

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
INSTITUTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

A teoria da turbulência fraca para oscilações eletrostáticas em plasmas com feixes de alta intensidade*

Kellen Alves Pascoal

Dissertação elaborada sob orientação do
Prof. Dr. Joel Pavan e coorientação do
Prof. Dr. Rudi Gaelzer, em preenchimento
dos requisitos para obtenção do título de
Mestre em Física.

Pelotas
2014

* Trabalho realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)

Dedico este trabalho

Aos meus pais que estiveram sempre ao meu lado, Silvio e Jussara.

Agradecimentos

- Agradeço, aqueles que foram e são fundamentais na minha caminhada, meus pais. Estes que estiveram ao meu lado em todos os momentos, de angústia e alegria, me apoiando e me dando força para continuar e lutar sempre por este sonho e por acreditarem na importância do estudo, me mostrando os verdadeiros valores da vida;
- Agradeço, em especial, aos meus orientadores, Rudi Gaelzer e Joel Pavan, pela valiosa orientação, dedicação e paciência incansável que foi fundamental para este trabalho, pelo apoio e incentivo e por estarem sempre prontos para sanar as minhas muitas dúvidas durante essa jornada. Agradeço a vocês por terem confiado em mim;
- Aos colegas de sala que sempre mostraram companheirismo Luís Martins, Sabrina Nunes, Ana Paula Mendonça, e todos outros que de forma indireta acompanharam meus passos, e a colega e amiga de grupo Fernanda Hernandes por estar sempre me ajudando e me apoiando em todos momentos;
- Aos professores e pesquisadores do programa de Pós graduação em Física da Ufpel;
- A coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo auxílio financeiro durante este período e pelo auxílio financeiro para viagens e congressos;
- A todos, familiares e amigo que, diretamente ou indiretamente, contribuíram positivamente para a minha maneira de pensar, em especial, meus avós.

Resumo

A interação entre um feixe de elétrons e o plasma que o rodeia é de fundamental importância em Física de plasmas, tanto no estudo de plasmas de laboratório quanto de plasmas espaciais e astrofísicos. Uma possível abordagem para descrever este tipo de interação é a Teoria de Turbulência Fraca, que consiste em uma formulação empregada para descrever a interação entre as partículas e ondas de um sistema feixe-plasma. Essa teoria é estritamente válida quando o plasma é fracamente instável, o que para um sistema feixe-plasma corresponde a considerar feixes de baixa intensidade. O presente trabalho se propõe a estender a validade da Teoria de Turbulência Fraca para descrever fenômenos envolvendo feixes de mais alta intensidade, os quais são com frequência observados em sistemas realísticos e que não são adequadamente descritos pela teoria usual. Especificamente, a relação de dispersão de um sistema feixe-plasma é modelada de acordo com sua solução numérica e incorporada na determinação dos termos quase lineares e dos termos não lineares de acoplamento de três ondas, que regem a evolução temporal do sistema. Os resultados da evolução temporal de ondas e partículas obtidos usando a abordagem da Teoria de Turbulência Fraca para feixes de alta intensidade mostram que o comportamento desse sistema com feixe de alta intensidade se aproxima do comportamento do sistema com feixes de baixa intensidade. Os resultados encontrados podem ser explicados pelo fato de que, embora a teoria usual considere o acoplamento de ondas envolvendo dois modos de oscilação distintos, i. e., íon-sônico e de Langmuir, enquanto o presente trabalho considera a existência de um único modo, a relação de dispersão do modo considerado apresenta uma região de baixa frequência bem como uma região de alta frequência, as quais acabam por desempenhar o papel das ondas íon-sônicas e de Langmuir, respectivamente. Os resultados encontrados corroboram a consistência da Teoria de Turbulência Fraca, no sentido de que, em ambos os casos, envolvendo feixes de baixa ou alta intensidade, o comportamento de ondas e partículas se mostra semelhante.

Palavras-chave: Feixes intensos; Instabilidade feixe-plasma; Teoria de Turbulência Fraca.

Abstract

The interaction between an electron beam and the plasma that surrounds it is of fundamental importance in physics of plasmas, both in the study of laboratory plasmas and in space and astrophysical plasmas. A possible approach to describe this type of interaction is the Weak Turbulence Theory, which consists of a formulation used to describe the interaction between particles and waves of a beam-plasma system. This theory is strictly valid when the plasma is weakly unstable, which for a beam-plasma system amounts to consider beams of low intensity. The present work proposes to extend the validity of Weak Turbulence Theory to describe phenomena involving beams of higher intensity, which are frequently observed in realistic systems and are not adequately described by the usual theory. Specifically, the dispersion relation of a beam-plasma system is modeled accordingly to its numerical solution, and incorporated in the calculation of the quasilinear terms and three-wave coupling nonlinear terms. The results of the temporal evolution of waves and particles obtained using the Weak Turbulence Theory approach for high intensity beams show that the behavior of this system with high intensity beams follows the behavior of the system with low intensity beams. The results found may be explained by the fact that, although the usual theory considers wave coupling of two different wave modes, whereas the present study considers the existence of a unique mode, the dispersion relation of the mode considered shows a low frequency range as well as a high frequency range, which ultimately play the role of ion-sonic and Langmuir waves, respectively. The results found support the consistency of Weak Turbulence Theory, in the sense that in both cases involving low or high beam intensity, wave and particle behavior is alike.

Keywords: Intense beams; Beam-plasma instability; Weak Turbulence Theory.

Sumário

1. Introdução	11
2. Revisão bibliográfica	15
2.1 Instabilidades em plasma	15
2.1.1 Classificação de instabilidades	17
2.2 Ondas em plasmas não magnetizados	21
2.2.1 Processos de acoplamento de ondas	22
2.3 Teoria de turbulência em plasmas	24
2.3.1 Teoria de turbulência forte	24
2.3.2 Teoria de turbulência fraca	25
2.4 Processos não lineares na teoria de turbulência fraca	26
2.4.1 Interação quase linear onda-partícula	26
2.4.2 Interação não linear onda-onda	27
2.4.3 Interação não linear onda-partícula	27
3. A Interação feixe-plasma descrita pela teoria de turbulência fraca	28
3.1 Teoria quase linear	28
3.1.1 Formulação teórica	29
3.1.2 Resultados e discussão	32
3.2 Teoria não linear	35
3.2.1 Formulação teórica	35
3.2.2 Resultados e discussão	37
4. Teoria de turbulência fraca para feixes de alta intensidade	42
4.1 Introdução	42
4.1.1 Relação de dispersão para o sistema feixe-plasma	44
4.2 Formulação teórica	50
4.2.1 Teoria quase linear	51
4.2.2 Modelo para relação de dispersão	52
4.2.3 Nível inicial das ondas	53

4.2.4	Resultados e discussão	53
4.3	Teoria não linear	53
4.3.1	Termo não linear de acoplamento de três ondas	53
4.3.2	Resultados e discussões	56
5.	Conclusão	63
A.	65
A.1	Normalização	65
A.2	Condições de ressonância	66
A.2.1	Ressonância onda-partícula	66
A.2.2	Ressonância de 3 ondas	67
A.3	Equação de partículas	69
A.3.1	Coefficiente A	70
A.3.2	Coefficiente D	71
A.4	Equação de ondas	71
A.4.1	Quase linear	71
A.4.2	Não linear	72
A.5	Nível inicial das ondas	79
Referências	81

Lista de Figuras

1.1	Esquema de um tokamak.	11
1.2	Ilustração do sistema Sol-vento solar-magnetosfera terrestre.	12
1.3	Geração de ondas de Langmuir e emissão de ondas de rádio do tipo III no meio interplanetário.	13
2.1	Ilustração de algumas condições das instabilidades.	16
2.2	A distribuição projetada $F(v_\phi)$, é desenhada para uma distribuição composta por uma maxwelliana central com velocidade térmica V e uma distribuição de Maxwell “bump-in-tail” com a velocidade do feixe de v_b . O crescimento ocorre em $v_\phi \lesssim v_b$ onde $dF(v_\phi)/dv_\phi$ é positivo.	19
2.3	Diagrama de dispersão para ondas eletromagnéticas, ondas de Langmuir e ondas íon-acústicas.	23
2.4	Diagrama de acoplamento de fase do processo $L \rightarrow L' + S$	24
2.5	Diagrama de acoplamento de fase do processo $L + S \rightarrow T$	24
3.1	Evolução temporal da função de distribuição eletrônica para $v_b/V_{te} = 5$ e $n_b/n_e = 10^{-3}$	33
3.2	Intensidade espectral das ondas de Langmuir para um feixe para $v_b/V_{te} = 5$ e $n_b/n_e = 10^{-3}$	33
3.3	Evolução temporal da função de distribuição eletrônica com $v_b/V_{te} = \pm 5$ e $n_b/n_e = 10^{-3}$	34
3.4	Intensidade espectral das ondas de Langmuir para dois feixes com $v_b/V_{te} = \pm 5$ e $n_b/n_e = 10^{-3}$	35
3.5	Evolução temporal do sistema feixe-plasma incluindo efeitos não lineares ordem de mais alta. Função de distribuição eletrônica para $v_b/V_{te} = 4$ e $n_b/n_e = 10^{-2}$	38
3.6	Evolução temporal do sistema feixe-plasma incluindo efeitos não lineares de ordem mais alta. Ondas de Langmuir para $v_b/V_{te} = 4$ e $n_b/n_e = 10^{-2}$	39
3.7	Evolução temporal do sistema feixe-plasma incluindo efeitos não lineares de ordem mais alta. Ondas íon-acústicas para $v_b/V_{te} = 4$ e $n_b/n_e = 10^{-2}$	39

3.8	Evolução temporal do sistema feixe-plasma com dois feixes incluindo efeitos não lineares de ordem mais alta. Função de distribuição eletrônica para $v_b/V_{te} = \pm 4$ e $n_b/n_e = 10^{-2}$	40
3.9	Evolução temporal do sistema feixe-plasma com dois feixes incluindo efeitos não lineares de ordem mais alta. Ondas de Langmuir para $v_b/V_{te} = \pm 4$ e $n_b/n_e = 10^{-2}$	41
3.10	Evolução temporal do sistema feixe-plasma com dois feixes incluindo efeitos não lineares de ordem mais alta. Ondas íon-acústicas para $v_b/V_{te} = \pm 4$ e $n_b/n_e = 10^{-2}$	41
4.1	Diagrama de dispersão $\omega \times k$	44
4.2	Solução da equação em função de $q/\sqrt{2} = k\lambda_{De}$ para o conjunto de parâmetros indicado. Painel esquerdo: parte real de z . Direito: parte imaginária.	47
4.3	Solução da equação para velocidade $v_b/V_{te} = 7$ e densidade $n_b/n_0 = 10^{-3}$. Painel esquerdo: ω_r/ω_{pe} é a parte real de z . Direito: γ/ω_{pe} é a parte imaginária.	48
4.4	Solução da equação para velocidade $v_b/V_{te} = 7$ e densidade $n_b/n_0 = 10^{-2}$. Painel esquerdo: ω_r/ω_{pe} é a parte real de z . Direito: γ/ω_{pe} é a parte imaginária.	48
4.5	Solução da equação para velocidade $v_b/V_{te} = 7$ e densidade $n_b/n_0 = 10^{-1}$. Painel esquerdo: parte real ω_r/ω_{pe} é a parte real de z . Direito: γ/ω_{pe} é a parte imaginária.	49
4.6	Solução da equação para velocidade $v_b/V_{te} = 8$ e densidade $n_b/n_0 = 10^{-3}$. Painel esquerdo: parte real ω_r/ω_{pe} é a parte real de z . Direito: γ/ω_{pe} é a parte imaginária.	49
4.7	Solução da equação para velocidade $v_b/V_{te} = 9$ e densidade $n_b/n_0 = 10^{-3}$. Painel esquerdo: parte real ω_r/ω_{pe} é a parte real de z . Direito: γ/ω_{pe} é a parte imaginária.	50
4.8	Relação de dispersão ($v_b/V_{te} = 10$ e $b = 0.6$)	52
4.9	Evolução das partículas para um feixe com velocidade $v_b/V_{te} = 10$ e densidade $n_b/n_0 = 10^{-3}$	54
4.10	Intensidade espectral do modo B para os parâmetros $v_b/V_{te} = 10$ e densidade $n_b/n_0 = 10^{-3}$	54
4.11	Evolução das partículas com $v_b/V_{te} = 10$ e $n_b/n_0 = 10^{-3}$	57
4.12	Intensidade espectral do modo B para $v_b/V_{te} = 10$ e $n_b/n_0 = 10^{-3}$	57
4.13	Nível inicial da distribuição das partículas para densidade constante $n_b/n_0 = 10^{-3}$ e velocidades $v_b/V_{te} = 9, 10, 11$	58
4.14	Nível final da distribuição das partículas para densidade constante $n_b/n_0 = 10^{-3}$ e velocidades $v_b/V_{te} = 9, 10, 11$	58

-
- 4.15 Nível inicial da distribuição da intensidade espectral das ondas do modo B para densidade constante $n_b/n_0 = 10^{-3}$ e velocidades $v_b/V_{te} = 9, 10, 11$ 59
- 4.16 Nível final da distribuição da intensidade espectral das ondas do modo B para densidade constante $n_b/n_0 = 10^{-3}$ e velocidades $v_b/V_{te} = 9, 10, 11$ 59
- 4.17 Nível inicial da distribuição das partículas com velocidade fixa em $v_b/V_{te} = 10$ e diferentes densidades em $n_b/n_0 = 10^{-3}$, $n_b/n_0 = 2 \times 10^{-3}$ e $n_b/n_0 = 4 \times 10^{-3}$. 60
- 4.18 Nível final da distribuição das partículas com velocidade fixa em $v_b/V_{te} = 10$ e diferentes densidades em $n_b/n_0 = 10^{-3}$, $n_b/n_0 = 2 \times 10^{-3}$ e $n_b/n_0 = 4 \times 10^{-3}$. 61
- 4.19 Nível final da intensidade espectral das ondas do modo B para velocidade fixa em $v_b/V_{te} = 10$ e diferentes densidades em $n_b/n_0 = 10^{-3}$, $n_b/n_0 = 2 \times 10^{-3}$ e $n_b/n_0 = 4 \times 10^{-3}$ 61
- 4.20 Evolução temporal da energia das ondas. Lado esquerdo: densidade fixa $n_b/n_0 = 10^{-3}$ e variando a velocidade $v_b/V_{te} = 8, 9, 10$. Lado direito: variando a densidade $n_b/n_0 = 1 \times 10^{-3}, 2 \times 10^{-3}, 3 \times 10^{-3}$ e velocidade fixa $v_b/V_{te} = 8$. 62

Capítulo 1

Introdução

A interação entre um feixe de partículas carregadas e o plasma que o rodeia é de fundamental importância para física dos plasmas, possibilitando estudos tanto em plasmas de laboratório quanto em espaciais ou astrofísicos.

Um exemplo desta interação em plasma de laboratório é o “tokamak” proposto por Sakharov e Tamm [1] que consiste de uma câmara de vácuo na forma de um toróide em que um plasma é confinado por um campo magnético helicoidal que é a combinação de um campo magnético toroidal, gerado por uma corrente em um enrolamento externo envolvendo o tórus, (ou por uma corrente num condutor orientado ao longo de um eixo perpendicular ao plano do toróide), e um campo magnético poloidal, produzido através de uma corrente toroidal no plasma. Essa corrente é induzida por um transformador que varia o fluxo magnético através do toróide. Além de contribuir para o confinamento, o campo toroidal é necessário para que ocorra um equilíbrio entre a pressão do plasma e as forças magnéticas. Uma visualização da geometria de um “tokamak” típico e dos campos pode ser vista na figura 1.1 [2].

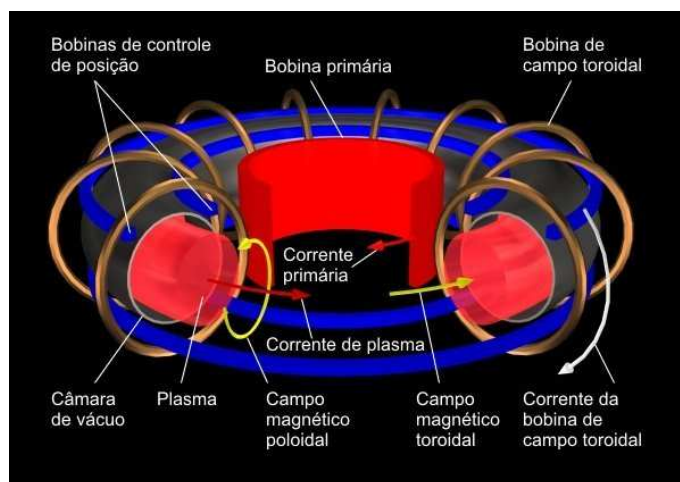


Fig. 1.1: Esquema de um tokamak. Disponível em: <http://www.plasma.inpe.br>

Outros fenômenos decorrentes da interação feixe-plasma são observados no meio interplanetário.

O vento solar é um fluxo contínuo de plasma vindo da coroa solar que transporta consigo uma parte da energia liberada pelas regiões ativas do Sol, bem como parte do campo magnético solar, o qual se encontra congelado no plasma altamente condutivo. A magnetosfera terrestre atua então como um obstáculo ao fluxo de partículas energéticas do vento solar, protegendo assim o meio ambiente da Terra. A forma característica da magnetosfera terrestre, ilustrada na figura 1.2, é o resultado da interação do campo magnético terrestre com a pressão magnetohidrodinâmica exercida sobre o mesmo pelo plasma do vento solar [3–6].

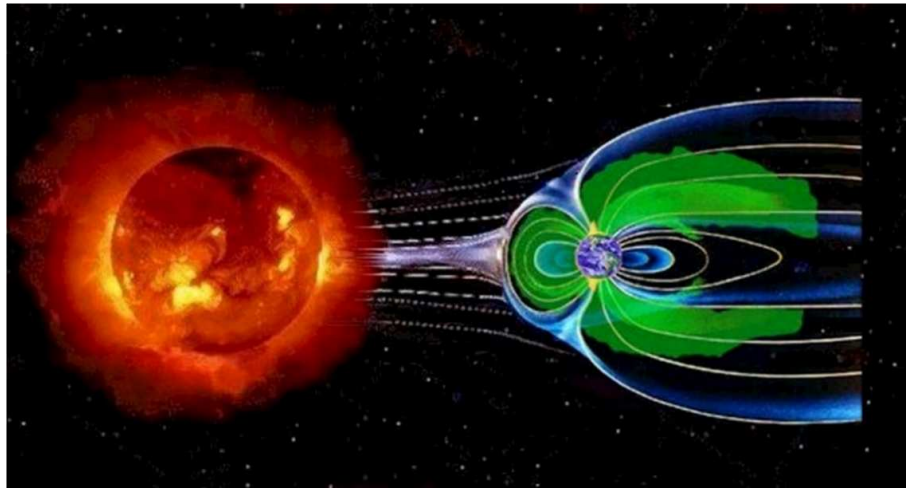


Fig. 1.2: *Ilustração do sistema Sol-vento solar-magnetosfera terrestre [6].*

Devido à energia magnética armazenada na atmosfera solar, energia cinética e térmica é liberada do interior das regiões ativas. Essa energia provoca o aquecimento e aceleração dos elétrons, prótons e íons mais pesados presentes nos locais de liberação de energia e em sua vizinhança próxima [7]. Um exemplo desse processo é a emissão solar tipo III, onde essas partículas interagem com o plasma ambiente e são convertidas em radiação eletromagnética, geradas em frequências próximas aos valores locais das frequências [5, 8, 9].

A figura 1.3 ilustra um cenário típico da geração de ondas de Langmuir e emissão de ondas de rádio tipo III no meio interplanetário durante explosões solares. Feixes de elétrons são gerados na superfície do Sol e se propagam ao longo das linhas "abertas" de campo magnético interplanetário na direção radial a partir do Sol [7]. Esses feixes de elétrons interagem com o plasma ambiente gerando ondas de plasma e estas, ao entrarem em contato novamente com o plasma ambiente, são convertidas linearmente em radiação eletromagnética próxima a frequência de plasma e seus harmônicos. À medida em que aumenta a distância a partir da região fonte, menor é a densidade do plasma de fundo onde o feixe de elétrons se propaga. Sabe-se que a frequência diminui com a densidade, logo a frequência da radiação decai de

valores de 200 MHz, quando a onda é gerada próxima à superfície do Sol, até valores bem pequenos (dezenas de kHz), quando a onda é gerada próxima à Terra [3,5,6,8–14].

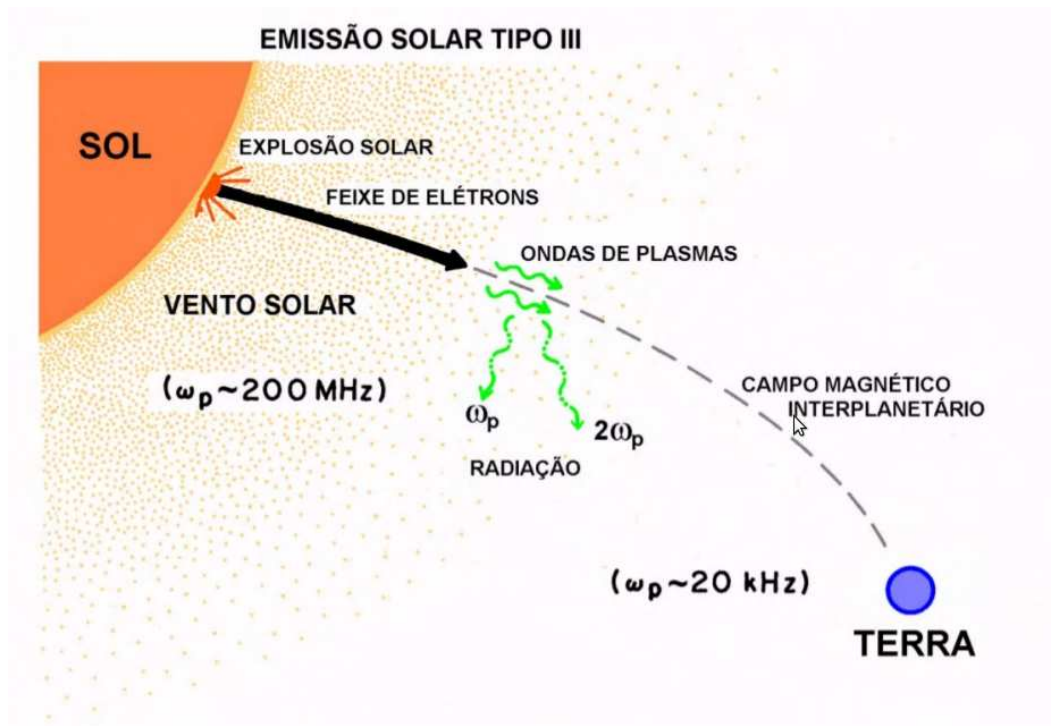


Fig. 1.3: Geração de ondas de Langmuir e emissão de ondas de rádio do tipo III no meio interplanetário [3].

Diversos são os fenômenos que ocorrem devido a interação do feixe de elétrons com o plasma. De particular importância são as emissões de ondas eletrostáticas longitudinais e/ou eletromagnéticas na vizinhança da frequência eletrônica de plasma ($\omega_{pe} = [(n_0 e^2)/(m_e \epsilon_0)]^{1/2}$) e no seu primeiro harmônico ($2\omega_{pe}$), em muitas situações acompanhadas da energização/aquecimento da população eletrônica que compõe o plasma, gerando caudas não térmicas na sua função de distribuição. Na definição de ω_{pe} acima m_e e e são a massa e a carga do elétron, respectivamente, n_0 a densidade do plasma de fundo e ϵ_0 a permissividade dielétrica no vácuo. A emissão de radiação eletromagnética em frequências próximas a frequência de plasma (ω_{pe} e/ou $2\omega_{pe}$) tem sido observada por sondas espaciais que se deslocam através da magnetosfera terrestre e/ou do vento solar. Ondas eletromagnéticas nas mesmas faixas de frequência têm sido também observadas originando-se da coroa solar. Esta classe de fenômenos, de emissão de radiação eletromagnética, possui a denominação comum de *emissão de plasma*, independente do(s) mecanismo(s) emissor(es) específico(s). A observação das ondas longitudinais é, muitas vezes, registrada de forma concomitante com a emissão de plasma e, na literatura, é possível se encontrar diversos mecanismos propostos

e simulações realizadas, ao longo do tempo, para esclarecer estes fenômenos aparentemente correlacionados.

A energização de partículas carregadas eletricamente é reconhecida como um dos problemas mais importantes na física dos plasmas contemporânea. Energização de partículas (aceleração e aquecimento) pode resultar de campos eletrostáticos de larga escala tais como ocorrem em ondas de choque não colisionais ou durante reconexão magnética. Outro importante mecanismo de energização de partículas carregadas é a turbulência no plasma. O transporte induzido por turbulência é importante não somente no ambiente espacial, mas também em dispositivos que buscam a fusão termonuclear controlada, tais como os “tokamaks” anteriormente citados. Para o ambiente espacial, a energização de partículas possui uma ramificação que transcende a pesquisa básica, uma vez que sabidamente influencia no funcionamento de satélites de comunicação e pode ter uma influência significativa na exploração humana do espaço. Estas questões se tornam continuamente mais importantes, tanto que justificaram o nascimento de uma nova área da ciência denominada clima espacial (“space weather”).

Dentre os diversos fenômenos envolvidos na turbulência em plasmas, há um grande interesse na denominada turbulência de Langmuir, a qual se caracteriza justamente pela emissão de plasma, já caracterizada, e pela energização eletrônica provocada pela interação não linear dos elétrons com as ondas geradas pela emissão. Contudo, a maior parte dos trabalhos existentes estão focados na dinâmica das ondas. O aspecto relacionado à energização de partículas tem sido estudado em anos mais recentes [8, 15].

A teoria utilizada neste trabalho é a Teoria de Turbulência Fraca, a qual consiste em uma formulação empregada para descrever a interação entre as partículas e ondas de um sistema feixe-plasma. Na sua formulação tradicional, esta teoria é estritamente válida quando o plasma é fracamente instável, o que para um sistema feixe-plasma corresponde a considerar feixes de baixa intensidade. O presente trabalho se propõe a estender a validade da Teoria de Turbulência Fraca para descrever fenômenos envolvendo feixes de média e alta intensidade. Especificamente, a relação de dispersão é modelada de acordo com sua solução numérica e incorporada na determinação dos termos quase lineares e dos termos não lineares de acoplamento de três ondas.

A dissertação de Mestrado está organizada da seguinte forma nos próximos capítulos: No capítulo 2 é apresentada uma breve introdução a instabilidades em plasmas e os processos que envolvem o acoplamento de ondas. No capítulo 3 são mostrados resultados obtidos para o caso de feixes tênues. Finalmente, no capítulo 4 é mostrado os resultados obtidos da solução numérica da relação de dispersão para o caso de feixes intensos. Em seguida é apresentada a formulação teórica para a abordagem de feixes intensos no âmbito da Teoria de Turbulência Fraca.

Capítulo 2

Revisão bibliográfica

2.1 Instabilidades em plasma

As partículas em plasmas espaciais geralmente possuem um grande caminho livre médio relacionado com as colisões entre as partículas e o tempo de equipartição de energia é maior que o tempo de colisão entre as partículas. Com isso, plasmas espaciais não estão em equilíbrio termodinâmico. Pelo fato de o plasma não estar em equilíbrio termodinâmico, ele armazena uma certa quantidade de energia livre, essa pode ser convertida em movimentos do plasma ou em radiação eletromagnética [16, 17].

O processo onde uma dessas conversões ocorre, num modo coletivo, é chamado de instabilidade de plasma, onde pequenas variações a partir do equilíbrio dinâmico se transformam em grandes perturbações.

As instabilidades podem ocorrer através de dois processos físicos distintos. Quando a instabilidade é devida às quantidades termodinâmicas como flutuação de densidade, temperatura, pressão entre outras, o plasma como um todo muda seus parâmetros característicos devido ao processo externo. Este processo é denominado instabilidade macroscópica [17, 18]. Outra forma de instabilidade é a microscópica que está relacionada com processos internos, quando o plasma apresenta uma distribuição de velocidades diferente da distribuição de Maxwell-Boltzmann.

Oscilações coletivas em um plasma próximo ao equilíbrio termodinâmico podem representar excitações individuais estáveis. Mas a existência de um estado de equilíbrio não implica que esse seja estável. É importante conhecer, de forma clara, a diferença entre os conceitos de equilíbrio e estabilidade [17, 18].

Para uma melhor visualização desses conceitos, se faz uma analogia com sistemas mecânicos, utilizando o modelo de uma esfera em equilíbrio dinâmico, visto na figura 2.4. De maneira geral, o sistema é dito estável, se uma pequena perturbação no estado de equilíbrio é seguida

pelo retorno ao equilíbrio ou pelo não crescimento das oscilações. Mas o sistema é instável quando uma pequena perturbação resultar no crescimento desta [4, 10, 16, 19].

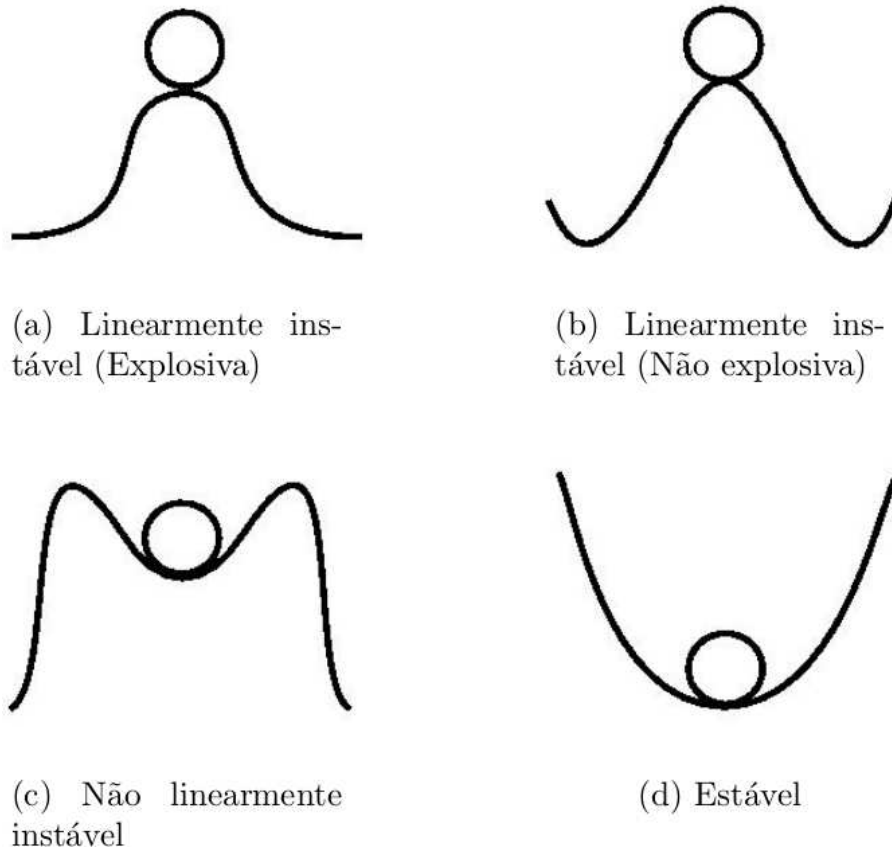


Fig. 2.1: *Ilustração de algumas condições das instabilidades [19].*

Na figura 2.4 (a) uma pequena perturbação faz a esfera sair da posição sem que possa voltar a posição original, de equilíbrio. (b) A esfera ao sofrer alguma perturbação pode ser refletida na curva e voltar a posição de equilíbrio. (c) Para a esfera sair da situação de estabilidade ela precisa de uma grande perturbação e (d) existe uma situação de estabilidade onde, para qualquer perturbação, ela retornará a posição de equilíbrio.

O estudo de instabilidades em plasmas é importante pois estas servem para dissipar energia livre do plasma para mantê-lo em equilíbrio termodinâmico e algumas delas podem gerar vários tipos de ondas, exceto quando são causadas por perturbações que oscilam em torno de uma frequência particular. Mas em geral, a instabilidade é capaz de excitar os modos naturais do plasma. Devido a natureza das instabilidades, a taxa de aumento da amplitude da onda é proporcional a sua amplitude instantânea [17, 18].

2.1.1 Classificação de instabilidades

Na literatura são encontradas diversas abordagens e possíveis classificações para instabilidades, as quais, diferem de autor para autor. Aqui, seguindo a formulação de Melrose [18], que apresenta uma possível classificação para as instabilidades reativa e cinética.

A instabilidade feixe-plasma pode ser classificada como cinética ou reativa, o que define esta classificação são os parâmetros físicos considerados no sistema.

- **Instabilidade Reativa:** Considerando um feixe com velocidade v_b e densidade n_1 que se move através de uma distribuição eletrônica de fundo que está em repouso e tem densidade n_0 . No limite $n_1 \ll n_0$ o efeito do feixe sobre as ondas no gás de elétrons de fundo pode ser tratado como uma perturbação. Para o tensor $K_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, definido por [18]

$$K_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \sum \frac{q^2}{\varepsilon_0 \omega^2} \int d^3 \mathbf{p} \frac{v_i}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} ((\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \delta_{sj} + k_s v_j) \frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial p_s}, \quad (2.1)$$

sendo $\mathbf{K}_1^L(\omega, \mathbf{k})$ a contribuição do feixe da parte longitudinal do tensor dielétrico e $\mathbf{K}_0^L(\omega, \mathbf{k})$ a contribuição dos elétrons de fundo, para uma distribuição arbitrária de partículas $f(\mathbf{p})$, onde $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Na ausência do feixe as ondas de Langmuir tem frequência $\omega^L(\mathbf{k})$. O feixe provoca um desvio na frequência $\Delta\omega^L$, determinada por

$$\Delta\omega_L \frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re}[K_0^L(\omega, \mathbf{k})] + K_1^L(\omega, \mathbf{k}) = 0 \quad (2.2)$$

analisada em $\text{Re}[K_0^L(\omega, \mathbf{k})] = 0$. A parte real de K_1^L dá a mudança na frequência real, e a parte imaginária de K_1^L contribui para o amortecimento das ondas. O crescimento pode ocorrer quando $\text{Im}[K_1^L]$ é negativo. A instabilidade é devido à absorção negativa e é chamada de instabilidade cinética. Para feixe frio K_1^L é real, e a equação (2.2) é uma equação real para $\Delta\omega_L$. Soluções complexas podem aparecer apenas com pares conjugados complexos. Um destes pares tem $\text{Im}[\omega] > 0$ e cresce e outro tem $\text{Im}[\omega] < 0$ e é amortecido. A instabilidade neste caso tem uma vasta classificação. Bohm e Gross [20] identificaram essa instabilidade como uma instabilidade de aglomeração, no qual existe um crescimento das ondas, acumulando os elétrons do feixe (em certos pontos da sua oscilação) no espaço, produzindo um campo elétrico e consequentemente, aumentando a amplitude das ondas [21]. Briggs [22] enfatizou que esta é uma resposta do meio e propôs a este tipo de instabilidade como instabilidade reativa. Supondo que a partir de um valor de \mathbf{k} no qual todas soluções de $\text{Re}[K_0^L(\omega, \mathbf{k})] = 0$, com $K^L = K_0^L + K_1^L$, são reais. Em seguida \mathbf{k} é variado, soluções complexas podem aparecer quando \mathbf{k} passa através de um valor no qual duas soluções juntam-se para se tornar uma solução dupla. A condição para uma solução dupla de $\text{Re}[K_0^L(\omega, \mathbf{k})] = 0$ e

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re}[K^L(\omega, \mathbf{k})] = 0 \quad (2.3)$$

também é satisfeita. Quando (2.3) é satisfeita a energia total $W_L(\mathbf{k})$ das ondas é zero. A energia elétrica é positiva por definição e a energia zero implica que a contribuição através do movimento das partículas é negativo. A contribuição negativa pode ser interpretada em termos da energia potencial negativa das partículas. Para as partículas do feixe, com um feixe de energia $(1/2)mv_b^2$, a perturbação das ondas pode reduzir a energia das partículas, o que implica em uma contribuição negativa para a energia das ondas. Este argumento diz que a instabilidade reativa tem um crescimento das ondas devido a energia negativa. O conceito de energia negativa é útil para alguns propósitos quantitativos. Por exemplo, o amortecimento positivo ($\text{Im}[K^L] > 0$) extrai energia a partir da energia das ondas e faz com que sua amplitude aumente. No entanto, nenhum tratamento quantitativo totalmente satisfatório de energias das ondas está disponível e assim o conceito de energia negativa das ondas permanece em grande parte qualitativa [18, 21].

- **Instabilidade Cinética:** Muitas microinstabilidades têm ambas as formas reativas e cinéticas. Do ponto de vista matemático uma trata a forma reativa, ignorando a parte imaginária do tensor dielétrico e resolve uma equação de dispersão real encontrando soluções complexas, e um tratamento na forma cinética, assumindo frequências reais para uma primeira aproximação e, em seguida, incluindo amortecimento fraco (negativo). Para ser mais específico, a instabilidade de feixe, sendo essa fraca, os movimentos térmicos são desprezados e a correção para a parte real do tensor de dielétrico, devido à presença do feixe que leva a uma equação cúbica para o deslocamento de frequência das ondas Langmuir. Essa equação cúbica tem uma solução real e um par de soluções complexos conjugados no regime de interesse. A versão cinética dessa instabilidade é conhecida como a instabilidade “bump-in-tail”. Ela é tratada por primeiro encontrar a contribuição imaginária do feixe para o tensor dielétrico e utilizar isso para avaliar a parte imaginária do desvio de frequência [18]. A partir da discussão anterior as versões reativa e cinética podem resultar no caso de uma única instabilidade. Poderia ser mostrado encontrando ambas as partes real e imaginária do desvio de frequência em simultâneo. A parte real e imaginária da frequência pode ser encontrado como um complexo de solução de ω em função do \mathbf{k} real para a equação de dispersão complexa $K^L(\omega, \mathbf{k}) = 0$, em que as partes reais e imaginárias de K^L são retidas. Na prática, um procedimento relativamente sofisticado para encontrar as raízes é necessário para obter as soluções. No entanto, são de pouco prático devido à pequena da gama de espaço de parâmetros onde as versões passam de reativas para cinéticas. A taxa de crescimento para a instabilidade “bump-in-tail” pode ser encontrada utilizando uma equação para o coeficiente de absorção de ondas de Langmuir. A expressão geral para

$\text{Im}[K^L(\omega, \mathbf{k})]$ pode ser obtida, e encontrada em Melrose [18], dando

$$\gamma_L(\mathbf{k}) = -\frac{\pi q^2}{\varepsilon_0 \omega_p^2} \frac{[\omega_L(\mathbf{k})]^3}{k^2} \int d^3 \mathbf{p} \delta[\omega_L(\mathbf{k}) - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}] \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \quad (2.4)$$

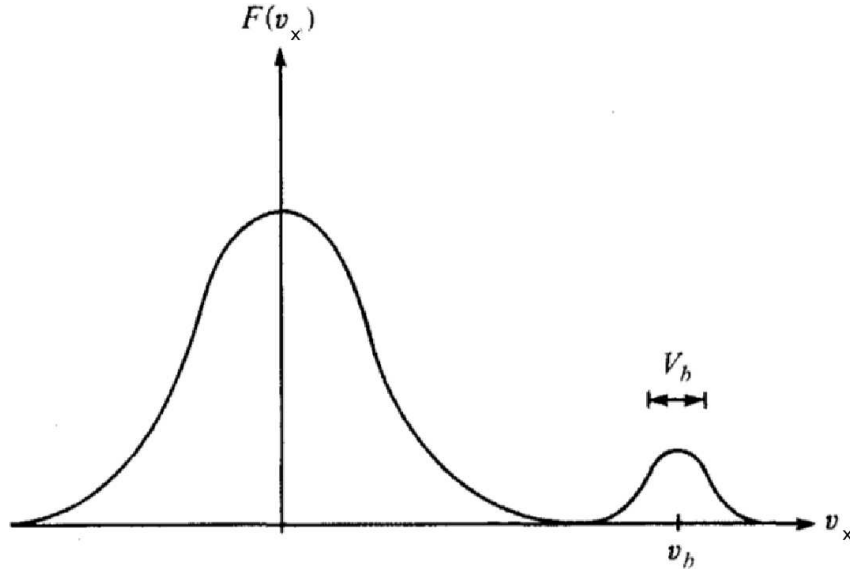


Fig. 2.2: A distribuição projetada $F(v_\phi)$, é desenhada para uma distribuição composta por uma maxwelliana central com velocidade térmica V e uma distribuição de Maxwell “bump-in-tail” com a velocidade do feixe de v_b . O crescimento ocorre em $v_\phi \lesssim v_b$ onde $dF(v_\phi)/dv_\phi$ é positivo [18].

O sinal de $\gamma_L(\mathbf{k})$ pode ser negativo se $\mathbf{k} \cdot \partial f(\mathbf{k})/\partial \mathbf{k}$ é positivo. No entanto, embora essa seja uma condição necessária para o amortecimento negativo, não é uma condição suficiente. Em particular, $\gamma_L(\mathbf{k})$ não pode ser negativa para uma distribuição isotrópica de partículas. Mesmo que a distribuição isotrópica tem $\partial f(p)/\partial p > 0$ sobre alguma gama de p , e verifica-se que para uma distribuição isotrópica a contribuição de regiões onde $\partial f(p)/\partial p$ é negativo sempre domina a contribuição de regiões onde $\partial f(p)/\partial p$ é positivo. No limite não-relativístico podemos reduzir (2.4) através da definição de uma função de distribuição unidimensional

$$F(v_x) = \frac{1}{n_1} \int d^3 \mathbf{p} \delta(v_x - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}/k) f(\mathbf{p}) \quad (2.5)$$

onde a normalização é

$$\int dv_x F(v_x) = 1, \quad (2.6)$$

A equação (2.4) torna-se

$$\gamma_L(\mathbf{k}) = -\pi \frac{\omega_{p1}^2}{\omega_p^2} \omega_L \mathbf{k} v_\phi^2 \frac{dF(v_\phi)}{dv_\phi} \quad (2.7)$$

onde $v_\phi = \omega_L(\mathbf{k})/k$ e $\omega_{p1}^2 = n_1 q^2 / m \varepsilon_0$.

A distribuição da forma ilustrada na figura 2.2 apresenta uma região com $dF(v_\phi)/dv_\phi > 0$, assim é chamada de distribuição “bump-in-tail”. De acordo com equação (2.7) as ondas Langmuir crescem devido à absorção negativa nas velocidades de fase que corresponde ao intervalo onde $dF(v_x)/dv_x$ é positivo. Para a distribuição Maxwelliana,

$$f(\mathbf{p}) = \frac{n_1}{(2\pi)^{3/2} m^3 V_b^3} \exp\left[-\frac{(v - v_b)^2}{2V_b^2}\right], \quad (2.8)$$

onde, aqui, v_b é a velocidade de deriva e V_b é a velocidade do feixe. A distribuição (2.5) em 1 dimensão é

$$F(v_x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} V_b} \exp\left[-\frac{(v_x - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_b/k)^2}{2V_b^2}\right]. \quad (2.9)$$

O coeficiente de absorção (2.7) é

$$\gamma_L(\mathbf{k}) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{\omega_{p1}^2}{\omega_p^2} \omega_L(\mathbf{k}) \frac{v_\phi^2}{V_b^2} (v_\phi - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_b/k) \exp\left[-\frac{(v_\phi - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_b/k)^2}{2V_b^2}\right] \quad (2.10)$$

Para $v_b \gg V_b$ o crescimento máximo ocorre em $v_\phi \approx v_b - V_b$ com \mathbf{k} ao longo de \mathbf{v}_b , e com o crescimento

$$|\gamma_{max}| \approx \left(\frac{\pi}{2e}\right)^{1/2} \omega_p \frac{n_1}{n_0} \left(\frac{v_b}{V_b}\right)^2. \quad (2.11)$$

onde e denota $\exp[1]$. A faixa de frequências $\Delta\omega$ sobre a qual a taxa de crescimento está perto de seu valor máximo é dado por $(\Delta\omega)^2 \approx 2k^2 V_b^2$, ou

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_p} \approx \frac{V_b}{v_b} \quad (2.12)$$

$\Delta\omega$ se refere a largura de banda de crescimento das ondas. Comparando (2.11) e (2.12) percebe-se que a taxa de crescimento é menor do que a largura de banda das ondas de crescimento desde que a condição $n_1/n_0 \lesssim (V_b/v_b)^3$ seja satisfeita, em que os fatores de ordem unitária são ignorados. A versão cinética assume a partir da versão reativa para $n_1/n_0 \approx (V_b/v_b)^3$. A dependência da taxa de crescimento com o ângulo, chamado θ , entre \mathbf{k} e \mathbf{v}_b também segue a partir de (2.10). A taxa de crescimento mantém-se perto de seu valor máximo em $k \approx \omega_p/v_p$ fixo para

$$\theta \lesssim \frac{1}{2} \frac{V_b}{v_b}. \quad (2.13)$$

No entanto, porque a taxa de crescimento depende \mathbf{k} apenas sob a forma de $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_b$, que é quase independente do componente de \mathbf{k} ortogonal a \mathbf{v}_b . Incluindo a dependência de θ , (2.11) pode ser substituída pela

$$|\gamma_{max}| \approx \left(\frac{\pi}{2e}\right)^{1/2} \omega_p \left(\frac{v_b \cos\theta}{V_b}\right)^2. \quad (2.14)$$

[18, 21].

A teoria linear do plasma descreve o processo de dissipação de energia e momento quando a instabilidade é pequena. Já para grandes amplitudes a teoria não linear é importante.

Um critério teórico abordado por Melrose [18] utilizado por Cairns [21] para determinar a instabilidade como reativa ou cinética é o parâmetro

$$P = \left(\frac{n_b}{n_0} \right)^{1/3} \frac{v_b}{V_{te}} \quad (2.15)$$

Para $P > 1$ a instabilidade é reativa e para $P < 1$ a instabilidade é cinética.

Será mostrado as relações de dispersão para os modos naturais presentes num plasma térmico não magnetizado.

2.2 Ondas em plasmas não magnetizados

Em plasmas não magnetizados onde elétrons e íons possuem distribuições de velocidades perto do equilíbrio térmico, é possível encontrar ondas de Langmuir (L), íon-acústicas (S) e eletromagnéticas. Onde, em um regime linear, cada uma apresenta as seguintes relações de dispersão:

• Ondas de Langmuir

Para um plasma onde os elétrons e os íons são distribuídos uniformemente. Considera-se os íons fixos no espaço já que sua massa é maior que a massa dos elétrons, logo existirá um excesso de carga negativa numa região do plasma criando um campo elétrico interno. Devido a forças coulombianas, a perturbação na densidade dos elétrons retorna à posição de equilíbrio, mas devido à inércia, os elétrons vão se deslocar um pouco além dessa posição num movimento oscilatório, com frequência de plasma ω_{pe} . Em um plasma térmico, essas oscilações são ondas de Langmuir que são descritas pela relação de dispersão ω_L [10, 17, 19]. Essas expressões são as seguintes:

$$\omega_L^2 = \omega_{pe}^2 + \frac{3}{2} V_{te}^2 k^2 \quad (2.16)$$

a frequência de plasma e a velocidade térmica dos elétrons são dadas por:

$$\omega_{pe} = \left(\frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0} \right)^{1/2} \quad (2.17)$$

e

$$V_{te}^2 = \frac{2T_e}{m_e} \quad (2.18)$$

sendo m_e , T_e e e são a massa, a temperatura e carga do elétron respectivamente, n_0 a densidade do plasma de fundo ϵ_0 a permissividade dielétrica no vácuo.

- **Ondas íon-acústicas**

São ondas eletrostáticas de baixa frequência, nas quais os elétrons e íons oscilam quase em fase. A relação de dispersão é

$$\omega_S^2 = \frac{c_S^2 k^2}{1 + \lambda_{De}^2 k^2} \quad (2.19)$$

sendo λ_{De} o comprimento de Debye e $c_S = \omega_{pi} \lambda_{De}$.

- **Ondas Eletromagnéticas**

São ondas de alta frequência. Em um plasma desmagnetizado e sem colisões, as ondas não sofrem amortecimento porque a velocidade de fase é maior que a velocidade da luz, importante notar que não viola a relatividade pois onda plana não carrega informação, por outro lado, a velocidade de grupo não pode ultrapassar a velocidade da luz, logo as ondas não entram em ressonância com as partículas, obedecendo a relação de dispersão:

$$\omega_T^2 = \omega_{pe}^2 + c^2 k^2 \quad (2.20)$$

A figura 2.5 mostra as relações de dispersão para os modos eletrostáticos, Langmuir e íon-acústico.

2.2.1 Processos de acoplamento de ondas

A interação entre as ondas pode ocorrer através de processos de decaimento ou coalescência.

- Instabilidade de decaimento:

Quando uma onda indutora, de amplitude finita, excitada num plasma, pode causar uma modulação periódica dos parâmetros que caracterizam os modos naturais no plasma. Essa onda ao exceder um valor limite, os modos naturais crescem a partir do nível de ruído, absorvendo energia e momento da onda indutora.

A instabilidade de decaimento, quando a onda indutora decai em dois modos naturais do plasma, na qual estas ondas são descritas por suas frequências ω_1 , ω_2 e ω_3 e pelos vetores de onda \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 e \mathbf{k}_3 , satisfazendo as condições de conservação de energia e momento.

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 \quad (2.21)$$

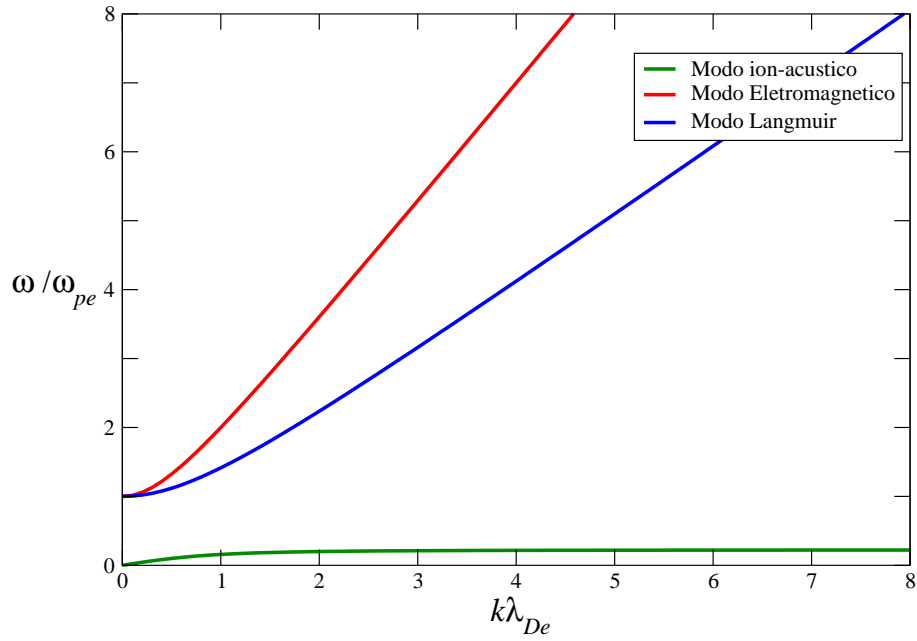


Fig. 2.3: Diagrama de dispersão para ondas eletromagnéticas, ondas de Langmuir e ondas íon-acústicas.

e

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 \quad (2.22)$$

Como exemplo, o processo de decaimento eletrostático de Langmuir $L \rightarrow L' + S$, pode ser visto na figura 2.4, onde uma onda de Langmuir de grande amplitude decai em uma onda de Langmuir contrapropagante L' e uma onda ion-acústica S propagando na direção da onda indutora L .

$$L \rightarrow L' + S \quad \omega_L = \omega'_L + \omega_S \quad \mathbf{k}_L = \mathbf{k}'_L + \mathbf{k}_S$$

- Instabilidade de coalescência:

O processo no qual duas ondas se unem para formar uma terceira onda e satisfazem as condições de conservação de energia e momento, é conhecido como processo de coalescência.

Como exemplo, processo de coalescência de uma onda de Langmuir e S a onda íon-acústicas resultando T à onda transversal que pode se visto na figura 2.5, na qual são descritas pelas frequências e vetores de onda e obedecem às relações de dispersão mostradas.

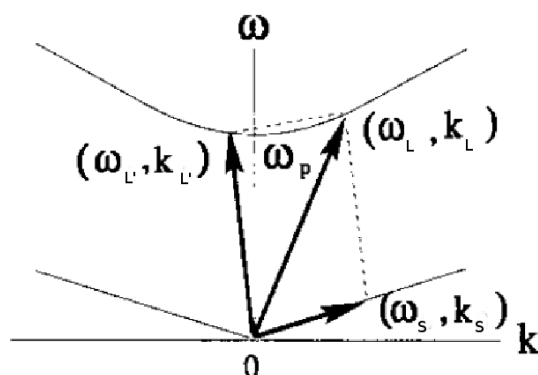


Fig. 2.4: Diagrama de acoplamento de fase do processo $L \rightarrow L' + S$ [23].

$$L + S \rightarrow T \quad \omega_L + \omega_S = \omega_T \quad \mathbf{k}_L + \mathbf{k}_S = \mathbf{k}_T$$

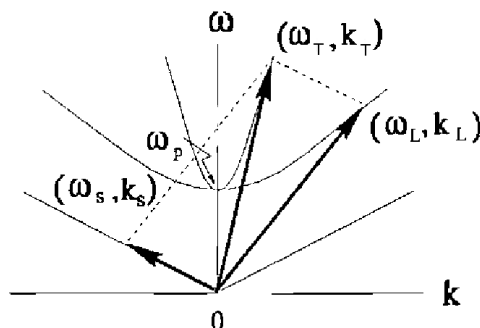


Fig. 2.5: Diagrama de acoplamento de fase do processo $L + S \rightarrow T$ [23].

O crescimento das ondas de Langmuir é caracterizado por uma instabilidade produzida por um feixe de elétrons podendo ser uma instabilidade reativa ou cinética.

2.3 Teoria de turbulência em plasmas

2.3.1 Teoria de turbulência forte

A teoria de turbulência forte baseia-se nos processos físicos produzidos pela força ponderomotiva. Essa força cria regiões de baixa densidade de plasma chamadas “cávions” onde as ondas de Langmuir de alta frequência são aprisionadas. Essas, por sua vez, possuem pacotes de ondas com densidade de energia algumas ordens de grandeza maior que a densidade média do meio. Esses pacotes de onda podem produzir diretamente radiação

eletromagnética próxima à frequência local de plasma e seu harmônico. Assim a teoria turbulência forte é usada quando a energia dos modos excitados é da mesma ordem de grandeza da energia total do plasma, onde a expansão perturbativa envolvida na teoria de turbulência fraca falha [3, 17–19, 24, 25].

2.3.2 Teoria de turbulência fraca

A teoria de turbulência fraca tradicionalmente faz uso das relações de dispersão dos modos eletrostáticos, rigorosamente obtidos para um plasma puramente maxwelliano ou, no máximo, para um sistema plasma-feixe onde este último é suficientemente fraco.

A teoria de turbulência fraca desenvolvida entre anos 1960 e 1970 [26] é uma teoria não linear perturbativa baseada na expansão perturbativa da equação de Klimontovich truncada na segunda ou terceira ordem quando a energia excitada no espectro de modos é pequena comparada com a energia total do plasma e grande comparada ao ruído térmico. A teoria de turbulência usual é aplicada quando a instabilidade no plasma tem um crescimento fraco e a frequência real ω_k pode ser determinada pela parte real da relação de dispersão

$$\text{Re}[\epsilon(k, \omega_k)] = 0, \quad (2.23)$$

enquanto que a taxa de crescimento pode ser determinada pela fórmula de Landau

$$\gamma_k = -\frac{\text{Im}[\epsilon(k, \omega_k)]}{\partial \text{Re}[\epsilon(k, \omega_k)] / \partial \omega_k} \quad (2.24)$$

onde ω_k e γ_k representam a relação de dispersão e a taxa de crescimento, respectivamente. A quantidade $\epsilon(k, \omega_k)$ é a constante dielétrica. Somente quando a instabilidade tem um crescimento fraco a fórmula de Landau é válida e deve satisfazer a desigualdade $|\gamma_k| \ll \omega_k$. A instabilidade na qual a taxa de crescimento/amortecimento é calculada com base na fórmula de Landau pode ser denominada instabilidade cinética [27]. Para a instabilidade de crescimento forte, tanto a frequência real e taxa crescimento/amortecimento são determinadas pela relação de dispersão complexa $\epsilon(k, \omega_k + i\gamma_k) = \text{Re}[\epsilon(k, \omega_k + i\gamma_k)] + i\text{Im}[\epsilon(k, \omega_k + i\gamma_k)] = 0$. Quando a velocidade de fluxo relativa entre os íons e os elétrons é da ordem da velocidade térmica dos elétrons, a instabilidade é fracamente crescente e satisfaz a condição $|\gamma_k| \ll \omega_k$. Quando a velocidade de deslocamento relativo é maior que a velocidade térmica dos elétrons, tem-se um crescimento forte da instabilidade e a condição $\gamma_k > \omega_k$. Em geral, a instabilidade com frequência complexa $\omega = \omega_k + i\gamma_k$ deve ser obtida pela solução da relação de dispersão complexa sendo denominada instabilidade reativa [27].

2.4 Processos não lineares na teoria de turbulência fraca

Processos lineares são usados para ondas onde a amplitude é mantida pequena e a teoria de turbulência fraca é abordada, mas para ondas instáveis, onde a teoria linear indica crescimento da amplitude da onda, a amplitude acabará por se tornar grande o suficiente para afetar a função de distribuição. Quando isso conduz a um grande número de ondas de amplitude finitas, o plasma torna-se turbulento e não linear.

Os acoplamentos não lineares são predominantes e difíceis de serem isolados. Em um plasma, no entanto, esse caso não é frequente, uma vez que as ondas não lineares induzidas são excitadas com amplitudes pequenas e, a menos que essas ondas também sejam instáveis, pode-se ter um caso de turbulência fraca. Como uma primeira aproximação, então, considera-se os diferentes modos independentes e aqui concentra-se a atenção sobre um fenômeno cada vez.

Na primeira aproximação, os coeficientes de acoplamento não lineares entre vários modos lineares mudam lentamente com o tempo, e este é o domínio da teoria turbulência fraca. O parâmetro fundamental de expansão é a razão entre a densidade de energia das ondas e a densidade de energia do plasma.

A Teoria turbulência fraca usualmente considera três tipos de interações, descritas a seguir.

2.4.1 Interação quase linear onda-partícula

A interação quase linear onda-partícula se refere a um processo de ressonância onde $\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$ sem campo magnético.

Essa interação quase linear é devido à um grupo de partículas que permanecem em fase com a onda ao longo de muitos ciclos e tem tempo para trocar energia com a onda, o que resulta em mudanças lentas na função de distribuição, que podem ser atribuídas a um processo de difusão chamado difusão quase linear.

A teoria quase linear, que trata esses dois efeitos simultaneamente, é uma teoria não linear, no sentido que a taxa de crescimento da amplitude das ondas depende da função de distribuição, e a taxa de variação da função de distribuição depende das amplitudes das ondas.

Por causa da natureza da interação de ressonância, esse é um processo cinético, o qual origina fenômenos tais como a formação de platô na função de distribuição, e a distorções gerais da função de distribuição, tais como a formação de cauda super-térmica, a qual usualmente decai obedecendo uma lei de potência.

2.4.2 Interação não linear onda-onda

O processo é ressonante entre as ondas de modo a que as equações (2.21) e (2.22) são satisfeitas, onde ω e \mathbf{k} se referem as frequências e vetores de onda das ondas participantes.

O mecanismo é o acoplamento não linear que ocorre quando o batimento de duas ondas é tal que a soma ou a diferença de suas frequências e vetores de onda coincidem com a frequência e vetor de onda de uma terceira onda.

Para esse caso, não há ressonâncias das partículas envolvidas, de modo que a abordagem de fluido pode ser suficiente. Um dos exemplos mais importantes desse tipo de interação é a classe de instabilidades paramétricas onde duas ondas interagem com uma terceira.

2.4.3 Interação não linear onda-partícula

A condição de ressonância para essa interação é $\omega_2 \pm \omega_1 = (\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{v}$. Esse processo também é ressonante, mas as partículas mantém sua fase constante em relação à frequência de batimento de duas ondas. Esta interação também é conhecida como amortecimento de Landau não linear [18, 25, 28, 29].

Esses processos citados acontecem simultaneamente em plasmas e o seu efeito coletivo descreve a evolução do plasma, de acordo com a teoria de turbulência fraca.

Capítulo 3

A Interação feixe-plasma descrita pela teoria de turbulência fraca

Na literatura são encontrados resultados para a interação do sistema feixe-plasma onde o feixe é de intensidade baixa e essa interação é descrita pela teoria de turbulência fraca. Aqui é mostrada a evolução da função de distribuição das partículas e da intensidade espectral das ondas para esse sistema, considerando, em separado, os termos quase lineares e posteriormente os termos não lineares.

É importante ressaltar que não se pretende, aqui, derivar as equações da Teoria de Turbulência Fraca, mas simplesmente aplicá-las ao estudo de um sistema feixe-plasma. Essa limitação do escopo do presente trabalho é justificada pelo fato de que tal derivação pode se mostrar extremamente longa e complexa, a exemplo da recente reformulação, feita a partir de primeiros princípios, apresentada nas referências [15, 30].

3.1 Teoria quase linear

A abordagem da teoria quase linear de plasmas, que consiste em uma descrição empregada com frequência na teoria cinética de plasmas, onde são incorporados os efeitos não lineares na mais baixa ordem os quais buscam descrever a interação entre as partículas do plasma e o campo eletrostático/eletromagnético das ondas que se propagam por ele [28].

Essa teoria é válida quando o plasma é fracamente instável e quando a instabilidade resultante da interação onda-partícula excita uma larga faixa espectral, em decorrência da evolução autoconsistente do sistema, de acordo com a hipótese de flutuações com fases aleatórias [15]. Trabalhos recentes mostram que a teoria quase linear descreve satisfatoriamente a evolução do sistema mesmo em limites que excedem os limites originais da teoria [25, 30–36].

Inicialmente, considera-se as equações de evolução quase linear de um sistema feixe-

plasma, levando em conta interações das ondas de Langmuir com os elétrons do plasma. Em seguida são mostradas as soluções numéricas desse sistema, as quais ilustram a evolução temporal tanto da distribuição eletrônica quanto da intensidade espectral das ondas e em particular, a formação do platô quase linear na distribuição.

A derivação das equações parte do sistema Vlasov-Poisson de equações, executa expansões perturbativas e então calcula médias de ensemble sobre fases aleatórias. Essa formulação denominada *Teoria de Klimontovich*, mantém os efeitos de partículas únicas, responsáveis pela emissão térmica do plasma [15, 30, 37, 38]. Empregando-se esse procedimento, obtém-se o sistema de equações cinéticas da teoria quase linear apresentado a seguir.

3.1.1 Formulação teórica

Considera-se a função de distribuição inicial para os elétrons,

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{e^2}{4\pi m_e} \int d^3 k \frac{k_i}{k^2} \omega_k^L \delta(\omega_k^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_e + \frac{\pi e^2}{m_e^2} \int d^3 k \frac{k_i k_j}{k^2} \delta(\omega_k^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) I_k^L \frac{\partial f_e}{\partial v_j} \right) \quad (3.1)$$

e a equação cinética para as ondas de Langmuir L ,

$$\frac{\partial I_{\mathbf{k}}^L}{\partial t} = \frac{\pi e^2 \omega_{pe}^2}{k^2} \int d^3 \mathbf{v} \delta(\omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_e + \frac{\pi \omega_{\mathbf{k}}^L \omega_{pe}^2}{k^2} \int d^3 \mathbf{v} \delta(\omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} I_{\mathbf{k}}^L \quad (3.2)$$

onde $f_e(v, t)$ é a função de distribuição de elétrons e $I_{\mathbf{k}}^L(t)$ a intensidade espectral das ondas de Langmuir.

Na equação da intensidade espectral das ondas, equação (3.2), tem-se para o primeiro termo do lado direito da igualdade a emissão espontânea e o segundo termo descreve a emissão induzida. Estes termos descrevem os processos quase lineares na interação onda-partícula.

As equações (3.1) e (3.2) são reescritas da seguinte maneira:

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_i} (A_i f_e + D_{ij} \frac{\partial f_e}{\partial v_j}) \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial I_{\mathbf{k}}^L}{\partial t} = S_{\mathbf{k}} + \gamma_{\mathbf{k}} I_{\mathbf{k}}^L, \quad (3.4)$$

onde os coeficientes são

$$A_i = \frac{e^2}{4\pi m_e} \int d^3k \frac{k_i}{k^2} \omega_k^L \delta(\omega_k^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}), \quad (3.5)$$

$$D_{ij} = \frac{\pi e^2}{m_e^2} \int d^3k \frac{k_i k_j}{k^2} \delta(\omega_k^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) I_k^L, \quad (3.6)$$

$$S_k = \frac{\pi e^2 \omega_{pe}^2}{k^2} \int d^3v \delta(\omega_k^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_e, \quad (3.7)$$

$$\gamma_k = \frac{\pi \omega_k^L \omega_{pe}^2}{k^2} \int d^3v \delta(\omega_k^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}}. \quad (3.8)$$

O coeficiente A_i representa o coeficiente de arraste colisional, o D_{ij} de difusão quase linear, S_k de emissão espontânea e γ_k de emissão induzida, onde n_e , e e m_e são respectivamente, a densidade, carga e a massa eletrônicas.

A frequência angular de plasma é descrita pela equação $\omega_{pe}^2 = 4\pi n_e e^2 / m_e$, onde \mathbf{k} é o vetor de onda, e a relação de Bohm-Gross descrita por $\omega_k^L = \omega_{pe} (1 + 3k^2 V_{Te}^2 / 2\omega_{pe}^2)$, onde $V_{Te}^2 = k_B T_e / m_e$ é a velocidade térmica eletrônica e v_e é a velocidade de deriva.

As equações (3.1) e (3.2) descrevem a cinética da evolução temporal tanto da distribuição eletrônica quanto da intensidade espectral das ondas de Langmuir. Para a aplicação realizada no presente estudo, as mesmas terão a sua dimensionalidade reduzida a uma dimensão e serão em seguida reescritas em termos de quantidades adimensionais. Fazendo isso, obtém-se:

$$\frac{\partial F_e}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial u} (A F_e) + \frac{\partial}{\partial u} \left(D \frac{\partial F_e}{\partial u} \right), \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial I_q^{\pm L}}{\partial x} = \frac{\pi}{q^2} \left(\frac{g}{q} F_e(u) \pm x_q^L I_q^{\pm L} \frac{\partial F_e}{\partial u} \right)_{\pm u = x_q^L / q} \quad (3.10)$$

sendo

$$\begin{aligned}
 \tau &= \omega_{pe} t, \\
 u &= v/V_{te}, \\
 q &= kV_{te}/\omega_{pe}, \\
 x_q^L &= \omega_q^L/\omega_{pe}, \\
 F_e(u) &= V_{te} f_e(v), \\
 I_q^L &= (2\pi)^2 g I_k^L / m_e V_{te}, \\
 A &= 2g[\Theta(u) - \Theta(-u)], \\
 D &= \frac{2}{|u|} [\Theta(u)_q^{+L} - \Theta(-u)_q^{-L}]_{q=1/|u|}, \\
 g &= [2^{2/3} (4\pi)^2 n_e \lambda_{De}^3]^{-1}, \\
 \lambda_{De} &= [T_e / 4\pi n_e e^2]^{1/2}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

as quantidades adimensionais, onde g é proporcional ao *parâmetro de plasma* ($[n_e \lambda_{De}^3]^{-1}$), que é uma medida das flutuações das partículas únicas, que possui um valor pequeno mas não desprezível e este parâmetro aumenta a estabilidade das equações e Θ é a *função de Heaviside*. Nestas equações, o sinal positivo e negativo de L , indica o sentido de propagação das ondas de Langmuir, $+L$ representa a propagação no sentido positivo das ondas de Langmuir, enquanto $-L$ a propagação no sentido oposto.

Para implementar a solução do sistema de equações acima, primeiro deve-se impor as condições iniciais, determinando o instante inicial ($\tau = 0$). O sistema feixe-plasma será modelado por uma distribuição maxwelliana que descreve uma população eletrônica de fundo, mais densa, em repouso em relação ao referencial adotado, permeada por outra população eletrônica do feixe, mais rarefeita, deslocada com uma velocidade média V_b através do plasma de fundo. Com isso a distribuição eletrônica inicial é escrita

$$F_e(u, 0) = \frac{1 - \delta}{\pi^{1/2}} e^{-u^2} + \frac{\delta}{(\pi\rho)^{1/2}} e^{-(u-U_b)^2/\rho} \tag{3.12}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 \delta &= n_b/n_e, \\
 \rho &= T_b/T_e, \\
 U_b &= v_b/V_{Tb}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Sendo, n_b a densidade do feixe, n_e a densidade do plasma, T_b a temperatura do feixe, T_e a temperatura do plasma, v_b a velocidade de deriva do feixe e V_{Tb} a velocidade térmica.

Para a teoria quase linear ser válida estes seguintes parâmetros devem satisfazer $\delta < 1$ e $U_b \sim 1$ [36].

Agora é necessário obter o nível inicial de I_q^L , supondo que em $\tau < 0$ se tem o plasma próximo do equilíbrio termodinâmico. Para tanto, coloca-se $\delta = 0$ na equação de $F_e(u)$ que descreve o plasma de fundo maxwelliano, sem a presença do feixe. Como hipótese o plasma se encontra em equilíbrio com o campo de radiação, o que implica em

$$\frac{\partial F_e(u)}{\partial \tau} = \frac{\partial I_q^L}{\partial \tau} = 0. \quad (3.14)$$

Da condição $\frac{\partial I_q^L}{\partial \tau} = 0$ e considerando em equilíbrio a distribuição de partículas, descrita por uma maxwelliana. Pode-se obter da equação (3.9) a expressão para a intensidade expectral das ondas de Langmuir no equilíbrio termodinâmico, ver seção (A5)

$$I_q^L(\tau = 0) = \frac{g}{1 + 3q^2/2}. \quad (3.15)$$

3.1.2 Resultados e discussão

Tornando o sistema de equações (3.3) e (3.4) unidimensional e ele não possuindo solução analítica, logo é preciso obter a solução numérica, que é feita discretizando as variáveis independentes no espaço de velocidade (u) e número de onda (q) com intervalos $2 \leq u \leq 9.5$ e $10^{-4} \leq q \leq 2$ definidos na inicialização do programa, em grades com 301 x 501 pontos. Para cada ponto da grade, as equações para $F_e(u, \tau)$ ou $I_q^L(\tau)$ compõe um problema de valor inicial onde a solução numérica é realizada com o método de Runge-Kutta de 4ª ordem.

Com isso, se obtém a solução para o conjunto de parâmetros:

$$\begin{aligned} g &= 5 \times 10^{-3}, \\ \rho &= T_b/T_e = 1, \\ \delta &= n_b/n_e = 10^{-3}, \\ U_b &= v_b/V_{te} = 5 \end{aligned} \quad (3.16)$$

As curvas das figuras 3.1 e 3.2 mostram os instantâneos das grandezas dinâmicas em termos da escala típica da evolução temporal das ondas de Langmuir, em períodos de plasma (ω_{pe}^{-1}).

Como pode-se observar na figura 3.1 existem dois máximos, um principal em torno de $u = 0$, composto de elétrons do plasma de fundo e um secundário composto pelos elétrons do feixe próximo a U_b . Ao evoluir o sistema percebe-se, na região onde $\partial F_e/\partial u > 0$, uma diminuição do máximo secundário pois os elétrons cedem energia para as ondas através do mecanismo de amortecimento de Landau e estes elétrons passam a ocupar uma região de

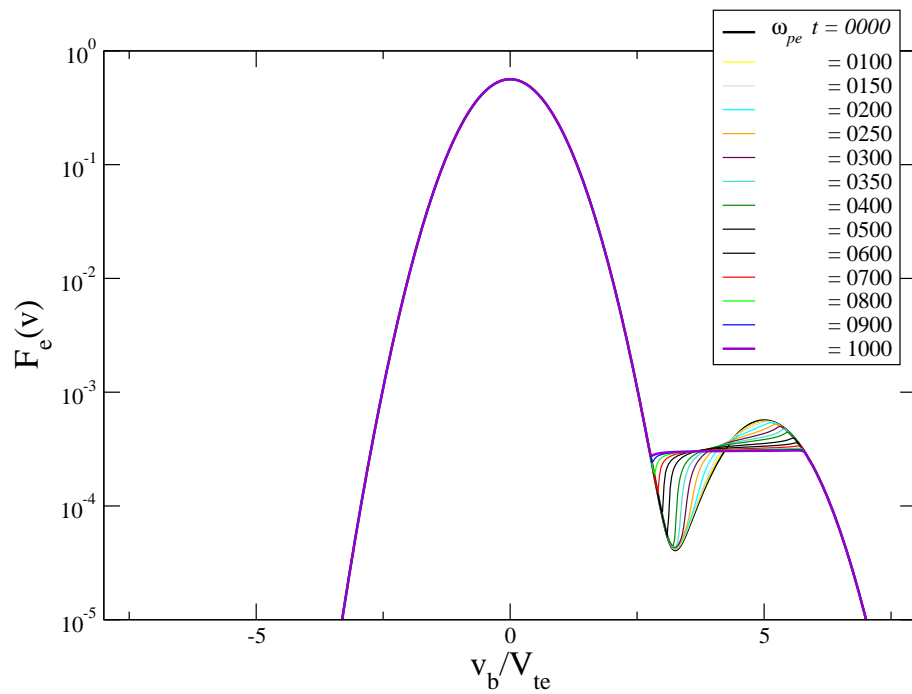


Fig. 3.1: *Evolução temporal da função de distribuição eletrônica para $v_b/V_{te} = 5$ e $n_b/n_e = 10^{-3}$.*

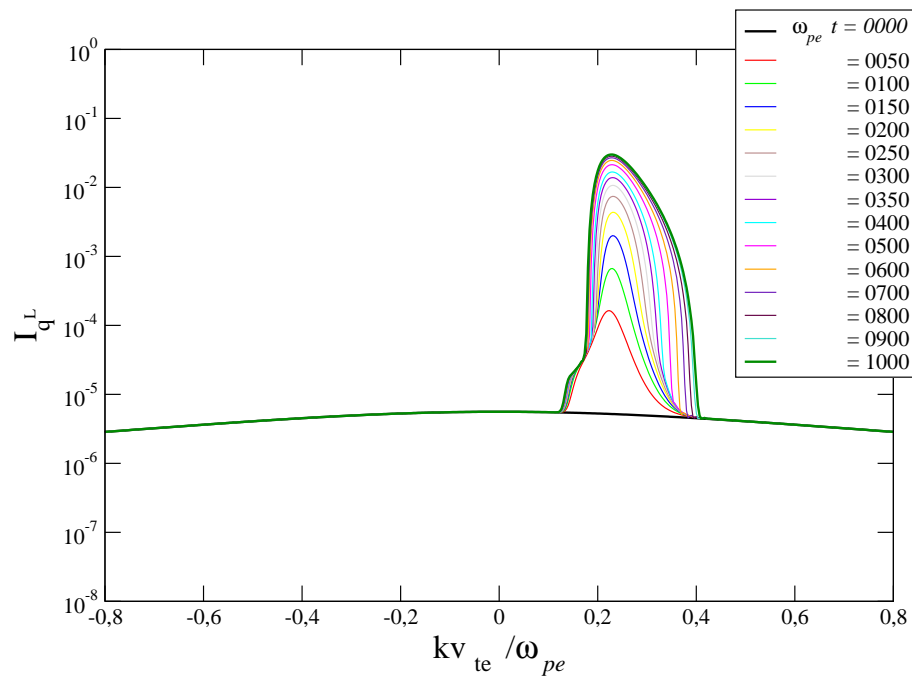


Fig. 3.2: *Intensidade espectral das ondas de Langmuir para um feixe para $v_b/V_{te} = 5$ e $n_b/n_e = 10^{-3}$.*

menor energia. Observa-se a evolução do sistema até a formação do platô quase linear, onde após esse instante o sistema praticamente não evolui.

Para a figura 3.2, onde se tem a evolução da intensidade das ondas de Langmuir, percebe-se que a evolução ocorre para aquelas que se propagam no sentido positivo e que a evolução máxima ocorre próximo a $q \approx 1/U_b$, pois é a região onde o feixe perde maior energia.

Agora, com a interação de dois feixes contra propagantes, utilizando os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned}
 g &= 5 \times 10^{-3}, \\
 \rho &= T_b/T_e = 1, \\
 \delta &= n_b/n_e = 10^{-3}, \\
 U_b &= v_b/V_{te} = \pm 5
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

São obtidas as seguintes curvas:

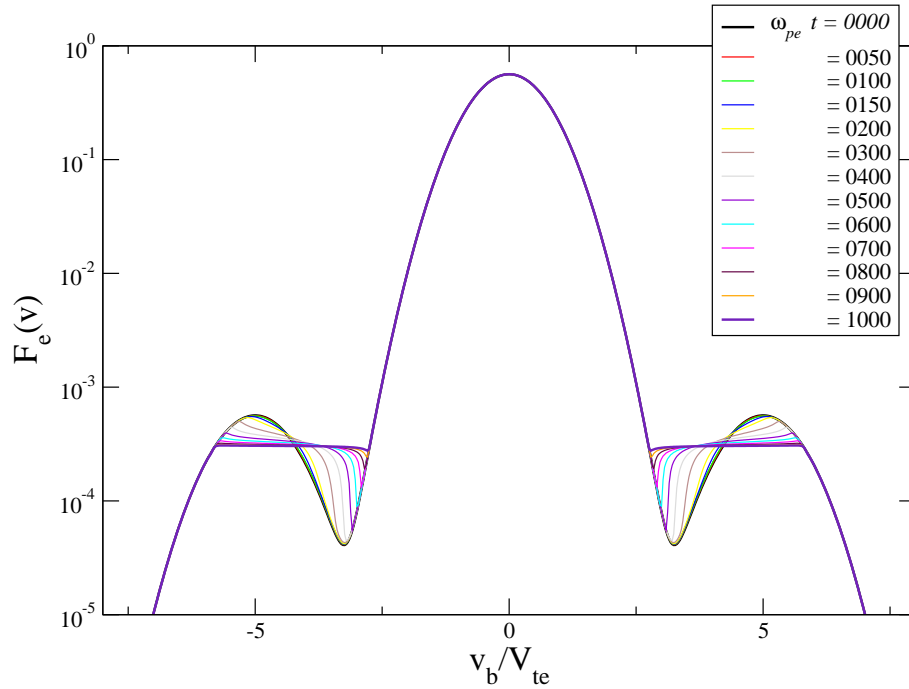


Fig. 3.3: Evolução temporal da função de distribuição eletrônica com $v_b/V_{te} = \pm 5$ e $n_b/n_e = 10^{-3}$.

A figura 3.3 mostra a evolução da intensidade das ondas de Langmuir com interação de dois feixes contra propagantes, a formação dos dois platos simétricos devido a troca de energia das ondas com as partículas. Com a interação de um feixe propagante e outro contrapropagante, se percebe a formação de dois picos simétricos no gráfico da intensidade espectral das ondas de Langmuir na figura 3.4.

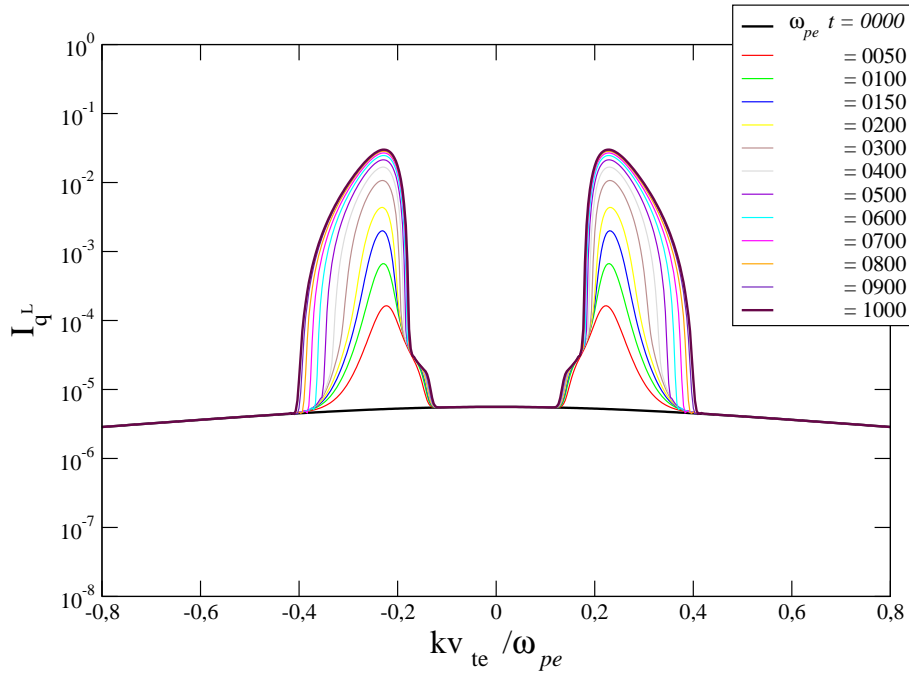


Fig. 3.4: *Intensidade espectral das ondas de Langmuir para dois feixes com $v_b/V_{te} = \pm 5$ e $n_b/n_e = 10^{-3}$.*

3.2 Teoria não linear

A inclusão de efeitos não lineares de ordem mais alta faz-se necessária quando a evolução do sistema, descrita pelas equações quase lineares (3.3) e (3.4), é seguida por um intervalo de tempo relativamente longo e/ou quando a amplitude das oscilações resultantes da perturbação introduzida no plasma pelo feixe de partículas excede um determinado limiar. Quando os modos induzidos atingem amplitudes próximas aos valores da onda indutora, a amplitude do envelope deixa de ser constante. É considerado a amplitude da onda indutora não sendo constante onde se tem uma equação que descreve a evolução espaço-temporal desta amplitude.

Outros fenômenos de ordem mais alta passam a ser importantes para uma descrição mais precisa. Dentre esses fenômenos estão a interação onda-onda e a interação onda-partícula não linear, também denominada espalhamento onda-partícula.

3.2.1 Formulação teórica

Esta equação é descrita pela teoria de turbulência fraca envolvendo os modos lineares de Langmuir (L) e o modo íon-acústico (S). A descrição apresentada nas referências [15,30] permite escrever as equações cinética das ondas na forma, com $f_\alpha = nF_\alpha$.

Então, a equação da intensidade espectral das ondas L é:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\partial t} = & \underbrace{\frac{n e^2 \omega_{pe}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) F_e}_{\text{emissão espontânea}} + \underbrace{\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{\pi \omega_{pe}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} I_{\mathbf{k}}^{\sigma}}_{\text{emissão induzida}} \\
 & + \underbrace{\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{\pi e^2}{2 T_e^2} \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} \int d\mathbf{k}' \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S) \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' S}}_{\text{decaimento espontâneo}} \\
 & - \underbrace{\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{\pi e^2}{2 T_e^2} \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} \int d\mathbf{k}' \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S) \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' S} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}_{\text{decaimento induzido}} \\
 & - \underbrace{\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{\pi e^2}{2 T_e^2} \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} \int d\mathbf{k}' \frac{\mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S) \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}_{\text{decaimento induzido}} \\
 & - \underbrace{\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{n e^4 \lambda_{De}^4}{T_e^2} \sum_{\sigma' = \pm 1} \int d\mathbf{k}' \int \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2} \left(\sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}}^{\sigma L} - \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} \right)}_{\text{espalhamento}} \\
 & \quad \times \underbrace{\delta[\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] F_i}_{\text{espalhamento espontâneo}} \\
 & + \underbrace{\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{\pi e^2}{m_e m_i \omega_{pe}^2} \sum_{\sigma' = \pm 1} \int d\mathbf{k}' \int d\mathbf{v} \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2}}_{\text{espalhamento}} \\
 & \quad \times \underbrace{\delta[\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{v}} I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}_{\text{espalhamento induzido}} \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

Os resultados aqui apresentados não contêm o efeito dos termos de espalhamento não linear.

Na equação das ondas L , as $\delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})$ indicam a condição de ressonância e $\delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S)$ garante a condição de conservação de energia.

A equação cinética para intensidade espectral das ondas S fica escrita então:

$$\frac{\partial I^{\sigma S}}{\partial t} = \underbrace{\mu_{\mathbf{k}}^2 \frac{n e^2 \omega_{pe}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) (F_e + F_i)}_{\text{emissão espontânea}}$$

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{+\mu_{\mathbf{k}}\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L \frac{\pi\omega_{pe}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left(F_e + \frac{m_e}{m_i} F_i \right) I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}_{\text{emissão induzida}} \\
 & \underbrace{+\mu_{\mathbf{k}}\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L \frac{\pi\omega_{pe}^2}{4T_e^2} \sum_{\sigma', \sigma''=\pm 1} \int d\mathbf{k}' \frac{[\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')]^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L) \mu_{\mathbf{k}}\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' L}}_{\text{decaimento espontâneo}} \\
 & \underbrace{-\mu_{\mathbf{k}}\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L \frac{\pi\omega_{pe}^2}{4T_e^2} \sum_{\sigma', \sigma''=\pm 1} \int d\mathbf{k}' \frac{[\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')]^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L) \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}_{\text{decaimento induzido}} \\
 & \underbrace{-\mu_{\mathbf{k}}\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L \frac{\pi e^2}{4T_e^2} \sum_{\sigma', \sigma''=\pm 1} \int d\mathbf{k}' \frac{[\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')]^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L) \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}_{\text{decaimento induzido}} \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

Para a equação das ondas S é desconsiderado o termo de espalhamento pois é um processo lento e os íons são massivos, logo não contribuem tanto para evolução das ondas. As condições de ressonância $\delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})$ e $\delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L)$ representam a conservação de energia e momento.

A equação da evolução temporal da função de distribuição das partículas, com termos lineares, tem a forma

$$\frac{\partial f_e(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = \int d\mathbf{k} \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left[\frac{e^2}{2\pi k m_e} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma\omega_{\mathbf{k}}^L \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_e + \frac{\pi e^2}{m_e^2} \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} \sum_{\sigma=\pm 1} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) I_{\mathbf{k}}^{\sigma L} \right] \quad (3.20)$$

3.2.2 Resultados e discussão

Para implementação da solução numérica discretizamos o espaço de velocidade (u) e número de onda (q), em grades com um grande número de pontos entre os intervalos definidos na inicialização do programa. Em cada ponto da grade o problema é resolvido, considerando o problema como de valor inicial. O método utilizado para solução numérica é o Runge-Kutta de 4ª ordem. Utilizando a mesma teoria mas agora inserindo os termos de ordem mais alta, obtem-se os resultados apresentados nas figuras da evolução das partículas e das ondas com a interação de um único feixe e de dois feixes contra propagantes, com os seguintes parâmetros

$$\begin{aligned}
 g &= 5 \times 10^{-3}, \\
 \rho &= T_b/T_e = 1, \\
 \delta &= n_b/n_e = 10^{-2}, \\
 U_b &= v_b/V_{te} = 4, \\
 T_e/T_i &= 7.
 \end{aligned}$$

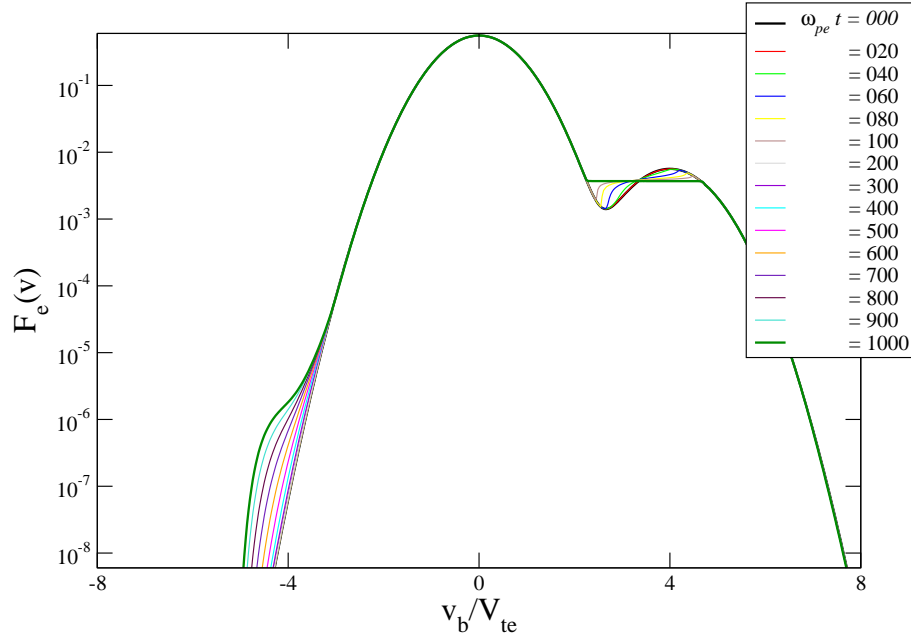


Fig. 3.5: *Evolução temporal do sistema feixe-plasma incluindo efeitos não lineares ordem de mais alta. Função de distribuição eletrônica para $v_b/V_{te} = 4$ e $n_b/n_e = 10^{-2}$.*

A figura 3.5 mostra a evolução temporal do sistema feixe-plasma. É possível ver a formação da cauda super-térmica devido a absorção do modo retroespalhado em torno de $U_b = -4$ mostrado na figura 3.6 decorrente dos efeitos não lineares. As figuras 3.6 e 3.7 mostram a evolução das ondas de Langmuir e íon-acústicas. Na figura 3.6 nota-se um aumento na intensidade próximo a $q \cong U_b^{-1}$, até a formação do platô na distribuição eletrônica, e após isso, percebe-se a formação de um pico secundário, da onda de Langmuir retroespalhada, na região próxima a $q \cong -U_b^{-1}$. Na figura 3.7 é possível ver a formação de um pico próximo a $q \cong 2U_b^{-1}$, e após algum tempo percebe-se também a formação do pico próximo $q \cong -2U_b^{-1}$. Nota-se formação do modo íon-acústico S .

Agora, considerando a interação entre dois feixes contra propagantes, com os seguintes

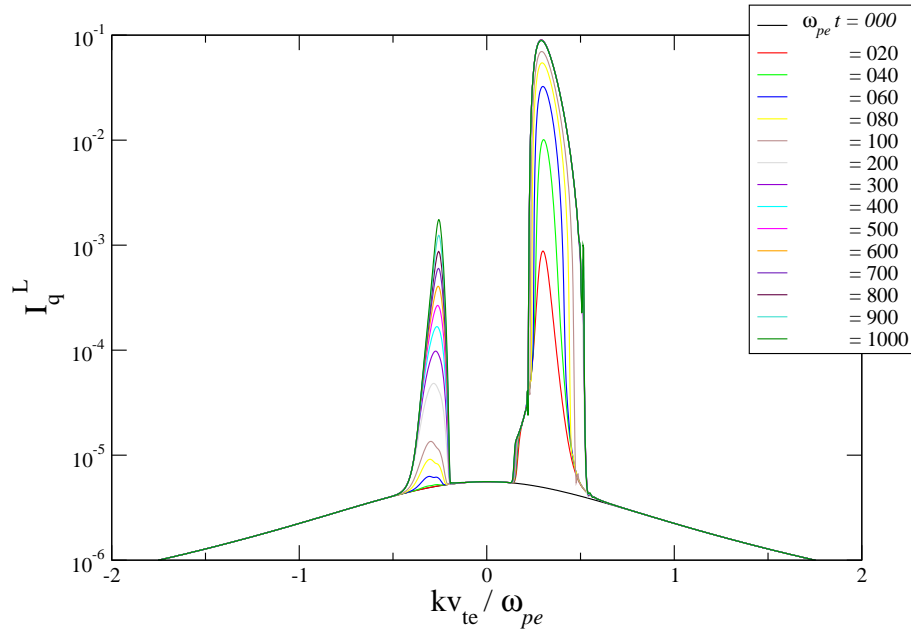


Fig. 3.6: Evolução temporal do sistema feixe-plasma incluindo efeitos não lineares de ordem mais alta. Ondas de Langmuir para $v_b/V_{te} = 4$ e $n_b/n_e = 10^{-2}$.

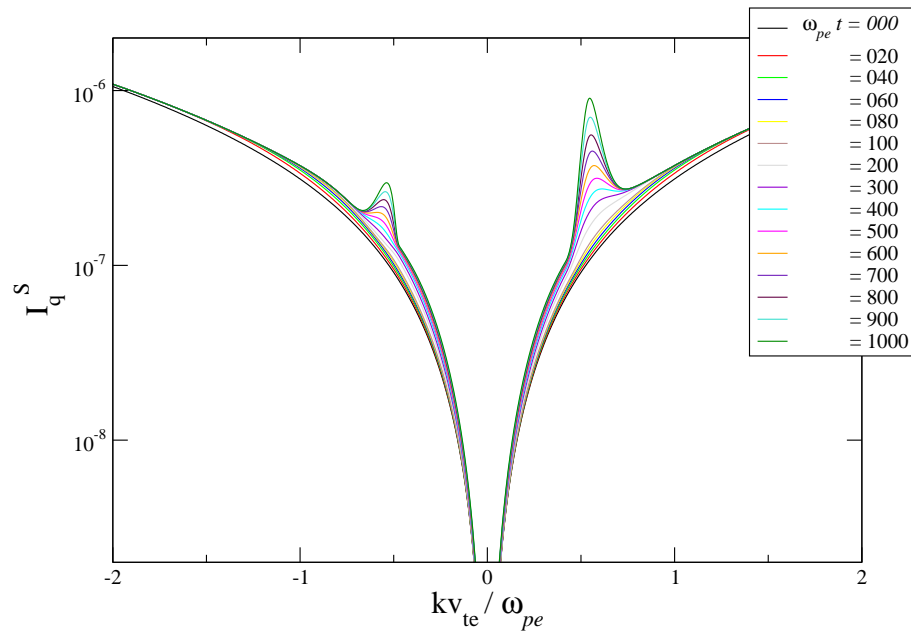


Fig. 3.7: Evolução temporal do sistema feixe-plasma incluindo efeitos não lineares de ordem mais alta. Ondas íon-acústicas para $v_b/V_{te} = 4$ e $n_b/n_e = 10^{-2}$.

parâmetros:

$$\begin{aligned}
 g &= 5 \times 10^{-3}, \\
 \rho &= T_b/T_e = 1, \\
 \delta &= n_b/n_e = 10^{-2}, \\
 U_b &= v_b/V_{te} = \pm 4, \\
 T_e/T_i &= 7
 \end{aligned}$$

Obtém-se a evolução temporal do sistema feixe-plasma incluindo efeitos não lineares de ordem mais alta para a distribuição eletrônica e para evolução das ondas de Langmuir e íon-acústicas.

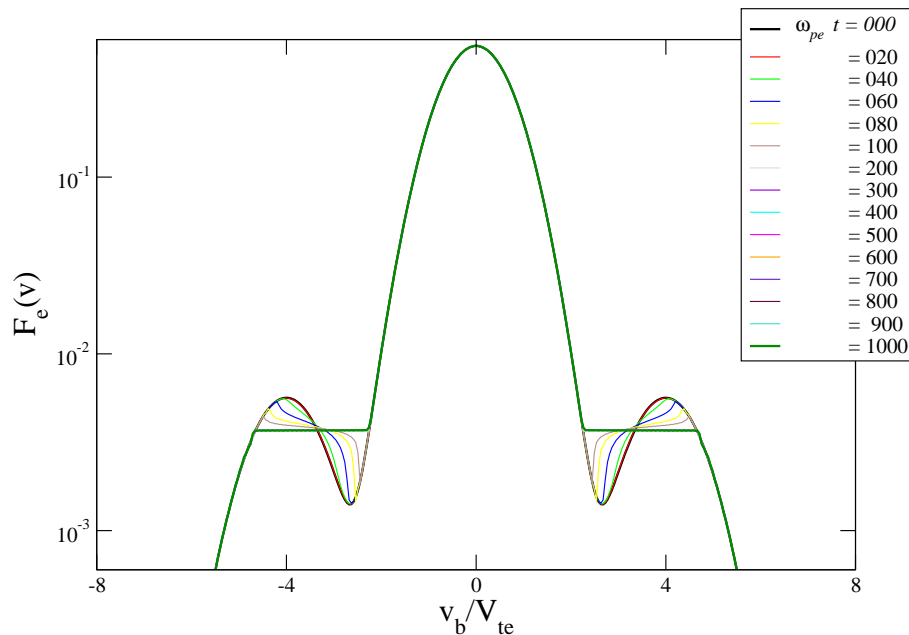


Fig. 3.8: Evolução temporal do sistema feixe-plasma com dois feixes incluindo efeitos não lineares de ordem mais alta. Função de distribuição eletrônica para $v_b/V_{te} = \pm 4$ e $n_b/n_e = 10^{-2}$.

Quando se tem a interação de dois feixes com o plasma de fundo, percebe-se que na figura 3.8 a formação dos dois platôs devido a troca de energia entre as partículas e as ondas. Na figura 3.9 uma intensificação do modo retroespalhado produzido por efeitos não lineares e também a instensificação dos modos S devido a interação destes dois feixes, neste caso. Nestes resultados apresentados não estão incluídos os termos de espalhamento.

Com isso, percebe-se que os efeitos não lineares ocorrem apenas depois do sistema ter evoluído durante algum tempo, nos instantes iniciais o mecanismo fundamental é dos termos quase lineares de interação onda-partícula. Após a formação do platô quase linear os efeitos não lineares tornam-se mais importantes, e são responsáveis pela intensificação da onda de Langmuir retroespalhada.

Diante dos resultados obtidos e encontrados na literatura, observa-se que a Teoria de Turbulência Fraca usual descreve apropriadamente os resultados obtidos para feixes de baixa intensidade, que são os modos de Langmuir, o modo de Langmuir contrapropagante e o modo íon-acústico.

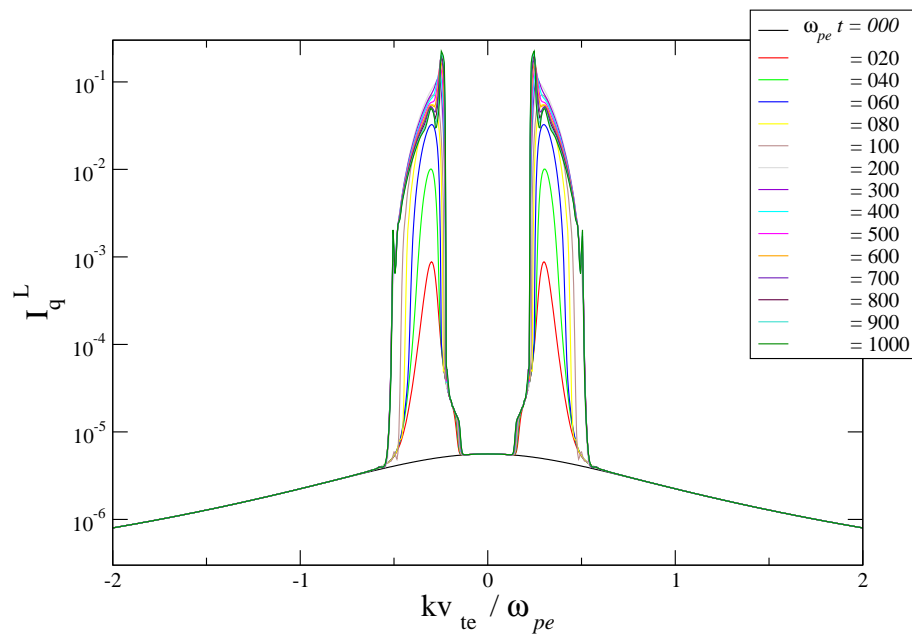


Fig. 3.9: *Evolução temporal do sistema feixe-plasma com dois feixes incluindo efeitos não lineares de ordem mais alta. Ondas de Langmuir para $v_b/V_{te} = \pm 4$ e $n_b/n_e = 10^{-2}$.*

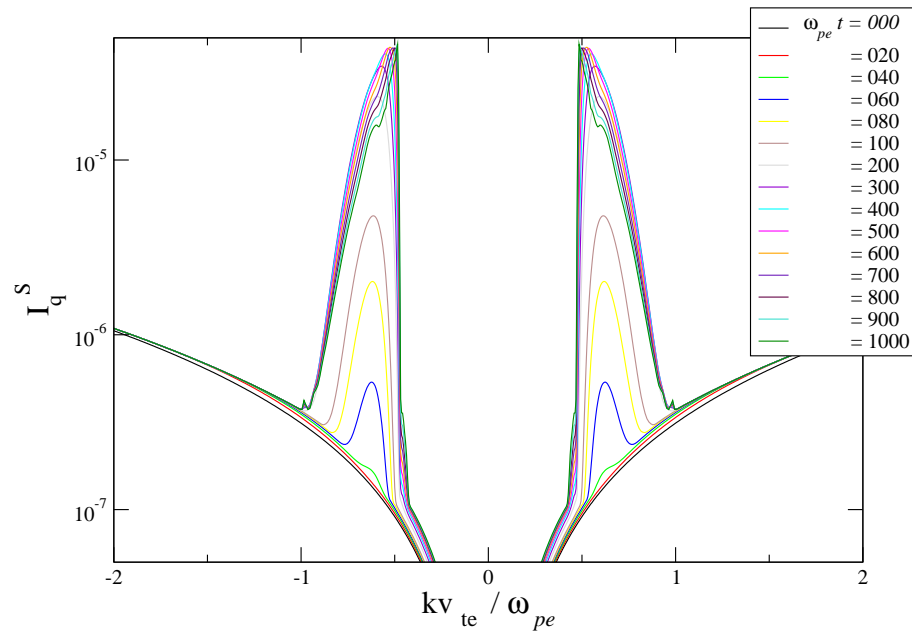


Fig. 3.10: *Evolução temporal do sistema feixe-plasma com dois feixes incluindo efeitos não lineares de ordem mais alta. Ondas íon-acústicas para $v_b/V_{te} = \pm 4$ e $n_b/n_e = 10^{-2}$.*

Capítulo 4

Teoria de turbulência fraca para feixes de alta intensidade

Neste capítulo, será apresentada a formulação teórica para descrever a evolução do sistema feixe-plasma para feixes de alta intensidade (velocidade de deriva e/ou densidade), conforme descrito pela teoria de turbulência fraca.

4.1 Introdução

Para um sistema descrito por funções de distribuição de não equilíbrio (não maxwellianas), tal como ocorre no sistema feixe-plasma, as relações de dispersão (2.16) e (2.19) muitas vezes continuam supostas válidas; neste caso, é feita a hipótese de que desvios da distribuição em relação à maxwelliana não irão alterar significativamente a dispersão dos modos normais de oscilação do plasma, sendo suas contribuições consideradas somente nos coeficientes de absorção. Esta hipótese é usualmente feita na teoria de turbulência fraca. Contudo, estudos mais cuidadosos realizados acerca do efeito do feixe de elétrons não somente sobre o coeficiente de absorção (ou de emissão), mas também sobre a relação de dispersão dos modos [21, 39] mostraram que no caso de um sistema feixe-plasma, as relações de dispersão (2.16) e (2.19) somente são válidas, de forma aproximada, em condições bastante restritivas. O'Neil and Malmberg [39] deduziram que a relação de dispersão de Bohm-Gross somente é válida quando

$$s = \frac{V_{tb}}{v_b} \left(\frac{2n_0}{n_b} \right)^{1/3} \gtrsim 1, 47, \quad (4.1)$$

sendo, $V_{tb} = (T_b/2m_e)^{1/2}$ a dispersão térmica de velocidades das partículas do feixe, v_b a velocidade média do feixe, n_0 a densidade total do plasma e n_b a densidade do feixe.

Uma análise mais cuidadosa foi realizada posteriormente por Cairns [21], resultando em condições ainda mais restritivas para a validade desta aproximação. Em sua análise, Cairns

divide as características dispersivas das oscilações de alta frequência em três intervalos do parâmetro s , correspondentes a diferentes graduações do caráter ressonante ou não ressonante da interação feixe-plasma:

- $s \lesssim 0,2$. A instabilidade é não ressonante (reativa) e ocorre em pares complexos conjugados de raízes da relação de dispersão.
- $0,2 \lesssim s \lesssim 1,4$. A instabilidade é ressonante, mas ocorre ao longo de um modo de propagação denominado modo feixe-modificado, o qual se caracteriza por uma relação linear do tipo $\omega \simeq kv_b$ para k pequeno.
- $s \gtrsim 1,5$. A instabilidade é fortemente ressonante e ocorre ao longo de um modo que se aproxima assintoticamente do modo de Langmuir quando $s \rightarrow \infty$, ou seja, quando $v_b \rightarrow 0$ e/ou $n_b \rightarrow 0$.

Os parâmetros físicos muitas vezes adotados nos estudos de turbulência fraca geralmente satisfazem de forma marginal a condição $s \gtrsim 1,5$ e portanto o uso da relação de dispersão de Bohm-Gross é justificado.

Por outro lado, a figura 4.1 ilustra uma situação onde a condição (4.1) não é obedecida. Esta figura mostra o diagrama $\omega \times k$ dos modos eletrostáticos gerados por um sistema feixe-plasma durante uma simulação do tipo *particle-in-cell* (PIC) [3, 40]. A figura mostra as oscilações eletrostáticas que se propagam no mesmo sentido do feixe. De acordo com os parâmetros físicos utilizados, para este resultado $s \approx 0.87$, ou seja, s não satisfaz o critério (4.1), estando na região caracterizada pelo modo feixe-modificado, claramente visível no painel direito da figura 4.1. Neste, pode-se observar a dispersão do modo $\omega \approx \omega_{pe}$; contudo esta dispersão é bastante distinta do modo de Bohm-Gross (2.16), ilustrado pela parábola ponto-tracejada. O modo observado é melhor identificado como sendo o modo feixe-modificado, conforme definido por Cairns [21]. Ainda na figura 4.1 pode-se observar claramente a presença do primeiro harmônico $\omega \approx 2\omega_{pe}$ e ainda o segundo harmônico $\omega \approx 3\omega_{pe}$, o que indica que os modos eletrostáticos harmônicos estão sendo excitados ainda durante a fase linear da interação feixe-plasma, conforme previsto pela teoria generalizada de turbulência fraca [32].

Por outro lado, a mesma simulação PIC obteve também o modo retroespalhado, correspondente à onda de Langmuir retroespalhada pelo decaimento de três ondas $L \rightarrow L' + S$. Pelos resultados da simulação, apresentados no painel esquerdo da figura 4.1, observa-se que este modo ainda segue aproximadamente a dispersão de Bohm-Gross, principalmente para valores pequenos de k (grandes comprimentos de onda).

Os resultados de simulações apresentados na figura 4.1 (entre outros) indicam que a teoria de turbulência fraca deve ser modificada para que possa descrever o comportamento

de um sistema feixe-plasma quando o feixe é de alta intensidade (alta densidade e/ou alta velocidade). As modificações que se fazem necessárias envolvem a consideração dos modos de oscilação pertinentes para o caso de feixes intensos, bem como o uso das respectivas relações de dispersão desse modo dominante e o termo de acoplamento das ondas tentando contornar a inconsistência quando são considerados os feixes de maior intensidade.

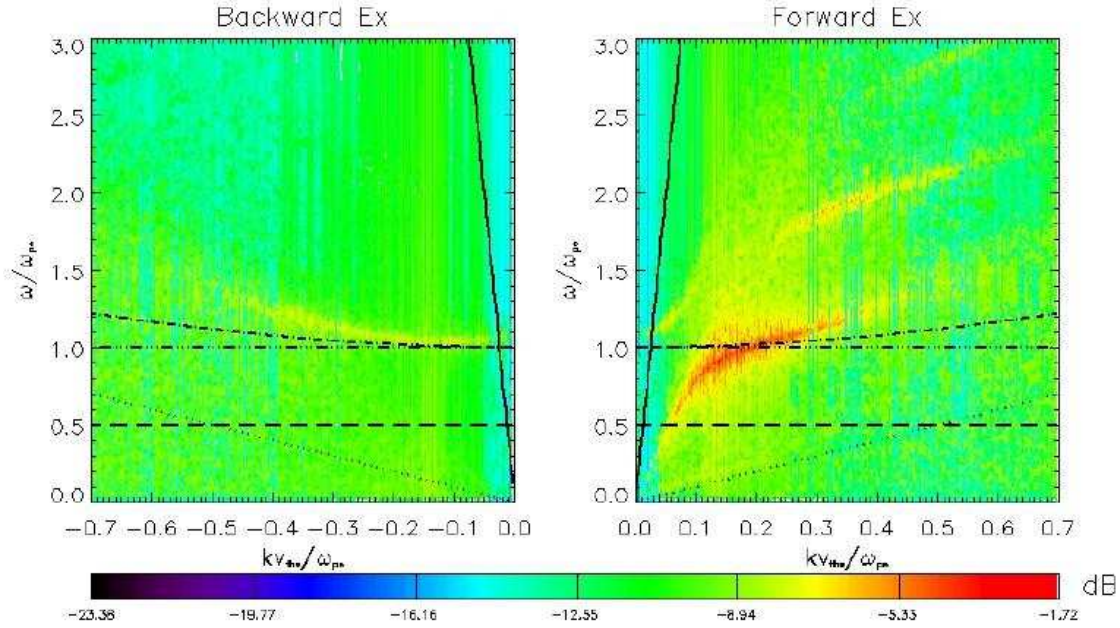


Fig. 4.1: Diagrama de dispersão $\omega \times k$ [3].

Primeiramente, se obtém a solução numérica da relação de dispersão do sistema feixe-plasma. A partir da solução numérica, é proposto um modelo para a relação de dispersão, o qual é usado no cálculo dos coeficientes que determinam a evolução de ondas e partículas.

4.1.1 Relação de dispersão para o sistema feixe-plasma

A equação de dispersão, obtida do sistema Vlasov-Poisson de equações, determina as relações de dispersão para oscilações longitudinais de pequena amplitude em um plasma sem campos externos aplicados, mas com um número arbitrário de feixes de partículas. Esta equação é [21]

$$D(k, \omega) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \int d^3v \frac{\mathbf{k} \cdot \partial F_{\alpha 0}(v) / \partial \mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} = 0, \quad (4.2)$$

onde a função de distribuição $F_{\alpha 0}(v)$ está normalizada como

$$\int F_{\alpha 0}(v) d^3v = 1. \quad (4.3)$$

Para este trabalho são consideradas três populações de partículas:

- 1 população de íon positivos ($\alpha = i$) com número atômico $Z_i = 1$, massa m_i , densidade n_i , velocidade térmica $V_{ti} = \sqrt{T_i/m_i}$ e sem deriva $\mathbf{v}_i = 0$.
- 1 população de fundo de elétrons térmicos ($\alpha = e$) com densidade n_e , velocidade térmica $V_{te} = \sqrt{T_e/m_e}$ e deriva $\mathbf{v}_e = -v_e \hat{z}$ com ($\mathbf{v}_e > 0$).
- 1 população de elétrons térmicos em um feixe ($\alpha = b$) com densidade n_b , velocidade térmica $V_{tb} = \sqrt{T_b/m_b}$ e deriva $\mathbf{v}_b = -v_b \hat{z}$ com ($\mathbf{v}_e > 0$).

As escolhas das velocidades de deriva implicam que o cálculo das relações de dispersão será realizado em um referencial em repouso com os íons.

As relações entre as densidades e velocidades de deriva são determinadas pelas condições de equilíbrio. De acordo com a teoria de Vlasov, para um plasma sem campos ($\mathbf{E}_0 = \mathbf{B}_0 = 0$), as equações de Vlasov-Maxwell mostram que um estado estacionário de meta-equilíbrio ($\partial/\partial t \rightarrow 0$) é possível desde que:

- O plasma deve ser localmente neutro $\rho_0 = \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} = 0$
- O plasma não possui uma corrente elétrica de equilíbrio $\mathbf{J}_0 = \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \int \mathbf{v} F_{\alpha 0}(v) d^3 v = 0$

as quais implicam nas seguintes relações para as três espécies ($\alpha = i, e, b$)

$$\sum_{\alpha=i,e,b} n_{\alpha} q_{\alpha} = n_i - n_e - n_b = 0 \rightarrow n_i = n_e + n_b = n_0 \quad (4.4)$$

e

$$\sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} v_{\alpha} = -n_e v_e + n_b v_b = 0 \rightarrow n_e v_e = n_b v_b \quad (4.5)$$

Usando uma combinação de distribuição de Maxwell-Boltzmann para $F_{\alpha=i,e,b}$.

$$F_{\alpha 0}(v) = \frac{e^{-\frac{(v-v_{\alpha})^2}{2V_{t\alpha}^2}}}{(2\pi)^{3/2} V_{t\alpha}^3} \quad (4.6)$$

a equação 4.2 resulta

$$D(k, \omega) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{(2\pi)^{3/2} V_{t\alpha}^5 k^2} (2\pi)^{3/2} V_{t\alpha}^3 - (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{\alpha}) \int d^3 u \frac{e^{-u^2/2V_{t\alpha}^2}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{\alpha} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}} = 0 \quad (4.7)$$

onde

$$\int d^3u \frac{e^{-u^2/2V_{t\alpha}^2}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}} = -\frac{1}{k} 2\pi^{3/2} V_{t\alpha}^2 Z \left(\frac{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_\alpha}{\sqrt{2}kV_{t\alpha}} \right) \quad (4.8)$$

resulta na equação de dispersão a ser resolvida. Embora tenha sido deduzida para três populações, esta equação é válida para qualquer combinação de populações maxwellianas com deriva. Após uma breve manipulação algébrica, a equação de dispersão resulta escrita como

$$D(k, \omega) = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{2k^2 V_{t\alpha}^2} Z' \left(\frac{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_\alpha}{\sqrt{2}kV_{t\alpha}} \right) = 0 \quad (4.9)$$

A função $Z(\zeta)$ é denominada *Função de dispersão do plasma* ou *função de Fried & Conte*. Esta função é definida como [41]:

$$Z(\zeta) = \pi^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2} dt}{t - \zeta} = 2ie^{-\zeta^2} \int_{-\infty}^{i\zeta} e^{-t^2} dt \quad (4.10)$$

e a equação diferencial é

$$Z'(\zeta) = -2[1 + \zeta Z(\zeta)]. \quad (4.11)$$

Escrevendo a equação 4.9 para o caso $\alpha = i, e, b$ e tomando oscilações somente na direção z , tem-se:

$$1 - \frac{\omega_{pi}^2}{2k_z^2 V_{ti}^2} Z' \left(\frac{\omega}{\sqrt{2}kV_{ti}} \right) - \frac{\omega_{pe}^2}{2k_z^2 V_{te}^2} Z' \left(\frac{\omega + k_z v_e}{\sqrt{2}kV_{te}} \right) - \frac{\omega_{pb}^2}{2k_z^2 V_{tb}^2} Z' \left(\frac{\omega - k_z v_b}{\sqrt{2}kV_{tb}} \right) = 0 \quad (4.12)$$

tornando adimensional a equação, encontramos

$$q^2 - r_{T1} Z' \left(\sqrt{\frac{r_{T1} m_i}{m_e}} \frac{z}{q} \right) - (1 - r_n) Z' \left(\frac{z}{q} + \frac{r_n r_v}{\sqrt{2}(1 - r_n)} \right) - \frac{r_n}{r_{T2}} Z' \left(\frac{z}{\sqrt{r_{T2} q}} - \frac{r_v}{\sqrt{2} r_{T2}} \right) = 0 \quad (4.13)$$

os parâmetros foram definidos como

$$z = \omega / \omega_{pe}, \quad (4.14)$$

$$q = \sqrt{2}kV_{Te} / \omega_{pe} = \sqrt{2}\lambda_{De}k, \quad (4.15)$$

$$r_{T1} = T_e / T_i, \quad (4.16)$$

$$r_{T2} = T_b / T_e, \quad (4.17)$$

$$r_n = n_b / n_0, \quad (4.18)$$

$$r_v = v_b / V_{te} \quad (4.19)$$

A figura 4.2 apresenta a relação de dispersão e a taxa de crescimento com o seguinte conjunto de parâmetros.

$$T_b/T_e = 0.98, \quad (4.20)$$

$$n_b/n_0 = 0.10, \quad (4.21)$$

$$v_b/V_{te} = 6, \quad (4.22)$$

$$T_e/T_i = 1 \quad (4.23)$$

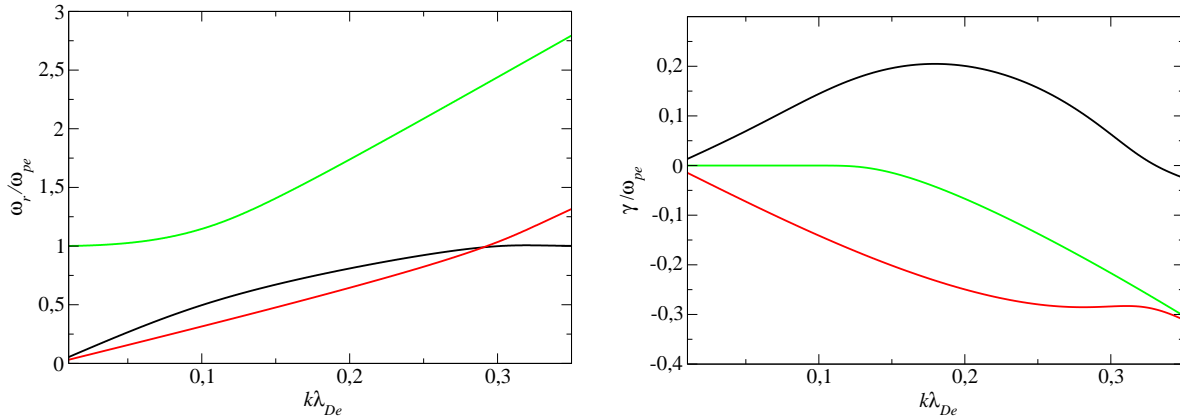


Fig. 4.2: Solução da equação em função de $q/\sqrt{2} = k\lambda_{De}$ para o conjunto de parâmetros indicado. Painel esquerdo: parte real de z . Direito: parte imaginária.

A figura 4.2 no lado esquerdo indica a solução real da relação de dispersão e no lado direito a solução imaginária, onde a parte positiva indica amplificação e a parte negativa a absorção dos modos. Como pode ser visto na solução imaginária, o modo crescente é o modo de linha de cor preta, que visto na solução real é semelhante ao modo dominante em simulações PIC, figura 4.1. Percebe-se na figura 4.2 (b) que os modo representados pelas linhas de cor vermelha e de verde são absorvidos e o modo na linha de cor preta é o único amplificado.

Baseado no artigo de Cairns [21], foi feita uma análise onde foram obtidos os gráficos com parâmetros diferentes, para uma melhor comparação e análise deste modo que se modifica.

As seguintes figuras 4.3, 4.4 e 4.5 mostram a evolução das curvas de dispersão para um feixe com diferentes densidades e velocidade fixa, usando uma razão de velocidade $v_b/V_{te} = 7$, de densidades $n_b/n_0 = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$, de temperaturas $T_e/T_i = 1$ e $T_b/T_e = 1$.

A conclusão que pode-se tirar destes três casos é que quanto maior a intensidade do feixe, aumentando a densidade, a relação de dispersão vai sofrendo uma alteração e precisa ser modificada. Como pode ser visto nas figuras 4.3, quando o feixe é pouco intenso, a solução das raízes da relação de dispersão obedecem a tendência do modo de Langmuir (linhas na cor preta) e do modo feixe (linhas na cor vermelha), sendo o modo feixe totalmente absorvido e o modo de Langmuir amplificado em uma pequena faixa. Quando a densidade do feixe

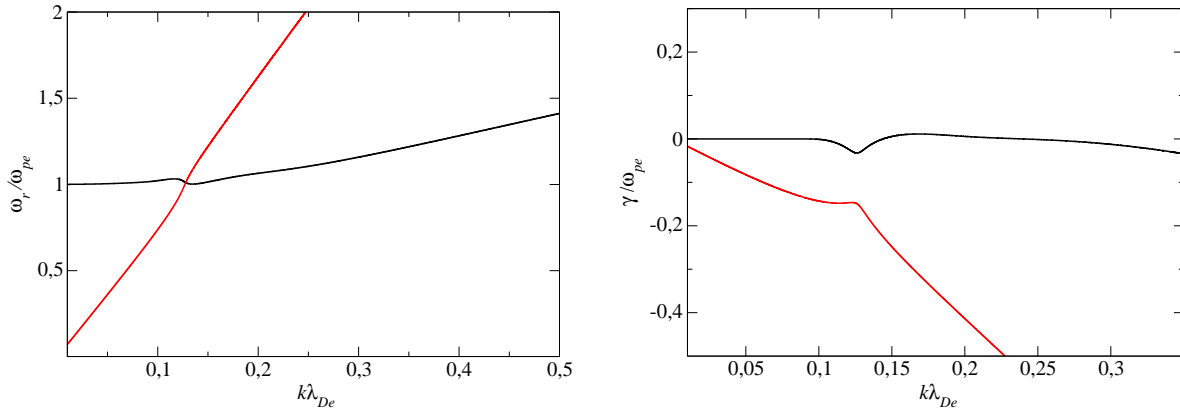


Fig. 4.3: Solução da equação para velocidade $v_b/V_{te} = 7$ e densidade $n_b/n_0 = 10^{-3}$. Painel esquerdo: ω_r/ω_{pe} é a parte real de z . Direito: γ/ω_{pe} é a parte imaginária.

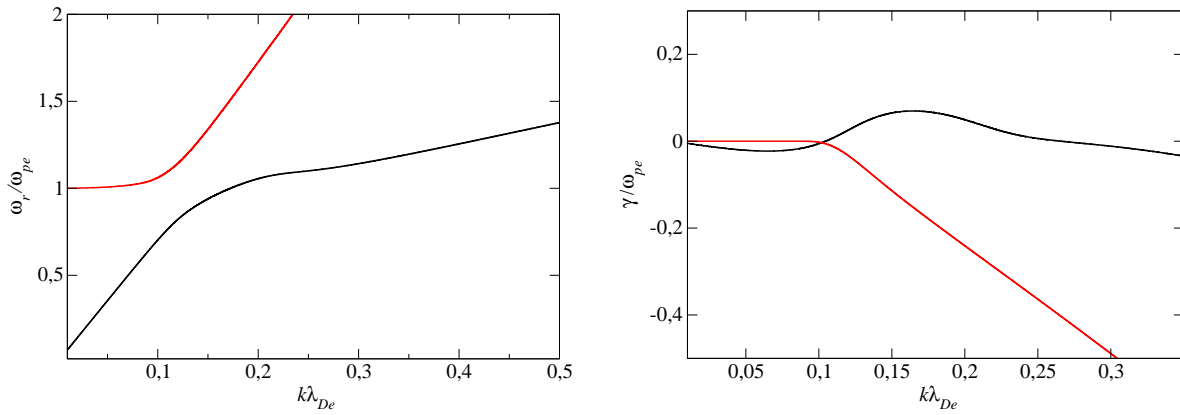


Fig. 4.4: Solução da equação para velocidade $v_b/V_{te} = 7$ e densidade $n_b/n_0 = 10^{-2}$. Painel esquerdo: ω_r/ω_{pe} é a parte real de z . Direito: γ/ω_{pe} é a parte imaginária.

aumenta, neste caso, quando aumenta a densidade, os modos vão sofrendo uma transição e não sendo possível a identificação dos modos Langmuir e feixe.

O conjunto de figuras 4.3, 4.6 e 4.7 mostra esta evolução para densidade fixa $n_b/n_0 = 10^{-3}$ e diferentes velocidades $v_b/V_{te} = 7, 8, 9$.

Então, agora, aumentando a intensidade do feixe, variando sua velocidade de deriva. As figuras 4.3, 4.6 e 4.7 reforçam que quando a intensidade do feixe é aumentada, esses modos sofrem uma transição, não sendo mais possível a identificação dos modos de Langmuir e modo feixe.

Como pode ser visto na parte imaginária das figuras 4.3, 4.4 e 4.5 quando se aumenta a densidade e nas figuras 4.3, 4.6 e 4.7 quando é aumentada a velocidade, que o modo intensificado corresponde à linha de cor preta. Na parte real dessas figuras, nota-se que eles não se aproximam dos modos utilizados na Teoria de Turbulência Fraca usual, que são

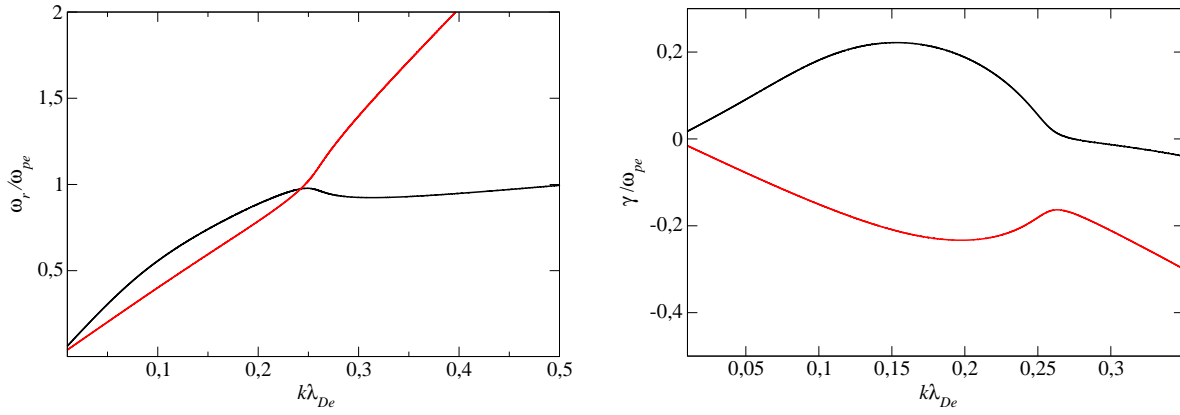


Fig. 4.5: Solução da equação para velocidade $v_b/V_{te} = 7$ e densidade $n_b/n_0 = 10^{-1}$. Painel esquerdo: parte real ω_r/ω_{pe} é a parte real de z . Direito: γ/ω_{pe} é a parte imaginária.

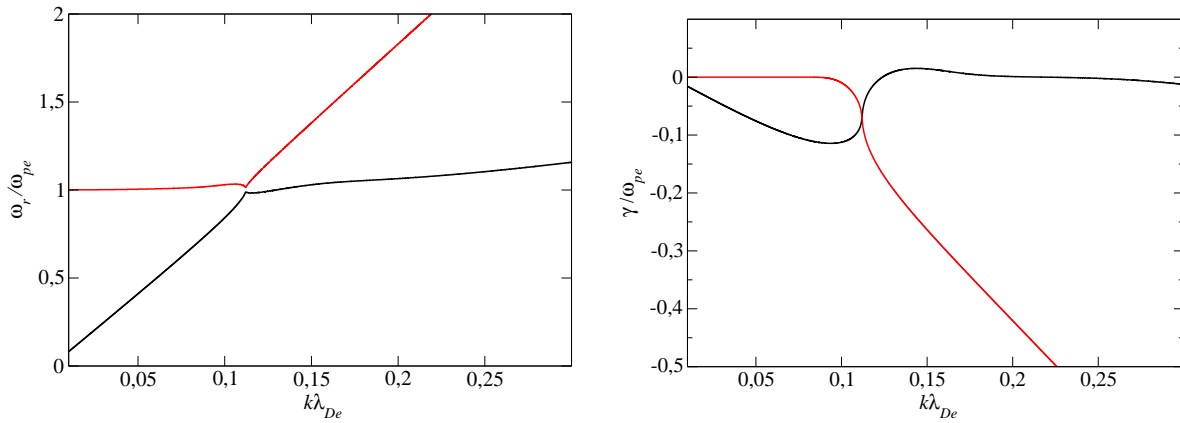


Fig. 4.6: Solução da equação para velocidade $v_b/V_{te} = 8$ e densidade $n_b/n_0 = 10^{-3}$. Painel esquerdo: parte real ω_r/ω_{pe} é a parte real de z . Direito: γ/ω_{pe} é a parte imaginária.

os modos de Langmuir e o modo íon-acústico, existe uma transição desses modos, sendo assim existe uma necessidade de alterar a relação de dispersão para melhor caracterizar estes modos.

É possível ter noção da magnitude dos parâmetros relacionados aos possíveis critérios apresentados por Cairns [21], e representados pelas equações (4.1) e (2.15). Para um caso típico, com razão de velocidades $v_b/V_{te} = 10$ e densidades $n_b/n_0 = 10^{-3}$, temos que $P = 1$ e $s \simeq 1,26$, que caracteriza esse modo modificado.

Já quando se aumenta a razão das velocidades, $v_b/V_{te} = 7, 8, 9$, como pode ser visto nas figuras 4.3, 4.6 e 4.7, ou a razão das densidades, $n_b/n_0 = 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}$, como pode ser visto nas figuras 4.3, 4.4 e 4.5, se obtém os seguintes valores para os parâmetros s e P . Ao aumentar a velocidade se tem os valores $P \simeq 0,7; 0,8; 0,9$ e $s = 1,799; 1,574; 1,399$, e quando

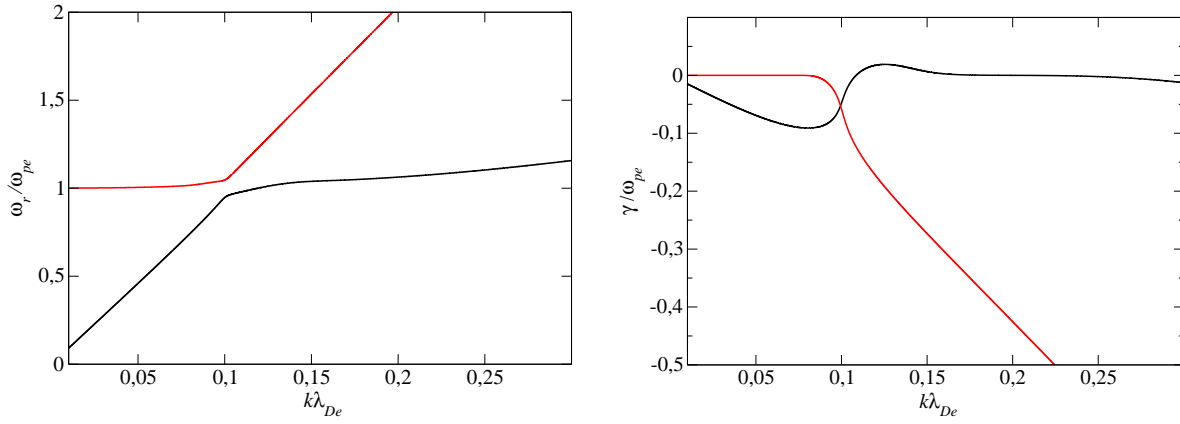


Fig. 4.7: Solução da equação para velocidade $v_b/V_{te} = 9$ e densidade $n_b/n_0 = 10^{-3}$. Painel esquerdo: parte real ω_r/ω_{pe} é a parte real de z . Direito: γ/ω_{pe} é a parte imaginária.

se aumenta a densidade os valores são $P = 0,7; 1,508; 3,249$ e $s \simeq 1,799; 0,835; 0,387$, respectivamente.

Esses valores obtidos para os parâmetros s e P , que correspondem à transição das soluções numéricas, são consistentes com a classificação feita por Cairns [21]. Como pode ser visto pela equação (2.15), para $P < 1$ a instabilidade é cinética e para $P > 1$ a instabilidade é reativa. Para a equação (4.1), quando s tem seus valores entre $0,2 \lesssim s \lesssim 1,4$, a instabilidade é ressonante, mas ocorre ao longo de um modo de propagação denominado modo feixe-modificado, o qual se caracteriza por uma relação linear do tipo $\omega \simeq kV_b$ para k pequeno. Para $s \gtrsim 1,5$ a instabilidade é fortemente ressonante e ocorre ao longo de um modo que se aproxima assintoticamente do modo de Langmuir.

Com isso, se conclui que sistemas com feixes mais intensos (maior velocidade de deriva ou maior densidade) terão o valor de P aumentado e o valor de s diminuído; e vice-versa.

Nos próximos tópicos serão mostrados a formulação teórica e os resultados obtidos para os termos quase lineares e não lineares separadamente.

4.2 Formulação teórica

Primeiramente, se obtém a solução numérica da relação de dispersão do sistema feixe-plasma. A partir da solução numérica, é proposto um modelo pra relação de dispersão para o modo instável de alta intensidade, que será chamado de *Modo B*.

É utilizada a teoria de turbulência fraca, descrita pela equação:

$$\frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma B}}{\partial t} = \left(\frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma B}}{\partial t} \right)_{QL} + \left(\frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma B}}{\partial t} \right)_{3w}, \quad (4.24)$$

onde o primeiro termo do lado direito indica os termos de interação quase linear, e o segundo termo indica os termos não lineares devido à interação de três ondas.

4.2.1 Teoria quase linear

Abordando apenas os termos quase lineares sem a interação de três ondas, temos as equações para a evolução temporal da distribuição de velocidade das partículas e da intensidade das ondas.

Equação de partícula

Da formulação básica da Teoria de Turbulência Fraca Generalizada é possível obter a seguinte equação de evolução quase linear para partículas (elétrons) interagindo com ondas eletrostáticas do modo α [15, 30]:

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} = \sum_{\alpha} \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{\pi e_e^2}{m_e^2} \int dk \frac{\partial}{\partial v} \delta(\sigma\omega_k^{\alpha} - kv) \left[\frac{(\sigma\omega_k^{\alpha})^3}{\omega_{pe}^2} \frac{m_e}{4\pi^2 k} f_e + I_k^{\sigma\alpha} \frac{\partial f_e}{\partial v} \right] \quad (4.25)$$

Definindo os coeficientes

$$A = \frac{e_e^2}{4\pi m_e \omega_{pe}^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \int dk \frac{(\sigma\omega_k^{\alpha})^3}{k} \delta(\sigma\omega_k^{\alpha} - kv), \quad (4.26)$$

$$D = \frac{\pi e_e^2}{m_e^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \int dk I_k^{\sigma\alpha} \delta(\sigma\omega_k^{\alpha} - kv), \quad (4.27)$$

temos,

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} \left(A f_e + D \frac{\partial f_e}{\partial v} \right). \quad (4.28)$$

Equação de onda

Da mesma forma, para a evolução da intensidade das ondas, obtemos [15, 30]

$$\frac{\partial I_k^{\sigma\alpha}}{\partial t} = \frac{(\sigma\omega_k^{\alpha})^6}{\omega_{pe}^4} \frac{n_e e_e^2}{k^2} \int dv \delta(\sigma\omega_k^{\alpha} - kv) F_e(v) + \pi \frac{(\sigma\omega_k^{\alpha})^3}{k^2} \int dv k \frac{\partial F_e}{\partial v} \delta(\sigma\omega_k^{\alpha} - kv) I_k^{\sigma\alpha}. \quad (4.29)$$

Definindo os coeficientes

$$C_s = \frac{(\sigma\omega_k^{\alpha})^6}{\omega_{pe}^4} \frac{n_e e_e^2}{k^2} \int dv \delta(\sigma\omega_k^{\alpha} - kv) F_e(v), \quad (4.30)$$

$$C_i = \pi \frac{(\sigma\omega_k^{\alpha})^3}{k} \int dv \delta(\sigma\omega_k^{\alpha} - kv) \frac{\partial F_e}{\partial v}, \quad (4.31)$$

temos,

$$\frac{\partial I_k^{\sigma\alpha}}{\partial t} = C_s + C_i I_k^{\sigma\alpha}. \quad (4.32)$$

4.2.2 Modelo para relação de dispersão

Com base nos resultados obtidos pela resolução numérica da relação de dispersão (4.2), procuramos modelar o modo instável, que chamaremos de $\alpha = B$, algebricamente:

$$\omega^B(k) = \frac{v_b k}{1 + b v_b k}. \quad (4.33)$$

Aqui, b é um parâmetro de ajuste, e v_b é proporcional a velocidade de deriva do feixe. A figura 4.8 mostra a relação de Bohm-Gross, o modo feixe, o modo instável obtido numericamente e o modo B .

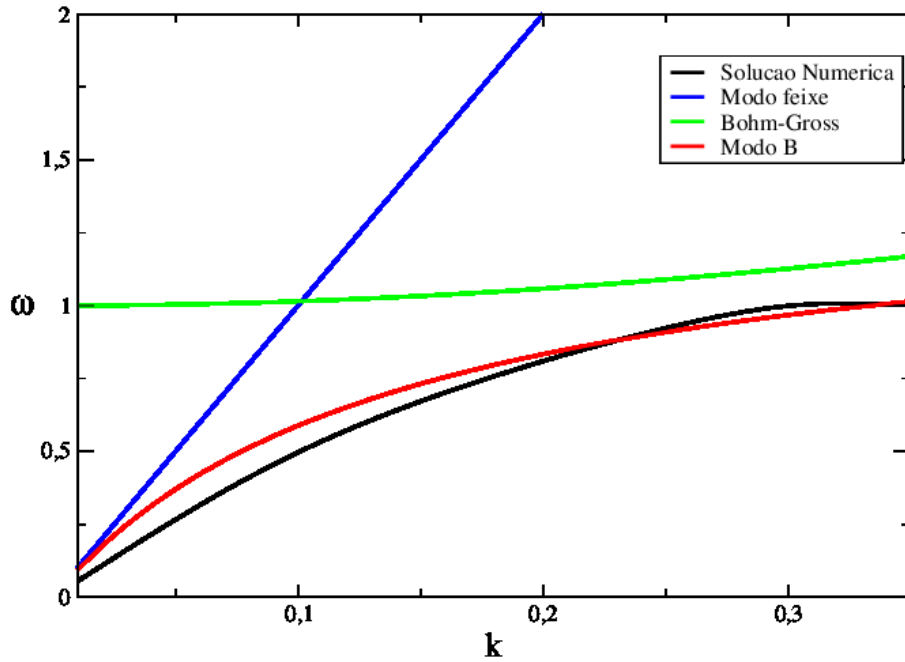


Fig. 4.8: Relação de dispersão ($v_b/V_{te} = 10$ e $b = 0.6$)

Assim, é possível resolver as funções $\delta(\sigma\omega_k^\alpha - kv)$ aplicadas ao modo B , de forma analítica (ver Apêndice A para mais detalhes).

$$\text{Para } k: \quad \delta(\sigma\omega_k^B - kv) = \left| \frac{v_b}{\sigma v^2 - v_b v} \right| \delta(k - k_*), \quad k_* = \frac{\sigma v_b - v}{v b v_b}. \quad (4.34)$$

$$\text{Para } v: \quad \delta(\sigma\omega_k^B - kv) = \frac{1}{|k|} \delta(v - v_*), \quad v_* = \frac{\sigma v_b}{1 + b v_b k}. \quad (4.35)$$

4.2.3 Nível inicial das ondas

Para determinar o nível inicial autoconsistente das ondas, consideramos que o sistema está em equilíbrio. Nesse caso, a contribuição dos termos não lineares é desprezível e o nível inicial é determinado pelos termos quase lineares. Assim, no equilíbrio, $\frac{\partial I_k^{\sigma\alpha}}{\partial t} = 0$ e a distribuição de velocidades é a distribuição Maxwelliana, o que resulta

$$I_k^{\sigma\alpha}(t=0) = -\frac{C_s(t=0)}{C_i(t=0)} = \frac{n_e e_e^2 v_e^2}{2\pi\omega_{pe}^4} (\omega_k^B)^2. \quad (4.36)$$

4.2.4 Resultados e discussão

As figuras 4.9 e 4.10 mostram a evolução das partículas e a intensidade espectral do modo B. Como pode-se observar, na figura 4.9 existem dois máximos, um composto por elétrons do plasma de fundo e seu pico está em torno de $u = 0$ e um secundário composto de elétrons do feixe próximo a $u = 10$. Quando o sistema evolui percebe-se uma diminuição do pico secundário devido a troca de energia das partículas do feixe com as ondas, logo estes elétrons cedem energia para as ondas e passam a ocupar uma região de menor energia. Este sistema evolui até a formação do platô quase linear. Para a figura 4.10 onde se obtém a evolução da intensidade espectral das ondas do modo B, ocorre uma intensificação das ondas próximo a $q \approx 1/U_b$, pois corresponde à região no espaço de velocidades em que o feixe perde mais energia.

4.3 Teoria não linear

Agora, incluindo o termo de acoplamento de três ondas nas equações obtidas e mostradas anteriormente.

4.3.1 Termo não linear de acoplamento de três ondas

O termo de interação entre três ondas eletrostáticas é dado por [15, 30]

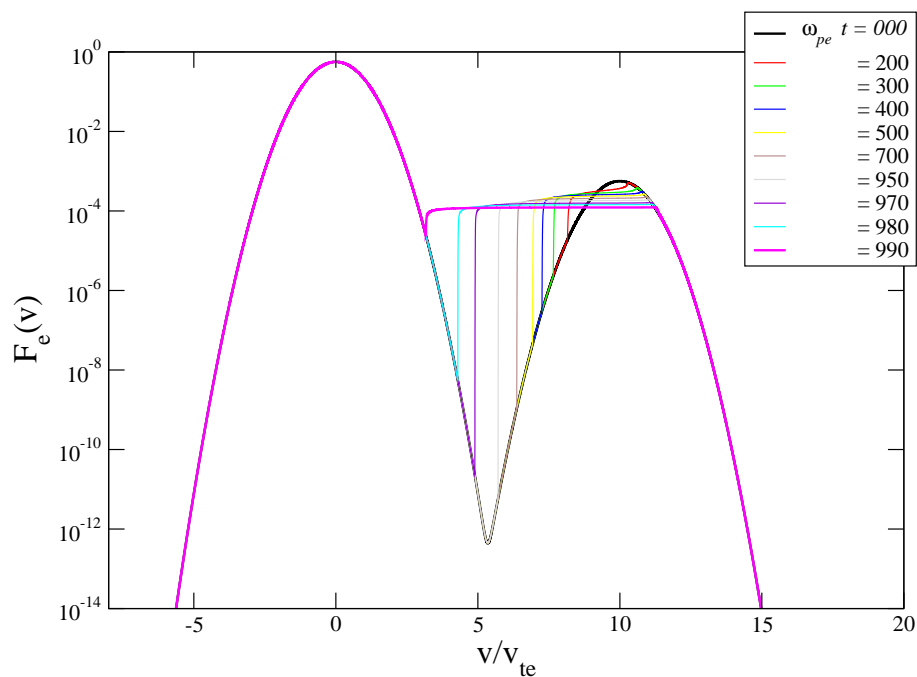


Fig. 4.9: *Evolução das partículas para um feixe com velocidade $v_b/V_{te} = 10$ e densidade $n_b/n_0 = 10^{-3}$.*

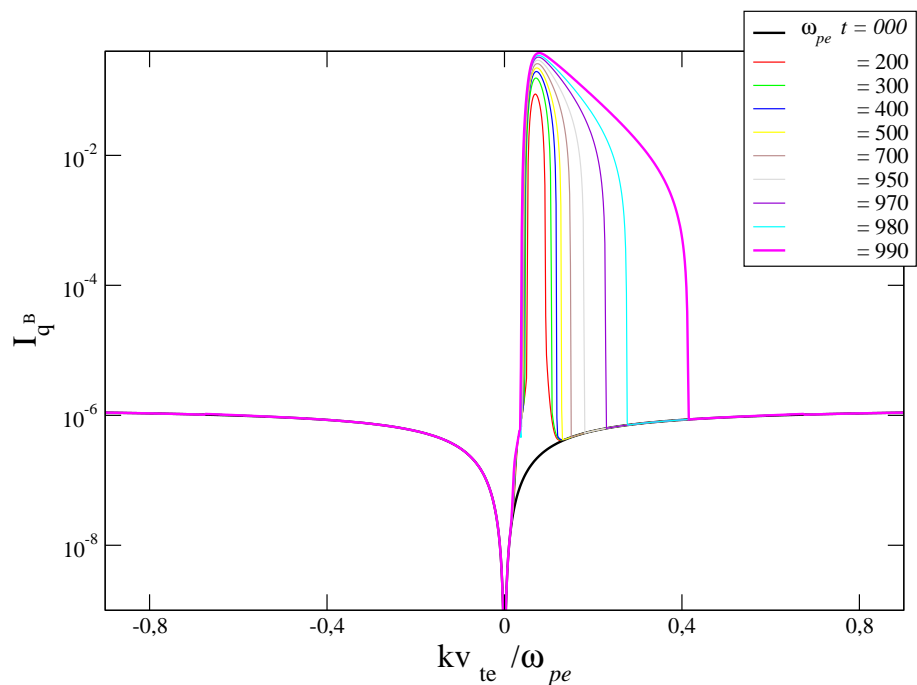


Fig. 4.10: *Intensidade espectral do modo B para os parâmetros $v_b/V_{te} = 10$ e densidade $n_b/n_0 = 10^{-3}$.*

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma B}}{\partial t} \right)_{3w} &= -\pi \frac{(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})^3}{\omega_{pe}^4} \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} \sum_{\beta, \gamma} \int d\mathbf{k}' \left| \chi^{(2)} \left(\mathbf{k}', \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} \mid \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma} \right) \right|^2 \\
 \times \left[\left(\sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} \right)^3 I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' \gamma} I_{\mathbf{k}}^{\sigma \alpha} + \left(\sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma} \right)^3 I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' \beta} I_{\mathbf{k}}^{\sigma \alpha} - (\sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})^3 I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' \beta} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' \gamma} \right] &\delta \left(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} - \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma} \right).
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

A quantidade $\chi^{(2)}$ é determinada considerando a *aproximação de onda rápida*, que se aplica, de forma aproximada, ao modo B :

$$\omega' \gg k' v_{th}^a, \quad \omega - \omega' \gg |\mathbf{k} - \mathbf{k}'| v_{th}^a, \quad \omega \gg k v_{th}^a, \tag{4.38}$$

que, em mais baixa ordem, tem a forma

$$\begin{aligned}
 \chi_a^{(2)}(\mathbf{k}', \omega' \mid \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega') &= \frac{-i e_a}{2} \frac{e_a}{m_a} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega \omega' (\omega - \omega')} \frac{1}{k k' |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|} \\
 &\times \left[\frac{k^2}{\omega} \mathbf{k}' \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}') + \frac{k'^2}{\omega'} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}') + \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2}{\omega - \omega'} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' \right].
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

A função delta de (4.37), quando aplicada ao modo B e resolvida para k' , resulta

$$\begin{aligned}
 \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^B - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^B - \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^B) &= \left| \frac{\sigma'' v_b}{[1 + b v_b (k - k_+)]^2} - \frac{\sigma' v_b}{(1 + b v_b k_+)^2} \right|^{-1} \delta(k' - k_+) \\
 &+ \left| \frac{\sigma'' v_b}{[1 + b v_b (k - k_-)]^2} - \frac{\sigma' v_b}{(1 + b v_b k_-)^2} \right|^{-1} \delta(k' - k_-),
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

onde os k' ressonantes são dados por

$$k_+ = \frac{-\mathcal{B} + \sqrt{\mathcal{B}^2 - 4\mathcal{A}\mathcal{C}}}{2\mathcal{A}}, \tag{4.41}$$

$$k_- = \frac{-\mathcal{B} - \sqrt{\mathcal{B}^2 - 4\mathcal{A}\mathcal{C}}}{2\mathcal{A}}, \tag{4.42}$$

com,

$$\mathcal{B}^2 - 4\mathcal{A}\mathcal{C} \geq 0, \tag{4.43}$$

$$\mathcal{A} = b v_b^2 (\sigma' + \sigma'') - \frac{\sigma b^2 v_b^3 k}{1 + b v_b k}, \tag{4.44}$$

$$\mathcal{B} = \frac{\sigma b^2 v_b^3 k^2}{1 + b v_b k} + v_b (\sigma'' - \sigma') - b v_b^2 k (\sigma' + \sigma''), \quad (4.45)$$

$$\mathcal{C} = v_b k (\sigma - \sigma''). \quad (4.46)$$

Como no caso quase linear, aqui as partículas também são regidas pela mesma equação, e os termos não lineares são adicionados apenas à equação da intensidade espectral das ondas anterior (4.29).

De qualquer forma, mesmo que a equação da evolução das partículas considere apenas termos quase lineares, ela ainda depende dos termos não lineares de maneira indireta, pois a equação das partículas é determinada pela intensidade espectral das ondas que, por sua vez, é determinada por termos não lineares.

4.3.2 Resultados e discussões

As figuras 4.11 e 4.12 mostram a evolução das partículas e a intensidade espectral das ondas do modo B com uma velocidade de $v_b/V_{te} = 10$ e densidade de $n_b/n_0 = 10^{-3}$. Pode-se perceber que na figura 4.11 as partículas cedem energia para as ondas até a formação do platô e a formação da cauda super-térmica devido a absorção do modo retroespalhado em torno de $U_b = -10$ devido aos efeitos não lineares. A figura 4.12 mostra a evolução das ondas do modo B, onde nota-se o aumento próximo a $q \approx 1/U_b$ até a formação do platô da distribuição das partículas, e após isso, visualiza-se a formação de um pico secundário, da onda do modo B retroespalhado, na região próximo $q \approx -1/U_b$.

As figuras 4.13, 4.14, 4.15 e 4.16 mostram em separado a evolução das partículas e a evolução espectral das ondas do modo B nos instantes inicial e no final.

As figuras 4.13 e 4.15 mostram a evolução inicial para a distribuição das partículas e para a intensidade espectral das ondas no modo B, respectivamente, com densidade constante e diferentes velocidades. As figuras 4.14 e 4.16 mostram o estágio final para a distribuição das partículas e para a intensidade espectral das ondas do modo B, com densidade constante $n_b/n_0 = 10^{-3}$ e variando a velocidade $v_b/V_{te} = 9, 10, 11$.

Percebe-se na figura 4.14 a formação da cauda super-térmica devido à absorção do modo retroespalhado mostrando na figura 4.16. Quanto menor a energia do feixe (menor velocidade) menor a intensidade da cauda super-térmica. Para velocidades de $v_b/V_{te} = 10$ o pico da onda do modo B se forma próximo a $q \approx 0.1$, já para $v_b/V_{te} = 9$ e $v_b/V_{te} = 8$ o pico das ondas se forma próximo à $q \approx 0.111$ e $q \approx 0.125$ respectivamente. A figura 4.15 mostra que o nível inicial (térmico) das ondas é constante, uma vez que, por simplicidade, os parâmetros da relação de dispersão do modo B foram mantidos fixos. Isso se justifica pelo fato de que pequenas variações na velocidade do feixe produzem igualmente pequenas

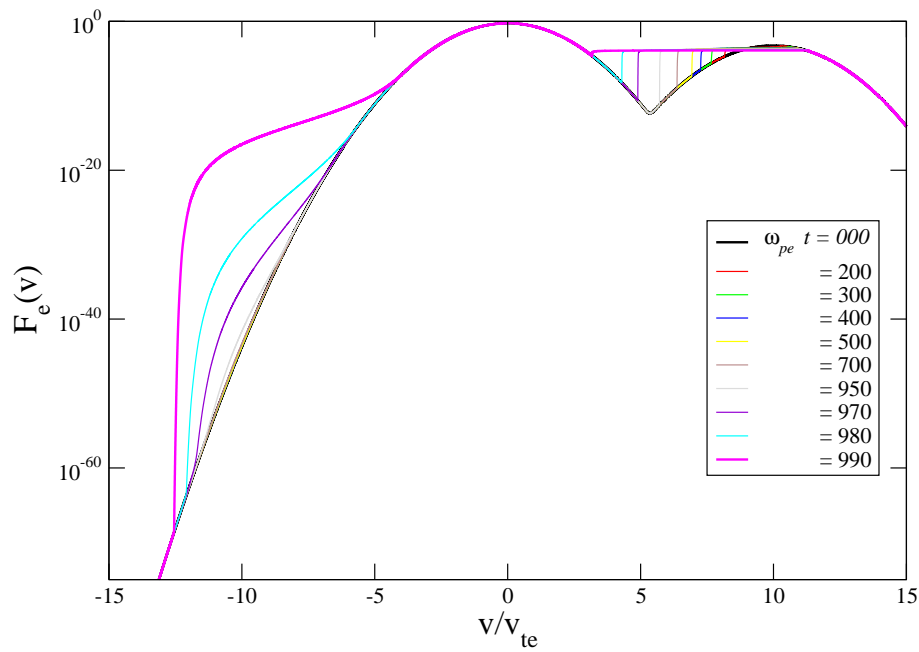


Fig. 4.11: Evolução das partículas com $v_b/V_{te} = 10$ e $n_b/n_0 = 10^{-3}$.

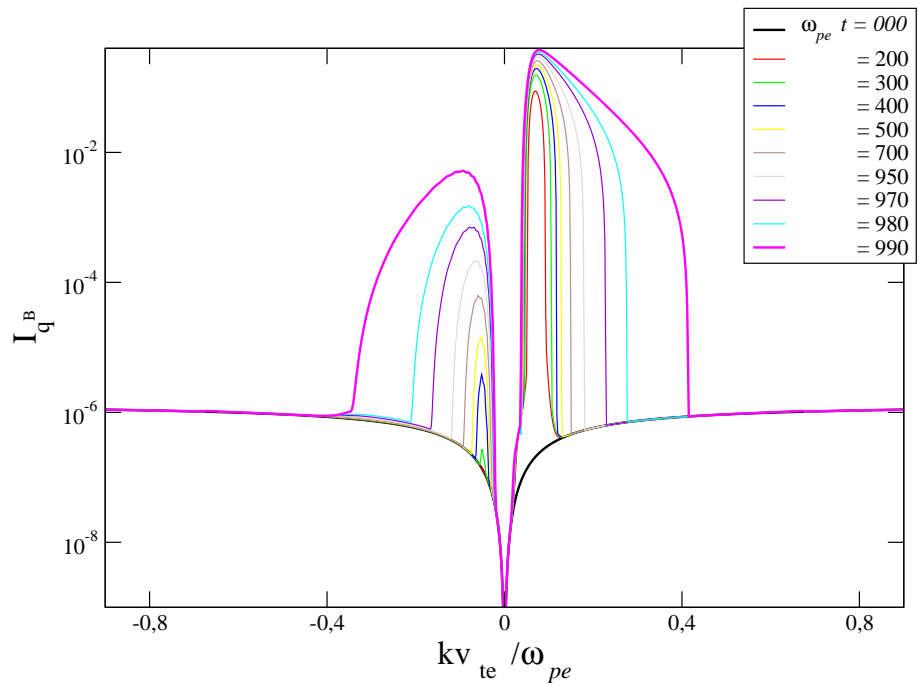


Fig. 4.12: Intensidade espectral do modo B para $v_b/V_{te} = 10$ e $n_b/n_0 = 10^{-3}$.

variações na relação de dispersão do modo B. A figura 4.16 mostra o nível final da evolução das ondas do modo B. Pode-se perceber na figura 4.15 que quanto maior a velocidade, maior a energia das ondas e o pico se forma mais próximo de $u = 0$ e mais estreita é a largura de

banda. Já para menor velocidade, a intensidade é menor e é mais larga essa banda.

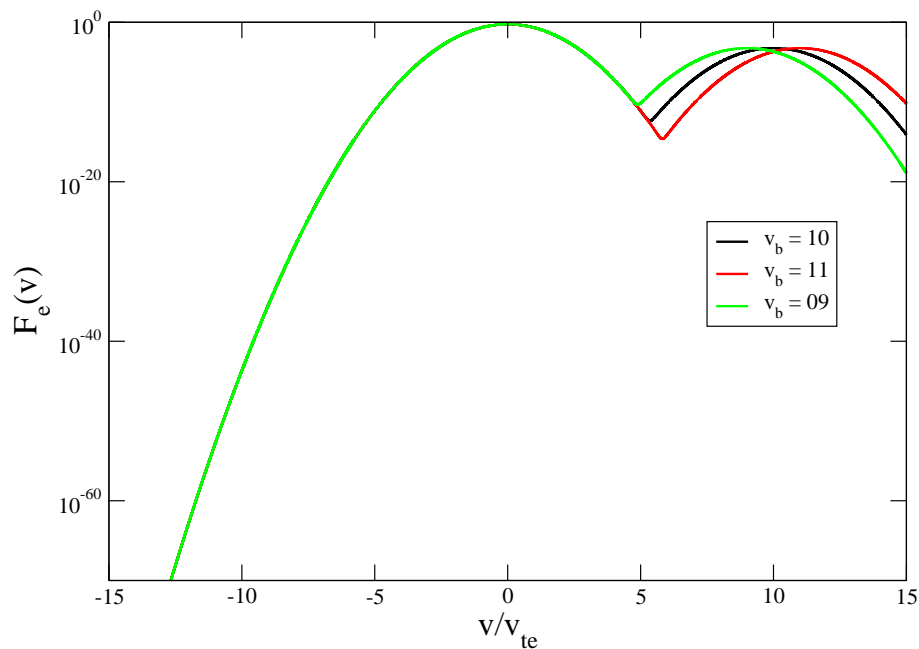


Fig. 4.13: *Nível inicial da distribuição das partículas para densidade constante $n_b/n_0 = 10^{-3}$ e velocidades $v_b/V_{te} = 9, 10, 11$.*

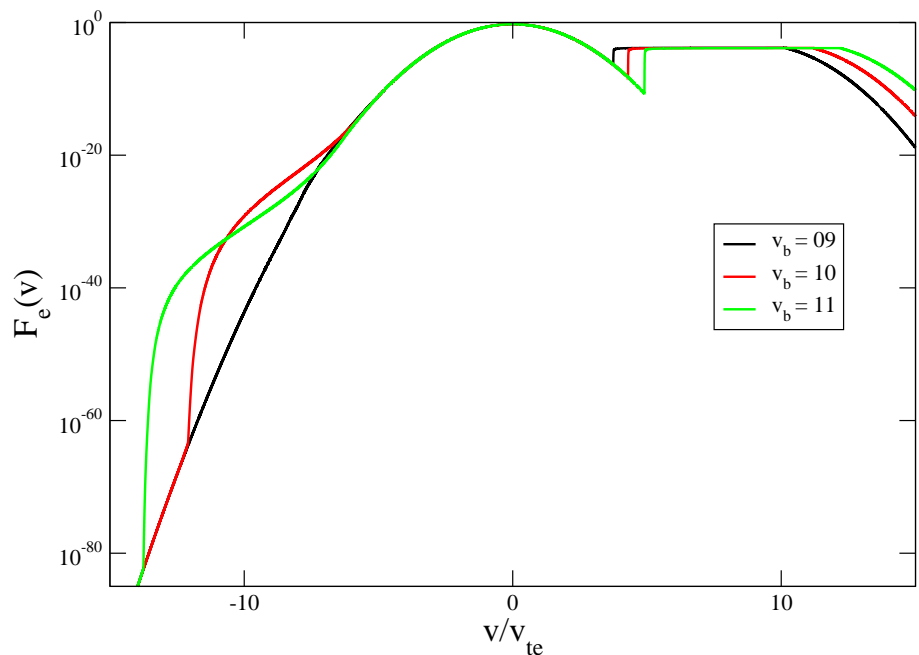


Fig. 4.14: *Nível final da distribuição das partículas para densidade constante $n_b/n_0 = 10^{-3}$ e velocidades $v_b/V_{te} = 9, 10, 11$.*

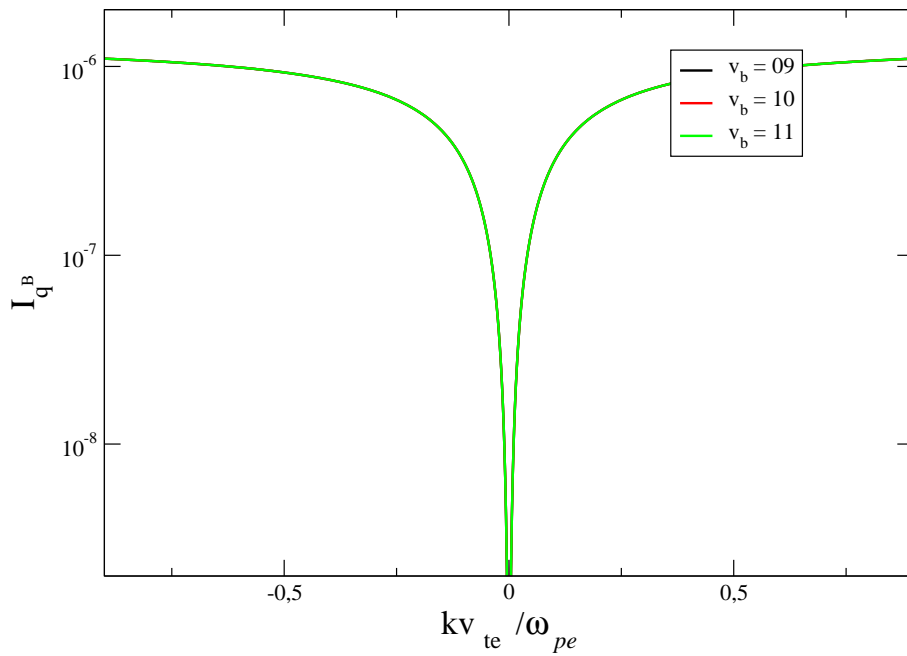


Fig. 4.15: *Nível inicial da distribuição da intensidade espectral das ondas do modo B para densidade constante $n_b/n_0 = 10^{-3}$ e velocidades $v_b/V_{te} = 9, 10, 11$.*

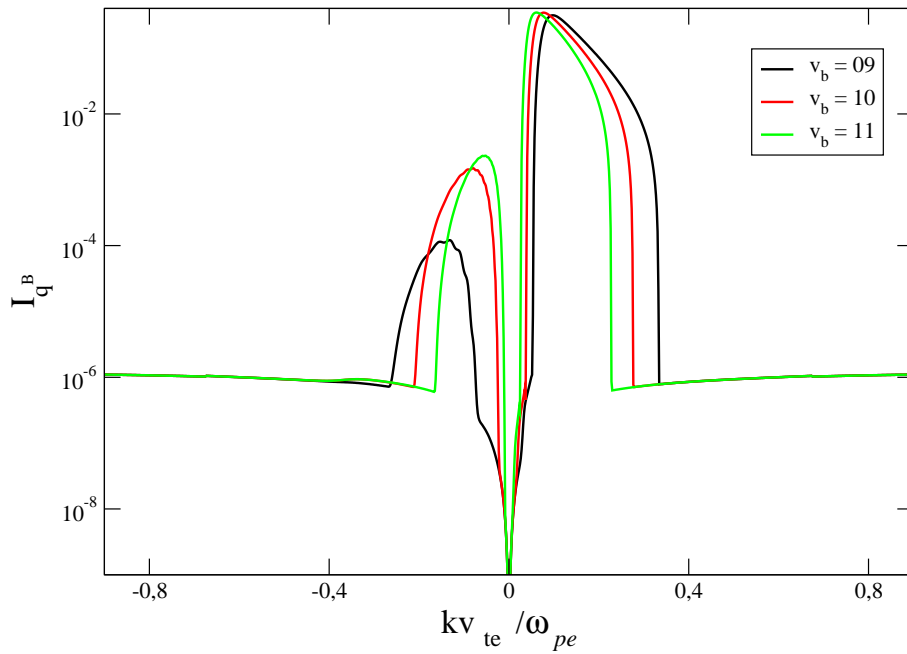


Fig. 4.16: *Nível final da distribuição da intensidade espectral das ondas do modo B para densidade constante $n_b/n_0 = 10^{-3}$ e velocidades $v_b/V_{te} = 9, 10, 11$.*

A figura 4.17 mostra o nível inicial e 4.18 final para a evolução da distribuição das partículas para velocidade constante $v_b/V_{te} = 10$ e variando a densidade $n_b/n_0 = 10^{-3}$,

$n_b/n_0 = 2 \times 10^{-3}$ e $n_b/n_0 = 4 \times 10^{-3}$. Percebe-se a formação da cauda super-térmica devido à absorção do modo retroespalhado visto na figura 4.19 na fase posterior à formação do platô quase linear. Na figura 4.18 consegue-se perceber que o nível final para a densidade $n_b/n_0 = 10^{-3}$ já existe a formação da cauda super-térmica. Na figura 4.19 nota-se a formação do modo retroespalhado das ondas do modo B. Nota-se que quanto menor é a densidade mais estreita é a largura de banda, pois menos energético é o feixe. Já a figura 4.19 mostra o nível final da intensidade espectral das ondas do modo B, já que o modo inicial é constante (nível térmico) e foi mostrado na figura 4.15.

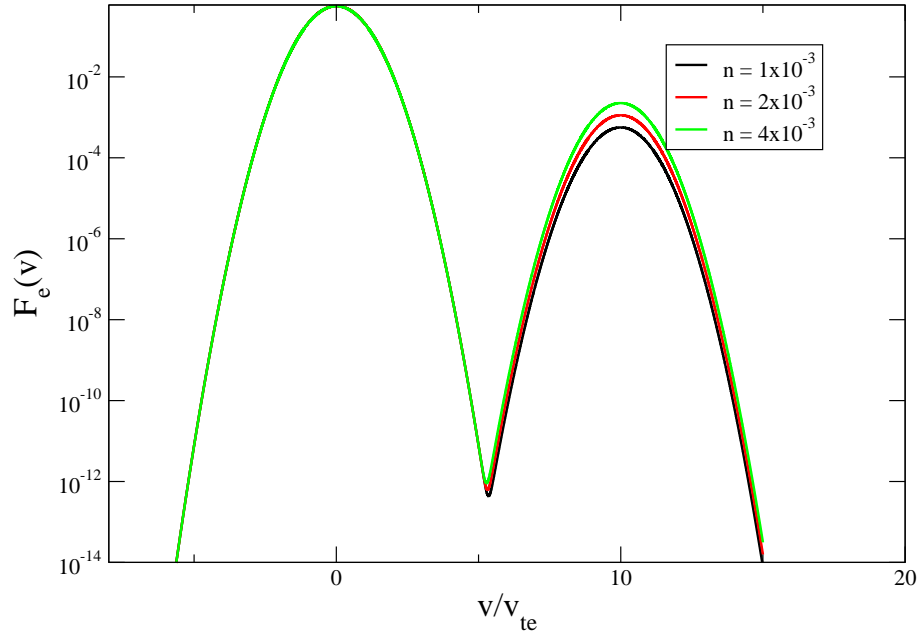


Fig. 4.17: *Nível inicial da distribuição das partículas com velocidade fixa em $v_b/V_{te} = 10$ e diferentes densidades em $n_b/n_0 = 10^{-3}$, $n_b/n_0 = 2 \times 10^{-3}$ e $n_b/n_0 = 4 \times 10^{-3}$.*

Os resultados da evolução temporal de ondas e partículas obtidos usando a abordagem da Teoria de Turbulência Fraca para feixes de alta intensidade mostram que o comportamento desse sistema com feixe de alta intensidade se aproxima do comportamento do sistema com feixes de baixa intensidade. Os resultados encontrados podem ser explicados pelo fato de que, embora a teoria usual considere o acoplamento de ondas envolvendo dois modos de oscilação distintos, i. e., íon-sônico e de Langmuir, enquanto o presente trabalho considera a existência de um único modo, a relação de dispersão do modo considerado apresenta uma região de baixa frequência bem como uma região de alta frequência, as quais acabam por desempenhar o papel das ondas íon-sônicas e de Langmuir, respectivamente. Os resultados encontrados corroboram a consistência da Teoria de Turbulência Fraca, no sentido de que, em ambos os casos, envolvendo feixes de baixa ou alta intensidade, o comportamento de ondas e partículas se mostra semelhante.

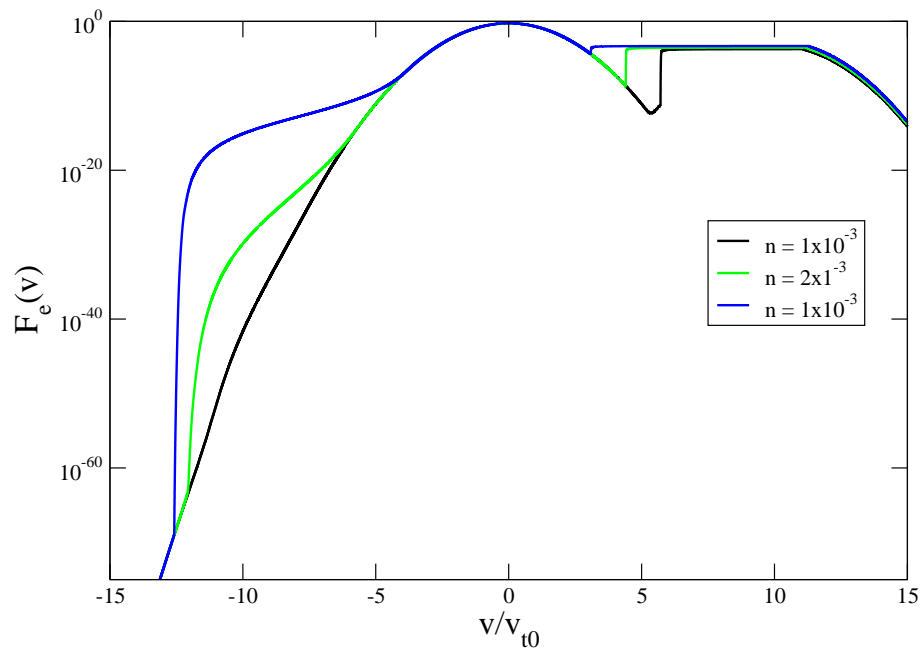


Fig. 4.18: *Nível final da distribuição das partículas com velocidade fixa em $v_b/V_{te} = 10$ e diferentes densidades em $n_b/n_0 = 10^{-3}$, $n_b/n_0 = 2 \times 10^{-3}$ e $n_b/n_0 = 4 \times 10^{-3}$.*

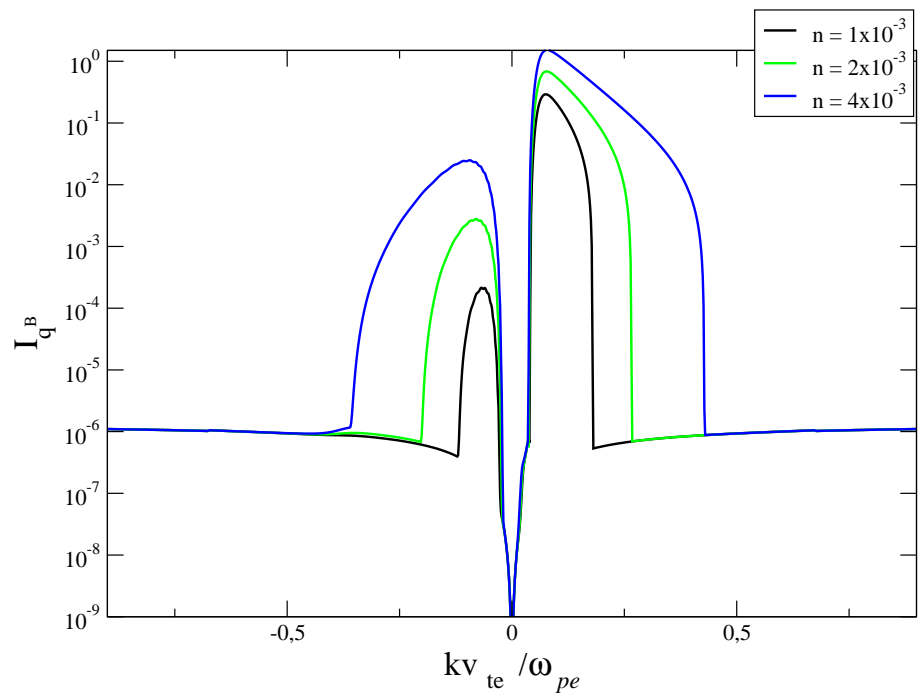


Fig. 4.19: *Nível final da intensidade espectral das ondas do modo B para velocidade fixa em $v_b/V_{te} = 10$ e diferentes densidades em $n_b/n_0 = 10^{-3}$, $n_b/n_0 = 2 \times 10^{-3}$ e $n_b/n_0 = 4 \times 10^{-3}$.*

A figura 4.20 mostra a evolução temporal da energia das ondas que, pela normalização empregada, representa especificamente a razão entre a energia total das ondas e a energia (inicial) das partículas. O gráfico no lado esquerdo mostra a razão entre as energias acima mencionadas para a densidade fixa $n_b/n_0 = 10^{-3}$ e variando a velocidade $v_b/V_{te} = 8, 9, 10$. O painel do lado direito mostra a mesma relação entre as energias, variando a densidade $n_b/n_0 = 1 \times 10^{-3}, 2 \times 10^{-3}, 3 \times 10^{-3}$ e mantendo a velocidade fixa $v_b/V_{te} = 8$. O critério que define a validade da Teoria de Turbulência Fraca é que essa razão entre a energia total das ondas e a energia das partículas seja muito menor que 1. Como se pode perceber, apesar desses valores não serem extremamente pequenos, ainda permitem validar o uso da Teoria de Turbulência Fraca, para as razões de densidade e velocidade aqui abordadas. Nota-se também nessa figura que à medida que a intensidade do feixe é aumentada, essa razão também aumenta. Assim, para feixes suficientemente intensos, essa razão deve se aproximar de 1 e a Teoria de Turbulência Fraca deve perder validade.

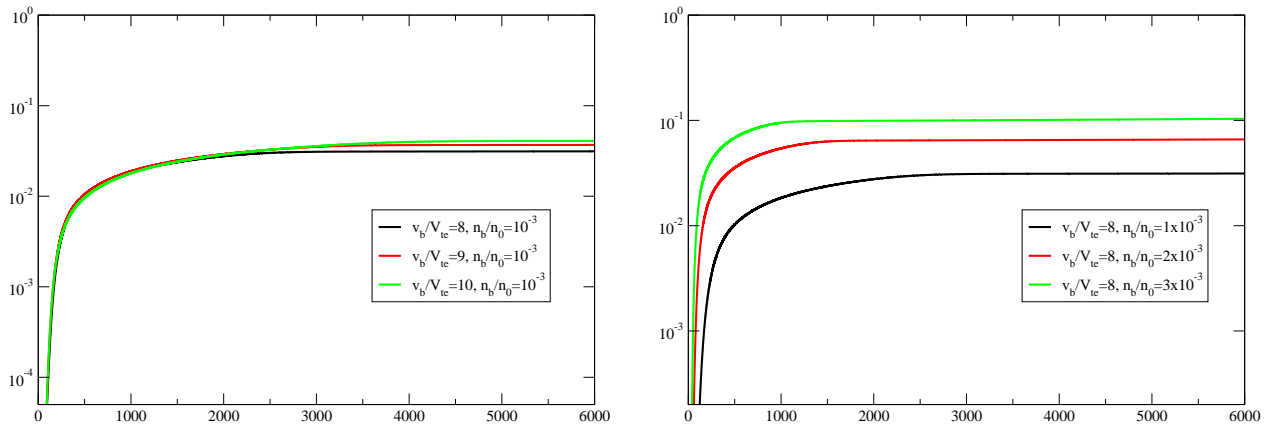


Fig. 4.20: *Evolução temporal da energia das ondas. Lado esquerdo: densidade fixa $n_b/n_0 = 10^{-3}$ e variando a velocidade $v_b/V_{te} = 8, 9, 10$. Lado direito: variando a densidade $n_b/n_0 = 1 \times 10^{-3}, 2 \times 10^{-3}, 3 \times 10^{-3}$ e velocidade fixa $v_b/V_{te} = 8$.*

Capítulo 5

Conclusão

No presente trabalho foi analisado o importante sistema físico composto por um plasma de fundo e por um feixe de partículas que o permeia. A abordagem usual, que toma em conta efeitos não lineares presentes no sistema, é feita sob a formulação da Teoria de Turbulência Fraca. Em sistemas onde as oscilações eletrostáticas são dominantes, essa abordagem considera a interação entre dois modos de oscilação eletrostáticos, que consistem no modo íon-acústico (ou íon-sônico) e no modo de Langmuir (ou Bohm-Gross).

No entanto, as relações de dispersão que determinam esses modos são estritamente válidas para feixes de baixa intensidade, o que para o presente estudo se traduz em baixa densidade do feixe ou baixa velocidade de deriva do feixe.

Essa questão foi abordada buscando a solução numérica da relação de dispersão de um sistema feixe-plasma, onde o feixe, agora, é de alta intensidade. Com base nos resultados obtidos da solução numérica, a relação de dispersão foi modelada em forma matemática fechada, a fim de permitir a manipulação algébrica. A relação de dispersão modelada foi, então, utilizada no cálculo dos coeficientes que determinam a evolução temporal da função distribuição de velocidades das partículas e da intensidade espectral das ondas.

A evolução de ondas e partículas foi obtida via solução numérica das equações da Teoria de Turbulência Fraca.

A evolução do sistema foi analisada para diversos estados iniciais da função distribuição. Feixes de diferentes densidade e velocidades de deriva foram considerados, representando feixes de alta intensidade. O comportamento geral de ondas e partículas foi comparado com aqueles obtidos sob a abordagem da Teoria de Turbulência Fraca, mas calculados considerando a interação entre os modos de Langmuir e íon-acústico.

Os dois casos, ou seja, a abordagem usual e a abordagem introduzida no presente trabalho, são diferentes não apenas pelo uso de relações de dispersão diferentes, que, em essência, determinam as interações onda-partícula e onda-onda, mas também pelo fato de que o número de modos de oscilação presentes é distinto nos dois casos: 2 modos na abordagem usual, 1 modo na presente abordagem.

A despeito disso, os resultados obtidos mostram uma semelhança marcante entre essas

duas abordagens, no que tange ao comportamento da função distribuição e à intensidade spectral das ondas.

Essa similaridade pode ser explicada pelo fato de que, embora a teoria usual considere o acoplamento de ondas envolvendo dois modos de oscilação distintos, i. e., íon-acústico e de Langmuir, enquanto o presente trabalho considera a existência de um único modo, a relação de dispersão do modo aqui considerado apresenta uma região de baixa frequência bem como uma região de alta frequência. Essas duas regiões distintas, então, acabam por desempenhar o papel das ondas íon-sônicas e de Langmuir, respectivamente. E essa característica é responsável de produzir a semelhança entre os dois casos.

Assim, os resultados encontrados contribuem no sentido de dar consistência à Teoria de Turbulência Fraca, estendendo sua validade para o caso de sistemas feixe-plasma onde os feixes são de intensidade elevada.

Apêndice A

A.1 Normalização

São usadas as seguintes quantidades normalizadas,

$$\varpi = \frac{\omega}{\omega_{pe}}, \quad (\text{A.1})$$

$$\kappa = \frac{kv_e}{\omega_{pe}}, \quad (\text{A.2})$$

$$\nu = \frac{v}{v_e}, \quad (\text{A.3})$$

$$\tau = t\omega_{pe}, \quad (\text{A.4})$$

$$\phi = v_e F, \quad (\text{A.5})$$

$$\mathcal{E}_\kappa^{\sigma B} = \frac{I_\kappa^{\sigma B}}{2\sqrt{2}\lambda_{De}^3 n_e m_e v_e^2} = 4\pi^2 \mathcal{G} \frac{I_\kappa^{\sigma B}}{m_e v_e^2}, \quad (\text{A.6})$$

$$\mathcal{G} = \frac{1}{8\pi^2 \sqrt{2} \lambda_{De}^3 n_e}. \quad (\text{A.7})$$

Também temos que,

$$\lambda_{De} = \frac{v_e}{\sqrt{2}\omega_{pe}}, \quad (\text{A.8})$$

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{4\pi n_e e^2}{m_e}}. \quad (\text{A.9})$$

A.2 Condições de ressonância

A.2.1 Ressonância onda-partícula

A condição de ressonância onda-partícula é dada por

$$\delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^\alpha - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}). \quad (\text{A.10})$$

Para o caso unidimensional,

$$\delta(\sigma\omega_k^\alpha - kv). \quad (\text{A.11})$$

Considerando o modo B , definido por

$$\omega_k^B = \frac{v_b k}{1 + bv_b k}, \quad (\text{A.12})$$

$$\delta(\sigma\omega_k^\alpha - kv) = \delta(\sigma\omega_k^B - kv) = \delta\left(\sigma\frac{v_b k}{1 + bv_b k} - kv\right). \quad (\text{A.13})$$

Resolvendo o argumento da função delta para k ,

$$\sigma\frac{v_b k_*}{1 + bv_b k_*} - k_* v = 0$$

$$\begin{aligned} \sigma\frac{v_b}{1 + bv_b k_*} &= v \\ \sigma v_b &= v(1 + bv_b k_*) \\ \sigma v_b &= v + bv_b k_* v \end{aligned}$$

$$k_* = \frac{\sigma v_b - v}{bv_b}. \quad (\text{A.14})$$

Resolvendo o argumento da função delta para v ,

$$\sigma\frac{v_b k}{1 + bv_b k} - kv_* = 0$$

$$v_* = \frac{\sigma v_b}{1 + bv_b k}. \quad (\text{A.15})$$

Além disso,

$$\frac{d}{dk}(\sigma\omega_k^B - kv) = \frac{d}{dk}\left(\sigma\frac{v_b k}{1 + bv_b k} - kv\right) = \frac{\sigma v_b}{1 + bv_b k} - \frac{\sigma bv_b^2 k}{(1 + bv_b k)^2} - v = \frac{\sigma v_b}{(1 + bv_b k)^2} - v. \quad (\text{A.16})$$

Também temos que

$$\left. \frac{d}{dk} (\sigma\omega_k^B - kv) \right|_{k=k_*} = \frac{\sigma v_b}{\left[1 + \left(\frac{\sigma v_b - v}{v}\right)^2\right]^2} - v = \frac{\sigma v^2}{v_b} - v = \frac{\sigma v^2 - v_b v}{v_b}, \quad (\text{A.17})$$

e,

$$\frac{d}{dv} (\sigma\omega_k^B - kv) = \frac{d}{dv} \left(\sigma \frac{v_b k}{1 + b v_b k} - kv \right) = -k. \quad (\text{A.18})$$

Portanto,

$$\text{Resolvendo para } k: \quad \delta (\sigma\omega_k^B - kv) = \left| \frac{v_b}{\sigma v^2 - v_b v} \right| \delta (k - k_*) \quad k_* = \frac{\sigma v_b - v}{v b v_b}. \quad (\text{A.19})$$

$$\text{Resolvendo para } v: \quad \delta (\sigma\omega_k^B - kv) = \frac{1}{|k|} \delta (v - v_*) \quad v_* = \frac{\sigma v_b}{1 + b v_b k}. \quad (\text{A.20})$$

A.2.2 Ressonância de 3 ondas

A condição de ressonância de três ondas é dada por

$$\delta \left(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^\alpha - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^\beta - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^\gamma \right). \quad (\text{A.21})$$

Para o caso unidimensional,

$$\delta \left(\sigma\omega_k^\alpha - \sigma'\omega_{k'}^\beta - \sigma''\omega_{k-k'}^\gamma \right). \quad (\text{A.22})$$

Para o modo B , definido por (A.12),

$$\delta \left(\sigma\omega_k^B - \sigma'\omega_{k'}^B - \sigma''\omega_{k-k'}^B \right) = \delta \left(\sigma \frac{v_b k}{1 + b v_b k} - \sigma' \frac{v_b k'}{1 + b v_b k'} - \sigma'' \frac{v_b (k - k')}{1 + b v_b (k - k')} \right). \quad (\text{A.23})$$

Resolvendo o argumento da função delta para k' ,

$$\sigma \frac{v_b k}{1 + b v_b k} - \sigma' \frac{v_b k'}{1 + b v_b k'} - \sigma'' \frac{v_b (k - k')}{1 + b v_b (k - k')} = 0 \quad (\text{A.24})$$

$$[1 + b v_b k'] [1 + b v_b (k - k')] \frac{\sigma v_b k}{1 + b v_b k} - [1 + b v_b (k - k')] \sigma' v_b k' - [1 + b v_b k'] \sigma'' v_b (k - k') = 0 \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma v_b k}{1 + b v_b k} [1 + b v_b (k - k') + b v_b k' + b v_b k' b v_b (k - k')] \\ & \quad - \sigma' v_b k' - b v_b (k - k') \sigma' v_b k' \\ & \quad - (\sigma'' v_b k - \sigma'' v_b k') - (b v_b k' \sigma'' v_b k - b v_b k' \sigma'' v_b k') = 0 \quad (\text{A.26}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma v_b k}{1 + b v_b k} (1 + b v_b k - b v_b k' + b v_b k' + b^2 v_b^2 k k' - b^2 v_b^2 k'^2) \\ - \sigma' v_b k' - \sigma' b v_b^2 k k' + \sigma' b v_b^2 k'^2 \\ - \sigma'' v_b k + \sigma'' v_b k' - \sigma'' b v_b^2 k k' + \sigma'' b v_b^2 k'^2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

$$\begin{aligned} \left[-b^2 v_b^2 \left(\frac{\sigma v_b k}{1 + b v_b k} \right) + \sigma' b v_b^2 + \sigma'' b v_b^2 \right] k'^2 \\ + \left[b^2 v_b^2 k \left(\frac{\sigma v_b k}{1 + b v_b k} \right) - \sigma' v_b - \sigma' b v_b^2 k + \sigma'' v_b - \sigma'' b v_b^2 k \right] k' \\ + \left[\left(\frac{\sigma v_b k}{1 + b v_b k} \right) (1 + b v_b k) - \sigma'' v_b k \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

$$\begin{aligned} \left[b v_b^2 (\sigma' + \sigma'') - \frac{\sigma b^2 v_b^3 k}{1 + b v_b k} \right] k'^2 \\ + \left[\frac{\sigma b^2 v_b^3 k^2}{1 + b v_b k} + v_b (\sigma'' - \sigma') - b v_b^2 k (\sigma' + \sigma'') \right] k' \\ + [v_b k (\sigma - \sigma'')] = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Define-se,

$$\mathcal{A} = b v_b^2 (\sigma' + \sigma'') - \frac{\sigma b^2 v_b^3 k}{1 + b v_b k}, \quad (\text{A.30})$$

$$\mathcal{B} = \frac{\sigma b^2 v_b^3 k^2}{1 + b v_b k} + v_b (\sigma'' - \sigma') - b v_b^2 k (\sigma' + \sigma''), \quad (\text{A.31})$$

$$\mathcal{C} = v_b k (\sigma - \sigma''). \quad (\text{A.32})$$

Assim,

$$\mathcal{A} k'^2 + \mathcal{B} k' + \mathcal{C} = 0. \quad (\text{A.33})$$

Portanto, os valores ressonantes de k' são,

$$k_+ = \frac{-\mathcal{B} + \sqrt{\mathcal{B}^2 - 4\mathcal{A}\mathcal{C}}}{2\mathcal{A}}, \quad (\text{A.34})$$

$$k_- = \frac{-\mathcal{B} - \sqrt{\mathcal{B}^2 - 4\mathcal{A}\mathcal{C}}}{2\mathcal{A}}, \quad (\text{A.35})$$

com,

$$\mathcal{B}^2 - 4\mathcal{A}\mathcal{C} \geq 0. \quad (\text{A.36})$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk'} (\sigma\omega_k^B - \sigma'\omega_{k'}^B - \sigma''\omega_{k-k'}^B) &= \frac{d}{dk'} \left(\sigma \frac{v_b k}{1 + bv_b k} - \sigma' \frac{v_b k'}{1 + bv_b k'} - \sigma'' \frac{v_b (k - k')}{1 + bv_b (k - k')} \right) \\ &= \frac{d}{dk'} \left(-\sigma' \frac{v_b k'}{1 + bv_b k'} - \sigma'' \frac{v_b (k - k')}{1 + bv_b (k - k')} \right) \\ &= \frac{\sigma'' v_b}{[1 + bv_b (k - k')]^2} - \frac{\sigma' v_b}{(1 + bv_b k')^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Portanto, resolvendo para k' ,

$$\begin{aligned} \delta (\sigma\omega_k^B - \sigma'\omega_{k'}^B - \sigma''\omega_{k-k'}^B) &= \left| \frac{\sigma'' v_b}{[1 + bv_b (k - k_+)]^2} - \frac{\sigma' v_b}{(1 + bv_b k_+)^2} \right|^{-1} \delta (k' - k_+) \\ &\quad + \left| \frac{\sigma'' v_b}{[1 + bv_b (k - k_-)]^2} - \frac{\sigma' v_b}{(1 + bv_b k_-)^2} \right|^{-1} \delta (k' - k_-) \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

A.3 Equação de partículas

No que concerne as partículas, assume-se que a aproximação quasilinear é válida:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} = \sum_{\alpha} \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{\pi e_a^2}{m_a^2} \int d\mathbf{k} \left(\frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \delta (\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \left[\frac{(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})^3}{2\omega_{pe}^2} \frac{m_a}{2\pi^2 k} f_a + I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha} \left(\frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}} \right) \right]. \quad (\text{A.39})$$

Para elétrons, no caso unidimensional,

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} = \sum_{\alpha} \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{\pi e_e^2}{m_e^2} \int dk \frac{\partial}{\partial v} \delta (\sigma\omega_k^{\alpha} - kv) \left[\frac{(\sigma\omega_k^{\alpha})^3}{\omega_{pe}^2} \frac{m_e}{4\pi^2 k} f_e + I_k^{\sigma\alpha} \frac{\partial f_e}{\partial v} \right]. \quad (\text{A.40})$$

Para o modo B , definido por (A.12),

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} = \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{\pi e_e^2}{m_e^2} \int dk \frac{\partial}{\partial v} \delta (\sigma\omega_k^B - kv) \left[\frac{(\sigma\omega_k^B)^3}{\omega_{pe}^2} \frac{m_e}{4\pi^2 k} f_e + I_k^{\sigma B} \frac{\partial f_e}{\partial v} \right]. \quad (\text{A.41})$$

Reescrevendo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_e}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{e_e^2}{4\pi m_e \omega_{pe}^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \int dk \frac{(\sigma\omega_k^B)^3}{k} \delta (\sigma\omega_k^B - kv) \right] f_e \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{\pi e_e^2}{m_e^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \int dk I_k^{\sigma B} \delta (\sigma\omega_k^B - kv) \right] \frac{\partial f_e}{\partial v}. \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Define-se,

$$A = \frac{e_e^2}{4\pi m_e \omega_{pe}^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \int dk \frac{(\sigma \omega_k^B)^3}{k} \delta(\sigma \omega_k^B - kv), \quad (\text{A.43})$$

$$D = \frac{\pi e_e^2}{m_e^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \int dk I_k^{\sigma B} \delta(\sigma \omega_k^B - kv). \quad (\text{A.44})$$

Assim,

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} \left(A f_e + D \frac{\partial f_e}{\partial v} \right). \quad (\text{A.45})$$

A.3.1 Coeficiente A

Considerando a propriedade de simetria $\omega_{-k}^B = -\omega_k^B$, é possível mapear o coeficiente A sobre o domínio positivo de k apenas:

$$\begin{aligned} A &= \frac{e_e^2}{4\pi m_e \omega_{pe}^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \int dk \frac{(\sigma \omega_k^B)^3}{k} \delta(\sigma \omega_k^B - kv) \\ &= \frac{e_e^2}{4\pi m_e \omega_{pe}^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \int_{-\infty}^0 dk \frac{(\sigma \omega_k^B)^3}{k} \delta(\sigma \omega_k^B - kv) + \frac{e_e^2}{4\pi m_e \omega_{pe}^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \int_0^{\infty} dk \frac{(\sigma \omega_k^B)^3}{k} \delta(\sigma \omega_k^B - kv). \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

Tomando $k \rightarrow -k$ no primeiro termo,

$$\begin{aligned} A &= \frac{e_e^2}{4\pi m_e \omega_{pe}^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \int_{\infty}^0 d(-k) \frac{(\sigma \omega_{-k}^B)^3}{-k} \delta(\sigma \omega_{-k}^B - (-k)v) \\ &\quad + \frac{e_e^2}{4\pi m_e \omega_{pe}^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \int_0^{\infty} dk \frac{(\sigma \omega_k^B)^3}{k} \delta(\sigma \omega_k^B - kv), \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{e_e^2}{4\pi m_e \omega_{pe}^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \int_0^{\infty} dk \frac{(\sigma \omega_k^B)^3}{k} \delta(\sigma \omega_k^B - kv) \\ &\quad + \frac{e_e^2}{4\pi m_e \omega_{pe}^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \int_0^{\infty} dk \frac{(\sigma \omega_k^B)^3}{k} \delta(\sigma \omega_k^B - kv), \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

$$A = \frac{e_e^2}{2\pi m_e \omega_{pe}^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \int_0^{\infty} dk \frac{(\sigma \omega_k^B)^3}{k} \delta(\sigma \omega_k^B - kv). \quad (\text{A.49})$$

A.3.2 Coeficiente D

Considerando as propriedades de simetria $\omega_{-k}^B = -\omega_k^B$ e $I_{-k}^B = I_k^B$ é possível mapear o coeficiente D sobre o domínio positivo de k apenas:

$$\begin{aligned} D &= \frac{\pi e_e^2}{m_e^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \int dk I_k^{\sigma B} \delta(\sigma \omega_k^B - kv) \\ &= \frac{\pi e_e^2}{m_e^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \int_{-\infty}^0 dk I_k^{\sigma B} \delta(\sigma \omega_k^B - kv) + \frac{\pi e_e^2}{m_e^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \int_0^{\infty} dk I_k^{\sigma B} \delta(\sigma \omega_k^B - kv). \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

Tomando $k \rightarrow -k$ no primeiro termo,

$$D = \frac{\pi e_e^2}{m_e^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \int_{-\infty}^0 d(-k) I_{-k}^{\sigma B} \delta(\sigma \omega_{-k}^B - (-k)v) + \frac{\pi e_e^2}{m_e^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \int_0^{\infty} dk I_k^{\sigma B} \delta(\sigma \omega_k^B - kv), \quad (\text{A.51})$$

$$D = \frac{\pi e_e^2}{m_e^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \int_0^{\infty} dk I_k^{\sigma B} \delta(\sigma \omega_k^B - kv) + \frac{\pi e_e^2}{m_e^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \int_0^{\infty} dk I_k^{\sigma B} \delta(\sigma \omega_k^B - kv), \quad (\text{A.52})$$

$$D = \frac{2\pi e_e^2}{m_e^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \int_0^{\infty} dk I_k^{\sigma B} \delta(\sigma \omega_k^B - kv). \quad (\text{A.53})$$

Usando (A.19) e introduzindo as quantidade normalizadas definidas acima, obtém-se:

$$A = \mathcal{G} \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{(\sigma \varpi_{\kappa_*}^B)^3}{\kappa_*} \left| \frac{\nu_b}{\sigma \nu^2 - \nu_b \nu} \right|, \quad (\text{A.54})$$

$$D = \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_{\kappa_*}^{\sigma B} \left| \frac{\nu_b}{\sigma \nu^2 - \nu_b \nu} \right|, \quad (\text{A.55})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \nu} \left(A \phi + D \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right). \quad (\text{A.56})$$

A.4 Equação de ondas

A.4.1 Quase linear

A contribuição quase linear para a evolução das ondas é definida por,

$$\frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma \alpha}}{\partial t} = \pi \frac{(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})^3}{k^2} \int d\mathbf{v} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) I_{\mathbf{k}}^{\sigma \alpha} + \frac{(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})^6 n_e e_e^2}{\omega_{pe}^4 k^2} \int d\mathbf{v} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) F_e(\mathbf{v}). \quad (\text{A.57})$$

Para o caso unidimensional,

$$\frac{\partial I_k^{\sigma\alpha}}{\partial t} = \frac{(\sigma\omega_k^\alpha)^6}{\omega_{pe}^4} \frac{n_e e_e^2}{k^2} \int dv \delta(\sigma\omega_k^\alpha - kv) F_e(v) + \pi \frac{(\sigma\omega_k^\alpha)^3}{k^2} \int dv k \frac{\partial F_e}{\partial v} \delta(\sigma\omega_k^\alpha - kv) I_k^{\sigma\alpha}. \quad (\text{A.58})$$

Para o modo B , definido por (A.12),

$$\frac{\partial I_k^{\sigma B}}{\partial t} = \frac{(\sigma\omega_k^B)^6}{\omega_{pe}^4} \frac{n_e e_e^2}{k^2} \int dv \delta(\sigma\omega_k^B - kv) F_e(v) + \pi \frac{(\sigma\omega_k^B)^3}{k} I_k^{\sigma B} \int dv \delta(\sigma\omega_k^B - kv) \frac{\partial F_e}{\partial v}. \quad (\text{A.59})$$

Reescrevendo,

$$\frac{\partial I_k^{\sigma B}}{\partial t} = \left[\frac{(\sigma\omega_k^B)^6}{\omega_{pe}^4} \frac{n_e e_e^2}{k^2} \int dv \delta(\sigma\omega_k^B - kv) F_e(v) \right] + \left[\pi \frac{(\sigma\omega_k^B)^3}{k} \int dv \delta(\sigma\omega_k^B - kv) \frac{\partial F_e}{\partial v} \right] I_k^{\sigma B}. \quad (\text{A.60})$$

Define-se,

$$C_s^{QL} = \frac{(\sigma\omega_k^B)^6}{\omega_{pe}^4} \frac{n_e e_e^2}{k^2} \int dv \delta(\sigma\omega_k^B - kv) F_e(v), \quad (\text{A.61})$$

$$C_i^{QL} = \pi \frac{(\sigma\omega_k^B)^3}{k} \int dv \delta(\sigma\omega_k^B - kv) \frac{\partial F_e}{\partial v}. \quad (\text{A.62})$$

Assim,

$$\frac{\partial I_k^{\sigma B}}{\partial t} = C_s^{QL} + C_i^{QL} I_k^{\sigma B}. \quad (\text{A.63})$$

Usando (A.20) e introduzindo as quantidade normalizadas definidas acima, obtém-se:

$$C_s^{QL} = \mathcal{G} \pi \frac{(\sigma\varpi_k^B)^6}{\kappa^2 |\kappa|} \phi(\nu_*), \quad (\text{A.64})$$

$$C_i^{QL} = \pi \frac{(\sigma\varpi_k^B)^3}{\kappa |\kappa|} \frac{\partial \phi(\nu_*)}{\partial \nu_*}, \quad (\text{A.65})$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_\kappa^{\sigma B}}{\partial \tau} = C_s^{QL} + C_i^{QL} \mathcal{E}_\kappa^{\sigma B}. \quad (\text{A.66})$$

A.4.2 Não linear

A contribuição não linear para a evolução das ondas é determinada por,

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}}{\partial t} &= -\pi \frac{(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})^3}{\omega_{pe}^4} \sum_{\sigma',\sigma''=\pm 1} \sum_{\beta,\gamma} \int d\mathbf{k}' \left| \chi^{(2)} \left(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} \mid \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma} \right) \right|^2 \\ &\times \left[\left(\sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} \right)^3 I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma''\gamma} I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha} + \left(\sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma} \right)^3 I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'\beta} I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha} - (\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})^3 I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'\beta} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma''\gamma} \right] \delta \left(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.67})$$

Considerando a *aproximação de onda rápida*,

$$\begin{aligned} \chi_a^{(2)} \left(\mathbf{k}', \omega' \mid \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega' \right) &= \frac{-i e_a}{2 m_a} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega\omega'(\omega - \omega')} \frac{1}{kk'|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|} \\ &\times \left[\frac{k^2}{\omega} \mathbf{k}' \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}') + \frac{k'^2}{\omega'} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}') + \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2}{\omega - \omega'} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.68})$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}}{\partial t} &= -\pi \frac{(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})^3}{\omega_{pe}^4} \sum_{\sigma',\sigma''=\pm 1} \sum_{\beta,\gamma} \int d\mathbf{k}' \left| \frac{1}{2 m_e} \frac{e}{\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}} \frac{\omega_{pe}^2}{\left(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} \right)} \frac{1}{kk'|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|} \right. \\ &\times \left. \left[\frac{k^2}{\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}} \mathbf{k}' \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}') + \frac{k'^2}{\sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}') + \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2}{\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' \right] \right|^2 \\ &\times \left[\left(\sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} \right)^3 I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma''\gamma} I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha} + \left(\sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma} \right)^3 I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'\beta} I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha} - (\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})^3 I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'\beta} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma''\gamma} \right] \delta \left(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

No caso unidimensional,

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}}{\partial t} &= -\pi \frac{(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})^3}{\omega_{pe}^4} \sum_{\sigma',\sigma''=\pm 1} \sum_{\beta,\gamma} \int d\mathbf{k}' \left| \frac{1}{2 m_e} \frac{e}{\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}} \frac{\omega_{pe}^2}{\left(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} \right)} \frac{1}{kk'|k - k'|} \right. \\ &\times \left. \left[\frac{k^2}{\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}} k' (k - k') + \frac{k'^2}{\sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}} k (k - k') + \frac{(k - k')^2}{\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}} kk' \right] \right|^2 \\ &\times \left[\left(\sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} \right)^3 I_{k-k'}^{\sigma''\gamma} I_k^{\sigma\alpha} + \left(\sigma''\omega_{k-k'}^{\gamma} \right)^3 I_{k'}^{\sigma'\beta} I_k^{\sigma\alpha} - (\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})^3 I_{k'}^{\sigma'\beta} I_{k-k'}^{\sigma''\gamma} \right] \delta \left(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} - \sigma''\omega_{k-k'}^{\gamma} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

Introduzindo as quantidade normalizadas definidas acima, obtém-se,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{E}_\kappa^{\sigma\alpha}}{\partial \tau} &= -\frac{1}{8} (\sigma \varpi_\kappa^\alpha)^3 \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} \sum_{\beta, \gamma} \int d\kappa' \\
 &\times \left| \frac{1}{\sigma \varpi_\kappa^\alpha \sigma' \varpi_{\kappa'}^\beta (\sigma \varpi_\kappa^\alpha - \sigma' \varpi_{\kappa'}^\beta)} \frac{1}{\kappa \kappa' |\kappa - \kappa'|} \left[\frac{\kappa^2}{\sigma \varpi_\kappa^\alpha} \kappa' (\kappa - \kappa') + \frac{\kappa'^2}{\sigma' \varpi_{\kappa'}^\beta} \kappa (\kappa - \kappa') + \frac{(\kappa - \kappa')^2}{\sigma \varpi_\kappa^\alpha - \sigma' \varpi_{\kappa'}^\beta} \kappa \kappa' \right] \right|^2 \\
 &\times \left[(\sigma' \varpi_{\kappa'}^\beta)^3 \mathcal{E}_{\kappa - \kappa'}^{\sigma''\gamma} \mathcal{E}_\kappa^{\sigma\alpha} + (\sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa'}^\gamma)^3 \mathcal{E}_{\kappa'}^{\sigma'\beta} \mathcal{E}_\kappa^{\sigma\alpha} - (\sigma \varpi_\kappa^\alpha)^3 \mathcal{E}_{\kappa'}^{\sigma'\beta} \mathcal{E}_{\kappa - \kappa'}^{\sigma''\gamma} \right] \delta (\sigma \varpi_\kappa^\alpha - \sigma' \varpi_{\kappa'}^\beta - \sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa'}^\gamma).
 \end{aligned} \tag{A.71}$$

A equação pode ser reescrita a fim de remover as *aparentes* singularidades,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{E}_\kappa^{\sigma\alpha}}{\partial \tau} &= -\frac{1}{8} (\sigma \varpi_\kappa^\alpha)^3 \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} \sum_{\beta, \gamma} \int d\kappa' \\
 &\times \left| \frac{1}{\sigma \varpi_\kappa^\alpha \sigma' \varpi_{\kappa'}^\beta \sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa'}^\gamma} \frac{1}{\kappa \kappa'} \left[\frac{\kappa^2}{\sigma \varpi_\kappa^\alpha} \kappa' \text{sign}(\kappa - \kappa') + \frac{\kappa'^2}{\sigma' \varpi_{\kappa'}^\beta} \kappa \text{sign}(\kappa - \kappa') + \frac{|\kappa - \kappa'|}{\sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa'}^\gamma} \kappa \kappa' \right] \right|^2 \\
 &\times \left[(\sigma' \varpi_{\kappa'}^\beta)^3 \mathcal{E}_{\kappa - \kappa'}^{\sigma''\gamma} \mathcal{E}_\kappa^{\sigma\alpha} + (\sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa'}^\gamma)^3 \mathcal{E}_{\kappa'}^{\sigma'\beta} \mathcal{E}_\kappa^{\sigma\alpha} - (\sigma \varpi_\kappa^\alpha)^3 \mathcal{E}_{\kappa'}^{\sigma'\beta} \mathcal{E}_{\kappa - \kappa'}^{\sigma''\gamma} \right] \delta (\sigma \varpi_\kappa^\alpha - \sigma' \varpi_{\kappa'}^\beta - \sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa'}^\gamma).
 \end{aligned} \tag{A.72}$$

Para o modo B , definido por (A.12),

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{E}_\kappa^{\sigma B}}{\partial \tau} &= -\frac{1}{8} (\sigma \varpi_\kappa^B)^3 \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} \int d\kappa' \\
 &\times \left| \frac{1}{\sigma \varpi_\kappa^B \sigma' \varpi_{\kappa'}^B \sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa'}^B} \frac{1}{\kappa \kappa'} \left[\frac{\kappa^2}{\sigma \varpi_\kappa^B} \kappa' \text{sign}(\kappa - \kappa') + \frac{\kappa'^2}{\sigma' \varpi_{\kappa'}^B} \kappa \text{sign}(\kappa - \kappa') + \frac{|\kappa - \kappa'|}{\sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa'}^B} \kappa \kappa' \right] \right|^2 \\
 &\times \left[(\sigma' \varpi_{\kappa'}^B)^3 \mathcal{E}_{\kappa - \kappa'}^{\sigma'' B} \mathcal{E}_\kappa^{\sigma B} + (\sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa'}^B)^3 \mathcal{E}_{\kappa'}^{\sigma' B} \mathcal{E}_\kappa^{\sigma B} - (\sigma \varpi_\kappa^B)^3 \mathcal{E}_{\kappa'}^{\sigma' B} \mathcal{E}_{\kappa - \kappa'}^{\sigma'' B} \right] \delta (\sigma \varpi_\kappa^B - \sigma' \varpi_{\kappa'}^B - \sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa'}^B).
 \end{aligned} \tag{A.73}$$

Introduzindo as quantidade normalizadas definidas acima, obtém-se,

$$\begin{aligned}
 &\delta (\sigma \varpi_\kappa^B - \sigma' \varpi_{\kappa'}^B - \sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa'}^B) \\
 &= \left| \frac{\sigma'' \nu_b}{[1 + b \nu_b (\kappa - \kappa_+)]^2} - \frac{\sigma' \nu_b}{(1 + b \nu_b \kappa_+)^2} \right|^{-1} \delta (\kappa' - \kappa_+) \\
 &\quad + \left| \frac{\sigma'' \nu_b}{[1 + b \nu_b (\kappa - \kappa_-)]^2} - \frac{\sigma' \nu_b}{(1 + b \nu_b \kappa_-)^2} \right|^{-1} \delta (\kappa' - \kappa_-). \tag{A.74}
 \end{aligned}$$

Onde,

$$\kappa_+ = \frac{-\mathcal{B} + \sqrt{\mathcal{B}^2 - 4\mathcal{A}\mathcal{C}}}{2\mathcal{A}}, \quad (\text{A.75})$$

$$\kappa_- = \frac{-\mathcal{B} - \sqrt{\mathcal{B}^2 - 4\mathcal{A}\mathcal{C}}}{2\mathcal{A}}, \quad (\text{A.76})$$

$$\mathcal{A} = b\nu_b^2 (\sigma' + \sigma'') - \frac{\sigma b^2 \nu_b^3 \kappa}{1 + b\nu_b \kappa}, \quad (\text{A.77})$$

$$\mathcal{B} = \frac{\sigma b^2 \nu_b^3 \kappa^2}{1 + b\nu_b \kappa} + \nu_b (\sigma'' - \sigma') - b\nu_b^2 \kappa (\sigma' + \sigma''), \quad (\text{A.78})$$

$$\mathcal{C} = \nu_b \kappa (\sigma - \sigma''). \quad (\text{A.79})$$

Com,

$$\mathcal{B}^2 - 4\mathcal{A}\mathcal{C} \geq 0. \quad (\text{A.80})$$

Por conveniência, a notação de \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} e b não foi alterada.

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_\kappa^{\sigma B}}{\partial \tau} &= -\frac{1}{8} (\sigma \varpi_\kappa^B)^3 \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} \int d\kappa' \\ &\times \left| \frac{1}{\sigma \varpi_\kappa^B \sigma' \varpi_{\kappa'}^B \sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa'}^B} \frac{1}{\kappa \kappa'} \left[\frac{\kappa^2}{\sigma \varpi_\kappa^B} \kappa' \text{sign}(\kappa - \kappa') + \frac{\kappa'^2}{\sigma' \varpi_{\kappa'}^B} \kappa \text{sign}(\kappa - \kappa') + \frac{|\kappa - \kappa'|}{\sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa'}^B} \kappa \kappa' \right] \right|^2 \\ &\times \left[(\sigma' \varpi_{\kappa'}^B)^3 \mathcal{E}_{\kappa - \kappa'}^{\sigma'' B} \mathcal{E}_\kappa^{\sigma B} + (\sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa'}^B)^3 \mathcal{E}_{\kappa'}^{\sigma' B} \mathcal{E}_\kappa^{\sigma B} - (\sigma \varpi_\kappa^B)^3 \mathcal{E}_{\kappa'}^{\sigma' B} \mathcal{E}_{\kappa - \kappa'}^{\sigma'' B} \right] \\ &\times \left[\left| \frac{\sigma'' \nu_b}{[1 + b\nu_b (\kappa - \kappa_+)]^2} - \frac{\sigma' \nu_b}{(1 + b\nu_b \kappa_+)^2} \right|^{-1} \delta(\kappa' - \kappa_+) \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{\sigma'' \nu_b}{[1 + b\nu_b (\kappa - \kappa_-)]^2} - \frac{\sigma' \nu_b}{(1 + b\nu_b \kappa_-)^2} \right|^{-1} \delta(\kappa' - \kappa_-) \right]. \quad (\text{A.81}) \end{aligned}$$

Segue,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{E}_\kappa^{\sigma B}}{\partial \tau} &= -\frac{1}{8} (\sigma \varpi_\kappa^B)^3 \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} \int d\kappa' \\
&\times \left| \frac{1}{\sigma \varpi_\kappa^B \sigma' \varpi_{\kappa'}^B \sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa'}^B} \frac{1}{\kappa \kappa'} \left[\frac{\kappa^2}{\sigma \varpi_\kappa^B} \kappa' \text{sign}(\kappa - \kappa') + \frac{\kappa'^2}{\sigma' \varpi_{\kappa'}^B} \kappa \text{sign}(\kappa - \kappa') + \frac{|\kappa - \kappa'|}{\sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa'}^B} \kappa \kappa' \right] \right|^2 \\
&\quad \times \left[(\sigma' \varpi_{\kappa'}^B)^3 \mathcal{E}_{\kappa - \kappa'}^{\sigma'' B} \mathcal{E}_\kappa^{\sigma B} + (\sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa'}^B)^3 \mathcal{E}_{\kappa'}^{\sigma' B} \mathcal{E}_\kappa^{\sigma B} - (\sigma \varpi_\kappa^B)^3 \mathcal{E}_{\kappa'}^{\sigma' B} \mathcal{E}_{\kappa - \kappa'}^{\sigma'' B} \right] \\
&\quad \times \left| \frac{\sigma'' \nu_b}{[1 + b\nu_b(\kappa - \kappa_-)]^2} - \frac{\sigma' \nu_b}{(1 + b\nu_b \kappa_-)^2} \right|^{-1} \delta(\kappa' - \kappa_-) \\
&\quad - \frac{1}{8} (\sigma \varpi_\kappa^B)^3 \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} \int d\kappa' \\
&\times \left| \frac{1}{\sigma \varpi_\kappa^B \sigma' \varpi_{\kappa'}^B \sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa'}^B} \frac{1}{\kappa \kappa'} \left[\frac{\kappa^2}{\sigma \varpi_\kappa^B} \kappa' \text{sign}(\kappa - \kappa') + \frac{\kappa'^2}{\sigma' \varpi_{\kappa'}^B} \kappa \text{sign}(\kappa - \kappa') + \frac{|\kappa - \kappa'|}{\sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa'}^B} \kappa \kappa' \right] \right|^2 \\
&\quad \times \left[(\sigma' \varpi_{\kappa'}^B)^3 \mathcal{E}_{\kappa - \kappa'}^{\sigma'' B} \mathcal{E}_\kappa^{\sigma B} + (\sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa'}^B)^3 \mathcal{E}_{\kappa'}^{\sigma' B} \mathcal{E}_\kappa^{\sigma B} - (\sigma \varpi_\kappa^B)^3 \mathcal{E}_{\kappa'}^{\sigma' B} \mathcal{E}_{\kappa - \kappa'}^{\sigma'' B} \right] \\
&\quad \times \left| \frac{\sigma'' \nu_b}{[1 + b\nu_b(\kappa - \kappa_+)]^2} - \frac{\sigma' \nu_b}{(1 + b\nu_b \kappa_+)^2} \right|^{-1} \delta(\kappa' - \kappa_+). \quad (\text{A.82})
\end{aligned}$$

Integrando,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{E}_\kappa^{\sigma B}}{\partial \tau} &= -\frac{1}{8} (\sigma \varpi_\kappa^B)^3 \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} \\
&\times \left| \frac{1}{\sigma \varpi_\kappa^B \sigma' \varpi_{\kappa_-}^B \sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa_-}^B} \frac{1}{\kappa \kappa_-} \left[\frac{\kappa^2}{\sigma \varpi_\kappa^B} \kappa_- \text{sign}(\kappa - \kappa_-) + \frac{\kappa_-^2}{\sigma' \varpi_{\kappa_-}^B} \kappa \text{sign}(\kappa - \kappa_-) + \frac{|\kappa - \kappa_-|}{\sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa_-}^B} \kappa \kappa_- \right] \right|^2 \\
&\quad \times \left[(\sigma' \varpi_{\kappa_-}^B)^3 \mathcal{E}_{\kappa - \kappa_-}^{\sigma'' B} \mathcal{E}_\kappa^{\sigma B} + (\sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa_-}^B)^3 \mathcal{E}_{\kappa_-}^{\sigma' B} \mathcal{E}_\kappa^{\sigma B} - (\sigma \varpi_\kappa^B)^3 \mathcal{E}_{\kappa_-}^{\sigma' B} \mathcal{E}_{\kappa - \kappa_-}^{\sigma'' B} \right] \\
&\quad \times \left| \frac{\sigma'' \nu_b}{[1 + b\nu_b(\kappa - \kappa_-)]^2} - \frac{\sigma' \nu_b}{(1 + b\nu_b \kappa_-)^2} \right|^{-1} \\
&\quad - \frac{1}{8} (\sigma \varpi_\kappa^B)^3 \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} \\
&\times \left| \frac{1}{\sigma \varpi_\kappa^B \sigma' \varpi_{\kappa_+}^B \sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa_+}^B} \frac{1}{\kappa \kappa_+} \left[\frac{\kappa^2}{\sigma \varpi_\kappa^B} \kappa_+ \text{sign}(\kappa - \kappa_+) + \frac{\kappa_+^2}{\sigma' \varpi_{\kappa_+}^B} \kappa \text{sign}(\kappa - \kappa_+) + \frac{|\kappa - \kappa_+|}{\sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa_+}^B} \kappa \kappa_+ \right] \right|^2 \\
&\quad \times \left[(\sigma' \varpi_{\kappa_+}^B)^3 \mathcal{E}_{\kappa - \kappa_+}^{\sigma'' B} \mathcal{E}_\kappa^{\sigma B} + (\sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa_+}^B)^3 \mathcal{E}_{\kappa_+}^{\sigma' B} \mathcal{E}_\kappa^{\sigma B} - (\sigma \varpi_\kappa^B)^3 \mathcal{E}_{\kappa_+}^{\sigma' B} \mathcal{E}_{\kappa - \kappa_+}^{\sigma'' B} \right] \\
&\quad \times \left| \frac{\sigma'' \nu_b}{[1 + b\nu_b(\kappa - \kappa_+)]^2} - \frac{\sigma' \nu_b}{(1 + b\nu_b \kappa_+)^2} \right|^{-1}. \quad (\text{A.83})
\end{aligned}$$

Aqui, as propriedades de simetria $\omega_{-k} = -\omega_k$ e $\mathcal{E}_{-k} = \mathcal{E}_k$ podem ser aplicadas apenas numericamente. A Eq. (A.83) pode ser reescrita como segue.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{E}_\kappa^{\sigma B}}{\partial \tau} &= -\frac{1}{8} (\sigma \varpi_\kappa^B)^3 \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} \\
 &\times \left| \frac{1}{\sigma \varpi_\kappa^B \sigma' \varpi_{\kappa_-}^B \sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa_-}^B} \frac{1}{\kappa \kappa_-} \left[\frac{\kappa^2}{\sigma \varpi_\kappa^B} \kappa_- \text{sign}(\kappa - \kappa_-) + \frac{\kappa_-^2}{\sigma' \varpi_{\kappa_-}^B} \kappa \text{sign}(\kappa - \kappa_-) + \frac{|\kappa - \kappa_-|}{\sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa_-}^B} \kappa \kappa_- \right] \right|^2 \\
 &\quad \times \left| \frac{\sigma'' \nu_b}{[1 + b\nu_b(\kappa - \kappa_-)]^2} - \frac{\sigma' \nu_b}{(1 + b\nu_b \kappa_-)^2} \right|^{-1} \left[-(\sigma \varpi_\kappa^B)^3 \mathcal{E}_{\kappa_-}^{\sigma' B} \mathcal{E}_{\kappa - \kappa_-}^{\sigma'' B} \right] \\
 &\quad - \frac{1}{8} (\sigma \varpi_\kappa^B)^3 \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} \\
 &\times \left| \frac{1}{\sigma \varpi_\kappa^B \sigma' \varpi_{\kappa_-}^B \sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa_-}^B} \frac{1}{\kappa \kappa_-} \left[\frac{\kappa^2}{\sigma \varpi_\kappa^B} \kappa_- \text{sign}(\kappa - \kappa_-) + \frac{\kappa_-^2}{\sigma' \varpi_{\kappa_-}^B} \kappa \text{sign}(\kappa - \kappa_-) + \frac{|\kappa - \kappa_-|}{\sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa_-}^B} \kappa \kappa_- \right] \right|^2 \\
 &\quad \times \left| \frac{\sigma'' \nu_b}{[1 + b\nu_b(\kappa - \kappa_-)]^2} - \frac{\sigma' \nu_b}{(1 + b\nu_b \kappa_-)^2} \right|^{-1} \left[(\sigma' \varpi_{\kappa_-}^B)^3 \mathcal{E}_{\kappa - \kappa_-}^{\sigma'' B} + (\sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa_-}^B)^3 \mathcal{E}_{\kappa_-}^{\sigma' B} \right] \mathcal{E}_\kappa^{\sigma B} \\
 &\quad - \frac{1}{8} (\sigma \varpi_\kappa^B)^3 \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} \\
 &\times \left| \frac{1}{\sigma \varpi_\kappa^B \sigma' \varpi_{\kappa_+}^B \sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa_+}^B} \frac{1}{\kappa \kappa_+} \left[\frac{\kappa^2}{\sigma \varpi_\kappa^B} \kappa_+ \text{sign}(\kappa - \kappa_+) + \frac{\kappa_+^2}{\sigma' \varpi_{\kappa_+}^B} \kappa \text{sign}(\kappa - \kappa_+) + \frac{|\kappa - \kappa_+|}{\sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa_+}^B} \kappa \kappa_+ \right] \right|^2 \\
 &\quad \times \left| \frac{\sigma'' \nu_b}{[1 + b\nu_b(\kappa - \kappa_+)]^2} - \frac{\sigma' \nu_b}{(1 + b\nu_b \kappa_+)^2} \right|^{-1} \left[-(\sigma \varpi_\kappa^B)^3 \mathcal{E}_{\kappa_+}^{\sigma' B} \mathcal{E}_{\kappa - \kappa_+}^{\sigma'' B} \right] \\
 &\quad - \frac{1}{8} (\sigma \varpi_\kappa^B)^3 \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} \\
 &\times \left| \frac{1}{\sigma \varpi_\kappa^B \sigma' \varpi_{\kappa_+}^B \sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa_+}^B} \frac{1}{\kappa \kappa_+} \left[\frac{\kappa^2}{\sigma \varpi_\kappa^B} \kappa_+ \text{sign}(\kappa - \kappa_+) + \frac{\kappa_+^2}{\sigma' \varpi_{\kappa_+}^B} \kappa \text{sign}(\kappa - \kappa_+) + \frac{|\kappa - \kappa_+|}{\sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa_+}^B} \kappa \kappa_+ \right] \right|^2 \\
 &\quad \times \left| \frac{\sigma'' \nu_b}{[1 + b\nu_b(\kappa - \kappa_+)]^2} - \frac{\sigma' \nu_b}{(1 + b\nu_b \kappa_+)^2} \right|^{-1} \left[(\sigma' \varpi_{\kappa_+}^B)^3 \mathcal{E}_{\kappa - \kappa_+}^{\sigma'' B} + (\sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa_+}^B)^3 \mathcal{E}_{\kappa_+}^{\sigma' B} \right] \mathcal{E}_\kappa^{\sigma B}.
 \end{aligned} \tag{A.84}$$

Define-se,

$$\begin{aligned}
 C_- &= \left| \frac{\sigma'' \nu_b}{[1 + b\nu_b(\kappa - \kappa_-)]^2} - \frac{\sigma' \nu_b}{(1 + b\nu_b \kappa_-)^2} \right|^{-1} \\
 &\times \left| \frac{1}{\sigma \varpi_\kappa^B \sigma' \varpi_{\kappa_-}^B \sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa_-}^B} \frac{1}{\kappa \kappa_-} \left[\frac{\kappa^2}{\sigma \varpi_\kappa^B} \kappa_- \text{sign}(\kappa - \kappa_-) + \frac{\kappa_-^2}{\sigma' \varpi_{\kappa_-}^B} \kappa \text{sign}(\kappa - \kappa_-) + \frac{|\kappa - \kappa_-|}{\sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa_-}^B} \kappa \kappa_- \right] \right|^2,
 \end{aligned} \tag{A.85}$$

$$C_+ = \left| \frac{\sigma'' \nu_b}{[1 + b\nu_b(\kappa - \kappa_+)]^2} - \frac{\sigma' \nu_b}{(1 + b\nu_b \kappa_+)^2} \right|^{-1} \\ \times \left| \frac{1}{\sigma \varpi_\kappa^B \sigma' \varpi_{\kappa_+}^B \sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa_+}^B} \frac{1}{\kappa \kappa_+} \left[\frac{\kappa^2}{\sigma \varpi_\kappa^B} \kappa_+ \text{sign}(\kappa - \kappa_+) + \frac{\kappa_+^2}{\sigma' \varpi_{\kappa_+}^B} \kappa \text{sign}(\kappa - \kappa_+) + \frac{|\kappa - \kappa_+|}{\sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa_+}^B} \kappa \kappa_+ \right] \right|^2. \quad (\text{A.86})$$

Assim,

$$\frac{\partial \mathcal{E}_\kappa^{\sigma B}}{\partial \tau} = -\frac{1}{8} (\sigma \varpi_\kappa^B)^3 \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} C_- \left[-(\sigma \varpi_\kappa^B)^3 \mathcal{E}_{\kappa_-}^{\sigma' B} \mathcal{E}_{\kappa - \kappa_-}^{\sigma'' B} \right] \\ + C_- \left[(\sigma' \varpi_{\kappa_-}^B)^3 \mathcal{E}_{\kappa - \kappa_-}^{\sigma'' B} + (\sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa_-}^B)^3 \mathcal{E}_{\kappa_-}^{\sigma' B} \right] \mathcal{E}_\kappa^{\sigma B} \\ + C_+ \left[-(\sigma \varpi_\kappa^B)^3 \mathcal{E}_{\kappa_+}^{\sigma' B} \mathcal{E}_{\kappa - \kappa_+}^{\sigma'' B} \right] + C_+ \left[(\sigma' \varpi_{\kappa_+}^B)^3 \mathcal{E}_{\kappa - \kappa_+}^{\sigma'' B} + (\sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa_+}^B)^3 \mathcal{E}_{\kappa_+}^{\sigma' B} \right] \mathcal{E}_\kappa^{\sigma B}. \quad (\text{A.87})$$

Também define-se,

$$C_s^{NL} = -\frac{1}{8} (\sigma \varpi_\kappa^B)^3 \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} C_- \left[-(\sigma \varpi_\kappa^B)^3 \mathcal{E}_{\kappa_-}^{\sigma' B} \mathcal{E}_{\kappa - \kappa_-}^{\sigma'' B} \right] \\ + C_+ \left[-(\sigma \varpi_\kappa^B)^3 \mathcal{E}_{\kappa_+}^{\sigma' B} \mathcal{E}_{\kappa - \kappa_+}^{\sigma'' B} \right] \quad (\text{A.88})$$

$$C_i^{NL} = -\frac{1}{8} (\sigma \varpi_\kappa^B)^3 \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} C_- \left[(\sigma' \varpi_{\kappa_-}^B)^3 \mathcal{E}_{\kappa - \kappa_-}^{\sigma'' B} + (\sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa_-}^B)^3 \mathcal{E}_{\kappa_-}^{\sigma' B} \right] \\ + C_+ \left[(\sigma' \varpi_{\kappa_+}^B)^3 \mathcal{E}_{\kappa - \kappa_+}^{\sigma'' B} + (\sigma'' \varpi_{\kappa - \kappa_+}^B)^3 \mathcal{E}_{\kappa_+}^{\sigma' B} \right]. \quad (\text{A.89})$$

Portanto,

$$\frac{\partial \mathcal{E}_\kappa^{\sigma B}}{\partial \tau} = C_s^{NL} + C_i^{NL} \mathcal{E}_\kappa^{\sigma B}. \quad (\text{A.90})$$

Por fim, a evolução das ondas é determinada tanto pelos termos quase lineares como pelos não lineares. Assim,

$$\frac{\partial \mathcal{E}_\kappa^{\sigma B}}{\partial \tau} = (C_s^{QL} + C_s^{NL}) + (C_i^{QL} + C_i^{NL}) \mathcal{E}_\kappa^{\sigma B}. \quad (\text{A.91})$$

A.5 Nível inicial das ondas

Consideramos a distribuição de equilíbrio,

$$F = \frac{1}{\sqrt{\pi}v_e} \exp\left(-\frac{v^2}{v_e^2}\right), \quad (\text{A.92})$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = -2\frac{v}{v_e^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}v_e} \exp\left(-\frac{v^2}{v_e^2}\right) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}v_e^3} v \exp\left(-\frac{v^2}{v_e^2}\right). \quad (\text{A.93})$$

Portanto,

$$\int dv \delta(\sigma\omega_k^B - kv) F = \int dv \frac{1}{|k|} \delta(v - v_*) F(v) = \frac{1}{|k|} F(v_*) = \frac{1}{|k|} \frac{1}{\sqrt{\pi}v_e} \exp\left(-\frac{\left[\frac{\sigma v_b}{1+bv_b k}\right]^2}{v_e^2}\right), \quad (\text{A.94})$$

$$C_s = \frac{(\sigma\omega_k^B)^6}{\omega_{pe}^4} \frac{n_e e_e^2}{k^2} \frac{1}{|k|} \frac{1}{\sqrt{\pi}v_e} \exp\left(-\frac{\left[\frac{\sigma v_b}{1+bv_b k}\right]^2}{v_e^2}\right). \quad (\text{A.95})$$

Também,

$$\begin{aligned} \int dv \delta(\sigma\omega_k^B - kv) \frac{\partial F}{\partial v} &= \int dv \frac{1}{|k|} \delta(v - v_*) \frac{\partial F(v)}{\partial v} = \frac{1}{|k|} \frac{\partial F(v_*)}{\partial v_*} \\ &= -\frac{1}{|k|} \frac{2}{\sqrt{\pi}v_e^3} \left[\frac{\sigma v_b}{1+bv_b k}\right] \exp\left(-\frac{\left[\frac{\sigma v_b}{1+bv_b k}\right]^2}{v_e^2}\right), \end{aligned} \quad (\text{A.96})$$

$$C_i = -\pi \frac{(\sigma\omega_k^B)^3}{k} \frac{1}{|k|} \frac{2}{\sqrt{\pi}v_e^3} \left[\frac{\sigma v_b}{1+bv_b k}\right] \exp\left(-\frac{\left[\frac{\sigma v_b}{1+bv_b k}\right]^2}{v_e^2}\right). \quad (\text{A.97})$$

Segue,

$$-\frac{C_s}{C_i} = -\frac{\frac{(\sigma\omega_k^B)^6}{\omega_{pe}^4} \frac{n_e e_e^2}{k^2} \frac{1}{|k|} \frac{1}{\sqrt{\pi}v_e} \exp\left(-\frac{\left[\frac{\sigma v_b}{1+bv_b k}\right]^2}{v_e^2}\right)}{-\pi \frac{(\sigma\omega_k^B)^3}{k} \frac{1}{|k|} \frac{2}{\sqrt{\pi}v_e^3} \left[\frac{\sigma v_b}{1+bv_b k}\right] \exp\left(-\frac{\left[\frac{\sigma v_b}{1+bv_b k}\right]^2}{v_e^2}\right)}, \quad (\text{A.98})$$

$$\begin{aligned}
-\frac{C_s}{C_i} &= \frac{\frac{(\sigma\omega_k^B)^3}{\omega_{pe}^4} \frac{n_e e_e^2}{k}}{\pi \frac{2}{v_e^2} \left[\frac{\sigma v_b}{1+bv_b k} \right]} = \frac{(\sigma\omega_k^B)^3 n_e e_e^2 v_e^2 (1+bv_b k)}{2\pi\sigma v_b \omega_{pe}^4 k} = \frac{(\omega_k^B)^3 n_e e_e^2 v_e^2 (1+bv_b k)}{2\pi v_b \omega_{pe}^4 k} \\
&= \left(\frac{v_b k}{1+bv_b k} \right)^3 \frac{n_e e_e^2 v_e^2 (1+bv_b k)}{2\pi v_b \omega_{pe}^4 k} = \left(\frac{v_b k}{1+bv_b k} \right)^2 \frac{n_e e_e^2 v_e^2}{2\pi \omega_{pe}^4} = \frac{n_e e_e^2 v_e^2}{2\pi \omega_{pe}^4} (\omega_k^B)^2, \quad (\text{A.99})
\end{aligned}$$

$$-\frac{C_s}{C_i} = \frac{n_e e_e^2 v_e^2}{2\pi \omega_{pe}^4} \left(\frac{v_b k}{1+bv_b k} \right)^2 = \frac{n_e e_e^2 v_e^2}{2\pi \omega_{pe}^4} (\omega_k^B)^2. \quad (\text{A.100})$$

Introduzindo as quantidade normalizadas definidas acima, obtém-se o nível inicial das ondas,

$$\mathcal{E}_\kappa^{\sigma B} = \frac{\mathcal{G}}{2} (\varpi_\kappa^B)^2. \quad (\text{A.101})$$

Referências Bibliográficas

- [1] Herman, R. *Fusion the search for endless energy*. Cambridge University press, New York, 1990.
- [2] Oliveira, C. I. *Estudo de processos de geração de correntes em tokamaks por meio de interações onda-partícula*. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Tese de Doutorado, Nov., 2006.
- [3] Simões Jr., F. J. R. *Simulação Computacional de Emissões Eletromagnéticas em Plasmas Espaciais*. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE-Brasil), São José dos Campos, Tese de Doutorado em Geofísica Espacial, (INPE-15344-TDI/1380), Jun., 2008.
- [4] Pôssa, G. C. *Desenvolvimento de um sistema de detecção de instabilidade de plasma para um propulsor a plasma do tipo hall*. Univerdidade de Brasília. Brasília - DF, Dissertação de Mestrado - Instituto de Física, Mar., 2009.
- [5] Forbes, T. G. *A review on the genesis of coronal mass ejections*. Journal of Geophysical Research, v.105, n.A10, p.23153, Out., 2000.
- [6] Baker, D. N. *Introduction to space weather*. In: Scherer, K. et al. (Ed.). Space weather, the physics behind a slogan. Berlin: Springer, ed. Scherer, K. and Fichtner, H. and Heber, B. and Mall, U., 2005.
- [7] Goldman, M. V. *Strong turbulence of plasma waves*. The Physics of Plasmas, v.56, n. 4, p.709-735, Out., 1984.
- [8] Gurnett, D. A.; Hospodarsky, G. B.; Kurth, W. S.; Williams, D. J. and Bolton, S. J. *Fine structure of Langmuir waves produced by a solar electron event*. Journal of Geophysical Research - Space Physics, v.98, n.A4, p.5631-5637, Abr., 1993.
- [9] Lin, R. P. and Levedahl, W. K.; Lotko, W.; Gurnett, Donald A. and Scarf, F. L. *Evidence for nonlinear wave-wave interactions in solar type III radio bursts*. The Astrophysical Journal, v.308, n.2, p.954-965, Set., 1986.

- [10] Moraes, M. A. E. *Simulações Cinéticas para Modelagem de Fenômenos em Plasmas Espaciais*. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE-Brasil), São José dos Campos, Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Geofísica Espacial, INPE (INPE-15357-TDI/1392), Abr., 2004.
- [11] Cerda, R. A. M. *Simulação numérica da interação onda-onda induzida por onda de Langmuir no sistema solar*. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE-Brasil), São José dos Campos, Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Geofísica Espacial (INPE-14441-TDI/1136), Jan. 2006.
- [12] Goldman, M. V.; Reiter, G. F. and Dwight R. N. *Radiation from a strongly turbulent plasma: Application to electron beam-excited solar emission*. The Physics of Plasmas, v.23, n.2, Fev., 1979.
- [13] Lin, R. P. and Potter, D. W.; Gurnett, D. A. and Scarf, F. L. *Energetic electrons and plasma waves associated with a solar type III radio burst*. The Astrophysical Journal, v.251, p.364-373, Dez., 1981.
- [14] Alvarez, H. and Haddock, F. and Lin, R. P. *Evidence for electron of type III radio excitation burst emission*. Solar Physics, v.26, n.2, out., 1972.
- [15] Yoon P. H. *Generalized Weak Turbulence Theory*. Physics of Plasmas, v.7, n.12, p. 4858-4871, Dez., 2000.
- [16] Moraes, M. A. E. *Ondas eletrostáticas geradas por interação de feixe de elétrons-plasma em algumas regiões de plasma espacial: Um tratamento por simulação via partículas*. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE, São José dos Campos, Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Geofísica Espacial, (INPE-Brasil), (INPE-7239-TDI/692), Mar., 1999.
- [17] Simões Jr., F. J. R. *Distribuição de energia entre os modos excitados por ondas indutoras de Langmuir contrapropagantes*. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE-Brasil), São José dos Campos, Dissertação de Mestrado em Geofísica Espacial, (INPE-12318-TDI/991), Mai., 2004.
- [18] Melrose, D. B. *Instabilities in space and laboratory plasmas*. Cambridge University press, 1986.
- [19] Chen, F. F. *Introduction to plasma physics and controlled fusion*. 2. ed. New York:Plenum Press, 1984.

- [20] Bohm D. & Gross E. P. *Theory of plasma oscillations. A. Origin of medium-like behavior*. Physical Review Letters, v.75, p.1851, Jun, 1946.
- [21] Cairns, I. H. *Electrostatic waves generation above and below the plasma frequency by electron beams*. Physics of Fluids B - Plasma Physics, v.1 n.1, Jan., 1989.
- [22] Briggs, R. J. *Electron-stream interaction with plasmas*. Cambridge-The MIT Press, 1964.
- [23] Guedes, J. R. A. *Dinâmica não-linear de ondas de Langmuir e eletromagnéticas em plasmas espaciais*. Instituto Nacional de Físicas Espaciais - INPE, Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Geofísica Espacial (INPE-5982-TDI/577), São José dos Campos, Nov., 1995.
- [24] Akimoto, K. *Eletromagnetic radiation from strong Langmuir turbulence*. The Physics of Fluids, v.31, n.8, Abr., 1988.
- [25] Pavan, J. *Dinâmica não-linear da instabilidade feixe-plasma bidimensional*. Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS, Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Física, Porto Alegre - RS, 2011
- [26] Yoon, P. H. *Weak turbulence theory for reactive instability*. Physics of Plasmas, v.17, p.112317, 2010.
- [27] Melrose, D. B. *Plasma Astrophysics: Nonthermal Processes in Diffuse Magnetized Plasmas*. Gorson and Breach, New York, v.2, Jun., 1980.
- [28] Gurnett, D. A. and Bhattacharjee, A. *Introduction to plasma physics: with space and laboratory applications*. Cambridge University press, 2005.
- [29] Sagdeev, R. Z. and Galeev, A. A. *Nonlinear plasma theory*. Frontiers in Physics. W. A. Benjamin, Inc., 1969.
- [30] Yoon, P. H. *Effects of spontaneous fluctuations on the generalized weak turbulence theory*. Physics of Plasmas, v.12, p.042306, Mar., 2005.
- [31] Li, B.; Robinson, P. A. and Cairns, I. H. *Multiple electron beam propagation and Langmuir wave generation in plasmas*. Physics of Plasmas, v. 9, n. 7, p.2976–2987, Jul., 2002.
- [32] Gaelzer, R.; Yoon, P.; Umeda, T.; Omura, Y. and Matsumoto, H. *Harmonic Langmuir waves. II. Turbulence Spectrum* Physics of Plasmas, v.10, n.2, p.373-381, Fev., 2003.

- [33] Yoon, P. H. and Gaelzer R. *Effects of nonlinear shifts on certain induced scattering processes*. Physics of Plasmas, v.9, n.11, p.4520-4524, Nov., 2002.
- [34] Pavan, J.; Ziebell L. F.; Yoon, P. H. and Gaelzer, R. *Ionospheric ion-acoustic enhancements by turbulent counterstreaming electron beam-plasma interaction*. Journal of Geophysical Research, v. 115, p. A02310, Feb., 2010.
- [35] Ziebell, L. F.; Yoon, P. H.; Pavan, J. and Gaelzer, R. *Nonlinear evolution of beam-plasma instability in inhomogeneous medium* The Astrophysical Journal, v.727, n.1, Jan. 2011.
- [36] Besse, N.; Elskens, Y.; Escande, D. F. and Bertrand, P. *Validity of quasilinear theory: refutations and new numerical confirmation*. Plasma Physics and Controlled Fusion, v.53, n.2, Jan., 2011.
- [37] Yoon, P. H.; Rhee, T. and Ryu, C. M. *Effects of spontaneous thermal fluctuations on nonlinear beam-plasma interaction*. Physics of Plasmas, v. 12, 2005.
- [38] Ziebell, L. F.; Gaelzer, R. and Yoon, P. H. *Nonlinear development of weak beam-plasma instability*. Physics of Plasmas, v. 8, n. 9, p.3982-3995, Set., 2001.
- [39] O'Neil, T. M. and Malmberg, J. H. *Transition of the Dispersion Roots from Beam-Type to Landau-Type Solutions*. The Physics of Fluids, v.11 n.8, p.1754-1760, Ago., 1968.
- [40] Simões Jr, F. J. R.; Alves, M. V. and Gaelzer, R. *One-dimensional electromagnetic simulation of multiple electron beams propagation in space plasma*. Journal of Geophysical Research, v.115, n.A6, p.A06105, Jun., 2010.
- [41] Robinson, P. A. *Relativistic and Nonrelativistic Plasma Dispersion Functions*. Journal of Mathematical Physics, v.30, n.11, p.2484-2487, Nov., 1989.