^{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t),$$

onde $\mathbf{J}^{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$ é a corrente extrânea. Empregando o teorema da potência (A.7), resulta

$$P = - \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathbf{J}^{\text{ext}}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{k}, \omega),$$

onde deve ser ressaltado que o resultado continua sendo puramente real, de acordo com o teorema da potência. O campo elétrico na expressão acima é identificado com aquele gerado pela própria corrente extrânea do plasma, isto é, consiste na solução da equação da onda apresentada na equação (3.14). Então,

$$P = 4\pi i \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} J_i^{\text{ext}*}(\mathbf{k}, \omega) \frac{\lambda_{ij}(\mathbf{k}, \omega)}{\omega \Lambda(\mathbf{k}, \omega)} J_j^{\text{ext}}(\mathbf{k}, \omega).$$

A principal contribuição para o integrando na expressão acima vem das regiões no espaço de Fourier que estão nas vizinhanças das relações de dispersão $\omega = \omega_{\mathbf{k}}^{\sigma}$. Sobre estas superfícies, o denominador do integrando se anula, mas a singularidade é evitada ao se analisar o comportamento de $\Lambda(\mathbf{k}, \omega)$ nas suas vizinhanças. Isto é realizado desenvolvendo-se $\Lambda(\mathbf{k}, \omega)$ em uma série de potências de ω em torno do modo normal. Neste momento, aplica-se também a prescrição de Landau a respeito da integração nas integrais de velocidade da função de distribuição, o que implica na atribuição de uma parte imaginária positiva, arbitrariamente pequena, para a frequência das oscilações. Assim, nas vizinhanças do modo σ pode-se escrever

$$\Lambda(\mathbf{k}, \omega) \approx \left. \frac{\partial}{\partial \omega} \Lambda(\mathbf{k}, \omega) \right|_{\omega_{\mathbf{k}}^{\sigma}} (\omega - \omega_{\mathbf{k}}^{\sigma} + i0^+),$$

onde foi considerada a contribuição de um modo normal em particular. Utilizando esta expressão, calcula-se neste momento a potência média emitida no modo de propagação σ ,

$$P^\sigma = 4\pi i \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{J_i^{\text{ext}*}(\mathbf{k}, \omega) \lambda_{ij}(\mathbf{k}, \omega) J_j^{\text{ext}}(\mathbf{k}, \omega)}{\omega \left[\frac{\partial}{\partial \omega} \Lambda(\mathbf{k}, \omega) \right]_{\omega_{\mathbf{k}}^\sigma} (\omega - \omega_{\mathbf{k}}^\sigma + i0^+)}.$$

Empregando agora a fórmula de Plemelj,

$$\frac{1}{\omega - \omega_0 + i0^+} = \mathcal{P} \frac{1}{\omega - \omega_0} - i\pi \delta(\omega - \omega_0),$$

onde o símbolo \mathcal{P} denota a parte principal de Cauchy, a integração em ω pode ser realizada. Antes, porém, deve-se levar em conta o fato de que para um dado modo σ há dois sentidos de propagação possíveis. Assim, ambos os sentidos serão levados em conta reescrevendo-se a integral em ω da maneira como aparece na expressão abaixo,

$$P^\sigma = 4i \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d\omega \frac{J_i^{\text{ext}*}(\mathbf{k}, \omega) \lambda_{ij}(\mathbf{k}, \omega) J_j^{\text{ext}}(\mathbf{k}, \omega)}{\omega \left[\frac{\partial}{\partial \omega} \Lambda(\mathbf{k}, \omega) \right]_{\omega_{\mathbf{k}}^\sigma}} \left[\mathcal{P} \frac{1}{\omega - \omega_{\mathbf{k}}^\sigma} - i\pi \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}^\sigma) \right].$$

Lembrando agora que o resultado é puramente real, a contribuição do primeiro termo deve ser nula, uma vez que sua principal contribuição é puramente imaginária. Assim, a integração em ω pode ser realizada, resultando

$$P^\sigma = 4\pi \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{J_i^{\text{ext}*}(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^\sigma) \lambda_{ij}^\sigma(\mathbf{k}) J_j^{\text{ext}}(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^\sigma)}{\left[\omega \frac{\partial}{\partial \omega} \Lambda(\mathbf{k}, \omega) \right]_{\omega_{\mathbf{k}}^\sigma}}.$$

Pode-se usar agora a expressão (3.26) para $\lambda_{ij}^\sigma(\mathbf{k})$, resultando em uma expressão que é obviamente real,

$$P^\sigma = 4\pi \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} R_E^\sigma(\mathbf{k}) \left| \hat{e}^{\sigma*}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{J}^{\text{ext}}(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^\sigma) \right|^2,$$

sendo

$$R_E^\sigma(\mathbf{k}) \equiv \frac{\lambda_{ss}^\sigma(\mathbf{k})}{\left[\omega \frac{\partial}{\partial \omega} \Lambda(\mathbf{k}, \omega) \right]_{\omega_{\mathbf{k}}^\sigma}} \quad (3.34)$$

interpretado como a fração da energia total do sistema ondas + partículas que está contida no campo elétrico do modo σ [38, seção 2.3].

A partir deste ponto, as quantidades consideradas relevantes são a potência e a energia espectrais irradiadas no modo de propagação σ no intervalo infinitesimal $d^3 k / (2\pi)^3$. Estas quantidades são identificadas respectivamente por $P^\sigma(\mathbf{k})$ e $U^\sigma(\mathbf{k})$, estando relacionadas por

$$P^\sigma = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} P^\sigma(\mathbf{k}) \quad \text{e} \quad P^\sigma(\mathbf{k}) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} U^\sigma(\mathbf{k}). \quad (3.35)$$

Ou seja,

$$U^\sigma(\mathbf{k}) = 4\pi R_E^\sigma(\mathbf{k}) \left| \hat{e}^{\sigma*}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{J}^{\text{ext}}(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^\sigma) \right|^2. \quad (3.36)$$

A expressão (3.36) fornece a energia irradiada no modo de propagação σ por uma fonte arbitrária descrita pela transformada de Fourier da corrente extrânea associada. Na próxima seção, esta corrente estará associada ao movimento não perturbado das partículas do plasma em torno das linhas de campo magnético. Ao se realizar esta associação, será mostrado que \mathbf{J}^{ext} pode escrito em termos de uma distribuição delta de Dirac, a qual aparecerá ao quadrado em (3.36). Ao se empregar então uma representação adequada para a delta de Dirac, pode-se retornar à potência espectral $P^\sigma(\mathbf{k})$, a partir da qual a emissividade espontânea do plasma será calculada.

3.2.5 Movimento de cíclotron de uma partícula carregada

O problema da emissão espontânea do plasma, descrita por (3.36), pode ser tratado, em primeira aproximação, calculando-se a corrente associada ao movimento de uma partícula carregada em torno de uma linha de campo magnético, interpretando-se esta como a corrente extrânea que aparece na expressão para $U^\sigma(\mathbf{k})$.

3.2.5.1 Equações de movimento

A equação de movimento de uma partícula carregada em torno das linhas de indução magnética B_0 é

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{q_\alpha}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0), \quad (3.37)$$

sendo $\mathbf{p} = \gamma m_\alpha \mathbf{v}$ o momentum linear da partícula da espécie α . As constantes de movimento são a energia total da partícula ϵ e a componente do momentum linear p_{\parallel} na direção de B_0 ,

$$\begin{aligned} \frac{d\epsilon}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[\sqrt{p^2 c^2 + m_\alpha^2 c^4} - m_\alpha c^2 \right] = \frac{c}{\sqrt{p^2 + m_\alpha^2 c^2}} \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0, \\ \frac{dp_{\parallel}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{B}_0}{B_0} \right) = \frac{B_0}{B_0} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0. \end{aligned}$$

Da mesma forma, as seguintes quantidades também são constantes de movimento:

$$p_{\perp} = \sqrt{p^2 - p_{\parallel}^2}, \quad \gamma = \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_\alpha^2 c^2}}, \quad v_{\perp} = \frac{p_{\perp}}{\gamma m_\alpha}, \quad v_{\parallel} = \frac{p_{\parallel}}{\gamma m_\alpha}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Sendo B_0 orientado ao longo do eixo z (ou eixo x_3), escreve-se \mathbf{p} em coordenadas cilíndricas:

$$\mathbf{p} = p_{\perp} \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_1 + p_{\perp} \sin \phi \hat{\mathbf{e}}_2 + p_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_3,$$

de onde a equação de movimento (3.37) se reduz a

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= p_{\perp} \frac{d}{dt} \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_1 + p_{\perp} \frac{d}{dt} \sin \phi \hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{q_\alpha B_0}{c} \epsilon_{ij3} \hat{\mathbf{e}}_i v_j = \frac{q_\alpha B_0}{c} (v_2 \hat{\mathbf{e}}_1 - v_1 \hat{\mathbf{e}}_2), \\ \sin \phi p_{\perp} \frac{d\phi}{dt} &= -\frac{q_\alpha B_0}{c} v_2 = -\frac{q_\alpha B_0}{c} \frac{p_{\perp} \sin \phi}{\gamma m_\alpha}, \\ \cos \phi p_{\perp} \frac{d\phi}{dt} &= -\frac{q_\alpha B_0}{c} v_1 = -\frac{q_\alpha B_0}{c} \frac{p_{\perp} \cos \phi}{\gamma m_\alpha}, \end{aligned}$$

e ambas as equações se reduzem a

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{q_\alpha B_0}{\gamma m_\alpha c} = -\epsilon_\alpha \frac{\Omega_\alpha}{\gamma} \implies \phi(t) = \phi_0 - \epsilon_\alpha \omega_\alpha t,$$

sendo $\epsilon_\alpha = q_\alpha/|q_\alpha|$ o sinal da carga da espécie α , $\Omega_\alpha = |q_\alpha| B_0/m_\alpha c$ a frequência angular de cíclotron, $\omega_\alpha = \Omega_\alpha/\gamma$ e ϕ_0 o valor inicial do ângulo azimutal do vetor momentum. Elétrons orbitam no sentido anti-horário (RH) e prótons no sentido horário (LH).

Assim, a velocidade e a posição variam, em função do tempo, como

$$v_1(t) = v_{\perp} \cos(\phi_0 - \epsilon_\alpha \omega_\alpha t) \quad (3.38a)$$

$$v_2(t) = v_{\perp} \sin(\phi_0 - \epsilon_\alpha \omega_\alpha t) \quad (3.38b)$$

$$v_3(t) = v_{\parallel} \quad (3.38c)$$

$$x_1(t) = x_{10} + \epsilon_\alpha \rho_\alpha [\sin \phi_0 - \sin(\phi_0 - \epsilon_\alpha \omega_\alpha t)] \quad (3.38d)$$

$$x_2(t) = x_{20} + \epsilon_\alpha \rho_\alpha [\cos(\phi_0 - \epsilon_\alpha \omega_\alpha t) - \cos \phi_0] \quad (3.38e)$$

$$x_3(t) = x_{30} + v_{\parallel} t, \quad (3.38f)$$

sendo $\rho_\alpha = v_{\perp}/\omega_\alpha = \gamma v_{\perp}/\Omega_\alpha$ o raio de Larmor da partícula α . Os valores do vetor posição independentes do tempo, $\mathbf{r}_g = \mathbf{r}_0 + \epsilon_\alpha \rho_\alpha \sin \phi_0 \hat{\mathbf{e}}_1 - \epsilon_\alpha \rho_\alpha \cos \phi_0 \hat{\mathbf{e}}_2$ indicam a posição inicial do centro-guia da órbita circular da partícula, o qual somente se desloca ao longo do eixo z . Isto pode ser visualizado facilmente na seguinte equação de circunferência,

$$[x_1(t) - x_{10} - \epsilon_\alpha \rho_\alpha \sin \phi_0]^2 + [x_2(t) - x_{20} + \epsilon_\alpha \rho_\alpha \cos \phi_0]^2 = \rho_\alpha^2,$$

a qual mostra que a trajetória da partícula, projetada sobre o plano $x - y$, é uma circunferência de raio ρ_α centrada no ponto \mathbf{r}_g .

3.2.5.2 A densidade de corrente associada a uma carga em movimento em torno do campo magnético

Considera-se agora o problema da densidade de corrente associada a uma partícula de massa m , carregada com carga q , em movimento arbitrário. Supõe-se que sua órbita possa ser descrita por um conjunto de equações para $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$. Então, a densidade de corrente associada a esta partícula é

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = q\mathbf{v}(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)).$$

A transformada de Fourier desta expressão fica

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega) &= q \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3r e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \mathbf{v}(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) \\ &= q \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t)-\omega t)} \mathbf{v}(t). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Calcula-se agora a densidade de corrente associada a uma partícula da espécie α espiralando em torno de uma linha de campo magnético. Inicialmente, escreve-se \mathbf{k} em coordenadas cilíndricas,

$$\mathbf{k} = k_{\perp} \cos \psi \hat{\mathbf{e}}_1 + k_{\perp} \sin \psi \hat{\mathbf{e}}_2 + k_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_3.$$

Neste caso, usando as equações de movimento (3.38d-f), o argumento da função exponencial em (3.39) pode ser escrito,

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t) - \omega t = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0 + \epsilon_{\alpha} k_{\perp} \rho_{\alpha} \sin(\phi_0 - \psi) - \epsilon_{\alpha} k_{\perp} \rho_{\alpha} \sin(\phi_0 - \psi - \epsilon_{\alpha} \omega_{\alpha} t) - (\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}) t.$$

Os dois primeiros termos na expressão acima estão relacionados com a posição inicial da partícula, a posição de seu centro-guia e o ângulo que o mesmo faz com a projeção do vetor \mathbf{k} sobre o plano $x-y$. Como a trajetória da partícula será seguida desde $t \rightarrow -\infty$, a sua posição inicial não é importante. Além disso, como o sistema físico apresenta simetria azimutal, o valor do ângulo ψ também não é relevante. Por isso, é possível escolher-se $\mathbf{r}_0 = 0$ e $\phi_0 = \psi = 0$. Assim, a densidade de corrente (3.39) resulta escrita

$$\mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega) = q_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-ik_{\perp} \rho_{\alpha} \sin(\omega_{\alpha} t)} e^{i(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}) t} \mathbf{v}(t).$$

Utilizando agora as equações (3.38a-c) para o vetor $\mathbf{v}(t)$ e empregando as seguintes identidades [2, capítulo 9]

$$\begin{aligned} e^{\pm iz \sin \theta} &= \sum_{s \rightarrow -\infty}^{\infty} J_s(z) e^{\pm is\theta} \\ \sin \theta e^{\pm iz \sin \theta} &= \mp i \sum_{s \rightarrow -\infty}^{\infty} J'_s(z) e^{\pm is\theta} \\ \cos \theta e^{\pm iz \sin \theta} &= \sum_{s \rightarrow -\infty}^{\infty} \frac{s}{z} J_s(z) e^{\pm is\theta}, \end{aligned}$$

sendo $J_s(z)$ a função de Bessel do primeiro tipo, resulta para $\mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega)$

$$\mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega) = q_{\alpha} \sum_{s \rightarrow -\infty}^{\infty} \mathbf{V}(\mathbf{k}, \mathbf{p}; s) \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - s\omega_{\alpha}) t},$$

sendo

$$\mathbf{V}(\mathbf{k}, \mathbf{p}; s) = \frac{sv_{\perp}}{k_{\perp} \rho_{\alpha}} J_s(k_{\perp} \rho_{\alpha}) \hat{\mathbf{e}}_1 - i\epsilon_{\alpha} v_{\perp} J'_s(k_{\perp} \rho_{\alpha}) \hat{\mathbf{e}}_2 + v_{\parallel} J_s(k_{\perp} \rho_{\alpha}) \hat{\mathbf{e}}_3.$$

Empregando novamente a representação (A.3b), resulta

$$\mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega) = 2\pi q_{\alpha} \sum_{s \rightarrow -\infty}^{\infty} \mathbf{V}(\mathbf{k}, \mathbf{p}; s) \delta(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - s\omega_{\alpha}), \quad (3.40)$$

onde se percebe claramente que a densidade de corrente está diretamente vinculada à condição de ressonância (3.1).

Ao se identificar a corrente extrânea em (3.36) com (3.40), obtém-se uma expressão geral para a energia irradiada em um dado modo de propagação devido ao movimento de cíclotron da partícula da espécie α no plasma. Desta forma, será possível realizar a derivação da emissividade do plasma.

3.2.6 Emissividade da partícula no modo σ

Inserindo (3.40) em (3.36) no lugar de J^{ext} , obtém-se

$$U_{\alpha}^{\sigma}(\mathbf{k}) = 16\pi^3 q_{\alpha}^2 R_E^{\sigma}(\mathbf{k}) \sum_{s \rightarrow -\infty}^{\infty} \sum_{s' \rightarrow -\infty}^{\infty} [\hat{\mathbf{e}}^{\sigma*}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{k}, \mathbf{p}; s)] [\hat{\mathbf{e}}^{\sigma}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{V}^*(\mathbf{k}, \mathbf{p}; s')] \\ \times \delta(\omega_{\mathbf{k}}^{\sigma} - k_{\parallel} v_{\parallel} - s\omega_{\alpha}) \delta(\omega_{\mathbf{k}}^{\sigma} - k_{\parallel} v_{\parallel} - s'\omega_{\alpha}),$$

sendo $U_{\alpha}^{\sigma}(\mathbf{k})$ a energia espectral irradiada pela partícula da espécie α no modo de propagação σ . As deltas de Dirac anularão o resultado, exceto quando $s' = s$, em cuja situação obtém-se

$$U_{\alpha}^{\sigma}(\mathbf{k}) = 16\pi^3 q_{\alpha}^2 R_E^{\sigma}(\mathbf{k}) \sum_{s \rightarrow -\infty}^{\infty} |\hat{\mathbf{e}}^{\sigma*}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{k}, \mathbf{p}; s)|^2 [\delta(\omega_{\mathbf{k}}^{\sigma} - k_{\parallel} v_{\parallel} - s\omega_{\alpha})]^2.$$

Finalmente, usando a representação (A.4),

$$U_{\alpha}^{\sigma}(\mathbf{k}) = 8\pi^2 q_{\alpha}^2 R_E^{\sigma}(\mathbf{k}) \sum_{s \rightarrow -\infty}^{\infty} |\hat{\mathbf{e}}^{\sigma*}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{k}, \mathbf{p}; s)|^2 \lim_{\tau \rightarrow \infty} [\tau \delta(\omega_{\mathbf{k}}^{\sigma} - k_{\parallel} v_{\parallel} - s\omega_{\alpha})]$$

e retornando a (3.35) obtém-se a expressão para a potência espectral emitida no modo σ por uma partícula da espécie α :

$$P_{\alpha}^{\sigma}(\mathbf{k}) = 8\pi^2 q_{\alpha}^2 R_E^{\sigma}(\mathbf{k}) \sum_{s \rightarrow -\infty}^{\infty} |\hat{\mathbf{e}}^{\sigma*}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{k}, \mathbf{p}; s)|^2 \delta(\omega_{\mathbf{k}}^{\sigma} - k_{\parallel} v_{\parallel} - s\omega_{\alpha}). \quad (3.41)$$

Ou seja, a partícula emite radiação somente naqueles valores de ω e \mathbf{k} que satisfazem a condição de ressonância (3.1). O mesmo vínculo ocorrerá com a emissividade, como será visto abaixo.

A expressão (3.41) será utilizada para a obtenção da *emissividade* do plasma. A emissividade é definida como a potência irradiada por unidade de intervalo de frequência e por unidade de ângulo sólido. Contudo, para realizar-se a correta identificação da potência espectral $P^{\sigma}(\mathbf{k})$ com a emissividade, é necessário realizar uma mudança de variável. A fórmula (3.41) expressa a potência irradiada por unidade de intervalo de vetor de onda $d^3k / (2\pi)^3$, sendo que a frequência da onda irradiada é determinada pela relação de dispersão do modo σ . Agora, uma vez que a emissão possui simetria azimutal por hipótese, pode-se assumir inicialmente que o vetor de onda se encontra totalmente no plano $x - z$, $\mathbf{k} = k_{\perp} \hat{\mathbf{e}}_1 + k_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_3$. Em seguida, escrevem-se os componentes de \mathbf{k} e \mathbf{v} em coordenadas esféricas, resultando, desta forma, $d^3k = 2\pi k^2 \sin \theta dk d\theta$, $\boldsymbol{\kappa} \equiv \mathbf{k}/k = \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_1 + \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_3$ e $v_{\parallel} = v \cos \alpha$, sendo θ e α os ângulos polares dos vetores \mathbf{k} e \mathbf{v} , respectivamente, com o eixo 3. Realiza-se em seguida a troca de variável independente $k \rightarrow \omega$, sendo que a relação de dispersão também é reescrita como

$$\omega = \omega_{\mathbf{k}}^{\sigma} \implies k = k_{\sigma}(\omega, \theta). \quad (3.42)$$

Finalmente, no lugar de k_{σ} usa-se o índice de refração do modo σ , $n_{\sigma} = n_{\sigma}(\omega, \theta) = k_{\sigma} c / \omega$. Portanto, chamando $\eta_{\alpha}^{\sigma}(\omega, \theta; s)$ a emissividade de uma partícula da espécie α no s -ésimo harmônico da onda que se propaga no modo σ , identifica-se a mesma a partir de (3.41) através da relação

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} P_{\alpha}^{\sigma}(\mathbf{k}) = 2\pi \sum_{s \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \int_0^{\infty} d\omega \eta_{\alpha}^{\sigma}(\omega, \theta; s),$$

resultando em

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} P_{\alpha}^{\sigma}(\mathbf{k}) \\ = \frac{2\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \int_0^{\infty} d\omega k^2 8\pi^2 q_{\alpha}^2 R_E^{\sigma}(\mathbf{k}) \sum_{s \rightarrow -\infty}^{\infty} |\hat{\mathbf{e}}^{\sigma*}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{k}, \mathbf{p}; s)|^2 \delta(\omega_{\mathbf{k}}^{\sigma} - k_{\parallel} v_{\parallel} - s\omega_{\alpha}) \\ = 2\pi \sum_{s \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \int_0^{\infty} d\omega \frac{q_{\alpha}^2 n_{\sigma}^2 \omega^2}{\pi c^3} \frac{\partial(\omega n_{\sigma})}{\partial \omega} R_E^{\sigma}(\mathbf{k}) |\hat{\mathbf{e}}^{\sigma*}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{k}, \mathbf{p}; s)|^2 \\ \times \delta[\omega(1 - n_{\sigma} \beta \cos \alpha \cos \theta) - s\omega_{\alpha}],$$

sendo $\beta = v/c$. Ou seja,

$$\eta_\alpha^\sigma(\omega, \theta; s) \equiv \frac{q_\alpha^2 n_\sigma^2 \omega^2}{\pi c^3} \frac{\partial(\omega n_\sigma)}{\partial \omega} R_E^\sigma(\mathbf{k}) |\hat{\mathbf{e}}^{\sigma*}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{k}, \mathbf{p}; s)|^2 \delta[\omega(1 - n_\sigma \beta \cos \alpha \cos \theta) - s\omega_\alpha], \quad (3.43a)$$

onde a dependência em \mathbf{k} deve ser substituída pela relação de dispersão (3.42).

Escrevendo agora as quantidades R_E e $\hat{\mathbf{e}}^\sigma$ nas formas dadas por (B.1) e (B.2), respectivamente, observa-se que

$$\hat{\mathbf{e}}^{\sigma*}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{k}, \mathbf{p}; s) = \frac{v \sin \alpha}{[K_\sigma^2(\mathbf{k}) + T_\sigma^2(\mathbf{k}) + 1]^{1/2}} \times \left[\frac{K_\sigma(\mathbf{k}) \sin \theta + T_\sigma(\mathbf{k}) (\cos \theta - n_\sigma \beta \cos \alpha)}{n_\sigma \beta \sin \alpha \sin \theta} J_s(k_\perp \rho_\alpha) - \epsilon_\alpha J'_s(k_\perp \rho_\alpha) \right], \quad (3.43b)$$

$$1 - |\boldsymbol{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{e}}^\sigma|^2 = \frac{1 + T_\sigma^2(\mathbf{k})}{K_\sigma^2(\mathbf{k}) + T_\sigma^2(\mathbf{k}) + 1}, \quad (3.43c)$$

$$\frac{\partial(\omega n_\sigma)}{\partial \omega} R_E^\sigma(\mathbf{k}) = \frac{1}{2n_\sigma} \frac{K_\sigma^2(\mathbf{k}) + T_\sigma^2(\mathbf{k}) + 1}{1 + T_\sigma^2(\mathbf{k})}. \quad (3.43d)$$

Portanto, a emissividade pode ser escrita como

$$\eta_\alpha^\sigma(\omega, \theta; s) \equiv \frac{q_\alpha^2}{2\pi c} \frac{\omega^2 \beta^2 n_\sigma \sin^2 \alpha}{1 + T_\sigma^2} \left[\frac{K_\sigma \sin \theta + T_\sigma (\cos \theta - n_\sigma \beta \cos \alpha)}{n_\sigma \beta \sin \alpha \sin \theta} J_s - \epsilon_\alpha J'_s \right]^2 \times \delta[\omega(1 - n_\sigma \beta \cos \alpha \cos \theta) - s\omega_\alpha], \quad (3.43e)$$

sendo que o argumento das funções de Bessel é

$$k_\perp \rho_\alpha = \frac{\omega}{\omega_\alpha} n_\sigma \beta \sin \alpha \sin \theta = \begin{cases} \frac{s n_\sigma \beta \sin \alpha \sin \theta}{1 - n_\sigma \beta \cos \alpha \cos \theta}, & s \neq 0 \\ \frac{s}{\omega_\alpha} \tan \alpha \tan \theta, & s = 0. \end{cases}$$

3.3 Emissão induzida de radiação por partículas em um plasma

Nesta seção será abordada uma teoria semi-clássica destinada a estabelecer uma relação entre processos espontâneos e induzidos de emissão de radiação por partículas em um plasma e para o cálculo do coeficiente de emissão.

3.3.1 O formalismo semi-clássico

Por razões práticas, é conveniente introduzir-se nesta seção um formalismo quantum-mecânico para o tratamento da emissão induzida de radiação. Existem duas vantagens principais decorrentes do emprego de conceitos quantum-mecânicos, ambas relacionadas ao tratamento da emissão (ou absorção) de radiação por partículas individuais:

1. Usando um formalismo clássico, é relativamente fácil tratar-se a emissão de uma única partícula. Contudo, um problema bem mais complicado é o de tratar o efeito desta emissão sobre a dinâmica da partícula, o que é denominado de *reação de radiação* nos textos de teoria eletromagnética. O tratamento quântico assegura que tanto a energia quanto o momentum total do sistema partícula + onda são conservados a nível microscópico. Neste caso, diz-se que a partícula emite um fóton e que este carrega consigo valores conhecidos de energia e momentum.
2. O formalismo quantum-mecânico também permite deduzir a relação entre absorção e emissão a nível microscópico. Isto é realizado a partir do *princípio do balanço detalhado*, o qual pode ser expresso em termos dos coeficientes de Einstein.

Uma teoria que trata as partículas usando o formalismo da mecânica quântica, mas que trata o campo de radiação classicamente é denominada *semi-clássica*. Em física dos plasmas, este termo pode ser empregado de uma maneira ainda mais restrita: tanto a partícula quanto o campo são tratados classicamente e somente a notação é quantum-mecânica. Este é o enfoque empregado nesta seção.

O uso do formalismo semi-clássico para descrever os processos de emissão induzida de radiação no plasma, em contraste com um tratamento puramente clássico utilizando a teoria cinética dos plasmas, foi objeto de discussão na literatura há cerca de 40 anos atrás. Para uma breve descrição dos argumentos utilizados e para a bibliografia correspondente, o leitor é remetido a Melrose (1980) [38, seção 5.1]. Brevemente, a conclusão da discussão realizada foi que para processos de emissão decorrentes de instabilidades cinéticas, para as quais pode-se deduzir uma equação quase-linear que descreve a evolução da função de distribuição do plasma, ambos os formalismos produzem resultados equivalentes. Por outro lado, para processos de emissão oriundos de instabilidades reativas, o formalismo puramente clássico deve ser o considerado correto. Nesta seção, os processos de emissão considerados são puramente cinéticos e, portanto, o formalismo semi-clássico é justificado.

Os parâmetros físicos empregados no formalismo semi-clássico são descritos a seguir. Para uma introdução formal aos conceitos básicos do formalismo quantum-mecânico, o leitor é remetido a Messiah (1999) [41].

Emissão de fótons.

Quando uma partícula está em um estado inicial com energia E e realiza uma transição para um estado final de energia E' ($E' < E$) devido à emissão de um quantum de radiação (*fóton*), a frequência angular do fóton emitido é determinada por

$$\omega = \frac{E - E'}{\hbar},$$

onde $\hbar = h/2\pi$, sendo h a constante de Planck. Da mesma forma, para partículas livres, se o momentum inicial da partícula é \mathbf{p} e o momentum final é \mathbf{p}' , então o vetor de onda da radiação emitida é determinado por

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}'}{\hbar}.$$

Diz-se então que um fóton com energia $\hbar\omega$ e momentum $\hbar\mathbf{k}$ é emitido pela partícula. Quando há uma força externa atuando sobre a partícula, o momentum total do sistema partícula + fóton não é mais necessariamente conservado. Em um plasma, um fóton associado a uma onda de Langmuir é às vezes denominado *plasmon*.

Número de ocupação de fótons.

Seja agora $W^\sigma(\mathbf{k})$ a energia espectral transportada por uma onda propagando-se no modo σ , com vetor de onda \mathbf{k} no intervalo $d^3k/(2\pi)^3$. Uma vez que cada fóton deste modo normal possui um energia $\hbar\omega_{\mathbf{k}}^\sigma$, a quantidade

$$N^\sigma(\mathbf{k}) \equiv \frac{W^\sigma(\mathbf{k})}{\hbar\omega_{\mathbf{k}}^\sigma}$$

é denominada o *número de ocupação* do modo σ no estado \mathbf{k} , ou seja, indica o número total de fótons no estado especificado.

O limite clássico que é o interesse desta seção é válido quando $N^\sigma(\mathbf{k}) \gg 1$. Uma restrição importante na validade da teoria semi-clássica surge neste ponto. A suposição de que o número de ocupação é uma quantidade bem definida não é coerente com a mecânica quântica. Existe uma relação de incerteza entre $N^\sigma(\mathbf{k})$ e a fase das oscilações, representada por $\varphi^\sigma(\mathbf{k})$. Esta relação é

$$\Delta N^\sigma(\mathbf{k}) \Delta \varphi^\sigma(\mathbf{k}) \geq \hbar.$$

Portanto, a suposição de que o número de ocupação é uma quantidade bem definida implica que a fase das oscilações é totalmente indefinida. A teoria semi-clássica, conforme aplicada nesta seção, é válida quando é realizada uma aproximação de *fases aleatórias* ou, de forma equivalente, quando a fase das oscilações não é relevante para os processos de emissão/absorção de ondas. Em geral, esta suposição é válida para instabilidades cinéticas. Por outro lado, a teoria não

pode ser utilizada para descrever processos coerentes, tais como surgem quando se considera instabilidades reativas.

3.3.2 O processo de emissão induzida

Antes de proceder a derivação da equação cinética que determina a evolução temporal do número de ocupação, uma breve discussão merece ser realizada a respeito dos distintos tipos de emissão existentes. A um nível microscópico, isto é, de partícula única, os processos de emissão podem ser separados em dois tipos: *emissão espontânea*, a qual independe do campo de radiação no qual a partícula se insere, mas somente das propriedades cinéticas próprias da mesma, e *emissão estimulada*, a qual é uma função da intensidade local do campo radioativo que envolve a partícula. Neste último caso, é possível e comum também o processo inverso à emissão, que pode ser denominado *absorção pura* ou *absorção estimulada*. O processo de emissão espontânea foi estudado na seção 3.2, a qual culminou com a derivação da emissividade da partícula no plasma, expressão (3.43). Nesta seção, será realizada a derivação do coeficiente de emissão/absorção induzida da partícula. Por outro lado, quando se considera o processo coletivo de emissão ou absorção, levado a cabo por um ensemble de partículas que individualmente podem sofrer processos de emissão ou absorção induzidas, a resultante líquida pode ser denominada *emissão estimulada líquida* ou simplesmente *emissão estimulada* e a resultante oposta de *absorção estimulada líquida* ou simplesmente *absorção estimulada*. Da mesma forma, a resultante dos processos de emissões espontâneas de um conjunto de partículas pode ser denominada *emissão incoerente* de radiação. O mecanismo do maser de elétron-cíclotron faz uso do processo de emissão estimulada líquida, resultante de um número muito grande de partículas que compõe o plasma.

Uma equação cinética para a evolução temporal de $N^\sigma(\mathbf{k})$ será agora derivada. Para tanto, definem-se as seguintes quantidades:

Estado físico $\{q\}$: consiste no conjunto de números quânticos que descrevem totalmente o estado físico da partícula.

Energia E_q : energia total do estado quântico $\{q\}$.

Número de ocupação de estado N_q : número total de partículas no estado $\{q\}$.

Probabilidade espectral de emissão $p_{qq'}^\sigma(\mathbf{k})$: definida de tal forma que $p_{qq'}^\sigma(\mathbf{k}) d^3k / (2\pi)^3$ é a probabilidade de que uma partícula inicialmente no estado $\{q\}$ emita um fóton no modo de propagação σ com vetor de onda igual a \mathbf{k} no intervalo $d^3k / (2\pi)^3$ e frequência $\omega_{\mathbf{k}}^\sigma$ ao sofrer uma transição para o estado $\{q'\}$, com $E_q > E_{q'}$.

Probabilidade espectral por unidade de tempo $w_{qq'}^\sigma(\mathbf{k})$: taxa de ocorrência de transições $\{q\} \rightarrow \{q'\}$, em termos de probabilidades espectrais, quando os processos de emissão e absorção ocorrem continuamente.

Para processos contínuos de emissão/transição, a taxa $w_{qq'}^\sigma$ é uma quantidade mais adequada que $p_{qq'}^\sigma$.

Considera-se então as transições $\{q\} \rightarrow \{q'\}$. Deste ponto em diante, é assumido que esta transição satisfaz os requerimentos de conservação de energia, momentum e outras regras de seleção existentes. Para cada transição que ocorre, N_q decresce por uma unidade e $N_{q'}$ aumenta pelo mesmo valor, assim como $N^\sigma(\mathbf{k})$. Pelo princípio de mínima energia, o sistema tende a sofrer espontaneamente esta transição, simplesmente pela sua interação com as flutuações do vácuo. Assim, a probabilidade total de transição por unidade de tempo é $w_{qq'}^\sigma(\mathbf{k}) N_q$. Adicionalmente, ocorre um aumento adicional nesta taxa de transição devido a presença prévia de um campo de fótons do modo σ , que geram uma transição induzida por interação com a partícula. Esta taxa adicional de transição é, portanto, $w_{qq'}^\sigma(\mathbf{k}) N^\sigma(\mathbf{k}) N_q$. Desta forma, a probabilidade total por unidade de tempo da transição $\{q\} \rightarrow \{q'\}$ fica dada por

$$w_{qq'}^\sigma(\mathbf{k}) [1 + N^\sigma(\mathbf{k})] N_q.$$

Agora, consideram-se as transições $\{q'\} \rightarrow \{q\}$. Para cada transição, $N_{q'}$ decresce em uma unidade, enquanto que N_q e $N^\sigma(\mathbf{k})$ aumentam em uma unidade. Como o princípio de mínima energia não se aplica neste caso, a probabilidade total por unidade de tempo desta transição é simplesmente

$$w_{q'q}^\sigma(\mathbf{k}) N^\sigma(\mathbf{k}) N_{q'}.$$

Impõe-se agora o requerimento de que a probabilidade total de uma transição $\{q\} \rightarrow \{q'\}$, que resulta na emissão de um fóton, é idêntica à probabilidade total da transição $\{q'\} \rightarrow \{q\}$, que resulta na absorção de um fóton. A mesma imposição vale para as probabilidades por unidade tempo. Ou seja, impõe-se que $w_{qq'}^\sigma = w_{q'q}^\sigma$ e esta imposição é suposta válida tanto quando o sistema estiver em equilíbrio termodinâmico quanto fora do equilíbrio, como é a presente situação.

A taxa de variação de $N^\sigma(\mathbf{k})$ devida a transições entre $\{q\}$ e $\{q'\}$ é obtida pela diferença entre a taxa de emissão de fótons no modo σ pela taxa com que estes são absorvidos. Assumindo que o sistema possa ter distintos estados iniciais $\{q\}$ mas somente um único estado final $\{q'\}$, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \frac{dN^\sigma(\mathbf{k})}{dt} &= V^{-1} \sum_q \{w_{qq'}^\sigma(\mathbf{k}) [1 + N^\sigma(\mathbf{k})] N_q - w_{q'q}^\sigma(\mathbf{k}) N^\sigma(\mathbf{k}) N_{q'}\} \\ &= V^{-1} \sum_q w_{qq'}^\sigma(\mathbf{k}) [N_q + (N_q - N_{q'}) N^\sigma(\mathbf{k})], \end{aligned} \quad (3.44)$$

sendo que o fator V^{-1} denota o volume total ocupado pelo sistema e a sua presença é necessária para corrigir a dimensionalidade da equação (3.44). O termo independente de $N^\sigma(\mathbf{k})$ em (3.44) é devido aos processos de emissão espontânea, ao passo que o termo proporcional a $N^\sigma(\mathbf{k})$ descreve os processos de emissão ou absorção induzida.

3.3.3 A equação cinética no limite semi-clássico

Será considerado agora o limite semi-clássico de (3.44). Para tanto, é necessário primeiro especificar-se o conjunto de autovalores $\{q\}$ para o sistema em questão, a partir da solução fornecida pela mecânica quântica, para então ser possível proceder-se o limite semi-clássico.

3.3.3.1 Frequência do fóton emitido

No presente caso, o sistema físico consiste em uma partícula carregada da espécie α espiralando em torno de uma linha de força do campo B_0 . Os autovalores de energia para uma partícula de spin $1/2$ são obtidos a partir das soluções da equação de Dirac e são dados por [39, capítulo 13]

$$E = \left[m_\alpha^2 c^4 + (2n + 1 + \mu_s) |q_\alpha| B_0 \hbar c + p_\parallel^2 c^2 \right]^{1/2}, \quad (3.45)$$

onde $m_\alpha c^2$ é a energia de repouso da partícula. O termo $(2n + 1) |q_\alpha| B_0 \hbar c$ corresponde ao autovalor de energia do oscilador harmônico associado ao movimento de cíclotron da partícula em torno de B_0 , determinado pelo número quântico n , ao passo que o termo proporcional a μ_s corresponde à energia potencial de orientação do spin da partícula. Neste trabalho, será suposto que a partícula não sofre transições que alteram o estado do spin da mesma. Finalmente, a quantidade $p_\parallel^2 c^2$ corresponde ao autovalor de energia cinética da partícula na direção paralela a B_0 , determinado pelo número quântico contínuo p_\parallel .⁷ Ao sofrer uma transição para o estado de energia ϵ' ($< \epsilon$), a partícula emite um fóton de energia $\hbar\omega_k^\sigma$ e momentum $\hbar\mathbf{k}$. Para que esta transição seja possível, é necessário que o estado ϵ' seja dado também por (3.45), determinado por novos números quânticos n' e p'_\parallel . O novo valor de p'_\parallel é obtido pela conservação da componente do momentum da partícula paralelo a B_0 , ou seja, $p'_\parallel = p_\parallel - \hbar k_\parallel$. Por outro lado, o novo valor de n' deve ser positivo. Chamando este valor de $n' = n - s$, com ($s < n$), resulta

$$E' = \left[m_\alpha^2 c^4 + (2(n - s) + 1 + \mu_s) |q_\alpha| B_0 \hbar c + (p_\parallel - \hbar k_\parallel)^2 c^2 \right]^{1/2}.$$

Portanto, $\hbar\omega_k^\sigma = E - E'$. O limite semi-clássico consiste em assumir que $s/n \ll 1$ e $\hbar k_\parallel / p_\parallel \ll 1$. Pode-se então desenvolver E' em uma série de potências destas quantidades, mantendo somente

⁷Rigorosamente, existe um número quântico adicional. Trata-se do número associado ao momentum conjugado na direção 1, o qual determina a coordenada $x_2 = \epsilon_\alpha p_1 / m_\alpha \Omega_\alpha$ do centro-guia da partícula. A emissão de um fóton com componente de momentum $\hbar k_1$ resulta na transição $p_1 \rightarrow p'_1 = p_1 - \hbar k_1$, provocando uma deriva do centro-guia na direção 2 e uma consequente difusão da partícula nesta direção. Este fenômeno é importante quando ocorrem instabilidades de deriva em plasmas inhomogêneos, mas na presente situação este efeito é ignorado. Uma discussão mais detalhada deste fenômeno pode ser vista em Melrose (1980a) [38, seção 5.1].

os dois primeiros termos, de onde resulta

$$E' \approx \left[1 - \left(s \frac{\partial}{\partial n} + \hbar k_{\parallel} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \right) + \frac{1}{2} \left(s \frac{\partial}{\partial n} + \hbar k_{\parallel} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \right)^2 \right] E$$

e, portanto,

$$\hbar \omega_{\mathbf{k}}^{\sigma} \approx \left[\left(s \frac{\partial}{\partial n} + \hbar k_{\parallel} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \right) - \frac{1}{2} \left(s \frac{\partial}{\partial n} + \hbar k_{\parallel} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \right)^2 \right] E.$$

De acordo com o princípio da correspondência, o limite semi-clássico é obtido impondo-se $n \rightarrow \infty$ e $\hbar \rightarrow 0$. Neste caso, a separação relativa entre valores de n tende a zero e a energia total da partícula deve tender à expressão clássica

$$E = \left[m_{\alpha}^2 c^4 + p_{\perp}^2 c^2 + p_{\parallel}^2 c^2 \right]^{1/2},$$

onde a contribuição do potencial vetor ao momentum conjugado P_{\perp} é ignorada.⁸ Pode-se fazer então a seguinte correspondência,

$$(2n + 1 + \mu_s) |q_{\alpha}| B_0 \hbar \longleftrightarrow p_{\perp}^2 c, \quad (3.46)$$

e por inferência a derivação em n pode ser transformada resultando na seguinte forma,

$$\frac{\partial}{\partial n} \rightarrow \frac{|q_{\alpha}| B_0 \hbar}{c p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}}.$$

Portanto, obtém-se

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbf{k}}^{\sigma} &\approx \left[\left(s \Omega_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + k_{\parallel} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \right) - \frac{\hbar}{2} \left(s \Omega_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + k_{\parallel} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \right)^2 \right] E \\ &= \left[\left(s \Omega_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + k_{\parallel} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \right) - \frac{\hbar}{2} \left(s \Omega_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + k_{\parallel} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \right)^2 \right] E, \end{aligned}$$

de onde resulta

$$\omega_{\mathbf{k}}^{\sigma} \approx s \omega_{\alpha} + k_{\parallel} v_{\parallel} + \frac{\hbar}{2E} \left[(s \omega_{\alpha} + k_{\parallel} v_{\parallel})^2 - k_{\parallel}^2 c^2 \right]. \quad (3.47)$$

O resultado (3.47) é muito importante, pois mostra, no termo independente de \hbar , que a descrição semi-clássica prevê de forma correta que o fóton emitido satisfaz a condição de ressonância (3.1). Adicionalmente, o termo proporcional a \hbar consiste em uma correção quântica ao autovalor de frequência, oriunda do recuo sofrido pela partícula ao emitir o fóton. Este termo adicional pode ser denominado *desvio quântico de frequência*.

3.3.3.2 Expressões semi-clássicas para a probabilidade e a taxa de probabilidade de transição

As expressões clássicas para energia e potência espectrais, dadas pelas expressões (3.36) e (3.41), podem ser empregadas para fornecer expressões para as probabilidades de transição. A quantidade $U^{\sigma}(\mathbf{k})$ mede a energia irradiada no modo σ no intervalo elemental $d^3 k / (2\pi)^3$. Esta energia é aqui interpretada como a energia contida por fóton de frequência $\omega_{\mathbf{k}}^{\sigma}$ vezes a probabilidade de transição (emissão). Isto é,

$$U^{\sigma}(\mathbf{k}) = \hbar \omega_{\mathbf{k}}^{\sigma} p_{qq'}^{\sigma}(\mathbf{k}).$$

Portanto, $p_{qq'}^{\sigma}$ é dado por

$$p_{qq'}^{\sigma}(\mathbf{k}) = \frac{4\pi R_E^{\sigma}(\mathbf{k})}{\hbar \omega_{\mathbf{k}}^{\sigma}} |\hat{\mathbf{e}}^{\sigma*}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{J}^{\text{ext}}(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{\sigma})|^2. \quad (3.48a)$$

⁸Ver nota de rodapé 7.

Uma expressão para a taxa de transição $w_{pp'}^\sigma$, específica para o caso da emissão de cíclotron, é fornecida a partir da expressão (3.41) para a potência espectral. Ou seja, uma vez que

$$P_\alpha^\sigma(\mathbf{k}) = \hbar\omega_{\mathbf{k}}^\sigma w_{qq'}^\sigma,$$

resulta

$$w_{qq'}^\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = \sum_{s \rightarrow -\infty}^{\infty} w_{qq'}^\sigma(s, \mathbf{p}, \mathbf{k}),$$

sendo

$$w_{qq'}^\sigma(s, \mathbf{p}, \mathbf{k}) = 8\pi^2 \frac{q_\alpha^2 R_E^\sigma(\mathbf{k})}{\hbar\omega_{\mathbf{k}}^\sigma} |\hat{e}^{\sigma*}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{k}, \mathbf{p}; s)|^2 \delta(\omega_{\mathbf{k}}^\sigma - k_{\parallel} v_{\parallel} - s\omega_\alpha). \quad (3.48b)$$

Estas expressões para $w_{qq'}^\sigma$ e $w_{pp'}^\sigma$ foram obtidas a partir de uma aproximação semi-clássica. Cálculos detalhados, que não serão aqui apresentados, mostram que as expressões (3.48a,b) concordam com os resultados quânticos até a primeira correção quantum-mecânica [39, capítulo 13].

3.3.3.3 A equação cinética e o coeficiente de emissão

No limite semi-clássico, os estados quânticos deixam de ser considerados discretos para serem tratados como variáveis dinâmicas contínuas. Desta forma, os estados $\{q\} = \{n, p_{\parallel}\}$ e $\{q'\} = \{n-s, p_{\parallel} - \hbar k_{\parallel}\}$ são substituídos, respectivamente, por $\{p_{\perp}, p_{\parallel}\}$ e $\{p_{\perp} - s\omega_\alpha \hbar/v_{\perp}, p_{\parallel} - \hbar k_{\parallel}\}$, sendo a substituição $n \rightarrow p_{\perp}$ guiada pela correspondência (3.46). Ou seja, as transições ocorrem sobre valores contínuos das componentes do momentum linear das partículas e o somatório contido na equação (3.44) deve ser substituído pela integração

$$V^{-1} \sum_q w_{qq'}^\sigma(\mathbf{k}) N_q \rightarrow \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} w^\sigma(p_{\perp}, p_{\parallel}, \mathbf{k}) n(p_{\perp}, p_{\parallel}) \rightarrow \int d^3 p w^\sigma(p_{\perp}, p_{\parallel}, \mathbf{k}) f(p_{\perp}, p_{\parallel}),$$

sendo $n(p_{\perp}, p_{\parallel})$ a densidade de ocupação de estados e $f(p_{\perp}, p_{\parallel}) = n(p_{\perp}, p_{\parallel}) / (2\pi\hbar)^3$ a denominada *função de distribuição de uma partícula*, interpretada de tal forma que $f(p_{\perp}, p_{\parallel}) d^3 p$ é a probabilidade de encontrar uma partícula com momentum $\mathbf{p} = (p_{\perp}, p_{\parallel})$ no intervalo $d^3 p$. De acordo com esta transformação, o termo $N_q - N_{q'}$ contido em (3.44) pode ser desenvolvido por série de Taylor, resultando em

$$\begin{aligned} N_q - N_{q'} &\rightarrow f(p_{\perp}, p_{\parallel}) - f(p_{\perp} - s\omega_\alpha \hbar/v_{\perp}, p_{\parallel} - \hbar k_{\parallel}) \\ &\simeq \hbar \left(\frac{s\omega_\alpha}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + k_{\parallel} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \right) f(p_{\perp}, p_{\parallel}), \end{aligned}$$

ocorrendo também uma soma sobre todos os valores possíveis do número s . Assim, a equação (3.44) resulta escrita como

$$\frac{dN^\sigma(\mathbf{k})}{dt} = \sum_{s \rightarrow -\infty}^{\infty} \int d^3 p w^\sigma(s, \mathbf{p}, \mathbf{k}) \left[f(p_{\perp}, p_{\parallel}) + \hbar N^\sigma(\mathbf{k}) \left(\frac{s\omega_\alpha}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + k_{\parallel} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \right) f(p_{\perp}, p_{\parallel}) \right], \quad (3.49)$$

a qual é a equação cinética no limite semi-clássico.

A equação (3.49) descreve a evolução temporal do número de fótons propagando-se no modo σ e ocupando o estado \mathbf{k} no intervalo $d^3 k / (2\pi)^3$. Esta evolução, conforme discutido no início desta seção, ocorre devido a dois tipos de processos: o processo de *emissão espontânea*, descrito pelo primeiro termo da equação (3.49) e o processo de *emissão induzida*, descrito pelo segundo termo. Deseja-se agora escrever o termo de emissão induzida da seguinte maneira:

$$\left[\frac{dN^\sigma(\mathbf{k})}{dt} \right]^{\text{ind}} = \gamma^\sigma(\mathbf{k}) N^\sigma(\mathbf{k}),$$

onde o termo $\gamma^\sigma(\mathbf{k})$ é denominado *coeficiente de emissão*. Comparando com (3.49), identifica-se

$$\gamma^\sigma(\mathbf{k}) = \sum_{s \rightarrow -\infty}^{\infty} \int d^3 p \hbar w^\sigma(s, \mathbf{p}, \mathbf{k}) \left(\frac{s\omega_\alpha}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + k_{\parallel} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \right) f(p_{\perp}, p_{\parallel}). \quad (3.50)$$

É interessante discutir neste momento o sinal de $\gamma^\sigma(\mathbf{k})$ e sua relação com a função de distribuição $f(p_\perp, p_\parallel)$. Para que o número de fótons ocupando um determinado estado \mathbf{k} aumente com o tempo, é necessário que $\gamma^\sigma(\mathbf{k}) > 0$. Para tanto, é necessário que a integração em momentum tenha uma contribuição majoritária de regiões onde as derivadas de $f(p_\perp, p_\parallel)$ em p_\perp e/ou p_\parallel sejam também positivas. Isto somente ocorrerá se as partículas tiverem uma densidade de ocupação de estados de mais alta energia maior que de estados de mais baixa energia. Desta maneira, as partículas irão possuir um excesso de energia que pode ser utilizado na geração de fótons no processo de emissão induzida. Este tipo de ocupação de estados de mais alta energia pelas partículas é denominado de *inversão de população* e é a fonte de energia livre responsável pela geração de radiação eletromagnética por *lasers* (radiação na faixa da luz visível) ou por *masers* (radiação na faixa das microondas). Quando as derivadas de $f(p_\perp, p_\parallel)$ são majoritariamente negativas, então $\gamma^\sigma(\mathbf{k}) < 0$ e o número de fótons irá decair no tempo. Neste caso, o coeficiente $\gamma^\sigma(\mathbf{k})$ é usualmente denominado *coeficiente de absorção*.

Finalmente, a expressão para $\gamma^\sigma(\mathbf{k})$ no caso da emissão de cíclotron é obtida inserindo-se a expressão semi-clássica para $w^\sigma(s, \mathbf{p}, \mathbf{k})$, dada por (3.48b), em (3.50), obtendo-se então

$$\gamma^\sigma(\mathbf{k}) = 8\pi^2 \frac{q_\alpha^2 R_E^\sigma(\mathbf{k})}{\omega_{\mathbf{k}}^\sigma} \sum_{s \rightarrow -\infty}^{\infty} \int d^3p |\hat{\mathbf{e}}^{\sigma*}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{k}, \mathbf{p}; s)|^2 \times \left(\frac{s\omega_\alpha}{v_\perp} \frac{\partial}{\partial p_\perp} + k_\parallel \frac{\partial}{\partial p_\parallel} \right) f(p_\perp, p_\parallel) \delta(\omega_{\mathbf{k}}^\sigma - k_\parallel v_\parallel - s\omega_\alpha), \quad (3.51)$$

a qual é a expressão para o coeficiente de emissão que será utilizada neste trabalho. Pode-se notar como o cálculo de $\gamma^\sigma(\mathbf{k})$ está diretamente vinculado à condição de ressonância (3.1). Uma expressão equivalente para (3.51), que faz uso explícito das relações (3.43b-e), será apresentada posteriormente.

3.4 As equações de traçado de raios e da transferência radiativa

Nesta seção será discutida a propagação e a amplificação/absorção da radiação eletromagnética gerada localmente pelo mecanismo do maser de elétron-cíclotron. A discussão será realizada com base no formalismo WKB já delineado na seção 3.2.3 e culminará na derivação de um conjunto de equações diferenciais que determinam a trajetória da radiação, descrita por um raio, e a evolução da intensidade da mesma ao longo de sua propagação. As equações da trajetória são denominadas *equações de traçado de raios*, ao passo que a intensidade da onda é regida pela *equação da transferência radiativa*.

3.4.1 Equações de traçado de raios

As equações de traçado de raios da óptica geométrica podem ser derivadas retomando-se a discussão iniciada na seção 3.2.3. Deseja-se estudar a propagação de ondas através de um meio cujas propriedades variem lentamente. A idéia básica da óptica geométrica consiste na introdução do conceito de raio. De acordo com este conceito, a energia transportada pela onda é irradiada ao longo da trajetória percorrida por raios, os quais são os caminhos de partículas imaginárias (fótons) que se propagam com a velocidade de grupo.

De acordo com o formalismo WKB, as quantidades ω e \mathbf{k} passam a ser funções de posição e tempo, conforme as definições realizadas em (3.30). Neste caso, ainda é possível obter-se uma relação de dispersão que vincula os valores de $\omega(\mathbf{r}, t)$ com $\mathbf{k}(\mathbf{r}, t)$, a qual é a solução da mesma equação (3.17), porém agora incluindo-se uma dependência formal em posição e tempo,

$$\Lambda(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}, t) \equiv \det |\Lambda_{ij}^h(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}, t)| = 0, \quad (3.52)$$

onde $\Lambda_{ij}^h(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}, t)$ continua sendo a parte hermiteana do tensor de dispersão (3.10), porém agora com as novas dependências incluídas. Da mesma maneira, as soluções de (3.52) continuam sendo escritas na forma (3.18a ou b), porém na forma

$$\omega = \omega_{\mathbf{k}}^\sigma(\mathbf{r}, t). \quad (3.53)$$

A partir de diferenciações cruzadas das definições (3.30), pode-se obter também a seguinte equação,

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t} + \nabla \omega = 0.$$

Contudo, ao longo da trajetória seguida pelo raio que se propaga no modo σ , a frequência é determinada por (3.53). Como consequência, a equação acima pode ser escrita para o raio como

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t} + \frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}^{\sigma}}{\partial \mathbf{r}} + \left(\frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}^{\sigma}}{\partial \mathbf{k}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{k} = 0, \quad (3.54)$$

sendo que o gradiente $\partial/\partial \mathbf{r}$ deve ser realizado mantendo t e \mathbf{k} constantes e o gradiente $\partial/\partial \mathbf{k}$ é realizado mantendo-se t e \mathbf{r} constantes.

O conceito da velocidade de grupo surge quando se considera a velocidade de propagação da energia contida em um pacote de ondas de tamanho finito em um meio dispersivo. Uma frente de onda com um determinado comprimento e uma correspondente frequência dada por (3.53) propaga-se com a velocidade de fase $\mathbf{v}_f^{\sigma} = (\omega_{\mathbf{k}}^{\sigma}/k) \hat{\mathbf{k}}$, onde $\hat{\mathbf{k}}$ é o vetor unitário que determina a direção e sentido do vetor de onda \mathbf{k} . Esta quantidade é usualmente denominada *direção normal da onda*. Porém, as frentes de onda sempre são compostas por pulsos de duração e extensão finitas e, por consequência, as frentes de onda são sempre compostas por uma superposição de ondas de diferentes comprimentos, cada uma propagando-se com sua velocidade de fase própria. Se Δr e Δk fornecem uma ordem de grandeza para a extensão espacial do pulso e sua largura espectral, respectivamente, então ambas as quantidades relacionam-se por $\Delta r \Delta k \gtrsim 1/2$ [32, capítulo 7]. Neste caso, à medida que o pulso se propaga pelo meio dispersivo, este se torna cada vez mais distorcido e o conceito de velocidade de fase não pode ser utilizado para descrever o transporte de energia pela onda.

Porém, para um meio fracamente dispersivo, é possível determinar-se uma velocidade, denominada *velocidade de grupo*, a qual irá descrever de forma satisfatória a propagação do pulso no meio. Utilizando a transformada inversa de Fourier, dada por (A.1b), para o campo elétrico de uma onda propagando-se no modo σ em um meio dispersivo, pode-se escrever

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k \mathbf{E}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}^{\sigma} t)}.$$

Para um pulso centrado em um certo valor de \mathbf{k} , a contribuição majoritária para a integral acima vem das regiões onde ocorre a maior interferência construtiva, determinada pela condição de fase estacionária⁹ [54, seção 4.3]

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}^{\sigma} t) = 0 \implies \mathbf{r} = \frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}^{\sigma}}{\partial \mathbf{k}} t.$$

Ou seja, para este valor de \mathbf{k} o pulso tende a se propagar com a velocidade

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \equiv \mathbf{v}_g^{\sigma}(\mathbf{k}) = \frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}^{\sigma}}{\partial \mathbf{k}}, \quad (3.55a)$$

onde $\mathbf{v}_g^{\sigma}(\mathbf{k})$ é a velocidade de grupo do pulso. Observa-se que na obtenção deste resultado assumiu-se que o meio é fracamente dispersivo e, portanto, derivadas de ordem mais altas de $\omega_{\mathbf{k}}^{\sigma}$ foram desprezadas, de acordo com o ordenamento realizado na seção 3.2.3 com respeito ao parâmetro δ .

Agora, deseja-se calcular a variação de $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\mathbf{r}, t)$ ao longo da propagação do raio. Para tanto, calcula-se

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t} + \left(\dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{k} = \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}^{\sigma}}{\partial \mathbf{k}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{k},$$

onde foi feito uso de (3.55a). Mas, de acordo com (3.54), pode-se escrever então

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}^{\sigma}}{\partial \mathbf{r}}. \quad (3.55b)$$

Finalmente, em um meio não estacionário a frequência da radiação também irá variar ao longo da propagação do raio. Calculando-se então

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}^{\sigma}}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}^{\sigma}}{\partial \mathbf{r}} + \dot{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}^{\sigma}}{\partial \mathbf{k}}$$

⁹Este método de aproximação é denominado *método do ponto de sela* [3, seção 7.3].

a partir de (3.53). Empregando-se (3.55a,b), resulta

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial\omega_{\mathbf{k}}^{\sigma}}{\partial t}. \quad (3.55c)$$

O sistema (3.55a-c) forma o sistema de equações de traçado de raios. Uma outra maneira de se obter este sistema parte de um princípio variacional, equivalente ao Princípio de Fermat na óptica. Partindo-se novamente da hipótese de que a evolução temporal das variáveis $(\mathbf{r}(t), \mathbf{k}(t))$ do raio ocorre ao longo da região onde a fase da frente de onda permanece estacionária, pode-se estender esta idéia à formulação eikonal dos campos, dada por (3.29a,b). Para tanto, assume-se agora que a função eikonal $\psi = \psi(\mathbf{r}(t), t)$ permanece estacionária ao longo do raio. Considerando a variação de ψ ao longo da propagação do raio no modo σ durante o intervalo de tempo $t_1 < t < t_2$, observa-se que

$$\frac{d\psi^{\sigma}}{dt} = \frac{\partial\psi^{\sigma}}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial\psi^{\sigma}}{\partial \mathbf{r}} \implies \Psi^{\sigma}(t_1, t_2) \equiv \psi^{\sigma}(t_2) - \psi^{\sigma}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{k} - \omega_{\mathbf{k}}^{\sigma}) dt.$$

Se a função eikonal permanece estacionária ao longo do raio, então $\delta\Psi^{\sigma}(t_1, t_2) = 0$, onde o símbolo δ agora indica a variação de Ψ^{σ} . Esta imposição é um princípio de extremo, equivalente ao princípio de Hamilton na mecânica ou ao princípio de Fermat na óptica geométrica [27]. A variação $\delta\Psi^{\sigma}$ é suposta devida às variações $\delta\mathbf{r}$ e $\delta\mathbf{k}$ dos parâmetros do raio em um determinado instante $t_1 < t < t_2$, em torno da trajetória que o raio realmente percorre. Assume-se que os pontos extremos são fixos, isto é, $\delta\mathbf{r} = \delta\mathbf{k} = 0$ nestes instantes. Desta forma, de acordo com o princípio de extremo,

$$\delta\Psi^{\sigma}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \left[\mathbf{k} \cdot \delta\dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \delta\mathbf{k} - \left(\frac{\partial\omega_{\mathbf{k}}^{\sigma}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \delta\mathbf{r} + \frac{\partial\omega_{\mathbf{k}}^{\sigma}}{\partial \mathbf{k}} \cdot \delta\mathbf{k} \right) \right] dt = 0.$$

Uma vez que a variação $\delta\mathbf{r}$ deve ser considerada de forma independente às derivadas usuais e como os pontos extremos são fixos, o primeiro termo pode ser integrado por partes, resultando

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{k} \cdot \delta\dot{\mathbf{r}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{k} \cdot \frac{d}{dt}(\delta\mathbf{r}) dt = \mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{r} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{k}} \cdot \delta\mathbf{r} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{k}} \cdot \delta\mathbf{r} dt.$$

Portanto,

$$\delta\Psi^{\sigma}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\dot{\mathbf{r}} - \frac{\partial\omega_{\mathbf{k}}^{\sigma}}{\partial \mathbf{k}} \right) \cdot \delta\mathbf{k} - \left(\dot{\mathbf{k}} + \frac{\partial\omega_{\mathbf{k}}^{\sigma}}{\partial \mathbf{r}} \right) \cdot \delta\mathbf{r} \right] dt = 0.$$

Como as variações em \mathbf{r} e \mathbf{k} também são independentes entre si, seguem novamente as equações (3.55a-c). O resultado novo obtido desta formulação variacional foi que as variáveis $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{k}(t)$ formam um par de variáveis canônicas onde a relação de dispersão $\hbar\omega_{\mathbf{k}}^{\sigma}$ faz o papel de Hamiltoniano.

Uma expressão alternativa para o sistema (3.55a-c) substitui a função de dispersão $\Lambda(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}, t)$ no lugar de $\omega_{\mathbf{k}}^{\sigma}$. Diferenciações implícitas de (3.52), primeiro em relação a \mathbf{r} e depois em relação a \mathbf{k} , ao longo da trajetória do raio, fornecem

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial\Lambda}{\partial \omega} \frac{\partial\omega_{\mathbf{k}}^{\sigma}}{\partial \mathbf{r}} = 0, \quad \frac{\partial\Lambda}{\partial \mathbf{k}} + \frac{\partial\Lambda}{\partial \omega} \frac{\partial\omega_{\mathbf{k}}^{\sigma}}{\partial \mathbf{k}} = 0.$$

Assim, as equações (3.55a,b) se tornam

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = - \frac{\partial\Lambda/\partial \mathbf{k}}{\partial\Lambda/\partial \omega} \quad (3.56a)$$

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \frac{\partial\Lambda/\partial \mathbf{r}}{\partial\Lambda/\partial \omega}. \quad (3.56b)$$

Por sua vez, ao longo do raio,

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{\partial\Lambda}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial\Lambda}{\partial \mathbf{r}} + \dot{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial\Lambda}{\partial \mathbf{k}} + \dot{\omega} \frac{\partial\Lambda}{\partial \omega} = 0 \implies \frac{\partial\Lambda}{\partial t} + \dot{\omega} \frac{\partial\Lambda}{\partial \omega} = 0.$$

Desta forma, (3.55c) fica escrita

$$\frac{d\omega}{dt} = - \frac{\partial\Lambda/\partial t}{\partial\Lambda/\partial \omega}. \quad (3.56c)$$

As equações (3.56a-c) serão empregadas posteriormente neste trabalho.

3.4.2 Equação de transferência radiativa

Será realizada agora a dedução da equação que rege a variação da intensidade da onda eletromagnética quando ela se propaga ao longo da trajetória de um raio no modo σ . O ponto de partida para este cálculo consiste na equação cinética para o número de ocupação de fótons no limite semi-clássico, equação (3.49). Agora, porém, será assumido que os fótons são emitidos em um meio não uniforme e então as quantidades envolvidas nesta equação variam lentamente no tempo e no espaço. Desta forma, escreve-se inicialmente a equação (3.49) como

$$\frac{d}{dt}N^\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \frac{1}{\hbar\omega_{\mathbf{k}}^\sigma} \frac{d}{dV}P^\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) + \gamma^\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)N^\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t),$$

sendo $dP^\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)/dV$ a potência espectral por unidade de volume emitida espontaneamente no intervalo $d^3k/(2\pi)^3$. Esta quantidade será posteriormente identificada com a emissividade (3.43e) e γ^σ é o coeficiente de emissão induzida calculado em (3.51).

Ao longo da trajetória do raio, a derivada total no lado esquerdo da equação acima pode ser adiabaticamente substituída por $d/dt \rightarrow \partial/\partial t + \dot{\mathbf{r}} \cdot \partial/\partial \mathbf{r} + \dot{\mathbf{k}} \cdot \partial/\partial \mathbf{k}$. Contudo, a equação de transferência radiativa é tradicionalmente apresentada em outra forma. Introduzindo o elemento de arco ds , o qual é paralelo à tangente da trajetória do raio no instante t , pode-se escrever

$$ds = v_g^\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) dt$$

e a equação cinética pode ser expressa em termos do parâmetro s ,

$$v_g^\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) \frac{d}{ds}N^\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \frac{1}{\hbar\omega_{\mathbf{k}}^\sigma} \frac{d}{dV}P^\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) + \gamma^\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)N^\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t). \quad (3.57)$$

Deseja-se escrever a equação acima em termos do fluxo da energia transportada por um dado modo de propagação por unidade de frequência e por unidade de ângulo sólido sobre a direção de propagação do raio. Sendo assim, define-se a *intensidade específica* $I^\sigma(\omega, \theta_r)$ como a potência por unidade de frequência (ω) e por unidade de ângulo sólido na direção do raio (Ω_r) que cruza a superfície unitária normal à direção do raio. Aqui distinguem-se dois ângulos: θ e θ_r . O primeiro é o ângulo entre \mathbf{k} e \mathbf{B}_0 , enquanto que o segundo é o ângulo entre $\mathbf{v}_g^\sigma(\mathbf{k})$ e \mathbf{B}_0 . Da mesma maneira distinguem-se os ângulos azimutais ϕ e ϕ_r , de tal forma que os elementos de ângulo sólido do raio e da normal à frente de onda são, respectivamente, $d\Omega_r = \sin\theta_r d\theta_r d\phi_r$ e $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$. A figura 3.1 representa a diferença entre estes ângulos sólidos.

Como o plasma apresenta simetria azimutal em torno de \mathbf{B}_0 , então $d\phi_r = d\phi$. Neste caso, a relação entre os ângulos sólidos depende somente dos ângulos polares θ_r e θ e pode ser escrita como [5, 38]

$$\frac{d\Omega_r}{d\Omega} = \left| \frac{\partial \cos\theta_r}{\partial \cos\theta} \right|.$$

Com a definição acima da intensidade específica, o fluxo de energia propagando-se no modo σ , com frequência ω no intervalo $d\omega$, através de uma quantidade infinitesimal de superfície da , perpendicular ao raio e dentro do elemento de ângulo sólido $d\Omega_r$ é dado por

$$dF^\sigma(\omega) = I^\sigma(\omega, \theta_r) d\omega d\Omega_r da.$$

Este fluxo é composto por $N^\sigma(\mathbf{k})$ fótons com energia $\hbar\omega_{\mathbf{k}}^\sigma$ que atravessam da com a velocidade $\mathbf{v}_g^\sigma(\mathbf{k})$ dentro do intervalo elementar $d^3k/(2\pi)^3$, ou seja,

$$dF^\sigma(\omega) = \hbar\omega_{\mathbf{k}}^\sigma N^\sigma(\mathbf{k}) v_g^\sigma(\mathbf{k}) da \frac{d^3k}{(2\pi)^3}.$$

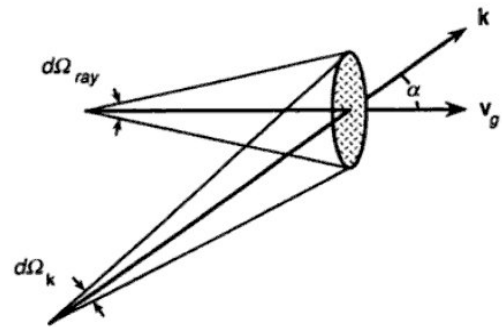


Figura 3.1: Representação entre as direções normal à frente de onda e do raio e entre os ângulos sólidos Ω_r e Ω_k .

Portanto,

$$I^\sigma(\omega, \theta_r) d\omega = \frac{k^2 \hbar \omega_k^\sigma N^\sigma(\mathbf{k})}{(2\pi)^3} v_g^\sigma(\mathbf{k}) dk \left| \frac{\partial \cos \theta}{\partial \cos \theta_r} \right|.$$

Como a intensidade específica depende da frequência, é necessário realizar agora a mesma mudança de variáveis ($\omega_k^\sigma \rightarrow \omega, k \rightarrow k_\sigma(\omega, \theta) = n_\sigma \omega / c$) realizada na seção 3.2.6. O ângulo θ é mantido fixo e o plasma possui simetria azimutal; então pode-se escrever

$$d\omega = \frac{\partial \omega_k^\sigma}{\partial k} dk.$$

Deve-se mencionar aqui que $\partial \omega_k^\sigma / \partial k \neq |\partial \omega_k^\sigma / \partial k|$, uma vez que o primeiro é apenas a componente radial da velocidade de grupo expressa em coordenadas esféricas no espaço de Fourier. As duas quantidades são idênticas somente em um meio isotrópico. Desta forma, obtém-se a seguinte expressão para $N^\sigma(\mathbf{k})$,

$$N^\sigma(\omega, \theta_r) = \frac{c^2 (2\pi)^3}{\omega^2 \hbar \omega} \frac{I^\sigma(\omega, \theta_r)}{n_{\sigma t}^2(\omega, \theta_r)},$$

sendo a quantidade $n_{\sigma t}^2(\omega, \theta_r)$ definida em (3.58d) abaixo. Inserindo a expressão acima para $N^\sigma(\omega, \theta_r)$ na equação (3.57), obtém-se finalmente a equação de transferência radiativa

$$n_{\sigma t}^2(\omega, \theta_r) \frac{d}{ds} \left[\frac{I^\sigma(\omega, \theta_r)}{n_{\sigma t}^2(\omega, \theta_r)} \right] = \alpha^\sigma(\omega, \theta_r) + \mu^\sigma(\omega, \theta_r) I^\sigma(\omega, \theta_r), \quad (3.58a)$$

onde

$$\alpha^\sigma(\omega, \theta_r) = \frac{\omega^2 n_\sigma^2}{(2\pi c)^3} \frac{\partial(\omega n_\sigma)}{\partial \omega} \left| \frac{\partial \cos \theta}{\partial \cos \theta_r} \right| \frac{dP^\sigma}{dV}, \quad (3.58b)$$

$$\mu^\sigma(\omega, \theta_r) = \frac{\gamma^\sigma}{v_g^\sigma}, \quad (3.58c)$$

$$n_{\sigma t}^2(\omega, \theta_r) = \frac{v_g^\sigma}{c} n_\sigma^2 \frac{\partial(\omega n_\sigma)}{\partial \omega} \left| \frac{\partial \cos \theta}{\partial \cos \theta_r} \right|. \quad (3.58d)$$

A quantidade $\alpha^\sigma(\omega, \theta_r)$ é a potência irradiada no modo σ devido à emissão espontânea do plasma por unidade de frequência e por unidade de ângulo sólido em torno da direção do raio. Já a quantidade $\mu^\sigma(\omega, \theta_r)$ é o coeficiente de emissão induzida do plasma por unidade de comprimento ao longo do caminho do raio. Finalmente, a quantidade $n_{\sigma t}^2(\omega, \theta_r)$ é denominada *índice de refração de transferência*. Todas as quantidades do lado direito de (3.58b-d) são por hipótese escritas em termos de ω e θ_r .

Como foi mencionado anteriormente, dP^σ/dV é a potência irradiada por unidade de volume no intervalo $d^3k/(2\pi)^3$ em torno de \mathbf{k} devido à emissão espontânea do plasma. Esta última quantidade fornece a potência emitida (por volume) por todo o plasma. Para o processo de emissão que está sendo considerado, ou seja, emissão térmica de partículas espiralando em torno do campo \mathbf{B}_0 , esta quantidade pode ser fornecida a partir da emissividade de partícula única $\eta_\alpha^\sigma(\omega, \theta; s)$ a partir de [39, Eq. 12.54]

$$\frac{dP^\sigma}{dV} = \sum_\alpha \sum_{s \rightarrow -\infty}^{\infty} \int d^3p \eta_\alpha^\sigma(\omega, \theta; s) f_\alpha(\mathbf{p}), \quad (3.59)$$

onde $f_\alpha(\mathbf{p})$ é a função de distribuição da partícula da espécie α . Finalmente, aproximações que serão realizadas posteriormente para o cálculo do coeficiente $\alpha^\sigma(\omega, \theta_r)$ (3.58b), tornam conveniente a definição aqui da quantidade

$$S^\sigma = \frac{\omega^2 n_\sigma v_g^\sigma}{(2\pi c)^3} \frac{dP^\sigma}{dV} = \frac{\omega^2 n_\sigma v_g^\sigma}{(2\pi c)^3} \sum_\alpha \sum_{s \rightarrow -\infty}^{\infty} \int d^3p \eta_\alpha^\sigma(\omega, \theta; s) f_\alpha(\mathbf{p}). \quad (3.60)$$

A equação de transferência radiativa será utilizada posteriormente neste trabalho. Contudo, a forma apresentada em (3.58) é desnecessariamente complicada, e algumas aproximações serão realizadas no momento adequado.

3.5 Teoria magneto-iônica

As expressões a serem utilizadas nesta dissertação para os elementos do tensor dielétrico e para a relação de dispersão são aquelas obtidas a partir da **teoria magneto-iônica de plasmas** [12, 15].

Para ondas eletrostáticas ou eletromagnéticas propagando-se em um plasma frio, usualmente é empregada a aproximação de fluidos para descrever a evolução temporal, tanto do plasma quanto das ondas. A validade desta aproximação depende do quanto efeitos cinéticos no plasma influenciam na propagação e na absorção/amplificação destas ondas. Usualmente, efeitos cinéticos são importantes para a propagação de uma onda em um plasma magnetizado quando a sua frequência está próxima ao valor local de uma das frequências de cíclotron, ressonância ou corte do plasma. Por outro lado, para uma descrição correta dos processos de absorção ou amplificação decorrentes da interação onda-partícula no plasma, usualmente é necessário incluir-se efeitos cinéticos no formalismo empregado [9, 56, 60]. Além disso, se a propagação da onda ocorre em ângulos próximos à perpendicular em relação à direção do campo magnético ambiente, o tratamento deve incluir também efeitos relativísticos, mesmo que na ordem mais baixa [9, 56, 60].

Nas seções 3.2 e 3.3 uma descrição cinética foi empregada para descrever os processos de emissão espontânea e induzida em um plasma térmico. Nesta seção, as expressões necessárias para a descrição dos processos relacionados à propagação da onda, descritos pelo sistema de equações de traçados de raios (seção 3.4.1) serão apresentadas, a partir da formulação de fluidos para o plasma. Na presença de campos magnéticos externos aplicados, o plasma é equivalente a um meio dielétrico anisotrópico caracterizado por um tensor dielétrico ou diádica.¹⁰ Nesta formulação, as equações de Maxwell são resolvidas simultaneamente com equações de fluidos que descrevem a movimentação das partículas.

3.5.1 Ondas em um plasma frio magnetizado

Considera-se o caso de um plasma frio homogêneo e não colisional imerso um campo magnético externo, uniforme e estático. Parte-se do sistema de equações de fluidos, acoplados com as equações de Maxwell. Lineariza-se este sistema de equações acopladas assumindo oscilações (ondas) de baixa amplitude. Assumindo então soluções dadas por séries de Fourier, obtém-se a seguinte expressão para o tensor de condutividade do plasma,

$$\overset{\leftrightarrow}{\sigma}(\omega) = \sum_s \frac{n_{s0} q_s^2}{m_s} \begin{bmatrix} -i\omega & \omega_{cs} & 0 \\ \frac{\omega_{cs}^2 - \omega^2}{\omega_{cs}^2 - \omega^2} & \frac{\omega_{cs}}{\omega_{cs}^2 - \omega^2} & 0 \\ -\omega_{cs} & -i\omega & 0 \\ \frac{\omega_{cs}^2 - \omega^2}{\omega_{cs}^2 - \omega^2} & \frac{\omega_{cs}}{\omega_{cs}^2 - \omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i}{\omega} \end{bmatrix}, \quad (3.61)$$

onde $\overset{\leftrightarrow}{\sigma}(\omega)$ é o tensor de condutividade em questão, n_{s0} , q_s e m_s são, respectivamente, a densidade de equilíbrio, a carga elétrica e a massa da partícula da espécie s que compõe o plasma e ω a frequência angular da onda. Ainda em (3.61),

$$\omega_{cs} = \frac{q_s B_0}{m_s c}$$

é a frequência angular de cíclotron da espécie s , sendo c a velocidade da luz no vácuo. Nota-se aqui que o sinal da frequência de cíclotron é determinado pelo sinal da carga (negativo para elétrons e positivo para prótons). A derivação da expressão (3.61) não é apresentada aqui, mas pode ser obtida em diversos textos introdutórios em física dos plasmas [8, 19, 30]. O plasma a ser considerado nesta dissertação é composto por duas espécies de partículas: elétrons ($s = e$, $q_s = -e$, $m_s = me$) e uma população de íons positivos, usualmente prótons ($s = i$, $q_s = e$, $m_s = m_i$).

Finalmente, o tensor dielétrico é obtido a partir do tensor de condutividade pela expressão (3.8), ou seja,

$$\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}(\omega) = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{1}} + i \frac{4\pi}{\omega} \overset{\leftrightarrow}{\sigma}(\omega), \quad (3.62)$$

¹⁰Do inglês *dyad*.

podendo ser escrito na forma

$$\overleftrightarrow{\varepsilon}(\omega) = \begin{bmatrix} S & -iD & 0 \\ iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix}, \quad (3.63)$$

onde

$$S = -\sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2 - \omega_{cs}^2}, \quad D = \sum_s \frac{\omega_{cs}\omega_{ps}^2}{\omega(\omega^2 - \omega_{cs}^2)} \quad (3.64)$$

e

$$P = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2}, \quad (3.65)$$

sendo

$$\omega_{ps}^2 = \frac{4\pi n_s q_s^2}{m_s}$$

a frequência angular de plasma da espécie s .

Os parâmetros S e D podem ser decompostos em uma soma de diferentes relações.

$$S = \frac{1}{2}(R + L) \text{ e } D = \frac{1}{2}(R - L), \quad (3.66)$$

onde

$$R = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega(\omega + \omega_{cs})} \quad \text{e} \quad L = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega(\omega - \omega_{cs})}. \quad (3.67)$$

Como será mostrado posteriormente, o parâmetro R está associado com o modo polarizado à direita e L está associado com o modo polarizado à esquerda.

Para obter a relação de dispersão, assume-se que a onda está se propagando em um plasma com baixa absorção, de tal forma que a discussão realizada na seção 3.2.2.1 pode ser considerada válida. Neste caso, é conveniente expressar a equação homogênea (3.16) da seguinte maneira:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) + \overleftrightarrow{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (3.68)$$

sendo $\mathbf{n} = kc/\omega$ o vetor índice de refração.

A equação (3.68) pode ser então escrita na forma de uma equação matricial. Sem perder generalização, pode-se rotar o sistema de coordenadas de tal modo que o vetor de refração \mathbf{n} (que é paralelo a \mathbf{k}) passa a estar no plano xz , realizando um ângulo θ relativo ao campo magnético \mathbf{B}_0 , o qual está dirigido ao longo do eixo z , ou seja,

$$\mathbf{n} = (n \sin \theta, 0, n \cos \theta). \quad (3.69)$$

A figura 3.2 mostra a geometria dos vetores \mathbf{n} , \mathbf{k} e \mathbf{B}_0 .

Calculando os vários produtos cruzados na equação (3.68) e organizando os resultados em forma de matriz, a equação homogênea para o campo elétrico pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} -n^2 \cos^2 \theta & 0 & n^2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & -n^2 & 0 \\ n^2 \sin \theta \cos \theta & 0 & -n^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S & -iD & 0 \\ iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0, \quad (3.70)$$

a qual se reduz na seguinte equação,

$$\begin{bmatrix} S - n^2 \cos^2 \theta & -iD & n^2 \sin \theta \cos \theta \\ iD & S - n^2 & 0 \\ n^2 \sin \theta \cos \theta & 0 & P - n^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0. \quad (3.71)$$

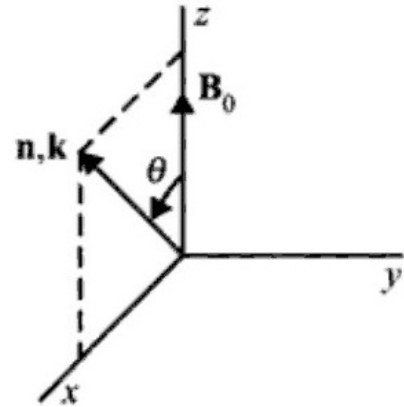


Figura 3.2: Sistema de coordenadas adotado.

Sabendo que a equação homogênea tem solução não trivial se e somente se o determinante da matriz for nulo, resulta a equação de dispersão

$$\Lambda(n, \omega, \theta) = n^2 \sin \theta \cos \theta \left[- (S - n^2) n^2 \sin \theta \cos \theta \right] + [P - n^2 \sin^2 \theta] [(S - n^2) (S - n^2 \cos^2 \theta) - D^2] = 0. \quad (3.72)$$

Na obtenção de (3.72), nota-se que o termo n^6 se cancela. Isto é uma circunstância afortunada, por que caso contrário a relação de dispersão seria cúbica em n^2 , o que traria muita dificuldade para resolvê-la. Usando a identidade $S^2 - D^2 = RL$ a equação de dispersão pode ser simplificada na forma de uma quádrlica,

$$\Lambda(n, \omega, \theta) = An^4 - Bn^2 + RLP = 0, \quad (3.73)$$

onde $A = S \sin^2 \theta + P \cos^2 \theta$ e $B = RL \sin^2 \theta + PS(1 + \cos^2 \theta)$. Esta equação é quadrática em n^2 e pode ser solucionada facilmente, resultando

$$n^2 = \frac{B \pm F}{2A}, \quad (3.74)$$

onde o termo F pode ser escrito na forma positiva,

$$F^2 = (RL - PS)^2 \sin^4 \theta + 4P^2 D^2 \cos^2 \theta. \quad (3.75)$$

A forma escolhida para F mostra que este parâmetro é sempre real e positivo. Já que A e B são reais, segue que o índice de refração ou deve ser puramente real ($n^2 > 0$), o que corresponde a uma onda propagando-se, ou puramente imaginário ($n^2 < 0$), que corresponde a uma onda evanescente. Um índice de refração complexo, com ambas as partes real e imaginária não nulas, não pode ocorrer na descrição de fluidos empregada. Na ausência de colisões, não pode ocorrer absorção de energia em um plasma frio, por que este não é um mecanismo que converte movimentos associados ordenados em uma onda em movimentos térmicos aleatórios.

Uma forma equivalente da relação de dispersão pode ser obtida multiplicando o termo RLP na equação (3.73) por $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$. O resultado é:

$$\tan^2 \theta = \frac{-P(n^2 - R)(n^2 - L)}{(Sn^2 - RL)(n^2 - P)}. \quad (3.76)$$

Esta relação é chamada de a forma “tangente” da relação de dispersão e é usada em várias circunstâncias como será visto adiante.

3.5.2 A relação de dispersão de Appleton-Hartree

Uma expressão muito usada e útil para análises de ondas de alta frequência propagando-se em um plasma frio é a relação de dispersão de Appleton-Hartree. Ela é a própria relação de dispersão (3.74), mas escrita de outra forma.

Em primeiro lugar, consideram-se ondas de alta frequência, de tal forma que somente as oscilações dos elétrons serão relevantes. Neste caso particular, os íons positivos são supostos estar em repouso e somente desempenham o papel de agente neutralizador do plasma. Portanto, nas expressões discutidas na seção 3.5.1, considera-se $\max(\omega_{pi}, |\omega_{ci}|) \ll \omega \sim \min(\omega_{pe}, |\omega_{ce}|)$, desprezando-se as primeiras frente às últimas. Esta descrição de fluidos para o plasma, quando somente são consideradas oscilações eletrônicas, é usualmente denominada **teoria magneto-iônica**.

Resolvendo então a equação (3.73) para n^2 , sendo a contribuição dos íons positivos ignorada, obtém-se

$$n^2 = \frac{1}{2A} \left(B \pm \sqrt{B^2 - 4AC} \right). \quad (3.77)$$

Adicionando An^2 em ambos os lados e reordenando, resulta

$$n^2 = \frac{An^2 - C}{An^2 + A - B}.$$

Substituindo agora (3.77) em ambos os lados, e após algumas manipulações, obtém-se

$$n^2 = 1 - \frac{2(A - B + C)}{2A - B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}.$$

Finalmente, usando as definições de A , B , C , S , D , P , R e L , obtém-se

$$n^2 = 1 - \frac{X}{Q}, \quad (3.78a)$$

onde

$$Q = 1 - \frac{Y^2 \sin^2 \theta}{2(1 - X)} \pm \left[\frac{Y^4 \sin^4 \theta}{4(1 - X)^2} + Y^2 \cos^2 \theta \right]^{1/2}. \quad (3.78b)$$

Esta é a conhecida relação de dispersão de Appleton-Hartree. Em (3.78a,b) foram introduzidos também os *parâmetros magnetoiónicos*

$$X = \frac{\omega^2}{\omega_{pe}^2} \text{ e } Y = \frac{|\omega_{ce}|}{\omega}.$$

Uma outra forma de se escrever (3.78a,b), a qual mostra explicitamente as diversas frequências envolvidas no cálculo da relação de dispersão é:

$$n^2 = 1 - \frac{2\omega_{pe}^2 \omega^{-2} (\omega^2 - \omega_{pe}^2)}{2(\omega^2 - \omega_{pe}^2) - \Omega_e^2 \sin^2 \theta \pm \Omega_e \sqrt{\Omega_e^4 \sin^4 \theta + 4\omega^{-2} (\omega^2 - \omega_{pe}^2)^2 \cos^2 \theta}}, \quad (3.79)$$

onde foi utilizada a convenção $\Omega_e \equiv |\omega_{ce}|$. Alguns casos particulares de direções de propagação serão considerados explicitamente a seguir.

3.5.3 Ondas propagando-se paralelamente ao campo magnético

Para a propagação paralela ao campo magnético ($\theta = 0$), a equação (3.76) mostra que a relação de dispersão tem três raízes: $P = 0$, $n^2 = R$, e $n^2 = L$. Para entender a natureza de cada uma das três raízes da onda associada, é necessário examinar a equação homogênea para o campo elétrico (3.71). Para uma onda se propagando ao longo do campo magnético, $\theta = 0$; assim (3.71) torna-se

$$\begin{vmatrix} (S - n^2) & -iD & 0 \\ iD & (S - n^2) & 0 \\ 0 & 0 & P \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{vmatrix} = 0. \quad (3.80)$$

Os autovetores do campo elétrico associado com cada uma das três raízes são dados da seguinte forma:

$$P = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{E}} = (0, 0, E_0) \quad (3.81a)$$

$$n^2 = R \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{E}} = (E_0, iE_0, 0) \quad (3.81b)$$

$$n^2 = L \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{E}} = (E_0, -iE_0, 0), \quad (3.81c)$$

sendo o autovetor campo elétrico para a primeira raiz, $P = 0$, paralelo ao eixo z e, portanto, paralelo a \mathbf{k} , esta raiz corresponde a uma onda eletrostática longitudinal.

Já a segunda e terceira raízes correspondem a ondas transversais. É facilmente verificado que estes modos são eletromagnéticos, visto que a Lei de Faraday, $\mathbf{B} = c\mathbf{k} \times \mathbf{E}/\omega$, mostra que a onda no campo magnético é não-nula. Sendo a geometria do campo tal que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$, a Lei de Gauss, $\tilde{\rho}_q = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}/(4\pi)$, mostra que não há flutuações relacionadas à densidade de carga associada a esses modos. Para a raiz $n^2 = R$ pode-se notar que corresponde a uma onda polarizada rotando no sentido direito com respeito ao campo magnético estático. De forma similar a terceira raiz ($n^2 = L$) representa uma onda polarizada à esquerda rotando ao longo do campo magnético estático.

Assim, uma onda polarizada circular à direita (RCP) tem a seguinte relação de dispersão,

$$n_R^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - \Omega_e)} \quad (3.82)$$

e uma onda polarizada à esquerda (LCP) terá

$$n_L^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + \Omega_e)}. \quad (3.83)$$

Outro fator importante de se analisar é que quando a velocidade de fase vai a zero, $v_{ph} = \omega/k \rightarrow 0$ (ou $n \rightarrow \infty$) ocorre ressonância. Por outro lado, o fenômeno de reflexão ocorre quando $v_{ph} \rightarrow \infty$ (ou $n \rightarrow 0$). Portanto, uma onda RCP tem ressonância para $\omega = \Omega_e$ e a onda LCP tem ressonância para $\omega = 0$ (na teoria magneto-iônica). Os pontos de corte são aqueles valores de frequência onde $n_R = 0$ ou $n_L = 0$. Estes valores são dados por:

$$\begin{aligned} \omega_{01} &= \frac{1}{2} \left[-\Omega_{ce} + (\Omega_{ce}^2 + 4\omega_{pe}^2)^{1/2} \right], \quad (n_L = 0) \\ \omega_{02} &= \frac{1}{2} \left[\Omega_{ce} + (\Omega_{ce}^2 + 4\omega_{pe}^2)^{1/2} \right] = \omega_{01} + \Omega_e, \quad (n_R = 0). \end{aligned}$$

Nota-se que $\omega_{01} < \omega_{02}$.

O modo LCP é evanescente ($n_L^2 < 0$), portanto, para $0 < \omega < \omega_{01}$. Já o modo RCP possui três regiões distintas de propagação:

1. Para $0 < \omega < \Omega_e$, o modo é em alguns textos denominado *modo whistler* (modo W).
2. Para $\Omega_e < \omega < \omega_{02}$, o modo é evanescente ($n_R^2 < 0$).
3. Para $\omega > \omega_{02}$ o modo é propagante e possui sempre velocidade de fase $(v_{ph})_R < c$.

A velocidade de fase para a onda LCP é dada por

$$\frac{(v_{ph})_L}{c} = \frac{\left(1 + \frac{\Omega_e}{\omega}\right)^{1/2}}{\left(1 + \frac{\Omega_e}{\omega} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right)^{1/2}}.$$

Similarmente, para a velocidade de fase de uma onda RCP resulta

$$\frac{(v_{ph})_R}{c} = \frac{\left(1 - \frac{\Omega_e}{\omega}\right)^{1/2}}{\left(1 - \frac{\Omega_e}{\omega} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right)^{1/2}},$$

Finalmente, a velocidade de grupo é dada para esses modos por:

$$\begin{aligned} (v_g)_L &= \left(\frac{\partial \omega}{\partial k}\right)_L = \frac{2c(\omega + \Omega_{ce})^{3/2} [\omega(\omega^2 + \omega\Omega_{ce} - \omega_{pe}^2)]^{1/2}}{2\omega(\omega + \Omega_{ce})^2 + \Omega_{ce}\omega_{pe}^2} \\ (v_g)_R &= \left(\frac{\partial \omega}{\partial k}\right)_R = \frac{2c(\omega - \Omega_{ce})^{3/2} [\omega(\omega^2 - \omega\Omega_{ce} - \omega_{pe}^2)]^{1/2}}{2\omega(\omega - \Omega_{ce})^2 + \Omega_{ce}\omega_{pe}^2}. \end{aligned}$$

3.5.4 Ondas propagando-se perpendicularmente ao campo magnético

Na direção de propagação perpendicular ocorre $k \perp B_0$, ou seja, $\theta = 90^\circ$. Neste caso, a equação matricial (3.71) reduz-se a:

$$\begin{pmatrix} S & -iD & 0 \\ iD(S - n^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (P - n^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0,$$

cujas soluções ficam então

$$n_O^2 = P \quad (3.84a)$$

$$n_X^2 = \frac{RL}{S}, \quad (3.84b)$$

onde O e X referem-se ao modo Ordinário e Extraordinário de propagação, respectivamente.

Para o modo O ($E_z \neq 0$),

$$n_O^2 = 1 - X = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}$$

é chamada de onda ordinária por não ser afetada pelo campo magnético B_0 . Por essa onda se propagar paralelamente a B_0 , ela envolve somente velocidade dos elétrons. Consequentemente, não há força magnética agindo no elétron ($v \times B_0 = 0$). O modo O é comumente chamado de “modo eletromagnético transversal”, pois ($E_{\parallel} \perp k$, $B \perp k$). Esta onda é linearmente polarizada ao longo de B_0 ($k \parallel B_0$). Este modo possui ponto de corte ($n_O = 0$) em $\omega = \omega_{pe}$ e ressonância ($n_O^2 \rightarrow -\infty$) em $\omega = 0$. Ou seja, o modo é evanescente ($n_O^2 < 0$) para $0 < \omega < \omega_{pe}$.

Para o modo X ($E_{\perp} \neq 0$), sendo

$$R = S + D \text{ e } L = S - D,$$

ou seja,

$$RL = (S + D)(S - D) = S^2 - D^2,$$

resulta

$$n_X^2 = \frac{S^2 - D^2}{S},$$

onde

$$S = 1 - \frac{X}{1 - Y^2} \text{ e } D = -\frac{XY}{1 - Y^2}.$$

Finalmente, resulta

$$n_X^2 = \frac{\left[\left(1 - \frac{X}{1 - Y^2} \right)^2 - \left(\frac{-XY}{1 - Y^2} \right)^2 \right]}{\left(1 - \frac{X}{1 - Y^2} \right)},$$

ou

$$n_X^2 = \frac{(\omega^2 - \omega_{01}^2)(\omega^2 - \omega_{02}^2)}{\omega^2(\omega^2 - \omega_{uh}^2)},$$

onde $\omega_{uh} = (\omega_{pe}^2 + \Omega_e^2)^{1/2}$ denota a frequência híbrida superior e ω_{01} e ω_{02} são suas frequências de corte.

Para o modo X ocorre ressonância ($n_X^2 \rightarrow \pm\infty$) para a frequência híbrida superior $\omega = \omega_{uh}$ e $\omega = 0$ e pontos de reflexão ou de corte ($n_X = 0$) para ω_{01} e ω_{02} . Observa-se que sempre ocorrem as relações $\omega_{01} < \omega_{uh} < \omega_{02}$. Ocorrem então quatro regiões distintas de propagação para o modo extraordinário:

1. Para $\omega < \omega_{01}$, o modo é evanescente ($n_X^2 < 0$).
2. Para $\omega_{01} < \omega < \omega_{uh}$, o modo é usualmente denominado *extraordinário lento* (ou modo Z), porque a velocidade de fase pode assumir valores $(v_{ph})_Z < c$.
3. Para $\omega_{uh} < \omega < \omega_{02}$, o modo é novamente evanescente.
4. Para $\omega > \omega_{02}$, o modo é denominado *extraordinário rápido* (ou modo X), uma vez que $(v_{ph})_X > c$ sempre.

Uma informação relevante para esta dissertação é que o modo extraordinário lento está sempre confinado na região $\omega_{01} < \omega < \omega_{uh}$.

A polarização para o modo extraordinário é

$$\frac{E_x}{E_y} = \frac{iD}{S},$$

resultando em uma polarização elíptica.

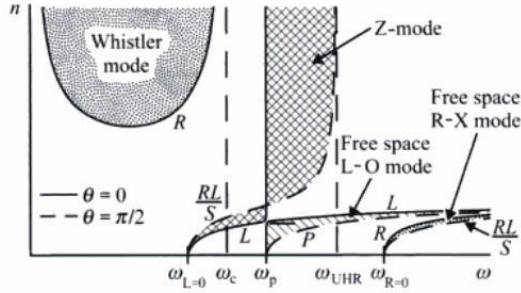


Figura 3.3: Índice de refração em função de ω para o caso $\omega_{pe} > \Omega_e$. (Linha contínua): propagação paralela ($\theta = 0$). (Linha tracejada): propagação perpendicular ($\theta = \pi/2$).

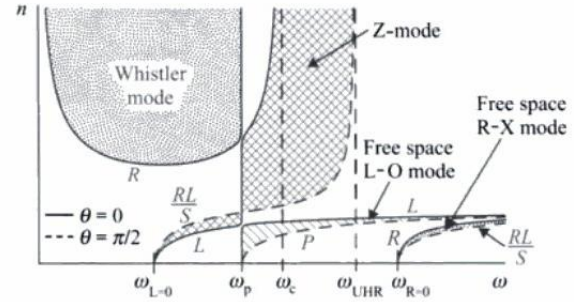


Figura 3.4: Índice de refração em função de ω para o caso $\omega_{pe} < \Omega_e$. (Linha contínua): propagação paralela ($\theta = 0$). (Linha tracejada): propagação perpendicular ($\theta = \pi/2$).

As velocidades de fase para ondas ordinárias e extraordinárias são dadas por

$$\frac{(v_{ph})_O}{c} = \frac{\omega}{(\omega^2 - \omega_{pe}^2)^{1/2}}$$

$$\frac{(v_{ph})_X}{c} = \frac{\omega (\omega^2 - \omega_{uh}^2)^{1/2}}{(\omega^2 - \omega_{01}^2)^{1/2} (\omega^2 - \omega_{02}^2)^{1/2}}$$

e as velocidades de grupo são dadas por

$$\frac{(v_g)_O}{c} = \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right)^{1/2}$$

$$\frac{(v_g)_X}{c} = \frac{(\omega^2 - \omega_{uh}^2)^{3/2} (\omega^2 - \omega_{01}^2)^{1/2} (\omega^2 - \omega_{02}^2)^{1/2}}{\omega [\omega^4 - 2\omega^2 (\Omega_e^2 + \omega_{pe}^2) + \Omega_e^2 + 3\Omega_e^2 \omega_{pe}^2 + \omega_{pe}^4]}.$$

As figuras 3.3 e 3.4 mostram o comportamento do índice de refração em função da frequência ω . São mostrados os casos de um plasma de alta densidade ($\omega_{pe} > \Omega_e$) e de baixa densidade ($\omega_{pe} < \Omega_e$) nos limite de propagação paralela a \mathbf{B}_0 ($\theta = 0$) e propagação perpendicular ($\theta = \pi/2$). As figuras também mostram as frequências características de um plasma frio magnetizado.

3.5.5 Propagação em direções arbitrárias

Neste caso, o índice de refração é dado pela fórmula de Appleton-Hartree (3.78) ou (3.79). Para determinar as ressonâncias e pontos de corte para ângulos arbitrários em relação a \mathbf{B}_0 , emprega-se a forma geral da equação de dispersão (3.73) e sua solução (3.77), em que $A = S \sin^2 \theta + P \cos^2 \theta$. Assim, uma ressonância ocorrerá quando

$$A = S \sin^2 \theta + P \cos^2 \theta = 0,$$

resultando

$$\tan^2 \theta = -\frac{P}{S}.$$

Usando agora as definições de S e P , observa-se que

$$1 - X = Y^2 (1 - X \cos^2 \theta)$$

e com as definições de X e Y , resulta finalmente a equação que determina as frequências de ressonância:

$$\omega^4 - \omega^2 (\omega_{pe}^2 + \Omega_e^2) + \omega_{pe}^2 \Omega_e^2 \cos^2 \theta = 0.$$

Portanto, as frequências de ressonância serão dadas em função de θ por

$$\omega_{0\pm}^2 = \frac{1}{2} \omega_{uh}^2 \pm \left[\frac{1}{4} \omega_{uh}^4 - \omega_{pe}^2 \Omega_e^2 \cos^2 \theta \right]^{1/2}.$$

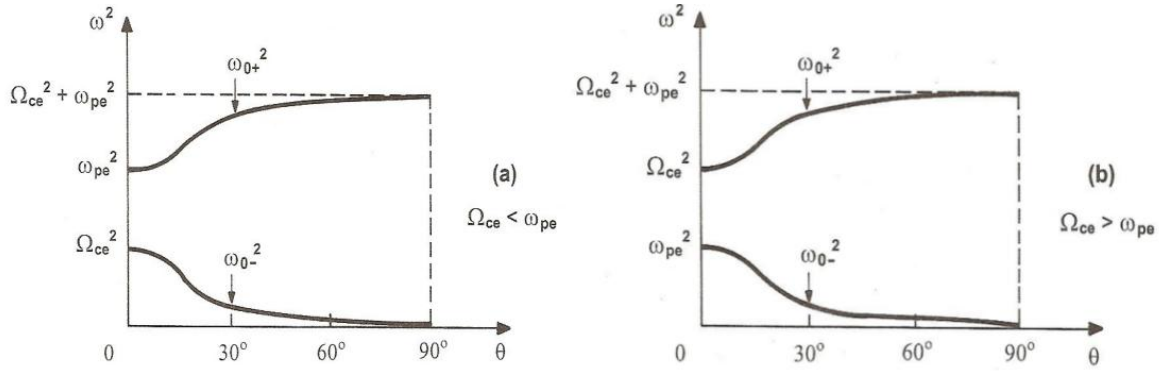


Figura 3.5: Frequências de ressonância em função do ângulo θ para uma onda propagando-se em um plasma frio, considerando os casos (a) $\Omega_e < \omega_{pe}$ e (b) $\Omega_e > \omega_{pe}$.

Observa-se então que para propagação paralela, $\omega_{0+} = \max(\omega_{pe}, \Omega_e)$ e $\omega_{0-} = \min(\omega_{pe}, \Omega_e)$, ao passo que para propagação perpendicular, $\omega_{0+} = \omega_{uh}$ e $\omega_{0-} = 0$. A figura 3.5 mostra o gráfico destas frequências para $\Omega_e < \omega_{pe}$ e para $\Omega_e > \omega_{pe}$.

Os pontos de reflexão também podem ser obtidos a partir de (3.73) quando

$$PRL = 0,$$

em cuja situação um dos modos resultará com $n = 0$. Esta condição é satisfeita para $P = 0$, $R = 0$ ou $L = 0$. Isto ocorre para $\omega = \omega_{pe}$, $\omega = \omega_{02}$ ou $\omega = \omega_{01}$, respectivamente.

A polarização na propagação oblíqua é elíptica para os dois modos, porém ambos tendem aos modos discutidos nas seções 3.5.3 e 3.5.4 nos limites $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$. As denominações usualmente empregadas para os modos na propagação oblíqua, em função dos intervalos de frequências onde os modos são propagantes, são as seguintes:

- Para $0 < \omega < \omega_{0-}$: *modo whistler* (W), o qual desaparece para $\theta \rightarrow \pi/2$ e tende a um dos ramos do modo R para $\theta \rightarrow 0$.
- Para $\omega_{01} < \omega < \omega_{0+}$: *modo extraordinário lento* (Z).
- Para $\omega > \omega_{pe}$: *modo ordinário* (O).
- Para $\omega > \omega_{02}$: *modo extraordinário rápido* (X).

As figuras 3.3 e 3.4 indicam estes modos oblíquos como as regiões sombreadas entre as curvas-limite para $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$.

Uma discussão mais aprofundada a respeito dos modos magneto-iônicos pode ser encontrada em diversos textos introdutórios em física dos plasmas [8, 19, 30].

3.6 Conversão de modos e a teoria das janelas de Ellis

Nesta seção será realizada uma breve discussão a respeito do mecanismo de conversão linear de modos em um plasma magnetizado conhecido como *janelas de rádio* ou *janelas de Ellis*. Este mecanismo de conversão de modos é empregado pelo presente modelo para determinar em que ponto da região-fonte uma onda eletromagnética propagando-se no modo extraordinário lento (Z) é parcialmente convertida no modo ordinário (O).

3.6.1 Conversão linear de modos: uma breve descrição

Um plasma magnetizado pode usualmente suportar dois ou mais modos de propagação na mesma frequência, em muitos casos com aproximadamente a mesma polarização. Em geral, para uma dada escolha de parâmetros físicos do plasma, tais como densidades, temperaturas e campo magnético, os modos apresentarão números de onda muito distintos entre si. Contudo, para certos conjuntos particulares de parâmetros do plasma uma das seguintes circunstâncias especiais podem ocorrer:

1. ambos os números de onda aproximam-se assintoticamente;
2. um modo aproxima-se de uma ressonância ($n_\sigma^2 \rightarrow \infty$);
3. um modo aproxima-se de um corte ($n_\sigma^2 \rightarrow 0$).

Quando isto ocorre, a aproximação WKB não é mais válida e a propagação da onda não pode mais ser descrita de forma adequada pelas equações de traçado de raios discutidas na seção 3.4.1.

Considerando o primeiro caso, quando os números de onda de ambos os modos coalescem, a situação usualmente tratada assume que ondas estão se propagando em um determinado modo em um plasma não homogêneo. Quando as ondas se aproximam de uma região onde os parâmetros locais do plasma provocam uma coalescência nos números de onda, deseja-se saber se a energia transportada pelo primeiro modo será refletida ou refratada para fora desta região ou se será parcialmente transferida para o modo complementar. Na segunda situação ($n_\sigma^2 \rightarrow \infty$), o modo original, correspondente a uma onda eletromagnética, pode ser convertido em um modo eletrostático como as ondas de Bernstein, por exemplo, mas uma parte da energia transportada pode ser transmitida através da região efêmera (onde $n_\sigma^2 < 0$) para emergir em um outro modo com n_σ^2 finito. Este processo é denominado de *tunelamento*. Finalmente, no terceiro caso ($n_\sigma^2 \rightarrow 0$) a onda usualmente sofrerá uma *reflexão*, mas parte de sua energia pode ser convertida para outro modo através de um tunelamento, caso a relação de dispersão permita esta possibilidade.

Concomitante com os processos de reflexão e tunelamento, outros processos físicos usualmente ocorrem com as ondas consideradas. Um destes processos é a *absorção induzida*, a qual já foi discutida na seção 3.3.2. Em um plasma magnetizado, a absorção induzida é usualmente mais intensa em frequências próximas às frequências de cíclotron, onde geralmente ocorrem também as ressonâncias e podem ocorrer os cortes. Neste caso, uma parte da energia transportada pela onda é perdida de forma irreversível pela absorção. Finalmente, no caso do tunelamento ocorre a *atenuação* da onda, quando a energia que segue se propagando no modo original após a conversão de modos é menor que a energia incidente, devido ao tunelamento. Usualmente, a atenuação é quantificada através dos coeficientes de *reflexão* (R) e *transmissão* (T), também comumente empregados no processo quântico da penetração de barreira de potencial.

Uma das primeiras tentativas de investigar o comportamento de uma onda eletromagnética nas vizinhanças de um corte ou de uma ressonância foi desenvolvida por K. G. Budden, em 1955, o qual se propôs a calcular os coeficientes de reflexão e transmissão obtidos a partir das soluções da equação

$$y'' + k^2(x)y = 0 \quad (3.85a)$$

quando o número de onda $k(x)$ varia espacialmente de acordo com a relação de dispersão

$$k^2(x) = k_0^2 \left(1 + \frac{x_0}{x}\right). \quad (3.85b)$$

A equação (3.85a), em conjunto com (3.85b), é denominada *equação de Budden* [16, 56]. A sua solução pode ser escrita em termos da função de Whittaker $W_{\kappa, \mu}(z)$ [2, Cap. 13] ou em uma representação integral [58],

$$y(x) = W_{\kappa, \mu}(\zeta) = se^{is} \int_C \exp \left[-i \left(2st - \frac{1}{2}s_0 \ln \frac{t-1}{t} \right) \right] dt,$$

onde $s = k_0x$, $s_0 = k_0x_0$, $\zeta = 2is$, $\kappa = -i/2$ e $\mu = 1/2$. O contorno de integração deve ser deformado de tal forma que contorna os pontos de ramificação em $t = 0$ e $t = 1$.

A relação de dispersão (3.85b) está representada na figura 3.6 e descreve a propagação de uma onda em um meio não uniforme, o qual contém um ponto de corte em $x = -x_0$, uma ressonância em $x = 0$ e uma região evanescente ($k^2 < 0$) em $-x_0 \leq x \leq 0$. Nestes pontos, a aproximação WKB não mais é válida, uma vez que $|k^{-2}dk/dx| \rightarrow \infty$ nas vizinhanças dos mesmos. Porém, a solução de (3.85a) mostra que ocorre o tunelamento da onda através da região evanescente, independente do sentido de incidência da mesma. O coeficiente de transmissão da amplitude da onda (T), ou seja, a razão entre as amplitudes da onda nas regiões posterior e anterior à zona de evanescência, é calculado a partir de $T = e^{-\eta}$, sendo η o fator de tunelamento, dado por

$$\eta = i \int_{-x_0}^0 k(x) dx.$$

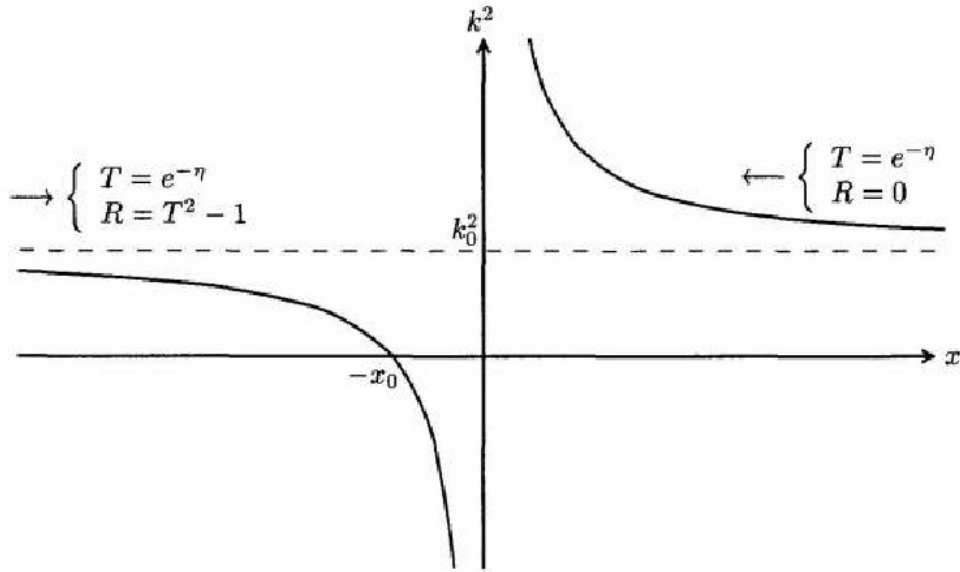


Figura 3.6: Relação de dispersão para a equação de Budden [56].

Usando (3.85b), obtém-se $\eta = \pi k_0 x_0 / 2$, independente do sentido de incidência da onda. A solução de (3.85a) também mostra que o coeficiente de reflexão (R) é nulo para ondas propagando-se a partir da direita na figura 3.6, ou seja, quando estas incidem sobre a ressonância, mas é não nulo ($R = T^2 - 1$) para ondas propagando-se a partir da esquerda, ou seja, incidindo sobre o corte. Um tratamento WKB para a propagação da onda neste último caso prevê que a mesma sofreria reflexão total no corte; por outro lado, o mesmo tratamento não prevê a ocorrência do tunelamento quando a onda incide sobre a ressonância. Portanto, os resultados oriundos da equação de Budden são sensivelmente distintos dos oriundos da aproximação WKB.

Contudo, o modelo apresentado pela equação (3.85a) é excessivamente simples e contém falhas. Em particular, a energia transportada pela onda não é conservada em nenhum sentido de propagação através da região evanescente, uma vez que $T^2 + R^2 < 1$ em ambos os casos. Isto ocorre porque a equação de Budden não descreve a conversão de parte da energia em um outro modo de propagação nem prevê a ocorrência da absorção induzida em torno da ressonância. Modelos mais sofisticados como as equações de tunelamento foram posteriormente propostos para resolver esta ambiguidade. Contudo, os mesmos não serão discutidos aqui, uma vez que não são do interesse da presente modelagem. Uma discussão abrangente e profunda sobre as teorias de conversão linear de modos pode ser obtida em Swanson (1998) [56].

3.6.2 A teoria das janelas de Ellis

A teoria das *janela de rádio*, também conhecidas como *janelas de Ellis*, foi originalmente desenvolvida para explicar as observações do fenômeno da *tripla divisão das ondas ionosféricas*,¹¹ também chamado de *traço-Z (Z trace)*, observado por estações terrestres de observação de sinais de rádio da ionosfera (denominadas *ionosondas*). Este fenômeno foi inicialmente observado na década de 1930, mas não foi sistematicamente investigado até o término da II Guerra Mundial [50].

As observações realizadas pelas ionosondas consistiam, resumidamente, em emitir ondas eletromagnéticas de alta potência na direção vertical, ou próxima da vertical. A frequência destas ondas variava na faixa $\sim 100 \text{ kHz} - 10 \text{ MHz}$. À medida que

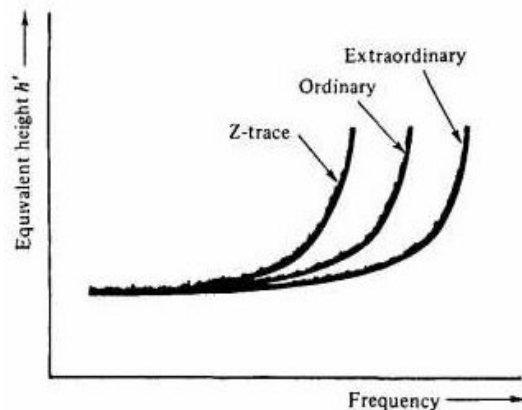


Figura 3.7: Ilustração de observação do traço-Z realizada por uma ionosonda na superfície [16].

¹¹Tripple splitting of ionospheric waves.

a onda penetra nas diferentes camadas da ionosfera, o grau de ionização do meio aumenta com a altitude e a onda se divide nos dois modos de propagação permitidos pela teoria magneto-iônica, os modos O e X , discutidos na seção 3.5. Como as frequências de corte de ambos os modos são distintos, estes sofrem reflexão em diferentes altitudes, propagam-se de volta à superfície e são observados pelas ionosondas em diferentes instantes de tempo ou posições, dependendo do ângulo de inclinação inicial da onda. Esta técnica foi bastante empregada na primeira metade do século XX para obter-se informações a respeito da estrutura da ionosfera.

A observação de um terceiro sinal distinto oriundo da ionosfera foi então atribuída ao modo Z , por ser o único outro modo magneto-iônico possível para esta faixa de frequências. Contudo, como uma onda propagando-se no modo Z está aprisionada entre o corte e a ressonância, este modo não poderia ser observado na superfície, de acordo com a aproximação da óptica geométrica. Para tentar explicar o fenômeno, G. R. Ellis [22] propôs, na década de 1950, que uma onda inicialmente propagando-se pela ionosfera no modo ordinário e que sofreria, normalmente, uma reflexão completa logo abaixo do nível onde $X = \omega_{pe}^2/\omega^2 = 1$, pode ter parte de sua energia penetrando a região evanescente, emergindo logo acima no modo Z . Esta onda transmitida, por sua vez, propaga-se até um nível mais alto, sofre uma reflexão no ponto onde $X = 1 + Y$ e retorna novamente à altitude onde $X = 1$. Neste ponto, a onda atravessa novamente a janela, emergindo no modo O e sendo então observada na superfície como o traço- Z .

A teoria das janelas de rádio foi desenvolvida por uma série de autores. As referências [13, 14, 16–18, 31, 53] consistem em apenas uma pequena porção da literatura sobre o assunto, mas oferecem uma compreensão satisfatória da teoria. O conhecimento das propriedades matemáticas das superfícies do índice de refração [55] é de fundamental importância para a compreensão do mecanismo. Em um plasma anisotrópico e inhomogêneo, tal como aquele que compõe as magnetosferas planetárias e a coroa solar, o índice de refração n_σ é uma função não somente da frequência da onda, mas também da direção da normal da frente de onda, medida pelo ângulo θ formado entre a direção local do campo magnético ambiente B_0 e o vetor de onda k . A superfície do índice de refração é definida pelo gráfico polar de n_σ em função de θ , para um valor fixo de frequência ω .

Na teoria magneto-iônica, quando a frequência de colisão é nula, o índice n_σ é dado pela relação de dispersão de Appleton-Hartree (A-H) (4.19). Para um determinado conjunto de valores de ω e f a relação (A-H) descreve n_σ^2 para $\sigma = X$ ou O . Em termos dos parâmetros magneto-iônicos, os índices de refração (4.19) resultam escritos,

$$n_X^2 = 1 - \frac{2(X-1)X}{2(X-1) + Y^2 \sin^2 \theta + \sqrt{Y^4 \sin^4 \theta + 4(X-1)^2 Y^2 \cos^2 \theta}} \quad (3.86a)$$

$$n_O^2 = 1 - X \left[1 + \frac{2(X-1)Y^2 \cos^2 \theta}{Y^2 \sin^2 \theta - 2(X-1)Y^2 \cos^2 \theta + \sqrt{Y^4 \sin^4 \theta + 4(X-1)^2 Y^2 \cos^2 \theta}} \right], \quad (3.86b)$$

sendo que n_X indica o índice de refração tanto do modo extraordinário lento (Z) quanto do rápido (X), ao passo que n_O indica o índice de refração tanto do modo ordinário (O) quanto do modo whistler (W). Como os índices de refração não dependem do ângulo azimutal, as superfícies do índice de refração são superfícies de revolução em torno da direção de B_0 , que está orientado no sentido positivo do eixo z .

A figura 3.8 apresenta seções transversais das superfícies de n_X e n_O sobre o plano $x-z$. Cada painel foi obtido mantendo-se fixo o valor do parâmetro Y e escolhendo-se diversos valores para o parâmetro X . O painel (a) mostra as superfícies quando $Y < 1$ para os valores de X ressaltados nas curvas. Nota-se que quando $X < 1$, as superfícies são abertas e assintóticas às retas $\theta = \theta_\infty$ e $\theta = \pi - \theta_\infty$, onde

$$\tan^2 \theta_\infty = \frac{(1-X)(1-Y^2)}{X+Y^2-1},$$

existindo somente para $\theta_\infty < \theta < \pi - \theta_\infty$. Deve-se lembrar que o ângulo θ é medido em relação a B_0 , ou seja, a partir do eixo z positivo, ilustrado pela linha vertical tracejada. Para $X > 1$, as superfícies são fechadas. A circunferência em vermelho destaca a superfície $n_X = 1$ e serve para mostrar a escala das superfícies. O painel (b) mostra as superfícies correspondentes para $Y > 1$. Agora, todas as superfícies fechadas e a circunferência em vermelho novamente denota o limite $n_X = 1$.

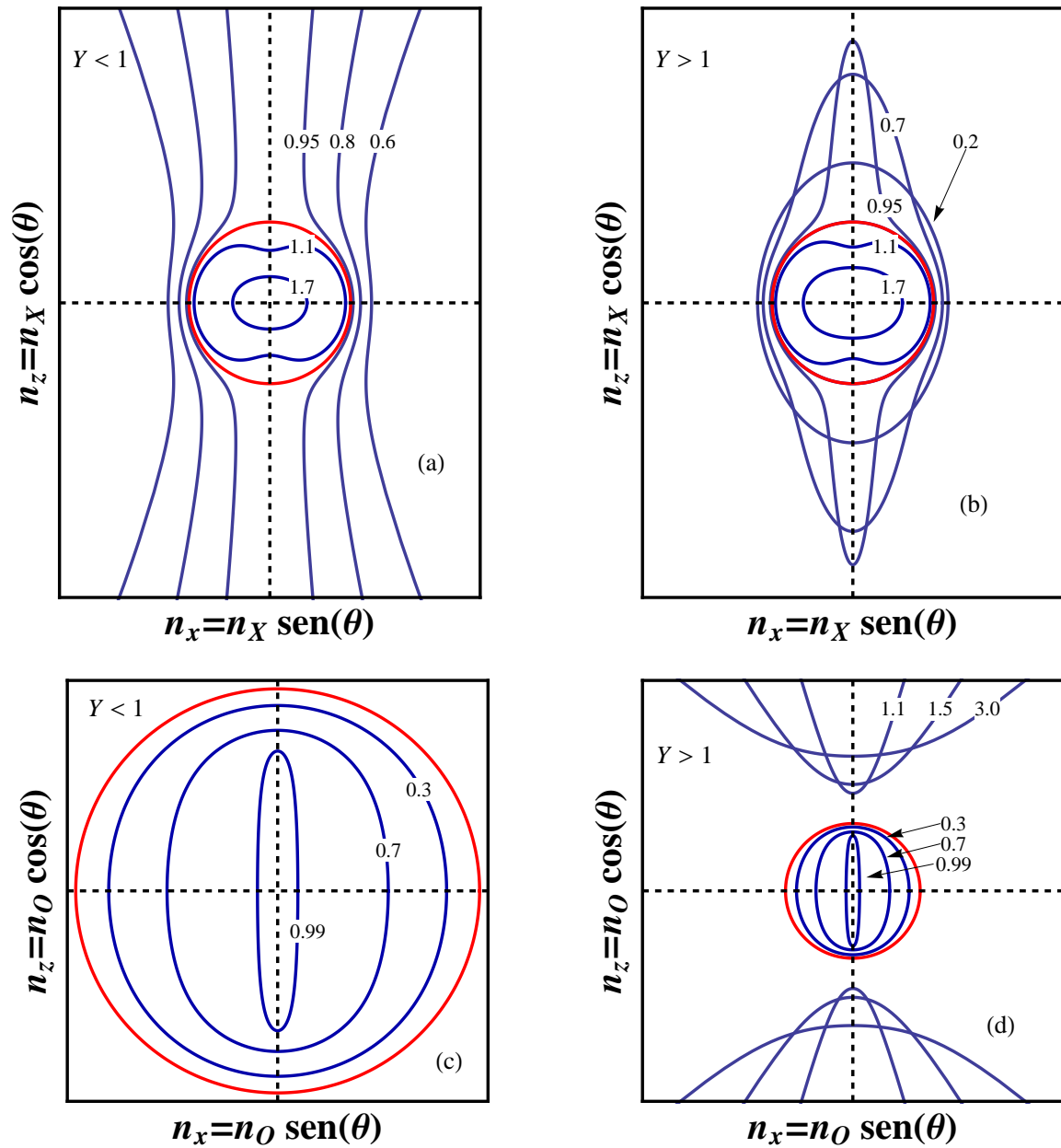


Figura 3.8: Superfícies do índice de refração para os modos extraordinário (X) e ordinário (O).

As superfícies do modo ordinário são vistas nos painéis (c) e (d). No primeiro, válido para $Y < 1$, observa-se que somente existem superfícies para $X < 1$ e todas são fechadas e inscritas pela circunferência $n_O = 1$. Já para o caso $Y > 1$ (painel d), observam-se tanto superfícies fechadas (para $X < 1$) quanto abertas (para $X > 1$). Estas últimas são novamente superfícies hiperbólicas que existem somente para $\theta < \theta_\infty$ e $\theta > \pi - \theta_\infty$. Uma discussão mais completa e aprofundada das propriedades matemáticas das superfícies do índice de refração pode ser consultada em *Stott* (1983) [55].

A propriedade mais relevante das superfícies de n_X e n_O para este trabalho pode ser percebida comparando-se os painéis (a) e (c) da figura 3.8 quando $Y < 1$ e os painéis (b) e (d) quando $Y > 1$. Observa-se que para o mesmo valor de X as superfícies de n_X e n_O não se tocam. Para $X < 1$, por exemplo, as superfícies de n_O são fechadas e inscritas na circunferência unitária, ao passo que as superfícies de n_X são abertas e todas com $n_X > 1$. Para o caso $X > 1$ também não ocorre cruzamento entre as superfícies dos dois modos. Pode-se mostrar [16] que as superfícies dos diferentes modos somente se tocam quando $X = 0$ (no vácuo) e $X = 1$. Neste último caso, isto ocorre somente no ponto $\theta = 0$. Isto pode ser verificado considerando-se inicialmente alguns casos particulares. Em primeiro lugar, observa-se diretamente de (3.86a,b) que

$$n_X^2|_{X=1} = 1 \text{ e } n_O^2|_{X=1} = 0.$$

Ou seja, a superfície do modo extraordinário transforma-se na circunferência unitária dos painéis (a) e (b) da figura 3.8 e a superfície do modo ordinário aparentemente desaparece. Contudo, uma análise igualmente válida consiste em calcular

$$n_X^2|_{\theta=0} = 1 - \frac{(X-1)X}{(X-1) + |X-1|Y} = \begin{cases} 1 - \frac{X}{1-Y}, & X < 1 \\ 1 - \frac{X}{Y+1}, & X > 1 \end{cases}$$

$$n_O^2|_{\theta=0} = 1 - X \left[1 - \frac{(X-1)Y}{(X-1)Y - |X-1|} \right] = \begin{cases} 1 - \frac{X}{Y+1}, & X < 1 \\ 1 - \frac{X}{1-Y}, & X > 1, \end{cases}$$

as quais mostram não somente outros limites para $X \rightarrow 1$ como também limites distintos para $X \rightarrow 1^-$ e $X \rightarrow 1^+$. Estas expressões mostram que as superfícies dos dois modos se tocam somente quando $X = 1$ e $\theta = 0$, pois

$$\lim_{X \rightarrow 1^+} n_X^2|_{\theta=0} = \lim_{X \rightarrow 1^-} n_O^2|_{\theta=0} \equiv n_1^2 = \frac{Y}{Y+1} (< 1) \quad (3.87a)$$

e

$$\lim_{X \rightarrow 1^-} n_X^2|_{\theta=0} = \lim_{X \rightarrow 1^+} n_O^2|_{\theta=0} \equiv n_2^2 = \frac{Y}{Y-1} (> 1). \quad (3.87b)$$

No primeiro caso, o índice de refração crítico n_1 e o contato das superfícies ocorre tanto para $Y < 1$ quanto para $Y \geq 1$. Contudo, no segundo caso (índice crítico n_2), somente ocorre o contato entre as superfícies quando $Y > 1$.

Para decidir quais são os modos magneto-iônicos que entram em contato no ponto $(X, \theta) = (1, 0)$, deve-se recordar o comportamento do modo extraordinário no limite $\theta = 0$, em cuja situação o modo é também denominado modo R (ou whistler). De acordo com a discussão realizada na seção 3.5.3, o modo extraordinário lento (modo Z) ocorre para frequências no intervalo $0 < \omega < \Omega_e$, ou seja, para

$$\frac{1}{2} \left(\sqrt{Y^2 + 4X} - Y \right) < 1 < Y.$$

Portanto, é necessário que $Y > 1$ e $Y > X - 1$. Ambas as condições são facilmente satisfeitas quando $X \approx 1$. Já o modo extraordinário rápido (modo X) ocorre para $\omega > \omega_{02}$, ou seja, $Y < 1 - X$. Portanto, para $X \approx 1$, $Y \lesssim 0$, o que leva a um absurdo. Portanto, somente a superfície correspondente ao modo Z pode ocorrer nas vizinhanças do ponto crítico $(X, \theta) = (1, 0)$.

O comportamento das superfícies nas vizinhanças do ponto crítico pode ser ainda mais esclarecido realizando-se uma expansão (3.86a,b) em torno do mesmo. As expressões resultantes são:

$$n_X^2 \approx \begin{cases} n_2^2 - \frac{Y^2 \theta^2}{2(1-Y)^2(1-X)} + \mathcal{O}(\theta^3), & X < 1 \\ n_1^2 + \frac{Y^2 \theta^2}{2(Y+1)^2(X-1)} + \mathcal{O}(\theta^3), & X > 1 \end{cases}$$

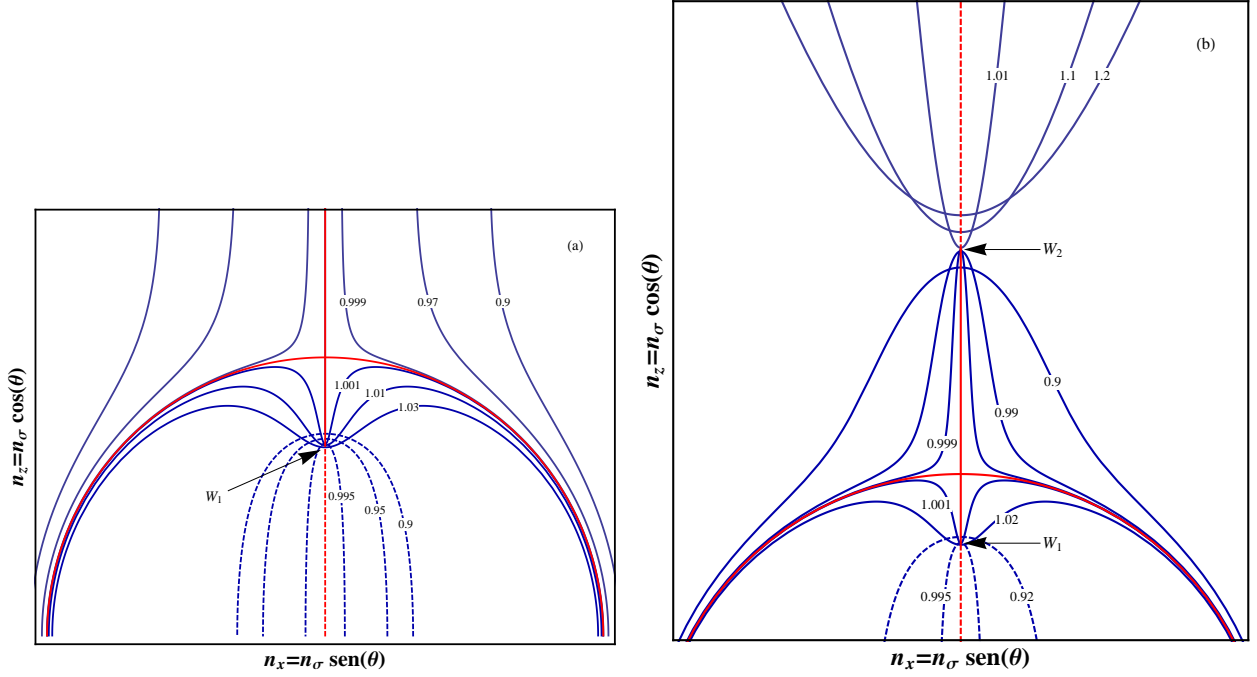


Figura 3.9: (a) Superfícies dos índices de refração dos modos extraordinário (curvas contínuas) e ordinário (curvas tracejadas) nas vizinhanças de $X = 1$ para $Y < 1$. (b) Idem para $Y > 1$. Os valores do parâmetro X estão indicados nas curvas correspondentes.

$$n_O^2 \approx \begin{cases} n_1^2 - \frac{Y^2 \theta^2}{2(1+Y)^2(1-X)} + \mathcal{O}(\theta^3), & X < 1 \\ n_2^2 + \frac{Y^2 \theta^2}{2(Y-1)^2(X-1)} + \mathcal{O}(\theta^3), & X > 1. \end{cases}$$

No caso $Y < 1$, o índice de refração crítico n_2 não existe e, portanto, somente é possível ocorrer as superfícies de n_X para $X > 1$ e de n_O para $X < 1$. Ambas as superfícies são parabolóides de revolução em torno do eixo de simetria (eixo z) e a concavidade da primeira é ascendente, enquanto que a concavidade da segunda é descendente. Este comportamento pode ser verificado no painel (a) da figura 3.9. Pode-se observar que quando $X \rightarrow 1$, as superfícies do modo extraordinário deformam-se assintoticamente na circunferência unitária ($n_X = 1$) e na linha reta vermelha contínua que parte do ponto W_1 , correspondente ao valor crítico $n_X = n_1$, e está orientada ao longo do eixo de simetria. Em torno de $\theta = \pi/2$ a mesma superfície deforma-se continuamente na circunferência unitária mais a reta ao longo do eixo de simetria que parte do ponto W'_1 , correspondente a $n_z = -n_1$. Já a superfície do modo ordinário deforma-se, no limite $X \rightarrow 1^-$, para a reta vermelha tracejada que liga os pontos $W'_1 W_1$, correspondendo ao restante do eixo de simetria. Esta figura mostra claramente que as superfícies somente se tocam no ponto crítico $(X, \theta) = (1, 0)$. Como no caso $Y < 1$ as superfícies somente podem se tocar para $\omega_{pe}/\Omega_e > 1$, esta situação não é diretamente de interesse ao presente trabalho.

No caso $Y > 1$, ilustrado no painel (b) da figura 3.9, ambos os índices críticos n_1 e n_2 existem e estes são indicados nos pontos W_1 e W_2 , respectivamente. Os pontos equidistantes W'_1 e W'_2 (em $n_z = -n_1$ e $-n_2$) também existem e estão localizados no lado oposto do eixo de simetria. Pode-se observar que as superfícies do modo extraordinário deformam-se novamente na circunferência unitária e nos segmentos de reta contínuos que unem os pontos W_1 e W_2 e os pontos W'_1 e W'_2 . Já as superfícies do modo ordinário deformam-se em três segmentos de reta tracejados. O primeiro une os pontos $W'_1 W_1$, o segundo parte do ponto W_2 e o terceiro parte do ponto W'_2 . No caso $Y > 1$ as superfícies dos diferentes modos se tocam quando $\omega_{pe}/\Omega_e < 1$, o que corresponde ao regime de parâmetros físicos de interesse para o presente trabalho.

Como os pontos W_2 e W'_2 ocorrem para $n_\sigma = n_2 > 1$, estes pontos marcam os centros das janelas de rádio que permitem a conversão entre os modos Z e W . Este caso não é de interesse para o presente trabalho, uma vez que o modo whistler também está aprisionado dentro da região-fonte. Por outro lado, os acoplamentos nos pontos W_1 e W'_1 ocorrem para $n_\sigma = n_1 < 1$. Estes pontos marcam o centro das janelas de conversão entre os modos Z e O , o qual é um modo

que pode se propagar para o espaço livre (o vácuo). Este é o processo de conversão de modos de interesse para o presente trabalho.

O surgimento da janela de rádio pode ser descrito no exemplo ilustrado na figura 3.10. Esta figura mostra os valores de $q = n_{\perp}$ em função do parâmetro X para dois raios propagando-se nos modos Z e O nas vizinhanças de uma janela de rádio. A situação ilustrada nesta figura corresponde a ondas propagando-se no plasma ionosférico, onde o campo magnético pode ser considerado localmente uniforme e a densidade eletrônica varia de maneira uniforme na direção vertical; isto é, o plasma pode ser considerado estratificado, com a densidade eletrônica formando superfícies orientadas horizontalmente. Estas são denominadas *superfícies isoionicas*. Neste caso, de acordo com a Lei de Snell, o raio propaga-se pelo plasma de tal forma que a componente de k paralela às superfícies permanece constante e somente a componente perpendicular (n_{\perp}) varia. A relação de dispersão de Appleton-Hartree pode então ser escrita como uma quártica para a variável $q = n_{\perp}$, denominada de *quártica de Booker* [13, 16]. À medida que o raio se propaga no modo Z , por exemplo, este passa por uma região onde os parâmetros físicos do plasma aproximam-se do ponto crítico $(X, \theta) = (1, 0)$, identificado pela letra M na figura. Na vizinhança do ponto M , o raio sofre uma reflexão porém parte de sua energia se propaga até o ponto L , onde este emerge como um raio no modo O . Na região entre os pontos L e M o modo O é evanescente e o campo eletromagnético da onda não pode ser descrito pela óptica geométrica, uma vez que a aproximação WKB não é válida nesta região. A intensidade da onda transmitida na conversão $Z \rightarrow O$ (ou vice-versa) diminui com o aumento dos valores da distância física entre os pontos L e M e do valor do ângulo θ no ponto M . O intervalo de valores destas grandezas onde uma fração substancial da onda é transmitida através da barreira na região L - M é denominada a **janela de rádio** ou **janela de Ellis**.

O cálculo do coeficiente de transmissão na conversão $Z \rightarrow O$ tem sido realizado por diversos métodos que empregam tanto soluções numéricas das equações de onda quanto por métodos aproximados. Uma descrição por menorizada destes métodos pode ser vista em *Budden (2009)* [16]. Utilizando uma aproximação quadrática para a quártica de *Budden* na vizinhanças do ponto crítico, *Budden (1980, 1986)* [13, 14] obteve expressões para a atenuação que ocorre na intensidade da onda ao atravessar a janela. Essas expressões são válidas sempre que o campo magnético não mudar de forma apreciável através da janela e o ângulo entre o gradiente de n_e e B_0 for maior que 10° . As expressões obtidas por *Budden (1980, 1986)* foram derivadas assumindo um plasma estratificado, semelhante ao que se observa na ionosfera terrestre. Posteriormente, *Herring (1980)* [31] mostrou como essa técnica pode ser aplicada na magnetosfera terrestre ou em outros ambientes onde o plasma não é estratificado, desde que as condições mencionadas acima sejam satisfeitas.

Soluções numéricas da equação da onda foram obtidas por *Smith (1973)* [53]. A figura 3.11 mostra o coeficiente de transmissão da intensidade (I_T) de uma onda propagando-se no modo ordinário através da ionosfera terrestre quando esta atinge a borda de uma janela de rádio, ou seja, quando $n_O = n_1$. O ângulo θ_c corresponde à orientação relativa entre B_0 e o gradiente de n_e na borda da janela. Para o resultado visto na figura 3.11 foi considerado um gradiente

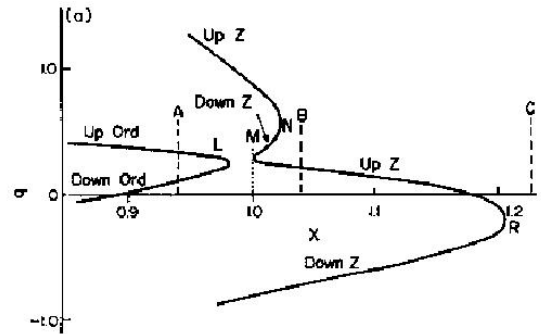


Figura 3.10: Trajetórias típicas para raios propagando-se nos modos Z e O em um plasma estratificado. Os eixos correspondem ao parâmetro $q = n_{\perp}$ e X . Os pontos L e M indicam os limites da janela de rádio entre os modos (figura 2(a) de *Budden, 1980* [13]).

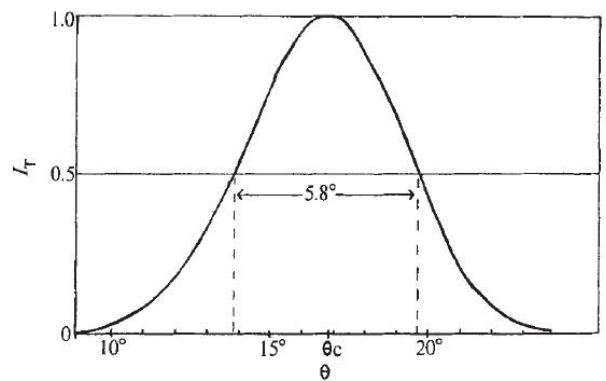


Figura 3.11: Coeficiente de transmissão (I_T) da intensidade da onda ao cruzar a janela de rádio em função do ângulo θ [53].

de densidade $dX/dz = 0,2 \text{ km}^{-1}$. Os resultados numéricos mostram que praticamente 100% da intensidade da onda no modo O pode se converter no modo Z se a primeira atinge o ponto crítico e que a intensidade transmitida diminui para 50% quando a onda incide sobre a janela com um ângulo $\theta \gtrsim 6^\circ$ em relação ao eixo de simetria.

Os resultados numéricos obtidos por *Smith (1973)* e ilustrados na figura 3.11 concordam quantitativamente com os resultados aproximados obtidos por *Buddent (1980, 1986)*, os quais mostram também que a intensidade de transmissão obtida no processo $O \rightarrow Z$ é idêntica ao valor de I_T obtido na processo $Z \rightarrow O$ inverso. As conclusões obtidas a partir da análise da figura 3.11 serão empregadas posteriormente neste trabalho para a determinação de um critério capaz de indicar quando o raio que está se propagando no modo Z incide sobre uma região próxima a uma janela de rádio onde no mínimo 50% de sua energia é transmitida para um raio propagando-se no modo O .

CAPÍTULO 4

MODELO TEÓRICO

4.1 Introdução

Neste capítulo serão discutidos brevemente alguns modelos teóricos para a Emissão Solar do Tipo V que foram propostos na literatura desde a década de 1960, bem como o modelo proposto nesta dissertação. Conforme será comentado, em um dos trabalhos apresentados [59], o mecanismo do maser de elétron-ciclotron, adotado no presente trabalho, já é proposto como responsável pela citada radiação. Contudo, desenvolvimentos mais detalhados a respeito do mesmo, incluindo efeitos de propagação e amplificação não local das ondas excitadas pelo maser, faziam-se necessários. Estes novos desenvolvimentos serão discutidos neste capítulo. Ainda um outro modelo [47], que postula a interação entre ondas de raios-X com Emissões de Ondas de Rádio dos Tipo III e V, é apresentando a fim de mostrar que o princípio da formação de uma cavidade de densidade eletrônica na região-fonte norteia a idéia para a geração da emissão do Tipo V. Ao final deste capítulo serão apresentados alguns resultados, obtidos a partir do modelo proposto, para basear e afirmar a proposta deste trabalho. Nestes resultados é visto que, dentro do modelo empregado, existe a possibilidade da geração da Emissão Solar do Tipo V detectada por satélites e espaçonaves de monitoramento das emissões solares.

4.2 Modelos Teóricos Anteriores

Ainda hoje não há um modelo teórico que seja aceito como mecanismo de emissão para radiação solar do Tipo V. Como já mencionado no capítulo 2, este trabalho propõe como mecanismo gerador o maser de elétron-ciclotron, discutido em detalhes no capítulo 3. Alguns trabalhos teóricos a respeito desta emissão solar foram propostos na literatura.

Destes, pode-se citar novamente o artigo de *Winglee & Dulk (1986)* [59]. Neste trabalho já é proposto o mecanismo do maser como fonte das emissões solares do Tipo V. Como ondas solares do Tipo V consistem de uma radiação seguida das emissões do tipo III, algumas correlações entre elas são importantes. Como já citado na seção 2.2.5, algumas diferenças entre ondas do Tipo V e do Tipo III estão em suas polarizações, largura de banda e temperatura de brilho. Um dos mecanismos mais aceitos na literatura para a emissão do Tipo III assume que esta é devida à coalescência de ondas de Langmuir que são excitadas por uma instabilidade de feixe que surge na região $\partial f/\partial v_z > 0$ da distribuição dos elétrons que se propagam pelas linhas de campo [4]. Isto mostra que, devido aos gradientes no campo magnético, um gradiente positivo ($\partial f/\partial v_z > 0$) também pode se desenvolver devido à propagação de elétrons nas linhas de campo. Este gradiente pode conduzir uma instabilidade nas ondas híbridas superiores via instabilidade no maser de elétron ciclotron.

Winglee & Dulk (1986) [59] sugerem que ondas do tipo V resultam da coalescência destas ondas híbridas superiores. A possibilidade do maser de elétron-ciclotron como fonte desta emissão não havia sido investigada em trabalhos anteriores, pois acreditava-se que um gradiente positivo ($\partial f/\partial v_z > 0$) não poderia ser desenvolvido na distribuição de elétrons deslocando-se ao longo das linhas de campo magnético. Contudo, os autores mostraram que esta suposição é incorreta, pois quando os elétrons se deslocam através de um campo de magnitude decrescente, gradientes positivos podem de fato se desenvolver. Com isso, o mecanismo do maser tomou forma como possível gerador da emissão do Tipo V. Foi mostrado que o maser é capaz de produzir intensas

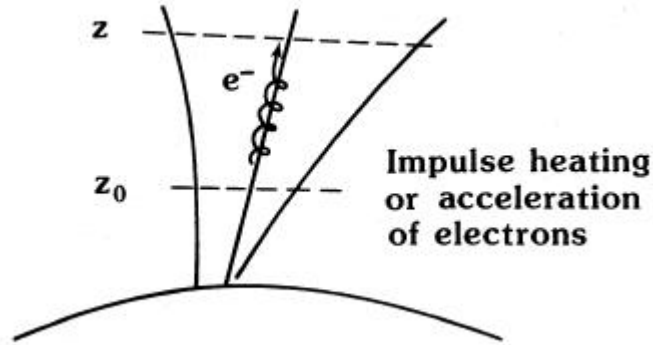


Figura 4.1: Tubo de fluxo magnético proposto por *Winglee & Dulk (1986)* [59].

ondas de Langmuir oblíquas (ou mais exatamente ondas híbridas superiores) com temperaturas de brilho que podem chegar, em certas ocasiões, às temperaturas produzidas por instabilidades de feixe fraco¹ [59].

Em relação à diferença de duração entre emissões do tipo III e tipo V, *Winglee & Dulk (1986)* [59] associaram a mesma ao amortecimento da turbulência de Langmuir como um efeito devido ao amortecimento colisional adicional em ondas do tipo III, o que não ocorre com o mecanismo do maser, pois neste não há este termo adicional de amortecimento. Foi examinada a propagação de elétrons movimentando-se sobre linhas de campo. Como resultado, os autores encontraram que tanto o mecanismo do maser como do colisão na cauda são possíveis causas para as instabilidades na distribuição.

Como exemplo, foi considerada a evolução da distribuição de elétrons energéticos, com algumas velocidades iniciais aleatórias, injetados em um tubo de fluxo no ponto z_0 , como mostra esquematicamente a figura 4.1. Estes elétrons energéticos poderiam ser produzidos de várias maneiras: aceleração local (ou aquecimento) devido a choques, reconexão magnética ou absorção de radiação pelo maser produzida em outro ponto na baixa coroa.

Para um caso não relativístico, o campo magnético é uniforme e tem velocidade axial dos elétrons constante, negligenciando interações de partículas e ondas. Como consequência, elétrons atingindo uma altitude z no instante t , depois da injeção, terão todos a mesma velocidade axial

$$v_z = (z - z_0) / t. \quad (4.1)$$

Elétrons com velocidades axiais maiores chegarão a z em tempos menores, enquanto que elétrons mais lentos terão ainda que passar por z . A distribuição resultante possui uma região com gradiente $\partial f / \partial v_z$ positivo, o que pode induzir a uma instabilidade de feixe fraco na cauda, sem apresentar um cone de perda ($\partial f / \partial v_\perp > 0$), que induz à forma da instabilidade de maser de elétron-cíclotron responsável, por exemplo, pela geração da radiação quilométrica auroral [25, 26].

O campo magnético da coroa solar é divergente e decresce em magnitude com a altura. Como os elétrons movem-se subindo as linhas de campo, a velocidade axial aumenta em relação à velocidade perpendicular, pela conservação dos invariantes adiabáticos

$$E = \frac{1}{2} m_e (v_z^2 + v_\perp^2) \quad \text{e} \quad \mu = \frac{m_e v_\perp^2}{2B_0(z)},$$

sendo $B_0(z)$ a magnitude do campo magnético ambiente na altitude z . Consequentemente, elétrons com velocidades axiais menores que os dados pela equação (4.1) podem chegar a z no instante t se tiverem uma velocidade perpendicular suficientemente grande. Quando esses elétrons que chegam a z têm velocidades axiais maiores, estes possuem um pequeno ângulo de passo, como ilustrado na figura 4.2. A distribuição resultante apresenta agora um gradiente positivo em relação a ambas as componentes v_z e v_\perp da velocidade, o que leva às duas instabilidades, colisão na cauda e o maser de elétron-cíclotron, respectivamente.

¹Bump-in-tail instabilities.

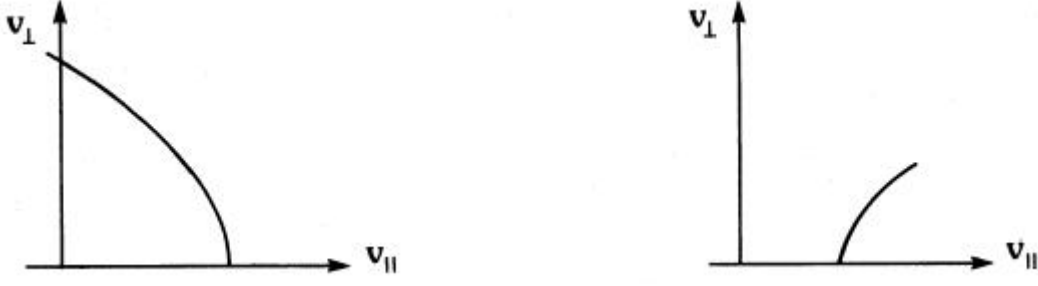


Figura 4.2: (Esquerda) velocidades dos elétrons em (z_0, t_0) . (Direita) velocidades em (z, t) .

Como a injeção de elétrons energéticos no tubo de fluxo tende a ocorrer em um intervalo finito de tempo, o desenvolvimento acima descrito de um gradiente positivo na distribuição ainda pode ocorrer. Contudo, se o espalhamento na velocidade dos elétrons que chegam a um ponto particular é grande, o valor do gradiente é relativamente pequeno, o que acaba por restringir as instabilidades.

Geralmente, o campo magnético solar, em função da altitude acima do ponto z_0 , é representado por

$$B_z = B_{z_0} \left(\frac{z}{z_0} \right)^{-2}, \quad (4.2)$$

sendo z_0 a altura inicial onde os elétrons são injetados no tubo. Evidências experimentais mostram que o campo magnético solar, em alturas entre 1,02 e 10 raios solares diminui em magnitude. Os elétrons energéticos são assumidos apresentando uma distribuição térmica em $z = z_0$, descrita por uma distribuição Maxwelliana na forma

$$f(v) = \left[(2\pi)^{1/2} v_{TE} \right]^{-3} \exp(-v^2/2v_{TE}^2), \quad (4.3)$$

onde $v_{TE}^2 = 2T_e/m_e$ é a velocidade térmica dos elétrons energéticos, sendo que a temperatura T_e é medida em unidades de energia. A densidade de elétrons em $z = z_0$ é assumida como sendo

$$n_E = n_{E_0} \frac{2}{j!} \left(\frac{t}{t_\Delta} \right)^{2j+1} \exp\left(-\frac{t^2}{t_\Delta^2}\right). \quad (4.4)$$

Por fim, a densidade no espaço fase de elétrons em z e tempo t é dada por

$$\eta(z, v, t) = n_E(t_0) f(v_0), \quad (4.5)$$

onde o subscrito zero denota os valores iniciais de quantidade e tempo destes elétrons injetados.

Como exemplo dos resultados obtidos por *Winglee & Dulk (1986)* [59], a figura 4.3 mostra a evolução temporal com $z = 1,5z_0$ e para $t_\Delta = 0,25t_d$. Vemos que a distribuição eletrônica primeiro se desenvolve em um gradiente positivo $\partial f/\partial v_z$ (fig. 4.3a). Como a evolução temporal envolve velocidades em que o pico tende a valores mais baixos e que a velocidade tende a ordem de grandeza de v_{TE} , resulta um gradiente $\partial f/\partial v_\perp$ positivo (fig. 4.3c).

Em resumo, *Winglee & Dulk (1986)* [59] mostraram que efeitos de propagação podem gerar gradientes positivos da distribuição eletrônica tanto na direção v_z quanto em v_\perp . O valor do gradiente positivo em v_\perp é limitado a instantes $t_\Delta \lesssim t_d$. Já na direção v_z esta restrição não ocorre. Assim, corrobora-se a hipótese que o maser de elétron-cíclotron pode funcionar como mecanismo gerador da radiação solar citada.

Este trabalho foi uma das referências para desenvolver o trabalho apresentado nesta dissertação. Embora de forma superficial é levantada uma hipótese bem fundamentada para encontrar o mecanismo fonte das emissões do Tipo V.

Em um trabalho mais recente, *Raoult et al. (1990)* [47] traçaram algumas considerações importantes a respeito de emissões do tipo V e seu mecanismo fonte. Neste trabalho é apresentado um modelo para interpretação da correlação entre emissões solares do Tipo III e V e emissões

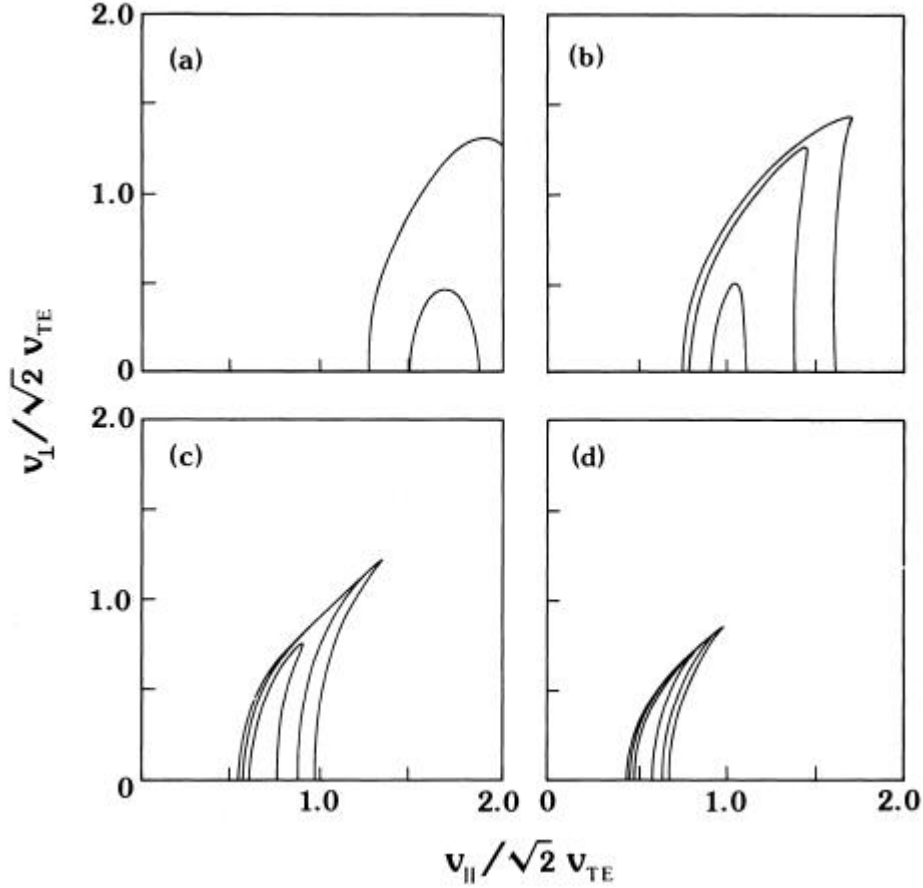


Figura 4.3: Evolução temporal da distribuição eletrônica para $z = 1,5z_0$ com $t_\Delta = 0,25t_d$ e t/t_d igual a (a) 1, (b) 1,5, (c) 2 e (d) 2,5. Os consecutivos contornos diferem por um fator 10. A distribuição desenvolve inicialmente um gradiente $\partial f/\partial v_z$ positivo [painéis (a) e (b)]. Eventualmente, surge também $\partial f/\partial v_\perp > 0$ [painéis (c) e (d)] [59].

de raio-X. Em sua discussão, os autores levantam a questão que um plasma quente de 30 keV, que é continuamente injetado, não irá formar um gradiente positivo quando se expande livremente ao longo de linhas de campo aberto, até atingir altitudes muito elevadas na coroa, inviabilizando desta forma o mecanismo de emissão proposto por *Winglee & Dulk (1986)*. *Raoult et al. (1990)* [47] sugerem, ao invés disso, que um feixe de elétrons energéticos, que gera emissões do tipo III e raios-X, excita intensamente e não linearmente ondas em plasma, gerando desta forma flutuações na densidade de íons. Essas flutuações na densidade de íons aumentam a frequência de colisões de partículas de baixa energia e força a criação subsequente de um gradiente positivo na distribuição eletrônica. Isto permite que um plasma quente excite ondas de plasma de mesma frequência que as ondas do tipo III e que, em seguida, gere emissões do tipo V.

É proposto que uma relação espaço-temporal entre raios-X e as emissões de rádio podem ser explicadas a partir da interação de dois tipos de estruturas magnéticas, conforme é ilustrado na figura 4.4. A injeção/energização é devida à interação entre dois laços ou entre um laço e um tubo de fluxo aberto. A função de distribuição da interação entre os elétrons é dada por

$$f_0(z, v, t, \alpha) = \sum_{j=1}^n \frac{N_f}{\pi\alpha_0^2} \left(\frac{I}{\sqrt{\pi}v_f} \right)^3 \exp \left[- \left(\frac{t-t_j}{\tau_f} \right)^2 - \left(\frac{v}{v_f} \right)^2 - \left(\frac{z}{L} \right)^2 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^2 \right] + \frac{N_s}{\pi\alpha_0^2} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}v_s} \right)^3 \exp \left[- \left(\frac{t-t_c}{\tau_s} \right)^2 - \left(\frac{v}{v_s} \right)^2 - \left(\frac{z}{L} \right)^2 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^2 \right], \quad (4.6)$$

onde z , v , t e α denotam altitude, velocidade, tempo e ângulo de passo, respectivamente. Os subscritos f e s referem-se à injeção principal para rajadas do tipo III e V, respectivamente. Por sua vez, N_f e N_s são os respectivos números de elétrons acelerados na fonte por unidade de

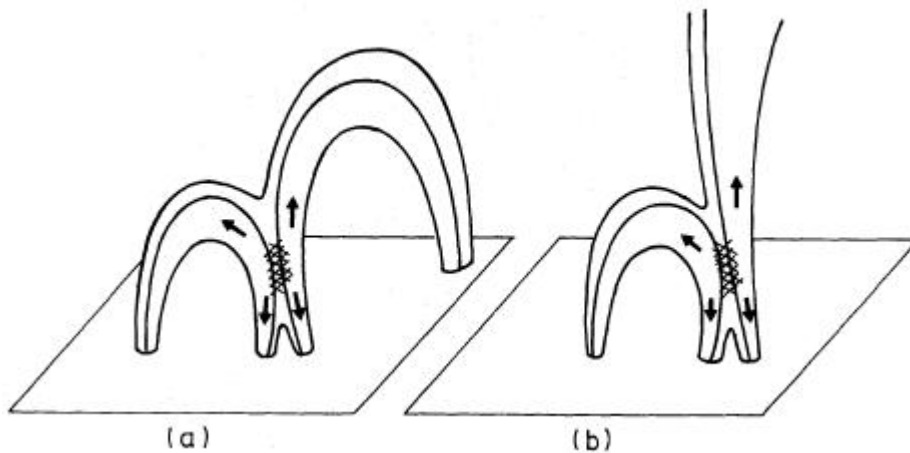


Figura 4.4: (a) A fonte de energização é localizada na baixa coroa entre dois arcos. Elétrons são injetados no arco e movem-se ao longo das linhas de campo. A interação dos elétrons no arco maior gera emissões do tipo III e V e os elétrons no arco menor geram raios-X. (b) Nesta situação, o arco maior é um tubo de fluxo aberto.

tempo e altura; τ_f e τ_s são tempos característicos de injeção; v_f e v_s são velocidades características dos feixes injetados; n é o número de pulsos; L é a espessura característica da fonte aceleradora e, finalmente, α_0 denota o ângulo de injeção.

Empregando a função de distribuição (4.6), foi primeiramente estudada a evolução do plasma injetado dentro de um campo magnético homogêneo. Os autores concluíram que com uma rápida injeção forma-se um gradiente positivo com o número necessário de elétrons em uma distância menor que 25000 km acima da região de injeção (figura (4.5)) e que com uma longa injeção este gradiente forma-se com uma altura $z = 10^5$ km ou superior.

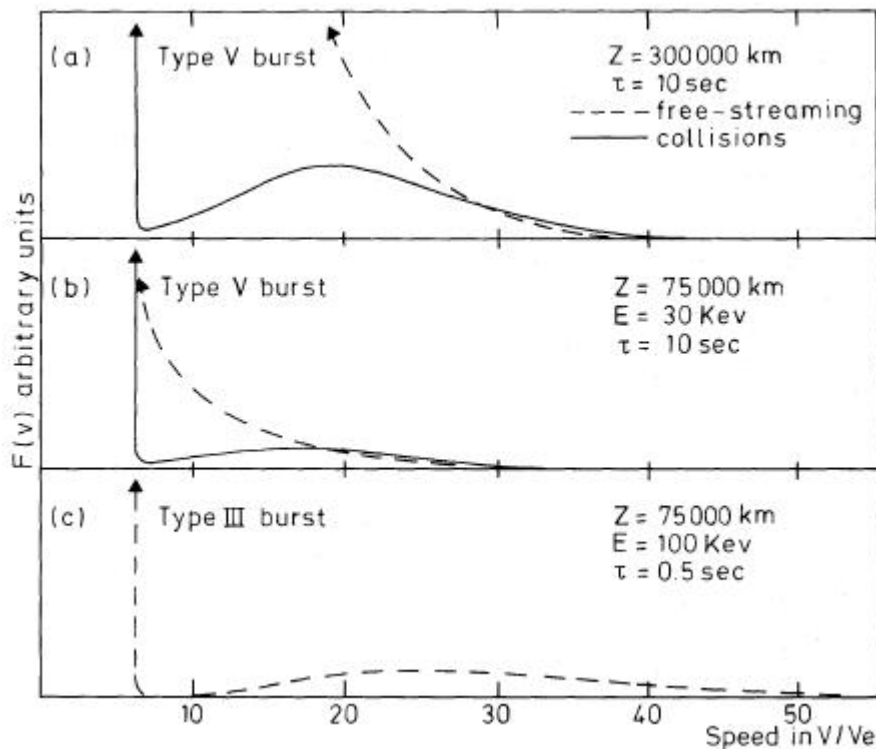


Figura 4.5: Distribuição de velocidades com relação de passagem livre do feixe e colisões para emissões do Tipo V e III.

Por outro lado, os autores observaram que uma injeção mais duradoura somente cria um gradiente positivo durante a fase inicial da injeção, uma vez que a troca de partículas de baixa energia por partículas de velocidade alta é compensada por uma contínua entrada de partículas de baixa energia. Neste caso, por haver uma relaxação quase linear em uma curta distância, não é gerada qualquer emissão do tipo V. Assim, novamente uma proposta de formação de um tubo de fluxo é levantada, mas agora é proposto que a interação entre ondas de raio-X através dos elétrons injetados com os elétrons do plasma interajam de forma a gerar uma emissão específica do Tipo III seguida por um emissão do Tipo V.

Outros estudos a respeito do mecanismo fonte das emissões do Tipo V já foram mencionados no capítulo 2 [21, 49, 66], mas estes não foram conclusivos a respeito da fonte desta emissão. Na próxima seção será apresentada uma proposta de um mecanismo não local gerador da emissão solar do tipo V, baseada em muitos dos trabalhos acima citados e também no trabalho de *Yoon et al. (2002)* [63] para emissões do Tipo III.

4.3 Modelo não local para Emissões Solares do Tipo V

No ano de 2002, C. S. Wu e colaboradores apresentaram trabalhos propondo um mecanismo gerador responsável pela emissão solar do Tipo III, alternativo aos modelos até então propostos, baseados em processos indiretos que envolvem emissão de plasma e a ação de interações onda-partícula e onda-onda não lineares [61, 63]. Este modelo considera a emissão direta pelo mecanismo do maser de elétron-cíclotron. Baseado neste modelo de fonte para radiação solar do tipo III, foi desenvolvida, na presente dissertação, a proposta para uma possível fonte da emissão solar do Tipo V.

No presente modelo, emprega-se o mecanismo do maser para amplificar ondas no modo extraordinário lento (modo Z) no interior de uma cavidade ao longo de um tubo de fluxo situado sobre uma região ativa na fotosfera solar. Como ondas no modo Z são aprisionadas dentro da mencionada cavidade, realiza-se o traçado de raios da radiação gerada neste modo de propagação (ver seção 3.4.1) a partir de um ponto situado no interior da cavidade, calculando-se simultaneamente a amplificação das ondas ao longo da propagação do raio por intermédio de uma equação de transferência radiativa (ver seção 3.4.2). A cada ponto ao longo do raio, realiza-se o teste de proximidade de uma janela de rádio ou janela de Ellis (ver seção 3.6.2). Quando este teste é satisfeito, uma parcela da radiação transportada no modo Z converte-se linearmente para o modo ordinário (modo O), o qual é livre para se propagar ao meio interplanetário, sendo então detectada e identificada como a emissão do tipo V por satélites ou espaçonaves. As hipóteses básicas neste modelo são:

- A ocorrência de um flare sobre a região ativa, o qual gera um feixe de elétrons energéticos, cuja distribuição de partículas apresenta uma região de inversão de população ($\partial f_e / \partial v_z > 0$), com energia livre suficiente para excitar ondas no modo Z .
- A existência de uma cavidade de baixa densidade eletrônica ao longo de um tubo de fluxo situado na baixa coroa solar, onde as condições para operação do mecanismo do maser são favoráveis. A ocorrência de cavidades na coroa solar foi empregada como hipótese nos trabalhos de *Wu et al. (2002)* [61] e *Yoon et al. (2002)* [63], baseada em observações realizadas na faixa dos raios-X moles que indicam a existência de estruturas fibrosas (de densidade mais alta ou mais baixa) na coroa, acima de regiões ativas.
- Em um meio inhomogêneo, ondas saturadas podem ocorrer como resultado de combinação de processos não lineares e convectivos. Para simplificar a formulação do modelo, efeitos não lineares serão desprezados neste trabalho. Contudo, a inhomogeneidade do plasma contido no tubo de fluxo sobre uma região ativa será considerada.

Quando uma onda eletromagnética se propaga em um meio de densidade e campo magnético inhomogêneos, a condição de ressonância onda-partícula local muda espontaneamente de ponto a ponto. Este efeito leva a uma saturação na amplitude do raio, uma vez que a evolução temporal das velocidades de fase e grupo do mesmo, à medida que este se desloca através de um meio não uniforme, acaba por removê-lo da região ressonante. Considerações dos efeitos de conversão de modo, feitas anteriormente, são aqui o efeito fundamental para que o mecanismo proposto seja coerente. Como tratamos com ondas geradas no modo Z (extraordinário lento), faz-se necessário que no processo ocorra conversão para algum modo que possa se propagar no

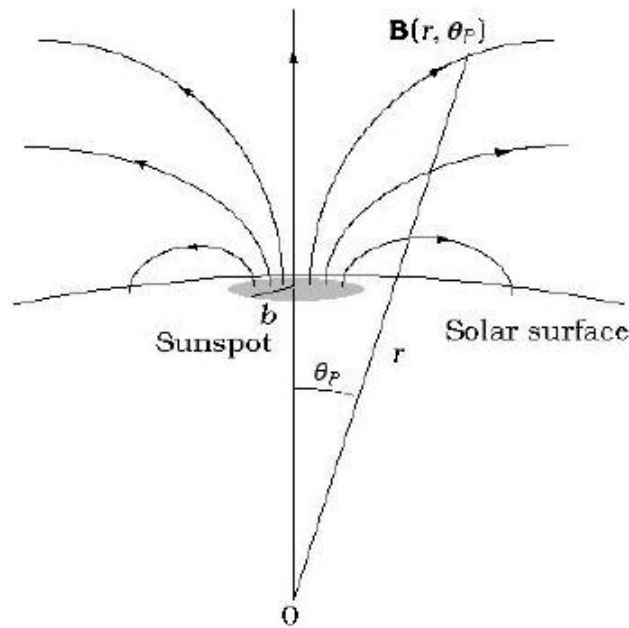


Figura 4.6: Geometria do campo unipolar sobre uma mancha solar [63].

meio interplanetário. Neste trabalho, será considerada a conversão do do modo Z para o modo O (ordinário), através do método das janelas de Ellis. Todavia, de nada adianta haver conversão de modo se estas ondas forem absorvidas pelo plasma da cavidade solar. Logo, é necessário também que seja acompanhada a taxa de amplificação, ponto a ponto, desde a geração da onda até a conversão do modo. Sendo esta taxa positiva e havendo conversão, o mecanismo se faz plausível. Estes valores são computados e serão apresentados posteriormente.

4.3.1 Modelo de parâmetros físicos

4.3.1.1 Campo magnético

O modelo de geometria do campo magnético na região da cavidade, adotado neste trabalho, é uma simplificação de um modelo real da geometria magnética sobre uma mancha solar. O modelo, proposto originalmente por *Zheleznyakov (1970)* [65] e adaptado por *Yoon et al. (2002)* [63], é apresentado na figura 4.6. A expressão para descrever a intensidade do campo de indução magnética é:

$$B_r = B_0 \left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + b^2}} \right), \quad h = r - R_\odot \quad (4.7)$$

onde B_0 , dado em Gauss, é a intensidade do campo magnético na base de uma mancha solar de raio b , e r é a distância do centro do Sol (r e b são dados em km), sendo que $r = 0$ é o centro do Sol e $r = R_\odot = 7 \times 10^5$ km é o raio solar. Observando a figura pode-se notar que θ_p representa o ângulo polar definido em relação a uma linha base de campo magnético no centro da mancha solar. É suposto que o campo apresenta simetria azimutal ($B_\varphi = \partial B_0 / \partial \varphi = 0$). A dependência polar deste “polo” magnético pode ser feita com o uso da lei de Gauss, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, isto é,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B_r) + \frac{1}{r \sin \theta_p} \frac{\partial}{\partial \theta_p} (B_{\theta_p} \sin \theta_p) = 0. \quad (4.8)$$

Como a componente angular do campo magnético (B_{θ_p}) é assumida nula para $\theta_p = 0$, esta deve ser uma função ímpar de θ_p . Por outro lado, a componente radial do campo magnético (B_r) é suposta tendo seu valor máximo para $\theta_p = 0$. Com estas informações é razoável assumir que

$$B_r(r, \theta_p) \approx \bar{B}_r(r) \cos \theta_p, \quad B_{\theta_p}(r, \theta_p) \approx \bar{B}_{\theta_p}(r) \sin \theta_p. \quad (4.9)$$

Inserindo então as expressões (4.9) na equação (4.8), a configuração magnética nas vizinhanças da mancha solar será dada por

$$\mathbf{B}(r, \theta_p) = B_r(r, \theta_p) \hat{r} + B_{\theta_p}(r, \theta_p) \hat{\theta}_p, \quad (4.10a)$$

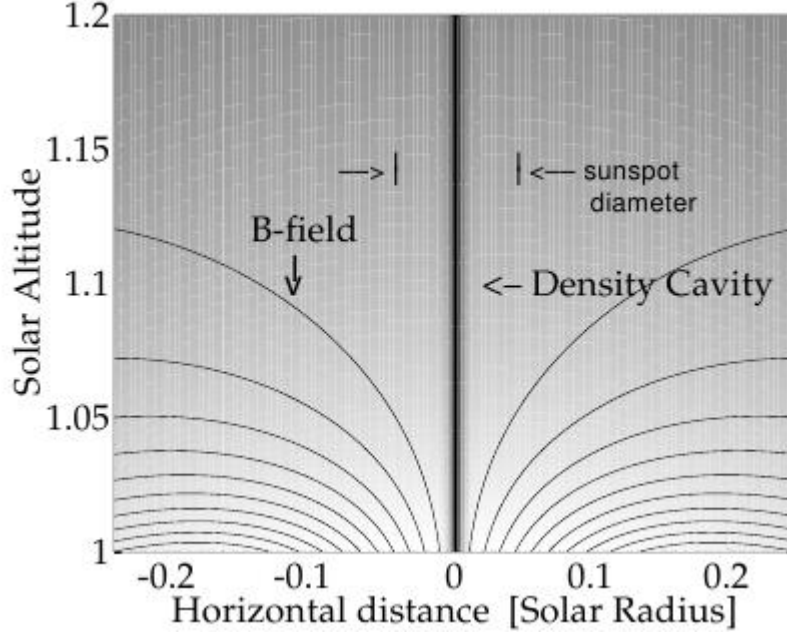


Figura 4.7: Geometria do Campo Magnético sobreposta a uma representação da densidade eletrônica em tons de cinza. A coluna escura denota a cavidade em densidade eletrônica, a qual parte do centro da mancha [63].

$$B_r(r, \theta_p) = B_0 \cos \theta_p \left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + b^2}} \right) \quad (4.10b)$$

$$B_{\theta_p}(r, \theta_p) = B_0 \sin \theta_p \left[\frac{rb^2/2}{(h^2 + b^2)^{3/2}} - 1 + \frac{h}{\sqrt{h^2 + b^2}} \right], \quad (4.10c)$$

sendo \hat{r} e $\hat{\theta}_p$ os vetores unitários nas direções radial e polar, respectivamente. Para critérios de cálculo, adotou-se para a magnitude do campo na base da mancha $B_0 = 10^3$ G e para o raio da mancha $b = 3,20 \times 10^4$ km.

Adotou-se a frequência de ciclotron local igual a

$$f_{ce}(r, \theta_p) = 2,80 B(r, \theta_p) \text{ MHz}, \quad (4.11)$$

onde $B(r, \theta_p) = [B_r^2(r, \theta_p) + B_{\theta_p}^2(r, \theta_p)]^{1/2}$ é o valor local do campo magnético. A figura 4.7 mostra novamente o modelo das linhas de campo magnético computado por (4.10a-c) e, ao fundo, uma escala em tons de cinza da densidade de elétrons com o perfil da cavidade de baixa densidade, onde o sombreado escuro significa a menor densidade.

4.3.1.2 Densidade eletrônica

Tendo em vista que no presente cenário as emissões de rádio ocorrem dentro da cavidade de densidade, preocupa-se com a situação em que os feixes de elétrons energéticos são gerados perto da base da mancha solar, sendo então acelerados ao longo das linhas de campo magnético para fora da mancha. O processo de energização e aceleração do feixe de elétrons é assumido como sendo o mesmo responsável pelo surgimento de um flare solar. Assume-se que a região-fonte da radiação coincide com a cavidade, que tipicamente tem um raio muito menor que o da mancha solar. O(s) feixe(s) de elétrons energéticos deslocam-se através de um plasma de fundo quiescente. Aqui, é proposto que a densidade eletrônica média de fundo na baixa coroa pode ser descrita de acordo com o modelo proposto por *Newkirk (1967)* [43],

$$n_e^o(r) = 10^9 (r/R_\odot)^{-6}, \quad (4.12)$$

onde o sobrescrito *o* designa a densidade “fora” da cavidade. A partir da densidade média n_e^o , deseja-se descrever a densidade eletrônica no centro da cavidade ($n_e^i(r)$) de tal forma que o modelo de redução de densidade desapareça gradualmente em direção às “paredes” da cavidade

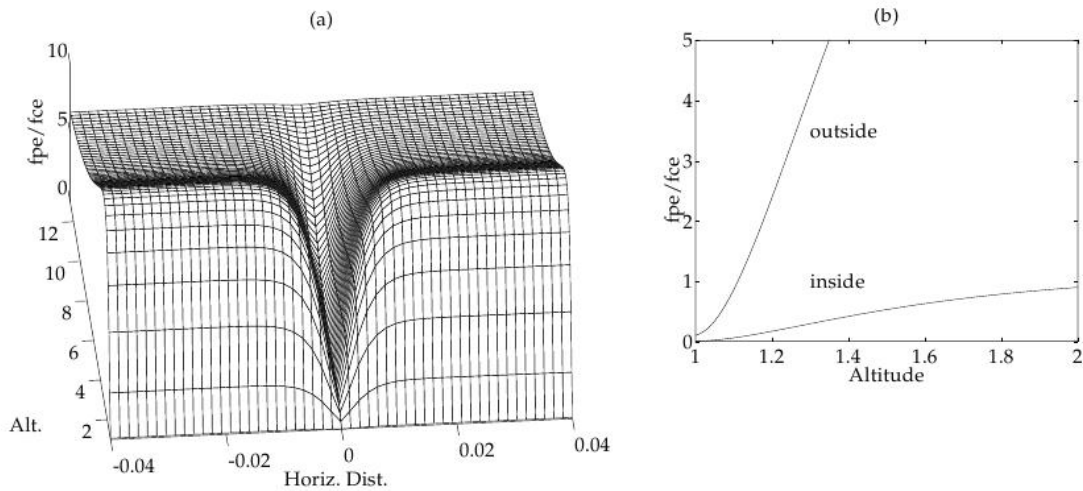


Figura 4.8: (a) Razão entre as frequências eletrônicas de plasma e cíclotron, em função da distância do centro da cavidade e altitude. (b) A mesma razão no centro (inside) e no exterior (outside) da cavidade [63].

e também à medida que a altitude do tubo de fluxo aumenta. O interior da cavidade é portanto modelado por

$$n_e^i(r) = \frac{n_e^o(r)}{10^2 g(r) + 1}, \quad g(r) = 1 - \tanh \frac{r - 5R_\odot}{2R_\odot}, \quad (4.13)$$

onde o sobrescrito i significa interior. Portanto, a forma tridimensional para a densidade eletrônica neste modelo é dada pela seguinte expressão:

$$n_e(r, \theta_p) = n_e^o(r) + \frac{n_e^o(r) - n_e^i(r)}{2 \tanh(\alpha/\delta)} \left(\tanh \frac{x - \alpha}{\delta} - \tanh \frac{x + \alpha}{\delta} \right), \quad x = r \sin \theta_p, \quad (4.14)$$

onde α representa a largura do duto e δ é um parâmetro que denota a suavidade do gradiente de densidade da parede do duto ou cavidade.

A frequência local de plasma é dada por

$$f_{pe}(r, \theta_p) = 8,98 \times 10^{-3} n_e^{1/2}(r, \theta_p) \text{ MHz}. \quad (4.15)$$

Na figura 4.8 (a) pode-se observar a razão entre a frequência de plasma e a frequência de cíclotron em função da altitude solar e da distância do centro da cavidade. No painel (b), observa-se como fica essa razão dentro (ou seja, no centro) e fora da cavidade. A condição $f_{pe}/f_{ce} < 1$, satisfeita por este modelo, é favorável ao mecanismo do maser de elétron-cíclotron para a excitação dos modos ordinário e extraordinário em frequências próximas à frequência de cíclotron eletrônica, desde que exista uma fonte de energia livre para a excitação das ondas [60, 61, 63]. A energia livre necessária é fornecida pelos elétrons do feixe, discutidos a seguir.

4.3.1.3 Distribuições eletrônicas

Agora que já foi discutida a estrutura geométrica do campo magnético na região da cavidade bem como sua relação de densidade, deve-se dar ênfase à estrutura do feixe de elétrons que irá ser peça fundamental e essencial para a emissão e corroboração do maser de elétron-cíclotron como mecanismo fonte das emissões solares do tipo V. Definindo-se o momento adimensional dos elétrons como sendo dado por

$$\mathbf{u} = \mathbf{p}/m_e c, \quad (4.16)$$

que em coordenadas cilíndricas possui componentes (u_\perp, u_\parallel) , onde \perp e \parallel denotam as direções perpendicular e paralela, respectivamente, com relação ao campo magnético local. No sistema de coordenadas esféricas, por sua vez, usa-se as coordenadas (u, μ) , onde u é a magnitude do momento e $\mu = u_\parallel/u$. A função de distribuição é considerada como sendo a combinação de uma componente de fundo (térmica) e uma componente de elétrons energéticos do feixe, a qual é uma componente não térmica. O feixe de elétrons é modelado para representar uma

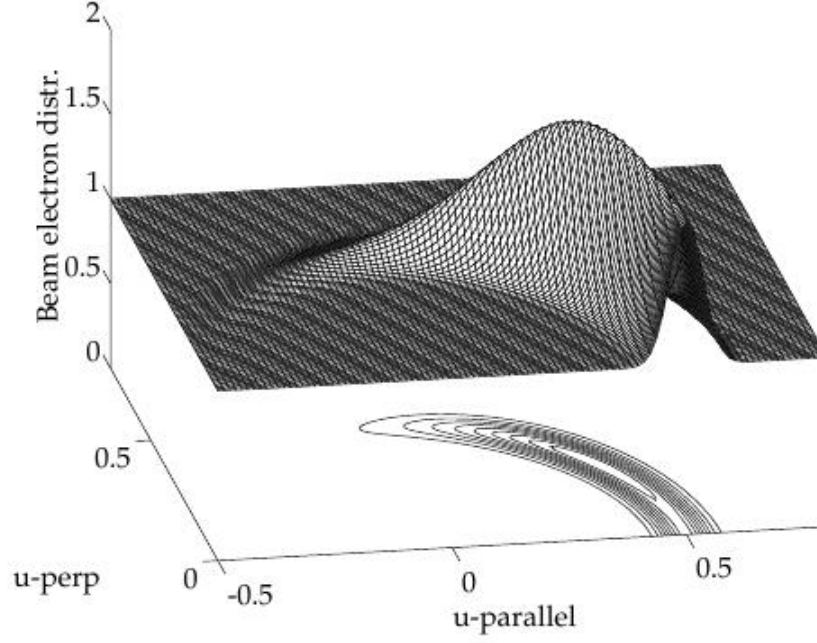


Figura 4.9: Modelo da distribuição do feixe de elétrons $F_b(u, \mu)$ [63].

função semimonoenergética com um ângulo de passo não nulo e possuindo uma distribuição de momento em energia e ângulo de passo. Essa distribuição pode ser escrita como

$$F_e(u, \mu) = f_0(u) + \frac{n_b}{n_0} F_b(u, \mu), \quad f_0(u) = \frac{e^{-u^2/\alpha_0^2}}{(\sqrt{\pi}\alpha_0)^3}, \quad \text{sendo } \alpha_0 = \sqrt{\frac{2k_B T_e}{m_e c^2}}, \quad (4.17)$$

$$F_b(u, \mu) = \frac{g(\mu)}{\pi^{3/2} \alpha^3 A_u A_\mu} \exp\left[-\frac{(u - u_0)^2}{\alpha^2}\right], \quad g(\mu) = \text{sech}^2\left(\frac{\mu - \mu_0}{\Delta\mu}\right),$$

onde $f_0(u)$ denota a distribuição térmica de fundo e $F_b(u, \mu)$ denota a distribuição dos elétrons energéticos do feixe. Em (4.17) foi assumido que $n_b \ll n_0$, ou seja, a densidade do feixe é muito menor que a densidade do plasma de fundo. Se a velocidade média do feixe de elétrons é v_0 , então a quantidade u_0 é relacionada com v_0 por $u_0 = (v_0/c) (1 - v_0^2/c^2)^{-1/2}$. As quantidades α_0^2 e α^2 são as energias térmicas dos elétrons, normalizadas com as massas correspondentes às componentes de fundo e energéticas, respectivamente. A quantidade μ_0 designa o cosseno do ângulo de passo médio e $\Delta\mu$ o espalhamento do ângulo de passo. As constantes de normalização A_u e A_μ são dadas por

$$A_u = \left(1 + \frac{2u_0^2}{\alpha^2}\right) \left(1 + \text{erf}\left(\frac{u_0}{\alpha}\right)\right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{u_0}{\alpha} e^{-u_0^2/\alpha^2} \quad (4.18)$$

$$A_\mu = \frac{\Delta\mu}{2} \left(\tanh\left(\frac{1 - \mu_0}{\Delta\mu}\right) + \tanh\left(\frac{1 + \mu_0}{\Delta\mu}\right)\right),$$

sendo $\text{erf}(x)$ a função erro.

Um gráfico da distribuição do modelo energético é mostrado na figura 4.9. Neste, foram usados os valores $\alpha = 0,05$, $u_0 = 0,5$, $\mu_0 = 0,8$ e $\Delta\mu = 0,5$. Na base do gráfico, pode-se ver o contorno da distribuição em função das velocidades paralelas e perpendiculares. Observa-se claramente a presença de gradientes positivos ($\partial F_e/\partial u_{\parallel} > 0$ e $\partial F_e/\partial u_{\perp} > 0$), os quais garantem a existência de energia livre para a amplificação local das ondas.

4.3.2 As relações de dispersão e as equações de traçado de raios empregadas

O modelo proposto nesta dissertação considera ondas propagando-se no modo Z que partem do centro da cavidade e que se propagam através da cavidade contida no tubo de fluxo modelado

na seção 4.3.1. A evolução espacial da radiação eletromagnética será descrita com a aproximação WKB, fazendo-se uso do conceito de raio, o qual tem o seu comportamento determinado pelo sistema hamiltoniano de equações de traçado de raios, discutido na seção 3.4.1.

4.3.2.1 Relações de dispersão para os modos X e O

Retoma-se então o sistema de equações (3.56a-c). Para implementar-se este sistema de equações, em primeiro lugar é necessária a forma explícita da equação de dispersão $\Lambda(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}, t)$. A forma a ser adotada aqui, para fins de traçado de raios, será aquela fornecida pela teoria magneto-iônica, discutida na seção 3.5.

Parte-se então da relação de dispersão de Appleton-Hartree (3.79). Esta relação de dispersão pode ser escrita como

$$n_\sigma^2 = \epsilon_\sigma, \quad (\sigma = X, O), \text{ onde} \quad (4.19a)$$

$$\epsilon_X = 1 - \frac{f_{pe}^2}{f(f + \tau f_{ce})}, \quad (4.19b)$$

$$\epsilon_O = 1 - \frac{\tau f_{pe}^2}{f(\tau f - f_{ce} \cos^2 \psi)}, \quad (4.19c)$$

$$\tau = \left(s + \sqrt{\cos^2 \psi + s^2} \right) \frac{f_{pe}^2 - f^2}{|f_{pe}^2 - f^2|} \quad (4.19d)$$

$$s = \frac{f f_{ce} \sin^2 \psi}{2 |f_{pe}^2 - f^2|}. \quad (4.19e)$$

Algumas novas definições e notações foram introduzidas em (4.19a-e). Em primeiro lugar, passou-se a trabalhar diretamente com a frequência das ondas, em lugar da frequência angular. Ou seja, $f = \omega/2\pi$ e $f_x = \omega_x/2\pi$, sendo ω_x uma das frequências características do plasma (plasma, ciclotron, etc.). Em segundo lugar, o ângulo entre os vetores \mathbf{k} e \mathbf{B}_0 passou a ser denominado ψ , no lugar de θ , para não haver confusão com o ângulo θ_p , definido na seção 4.3.1.1 e que denota a coordenada polar no espaço de configuração. Este último, por sua vez, passou a ser denominado simplesmente θ , para simplificar a notação.

4.3.2.2 Equações de traçados de raios

Visando agora complementar a discussão a respeito do formalismo da óptica geométrica, observa-se que a equação de dispersão (3.73) pode ser fatorada explicitamente nos dois modos de propagação,

$$\Lambda(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}) = \Lambda_X \Lambda_O = 0,$$

onde

$$\Lambda_X(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}) = n_X^2 - \epsilon_X$$

$$\Lambda_O(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}) = n_O^2 - \epsilon_O.$$

Então, a equação de dispersão pode ser satisfeita de duas maneiras: $\Lambda_X = 0$ e $\Lambda_O \neq 0$ ou $\Lambda_X \neq 0$ e $\Lambda_O = 0$. Os pontos ao longo da trajetória do raio onde $\Lambda_X = \Lambda_O = 0$ são os pontos onde ocorrem os fenômenos de conversão de modos discutidos na seção 3.6 e onde a aproximação WKB não é mais válida. Nas equações de traçado de raios (3.56a-c), será sempre necessário calcular-se derivadas do tipo $\partial\Lambda/\partial\zeta$. Se uma determinada onda parte de um ponto no plasma onde a óptica geométrica é válida e se propaga no modo σ ($\sigma = X$, ou O), então

$$\left. \frac{\partial\Lambda}{\partial\zeta} \right|_{n=n_\sigma} = \left. \frac{\partial}{\partial\zeta} (\Lambda_\sigma \Lambda_{\sigma'}) \right|_{n=n_\sigma} = \left. \frac{\partial\Lambda_\sigma}{\partial\zeta} \Lambda_{\sigma'} + \Lambda_\sigma \frac{\partial\Lambda_{\sigma'}}{\partial\zeta} \right|_{n=n_\sigma} = \left. \frac{\partial\Lambda_\sigma}{\partial\zeta} \Lambda_{\sigma'} \right|_{n=n_\sigma}, \text{ para } \sigma' \neq \sigma,$$

uma vez que $\Lambda_\sigma = 0$ em todos os pontos ao longo da trajetória do raio onde a óptica geométrica é válida. Como as equações (3.56a-c) envolvem sempre razões de derivadas, estas podem ser escritas em uma forma equivalente que envolve somente derivações de Λ_σ , que descreve o modo de interesse. Além disso, como a equação de dispersão não apresenta dependência explícita no tempo, isto é, $\Lambda = \Lambda(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r})$, resulta de (3.56c) que $d\omega/dt = 0$ ao longo da trajetória do raio.

Assim, as equações que realmente precisam ser integradas numericamente são:

$$\frac{dr_\sigma}{dt} = - \left. \frac{\partial \Lambda_\sigma / \partial \mathbf{k}}{\partial \Lambda_\sigma / \partial \omega} \right|_{n=n_\sigma} \quad (4.20a)$$

$$\frac{d\mathbf{k}_\sigma}{dt} = \left. \frac{\partial \Lambda_\sigma / \partial \mathbf{r}}{\partial \Lambda_\sigma / \partial \omega} \right|_{n=n_\sigma}, \quad (4.20b)$$

onde ($\sigma = X$, ou O) indica explicitamente o raio que está sendo seguido.

O apêndice C.1 mostra em detalhes a obtenção da forma específica do sistema (4.20a,b) para uma onda propagando-se no modo extraordinário dentro da cavidade solar, modelada na seção 4.3.1. Estas equações possuem a seguinte forma final:

$$\mathcal{F} \frac{dx_\odot}{dt} = \kappa_X h \mathcal{A}_x n_X \sin \psi \quad (4.21a)$$

$$\mathcal{F} \frac{dz_\odot}{dt} = \kappa_X h \mathcal{A}_z N_X \cos \psi \quad (4.21b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}}{\kappa_X} \frac{dn_X}{dt} = \mathcal{B}_\eta (1 - n_X^2) & \left[\cos(\theta - \psi) \eta_{r_\odot} - \sin(\theta - \psi) \frac{\eta_\theta}{r_\odot} \right] \\ & - \mathcal{B}_\delta \left[\cos(\theta - \psi) \delta_{r_\odot} - \sin(\theta - \psi) \frac{\delta_\theta}{r_\odot} \right] \end{aligned} \quad (4.21c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}}{\kappa_X} n_X \frac{d\psi}{dt} = \mathcal{B}_\eta (1 - n_X^2) & \left[\sin(\theta - \psi) \eta_{r_\odot} + \cos(\theta - \psi) \frac{\eta_\theta}{r_\odot} \right] \\ & - \mathcal{B}_\delta \left[\sin(\theta - \psi) \delta_{r_\odot} + \cos(\theta - \psi) \frac{\delta_\theta}{r_\odot} \right], \end{aligned} \quad (4.21d)$$

onde

$$\kappa_X = \frac{c}{\pi R_\odot} \simeq \frac{1}{7.3} \text{s}^{-1}.$$

As definições dos demais parâmetros contidos no sistema (4.21a-d) são encontradas também no apêndice C.1.

4.3.3 Os coeficientes de emissão espontânea e induzida e a equação de transferência radiativa

Serão apresentadas agora as formas explícitas do coeficiente de emissão espontânea do plasma térmico na cavidade solar, cuja discussão formal foi realizada na seção 3.2.6, do coeficiente de emissão induzida, discutido na seção 3.3.3.3 e da equação de transferência radiativa, discutida na seção 3.4.2. As formas explícitas dos dois primeiros são necessária para que a última equação seja resolvida simultaneamente ao sistema de traçado de raios (4.21a-d), fornecendo desta forma a evolução da intensidade espectral da radiação ao longo de sua propagação.

4.3.3.1 O coeficiente de emissão espontânea

Começando pelo coeficiente de emissão espontânea, a emissividade do plasma, isto é, a potência irradiada espontaneamente, por unidade de frequência e por ângulo sólido, foi obtida na seção 3.2.6 para o caso de uma partícula da espécie α realizando movimento de ciclotron em torno de um campo magnético uniforme B_0 . Nesta, foi derivada a emissividade $\eta_\alpha^\sigma(\omega, \theta; s)$ de uma partícula desta espécie no s -ésimo harmônico de uma onda eletromagnética que se propaga no modo σ . Esta emissividade, é dada formalmente pela expressão (3.43e). Esta fórmula será repetida aqui, explicitando-se a emissão espontânea de um elétron ($\alpha = e$) no modo extraordinário ($\sigma = X$),

$$\begin{aligned} \eta_e^X(\omega, \psi; s) \equiv \frac{e^2}{2\pi c} \frac{\omega^2 \beta^2 n_X \sin^2 \alpha}{1 + T_X^2} & \left[\frac{K_X \sin \psi + T_X (\cos \psi - n_X \beta \cos \alpha)}{n_X \beta \sin \alpha \sin \psi} J_s + J'_s \right]^2 \\ & \times \delta[\omega(1 - n_X \beta \cos \alpha \cos \psi) - s\omega_e], \end{aligned} \quad (4.22)$$

lembrando aqui que $\cos \alpha = v_{\parallel}/v$, $\sin \alpha = v_{\perp}/v$, $\omega_e = \Omega_e/\gamma$, $\beta = v/c$ e o argumento das funções de Bessel é

$$k_{\perp} \rho_e = \frac{\omega}{\omega_e} n_X \beta \sin \alpha \sin \psi = \begin{cases} \frac{sn_X \beta \sin \alpha \sin \psi}{1 - n_X \beta \cos \alpha \cos \psi}, & s \neq 0 \\ \frac{\omega}{\omega_e} \tan \alpha \tan \psi, & s = 0. \end{cases}$$

As quantidades T_X e K_X foram deduzidas no apêndice B.2 e são dadas por (B.5b,d).

As emissividades individuais devem ser agora somadas para obter-se a emissividade total do plasma no modo X , considerando-se as emissões individuais de todos os elétrons e em todos os harmônicos de Ω_e . Como consideram-se emissões em alta frequência, as contribuições dos íons positivos serão desprezadas na emissividade do plasma. Além disso, para a solução da equação de transferência radiativa, o termo relevante não é a potência espectral propriamente dita, mas a potência por unidade de volume dP^{σ}/dV , apresentada em (3.59). Finalmente, aproximações que serão realizadas abaixo para o cálculo do coeficiente $\alpha^{\sigma}(\omega, \theta_r)$ (3.58b), envolvido na mencionada equação, tornam conveniente o uso aqui da quantidade S^{σ} , definida por 3.60. A potência espectral a ser calculada, então, será

$$S^X = \frac{\omega^2 n_X v_g^X}{(2\pi c)^3} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int d^3 p \eta_e^X(\omega, \theta; s) F_e(\mathbf{p}), \quad (4.23)$$

sendo a velocidade de grupo v_g^X dada por (B.7).

O cálculo detalhado de S^X é mostrado no apêndice (C.2). A expressão final para a emissividade do plasma é fornecida por (C.4a), a qual é repetida aqui:

$$S^X = 2m_e c^2 \frac{f_{pe}^2}{f^2} \frac{\sqrt{\pi}}{R_X} \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \Theta(sf_{ce} - f) \int_{-1}^1 d\mu \Pi_s^X(u_+^X, \mu) \right. \\ \left. + \Theta(f - sf_{ce}) \Theta(1 - \mu_s^2) \int_{\mu_s}^1 d\mu \sum_{r=\pm 1} [\Pi_s^X(u_r^X, \mu) + \Pi_s^X(u_r^X, -\mu)] \right\}, \quad (4.24)$$

sendo que os parâmetros contidos em (4.24) estão definidos em (C.4b,c).

4.3.3.2 O coeficiente de emissão induzida

O coeficiente de emissão induzida é dado formalmente pela expressão (3.51). O cálculo explícito da taxa de crescimento (ou amortecimento), para ambos os modos extraordinário (γ^X) e ordinário (γ^O) empregados neste trabalho, pode ser visto no apêndice C.3.

Repete-se aqui a forma final para γ^{σ} , dada por (C.7a),

$$\gamma^{\sigma} = -2 \frac{\sqrt{\pi} f_{pe}^2}{R_{\sigma} f} \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \Theta(sf_{ce} - f) \int_{-1}^1 d\mu Q_s^{\sigma}(u_+^{\sigma}, \mu) \right. \\ \left. + \Theta(f - sf_{ce}) \Theta(1 - \mu_n) \int_{\mu_n}^1 d\mu \sum_{r=\pm 1} [\Theta(\cos \psi) Q_s^{\sigma}(u_r^{\sigma}, \mu) + \Theta(-\cos \psi) Q_s^{\sigma}(u_r^{\sigma}, -\mu)] \right\}, \quad (4.25)$$

onde os parâmetros contidos em (4.25) estão definidos em (C.7b-e).

4.3.3.3 A equação de transferência radiativa

A expressão formal da equação de transferência radiativa aparece em (3.58a-d). Contudo, esta equação é excessivamente complicada e, por isso, algumas aproximações serão realizadas no apêndice C.4.

A forma simplificada para a equação de transferência radiativa, a qual será empregada neste trabalho, foi obtida em (C.8), sendo repetida aqui:

$$\frac{d}{dt} I^X(f, \psi) = S^X + \gamma^X I^X(f, \psi), \quad (4.26)$$

sendo S^X dado por (4.24) e γ^X dado por (4.25).

A equação (4.26) será resolvida numericamente em conjunto com o sistema de equações de traçado de raios (4.21a-d). Existe uma maneira alternativa de se resolver a equação (4.26). Sua solução formal pode ser obtida facilmente, resultando em

$$I^X(t) = I_0^X e^{\gamma^X t} + \int_0^t S^X(t') e^{\gamma^X(t-t')} dt',$$

onde $I_0^X = I^X(t=0)$ e os argumentos de S^X e γ^X devem ser calculados nos valores assumidos pelo raio no ponto do espaço (k, r) onde este se encontra no instante t . Como esta integração deve ser realizada numericamente, optou-se por usar a forma diferencial (4.26) e aproveitar o mesmo integrador numérico utilizado no traçado do raio.

A presença do termo de emissividade S^X , como um coeficiente positivo-definido em (4.26), é importante por duas razões. Em primeiro lugar, ele permite encontrar a intensidade espectral da radiação emitida por um plasma que se encontra em equilíbrio termodinâmico. Neste estado, ocorre um equilíbrio entre a emissão espontânea do plasma e a subsequente absorção da radiação, de tal forma que $I^\sigma \equiv I_{\text{eq}}^\sigma$ se encontra em um estado estacionário ($dI_{\text{eq}}^\sigma/dt \rightarrow 0$). Usando então a relação entre S^X e γ^X (C.6), válida no equilíbrio termodinâmico, resulta de (4.26),

$$S^X + \gamma^X I_{\text{eq}}^X = 0 \rightsquigarrow I_{\text{eq}}^X = -\frac{S^X}{\gamma^X} = 2 \frac{k_B T_e}{f}. \quad (4.27)$$

Este será o valor tomado para $I^X(t)$ como condição inicial para a solução da equação (4.26).

A outra razão importante para a presença de S^X está no fato de que este coeficiente não permite o surgimento de soluções que não fazem sentido fisicamente, como uma intensidade que tende a zero, por exemplo. Isto pode ser constatado com um exemplo simples. Supondo S^X e $\gamma^X < 0$ constantes, a solução de (4.26) é, simplesmente,

$$I^X(t) = -\frac{S^X}{\gamma^X} (1 - e^{\gamma^X t}) + I_0^X e^{\gamma^X t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\frac{S^X}{\gamma^X} > 0,$$

o que mostra que o plasma irá sempre emitir radiação de cíclotron.

O modelo apresentado nesta seção serve como base para os resultados obtidos e que serão apresentados na seção 4.4. Nesta, verifica-se a taxa de amplificação do feixe ao se propagar pelo plasma da cavidade, bem como os pontos de possíveis conversões de modo. Serão apresentadas também as trajetórias de determinados raios, desde seu lançamento a partir do centro da cavidade até o momento em que ocorre a conversão de modo, quando a radiação pode então sair do tubo de fluxo e se propagar pelo meio interplanetário.

4.4 Resultados Obtidos

Nesta seção serão apresentados os resultados numéricos obtidos ao longo do estudo. Estes resultados foram obtidos a partir de cálculos numéricos que fizeram uso das expressões obtidas no modelo teórico discutido na seção 4.3. O modelo teórico proposto neste trabalho para a Emissão Solar do Tipo V está composto pelos seguintes elementos:

- Um modelo de parâmetros físicos que descrevem a densidade e a função de distribuição eletrônicas, bem como o campo magnético na região-fonte da Emissão do Tipo V (seção 4.3.1).
- Relações de dispersão para os modos magneto-iônicos propagando-se na região-fonte e as equações de traçado destes raios (seção 4.3.2).
- Coeficientes de emissão espontânea e induzida locais, bem como uma equação de transferência radiativa, para calcular a evolução da intensidade do raio ao longo de seu deslocamento (seção 4.3.3).

Todos estes elementos foram calculados numericamente, fazendo uso de programas escritos na linguagem de programação Fortran 95 [42]. Alguns resultados representativos deste modelo passam a ser discutidos abaixo.

4.4.1 Taxas locais de amplificação para os modos magneto-iônicos

Em um primeiro momento, foi calculada a taxa de amplificação de uma onda gerada em um dos modos magneto-iônicos, com determinados valores de frequência e número de onda.

Com o auxílio da teoria magneto-iônica, apresentada na seção 3.5, verificou-se que a propagação de uma onda eletromagnética em um plasma magnetizado ocorre em um de dois possíveis modos distintos: o modo O ou modo ordinário e o modo extraordinário, o qual, em função da frequência, distingue-se em modo extraordinário lento (modo Z) e modo extraordinário rápido (modo X). As características da propagação do modo extraordinário são determinadas pela relação de dispersão (4.19).

Por sua vez, o mecanismo do maser de elétron-cíclotron fornece para este modo uma taxa de amplificação (ou de absorção), medida pelo coeficiente γ^σ (4.25). Escolhidos valores de frequência (f) e ângulo (ψ), combinados com escolhas de valores para os parâmetros físicos (densidades eletrônicas e temperaturas das populações de fundo ou do feixe e campo magnético) em um determinado ponto no plasma, determina-se quais modos são propagantes nestas condições (*i. e.*, tais que $n_\sigma^2 > 0$) e então procede-se ao cálculo de γ^σ para todos os modos propagantes, cujos valores podem ser $\gamma^\sigma > 0$, o que denota uma taxa local de amplificação do modo σ ou $\gamma^\sigma < 0$, o que denota uma taxa local de absorção do mesmo.

Assim, fixando-se os parâmetros físicos que visam reproduzir as condições existentes em um determinado ponto da baixa coroa solar, logo acima de uma região ativa, foi calculada numericamente a taxa de emissão para diversos valores de frequência e ângulo do vetor de onda para uma onda eletromagnética se propagando no modo Z . As taxas de emissão para este modo foram comparadas com os outros modos possíveis em um plasma magnetizado, os modos O e X . Assim foi possível obter-se taxas positivas de emissão de radiação eletromagnética nos três modos de propagação. As taxas positivas de emissão no modo Z ocorrem em um amplo intervalo de frequências e ângulos de propagação e são comparáveis às taxas de emissão para os modos O e X , resultado propício para a hipótese de geração da emissão solar do tipo V inicialmente no modo Z , seguida de uma conversão para o modo O .

Todos os resultados foram obtidos para o plasma no centro da cavidade, correspondente ao valor $\theta = \theta_p = 0$ na figura 4.6. Fixa-se, em seguida, a altitude dentro da cavidade, a partir da fotosfera solar. Os resultados mostrados abaixo foram obtidos para três altitudes: $r = 1,2R_\odot$, $1,6R_\odot$ e $2,0R_\odot$. Finalmente, foram impostos valores constantes para os demais parâmetros necessários para o modelo físico:

- Campo magnético: $B_0 = 10^3$ G, $R_\odot = 7 \times 10^5$ km, $b = 3,16 \times 10^4$ km.
- Densidade eletrônica: $a/R_\odot = 1,4 \times 10^{-3}$, $\delta/R_\odot = 5 \times 10^{-3}$.
- Distribuição eletrônica: $n_b/n_0 = 10^{-3}$, $T_e = 10^3$ K, $u_0 = 0,5c$, $\alpha = 0,05$, $\mu_0 = 0,8$ e $\Delta\mu = 0,1$.

Estes valores foram mantidos em todos os resultados apresentados abaixo. Finalmente, para o cálculo numérico de γ^σ em (4.25) foram incluídas as contribuições até o harmônico $s_{\max} = 3$.

A figura 4.10 mostra as curvas de contorno de um gráfico de superfície das taxas de emissão positivas, normalizadas a Ω_e , para um raio emitido no modo Z , isto é, $\gamma^Z/\Omega_e > 0$, em três altitudes distintas ($r = 1,2R_\odot$, $1,6R_\odot$ e $2,0R_\odot$), em função de frequência e ângulo do vetor de onda.² As diferentes taxas de amplificação são demonstradas com diferentes cores respectivas aos seus valores, mostrados na colunas à esquerda.

Em primeiro lugar, observa-se que em todas as altitudes consideradas, a taxa de emissão do modo Z é positiva em duas faixas de ângulo e, principalmente, em uma larga faixa de frequências. Considerando os valores máximos de γ^Z , observa-se que em baixas altitudes ($r \sim 1,2R_\odot$), a taxa de amplificação local é relativamente baixa, com máximos em torno de $\gamma^Z \lesssim 10^{-5}\Omega_e$. Por sua vez, os outros painéis da figura 4.10 mostram um indicio de aumento de γ_{\max}^Z com a altitude, com valores $\gamma_{\max}^Z \simeq 10^{-4}\Omega_e$ para $r = 1,6R_\odot$ e $\gamma_{\max}^Z \simeq 10^{-3}\Omega_e$ para $r = 2,0R_\odot$.

Por outro lado, embora γ_{\max}^Z aumente com a altitude, o intervalo de frequências onde $\gamma^Z > 0$ mostra uma tendência de redução com a altitude. Este resultado faz supor que a intensidade total da radiação emitida no modo Z em uma determinada altitude, após ser integrada em todo o espectro, possa vir a sofrer uma redução com a altitude, ao contrário da tendência exibida por γ_{\max}^Z .

Finalmente, observa-se que há uma preponderância de valores de $\gamma^Z \simeq \gamma_{\max}^Z$ para sentidos descendentes de propagação do raio (*i. e.*, $\theta > \pi/2$). Este fenômeno pode vir a ser favorável para

²Observação: nestes resultados, o ângulo θ denota o ângulo de \mathbf{k} em relação a \mathbf{B}_0 .

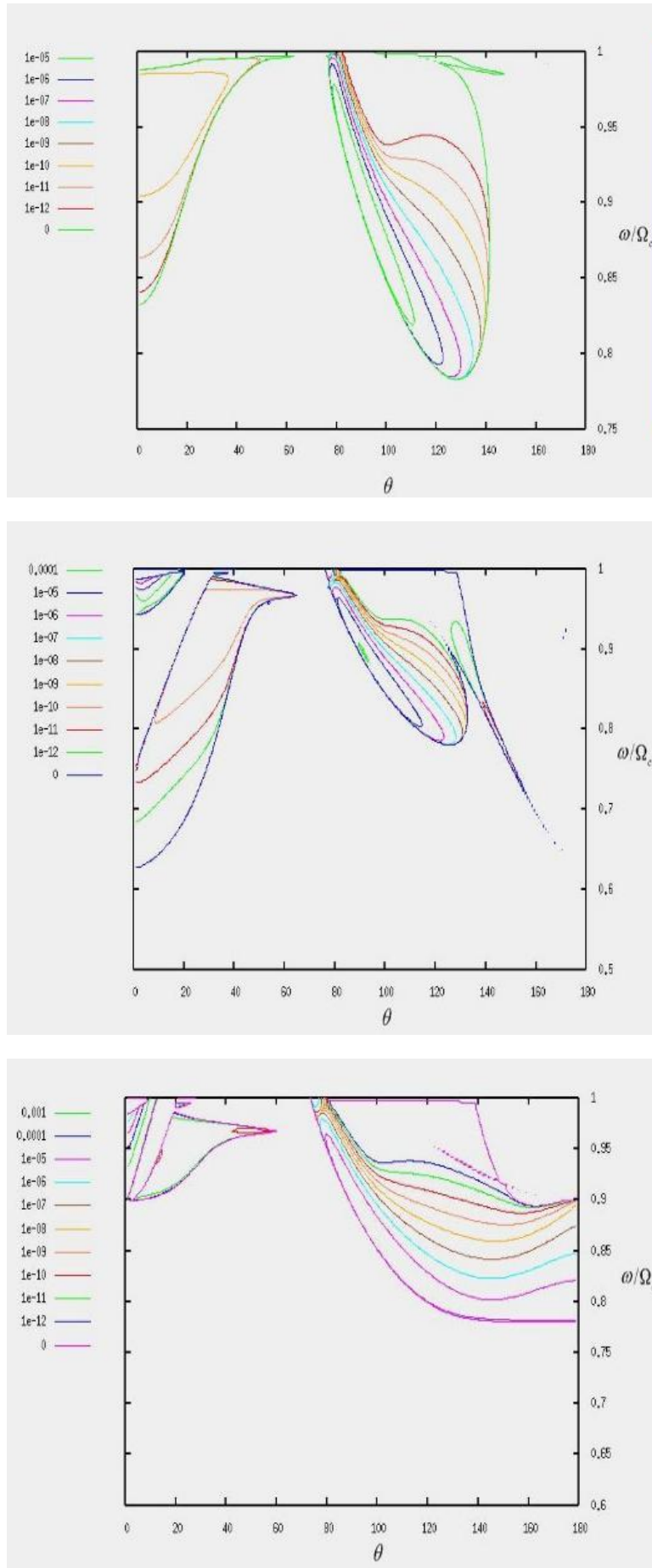


Figura 4.10: Gráficos de curvas de contorno do coeficiente de emissão normalizado para ondas no modo Z (γ^Z / Ω_c) geradas em $r = 1, 2R_\odot$ (painel superior), $1, 6R_\odot$ (central) e $2, 0R_\odot$ (inferior).

a amplificação não local do raio, uma vez que este tende a permanecer por uma distância total (e tempo) maior dentro da região-fonte.

Já a figura 4.11 mostra as respectivas curvas de contorno para raios gerados no modo X , isto é de $\gamma^X/\Omega_e > 0$, a partir do centro da cavidade nas mesmas altitudes $r = 1, 2R_\odot, 1, 6R_\odot$ e $2, 0R_\odot$.

Para o modo X , observa-se nos três painéis emissões em mais de um harmônico de Ω_e , com taxas máximas de amplificação da mesma ordem que para o modo Z , $\gamma_{\max}^X \gtrsim 10^{-6}\Omega_e$. Contudo, somente em baixas altitudes ($r \simeq 1, 2R_\odot$) foi detectada emissão no harmônico fundamental do modo X , isto é, em $\omega \gtrsim \Omega_e$. Nas outras altitudes, obteve-se amplificação local somente nos harmônicos superiores ($\omega \simeq 2\Omega_e$ e $\omega \simeq 3\Omega_e$). Estes resultados estão em concordância com o trabalho de *Yoon et al. (2002)* [63], os quais obtiveram significativas taxas locais de amplificação para os harmônicos superiores do modo X . Este resultado, combinado com o fato de que o modo X é propagante para o espaço interplanetário em todos os seus harmônicos, pode ser importante para a descrição da emissão conjunta Tipo III-V em distintos harmônicos, mencionada no capítulo 2.

Finalmente, a figura 4.12 mostra as respectivas curvas de contorno para raios gerados no modo O , isto é, de $\gamma^O/\Omega_e > 0$, a partir do centro da cavidade nas mesmas altitudes $r = 1, 2R_\odot, 1, 6R_\odot$ e $2, 0R_\odot$.

Da mesma forma como sucedeu com o modo X , as emissões no modo O têm uma estrutura harmônica, agora com os três primeiros harmônicos $\omega \simeq 1 - 3\Omega_e$ sendo gerados em todas as altitudes simuladas. Além disso, as taxas máximas são da mesma ordem de grandeza que nos modos discutidos anteriormente ($\gamma_{\max}^O \gtrsim 10^{-6}\Omega_e$).

Um aspecto que se destaca ao se fazer uma comparação entre os três modos é o fato que as evoluções de γ_{\max}^σ com a altitude são semelhantes nos três casos; todos aumentam monotonicamente com a altitude. Contudo, nos modos X e O o intervalo de frequências onde ocorre amplificação é semelhante em todas as altitudes, diferente do que sucede com o modo Z .

4.4.2 Propagação e amplificação não local do modo Z na cavidade solar

Os resultados apresentados nas figuras 4.10 – 4.12 são puramente locais. Contudo, fenômenos como as emissões solares não podem ser adequadamente explicados somente com modelos locais, pois todas as observações disponíveis são realizadas ou na superfície terrestre ou em sondas localizadas no espaço interplanetário, a dezenas ou centenas de raios solares de distância da região-fonte. No caminho entre os pontos de geração e de observação, as ondas passam por várias regiões distintas da coroa solar, experimentando uma variação em diversas ordens de grandeza nos parâmetros físicos do plasma, tais como densidade, temperatura e campo magnético. Portanto, um modelo teórico satisfatório necessariamente deverá levar em conta os efeitos não locais que surgem ao longo da trajetória de propagação dos raios. Foi com esta imposição em mente que o presente trabalho propôs-se a investigar alguns dos aspectos não locais relevantes (propagação, amplificação e conversão de modos) e cujos respectivos resultados são agora apresentados.

Os resultados estão doravante concentrados no modo Z , pois este é o proposto para resultar na emissão observada do tipo V. Para seguir a trajetória de um determinado raio no modo Z , parte-se sempre do centro da cavidade ($\theta_p = 0$ na figura 4.6) e a uma determinada altitude. Fixa-se o valor da frequência (f) da onda e uma direção inicial de propagação $\psi_0 \equiv \psi(t=0)$. As escolhas possíveis para os valores de f e ψ_0 são aquelas nas quais o modo é propagante ($n_z^2 > 0$). Nestas condições, o resultado $n_{z0} = n_z(r, f, \psi_0; t=0)$, obtido de (4.19), passa a ser a condição inicial imposta ao índice de refração. Observa-se também que os raios são sempre lançados no mesmo sentido, na direção perpendicular à reta $\theta_p = 0$, ou seja, ψ_0 é sempre tomado positivo. Não há perda de generalidade com esta convenção, uma vez que o plasma é suposto simétrico em torno de B_0 .

As equações do traçado de raios (4.21a-d) são então resolvidas numericamente fazendo-se uso do método de Runge-Kutta com passo ajustável [11, 45, 46], tomando-se como condições iniciais $x_\odot(t=0) = 0$, $n_z(t=0) = n_{z0}$, $\psi(t=0) = \psi_0$ e com um determinado valor de $z_\odot(t=0) = r_0$.

Do ponto de vista da acurácia da solução numérica de um problema de valor inicial, existem diversas estratégias que podem ser adotadas. O método de Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4) de passo variável proposto por *Press et al. (1992)* [45] consiste simplesmente em comparar os resultados do RK4 para um determinado incremento temporal Δt com os resultados do mesmo método após dois passos de valor $\Delta t/2$, sendo estes últimos considerados os mais acurados. Se

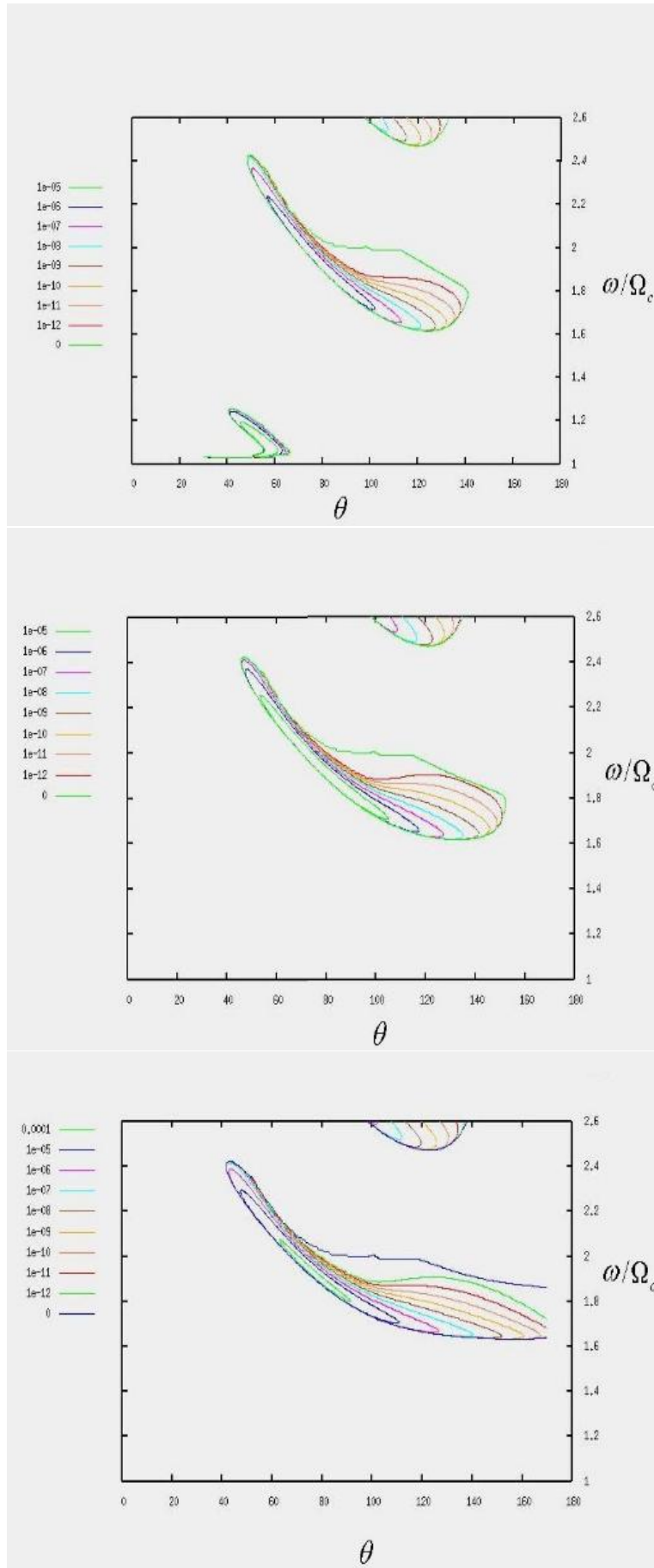


Figura 4.11: Gráficos de curvas de contorno do coeficiente de emissão para ondas no modo X (γ^X/Ω_e) geradas em $r = 1,2R_\odot$ (painel superior), $1,6R_\odot$ (central) e $2,0R_\odot$ (inferior).

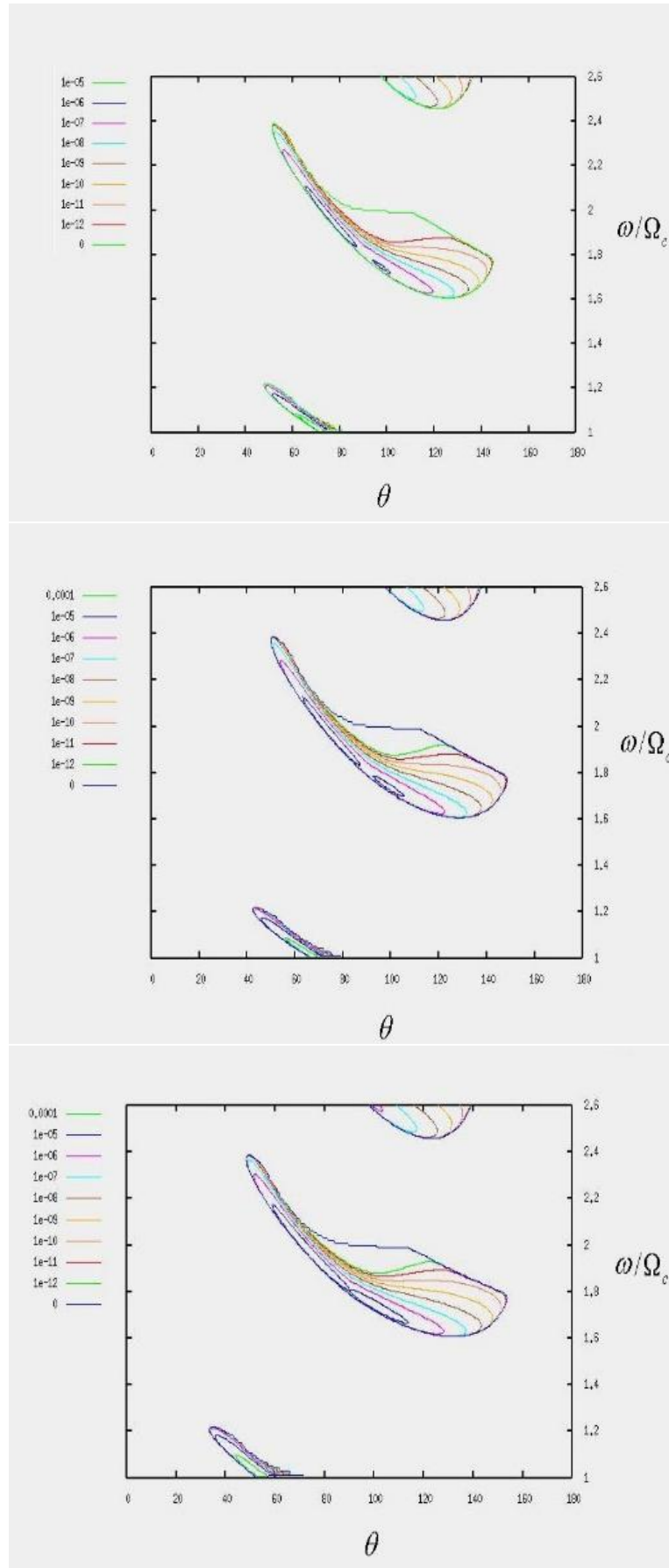


Figura 4.12: Gráficos de curvas de contorno do coeficiente de emissão para ondas no modo O (γ^O/Ω_e) geradas em $r = 1, 2R_\odot$ (painel superior), $1, 6R_\odot$ (central) e $2, 0R_\odot$ (inferior).

o maior valor das diferenças relativas entre os resultados for menor que um determinado limiar, imposto arbitrariamente, o passo Δt para a iteração seguinte é aumentado seguindo uma regra também arbitrária. Se as diferenças forem maiores que o limiar citado, o próximo passo será reduzido. Desta forma é possível controlar dinamicamente o valor de Δt ao longo da trajetória do raio.

Métodos mais modernos fazem uso de fórmulas integradoras de diferentes ordens para estabelecer o controle sobre o tamanho do passo, bem como para obter estimativas dos valores dos erros locais e globais da rotina integradora. O pacote RKSUITE_90, criado por *Brankin & Gladwell (1997)* [11] disponibiliza 3 pares de fórmulas RK: um par (2,3), composto por uma fórmula de 2ª ordem e uma de 3ª, destinado a alta performance e estabilidade e baixa acurácia, um par (4,5) RK-Fehlberg, indicado para maior parte das aplicações e um par (7,8), destinado a aplicações onde uma alta acurácia é necessária.

Todos os métodos recém citados foram testados para a integração do conjunto de equações (4.21a-d). Além do controle automático no valor de Δt fornecido pelas rotinas, um controle adicional foi introduzido. Para cada ponto avançado ao longo da trajetória do raio, a relação de dispersão é novamente resolvida, obtendo-se um valor local para n_Z . Este valor é então comparado com a solução numérica da equação diferencial para n_Z (4.21c). Caso ocorra uma discrepância muito grande entre os dois valores, o passo temporal é reduzido, todos os demais parâmetros retornam aos valores anteriores e a rotina integradora executa novamente o passo temporal com o novo valor de Δt . Desta maneira pode-se conservar a “hamiltoniana” $\Lambda_Z = 0$ com a acurácia desejada (a princípio) ao longo da trajetória percorrida pelo raio.

Dentre os testes executados, obteve-se inicialmente as trajetórias de determinados raios fazendo uso do método RK4 com Δt fixo (arbitrariamente pequeno). Comparou-se em seguida estes resultados com as trajetórias de raios lançados exatamente com as mesmas condições iniciais e parâmetros físicos, porém computados usando primeiro o método RK4 de passo variável e depois os pares (4,5) e (7,8) do pacote RKSUITE_90. Observou-se que as trajetórias obtidas pelo método RK4 de passo variável acabavam por desviar-se significativamente das trajetórias de controle (passo fixo), enquanto que os resultados do pacote RKSUITE_90 eram equivalentes aos do passo fixo. A grande vantagem, porém, das rotinas de passo variável está na economia de tempo de computação resultante, bem como na possibilidade de se estimar o erro global acumulado após um intervalo de tempo grande de simulação. Os resultados apresentados abaixo foram obtidos com estes métodos considerados mais confiáveis.

Partindo então de uma altitude inicial r_0 , foi lançada uma grande quantidade de raios no modo Z , com diferentes valores de frequência e ângulo inicial de propagação, a partir do centro da cavidade. A trajetória destes raios foi seguida até que a condição da Janela de Ellis, para a conversão de modos $Z \rightarrow O$, fosse satisfeita. De acordo com a discussão realizada na seção 3.6.2, quando este critério for satisfeito, uma parte da energia da onda no modo Z pode ser convertida ao modo O . Para decidir se o critério é satisfeito em um determinado ponto ao longo da trajetória do raio Z , em *Yoon et al. (1998)* [62] estabeleceu-se o parâmetro

$$(\delta l)^2 = \text{sen}^2 \psi + (f^2 - f_{pe}^2) / f_{ce} + (n^2 - n_{cr}^2)^2 \quad (4.28)$$

com base no resultado numérico obtido por *Smith (1973)* [53] para o valor do coeficiente de transmissão quando a energia transportada no modo Z atravessa parcialmente a janela para o modo O (ver figura 3.11 e discussão adjacente). Em (4.28), $n_{cr} = n_1$ ou n_2 , sendo estes os valores críticos dados em (3.87). De acordo com os resultados de *Smith (1973)*, a conversão de energia do modo Z para o modo O , quando $\delta l = 0$, é de 100%. O mesmo resultado mostrou também que quando a largura angular da janela de Ellis é $\delta \psi \approx 6^\circ$ em relação a $\psi = 0$, o coeficiente de transmissão é de aproximadamente 50%. Como a janela de Ellis é totalmente transparente somente quando o tripé $\text{sen} \psi = 0$, $f = f_{pe}$ e $n_\sigma = n_{cr}$ é satisfeito, a norma da distância de um determinado ponto no espaço $(\text{sen} \psi, (f - f_{pe}) / f_{ce}, n^2)$ à janela é dada por (4.28). Empiricamente, *Yoon et al. (1998)* [62] determinaram que o coeficiente de transmissão é de aproximadamente 50%, portanto, quando

$$\delta l \lesssim 0,054 (\delta \psi) / 6. \quad (4.29)$$

Este é o critério utilizado neste trabalho para determinar o ponto onde (e se) um raio propagando-se no modo Z atinge uma janela de Ellis.

Assim, inicialmente determina-se o valor de $\delta \psi$ admitido, lançando-se em seguida um raio no modo Z a partir do centro da cavidade, a uma altitude inicial r_0 , calculando-se δl em cada ponto ao longo da sua trajetória. Quando o raio é lançado, este encontra-se em geral distante da

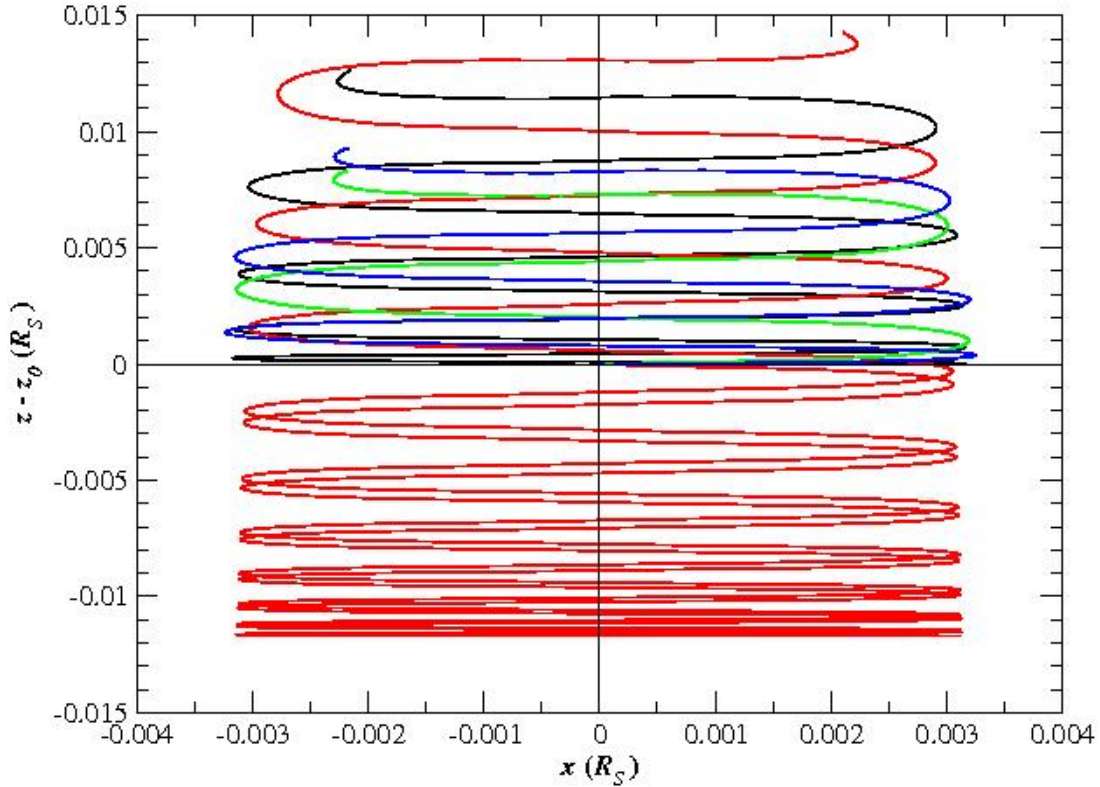


Figura 4.13: Trajetórias de raios no modo Z em função do tempo, a partir do ponto de lançamento (ponto central) com $z_0 = 1, 2R_\odot$. As cores das curvas correspondem aos valores de f/f_{ce} e ψ_0 : preto: $(0, 9025; 90, 2^\circ)$, vermelho: $(0, 8875; 100, 4^\circ)$, verde: $(0, 9375; 80, 1^\circ)$ e azul: $(0, 93; 86, 7^\circ)$.

janela de Ellis. Contudo, à medida que se propaga, este pode se aproximar da janela, ocorrendo um decréscimo correspondente no valor de δl . Quando, e se, (4.29) é satisfeito, supõe-se que o raio acessou a janela de Ellis e a computação é interrompida.

A figura 4.13 mostra exemplos de trajetórias de alguns raios no modo Z dentro de uma cavidade solar, partindo de $r_0 = 1, 2R_\odot$. Os valores de f/f_{ce} e ψ_0 são distinguidos pelas cores. Observa-se que todos os raios simulados sofrem diversos processos de reflexão nas paredes da cavidade, devido ao aprisionamento do modo Z , até satisfazerem o critério (4.29). Em particular, o raio vermelho foi lançado em uma trajetória descendente ($\psi_0 > 90^\circ$), propagando-se inicialmente em sentido à fotosfera solar até sofrer uma reflexão devido ao crescimento de n_e , passando então a propagar-se no sentido ascendente.

O fato de os raios passarem repetidamente pela região-fonte é benéfico para o presente modelo, pois a onda pode sofrer diversos estágios de amplificação antes de atingir o ponto de conversão. Posteriormente, serão apresentados os gráficos das intensidades dos raios mostrados na figura 4.13.

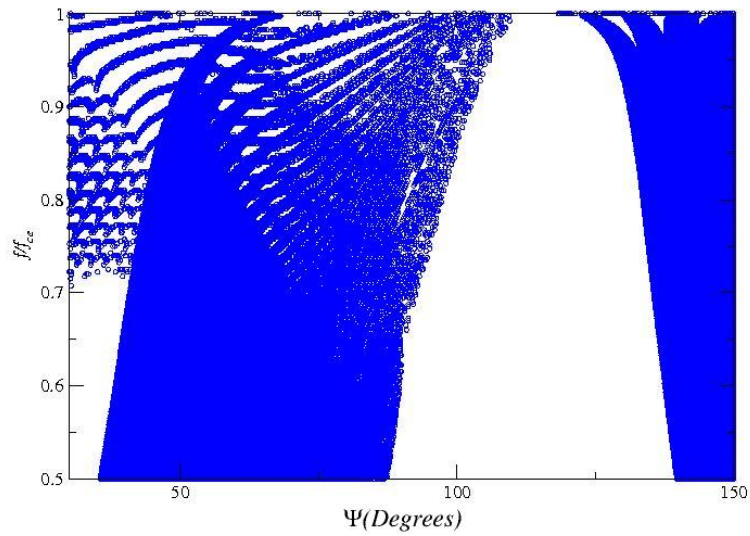
Realiza-se agora um estudo sistemático de ocorrência de conversões de modos. Fixando todos os parâmetros físicos, faz-se uma varredura em valores de $0 < f/f_{ce} < 1$ e de $0 < \psi_0 < 180^\circ$ para raios que partem do centro da cavidade. As trajetórias destes raios são seguidas, verificando-se a cada ponto se o critério (4.29) é satisfeito. Caso isto aconteça, registra-se os valores de f/f_{ce} e ψ_0 em um diagrama. Desta forma, pode-se visualizar o quão frequente é o processo de conversão $Z \rightarrow O$ para raios gerados no modelo empregado para a cavidade solar.

Os diagramas que mostram os pontos em que foram detectados processos de conversão de modos estão expostos na figura 4.14, para as altitudes iniciais $r_0 = 1, 2R_\odot, 1, 6R_\odot$ e $2, 0R_\odot$.

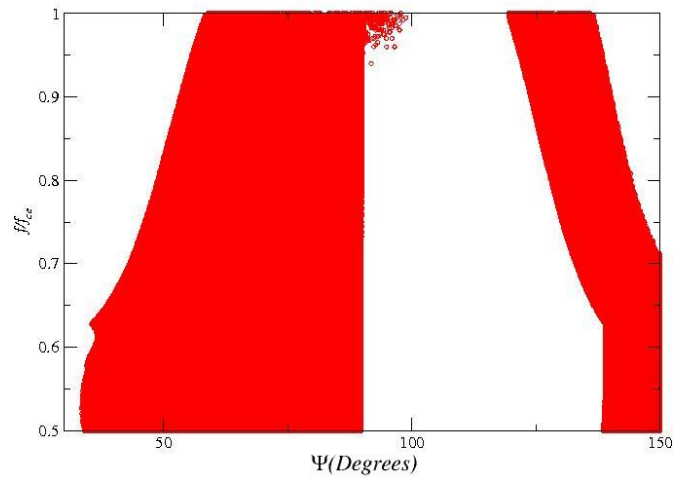
Observa-se que nas três altitudes existe sempre uma faixa contínua de valores de frequência e ângulo inicial para os quais os raios acabam por atingir a janela de Ellis. Em todas as altitudes, exceto para $r_0 \gtrsim 2, 0R_\odot$, conversão acaba por ocorrer em raios com frequências $0, 5 \lesssim f/f_{ce} \lesssim 1, 0$. Para altitudes maiores, o limite inferior de frequência começa a aumentar.

Em termos de intervalos de ângulos iniciais, em todas as altitudes observa-se que conversão ocorre para a faixa $30^\circ \lesssim \psi_0 \lesssim 90^\circ$. Em todas as altitudes também há uma faixa de valores $\psi_0 > 90^\circ$ que levam à conversão, mas neste caso os intervalos variam com a altitude.

1.2 Raio Solar



1.6 Raio Solar



2.0 Raio Solar

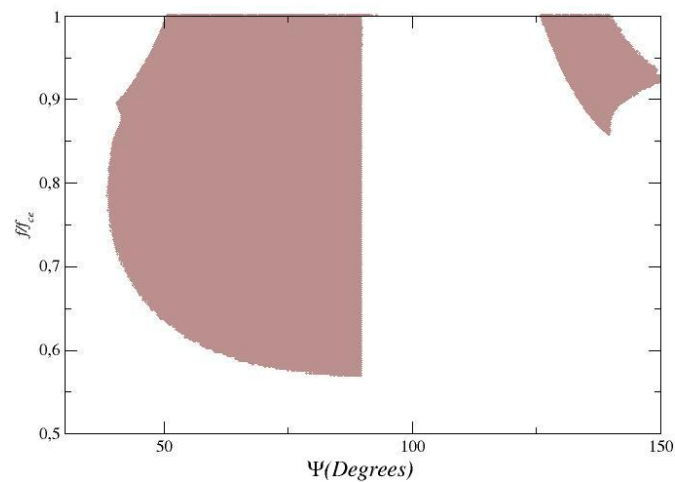


Figura 4.14: Diagramas $f/f_{ce} \times \psi_0$ mostrando os pontos de partida de raios que sofrem o processo de conversão $Z \rightarrow O$, partindo das altitudes iniciais $r_0 = 1,2 R_{\odot}$ (painel superior), $1,6 R_{\odot}$ (intermediário) e $2,0 R_{\odot}$ (inferior).

Os resultados expostos na figura 4.14 mostram que o processo de conversão $Z \rightarrow O$ é muito provável para raios que se propagam no modo Z dentro de cavidades descritas pelo modelo físico empregado.

Conhecendo os raios que sofrem amplificação positiva no ponto de partida e conversão de modo ao se propagarem pela cavidade, foi realizado então um cruzamento de valores para determinar os pontos no diagrama $f/f_{ce} \times \psi_0$ em que há amplificação local positiva ($\gamma^Z > 0$) e a subsequente conversão de modo. Os gráficos apresentados na figura 4.15 são derivados deste cruzamento de dados, para as mesmas altitudes iniciais consideradas na figura 4.14.

Embora os pontos apresentados nos diagramas da figura 4.15 sejam mais restritos em termos de intervalos de frequência e ângulo que os correspondentes diagramas da figura 4.14, ainda existem intervalos significativos de f/f_{ce} e ψ_0 que satisfazem a ambos os requisitos. Em particular, observa-se uma preferência para raios com frequências $f \simeq f_{ce}$ e com ângulos $\psi_0 \simeq 90^\circ$. Ou seja, são os raios que partem de ângulos próximos à perpendicular a B_0 e próximos também à frequência de ciclotron que possuem a maior probabilidade de serem amplificados e sofrerem a conversão de modos $Z \rightarrow O$.

Finalmente, é necessário mostrar que os mesmos raios destacados nos diagramas da figura 4.15 continuam sendo amplificados ao longo de suas trajetórias até encontrarem uma janela de Ellis e que o valor da amplificação da intensidade neste ponto é grande o suficiente para corroborar a hipótese proposta pelo modelo de que fluxos significativos em modos que podem se propagar ao espaço interplanetário (no presente caso, o modo O) podem ser gerados pelo processo de conversão de modos, apesar da atenuação imposta à onda quando esta atravessa a região evanescente no interior da janela.

Para mostrar que esta hipótese é corroborada, escolhe-se os mesmos raios já mostrados na figura 4.13 e mostra-se a evolução temporal das suas intensidades espectrais ao longo de suas respectivas trajetórias até que estes atingem algum ponto de conversão. Para tanto, simultaneamente à solução numérica das equações de traçado de raios (4.21a-d), resolve-se também a equação de transferência radiativa (4.26). O coeficiente de emissão induzida γ^Z é dado por (4.25) e o coeficiente de emissão espontânea é dado por (4.24)

Os resultados são mostrados na figura 4.16. A ordenada mostra os valores de I^Z/I_0^Z , onde I_0^Z é dado por (4.27). Isto é, assume-se que o plasma na coroa solar, antes da ocorrência do flare, estava em um estado quiescente, isto é, próximo ao equilíbrio termodinâmico, emitindo radiação com a intensidade espectral I_0^Z . Quando ocorre o flare, com a subsequente injeção de elétrons energéticos na cavidade, as ondas são excitadas e amplificadas ao longo de suas trajetórias de acordo com os resultados mostrados na figura 4.16.

Observa-se que os raios são amplificados em 2 ou em até 3 ordens de grandeza em relação ao nível inicial, antes de atingir um nível de saturação, que ocorre para todos os raios devido ao desaparecimento da curva de ressonância onda-partícula quando o raio chega em um determinado ponto no plasma onde não é mais possível ocorrer interação onda-partícula para o modo Z . Observa-se também que em todos os casos a saturação ocorreu antes do instante de conversão, o que está refletido no patamar horizontal que todas as curvas apresentam nos instantes que precedem a conversão.

Outro aspecto interessante consiste no perfil de degraus apresentado por todas as curvas. Isto se deve às repetidas reflexões que os raios sofrem nas paredes da cavidade, conforme já havia sido salientado na figura 4.13. A região onde a troca de energia entre ondas e partículas é mais favorecida situa-se em torno do centro da cavidade, que é justamente a região onde a velocidade de grupo dos raios é mais alta. Assim, as partes majoritariamente horizontais das curvas correspondem aos intervalos de tempo onde os raios estavam próximos das bordas da cavidade, em torno dos pontos de reflexão. Nestas regiões, a velocidade de grupo é menor, portanto os raios passam mais tempo nestas, e as suas amplificações são menos significativas. Após sofrerem as reflexões, os raios aceleram e passam rapidamente pelo centro da cavidade, sendo fortemente amplificados nesta etapa. Estes processos são visíveis nas partes quase verticais das curvas.

Observa-se também na figura 4.16 que os raios mais amplificados foram aqueles cujos valores de ψ_0 são mais próximos da perpendicular, o que corrobora as conclusões obtidas analisando-se a figura 4.15.

Um último comentário a ser feito a respeito da figura 4.16 se refere aos instantes em que as diferentes curvas mostradas são interrompidas. Isto ocorre para todas no instante onde o critério (4.29) é satisfeito. Na figura, todas as curvas, exceto a vermelha, são interrompidas em $t < 0,5$ s. A curva vermelha se estende para $t > 0,5$ s porque este raio foi inicialmente lançado no

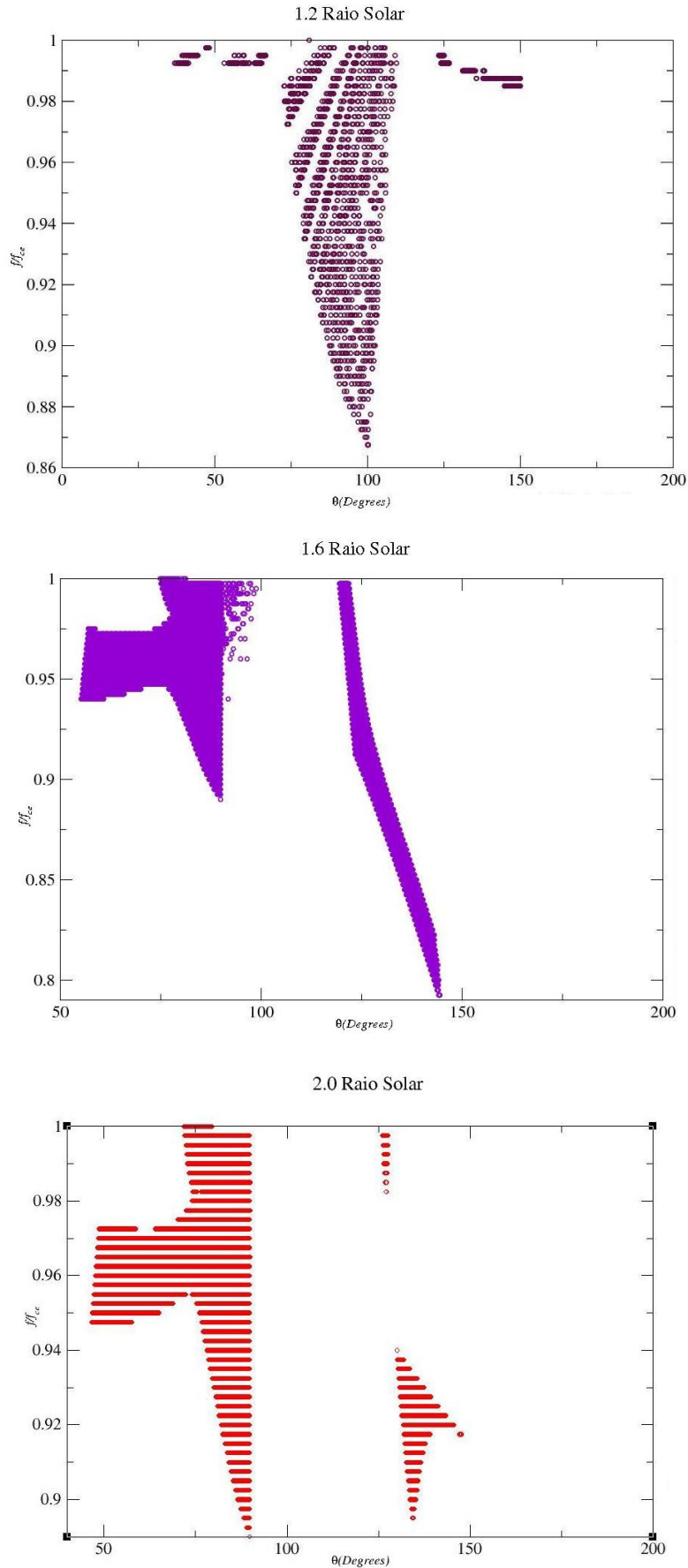


Figura 4.15: Diagramas $f/f_{ce} \times \psi_0$ mostrando os pontos de partida de raios que possuem $\gamma^Z > 0$ e sofrem o processo de conversão $Z \rightarrow O$, partindo das altitudes iniciais $r_0 = 1, 2R_\odot$ (painel superior), $1, 6R_\odot$ (intermediário) e $2, 0R_\odot$ (inferior).

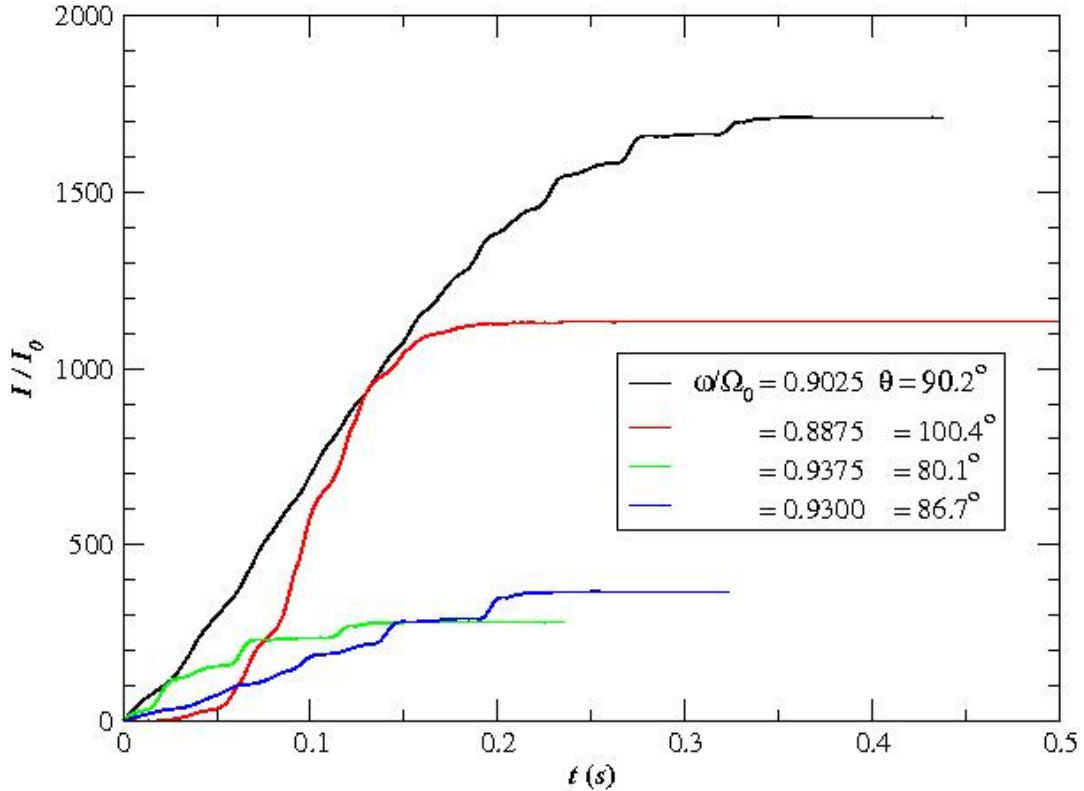


Figura 4.16: Evolução das intensidades espectrais de raios no modo Z em função do tempo, ao longo das trajetórias dos raios. Os valores de f/f_{ce} e ψ_0 são os mesmos da figura 4.13 e aparecem também na legenda.

sentido descendente, aproximou-se da fotosfera quando então sofreu uma reflexão e passou a se propagar no sentido ascendente, vindo a atingir a janela de Ellis em $z - R_{\odot} \simeq 0,015R_{\odot}$. Esses raios lançados no sentido descendente possuem este comportamento de sofrerem conversão em instantes significativamente posteriores aos ascendentes. Deve-se ressaltar também que, após atingir uma janela de Ellis e ocorrer a correspondente transferência de energia no processo $Z \rightarrow O$, o raio “excitado” neste último modo também estará inicialmente aprisionado dentro da cavidade solar até se propagar para um ponto onde sua frequência é maior que a frequência de plasma local, a partir de onde o raio no modo O pode se propagar ao espaço. Embora neste trabalho não sejam mostradas trajetórias dos modos O (ou X), essas curvas são mostradas por *Yoon et al. (2002)* [63, Fig. 7]. Ao longo de sua trajetória, a onda no modo O pode vir a sofrer amplificações subsequentes.

As constatações recém feitas levam às seguintes conclusões:

- As ondas, inicialmente geradas no modo Z , permanecerem aprisionadas na cavidade até sofrerem conversão para o modo O , o qual também permanece aprisionado por um curto intervalo de tempo. Dependendo do ângulo inicial de propagação, o processo como um todo pode levar diversos segundos. Este fato corrobora observações realizadas, discutidas no capítulo 2, que indicam que quando são identificadas emissões conjuntas Tipo III-V, as emissões do tipo V usualmente seguem as de tipo III e nunca as precedem. Embora não haja registro de um tempo característico de atraso do tipo V em relação ao tipo III, pois em alguns eventos tal atraso não é observado, nunca foi registrado um evento de tipo V anterior ao tipo III associado. O modelo aqui apresentado corrobora estas observações.
- Com relação às posições aparentes das fontes nas emissões associadas III-V, as observações indicam que, para uma determinada frequência, a posição da fonte da emissão do tipo V situa-se no mesmo nível ou acima da posição da fonte do tipo III. Isto pode ser visto claramente nos painéis da figura 2.12.
- Com relação à polarização da emissão do tipo V, os resultados aqui obtidos estão em concordância com os resultados obtidos por *Wu et al. (2002)* [61] e *Yoon et al. (2002)* [63], os quais propuseram o mecanismo do maser para gerar emissão do tipo III dentro da cavidade solar

com polarização majoritária no modo X . O modelo proposto nesta dissertação, o qual faz uso da mesma fonte energética, privilegia a geração da emissão do tipo V no modo O . Isto está de acordo com dados observacionais que mostram que em eventos associados III-V, quando as polarizações de ambos os modos são mensuráveis, usualmente a polarização do tipo V é oposta à polarização do tipo III.

O modelo de conversão de modos empregado neste trabalho considera somente o processo de conversão $Z \rightarrow O$ e somente localiza os pontos onde o coeficiente de transmissão é aproximadamente igual ou excede 50%. Este tratamento simplificado foi realizado somente para corroborar a hipótese de que ondas geradas no modo Z possam ser eficientemente amplificadas, enquanto estão se propagando dentro da cavidade solar, antes de transferirem parte ou toda a energia transportada ao modo O , o qual é livre para se propagar ao espaço interplanetário. Neste sentido, os resultados recém apresentados corroboram esta hipótese. Dada a presença de cavidades geradas acima de regiões ativas durante processos de ejeção de partículas energéticas a partir da cromosfera solar, hipótese que é corroborada por observações, conforme discutido no início da seção 4.3, então o processo descrito nesta dissertação possui grande chance de ocorrer. Neste sentido, considera-se que os objetivos propostos neste trabalho foram cumpridos.

Finalmente, é importante mencionar aqui que o processo $Z \rightarrow O$ de conversão linear de modos não é o único possível. *Kim et al. (2007, 2008)* [35, 36] mostraram que o processo de conversão de um modo eletrostático, que pode ser uma onda de Langmuir ou híbrida superior possui uma probabilidade semelhante de se converter ao modo X . Também *Katoh & Iizima (2006)* [33] mostraram que o processo de conversão direta $Z \rightarrow X$ é possível. Contudo, estes resultados envolvem outros processo de conversão de modos, não ocorrendo em janelas de Ellis, e para a sua descrição necessitam da solução numérica de uma equação da onda, o que foge do escopo do presente trabalho.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÃO

Neste trabalho realizou-se uma revisão bibliográfica a respeito das emissões solares do Tipo V. Pode-se notar que um pequeno número de artigos relacionados a este assunto foi desenvolvido ao longo dos anos. Os primeiros trabalhos datam dos anos 60 e resumem-se até meados dos anos 80. Neste intervalo de tempo, emissões de baixa frequência perderam espaço para emissões de frequência da ordem de gigahertz. Credita-se isso ao desenvolvimento tecnológico dos equipamentos de observação da radiação solar, que teve uma forte tendência a abranger espectros de frequências maiores. Com isso, o conhecimento referente a emissões de baixa frequência ficou praticamente estático. Por esse motivo, não há ainda um mecanismo de suporte que dê base para as emissões do Tipo V.

Neste trabalho procurou-se avançar nesta área a fim de resgatar o interesse no estudo referente a emissões de baixa frequência. Foi um modelo em que o mecanismo do Maser de Elétron-Cíclotron seria viável para explicar as emissões do Tipo V. Para isso, o traçado de raios de ondas, originadas no modo Z, propagando-se no plasma do interior de uma cavidade formada na baixa coroa solar foi desenvolvido, com o auxílio de rotinas numéricas, a fim de observar situações em que haveria viabilidade para operação do mecanismo do maser. Estes raios foram seguidos nas suas trajetórias para se detectar se satisfaziam o critério da janela de Ellis, responsável pela conversão de ondas do Modo Z para o Modo O e se, ao passar do tempo, serão amplificadas ou absorvidas pelo plasma contido na cavidade. Observou-se que para um grande número de valores de frequências e ângulos iniciais há conversão de modo e taxa de emissão positiva, o que indica que o mecanismo do maser de elétron-cíclotron pode ser um mecanismo viável para a geração da Emissão Solar do Tipo V.

Mostrou-se que a taxa de amplificação varia em algumas ordens de grandeza, dependendo dos ângulos e frequências originais das ondas. Os estudos apresentados servem de base para propor o mecanismo do maser de elétron-cíclotron como real fonte para emissão solar do tipo V, a qual ainda não tem uma fonte definida.

Estudos posteriores a respeito do mecanismo de conversão do modo Z para o modo O poderão ser realizados futuramente. Em particular, pode-se citar os seguintes desenvolvimentos, tanto imediatos quanto de longo prazo:

- Complementação do processo de conversão $Z \rightarrow O$, incluindo-se a evolução temporal deste último modo até que possa abandonar a cavidade coronal. Para tanto, no momento em que o raio no modo Z entra em uma janela de Ellis, a atenuação resultante da transferência de energia através da região evanescente deve ser calculada, para estimar-se qual será a intensidade espectral inicial do raio no modo O recém convertido. Expressões analíticas para o cálculo dessa atenuação são fornecidas por *Budden (1980, 1986)* [13, 14].
- Um possível aprimoramento no modelo empregado consiste em atribuir uma extensão finita ao feixe eletrônico que fornece a energia livre para a geração das ondas eletromagnéticas. A introdução de efeitos de propagação também da fonte energética pode alterar de forma importante os resultados subsequentes no estudo.
- Na baixa coroa, efeitos de colisão entre as partículas do plasma podem ser importantes. A introdução destes efeitos no tratamento pode ser importante para corroboração do mecanismo do maser como gerador da emissão do tipo V.
- Finalmente, a incorporação de modelos mais completos para descrever a evolução dos parâmetros físicos do plasma ao longo de toda a coroa solar pode também ser importante para

o seguimento posterior do raio convertido ao modo O , uma vez que esta radiação não se propaga no vácuo até os observatórios terrestres ou espaciais, mas dentro de um ambiente de plasma que sofre variações de diversas ordens de grandeza em seus parâmetros físicos.

Parte dos resultados contidos nesta dissertação foram apresentados em Congressos de Iniciação Científica bem como em Encontros Nacionais na área de plasma. Junto a este trabalho será elaborado um artigo a fim de divulgar os resultados aqui apresentados frente aos meios científicos. Acredita-se, portanto, que com esse trabalho uma lacuna referente a emissões de baixa frequência possa ter sido parcialmente sanada, embora evoluções e aprofundamentos futuros nos estudos referidos podem e devem ser realizados.

APÊNDICE A

TRANSFORMAÇÕES DE FOURIER

Dada uma função das variáveis espaciais e do tempo $A(\mathbf{r}, t)$, a sua *transformada de Fourier* $A(\mathbf{k}, \omega)$, isto é, a função recíproca de $A(\mathbf{r}, t)$ no espaço de Fourier, é definida por [3, capítulo 15]

$$A(\mathbf{k}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3r A(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}, \quad (\text{A.1a})$$

sendo que a integral em d^3r é realizada sobre todo o volume do plasma. A função $A(\mathbf{k}, \omega)$ também pode ser representada por $\mathcal{F}\{A(\mathbf{r}, t)\}$.

A transformação inversa de Fourier $A(\mathbf{k}, \omega) \rightarrow A(\mathbf{r}, t)$ é definida por

$$A(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^3k A(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}. \quad (\text{A.1b})$$

Quando obtida a partir da transformação inversa, a função $A(\mathbf{r}, t)$ pode também ser representada por $\mathcal{F}^{-1}\{A(\mathbf{k}, \omega)\}$. Cabe ressaltar aqui que por hipótese todas as integrais em (A.1a) e (A.1b) são realizáveis, isto é, os integrandos devem ser tais que

$$\lim_{\substack{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty \\ t \rightarrow \pm\infty}} \text{Re} \left[A(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \right] \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{|\mathbf{k}| \rightarrow \infty \\ \omega \rightarrow \pm\infty}} \text{Re} \left[A(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \right] \rightarrow 0$$

de forma suficientemente rápida para as integrais convergirem.

A.1 Propriedades das transformadas de Fourier

Diversas propriedades das funções $A(\mathbf{k}, \omega)$ são relevantes no estudo da propagação e absorção de ondas em plasmas. Estas propriedades são discutidas nesta seção.

A.1.1 Condição de realidade

A *condição de realidade* é imposta a $A(\mathbf{k}, \omega)$ quando $A(\mathbf{r}, t)$ é, por hipótese uma quantidade física real. Neste caso,

$$A^*(\mathbf{k}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3r A(\mathbf{r}, t) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \implies \boxed{A^*(\mathbf{k}, \omega) = A(-\mathbf{k}, -\omega)}. \quad (\text{A.2})$$

A.1.2 Transformada da distribuição $\delta(\mathbf{r})$

Dada a distribuição delta de Dirac $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, a sua transformada de Fourier é obtida a partir da aplicação de (A.1a), somente nas variáveis espaciais, resultando

$$\mathcal{F}\{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\} = \int d^3r e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}$$

Assim, as seguintes representações da delta de Dirac são obtidas:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{\pm i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \quad (\text{A.3a})$$

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{\pm i\omega(t-t')}, \quad (\text{A.3b})$$

onde os sinais “ \pm ” foram introduzidos porque a distribuição delta de Dirac é par no seu argumento.

Uma outra representação útil se refere ao quadrado da delta de Dirac. Empregando a representação (A.3b), a qual pode ser escrita

$$2\pi\delta(\omega - \omega_0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt e^{\pm i(\omega - \omega_0)t},$$

obtém-se

$$[2\pi\delta(\omega - \omega_0)]^2 = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt' e^{\pm i(\omega - \omega_0)(t+t')}.$$

Definindo novas variáveis de integração $t_+ = t + t'$ e $t_- = t - t'$, pode-se escrever

$$\begin{aligned} [2\pi\delta(\omega - \omega_0)]^2 &= \frac{1}{2} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\tau}^{\tau} dt_- \int_{-\tau}^{\tau} dt_+ e^{\pm i(\omega - \omega_0)t_+} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \int_{-\tau}^{\tau} dt_+ e^{\pm i(\omega - \omega_0)t_+}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$[\delta(\omega - \omega_0)]^2 = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[\frac{\tau}{2\pi} \delta(\omega - \omega_0) \right]. \quad (\text{A.4})$$

A.1.3 Teorema da convolução

Quando a função $A(\mathbf{r}, t)$ é determinada por uma relação constitutiva com uma outra função $B(\mathbf{r}, t)$ por intermédio de um caroço¹ $K(\mathbf{r}, t)$, através da expressão

$$A(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int d^3r' K(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') B(\mathbf{r}', t'), \quad (\text{A.5})$$

onde os limites de integração são escolhidos, neste caso, de tal forma a satisfazer os princípios da causalidade e da relatividade restrita nos fenômenos físicos. Por esta razão, o limite superior da integração no tempo é t , ao passo que o caroço deve ser tal que $K(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = 0$ para $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| > c(t - t')$, onde c é a velocidade da luz no vácuo. Relações constitutivas do tipo (A.5) são características de meios que manifestam fenômenos dispersivos tanto no espaço quanto no tempo [40, capítulo 6]. Plasmas térmicos são exemplos típicos de meios desta espécie.

O *teorema da convolução* das transformações de Fourier mostra qual é a forma da relação constitutiva (A.5) no espaço recíproco. Aplicando a transformação (A.2a) sobre ambos os lados de (A.5) e empregando (A.2b) em $B(\mathbf{r}, t)$,

$$\begin{aligned} A(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3r e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \int_{-\infty}^t dt' \int d^3r' K(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int d^3k' B(\mathbf{k}', \omega') e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}' - \omega' t')} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3r \int_{-\infty}^t dt' \int d^3r' K(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int d^3k' B(\mathbf{k}', \omega') e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}' - \omega' t')} \left\{ \underbrace{e^{-i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega' t)} e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}' - \omega' t')}}_{=1} \right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3r \int_{-\infty}^t dt' \int d^3r' K(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int d^3k' B(\mathbf{k}', \omega') e^{-i[\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \omega'(t - t')]} e^{-i[(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r} - (\omega - \omega')t]}. \end{aligned}$$

¹Kernel.

Realizando agora as seguintes trocas de variáveis de integração: $t' \rightarrow \tau = t - t'$ e $\mathbf{r}' \rightarrow \boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, a expressão acima pode ser escrita

$$A(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int d^3k' B(\mathbf{k}', \omega') \int_0^{\infty} d\tau \int d^3\rho K(\boldsymbol{\rho}, \tau) e^{-i(\mathbf{k}' \cdot \boldsymbol{\rho} - \omega' \tau)} \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3r e^{-i[(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r} - (\omega - \omega')t]}.$$

Definindo agora a transformada de Fourier do caroço como

$$K(\mathbf{k}, \omega) = \int_0^{\infty} d\tau \int d^3\rho K(\boldsymbol{\rho}, \tau) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho} - \omega \tau)},$$

sendo que os limites de integração e a condição $K(\boldsymbol{\rho}, \tau) = 0$ para $\rho > c\tau$ são impostos para continuar satisfazendo os princípios acima aludidos. Empregando agora as representações (A.3a,b), resulta

$$A(\mathbf{k}, \omega) = K(\mathbf{k}, \omega) B(\mathbf{k}, \omega), \quad (\text{A.6})$$

a qual é a expressão do teorema da convolução.

A.1.4 Teorema da potência

Sejam $A(\mathbf{r}, t)$ e $B(\mathbf{r}, t)$ duas funções reais, então, usando (A.1b),

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3r A(\mathbf{r}, t) B(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^8} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int d^3k' A(\mathbf{k}, \omega) B(\mathbf{k}', \omega') \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3r e^{i[(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r} - (\omega + \omega')t]}.$$

Empregando as representações da delta de Dirac (A.3a,b),

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3r A(\mathbf{r}, t) B(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int d^3k' A(\mathbf{k}, \omega) B(\mathbf{k}', \omega') \\ \times \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \delta(\omega + \omega'), \\ = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^3k A(\mathbf{k}, \omega) B(-\mathbf{k}, -\omega).$$

Usando agora a condição de realidade (A.2), resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3r A(\mathbf{r}, t) B(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^3k A(\mathbf{k}, \omega) B^*(\mathbf{k}, \omega), \quad (\text{A.7})$$

o qual é o teorema da potência.

Um corolário deste teorema é

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3r |A(\mathbf{r}, t)|^2 = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^3k |A(\mathbf{k}, \omega)|^2. \quad (\text{A.8})$$

APÊNDICE B

CÁLCULOS DETALHADOS PARA O MECANISMO DO MASER DE ELÉTRON-CÍCLOTRON

Neste apêndice são derivadas algumas relações auxiliares que serão utilizadas ao longo do texto.

B.1 Forma alternativa para $R_E(\mathbf{k})$.

Serão aqui realizadas algumas transformações com a quantidade $R_E(\mathbf{k})$ definida em (3.34). Inicialmente, emprega-se a identidade (3.13a) com $k = i$ e soma-se sobre i para obter $\Lambda = \frac{1}{3}\Lambda_{ij}^h \lambda_{ji}$. Em seguida, tendo em vista que λ_{ij} pode ser definido pela identidade (3.13b), é fácil mostrar que

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \omega} = \frac{\partial \Lambda_{ij}^h}{\partial \omega} \lambda_{ji}.$$

Esta identidade é útil para o cálculo da seguinte quantidade,

$$\frac{\partial}{\partial \omega} [\omega^n \Lambda(\mathbf{k}, \omega)] = \omega^n \frac{\partial}{\partial \omega} \Lambda(\mathbf{k}, \omega) + n\omega^{n-1} \Lambda(\mathbf{k}, \omega).$$

Mas,

$$\lambda_{ji} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^n \Lambda_{ij}^h) = \omega^n \lambda_{ji} \frac{\partial \Lambda_{ij}^h}{\partial \omega} + n\omega^{n-1} \lambda_{ji} \Lambda_{ij}^h = \omega^n \frac{\partial \Lambda}{\partial \omega} + 3n\omega^{n-1} \Lambda.$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial \omega} [\omega^n \Lambda(\mathbf{k}, \omega)] = \lambda_{ji}(\mathbf{k}, \omega) \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega^n \Lambda_{ij}^h(\mathbf{k}, \omega)] - 2n\omega^{n-1} \Lambda(\mathbf{k}, \omega).$$

Considera-se agora a expressão acima para o modo σ . Neste caso, $\Lambda(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^\sigma) = 0$ e é possível escrever

$$\left[\omega \frac{\partial}{\partial \omega} \Lambda(\mathbf{k}, \omega) \right]_{\omega_{\mathbf{k}}^\sigma} = \left\{ \frac{1}{\omega^{n-1}} \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega^n \Lambda(\mathbf{k}, \omega)] \right\}_{\omega_{\mathbf{k}}^\sigma} = \lambda_{ji}^\sigma(\mathbf{k}) \left\{ \frac{1}{\omega^{n-1}} \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega^n \Lambda_{ij}^h(\mathbf{k}, \omega)] \right\}_{\omega_{\mathbf{k}}^\sigma}.$$

Com a ajuda agora da expressão (3.26), pode-se escrever

$$[R_E^\sigma(\mathbf{k})]^{-1} = e_i^{\sigma*}(\mathbf{k}) e_j^\sigma(\mathbf{k}) \left\{ \frac{1}{\omega^{n-1}} \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega^n \Lambda_{ij}^h(\mathbf{k}, \omega)] \right\}_{\omega_{\mathbf{k}}^\sigma}.$$

O interessante neste resultado é que ele independe do valor de n .

Lembrando agora da definição de Λ_{ij}^h (3.10), resulta para $n = 2$

$$[R_E^\sigma(\mathbf{k})]^{-1} = e_i^{\sigma*}(\mathbf{k}) e_j^\sigma(\mathbf{k}) \left\{ \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega^2 \varepsilon_{ij}^h(\mathbf{k}, \omega)] \right\}_{\omega_{\mathbf{k}}^\sigma}.$$

Definindo agora a quantidade

$$\varepsilon^\sigma(\mathbf{k}, \omega) \equiv e_i^{\sigma*}(\mathbf{k}) e_j^\sigma(\mathbf{k}) \varepsilon_{ij}^h(\mathbf{k}, \omega),$$

observa-se ser possível escrever $R_E(\mathbf{k})$ de uma maneira mais compacta,

$$R_E^\sigma(\mathbf{k}) = \frac{1}{\left\{ \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega^2 \varepsilon^\sigma(\mathbf{k}, \omega)] \right\}_{\omega_k^\sigma}}.$$

Finalmente, a expressão acima será escrita em termos do índice de refração do modo σ . Para tanto, retorna-se à equação da onda no limite de absorção desprezível (3.16), escrevendo o campo elétrico em termos do vetor $e_j^\sigma(\mathbf{k})$, e multiplica-se a mesma por $e_i^{\sigma*}(\mathbf{k})$, somando-se sobre o índice i . Desta forma, resulta

$$\varepsilon^\sigma(\mathbf{k}, \omega) = n_\sigma^2 \left(1 - |\boldsymbol{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{e}}^\sigma|^2 \right),$$

sendo $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{k}/k$ e $n_\sigma = kc/\omega_k^\sigma$ o índice de refração do modo σ .

Assim,

$$\begin{aligned} R_E^\sigma(\mathbf{k}) &= \frac{1}{1 - |\boldsymbol{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{e}}^\sigma|^2} \frac{1}{\left[\frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 n_\sigma^2) \right]_{\omega_k^\sigma}} \\ &= \frac{1}{1 - |\boldsymbol{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{e}}^\sigma|^2} \frac{1}{\left[2n_\sigma \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega n_\sigma) \right]_{\omega_k^\sigma}}. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

A expressão (B.1) é utilizada realizando-se a mudança nas variáveis independentes $\mathbf{k} \rightarrow (\omega, \theta)$.

B.2 Vetor de polarização para ondas de cíclotron

A forma geral do vetor de polarização $\hat{\mathbf{e}}^\sigma(\mathbf{k})$, dada por (3.25), é aqui particularizada para emissão de ondas de cíclotron. Uma representação conveniente para $\hat{\mathbf{e}}^\sigma(\mathbf{k})$ neste caso envolve o uso das funções auxiliares $K_\sigma(\mathbf{k})$ e $T_\sigma(\mathbf{k})$ na fórmula

$$\hat{\mathbf{e}}^\sigma(\mathbf{k}) = \frac{K_\sigma(\mathbf{k}) \boldsymbol{\kappa} + T_\sigma(\mathbf{k}) \mathbf{t} + i\boldsymbol{\alpha}}{[K_\sigma^2(\mathbf{k}) + T_\sigma^2(\mathbf{k}) + 1]^{1/2}}, \quad (\text{B.2})$$

sendo

$$\boldsymbol{\kappa} = \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_1 + \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_3, \quad \mathbf{t} = \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_1 - \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_3 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\alpha} = \hat{\mathbf{e}}_2$$

vetores ortonormais que servem de base no \mathbb{R}^3 . Em (B.2) K_σ descreve a parte *longitudinal* do vetor de polarização, enquanto que T_σ descreve a parte *transversal*, ambas em relação à direção do vetor de onda. As ondas são *longitudinais* para $T_\sigma = 0$ ou $K_\sigma \rightarrow \infty$ e *transversais* para $K_\sigma = 0$ ou para $T_\sigma \rightarrow \infty$ e K_σ finita.

Na teoria magneto-iônica, discutida na seção 3.5, pode-se mostrar [38, Eq. 2.123a,b] que as expressões para os parâmetros K_σ e T_σ são:

$$\begin{aligned} K_\sigma &= \frac{(P - n_\sigma^2) D \sin \theta}{An_\sigma^2 - PS} \\ T_\sigma &= \frac{DP \cos \theta}{An_\sigma^2 - PS}, \end{aligned}$$

onde os parâmetros A , D , P e S são os mesmos introduzido na seção 3.5.

Formas simplificadas destes coeficientes para cada modo de propagação podem ser obtidas a partir de algumas manipulações algébricas. Inicialmente, introduzindo a forma para T_σ dada acima na equação de dispersão (3.73) e fazendo-se uso da relação auxiliar

$$An^2 = P \left(S + \frac{D \cos \theta}{T_\sigma} \right), \quad (\text{B.3})$$

pode-se escrever a equação como

$$T_\sigma^2 + \frac{Y \operatorname{sen}^2 \theta}{(1 - X) \cos \theta} T_\sigma - 1 = 0. \quad (\text{B.4})$$

Calculando-se as soluções da equação (B.4) e usando a forma explícita das relações de dispersão (4.19a-e), resultam as seguintes formas explícitas:

$$T_O = \frac{\tau}{|\cos \theta|} \quad (\text{B.5a})$$

$$T_X = -\frac{|\cos \theta|}{\tau}, \quad (\text{B.5b})$$

onde o parâmetro τ está nas relações de dispersão referidas.

Da mesma forma, partindo da definição acima para o parâmetro K_σ e empregando novamente (B.3) e as relações de dispersão magneto-iônicas, obtém-se

$$K_O = \frac{f_{pe}^2}{f^2 - f_{pe}^2} \frac{\tau f_{ce} \operatorname{sen} \theta}{\tau f - f_{ce} \cos^2 \theta} \quad (\text{B.5c})$$

$$K_X = \frac{f_{pe}^2}{f^2 - f_{pe}^2} \frac{f_{ce} \operatorname{sen} \theta}{f + \tau f_{ce}}. \quad (\text{B.5d})$$

Pode-se obter facilmente também uma forma alternativa para a relação de dispersão para os modos magneto-iônicos (4.19), dada por

$$n_\sigma^2 = 1 - \frac{X T_\sigma}{T_\sigma - Y \cos \theta}. \quad (\text{B.6})$$

B.3 Cálculo da velocidade de grupo

A aproximação WKB, a magnitude da velocidade de grupo de uma onda se propagando no modo σ é dada por

$$v_g^\sigma = \frac{\partial \omega_\sigma}{\partial k} = \frac{1}{\partial k / \partial \omega_\sigma} = \frac{c}{\partial (\omega n_\sigma) / \partial \omega}.$$

Procede-se então ao cálculo da derivada:

$$\frac{\partial (\omega n_\sigma)}{\partial \omega} = n_\sigma + \omega \frac{\partial n_\sigma}{\partial \omega} = n_\sigma + \frac{\omega}{2n_\sigma} \frac{\partial n_\sigma^2}{\partial \omega} = \frac{1}{n_\sigma} \left(n_\sigma^2 + \frac{\omega}{2} \frac{\partial n_\sigma^2}{\partial \omega} \right).$$

De ((B.6)),

$$\frac{\partial}{\partial \omega} n_\sigma^2 = \frac{1}{\omega} \frac{X T_\sigma}{T_\sigma - Y \cos \theta} \frac{2 T_\sigma - Y \cos \theta}{T_\sigma - Y \cos \theta} + \frac{X Y \cos \theta}{(T_\sigma - Y \cos \theta)^2} \frac{\partial T_\sigma}{\partial \omega}.$$

Agora, de (B.4),

$$\frac{\partial T_\sigma}{\partial \omega} = \frac{1}{\omega} T_\sigma \frac{1 - T_\sigma^2}{1 + T_\sigma^2} \frac{1 + X}{1 - X}.$$

Resultando então, após algumas manipulações,

$$\frac{\partial (\omega n_\sigma)}{\partial \omega} = \frac{1}{n_\sigma} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{X T_\sigma Y \cos \theta}{(T_\sigma - Y \cos \theta)^2} \left(1 + \frac{1 - T_\sigma^2}{1 + T_\sigma^2} \frac{1 + X}{1 - X} \right) \right].$$

Portanto, a velocidade de grupo resulta escrita

$$v_g^\sigma = c n_\sigma \left[1 + \frac{1}{2} \frac{X T_\sigma Y \cos \theta}{(T_\sigma - Y \cos \theta)^2} \left(1 + \frac{1 - T_\sigma^2}{1 + T_\sigma^2} \frac{1 + X}{1 - X} \right) \right]^{-1}.$$

Para cada modo magneto-iônico resulta:

$$v_g^\sigma = \frac{c n_\sigma}{R_\sigma}, \quad (\text{B.7a})$$

$$R_X = 1 - \frac{\tau \omega_{pe}^2 \Omega_e}{2\omega (\omega + \Omega_e \tau)^2} (1 + U) \quad (\text{B.7b})$$

$$R_O = 1 + \frac{\tau \omega_{pe}^2 \Omega_e \cos^2 \theta}{2\omega (\tau \omega - \Omega_e \cos^2 \theta)^2} (1 - U) \quad (\text{B.7c})$$

$$U = \frac{\tau^2 - \cos^2 \theta \omega^2 + \omega_{pe}^2}{\tau^2 + \cos^2 \theta \omega^2 - \omega_{pe}^2}. \quad (\text{B.7d})$$

APÊNDICE C

CÁLCULOS DETALHADOS PARA O MODELO TEÓRICO

Neste apêndice, serão apresentados detalhamentos dos cálculos realizados para as expressões empregadas no modelo teórico, discutido no capítulo 4.

C.1 Equações para traçado de raios no modo X

Nesta seção do apêndice, apresenta-se em detalhes as deduções das expressões apresentadas na seção 4.3.2. Dado o sistema hamiltoniano de equações de traçados de raios (4.20a,b) que descreve a evolução de um raio propagando-se no modo σ ($= X, O$), será apresentada agora a derivação de sua forma final para ondas no modo X (ou Z) propagando-se na cavidade solar.

Os sistemas de coordenadas adotados em ambos os lados de (4.20a,b) serão distintos. Em primeiro lugar, observa-se tanto no modelo de parâmetros físicos discutido na seção 4.3.1 quanto nas relações de dispersão dos modos magneto-iônicos (4.19a-e) que o sistema físico em estudo possui simetria azimutal em torno do campo magnético B_0 . Neste caso, a trajetória do raio fica sempre confinada a um plano ortogonal a B_0 e é possível adotar-se um sistema de coordenadas plano-polares como o ilustrado na figura C.1, no qual o raio está confinado ao plano xz e a relação de dispersão depende somente na frequência da onda (f), nas magnitudes (r, k) dos vetores e nos seus respectivos ângulos polares (θ, ψ), ou seja, $\Lambda = \Lambda(k, \psi, r, \theta, f)$.

As equações (4.20a,b) serão escritas então da seguinte maneira. Nos lados direitos as derivadas de $\Lambda(k, \psi, r, \theta, f)$ serão todas escritas em coordenadas plano-polares. Já nos lados esquerdos, será utilizado um sistema misto. As componentes do vetor posição serão escritas em coordenadas cartesianas (x, z), ao passo que as componentes do vetor de onda serão escritas em coordenadas plano-polares (k, ψ). Com esta convenção, o sistema (4.20a,b) se torna

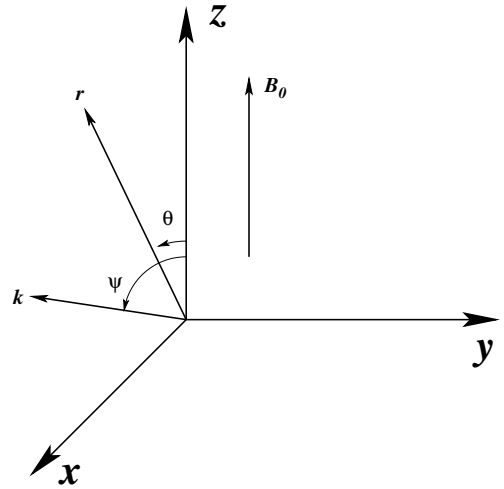


Figura C.1: Sistema de coordenadas adotado.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda_X}{\partial \omega} \frac{dx}{dt} &= -\sin \psi \frac{\partial \Lambda_X}{\partial k} - \cos \psi \frac{1}{k} \frac{\partial \Lambda_X}{\partial \psi} \\ \frac{\partial \Lambda_X}{\partial \omega} \frac{dz}{dt} &= -\cos \psi \frac{\partial \Lambda_X}{\partial k} + \sin \psi \frac{1}{k} \frac{\partial \Lambda_X}{\partial \psi} \\ \frac{\partial \Lambda_X}{\partial \omega} \frac{dk}{dt} &= \cos(\theta - \psi) \frac{\partial \Lambda_X}{\partial r} - \sin(\theta - \psi) \frac{1}{r} \frac{\partial \Lambda_X}{\partial \theta} \\ k \frac{\partial \Lambda_X}{\partial \omega} \frac{d\psi}{dt} &= \sin(\theta - \psi) \frac{\partial \Lambda_X}{\partial r} + \cos(\theta - \psi) \frac{1}{r} \frac{\partial \Lambda_X}{\partial \theta}, \end{aligned}$$

onde já está sendo assumido que o raio a ser traçado se propaga no modo extraordinário.

Como as relações de dispersão fornecem diretamente o índice de refração n_σ e são escritas na forma $\Lambda_\sigma = n_\sigma^2 - \epsilon_\sigma(\psi, \mathbf{r}, \omega)$, as seguintes derivadas são triviais:

$$\frac{\partial \Lambda_\sigma}{\partial k} = \frac{\partial n_\sigma^2}{\partial k} = 2 \frac{c}{\omega} n_\sigma, \quad \frac{\partial n_\sigma^2}{\partial \omega} = -2 \frac{n_\sigma^2}{\omega}.$$

Além disso, é conveniente escrever o lado esquerdo da terceira equação acima em termos de n_σ ,

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\omega}{c} \frac{dn_\sigma}{dt}.$$

Finalmente, é conveniente estabelecer agora a escala espacial para a propagação do raio. Uma vez que as distâncias no modelo de parâmetros físicos discutido na seção 4.3.1 são medidas em raios solares ($1 R_\odot \approx 6.96 \times 10^5$ km), define-se as variáveis espaciais normalizadas,

$$x_\odot = \frac{x}{R_\odot}, \quad z_\odot = \frac{z}{R_\odot}, \quad r_\odot = \frac{r}{R_\odot}.$$

Em termos destas novas variáveis, os lados esquerdos das duas primeira equações acima ficam dados por

$$\frac{dx}{dt} = R_\odot \frac{dx_\odot}{dt} \quad \text{e} \quad \frac{dz}{dt} = R_\odot \frac{dz_\odot}{dt}.$$

Agora é necessário realizar as derivações em Λ_X , empregando a forma explícita para o modo extraordinário. Inicialmente, a relação de dispersão (4.19a,b) será escrita na forma

$$\begin{aligned} \Lambda_X(f, k, \psi, \mathbf{r}) &= \frac{\hat{D}_X(f, k, \psi, \mathbf{r})}{g(f, \psi, \mathbf{r})}, \\ \hat{D}_X &= f [2f(f_{pe}^2 - f^2) + \mu f_{ce}] (n_X^2 - 1) + 2(f_{pe}^2 - f^2) f_{pe}^2 \\ g(f, \psi, \mathbf{r}) &= 2f^2(f_{pe}^2 - f^2) + \mu(f, \psi, \mathbf{r}) f f_{ce} \\ \mu &= f f_{ce} \sin^2 \psi + \sqrt{4(f_{pe}^2 - f^2)^2 \cos^2 \psi + f^2 f_{ce}^2 \sin^4 \psi}, \end{aligned}$$

de onde,

$$\partial \Lambda_X = \frac{1}{g} \left(\partial \hat{D}_X - \frac{\hat{D}_X}{g} \partial g \right).$$

Dadas agora as seguintes relações auxiliares,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial f} &= f_{ce} \sin^2 \psi + f \frac{f_{ce}^2 \sin^4 \psi - 8(f_{pe}^2 - f^2) \cos^2 \psi}{\sqrt{4(f_{pe}^2 - f^2)^2 \cos^2 \psi + f^2 f_{ce}^2 \sin^4 \psi}}, \\ \frac{\partial \mu}{\partial \psi} &= 2 \frac{f f_{ce} \mu - 2(f_{pe}^2 - f^2)^2}{\sqrt{4(f_{pe}^2 - f^2)^2 \cos^2 \psi + f^2 f_{ce}^2 \sin^4 \psi}} \sin \psi \cos \psi, \\ \frac{\partial \mu}{\partial \zeta} &= \frac{\mu f f_{ce} \sin^2 \psi \eta_\zeta + 4(f_{pe}^2 - f^2) f_{pe}^2 \cos^2 \psi \delta_\zeta}{\sqrt{4(f_{pe}^2 - f^2)^2 \cos^2 \psi + f^2 f_{ce}^2 \sin^4 \psi}}, \\ \nu &= \mu - f f_{ce} = -f f_{ce} \cos^2 \psi + \sqrt{4(f_{pe}^2 - f^2)^2 \cos^2 \psi + f^2 f_{ce}^2 \sin^4 \psi}, \end{aligned}$$

onde $\zeta = r, \theta$, e

$$\begin{aligned} \eta_r &= \frac{\partial}{\partial r} \ln B_0 \longrightarrow \frac{\eta_{R_\odot}}{R_\odot} = \frac{1}{R_\odot} \frac{\partial}{\partial r_\odot} \ln B_0 \\ \delta_r &= \frac{\partial}{\partial r} \ln n_e \longrightarrow \frac{\delta_{R_\odot}}{R_\odot} = \frac{1}{R_\odot} \frac{\partial}{\partial r_\odot} \ln n_e. \end{aligned}$$

Assim, após calcular as derivadas de $\hat{D}_X(f, k, \psi, \mathbf{r})$ e $g(f, \psi, \mathbf{r})$ e combinar ambos os resultados, resultam, após uma série de manipulações algébricas, as seguintes expressões para as derivadas de $\Lambda_X(f, k, \psi, \mathbf{r})$,

$$\frac{\partial \Lambda_X}{\partial k} = 2 \frac{n_X^2}{k}$$

$$fh \frac{\partial \Lambda_X}{\partial f} = -\mathcal{F}$$

$$\frac{\partial \Lambda_X}{\partial \psi} = -\frac{2ff_{ce}(1-n_X^2)n_X^2 \sin \psi \cos \psi}{\sqrt{4(f_{pe}^2 - f^2)^2 \cos^2 \psi + f^2 f_{ce}^2 \sin^4 \psi}}$$

$$h \frac{\partial \Lambda_X}{\partial \zeta} = -2\mathcal{B}_\eta(1-n_X^2)\eta_\zeta + 2\mathcal{B}_\delta \delta_\zeta,$$

onde

$$h = 2f(f_{pe}^2 - f^2) + \mu f_{ce} = g/f$$

$$\mathcal{F} = 2[\mu f_{ce} + 2f(2f_{pe}^2 - f^2)]n_X^2 + \frac{\mu^2 f_{ce} + 8\nu f(f_{pe}^2 - f^2)}{\sqrt{4(f_{pe}^2 - f^2)^2 \cos^2 \psi + f^2 f_{ce}^2 \sin^4 \psi}}(1-n_X^2)$$

$$\mathcal{B}_\eta = \frac{\mu^2 f_{ce}/2}{\sqrt{4(f_{pe}^2 - f^2)^2 \cos^2 \psi + f^2 f_{ce}^2 \sin^4 \psi}}$$

$$\mathcal{B}_\delta = f_{pe}^2 \left(\frac{2(f_{pe}^2 - f^2)(\nu/f + f_{ce}N_X^2 \cos^2 \psi)}{\sqrt{4(f_{pe}^2 - f^2)^2 \cos^2 \psi + f^2 f_{ce}^2 \sin^4 \psi}} + fn_X^2 \right).$$

Uma manipulação adicional pode ser realizada nos termos compostos

$$\sin \psi \frac{\partial \Lambda_X}{\partial k} + \cos \psi \frac{1}{k} \frac{\partial \Lambda_X}{\partial \psi} = \frac{2}{k} \mathcal{A}_x n_X^2 \sin \psi$$

$$\cos \psi \frac{\partial \Lambda_X}{\partial k} - \sin \psi \frac{1}{k} \frac{\partial \Lambda_X}{\partial \psi} = \frac{2}{k} \mathcal{A}_z n_X^2 \cos \psi,$$

sendo agora

$$\mathcal{A}_x = 1 - \frac{ff_{ce}(1-n_X^2)\cos^2 \psi}{\sqrt{4(f_{pe}^2 - f^2)^2 \cos^2 \psi + f^2 f_{ce}^2 \sin^4 \psi}}$$

$$\mathcal{A}_z = 1 + \frac{ff_{ce}(1-n_X^2)\sin^2 \psi}{\sqrt{4(f_{pe}^2 - f^2)^2 \cos^2 \psi + f^2 f_{ce}^2 \sin^4 \psi}}.$$

Combinando todos estes resultados, resulta finalmente o sistema de equações para traçado de raios no modo extraordinário (4.21a-d) empregado nesta dissertação.

C.2 O coeficiente de emissão espontânea

A emissividade espectral no modo X , levando em conta somente a contribuição dos elétrons, é calculada através do coeficiente S^X , dado por (4.24). Usando ((4.22)) como a emissividade de partícula única e (B.7a) para a velocidade de grupo, adota-se um sistema de coordenadas esféricas para um plasma com simetria azimutal para o cálculo da integral em S^X , onde se define a nova variável de integração $u = p/m_e c$. Em termos desta nova variável, as seguintes transformações são realizadas,

$$\int d^3 p F_e(\mathbf{p}) \rightarrow 2\pi \int_0^\infty u^2 du \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha F_e(u) \rightarrow 2\pi \int_0^\infty u^2 du \int_{-1}^1 d\mu F_e(u, \mu) = \int d^3 u F_e(u, \mu),$$

$$\sin \alpha = \frac{u_\perp}{u} = \sqrt{1 - \mu^2}, \quad \cos \alpha = \mu, \quad \gamma = \sqrt{1 + u^2}, \quad \beta = \frac{u}{\gamma},$$

$$\delta \left[\omega(1 - n_X \beta \cos \alpha \cos \psi) - s \frac{\Omega_e}{\gamma} \right] = \frac{\gamma}{\omega} \delta \left(\sqrt{1 + u^2} - s \frac{\Omega_e}{\omega} - n_X u \mu \cos \psi \right),$$

resultando então a seguinte expressão para S^X [63],

$$S^X = \pi \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{m_e c^2}{(1 + T_X^2) R_X} \sum_{s \rightarrow -\infty}^{\infty} \int d^3 u \frac{u^2}{\gamma} (1 - \mu^2)$$

$$\begin{aligned} & \times \left| \frac{\gamma\omega}{\Omega_e} \left[K_X \sin \psi + T_X \left(\cos \psi - n_X \frac{u\mu}{\gamma} \right) \right] \frac{J_s(b_X)}{b_X} + J'_s(b_X) \right|^2 \\ & \times \delta \left(\sqrt{1+u^2} - s \frac{\Omega_e}{\omega} - n_X u \mu \cos \psi \right) F_e(u, \mu), \quad (\text{C.1}) \end{aligned}$$

onde $b_X = (\omega/\Omega_e) n_X u \sqrt{1-\mu^2} \sin \psi$.

Introduzindo agora a distribuição eletrônica adotada no presente modelo (4.17), resulta,

$$\begin{aligned} S^X &= \pi \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{m_e c^2}{(1+T_X^2) R_X} \sum_{s \rightarrow -\infty}^{\infty} \int d^3 u \frac{u^2}{\gamma} (1-\mu^2) \\ & \times \left| \frac{\gamma\omega}{\Omega_e} \left[K_X \sin \psi + T_X \left(\cos \psi - n_X \frac{u\mu}{\gamma} \right) \right] \frac{J_s(b_X)}{b_X} + J'_s(b_X) \right|^2 \\ & \times \delta \left(\gamma - s \frac{\Omega_e}{\omega} - n_X u \mu \cos \psi \right) \left[\frac{e^{-u^2/\alpha_0^2}}{(\sqrt{\pi}\alpha_0)^3} + \frac{n_b g(\mu) e^{-(u-u_b)^2/\alpha^2}}{n_0 (\sqrt{\pi}\alpha)^3 A_u A_\mu} \right]. \end{aligned}$$

Vai ser utilizada agora a aproximação fracamente relativística, onde se desenvolve γ em série de potências, $\gamma \simeq 1 + u^2/2$, e se despreza todos os termos proporcionais a u^3 ou de mais alta ordem, resultando

$$\begin{aligned} S^X &= \pi \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{m_e c^2}{(1+T_X^2) R_X} \sum_{s \rightarrow -\infty}^{\infty} \int d^3 u u^2 (1-\mu^2) \\ & \times \left| \frac{\omega}{\Omega_e} [K_X \sin \psi + T_X (\cos \psi - n_X u \mu)] \frac{J_s(b_X)}{b_X} + J'_s(b_X) \right|^2 \\ & \times \delta \left(1 + \frac{u^2}{2} - s \frac{\Omega_e}{\omega} - n_X u \mu \cos \psi \right) \left[\frac{e^{-u^2/\alpha_0^2}}{(\sqrt{\pi}\alpha_0)^3} + \frac{n_b g(\mu) e^{-(u-u_b)^2/\alpha^2}}{n_0 (\sqrt{\pi}\alpha)^3 A_u A_\mu} \right]. \quad (\text{C.2}) \end{aligned}$$

A condição de ressonância define então a semicircunferência

$$1 + \frac{u^2}{2} - s \frac{\Omega_e}{\omega} - n_X u \mu \cos \psi = 0 \implies u^2 - 2n_X \mu \cos \psi u + 2 \left(1 - s \frac{\Omega_e}{\omega} \right) = 0,$$

cuja solução é

$$u = u_{\pm}^X = n_X \mu \cos \psi \pm \sqrt{n_X^2 \mu^2 \cos^2 \psi - 2 \left(1 - s \frac{\Omega_e}{\omega} \right)}.$$

Para s positivo e $\omega \leq s\Omega_e$ (como no modo Z), o argumento da raiz é sempre positivo definido e a condição de ressonância é sempre satisfeita. Contudo, somente $u = u_+^X$ é físico, uma vez que $u \geq 0$. Por outro lado, se $\omega > s\Omega_e$ a ressonância é satisfeita para ambos os sinais sempre que $u_{\pm}^X \geq 0$. Porém, o argumento da raiz deve ser positivo, o que gera uma condição adicional:

$$n_X^2 \mu^2 \cos^2 \psi - 2 \left(1 - s \frac{\Omega_e}{\omega} \right) \geq 0 \implies 1 \geq \mu^2 \geq \mu_s^2, \quad \mu_s^2 = \frac{2}{n_X^2 \cos^2 \psi} \left(1 - s \frac{\Omega_e}{\omega} \right).$$

Em qualquer situação,

$$\delta \left(1 + \frac{u^2}{2} - s \frac{\Omega_e}{\omega} - n_X u \mu \cos \psi \right) = \sum_{r=\pm 1} \frac{\delta(u - u_r^X)}{|u_r^X - n_X \mu \cos \psi|}. \quad (\text{C.3})$$

A soma infinita sobre s contém três tipos de contribuições: o termo $s = 0$ é denominado *ressonância de Čerenkov*. Termos com $s > 0$ são chamados termos de *ressonância de cíclotron* e termos com $s < 0$ são chamados termos de *ressonância de cíclotron anômala*. Para este trabalho somente termos com $s \geq 0$ serão considerados. Usando então a condição de ressonância (C.3) para calcular analiticamente as integrais em u , a expressão (C.1) resulta escrita, após uma série de manipulações, como

$$S^X = 2m_e c^2 \frac{f_{pe}^2}{f^2} \frac{\sqrt{\pi}}{R_X} \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \Theta(s f_{ce} - f) \int_{-1}^1 d\mu \Pi_s^X(u_+^X, \mu) \right. \\ \left. + \Theta(f - s f_{ce}) \Theta(1 - \mu_s^2) \int_{\mu_s}^1 d\mu \sum_{r=\pm 1} [\Pi_s^X(u_r^X, \mu) + \Pi_s^X(u_r^X, -\mu)] \right\}, \quad (\text{C.4a})$$

sendo $\Theta(x)$ a função de Heaviside e

$$\Pi_s^X(u, \mu) = \frac{\Psi_s^X(u, \mu)}{|u - n_X \mu \cos \psi|} \left(\frac{e^{-u^2/\alpha_0^2}}{\alpha_0^3} + \frac{n_b g(\mu) e^{-(u-u_b)^2/\alpha^2}}{n_0 \alpha^3 A_u A_\mu} \right) \quad (\text{C.4b})$$

$$\Psi_s^X(u, \mu) = \frac{\tau^2 u^4 (1 - \mu^2)}{\tau^2 + \cos^2 \psi} \left| \frac{f}{f_{ce}} \left[K_X \sin \psi - \frac{|\cos \psi|}{\tau} (\cos \psi - n_X \mu u) \right] \frac{J_s(b_X)}{b_X} + J'_s(b_X) \right|^2. \quad (\text{C.4c})$$

Agora, as integrais em μ devem ser realizadas numericamente.

C.3 O coeficiente de emissão induzida

O coeficiente de emissão eletrônica induzida, ou taxa de crescimento, é definido formalmente em (3.51). Aqui será realizado o cálculo explícito do coeficiente para ambos os modos X e O porque na seção 4.4 serão apresentados resultados para ambos.

Repetindo a expressão geral para γ^σ ,

$$\gamma^\sigma = 8\pi^2 \frac{q_\alpha^2 R_E^\sigma(\mathbf{k})}{\omega_{\mathbf{k}}^\sigma} \sum_{s \rightarrow -\infty}^{\infty} \int d^3 p |\hat{\epsilon}^{\sigma*}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{k}, \mathbf{p}; s)|^2 \\ \times \left(\frac{s\omega_\alpha}{v_\perp} \frac{\partial}{\partial p_\perp} + k_\parallel \frac{\partial}{\partial p_\parallel} \right) f(p_\perp, p_\parallel) \delta(\omega_{\mathbf{k}}^\sigma - k_\parallel v_\parallel - s\omega_\alpha),$$

o termo $\hat{\epsilon}^{\sigma*}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{k}, \mathbf{p}; s)$ é calculado empregando-se (3.43b). Usando também a relação de dispersão (B.6) e realizando novamente a transformação na variável de integração $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{u}$, o coeficiente γ^σ pode ser escrito [63, 64],

$$\gamma^\sigma = \frac{\pi f_{pe}^2}{2 f (1 + T_\sigma^2)} \frac{1}{R_\sigma} \sum_{s \rightarrow -\infty}^{\infty} \int d^3 u (1 - \mu^2) \delta\left(\sqrt{1 + u^2} - s \frac{\Omega_e}{\omega} - n_\sigma u \mu \cos \psi\right) \\ \left| \frac{\gamma \omega}{\Omega_e} \left[K_\sigma \sin \psi + T_\sigma \left(\cos \psi - n_\sigma \frac{u \mu}{\gamma} \right) \right] \frac{J_s(b_\sigma)}{b_\sigma} + J'_s(b_\sigma) \right|^2 \left[u \frac{\partial}{\partial u} + (n_\sigma u \cos \psi - \mu) \frac{\partial}{\partial \mu} \right] F_e(u, \mu). \quad (\text{C.5})$$

Inicialmente, observa-se que se o plasma estiver em equilíbrio termodinâmico, isto é, $n_b = 0$ em (4.17), a seguinte relação simples entre γ^σ e S^σ (dado por C.1, para o modo X) resulta,

$$\gamma^\sigma = -\frac{1}{\alpha_0^2} \frac{f}{m_e c^2} S^\sigma = -\frac{f}{2} \frac{S^\sigma}{k_B T_e}, \quad (\text{C.6})$$

ou seja, no equilíbrio termodinâmico emissão espontânea e induzida são proporcionais entre si.

Retornando agora para a forma geral (C.5), considera-se novamente o caso fracamente relativístico e mantém-se somente as contribuições dos harmônicos $s \geq 0$, de onde resulta

$$\gamma^\sigma = \pi^2 \frac{f_{pe}^2}{f (1 + T_\sigma^2)} \frac{1}{R_\sigma} \sum_{s=0}^{\infty} \int_{-1}^1 d\mu (1 - \mu^2) \int_0^\infty du u^2 \delta\left(1 + \frac{u^2}{2} - \frac{s f_{ce}}{f} - n_\sigma u \mu \cos \psi\right) \\ \times \left| \frac{f}{f_{ce}} [K_\sigma \sin \psi + T_\sigma (\cos \psi - n_\sigma u \mu)] \frac{J_s(b_\sigma)}{b_\sigma} + J'_s(b_\sigma) \right|^2 \left[u \frac{\partial}{\partial u} + (n_\sigma u \cos \psi - \mu) \frac{\partial}{\partial \mu} \right] F_e(u, \mu).$$

Calculando as derivadas de $F_e(u, \mu)$ em (4.17),

$$\frac{\partial F_e}{\partial u} = -\frac{2u}{\alpha_0^2} \frac{e^{-u^2/\alpha_0^2}}{(\sqrt{\pi} \alpha_0)^3} - \frac{n_b}{n_0} \frac{2(u - u_0)}{\alpha^2} \frac{1}{\pi^{3/2} \alpha^3 A_u A_\mu} \exp\left(-\frac{(u - u_0)^2}{\alpha^2}\right) \text{sech}^2\left(\frac{\mu - \mu_0}{\Delta \mu}\right)$$

$$\frac{\partial F_e}{\partial \mu} = -\frac{2}{\Delta \mu} \frac{n_b}{n_0} \frac{1}{\pi^{3/2} \alpha^3 A_u A_\mu} \exp\left(-\frac{(u-u_0)^2}{\alpha^2}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{\mu-\mu_0}{\Delta \mu}\right) \tanh\left(\frac{\mu-\mu_0}{\Delta \mu}\right)$$

e usando novamente a condição de ressonância (C.3) para calcular a integral em u , escreve-se finalmente γ^σ como

$$\begin{aligned} \gamma^\sigma = & -2 \frac{\sqrt{\pi} f_{pe}^2}{R_\sigma f} \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \Theta(s f_{ce} - f) \int_{-1}^1 d\mu Q_s^\sigma(u_+^\sigma, \mu) \right. \\ & \left. + \Theta(f - s f_{ce}) \Theta(1 - \mu_n) \int_{\mu_n}^1 d\mu \sum_{r=\pm 1} [\Theta(\cos \psi) Q_s^\sigma(u_r^\sigma, \mu) + \Theta(-\cos \psi) Q_s^\sigma(u_r^\sigma, -\mu)] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.7a})$$

onde

$$\begin{aligned} Q_s^\sigma(u, \mu) = & \frac{H_s^\sigma(u, \mu)}{|u - n_\sigma \mu \cos \psi|} \left\{ \frac{u^2}{\alpha_0^5} e^{-u^2/\alpha_0^2} \right. \\ & \left. + \frac{n_b}{n_0} \frac{e^{-(u-u_0)^2/\alpha^2}}{\alpha^3 A_u A_\mu} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\mu-\mu_0}{\Delta \mu}\right) \left[\frac{u(u-u_0)}{\alpha^2} + \frac{n_\sigma u \cos \psi - \mu}{\Delta \mu} \tanh\left(\frac{\mu-\mu_0}{\Delta \mu}\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.7b})$$

$$H_s^\sigma(u, \mu) = \frac{u^2 (1 - \mu^2)}{1 + T_\sigma^2} \left\{ \frac{f}{f_{ce}} [K_\sigma \sin \psi + T_\sigma (\cos \psi - n_\sigma u \mu)] \frac{J_s(b_\sigma)}{b_\sigma} + J'_s(b_\sigma) \right\}^2. \quad (\text{C.7c})$$

Finalmente, o coeficiente H_s^σ pode ser colocado de forma explícita para cada modo:

$$H_s^O(u, \mu) = \frac{u^2 (1 - \mu^2)}{\tau^2 + \cos^2 \psi} \left\{ \frac{f}{f_{ce}} [K_O \sin \psi |\cos \psi| + \tau (\cos \psi - n_O u \mu)] \frac{J_s(b_O)}{b_O} + J'_s(b_O) |\cos \psi| \right\}^2 \quad (\text{C.7d})$$

$$H_s^X(u, \mu) = \frac{\tau^2 u^2 (1 - \mu^2)}{\tau^2 + \cos^2 \psi} \left\{ \frac{f}{f_{ce}} \left[K_X \sin \psi - \frac{|\cos \psi|}{\tau} (\cos \psi - n_X u \mu) \right] \frac{J_s(b_X)}{b_X} + J'_s(b_X) \right\}^2. \quad (\text{C.7e})$$

C.4 A equação de transferência radiativa

Repetindo a equação de transferência radiativa conforme esta aparece em (3.58a-d), porém escrevendo-a explicitamente para o modo X e realizando a troca $\theta \rightarrow \psi$, resulta

$$n_{Xt}^2(\omega, \psi_r) \frac{d}{ds} \left[\frac{I^X(\omega, \psi_r)}{n_{Xt}^2(\omega, \psi_r)} \right] = \alpha^X(\omega, \psi_r) + \mu^X(\omega, \psi_r) I^X(\omega, \psi_r),$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha^X(\omega, \psi_r) &= \frac{\omega^2 n_X^2}{(2\pi c)^3} \frac{\partial(\omega n_X)}{\partial \omega} \left| \frac{\partial \cos \psi}{\partial \cos \psi_r} \right| \frac{dP^X}{dV}, \\ \mu^X(\omega, \psi_r) &= \frac{\gamma^X}{v_g^X}, \\ n_{Xt}^2(\omega, \psi_r) &= \frac{v_g^X}{c} n_X^2 \frac{\partial(\omega n_X)}{\partial \omega} \left| \frac{\partial \cos \psi}{\partial \cos \psi_r} \right|. \end{aligned}$$

Contudo, esta equação é excessivamente complicada e, por isso, algumas aproximações serão realizadas. Inicialmente, *Melrose (1980)* [39, pg. 275] argumenta que para $\omega \gtrsim 2\omega_{pe}$ as seguintes aproximações são justificadas: $\psi_r^\sigma \simeq \psi$, $v_g^\sigma \simeq cn_\sigma$, $n_\sigma \partial(\omega n_\sigma)/\partial \omega \approx 1$ e $n_{\sigma t} \simeq n_\sigma$. Com estas aproximações, a equação acima fica

$$n_X^2 \frac{d}{ds} \left(\frac{I^X}{n_X^2} \right) = \frac{\omega^2 n_X}{(2\pi c)^3} \frac{dP^X}{dV} + \frac{\gamma^X}{v_g^X} I^X(\omega, \psi).$$

Como ao longo da trajetória percorrida pelo raio, cuja extensão é dada por s , um incremento infinitesimal é dado por $ds = v_g^X dt$, resulta

$$n_X^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{I^X}{n_X^2} \right) = S^X + \gamma^X I^X(\omega, \psi),$$

onde S^X está definido a partir de dP^X/dV através da relação (3.60), com sua forma explícita dada por (4.23) e (C.4). Finalmente, desprezando-se a variação de n_X ao longo da propagação do raio para fins de cálculo da equação de transferência radiativa, resulta a seguinte expressão simplificada:

$$\frac{d}{dt}I^X(f, \psi) = S^X + \gamma^X I^X(f, \psi), \quad (\text{C.8})$$

onde S^X será dada por (C.4) e γ^X por (C.7).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Sun Layers. http://fusedweb.pppl.gov/CPEP/Chart_Pages/5.Plasmas/SunLayers.html. Acesso em: 22 de julho de 2011.
- [2] ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I. A. *Handbook of Mathematical Functions*. New York : Dover, 1970.
- [3] ARFKEN, G. B., WEBER, H. J. *Mathematical Methods for Physicists*. New York : Elsevier, 2005, 1182 + xii pp., sixth Edição.
- [4] ASCHWANDEN, MARKUS J. *Physics of the Solar Corona. An Introduction with Problems and Solutions*. Berlin : Springer-Verlag, 2006, 892 + xxxii pp., segunda Edição.
- [5] AUDENAERDE, K. Cyclotron emissivity of a plasma of arbitrary density. *Plasma Physics*, v. 19, n. 4, pp. 299–314, April 1977.
- [6] Baker, D. N., Klecker, B., Schwartz, S. J., Schwenn, R., von Steiger, R. (Eds.). Dordrecht : Springer-Verlag, 2007, 372 + 9 pp. (Space Sciences Series of ISSI, Volume 22).
- [7] BERNSTEIN, I. B. Geometric Optics in Space- and Time-Varying Plasmas. *The Physics of Fluids*, v. 18, n. 3, pp. 320–324, March 1975.
- [8] BITTENCOURT, J. A. *Fundamentals of Plasma Physics*. New York : Springer-Verlag, 2004, 678 pp., third Edição.
- [9] BORNATICI, M., CANO, R., de Barbieri, O., ENGELMANN, F. Electron Cyclotron Emission and Absorption in Fusion Plasmas. *Nuclear Fusion*, v. 23, n. 9, pp. 1153–1257, September 1983.
- [10] BRAMBILLA, M., KRÜCKEN, T. On the Local Power Dissipation of h.f. Waves in Hot Inhomogeneous Plasmas. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, v. 30, n. 8, pp. 1083–1092, July 1988.
- [11] BRANKIN, R. W., GLADWELL, I. Algorithm 771: rksuite_90: Fortran 90 software for ordinary differential equation initial-value problems. *ACM Transactions on Mathematical Software*, v. 23, n. 3, pp. 402–415, September 1997.
- [12] BUDDEN, K. G. *Lectures on Magnetoionic Theory*. New York : Gordon and Breach, 1964, 82 pp.
- [13] BUDDEN, K. G. The Theory of Radio Windows in the Ionosphere and Magnetosphere. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, v. 42, n. 3, pp. 287–298, March 1980.
- [14] BUDDEN, K. G. The theory of radio windows in the ionosphere and magnetosphere–II. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, v. 48, n. 7, pp. 633–641, July 1986.
- [15] BUDDEN, K. G. *The Propagation of Radio Waves: The Theory of Radio Waves of Low Power in the Ionosphere and Magnetosphere*. New York : Cambridge University Press, August 1988, 669 + xvi pp.
- [16] BUDDEN, K. G. *Radio Waves in the Ionosphere*. New York : Cambridge University Press, June 2009, 542 + xxii pp.
- [17] BUDDEN, K. G., JONES, D. Theory of Radio Windows in Planetary Magnetospheres. *Proceedings of The Royal Society of London, Series A: Mathematical and Physical Sciences*, v. 412, n. 1842, pp. 1–23, July 1987.

- [18] BUDDEN, K. G., TERRY, P. D. Radio Ray Tracing in Complex Plane. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, v. 321, n. 1546, pp. 275–301, February 1971.
- [19] CHEN, F. F. *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion. Volume 1: Plasma Physics*. New York : Springer-Verlag, 1984, 421 pp., second Edição.
- [20] DULK, G A. Radio Emission from the Sun and Stars. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, v. 23, n. 1, pp. 169–224, September 1985.
- [21] DULK, G. A., SUZUKI, S., GARY, D. E. The Position and Polarization of Type V Solar Bursts. *Astronomy and Astrophysics*, v. 88, n. 1-2, pp. 218–229, August 1980.
- [22] ELLIS, G. R. The Z Propagation Hole in the Ionosphere. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, v. 8, n. 1-2, pp. 43–54, February 1956.
- [23] GAELZER, R. O Maser de Elétron-Cíclotron como Mecanismo Gerador da Radiação Quilométrica das Auroras. Dissertação de Mestrado, Instituto de Física - UFRGS, Porto Alegre - RS, abril 1991. 215 pp.
- [24] GAELZER, R. *O Tensor Dielétrico Efetivo para Plasmas Imersos em Campos Magnéticos com Gradientes Perpendiculares*. Tese de Doutorado, Instituto de Física - UFRGS, Porto Alegre, novembro 1995. 155 pp.
- [25] GAELZER, R., ZIEBELL, L. F., SCHNEIDER, R. S. Propagation and Amplification of Auroral Kilometric Radiation in Finite Width Auroral Cavities. *Journal of Geophysical Research*, v. 97, n. A12, pp. 19299–19310, December 1992.
- [26] GAELZER, R., ZIEBELL, L. F., SCHNEIDER, R. S. Ray Tracing Studies on Auroral Kilometric Radiation in Finite-Width Auroral Cavities. *Journal of Geophysical Research*, v. 99, n. A5, pp. 8905–8916, May 1994.
- [27] GOLDSTEIN, H., POOLE, C., SAFKO, J. *Classical Mechanics*. New York : Addison Wesley, 2000, 638 + xi pp., third Edição.
- [28] GOPALSWAMY, N. Coronal Mass Ejections and Solar Radio Emissions. Disponível em: <<http://cdaw.gsfc.nasa.gov/publications/>>. Acesso em: 25 de julho de 2011.
- [29] GOPALSWAMY, NAT. A New Wind/WAVES Type II Burst Catalog Available Online. Disponível em: <<http://www.lesia.obspm.fr/cesra/highlights/highlight07-5.html>>. Acesso em: 24 de julho de 2011.
- [30] GURNETT, D.A., BHATTACHARJEE, A. *Introduction to plasma physics: with space and laboratory applications*. Cambridge : Cambridge, 2005, 453 + x pp.
- [31] HERRING, R. N. Tracing of Z-mode rays in the magnetosphere. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, v. 42, n. 11-12, pp. 885–897, nov-dec 1980.
- [32] JACKSON, J. D. *Classical Electrodynamics*. New York : John Wiley & Sons, 1999, 808 + xxi pp., third edition Edição.
- [33] KATOH, Y., IIZIMA, M. A computer simulation study on the mode conversion process from slow X-mode to fast X-mode by the tunneling effect. *Earth, Planets and Space*, v. 58, n. 11, pp. E53–E56, November 2006.
- [34] KHOTYAINTSEV, MYKOLA. *Radar Probing of the Sun*. PhD thesis, Uppsala University, Department of Astronomy and Space Physics, 4November 2006.
- [35] KIM, EUN-HWA, CAIRNS, IVER H., ROBINSON, PETER A. Extraordinary-Mode Radiation Produced by Linear-Mode Conversion of Langmuir Waves. *Physical Review Letters*, v. 99, n. 1, p. 015003, Jul 2007.
- [36] KIM, EUN-HWA, CAIRNS, IVER H., ROBINSON, PETER A. Mode conversion of Langmuir to electromagnetic waves at magnetic field-aligned density inhomogeneities: Simulations, theory, and applications to the solar wind and the corona. *Physics of Plasmas*, v. 15, n. 10, p. 102110, October 2008.

- [37] MCVEY, B. D., SUND, R. S., SCHARER, J. E. Local Power Conservation for Linear Wave Propagation in an Inhomogeneous Plasma. *Physical Review Letters*, v. 55, n. 5, pp. 507–510, July 1985.
- [38] MELROSE, D. B. *Plasma Astrophysics. Nonthermal Processes in Diffuse Magnetized Plasmas Volume 1: The Emission, Absorption and Transfer of Waves in Plasmas*. New York : Gordon and Breach, 1980.
- [39] MELROSE, D. B. *Plasma Astrophysics. Nonthermal Processes in Diffuse Magnetized Plasmas Volume 2. Astrophysical Applications*. New York : Gordon and Breach, 1980.
- [40] MELROSE, D. B., MCPHEDRAN, R. C. *Electromagnetic Processes in Dispersive Media. A Treatment Based on the Dielectric Tensor*. New York : Cambridge, 2005, 407 + xxiv pp.
- [41] MESSIAH, ALBERT. *Quantum Mechanics: Two Volumes Bound as One*. Mineola : Dover, 1999, 1136 + xxii pp.
- [42] METCALF, M., REID, J.K., COHEN, M. *Fortran 95/2003 explained*. Oxford University Press, 2004, 416 + xviii pp. (Numerical mathematics and scientific computation).
- [43] NEWKIRK, JR. GORDON. Structure of the Solar Corona. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, v. 5, pp. 213–266, September 1967.
- [44] OLIVEIRA FILHO, KEPLER DE SOUZA, SARAIVA, MARIA DE FÁTIMA OLIVEIRA. *Astronomia e Astrofísica*. São Paulo : Livraria da Física, 2004, 558 pp.
- [45] PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., FLANNERY, B. P. *Numerical Recipes in FORTRAN*. New York : Cambridge, 1992, 999 pp., segunda Edição.
- [46] PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., FLANNERY, B. P. *Numerical Recipes in Fortran 90 Volume 2*. New York : Cambridge, 1997, 552 pp. (Fortran Numerical Recipes).
- [47] RAOULT, A., VLAHOS, L., MANGENEY, A. An Injection Model for Type III/V Bursts in Solar Flares. *Astronomy and Astrophysics*, v. 233, n. 1, pp. 229–234, July 1990.
- [48] ROBINSON, R. D. A Study of Type V Solar Radio Bursts. I: Observations. *Solar Physics*, v. 55, n. 2, pp. 459–472, December 1977.
- [49] ROBINSON, R. D. A Study of Type V Solar Radio Bursts. II: A Theoretical Model. *Solar Physics*, v. 56, n. 2, pp. 405–416, February 1978.
- [50] RYDBECK, O. E. H. Magneto-Ionic Triple Splitting of Ionospheric Waves. *Journal of Applied Physics*, v. 21, n. 12, pp. 1205–1214, December 1950.
- [51] SILVA, ADRIANA VÁLIO ROQUE. *Nossa Estrela: O Sol*. São Paulo : Livraria da Física, 2006, 194 pp.
- [52] SITENKO, A. G. *Fluctuations & Non-Linear Wave Interactions in Plasmas*. Oxford : Pergamon Press, 1982, 278 pp. (International Series in Natural Philosophy, 107).
- [53] SMITH, M. S. Numerical Solution of the “Ellis Window” Problem. *Nature Physical Science*, v. 243, n. 124, p. 29, May 1973.
- [54] STIX, THOMAS HOWARD. *Waves in Plasmas*. New York : American Institute of Physics, 1992, 566 + xiv pp.
- [55] STOTT, G.F. Refractive index surfaces. *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, v. 45, n. 4, pp. 219–229, April 1983.
- [56] SWANSON, D. G. *Theory of Mode Conversion and Tunneling in Inhomogeneous Plasmas*. New York : John Wiley & Sons, 1998, 252 + xviii pp.
- [57] VACLAVIK, J., APPERT, K. On the Local Absorption of Linear Electromagnetic Waves in Hot Magnetized Plasmas. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, v. 29, n. 2, pp. 257–261, February 1987.

- [58] WHITE, R. B., CHEN, F. F. Amplification and absorption of electromagnetic waves in over-dense plasmas. *Plasma Physics*, v. 16, n. 7, p. 565, July 1974.
- [59] WINGLEE, R. M., DULK, G. A. The Electron-Cyclotron Maser Instability as the Source of Solar Type V Continuum. *The Astrophysical Journal*, v. 310, n. 1, pp. 432–443, November 1986.
- [60] WU, C. S. Kinetic Cyclotron and Synchrotron Maser Instabilities: Radio Emission Processes by Direct Amplification of Radiation. *Space Science Reviews*, v. 41, n. 3-4, pp. 215–298, August 1985.
- [61] WU, C. S., WANG, C. B., YOON, P. H., ZHENG, H. N., WANG, S. Generation of Type III Solar Radio Bursts in the Low Corona by Direct Amplification. *The Astrophysical Journal*, v. 575, n. 2, pp. 1094–1103, August 2002.
- [62] YOON, P. H., WEATHERWAX, A. T., ROSENBERG, T. J., LABELLE, J., SHEPHERD, S. G. Propagation of Medium Frequency (1–4 MHz) Auroral Radio Waves to the Ground via the Z-Mode Radio Window. *Journal of Geophysical Research*, v. 103, n. A12, pp. 29267–29275, December 1998.
- [63] YOON, P. H., WU, C. S., WANG, C. B. Generation of Type III Solar Radio Bursts in the Low Corona by Direct Amplification. II. Further Numerical Study. *The Astrophysical Journal*, v. 576, n. 1, pp. 552–560, September 2002.
- [64] YOON, P. H., ZIEBELL, L. F. Quasilinear Evolution of Cyclotron Maser Instability. *Physical Review E*, v. 51, n. 5, pp. 4908–4916, May 1995.
- [65] ZHELEZNYAKOV, V. V. *Radio Emission of the Sun and Planets*. New York : Pergamon, 1970.
- [66] ZHELEZNYAKOV, V. V., ZAITSEV, V. V. The Origin of Type-V Solar Radio Bursts. *Soviet Astronomy*, v. 12, n. 1, pp. 14–20, August 1968.