

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
INSTITUTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA



Dissertação

**Título: Soluções das equações de evolução DGLAP e GLR-MQ
em Cromodinâmica Quântica via transformada de Laplace**

Gilvana Coelho Penedo

Pelotas, 2018

Gilvana Coelho Penedo

**Soluções das equações de evolução DGLAP e GLR-MQ em
Cromodinâmica Quântica via transformada de Laplace**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Werner Krambeck Sauter

Pelotas, 2018

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas
Catalogação na Publicação

P397s Penedo, Gilvana Coelho

Soluções das equações de evolução DGLAP e GLR-MQ em cromodinâmica quântica via transformada de Laplace / Gilvana Coelho Penedo ; Werner Krambeck Sauter, orientador. — Pelotas, 2018.

86 f. : il.

Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Física, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2018.

1. Equações de evolução. 2. QCD. 3. Saturação. I. Sauter, Werner Krambeck, orient. II. Título.

CDD : 530.12

Gilvana Coelho Penedo

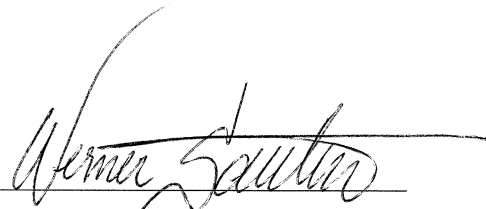
Título: Soluções das equações de evolução DGLAP e GLR-MQ em Cromodinâmica
Quântica via transformada de Laplace ³

Dissertação de Mestrado aprovada, como requisito parcial, para obtenção do grau de Mestre em Física, Programa de Pós-Graduação em Física, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas.

Data da Defesa: 26 de setembro de 2018

Banca examinadora:

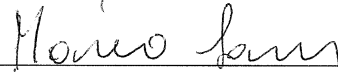
Werner Krambeck Sauter (Orientador)



Doutor em Ciências

Universidade Federal de Pelotas

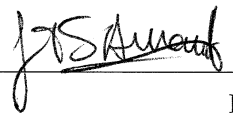
Mário Luiz Lopes da Silva



Doutor em Ciências

Universidade Federal de Pelotas

João Thiago Amaral



Doutor em Ciências

Universidade Federal de Rio Grande

³Trabalho financiado pela Fundação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES



“Agora, meus irmãos, vemos que Deus se lembra de todos os povos, estejam na terra em que estiverem; sim, ele conta o seu povo e suas entranhas de misericórdia cobrem toda a Terra. Ora, esta é minha alegria e minha gratidão; sim, darei graças a meu Deus para sempre”.

ALMA 26:37 (O LIVRO DE MÓRMON)

*A meus pais,
Maria e Gilney.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a meus pais, por sempre acreditarem na importância do estudo, e me darem incentivo a continuar minha caminhada acadêmica, se cheguei até aqui, foi pelo apoio que me deram sempre. Agradeço por seus exemplos e grande amor.

Sou grata ao meu querido orientador, Professor Werner Sauter pelo tempo que trabalhamos juntos desde a graduação. Agradeço por todos os ensinamentos, amizade, por sempre estar disponível e disposto a ajudar, e principalmente por toda a paciência que teve comigo estes anos.

Ao Curso de Pós-Graduação em Física pela oportunidade de estudo e utilização de suas instalações. E aos professores do Departamento de Física, sou grata aqueles que tiveram contribuição para minha formação acadêmica, tanto na graduação como na pós-graduação.

Agradeço aos amigos e colegas de curso, tanto aos que trouxe do tempo da graduação, como aos novos que conheci durante o meu período do mestrado. Agradeço pelos bons momentos que tivemos juntos, e também por aqueles momentos de muita loucura e preocupação ao fazer listas e estudar para as provas. Muito obrigada por essa parceria neste tempo, vocês foram muito importantes para deixar este tempo mais divertido, alegre e leve. Amizades que levarei para sempre.

Obrigada aos meus colegas do GAME, pela convivência, pelos conselhos e ajuda, e aos bons lanches nas reuniões de grupo. Também aos professores do grupo, agradeço. Obrigada ao melhor grupo de pesquisa.

Agradeço aos familiares e amigos que fazem parte de minha vida, e que de uma forma ou outra me incentivam, apoiam e ajudam. Pelo carinho e amizade destes, eu agradeço.

Muito obrigada ao Professor João Thiago, que foi a pessoa com quem comecei meus estudos sobre a Física de Partículas e meu primeiro orientador. Agradeço pelos ensinamentos, incentivo e amizade. Esta jornada começou trabalhando juntos lá em 2012.

Agradeço à Fundação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pelo auxílio financeiro.

A todos que de alguma maneira, tiveram influência para a conclusão deste trabalho, muito obrigada.

RESUMO

PENEDO, Gilvana, **Soluções das equações de evolução DGLAP e GLR-MQ em Cromodinâmica Quântica via transformada de Laplace** 2018, 82p. Dissertação (Mestrado em Física) - Programa de Pós-Graduação em Física, Departamento de Física, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2018.

A estrutura do próton é constituída por um número muito grande de pártons (denominação coletiva de quarks e glúons), que interagem entre si conforme a teoria das interações fortes, a Cromodinâmica Quântica (QCD). A densidade de pártons no próton é descrita por meio de equações de evolução que dependem de variáveis cinemáticas. Neste trabalho de mestrado, as equações de evolução estudadas foram as equações Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi (DGLAP) e a equação Gribov-Levin-Ryskin e Mueller-Qiu (GLR-MQ). Estas equações apresentam solução analítica para pequeno x , sendo que a equação DGLAP prevê um aumento indefinido na densidade de glúons, e para desacelerar esse crescimento é preciso considerar um processo de recombinação dos glúons, o que leva à saturação da densidade destas partículas. Neste trabalho, estudamos alguns métodos de soluções analíticas e numéricas para as equações de evolução partônicas. Primeiramente utilizamos um ansatz como solução das equações de evolução, e obtemos resultados analíticos e numéricos que foram comparados com parametrizações das Funções de Distribuições Partônicas (PDFs). A principal proposta deste trabalho foi obter a distribuição de glúons solucionando as equações de evolução analítica e numericamente através do método da transformada de Laplace. Obtemos resultados analíticos para a DGLAP e GLR-MQ e numéricos apenas para a DGLAP, onde foi observado que ocorreu a saturação da distribuição partônica para os glúons mesmo sem a contribuição do termo não-linear que corresponde a equação GLR-MQ.

Palavras Chave: Equações de evolução, QCD, saturação

ABSTRACT

PENEDO, Gilvana, **Solutions of DGLAP and GLR-MQ evolution equation in Quantum Chromodynamics by Laplace transform** 2018, 82p. Dissertation (Mester Degree in Physics) - Programa de Pós-Graduação em Física, Departamento de Física, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2018.

The structure of the proton consists of a very large number of partons (collective denomination of quarks and gluons), which interact with each other according to the theory of strong interactions, Quantum Chromodynamics (QCD). Parton density in the proton is described by means of evolution equations that depend on kinematic variables. In this work the equations studied were the Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi (DGLAP) equations and the Gribov-Levin-Ryskin and Mueller-Qiu (GLR-MQ) equations. These equations present an analytical solution for small x , and the DGLAP equation predicts an indefinite increase in the density of the gluons and to slow this growth it is necessary to consider a process of recombination of the gluons, which leads to saturation of the density of these particles. In this work we study some methods of analytical and numerical solutions for the particle evolution equations. First we use an ansatz as solution of the evolution equations, and we obtain analytical and numerical results that have been compared with Parton Distributions Functions (PDFs). The main objective of this work was to obtain the distribution of gluons by solving the equations of analytical evolution and numerically using the Laplace transform method. We obtained analytical results for DGLAP and GLR-MQ and numerical only for DGLAP, where it was observed through the Laplace transform the saturation occurred even without the contribution of the nonlinear term that corresponds to the GLR-MQ equation.

Key-words: Evolution equations, QCD, saturation

SUMÁRIO

Pág.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

1	INTRODUÇÃO	21
2	O Modelo Padrão das Partículas Elementares e Cromodinâmica Quântica	23
2.1	O Modelo Padrão das Partículas Elementares	23
2.2	A Cromodinâmica Quântica	25
2.2.1	As regras de Feynman da QCD	25
2.2.2	Propriedades da QCD	28
2.3	Conclusão	29
3	A Estrutura do Próton e as Equações de Evolução	31
3.1	Espalhamento Profundamente Inelástico (DIS)	31
3.1.1	A seção de choque diferencial do DIS e função de estrutura	32
3.2	As Equações Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi (DGLAP)	34
3.3	Parametrizações das Distribuições Partônicas	43
3.4	Efeitos Não - Lineares nas distribuições partônicas	44
3.5	Equação Gribov-Levin-Ryskin e Mueller-Qiu	45
3.6	Conclusão	47
4	Soluções para Equações de Evoluções Partônicas	49
4.1	Solução para Distribuição de Glúons via ansatz	49
4.2	Solução Para as Equações de Evolução via Transformada de Laplace	52
4.3	Conclusão	58
5	Resultados	59
5.1	Resultados para solução via ansatz	59
5.2	Resultados para diferentes valores de λ_g	60
5.3	Resultados para solução da equação DGLAP via Transformada de Laplace	60
5.4	Conclusão	61

6	Conclusões	71
A	TRANSFORMADA DE LAPLACE	73
A.1	DEFINIÇÃO	73
A.2	TRANSFORMADA INVERSA	73
A.3	PROPRIEDADES	74
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	77

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 Esquema do Modelo Padrão das Partículas Elementares.	24
2.2 Evolução da constante de acoplamento em função da escala de momentum testada por diferentes experimentos.	29
3.1 Diagrama para o espalhamento profundamente inelástico (DIS) elétron-nucleon.	31
3.2 Acima, representação gráfica para equação DGLAP que determina a evolução de quarks. Abaixo, representação gráfica para equação DGLAP que determina a evolução de glúons.	37
3.3 Esquema da evolução das distribuições partônicas descrita pela DGLAP com evolução em Q^2	39
3.4 Distribuição de pártons para três diferentes valores de Q^2 que estão indicados nos gráficos. As curvas sólidas são resultados para a parametrização CT14 e as curvas tracejadas para a MMHT12014. Conforme indicado nos gráficos cada cor representa um párton.	44
3.5 A esquerda, diagrama de Feynman para um glúon emitindo dois. A direita, diagrama de Feynman para glúon emitido a partir de um quark.	45
3.6 Diagrama de Feynmann para dois glúons combinando-se em um.	46
3.7 Esquema que representa a escala de saturação e apresenta a evolução partônica em regime linear e não-linear	47
5.1 Acima, o gráfico para resultado da distribuição de glúons em função da virtualidade Q^2 , onde $x = 10^{-4}$, $\lambda_g = 0,5$ e $R = 2 \text{ GeV}^{-1}$. Abaixo, idem com $x = 10^{-4}$, $\lambda_g = 0,5$ e $R = 5,0 \text{ GeV}^{-1}$	63
5.2 Acima, o gráfico para resultado da distribuição de glúons em função da virtualidade Q^2 , onde $x = 10^{-5}$, $\lambda_g = 0,5$ e $R = 2 \text{ GeV}^{-1}$. Abaixo, idem com $x = 10^{-5}$, $\lambda_g = 0,5$ e $R = 5,0 \text{ GeV}^{-1}$	64
5.3 Acima, o gráfico para resultado da distribuição de glúons em função da virtualidade Q^2 , onde $x = 10^{-6}$, $\lambda_g = 0,5$ e $R = 2 \text{ GeV}^{-1}$. Abaixo, idem com $x = 10^{-6}$, $\lambda_g = 0,5$ e $R = 5,0 \text{ GeV}^{-1}$	65
5.4 Gráficos da distribuição de glúons em função de x , com valores para λ_g e Q^2 fixos. Acima, $Q^2 = 20 \text{ GeV}^2$ e abaixo $Q^2 = 100 \text{ GeV}^2$. Nos resultados, as curvas tracejadas são soluções das parametrizações indicadas, da equação de evolução linear DGLAP. As curvas sólidas, são soluções analíticas para a equação de evolução não-linear GLR-MQ.	66

5.5	Gráficos da distribuição de glúons em função de x , com valores para λ_g e Q^2 fixos. Acima, $Q^2 = 200 \text{ GeV}^2$ e abaixo $Q^2 = 350 \text{ GeV}^2$. Nos resultados, as curvas tracejadas são soluções das parametrizações indicadas, da equação de evolução linear DGLAP. As curvas sólidas, são soluções analíticas para a equação de evolução não-linear GLR-MQ.	67
5.6	Gráficos para distribuição de glúons em função de Q^2 , via transformada de laplace (linhas sólidas) comparadas com a parametrização MSTW2008 (linha tracejada). Para as soluções numéricas, foram considerados dois conjuntos de condições iniciais, onde a condição 1, são as condições de MSTW2008, e a condição 2, são as condições consideradas de dipolos. Acima, $x = 10^{-3}$. Abaixo, $x = 10^{-4}$	68
5.7	Gráficos para distribuição de glúons em função de Q^2 , via transformada de laplace (linhas sólidas) comparadas com a parametrização MSTW2008 (linha tracejada). Para as soluções numéricas, foram considerados dois conjuntos de condições iniciais, onde a condição 1, são as condições de MSTW2008, e a condição 2, são as condições consideradas de dipolos. Acima, $x = 10^{-5}$. Abaixo, $x = 10^{-5}$	69

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
2.1 Regras de Feynman para a QCD. Tabela adaptada de [1]	28

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

UFPel	–	Universidade Federal de Pelotas
DGLAP	–	Dokshitzer Gribov Lipatov Altarelli Parisi
GLR-MQ	–	Gribov Levin Ryskin-Mueller Qiu
MPPE	–	Modelo Padrão das Partículas Elementares
QCD	–	Cromodinâmica Quântica
PDF	–	Funções de Distribuições Partônicas
DIS	–	Espalhamento Profundamente Inelástico
QED	–	Eletrodinâmica Quântica
BFKL	–	Balitski, Fadin, Kuraev e Lipatov
SAT	–	Saturação
CTEQ	–	Coordinated theoretical-experimental project on QCD
HERA	–	Hadron-electron collider at DESY
LHC	-	Large hadron collider (at CERN)
MRST	–	Martin Roberts Stirling Thorne
$\overline{\text{MS}}$	–	Modified minimal subtraction

1 INTRODUÇÃO

A Física de Partículas estuda os constituintes elementares da matéria. Para um melhor entendimento destas partículas, foram desenvolvidos estudos que levaram à teoria do Modelo Padrão das Partículas Elementares. De acordo com a teoria do Modelo Padrão, temos que hádrons são partículas constituídas por quarks que interagem por meio de glúons, e estas interações são descritas através da Cromodinâmica Quântica (QCD), que será apresentada no próximo capítulo. Para um melhor estudo sobre o próton, consideramos o Espalhamento Profundamente Inelástico (DIS), cujas propriedades serão discutidas no Capítulo 2. No regime de baixas energias é possível observar o próton constituído de três quarks, chamados quarks de valência; ao considerarmos um regime de altas energias, é observado um aumento considerável no número de pártons (coletivo de quarks e glúons) na estrutura do hádron: os quarks emitem glúons que são os responsáveis pelas interações fortes, os glúons emitem pares quark-antiquark chamados quarks de mar.

Em um regime de altas energias, o próton apresenta uma estrutura complexa com um grande número de quarks e glúons, onde os glúons se mostram dominantes. A evolução destas partículas é determinada por equações de evolução que serão estudadas neste trabalho de mestrado, que teve como objetivo propor soluções para estas equações com o propósito de diminuir o domínio de glúons na estrutura do próton.

A evolução partônica é descrita por meio das equações de evolução Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi (DGLAP) [2], que serão estudadas com mais detalhes no Capítulo 3, descrevem o comportamento da evolução em x que é uma variável que está relacionada com a fração de momentum do párton e Q^2 que é a chamada virtualidade do fóton, das funções de distribuição partônicas que são definidas para o DIS sob a influência da QCD.

As equações DGLAP prevêm o crescimento da seção de choque diferencial diferencial, e isto acarreta em um aumento dominante dos glúons. Algum tipo de efeito deve ser incluído para diminuir, ou até mesmo parar este crescimento indefinido do número de glúons, pois isto viola o limite de Froissart o qual determina que as seções de choque devem crescer como $\ln^2 s$, sendo isto comprovado experimentalmente em medidas do DIS [3]. Devido a este efeito é introduzida a recombinação partônica, proposta por Gribov-Levin-Ryskin e Mueller-Qiu (GLR-MQ) [4, 5] nas equações DGLAP o que nos fornece a saturação partônica, que faz com que diminua a evolução dos glúons no próton, visto que a área ocupada pelos pártons não pode ser maior que a área do próprio hádron. Veremos mais sobre estas contribuições também no Capítulo 3.

As equações de evolução são matematicamente equações integro-diferenciais. As equações

DGLAP podem ser solucionadas, dado uma condição inicial, usando alguma transformação integral ou algum método numérico. Outra forma de solução bastante popular é o conjunto de rotinas QCDNUM [6]. Estas são usadas em conjunto com as assim conhecidas parametrizações das distribuições partônicas, agrupadas em uma interface computacional comum denominada LHAPDF [7]. Estes estudos usam a solução das equações de evolução juntamente com um conjunto definido dos dados experimentais disponíveis para obter um conjunto de valores, obtido por ajuste aos dados, para as Funções de Distribuições Partônicas (PDFs). Foi proposta a solução via transformada de Laplace [8]. Este método foi usado para a solução da DGLAP e da GLR-MQ [9–11] com algumas aproximações empregadas. Os métodos, propostas de solução e os resultados analíticos para as equações de evolução serão apresentadas no Capítulo 4. A partir destas soluções, foram desenvolvidos códigos numéricos para gerar os resultados gráficos, que estão no Capítulo 5. Finalmente, no Capítulo 6, trazemos as conclusões deste trabalho de mestrado, e as perspectivas para possíveis trabalhos futuros.

2 O Modelo Padrão das Partículas Elementares e Cromodinâmica Quântica

Neste capítulo, iremos apresentar um breve resumo sobre o Modelo Padrão das partículas elementares, que é a teoria que descreve as partículas fundamentais que constituem a matéria. Também vamos estudar a teoria das interações fortes, a Cromodinâmica Quântica e suas propriedades.

2.1 O Modelo Padrão das Partículas Elementares

A física de partículas [12] teve início com a descoberta do elétron por Thomson em 1897. Anos mais tarde, Rutherford [13], ao realizar um experimento que leva seu nome, descobriu o núcleo atômico, o qual recebeu o nome de próton. Anos mais tarde foi descoberto o nêutron. Por meio do experimento do efeito fotoelétrico [14], verificou-se a existência de uma partícula associada ao campo eletromagnético, o fóton. Durante um tempo, o elétron, próton, nêutron e o fóton eram considerados as partículas elementares da matéria e sem estrutura interna. Ao realizar colisões em altas energias com os elétrons (partícula sem estrutura interna) por meio do espalhamento profundamente inelástico (DIS), [2] observou-se que prótons possuem partículas que os constituem. Com o passar do tempo mais partículas foram sendo descobertas. O pósitron (anti-partícula do elétron), o múon, o pión e outras, sendo muitas delas consideradas elementares. Muitas teorias foram desenvolvidas, e estas contribuíram para chegar na teoria do Modelo Padrão das Partículas Elementares (MPPE) [13, 15].

O Modelo Padrão é a teoria que apresenta e descreve as partículas fundamentais [15, 16] que constituem a matéria e descreve três dos quatro tipos de força da natureza: a força nuclear fraca, a força nuclear forte e a força eletromagnética. Por meio desta teoria, foram determinados os constituintes do próton e do nêutron, os chamados *quarks*. Há seis tipos, ou sabores de quarks que são: up(u), down(d), charm(c), strange(s), top(t) e bottom(b). Temos que os constituintes de toda a matéria são os *férmions*, que são separados em quarks e léptons, que são partículas de spin fracionário, e os bósons, que apresentam spin inteiro, e que são as partículas mediadoras da interação entre férmions. A interação destas partículas pode ocorrer por meio da troca de um bóson relacionado à força eletromagnética, o fóton; para a força forte o glúon, três bósons à força fraca (W^+ , W^- , Z^0) e para a força gravitacional não há bóson ainda detectado, porém, hipoteticamente este bóson seria o gráviton(G). Por sofrer influência da força forte devido a carga de interação forte (cor), os quarks não são encontrados livres na natureza, estão sempre confinados no interior de outras partículas denominadas *hádrons*. Desta forma, o próton e o nêutron são hádrons, por serem partículas que portam quarks em sua estrutura. Os léptons não sofrerem influência da força forte porque não portam a carga cor, por este motivo são

encontrados livres na natureza.

Outro conceito importante encontrado no Modelo Padrão é o da antimatéria, ou seja, para cada partícula do Modelo há uma antipartícula associada, onde a antipartícula de determinada partícula possui mesmas propriedades da partícula, sendo a única diferença, sua carga elétrica ser oposta. Uma característica dos férmions é o *sabor*, nome dado ao conjunto de números quânticos que caracteriza estas partículas ou seja são propriedades comuns tanto entre léptons quanto em quarks.

Apesar de ser a teoria que até o momento melhor descreve a natureza da matéria, o MPPE possui algumas questões ainda em aberto. Por exemplo, a gravidade não está inclusa no Modelo Padrão, e a partícula que seria o bóson para a força gravitacional, o gráviton, não foi detectado até o momento, conforme mencionado anteriormente. Assim, o Modelo Padrão pode ser sumarizado conforme a Figura 2.1 apresentando os seis sabores dos quarks e dos léptons, os bósons e suas propriedades onde vemos os valores de massa, carga e spin indicados na Figura 2.1.

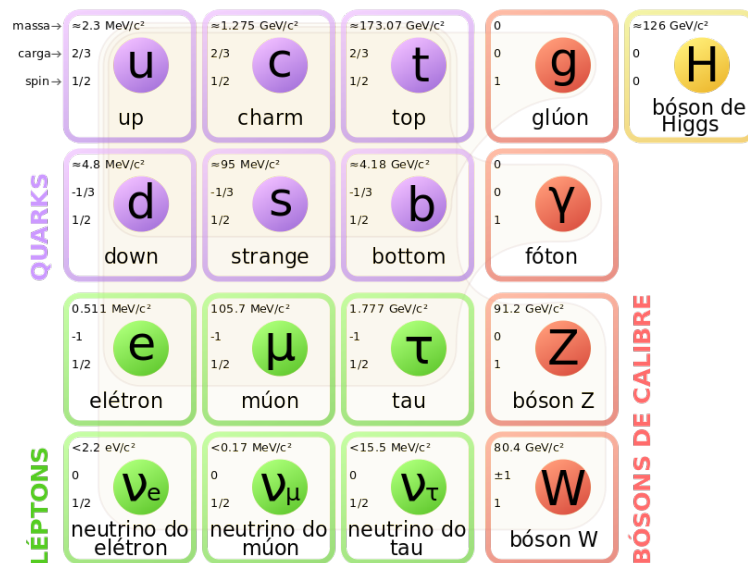


Figura 2.1 - Esquema do Modelo Padrão das Partículas Elementares.

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Modelo_padrao.

Neste trabalho iremos estudar somente as partículas que formam o próton: os quarks e glúons. Os glúons não possuem massa, possuem spin inteiro igual a um. Assim como na interação eletromagnética é associada uma carga que é a carga elétrica, para a interação forte há uma carga associada aos glúons e também aos quarks que é a carga *cor*. Há três

tipos desta carga: vermelho (r), azul (b) e verde (g). O termo cor foi escolhido de forma arbitrária, sem ter relação com o significado de ser uma “cor” no sentido cotidiano. A carga de cor é uma propriedade não apenas dos glúons, mas também dos quarks onde, por exemplo, um quark pode ter seus números de cor $r = 0$, $b = +1$ e $g = 0$, sendo o antiquark correspondente com números $r = 0$, $b = -1$ e $g = 0$ [12]. Devido a esta carga é possível a interação entre quarks por meio dos glúons, e estes também interagem entre si, porque são “bicolores”, portando uma cor e uma anticor [17].

2.2 A Cromodinâmica Quântica

De acordo com o que foi discutido até o momento, os pártons interagem por meio da força forte. A teoria que descreve a interação forte é a *Cromodinâmica Quântica (QCD)* [18,19], do grego *chromos* que significa cor, a propriedade particular dos quarks e glúons. A QCD [20], foi desenvolvida nos anos 70, e é similar a Eletrodinâmica Quântica (QED) [21, 22]. Os fótons, que são as partículas de interação em QED, não interagem entre si pois não possuem carga elétrica. Em contrapartida, em QCD ocorre este tipo de interação, devido ao fato de os glúons possuírem carga de cor.

Uma característica bastante importante em QCD é o fato de que o sabor dos quarks não é alterado quando estes interagem, mas cor deles é alterada quando ocorre a interação. Por exemplo, sendo emitido um glúon verde-antivermelho, isso acarreta em um quark de cor verde alterado para vermelho e isso ocorre também quando glúons interagem apenas entre si. Assim, se um glúon azul-antivermelho emitir um azul-antiverde, o glúon portador das cargas azul-antivermelho muda sua carga de cor para verde-antivermelho [12].

2.2.1 As regras de Feynman da QCD

A partir das equações de Maxwell da eletrodinâmica clássica [23], podemos derivar a lagrangiana da QED,

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi} [i\gamma^\mu\partial_\mu - Qe\gamma^\mu A_\mu - m] \psi, \quad (2.1)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.2)$$

é o tensor de campo, ψ é o campo espinorial com massa m e carga Qe , $\bar{\psi}$ é o spinor de Dirac, γ^μ são as matrizes de Dirac ([21]), A_μ é o quadri-potencial eletromagnético ([23]) e e é a carga elétrica fundamental. A lagrangiana eq. (2.1) é invariante sob o seguinte

conjunto de transformações de calibre (gauge):

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \frac{1}{e} \partial^\mu \theta(x), \quad (2.3)$$

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{-iQ\theta(x)} \psi, \quad (2.4)$$

tais transformações são *locais*, pois o parâmetro de transformação θ depende da posição, e *abeliana* pois o gerador Q do grupo de transformação $U(1)$ é um número e portanto comuta com outro gerador do grupo.

Para passarmos para a QCD [18], vamos considerar um grupo de transformação mais geral, onde os geradores de transformações não comutam, ou seja, são *não abelianas*. Para tanto, começamos considerando um campo fermiônico de massa m de N componentes, $\psi_i(x)$ – o campo de quark – que pertence à representação fundamental N -dimensional do grupo G . A álgebra de Lie do grupo é gerada por n geradores T^a , $a = 1, \dots, n$ com a seguinte relação de comutação,

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c, \quad (2.5)$$

onde f^{abc} são as constantes de estrutura do grupo de Lie. Portando o campo férmionico transforma-se segundo

$$\psi_i \rightarrow \psi'_i = U_{ij} \psi_j, \quad U_{ij} = e^{-iT_{ij}^a \theta^a}, \quad (2.6)$$

onde o parâmetro θ^a pode depender da posição.

No caso de θ^a ser independente de posição, então a lagrangiana livre para os campos férmionicos,

$$\mathcal{L}_F = \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_i$$

é invariante sob a transformação (2.6). Todavia, se θ^a depender da posição então \mathcal{L}_F só é invariante se trocarmos a derivada usual por uma *derivada covariante* definida por:

$$D_\mu = \partial_\mu - igT^a A_\mu^a \leftrightarrow (D_\mu)_{ij} = \delta_{ij} \partial_\mu - ig(T^a)_{ij} A_\mu^a, \quad (2.7)$$

onde g é constante de acoplamento entre o campo fermiônico e o campo de calibre A_μ^a , e $(T^a)_{ij}$ são as componentes da representação fundamental de T_a .

Logo a lagrangiana invariante é dada por

$$\mathcal{L}_F = \bar{\psi}_i \left(i\gamma^\mu (D_\mu)_{ij} - \delta_{ij} m \right) \psi_j = \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi, \quad (2.8)$$

se o campo de calibre A_μ^a tem a seguinte regra de transformação (pela representação adjunta de T^a),

$$T^a A_\mu^a \rightarrow T^a A_\mu'^a = U \left(T^a A_\mu^a - \frac{i}{g} U^{-1} \partial_\mu U \right) U^{-1}, \quad (2.9)$$

ou em componentes,

$$(T^a)_{ij} A_\mu'^a = (U)_{ii'} \left((T^a)_{i'k} A_\mu^a - \frac{i}{g} (U^{-1})_{i'j'} \partial_\mu (U)_{j'k} \right) (U^{-1})_{kj}. \quad (2.10)$$

A lagrangiana (2.8) descreve a interação dos campos ψ e A_μ^a . Para completá-la vamos introduzir um termo cinético nos campos de calibre. Seja

$$[D_\mu, D_\nu] = -ig T^a F_{\mu\nu}^a,$$

onde

$$F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (2.11)$$

é o tensor de campo. Pode-se mostrar que sob transformações infinitesimais a combinação $F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$ é invariante. Por fim, então temos que a lagrangiana que é invariante sob transformações de simetria locais não-abelianas é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi. \quad (2.12)$$

No caso da QCD, o grupo de simetria G é o $SU(3)$ e então a lagrangiana (2.12) torna-se

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}^f (i\gamma^\mu D_\mu - m_f) \psi^f, \quad (2.13)$$

onde a soma é sobre todos os sabores de quarks e $a = 1, \dots, N_c^2 - 1$ com $N_c = 3$.

Da lagrangiana, é possível deduzir as regras de Feynman que representam os processos da QCD. Estes diagramas, são chamados diagramas de Feynman, que para as interações fortes são semelhantes aos diagramas associados às interações em QED [21, 24]. Estes diagramas consistem em um método para representar processos e cálculos perturbativos em QCD, que consiste em escrever cada observável físico como uma série de potências na constante de acoplamento forte α_s , e assim desprezar os termos de maior ordem em α_s . As regras de Feynman são diagramas no espaço-tempo que descrevem interações entre quarks e glúons, onde cada vértice corresponde a termos matemáticos. Na tabela 2.1,


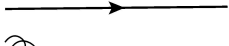
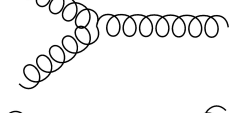
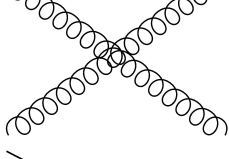
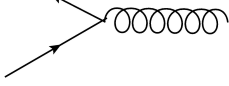
Propagador do glúon		$\frac{\delta^{ab}}{k^2} \left(g_{\mu\nu} - (1 - \alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$
Propagador do quark		$\frac{\delta_{ij}}{m - \not{p}}$
Vértice de 3 glúons		$-igf^{abc}V_{\mu\nu\rho}(k_1, k_2, k_3)$
Vértice de 4 glúons		$-g^2W_{\mu\nu\rho\eta}^{abcd}$
Vértice glúon-quark		$g\gamma_\mu T_{ij}^a$

Tabela 2.1 - Regras de Feynman para a QCD. Tabela adaptada de [1]

são apresentados os vértices fundamentais em QCD, onde temos os diagramas e seus respectivos termos matemáticos associados. A seguir serão apresentadas as propriedades da QCD.

2.2.2 Propriedades da QCD

Para evitar a região de α_s grande, onde não é possível tratar a QCD por métodos perturbativos, é introduzido um parâmetro chamado Λ_{QCD} , que garante um valor pequeno para α_s , sendo este valor pequeno suficiente para aplicar expansões perturbativas. A região desta expansão, é caracterizada por $Q^2 \gg \Lambda_{QCD}^2$, sendo Q^2 uma escala de momentum. A constante de acoplamento decresce com o aumento da energia, o que vemos na Figura 2.2. Este comportamento resulta em uma importante propriedade da QCD, denominada *liberdade assintótica* [21, 25]. Esta propriedade significa que, para processos que envolvem grandes transferências de momentum, a constante de acoplamento α_s é pequena, isto tem como consequência a possibilidade de realizar cálculos por métodos perturbativos. Isto nos leva à QCD perturbativa, abordagem válida apenas em processos em curtas distâncias, ou seja grandes energias.

Outra propriedade que está relacionada com o comportamento da constante de acoplamento forte, é o *confinamento* [21, 25]. Neste caso, a interação ocorre em longas distâncias, ou seja, pequenas energias e constante de acoplamento α_s grande. Assim, os quarks formam partículas denominadas hádrons.

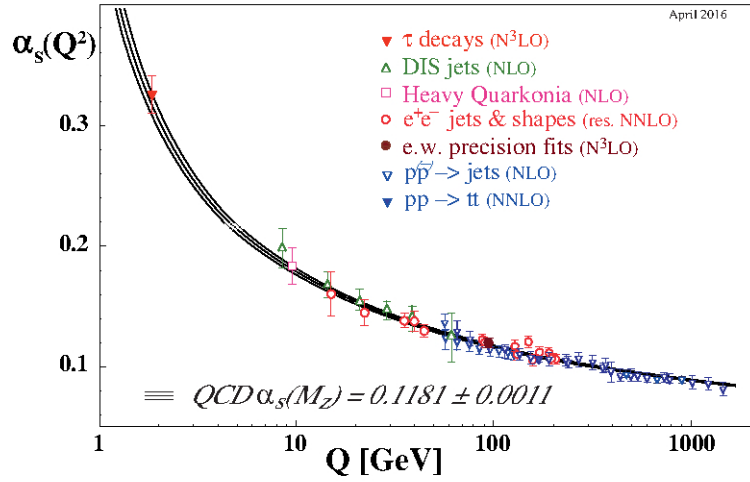


Figura 2.2 - Evolução da constante de acoplamento em função da escala de momentum testada por diferentes experimentos.

Fonte: <http://pdg.lbl.gov/2018/figures>.

2.3 Conclusão

Neste capítulo foi apresentada uma breve introdução ao Modelo Padrão das Partículas Elementares e à Cromodinâmica Quântica, que é a teoria das interações fortes. No capítulo a seguir, a partir das discussões apresentados no presente capítulo, vamos apresentar estudos relacionados com a estrutura do próton em um regime de altas energias.

3 A Estrutura do Próton e as Equações de Evolução

Veremos neste capítulo que, em um regime de baixas energias, observamos o próton constituído de três quarks. Ao aumentarmos a energia, verificamos que estes quarks interagem trocando glúons, e estes, por sua vez, emitem pares quark-antiquark e assim, mais glúons são emitidos. Deste modo, a altas energias a estrutura do próton é mais complexa, e isso pode ser verificado através de uma sondagem realizada pelo fóton ao considerarmos um espalhamento do próton com um partícula de prova sem estrutura (partícula pontual), o elétron. Este espalhamento é chamado Espalhamento Profundamente Inelástico (DIS). Após isso, iremos apresentar as equações que determinam a evolução partônica, as equações DGLAP e GLR-MQ.

3.1 Espalhamento Profundamente Inelástico (DIS)

O DIS consiste no espalhamento de um lépton, neutro ou carregado, por um hádron, geralmente um nucleon, próton ou nêutron, havendo uma grande transferência de momentum pelo fóton. O processo é mostrado na Figura (3.1), juntamente com os correspondentes momentos das partículas envolvidas: l para o elétron no estado inicial com quadrimomentum k , P para o próton e q para o fóton transferido, l' para o elétron no estado final com quadrimomentum k' e P_x o quadrimomentum final do estado hadrônico X [2, 19].

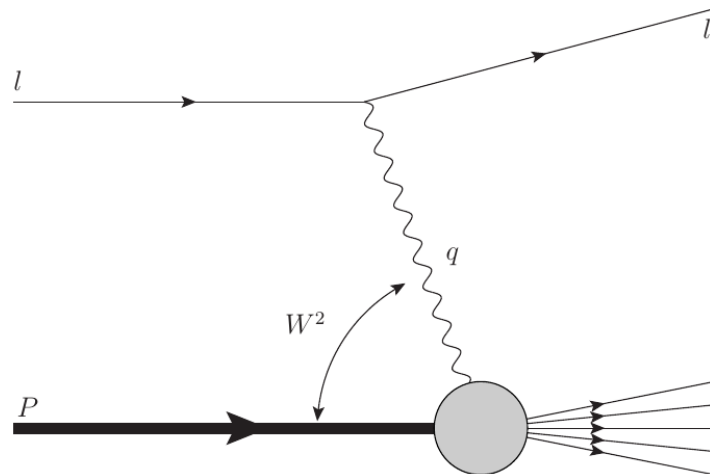


Figura 3.1 - Diagrama para o espalhamento profundamente inelástico (DIS) elétron-nucleon.

Fonte: [1]

Este processo pode ser descrito da seguinte forma:

$$l(k) + N(P) \rightarrow l'(k') + X(P_x). \quad (3.1)$$

É possível representar este processo por meio de três variáveis cinemáticas, escolhidas entre as seguintes [21]:

- quadrado do momentum transferido pelo fóton no processo do DIS, esta variável, também é chamada de virtualidade Q^2 do fóton.

$$q^2 \equiv -Q^2 = (l - l')^2, \quad (3.2)$$

- quadrado da energia do centro de massa do sistema fóton-próton;

$$W^2 = (P + q)^2, \quad (3.3)$$

- inelasticidade y , que é a fração de momentum transferido entre o lépton e o sistema hadrônico;

$$y = \frac{P \cdot q}{P \cdot l} = \frac{W^2 + Q^2 - m_N^2}{(l + P)^2 - m_N^2}, \quad (3.4)$$

- variável ν , quantidade de energia transferida pelo fóton;

$$\nu = \frac{P \cdot q}{m_N} = \frac{W^2 + Q^2 - m_N^2}{2m_N}, \quad (3.5)$$

- variável de Bjorken x , que é a fração de energia do hadron, portada pelo parton;

$$x = \frac{Q^2}{2P \cdot q} = \frac{Q^2}{2m_N \nu} = \frac{Q^2}{Q^2 + W^2 - m_N^2}. \quad (3.6)$$

Em todas estas expressões, m_N é a massa do núcleon. Considerando que tanto $m_N \nu$, são muito maiores que m_N^2 com x fixo e finito, podemos desconsiderar a massa dos nucleons [26].

3.1.1 A seção de choque diferencial do DIS e função de estrutura

A seção de choque é calculada como contração de um tensor leptônico, $L_{\mu\nu}$ (que carrega a informação do vértice superior da Figura 3.1) com um tensor hadrônico, $W^{\mu\nu}$ (referente ao vértice inferior da figura). O primeiro vértice pode ser calculado usando a QED, enquanto que o segundo, pela impossibilidade de obtenção das funções de onda dos quarks den-

tro do núcleon, não pode ser calculado, somente parametrizado. Temos então a seguinte expressão [27],

$$\frac{d^2\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{\alpha_{\text{elm}}^2}{2m_N Q^4} \frac{E'}{E} L_{\mu\nu} W^{\mu\nu}, \quad (3.7)$$

onde Ω é a direção do lépton espalhado, E e E' são, respectivamente, as energias dos léptons incidente e espalhado e α_{elm} é a constante de acoplamento eletromagnética.

A seção de choque para o processo pode ser reescrita em termos de duas funções de estrutura adimensionais, F_1 e F_2 , a princípio indeterminadas, via uma mudança de variáveis [2],

$$\frac{d^2\sigma}{dx dy} = \frac{4\pi s \alpha_{\text{elm}}^2}{Q^4} \left\{ xy^2 F_1(x, Q^2) + \left(1 - y - \frac{xy m_N^2}{s} \right) F_2(x, Q^2) \right\}. \quad (3.8)$$

No limite $\nu, Q^2 \rightarrow \infty$ com x fixo, chamado limite de Bjorken [28], as funções de estrutura *escalares*, ou seja somente dependem de x (de forma aproximada) o que evidencia que o próton é composto pelos pártons [18].

Em termos do processo de absorção de um fóton virtual com determinada polarização, temos que as seções de choque podem ser escritas como

$$\sigma_L^{\gamma^* p}(x, Q^2) = \frac{4\pi^2 \alpha_{\text{elm}}}{Q^2} [F_2(x, Q^2) - 2xF_1(x, Q^2)] = \frac{4\pi^2 \alpha_{\text{elm}}}{Q^2} F_L(x, Q^2) \quad (3.9)$$

$$\sigma_T^{\gamma^* p}(x, Q^2) = \frac{4\pi^2 \alpha_{\text{elm}}}{Q^2} 2xF_1(x, Q^2) = \frac{4\pi^2 \alpha_{\text{elm}}}{Q^2} F_T(x, Q^2). \quad (3.10)$$

Ou seja,

$$\sigma_{T,L}^{\gamma^* p}(x, Q^2) = \frac{4\pi^2 \alpha_{\text{elm}}}{Q^2} F_{T,L}(x, Q^2), \quad (3.11)$$

onde $F_{T,L}(x, Q^2)$ são funções de estrutura transversal e longitudinal.

Para os sistemas fóton-próton e fóton-párton, as seções de choque são relacionadas conforme a equação a seguir:

$$\frac{\sigma_T(x, Q^2)}{\sigma_0} = \sum_i \int_0^1 dz \int_0^1 dy f_i(y) \delta(x - zy) \frac{\hat{\sigma}_T(z, Q^2)}{\hat{\sigma}_0} \quad (3.12)$$

$$\frac{\sigma_T(x, Q^2)}{\sigma_0} = \sum_i \int_0^1 \frac{dy}{y} f_i(y) \frac{\hat{\sigma}_T}{(x/y, Q^2) \hat{\sigma}_0}, \quad (3.13)$$

onde $f_i(y)$ representa as funções de estrutura que fornece a probabilidade de haver um

párton i carregando uma fração y do próton e, σ_T é a seção de choque para a absorção de um fóton transverso de momentum q por pártion e $\hat{\sigma}_0 = 8\pi\alpha_{em}/(p_i + q)^2$ [27]. É possível escrever a seção de choque diferencial no momentum transverso $p_T = \sin\theta$ do quark emitido como,

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dp_T^2} = e_q^2 \hat{\sigma}_0 \frac{1}{p_T^2} \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{4}{3} \left(\frac{1+z^2}{1-z} \right), \quad (3.14)$$

Fazendo a integral desta seção de choque em p_T^2 temos

$$\hat{\sigma} \simeq e_q^2 \hat{\sigma}_0 \left[\left(\frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{4}{3} \left(\frac{1+z^2}{1-z} \right) \ln \frac{Q^2}{\mu^2} \right) \right], \quad (3.15)$$

sendo μ^2 introduzido como um corte no limite inferior para remover a divergência quando $p_T^2 \rightarrow 0$. Isto irá permitir determinar emissão de pártons, o que será tratado na próxima seção deste capítulo.

3.2 As Equações Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi (DGLAP)

A evolução de pártons é descrita por um conjunto de equações integro-diferenciais, as equações DGLAP. Nesta seção iremos definir estas equações.

Utilizando o modelo de pártons [27, 29], onde as partículas que constituem os nucleons são consideradas livres, as funções de estrutura estão relacionadas com a função de densidade de quarks (e antiquarks) dentro do nucleon. O DIS analisa experimentalmente a distribuição dos quarks no próton. O fóton sonda o número de quarks e antiquarks que possuem fração de momentum x . Assim $F_2(x)$, pode ser escrita em termos de f_q ,

$$F_2(x) = 2xF_1(x) = \sum_q e_q^2 x [f_q(x) + f_{\bar{q}}(x)], \quad (3.16)$$

onde e_q são as cargas elétricas dos quarks. A relação acima, foi obtida por dados experimentais, válida no limite de Bjorken e é conhecida como *relação de Callan-Gross* [21, 30]. Neste caso, as funções de estrutura são determinadas a partir das seções de choque diferenciais transversais. Assume-se que o espalhamento profundamente inelástico elétron-próton é o espalhamento elástico de elétrons a partir de partículas de spin meio, que estão no interior do próton, os quarks. Assim, podemos calcular a função de estrutura como a soma de contribuições de diferentes diagramas de Feynman, em termos de $q(x, \mu^2)$, temos para F_2 [2, 26],

$$F_2(x, Q^2) = \sum_{q, \bar{q}} x e_q^2 \int_x^1 \frac{dy}{y} q(y, \mu^2) C \left(\frac{x}{y}, Q^2, \mu^2 \right), \quad (3.17)$$

onde μ^2 é uma escala de fatorização, q são as funções de distribuição renormalizadas de

pártons, dadas por

$$q(x, \mu^2) = f_q^0(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} f_q^0(y) \left[P\left(\frac{x}{y}\right) \ln\left(\frac{\mu^2}{\kappa_0^2}\right) \right] + h'\left(\frac{x}{y}\right) + \dots, \quad (3.18)$$

e C é a função coeficiente que carrega a informação da interação entre os pártons e é dependente da escala de fatorização cuja expressão é dada por [26];

$$C(z, Q^2, \mu^2) = \delta(1-z) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left[P(z) \ln(Q^2/\mu^2) \tilde{h}(z) \right] + \dots \quad (3.19)$$

Nas expressões acima, $P(x/y)$ são os funções de separação (“*splitting*”), significando a probabilidade de um párton emitir outro párton com uma fração de momento y . Estas funções serão definidas mais adiante.

Assim, a função de estrutura do próton é escrita como

$$\frac{F_2(x, Q^2)}{x} = \sum_q e_q^2 \int_x^1 \frac{dy}{y} f_q(x, \mu^2) \left(\delta\left(1 - \frac{x}{y}\right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left[P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) \right] \right). \quad (3.20)$$

onde P_{qq} é a função de separação, que representa a probabilidade de um quark emitir outro quark. Reescrevendo novamente,

$$\frac{F_2(x, Q^2)}{x} = \sum_q e_q^2 \left[f_q(x) + \Delta f_q(x, \mu^2) \right], \quad (3.21)$$

onde

$$\Delta f_q(x, \mu^2) = \frac{\alpha_s}{2\pi} \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) \int_x^1 \frac{dy}{y} f_q(y) P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \quad (3.22)$$

Como F_2 é uma quantidade física mensurável, ela não depende de μ^2 e a densidade partônica depende de Q^2 , temos que;

$$\frac{\partial F_2(x, Q^2)}{\partial \ln \mu^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial q(x, \mu^2)}{\partial \ln \mu^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} P\left(\frac{x}{y}\right) q(x, \mu^2), \quad (3.23)$$

Até o momento, consideramos no DIS apenas as contribuições com um quark no estado inicial. Porém, a densidade de quarks também depende do processo em que consideramos glúons no estado inicial. Deste modo, temos que;

$$\frac{F_2(x, Q^2)}{x} = \sum_q e_q^2 \int_x^1 \frac{dy}{y} g(y) \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qg} \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right), \quad (3.24)$$

onde $g(y)$, representa a densidade de glúons no próton.

De acordo com a QCD, ao aumentarmos o valor da virtualidade Q^2 , observa-se que os quarks estão envoltos por outros pártons (glúons e quarks de mar). Também aumenta a probabilidade de se encontrar um quark com uma fração de momentum x do hádron (próton). Isto porque os glúons interagem entre si, visto que um quark que possui uma fração de momentum x venha a emitir glúon com uma fração de momentum y . Se não ocorresse a interação entre os glúons, teríamos que a densidade de probabilidade de se observar um quark portar uma fração $y \lesssim 1$ de x seria igual a zero. A densidade de probabilidade de observarmos um quark portando y fração de momentum é de $P_{qq}^{(0)} = \delta(y - 1)$ [31,32]. A partir destas definições, podemos então determinar as equações DGLAP [32–34].

A evolução de quarks em Q^2 é determinada pela Equação (3.22), e podemos escrever em termos de uma equação que considera mudança na densidade de quarks, ou seja, considerando um quark obtido da emissão de um glúon ou de um par quark-antiquark, a partir de um glúon com fração de momentum y . A evolução de quarks no próton é determinada por

$$\frac{\partial q_f(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 q_f(y, Q^2) P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \frac{dy}{y}. \quad (3.25)$$

Ao adicionarmos contribuições do processo $\gamma q \rightarrow qg$ no estado inicial, que está representado na Equação (3.24), onde consideramos neste processo que um fóton e um quark no estado inicial interagindo resultam em um quark e um glúon, assim podemos escrever a evolução completa da densidade de quarks incluindo os dois tipos de vértices que alteram a densidade de quarks no próton,

$$\frac{\partial q_f(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 [q_f(y, Q^2) P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) + g(y, Q^2) P_{qg}\left(\frac{x}{y}\right)] \frac{dy}{y}. \quad (3.26)$$

Quando consideramos a emissão de glúons, seja por quarks ou de outros glúons, temos que a evolução da distribuição dos glúons é dada por

$$\frac{\partial g(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \left[\sum_f q_f(y, Q^2) P_{gq}\left(\frac{x}{y}\right) + g(y, Q^2) P_{gg}\left(\frac{x}{y}\right) \right] \frac{dy}{y}. \quad (3.27)$$

As equações (3.25), (3.26) e (3.27), são as equações de evolução DGLAP obtidas por [32–34]. Este conjunto de equações descrevem a evolução das distribuição de quarks e glúons. Podemos ainda escrever estas na seguinte forma,

$$\frac{\partial}{\partial \ln Q^2} \begin{pmatrix} \Sigma(x, Q^2) \\ G(x, Q^2) \end{pmatrix} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 dz \begin{pmatrix} P_{qq}(z) & 2n_f P_{qg}(z) \\ P_{gq}(z) & P_{gg}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma(x/z, Q^2) \\ G(x/z, Q^2) \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial \ln Q^2} (q_f(x, Q^2)) = q_f(y, Q^2) \frac{q_f(x, Q^2)}{P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right)} + g(y, Q^2) \frac{q_f(x, Q^2)}{P_{qg}\left(\frac{x}{y}\right)}$$

$$\frac{\partial}{\partial \ln Q^2} (g(x, Q^2)) = \sum_f q_f(y, Q^2) \frac{g(x, Q^2)}{P_{gq}\left(\frac{x}{y}\right)} + g(y, Q^2) \frac{g(x, Q^2)}{P_{gg}\left(\frac{x}{y}\right)}$$

Figura 3.2 - Acima, representação gráfica para equação DGLAP que determina a evolução de quarks. Abaixo, representação gráfica para equação DGLAP que determina a evolução de glúons.

onde $\Sigma(x, Q^2)$ é a soma da contribuição dos quarks, e $G(x, Q^2)$ é a contribuição dos glúons;

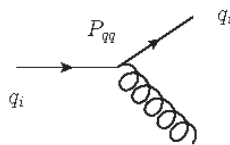
$$\Sigma(x, Q^2) = \sum_{i=1}^{n_f} [xq_i(x, Q^2) + x\bar{q}_i(x, Q^2)], \quad (3.29)$$

$$G(x, Q^2) = xg(x, Q^2). \quad (3.30)$$

As equações DGLAP, ainda podem ser representadas graficamente como apresentadas na Figura 3.2, na qual temos que a propagação de quarks é igual a soma dos dois diagramas indicados e o vértice de cada diagrama é representado as funções de desdobraimento, as funções $P(x/y)$ ou $P(z)$, já que $z = x/y$.

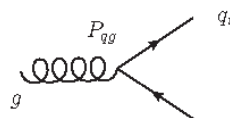
As funções de separação (“*splitting*”) tem as seguintes expressões:

- Quark emitindo quark:



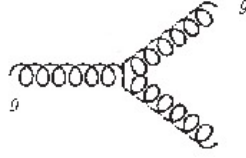
$$P_{qq}(z) = \frac{4}{3} \frac{(1+z^2)_+}{1-z} + 2\delta(1-z);$$

- Quark emitindo glúon:



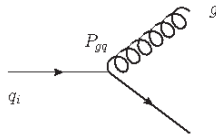
$$P_{qg}(z) = \frac{1}{2}[z^2 + (1-z)^2];$$

- Glúon emitindo glúon:



$$P_{gg}(z) = 6\left[\frac{1-z}{z} + \frac{z}{(1-z)_+} + [z(1-z)]\right] + \left(\frac{11}{2} - \frac{N_f}{3}\right)\delta(1-z);$$

- Glúon emitindo quark:



$$P_{gq}(z) = \frac{4}{3} \frac{1 + (1-z)^2}{z}.$$

As funções $P(z)$ estão associadas à probabilidade de um párton com quadrivmomentum yp mudar para um outro párton com quadrivmomentum xp , logo, com fração $z = x/y$ do quadrivmomentum inicial, pela emissão de um glúon ou um par quark anti-quark [24]. Existem expressões para as funções P na teoria de perturbação em ordens maiores que não serão estudadas neste trabalho [2].

As expressões para as funções de desdobramento apresentadas são para ordem mais baixa. Há expressões em ordem maior em teoria de perturbação, que não vamos abordar neste trabalho. Note que é utilizada a prescrição “+” na definição de P_{gg} para evitar divergências na integral,

$$\int_0^1 dx \frac{f(x)}{(1-x)_+} = \int_0^1 dx \frac{f(x) - f(1)}{1-x}.$$

Podemos representar a evolução das DGLAP em termos das variáveis x e Q^2 conforme na Figura 3.3. Os valores iniciais para as funções de distribuição na evolução da DGLAP são definidas em uma escala inicial Q_0^2 para valores relevantes de x . Pela figura vemos que as equações evoluem as funções de distribuição em Q^2 de algumas condições iniciais em Q_0^2 para seus valores em algum outro Q^2 , como indica as setas na Figura 3.3.

Assim, as equações DGLAP descrevem o comportamento da evolução das funções de distribuição de pártons sob a influência da QCD. Estas equações somam contribuições do tipo $\ln(Q^2/\mu^2)$ e são equações de evolução pois, dada uma configuração inicial das funções densidade, podemos obter uma configuração em outro valor de μ^2 . Portanto, o número

Deep inelastic scattering

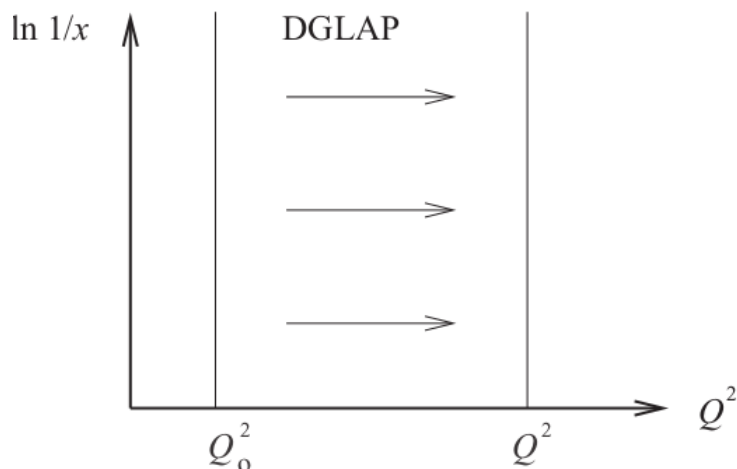


Figura 3.3 - Esquema da evolução das distribuições partônicas descrita pela DGLAP com evolução em Q^2

Fonte: [25]

de pártons dentro de um nucleon varia com a energia deste e da resolução com que se prova esta quantidade. A partir de uma condição inicial, determinada experimentalmente ou por primeiros princípios, é possível determinar a densidade para outro valor de energia ou de resolução.

Contudo, para pequeno x com grande valor de Q^2 fixo, as contribuições do tipo $\ln(1/x)$ são importantes. Estas contribuições são descritas por uma equação de evolução diferente, a *BFKL* [35, 36]. A questão de como levar em conta as diferentes contribuições para a função de estrutura por diferentes ressonâncias de logaritmos pode ser encontrada em [26]. Neste caso, as funções de distribuições partônicas a pequeno x se comportam como $x^{-\lambda_g}$, onde o parâmetro λ_g vem da teoria de Regge [37].

Logo, temos as equações que nos permitem determinar a evolução dos pártons para uma dada condição inicial das funções de densidade. O número de pártons dentro do nucleon varia com a energia e a resolução com que se prova esta quantidade. As Equações DGLAP possuem solução analítica para pequeno x . Para obter esta solução partimos de uma análise das funções P . Verifica-se que as funções associadas ao setor de glúons $P_{gq}(z)$ e $P_{gg}(z)$ são singulares para $z \rightarrow 0$ [38]. Isto nos leva a concluir que o comportamento da distribuição de pártons em pequeno x é determinado pela dinâmica de glúons. Nesta região temos que o termo singular de desdobramento é

$$P_{gg}^{z \rightarrow 0} = \frac{2N_c}{z}, \quad (3.31)$$

onde $z = x/x'$. Podemos escrever a evolução da DGLAP do setor de glúons para pequeno x como:

$$Q^2 \frac{\partial g(x, Q^2)}{\partial Q^2} = \int_x^1 \frac{dx'}{x'} \frac{\alpha_s N_c}{\pi} \frac{x'}{x} g(x', Q^2), \quad (3.32)$$

$$x \frac{\partial g(x, Q^2)}{\partial Q^2} = \int_x^1 \frac{dx'}{x'} \frac{1}{Q^2} \frac{\alpha_s N_c}{\pi} x' g(x', Q^2). \quad (3.33)$$

Ao integrar no momentum ao quadrado, de Q_0^2 até Q^2 , onde Q_0^2 introduz um corte para baixo momentum transverso [39] para separar a contribuição não perturbativa, temos que

$$xg(x, Q^2) = \int_x^1 \frac{dx'}{x'} \int_{Q_0^2}^{Q^2} \frac{dk^2}{k^2} \frac{\alpha_s N_c}{\pi} x' g(x', k^2). \quad (3.34)$$

Sendo χ o logaritmo do inverso da fração de momentum, $\chi = \ln(1/x')$, de modo que $x' = e^{-\chi}$ temos

$$xg(x, Q^2) = \int_0^\chi d\chi' \int_{Q_0^2}^{Q^2} \frac{dk^2}{k^2} \frac{\alpha_s N_c}{\pi} x' g(x', k^2), \quad (3.35)$$

definindo $\Gamma = \ln(Q^2/Q_0^2)$ e $k^2 = Q_0^2 e^\Gamma$, ficamos com

$$xg(x, Q^2) = \frac{\alpha_s N_c}{\pi} \int_0^\chi d\chi' \int_0^\Gamma d\Gamma' x' g(x', k^2). \quad (3.36)$$

A solução de (3.36) é obtida facilmente ao consideramos a constante de acoplamento α_s fixa. Inserindo a transformada de Mellin de $xg(x, Q^2) \equiv G(\chi, \Gamma)$, definida por

$$G(w, \Gamma) = \int_0^\infty d\chi e^{-w\chi} G(\chi, \Gamma), \quad (3.37)$$

e considerando a inversa

$$G(\chi, \Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dw e^{w\chi} G(w, \Gamma), \quad (3.38)$$

é possível escrever (3.36) como:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dw e^{w\chi} G(w, \Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\chi d\chi' \int_0^\Gamma d\Gamma' \frac{\alpha_s N_c}{\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} dw e^{w\chi'} G(w, \Gamma') \quad (3.39)$$

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} dw e^{w\chi} G(w, \Gamma) = \frac{\alpha_s N_c}{\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} dw \int_0^\chi d\chi' G(w, \Gamma') \int_0^\chi d\chi' e^{w\chi} \quad (3.40)$$

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} dw e^{w\chi} G(w, \Gamma) = \frac{\alpha_s N_c}{w\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} dw e^{w\chi'} \int_0^\chi d\chi' G(w, \Gamma'), \quad (3.41)$$

sendo

$$G(w, \Gamma) = \frac{\alpha_s N_c}{w\pi} \int_0^\Gamma d\Gamma' G(w, \Gamma'), \quad (3.42)$$

que é possível ser expressa como uma equação diferencial

$$\frac{dG(w, \Gamma)}{d\Gamma'} = \frac{\alpha_s N_c}{w\pi} G(w, \Gamma'). \quad (3.43)$$

Com solução dada por;

$$G(w, \Gamma) = G(w, \Gamma_0) e^{\frac{\alpha_s N_c \Gamma}{w\pi}}. \quad (3.44)$$

Substituindo na Equação (3.38) obtemos,

$$G(\chi, \Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dw e^{w\chi} G(w, \Gamma_0) e^{\frac{\alpha_s N_c \Gamma}{w\pi}}. \quad (3.45)$$

Sendo a condição inicial não singular, em pequeno x (grande χ) e grande Γ , usamos o método do ponto de sela para calcular a integral (3.45). O expoente da Equação (3.45) pode ser escrito como,

$$u = w\chi + \frac{\alpha_s N_c}{\pi w} \Gamma,$$

e o ponto de sela é determinado a partir da condição de mínimo,

$$\frac{\partial u}{\partial w} = 0, \quad (3.46)$$

portanto o ponto de sela w_s é:

$$w_s = \sqrt{\frac{\alpha_s N_c \Gamma}{\pi \chi}}, \quad (3.47)$$

onde

$$f(w_s) = 2\sqrt{\frac{\alpha_s N_c \Gamma \chi}{\pi}}, \quad (3.48)$$

$$\left| \frac{d^2 f(w)}{dw^2} \right|_{w_s}^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\chi^{3/4}} \left(\frac{\alpha_s N_c \Gamma}{\pi} \right)^{1/4}, \quad (3.49)$$

o fator $(2\pi i)^{-1}$ de (3.45) é cancelado com o fator $(2\pi i)$ dos resíduos [40]. Logo, temos

$$G(\chi, \Gamma) = G(w_0, \Gamma_0) \frac{1}{\chi^{3/4}} \left(\frac{\alpha_s N_c \Gamma}{\pi} \right)^{1/4} e^{2\sqrt{\frac{\alpha_s N_c \Gamma \chi}{\pi}}}. \quad (3.50)$$

Agora considerando que a condição $G(\chi, \Gamma_0)$ possua uma singularidade do tipo $G(\chi, \Gamma_0) = e^{w_0 \chi}$, usando (3.36):

$$G(w, \Gamma_0) = \int_0^\infty d\chi e^{-w\chi} e^{w_0 \chi} = \frac{1}{w - w_0}, \quad (3.51)$$

de modo que

$$G(\chi, \Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dw e^{w\chi} \frac{1}{w - w_0} e^{\left(\frac{\alpha_s N_c \Gamma}{\pi w} \right)}, \quad (3.52)$$

temos que o comportamento assintótico resultado de uma competição das duas contribuições [39]: o pólo $w = w_0$ leva a

$$G(\chi, \Gamma) \approx e^{\left(w_0 \chi + \frac{\alpha_s N_c \Gamma}{\pi w_0} \right)}, \quad (3.53)$$

o ponto de sela implica que

$$G(\chi, \Gamma) \approx e^{\sqrt{\frac{\alpha_s N_c \Gamma \chi}{\pi}}}. \quad (3.54)$$

Logo, na região $w_0 \chi \gg \sqrt{\alpha_s N_c \Gamma \chi / \pi}$ as condições iniciais determinam a solução e o comportamento assintótico, mas para grandes virtualidades ($\alpha_s \Gamma \gg \chi$), o ponto de sela determina o comportamento assintótico de $xg(x, Q^2)$. Assim, o comportamento assintótico dos glúons é da forma,

$$xg(x, Q^2) \approx e^{2\sqrt{\frac{\alpha_s N_c \Gamma \chi}{\pi}}} = \exp \left(\sqrt{\frac{\alpha_s N_c}{\pi} \ln \left(\frac{Q^2}{Q_0^2} \right) \ln \left(\frac{1}{x} \right)} \right). \quad (3.55)$$

A DGLAP para pequeno x , ressona termos do tipo $[\alpha_s \ln(Q^2/Q_0^2) \ln(1/x)]^n$, e é caracterizada pelo crescimento assintótico da distribuição de glúons. Neste caso temos a aproximação de duplo logaritmo dominante (double leading log approximation - DLLA), onde ficamos apenas com a potência de mais alta ordem em ambos logaritmos [27],

$$DLLA : \Sigma_n \alpha_s^n \ln^n Q^n \ln(1/x)]^n \quad (3.56)$$

O comportamento da densidade glúons a pequeno x é um problema desafiador na QCD conforme observamos na Figura 3.4, no qual vemos um considerável aumento de glúons com o aumento da energia ao compararmos com o aumento dos quarks. Para seguir esta discussão precisamos conhecer as distribuições partônicas.

3.3 Parametrizações das Distribuições Partônicas

A evolução das distribuições partônicas em Q^2 é determinada através de dados experimentais, usualmente por análises globais de dados do DIS ou de outros processos. Para fazer a análise global [41], são utilizados, como dito anteriormente, dados experimentais de diversos processos (exemplo em [42, 43]), junto com as equações de evolução. Com isso, se obtém um conjunto de distribuições partônicas universal, que melhor se ajuste aos dados existentes [44]. Assim, estas distribuições podem ser aplicadas para a predição dos observáveis físicos de interesse. Para esta análise é desenvolvido um programa que resolva numericamente as equações integro-diferenciais acopladas (equação de evolução linear DGLAP). Após isso, se aplica um conjunto de dados experimentais que melhor associe as distribuições partônicas. Em seguida, é escolhido o esquema de fatorização, DIS ou \overline{MS} [45] e um conjunto consistente de escalas de fatorização para todos os processos. Depois disto, é especificada uma condição inicial, os parâmetros são vinculados e os dados ajustados. Neste processo, o maior número possível de observáveis é incluído. Baseados nesta análise global, diferentes grupos propõe distintas parametrizações para as funções de distribuições partônicas.

As funções de distribuição partônicas (PDFs) são parametrizadas na dependência de x para algum valor de Q_0^2 possível para aplicarmos a QCD perturbativa, e utilizar as equações DGLAP para estabelecer a evolução [46]. Assim, as densidades partônicas são determinadas para todo x e Q^2 em uma dada região [47]. Devido a gama de possibilidades de modos de solução, para as equações de evolução, conjuntos de dados experimentais e diferentes ajustes, existem disponíveis várias diferentes parametrizações.

Na Figura 3.4, temos gráficos da distribuição de pártons em função de x , onde são comparadas distribuições de glúons com os quarks up, down e charme para duas parametrizações distintas, que incluem dados de alvo fixo para dados de função de estrutura. É observado que conforme o aumento da virtualidade Q^2 , os glúons são dominantes em comparação dos quarks. Fizemos comparações entre as distribuições dos quark up, quark down, quark charme e glúons, verificamos assim que a densidade de glúons cresce mais rapidamente que os quarks para pequenos valores de x . As curvas sólidas mostram as distribuições partônicas para a parametrização CT14 [48], e as curvas tracejadas mostram as distribuições partônicas para a parametrização MHT12014 [49]. As parametrizações diferem

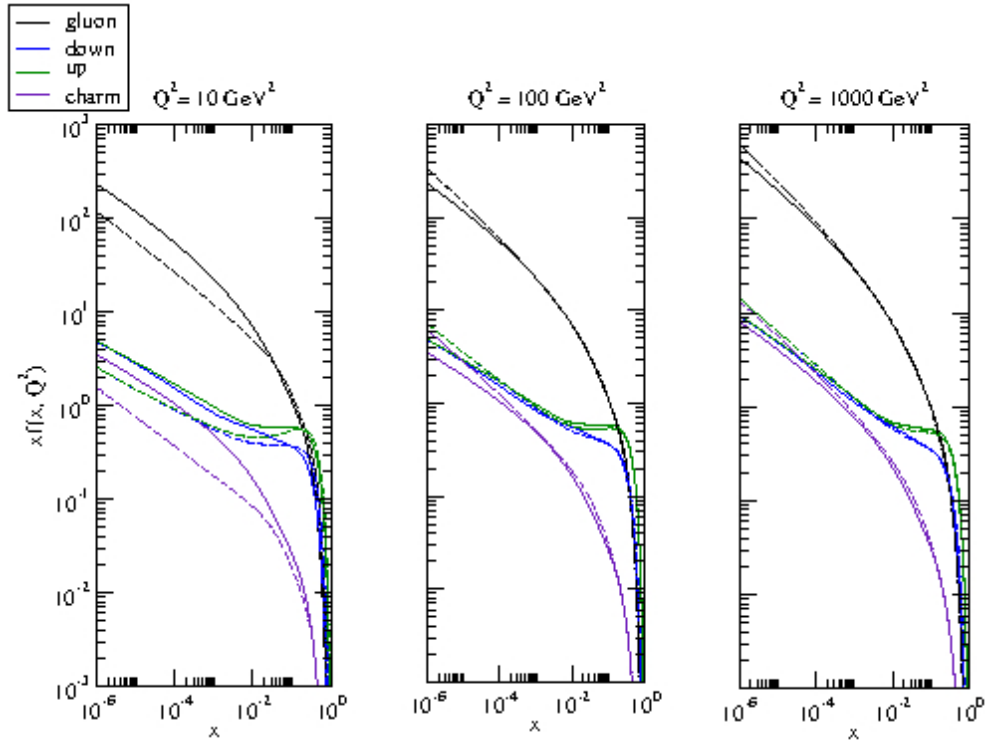


Figura 3.4 - Distribuição de pártons para três diferentes valores de Q^2 que estão ondicados nos gráficos. As curvas sólidas são resultados para a parametrização CT14 e as curvas tracejadas para a MMHT12014. Conforme indicado nos gráficos cada cor representa um párton.

entre si por utilizarem diferentes métodos e parâmetros para obter as PDFs. Assim é possível observarmos na Figura 3.4, que apresenta a distribuição partônica por meio da DGLAP onde vemos que a distribuição de glúons cresce de forma indefinida e mais rapidamente para menores valores de x e maiores energias Q^2 . Este tipo de comportamento viola o limite da unitariedade da seção de choque, assim para controlar este comportamento, novos efeitos devem ser considerados, os quais serão apresentados na próxima seção deste trabalho.

3.4 Efeitos Não - Lineares nas distribuições partônicas

O crescimento da seção de choque predita pela DGLAP é do tipo potência com a energia (ver Equação (3.55)). A função de estrutura F_2 tem um forte crescimento na região de pequeno x e também é previsto tal crescimento no número de glúons. Este comportamento e sua descrição teórica fazem com que a área total ocupada pelos glúons torne-se igual, ou até mesmo maior que a área do próton, o que levaria à violação da unitariedade da seção de choque. Isto está relacionado [50, 51] com a violação do chamado limite de Froissard-Martin [25] o qual diz que a seção de choque total na QCD não pode crescer

mais rapidamente que o logaritmo ao quadrado da energia, ou seja,

$$\sigma_{\text{tot}} \lesssim \ln^2 s.$$

A predição do comportamento das PDFs para altas energias é incompatível com este limite. Fisicamente, não se espera que as PDFs, e portanto as seções de choque hadrônicas, cresçam indefinidamente. Espera-se portanto, que efeitos não lineares se tornem importantes no regime de altas energias.

3.5 Equação Gribov-Levin-Ryskin e Mueller-Qiu

Nas equações DGLAP apenas são considerados processos de emissão e isto implica no rápido crescimento da densidade de pártons. Isto ocorre ao considerarmos um glúon emitindo outros dois glúons conforme ilustrado no diagrama a esquerda da Figura 3.5, outro processo considerado pelas DGLAP é o que está representado no diagrama a direita da Figura 3.5, onde vemos que um glúon é emitido a partir de um quark no estado inicial.

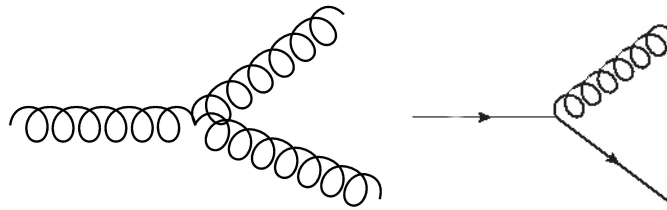


Figura 3.5 - A esquerda, diagrama de Feynman para um glúon emitindo dois. A direita, diagrama de Feynman para glúon emitido a partir de um quark.

Devido a estes processos apresentados anteriormente nos diagramas da Figura 3.5 é que ocorre o rápido aumento na distribuição de glúons que está representado no diagrama da Figura 3.6, para desacelerar este aumento devem ser considerados processos de recombinação de glúons, proporcionais à probabilidade de encontrar dois pártons incidentes. Por exemplo, a aniquilação em pequeno x pode balancear a expansão das distribuições partônicas. Podemos ilustrar como processos de aniquilação irão modificar as equações de evolução. Uma modificação das densidades partônicas é obtida pelo desdobramento do parton incidente em dois emergentes. Dois glúons se combinam em um único, pois com o aumento de glúons e em alguma energia, a probabilidade de recombinação começa a existir que é o que chamamos de saturação, diminuindo assim o aumento do número de glúons no próton.

Quando este processo de recombinação é considerado, é possível escrever uma modificação

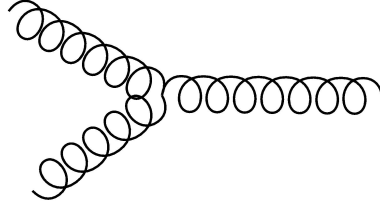


Figura 3.6 - Diagrama de Feynmann para dois glúons combinando-se em um.

na Equação da distribuição de glúons. Temos então;

$$\frac{\partial^2 xg(x, Q^2)}{\partial \ln(1/x) \partial \ln(Q^2)} = \frac{\alpha_s N_c}{\pi} xg(x, Q^2) - \frac{\alpha_s^2 \gamma}{Q^2 R^2} [xg(x, Q^2)]^2, \quad (3.57)$$

o termo, $\gamma = \frac{81}{16}$, para $N_c = 3$, foi determinado por Mueller e Qiu [5]. Esta proposta foi feita primeiramente por Gribov, Levin e Ryskin [52] e logo após tiveram contribuições de Mueller e Qiu [5]. Assim, esta proposta trouxe modificações nas Equações de evolução, introduzindo um termo não-linear [5, 52] na Equação de evolução dos glúons, constituindo-se na chamada *equação GLR-MQ*:

$$\frac{\partial G(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} = \frac{\partial G_{\text{DGLAP}}(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} - \frac{\alpha_s^2 \gamma}{R^2 Q^2} \int_x^1 \frac{dy}{y} G^2(y, Q^2), \quad (3.58)$$

onde G_{DGLAP} é a parte proveniente da Equação DGLAP [2] e $xg(x, Q^2) = G(x, Q^2)$. O sinal em frente ao termo não-linear é negativo porque ele é inserido com a proposta de diminuir a distribuição de glúons e R é um parâmetro livre e é identificado como o raio do próton. O parâmetro R é associado com a distribuição espacial dos glúons e pode ser menor que o raio do próton. Assim a distribuição de glúons é dependente deste parâmetro. O aumento na densidade de glúons ocorre uma ou mais ordens de grandeza maior do que o número de quarks. O termo não-linear na equação resulta em um menor crescimento da distribuição de glúons para pequeno x . Esta distribuição é independente da energia quando esta tem valores muito grandes. Logo é prevista a saturação de glúons em regime assintótico para pequeno x . É possível determinar para altas energias o regime assintótico da equação GLR-MQ. Isto ocorre quando:

$$xg(x, Q^2)|_{\text{SAT}}^{\text{GLR-MQ}} = \frac{16}{27\pi\alpha_s} Q^2 R^2. \quad (3.59)$$

A partir da equação GLR-MQ, é possível estimar que a saturação irá ocorrer, no momento em que os termos não-linear e linear forem idênticos. Isto será possível quando $Q^2 \equiv Q_s^2$

[31, 39], em que

$$Q_s^2 = \frac{4\pi\alpha_s}{3C_F R^2} xg(x, Q^2). \quad (3.60)$$

é a chamada escala de saturação. O regime linear é caracterizado por $Q^2 > Q_s^2$, e o regime não-linear ocorre quando $Q^2 < Q_s^2$. Isto é representado esquematicamente na Figura 3.7, onde a curva divide a região cinemática em duas partes: região de QCD perturbativa com evolução linear para as densidades partônicas, descritas pelas equações DGLAP e BFKL; e a região de domínio de saturação, em que a densidade de pártons é grande, entretanto o acoplamento é pequeno ($\alpha_s(Q^2) \ll 1$). Na figura também é possível identificar o comportamento da densidade partônica descrita pelas equações DGLAP e GLR-MQ, onde a DGLAP evolui em Q^2 e aumenta o número de pártons, e a equação GLR-MQ se encontra na curva que limita o regime linear do não-linear, ou seja a equação prediz a ocorrência da saturação.

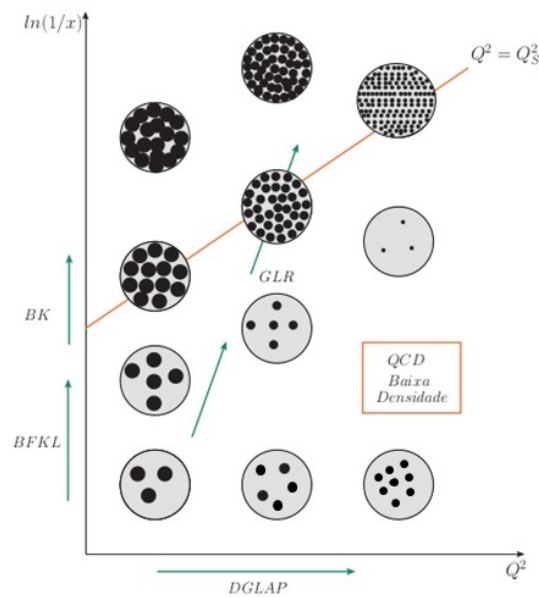


Figura 3.7 - Esquema que representa a escala de saturação e apresenta a evolução partônica em regime linear e não-linear

Fonte: adaptada de [31]

3.6 Conclusão

Estudamos neste capítulo, as propriedades do próton e sua estrutura de acordo com a QCD, e vimos que o DIS é o processo que descreve suas características. As equações DGLAP determinam a evolução da densidade de pártons, sendo que, para pequenos va-

lores de x , o comportamento das distribuições partônicas é determinado pela dinâmica gluônica, e que para desacelerar o aumento indefinido de glúons, devemos considerar a recombinação destes. Para isto, é introduzido um termo não-linear na equação para a distribuição de glúons, a equação GLR-MQ que propõe que ocorra a saturação. No próximo capítulo, apresentamos soluções para estas equações.

4 Soluções para Equações de Evoluções Partônicas

No capítulo anterior apresentamos as equações lineares e não-lineares que fornecem a evolução das distribuições partônicas. No presente capítulo vamos apresentar resultados obtidos neste trabalho de mestrado para soluções destas equações.

As equações de evolução são matematicamente equações integro-diferenciais. As equações DGLAP podem ser solucionadas, dada uma condição inicial, usando alguma transformação integral ou algum método numérico. Em [53] encontra-se uma comparação entre alguns métodos numéricos de solução da equação DGLAP. Entretanto, existem dificuldades na inversão destas transformadas, bem como em pressupostos na forma funcional da solução na região cinemática de interesse.

Outra forma de solução bastante popular é o conjunto de rotinas QCDNUM [6], que é um programa que resolve numericamente as equações DGLAP em x e Q^2 . Estas são usadas em conjunto com as conhecidas parametrizações das distribuições partônicas, agrupadas em uma interface computacional comum denominada LHAPDF [7], para calcular a distribuição de glúons. Estes estudos usam a solução das equações de evolução juntamente com um conjunto definido dos dados experimentais disponíveis para obter um conjunto de valores, obtido por ajuste aos dados para as PDFs.

4.1 Solução para Distribuição de Glúons via ansatz

Como dito anteriormente, as equações que determinam a evolução da distribuição dos glúons podem ser solucionadas, por alguma transformação matemática ou ainda por método numérico. Como proposta de solução para a equação que determina a distribuição de glúons $G(x, Q^2) = xg(x, Q^2)$ foi sugerido um ansatz para a solução da equação DGLAP.

Este ansatz é dado por $G(x, Q^2) = H(Q^2)x^{-\lambda_g}z^{\lambda_g}$ [11, 54, 55], onde $x^{-\lambda_g}$ é obtido através das equações BFKL [36, 56], e pela teoria de Regge, $\lambda_g \approx 0,5$ [26].

A grandes energias, a contribuição dos quarks é pequena e pode ser desprezada. Assim, a equação DGLAP fica da seguinte forma, já colocando o termo de desdobramento e

calculando as integrais,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{3\alpha_s(Q^2)} \frac{\partial G(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} &= \left(\frac{11}{12} - \frac{N_f}{11} + \ln(1-x) \right) G_D(x, Q^2) \\ &+ \int_x^1 dz \left[\frac{zG_D(x/z, Q^2) - G_D(x, Q^2)}{1-z} \right. \\ &\left. + \left(z(1-z) + \frac{1-z}{z} \right) G_D(x/z, Q^2) \right] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} &= \frac{\alpha_s(Q^2)}{4\pi} \left\{ G(x, Q_0^2) \left[\frac{1}{3}(33 - 2N_f) + 12 \ln(1-x) \right] \right\} \quad (4.1) \\ &+ 12x \int_x^1 \frac{dz}{z^2} G(z, Q^2) \left[\frac{z}{x} - 2 + \frac{x}{z} - \left(\frac{x}{z} \right)^2 \right]. \\ &+ 12x \int_x^1 \frac{dz}{z^2} [G(z, Q^2) - G(x, Q^2)] \frac{z}{z-x} \end{aligned}$$

onde a constante de acoplamento em ordem de um laço é

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln(Q^2/\Lambda^2)}, \quad (4.2)$$

$$\beta_0 = \frac{11}{3}N_c - \frac{4}{3}N_f. \quad (4.3)$$

Substituindo o ansatz escrevemos uma equação para H_D , onde o índice D significa que estamos solucionando a equação DGLAP,

$$\begin{aligned} x^{-\lambda_g} \frac{dH_D(Q^2)}{d \ln Q^2} &= \frac{3\alpha_s(Q^2)}{\pi} \left(\frac{11}{12} - \frac{N_f}{18} + \ln(1-x) \right) H_D(Q^2) x^{-\lambda_g} \\ &+ \int_x^1 dz \left(\frac{z z^{\lambda_g} H_D(Q^2) x^{-\lambda_g} - H_D(Q^2) x^{-\lambda_g}}{1-z} \right) \\ &+ \int_x^1 dz \left(z(1-z) + \frac{1-z}{z} \right) z^{-\lambda_g} H_D(Q^2) x^{-\lambda_g} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^{-\lambda_g} \frac{dH_D(Q^2)}{d \ln Q^2} &= \frac{3}{\pi} \frac{4\pi}{\beta_0 \ln Q^2/\Lambda^2} \left[\left(\frac{11}{12} \frac{N_f}{18} + \ln(1-x) \right) H_D(Q^2) x^{-\lambda_g} \right] \quad (4.4) \\ &\times \int_x^1 dz \left[\frac{z^{1+\lambda_g} - 1}{1-z} + \left(z(1-z) + \frac{(1-z)}{z} \right) z^{\lambda_g} \right]. \end{aligned}$$

Fazendo simplificações chegamos em:

$$\frac{dH_D(Q^2)}{d\ln(Q^2)} = \gamma_1(x) \frac{H_D(Q^2)}{\ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)}, \quad (4.5)$$

com

$$H_D(Q^2) = H_0 \left(\ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)^{\gamma_1(x)}, \quad (4.6)$$

dada a condição inicial $H_0 = H(Q_0^2)$, com

$$\gamma_1(x) = \frac{12}{\beta_0} \left[\left(\frac{11}{12} - \frac{N_f}{18} + \ln(1-x) \right) + \int_x^1 \frac{z^{\lambda+1} - 1}{1-z} + \left(z(1-z) + \frac{1-z}{z} \right) z^\lambda dz \right]. \quad (4.7)$$

Considerando a Equação 4.6 e a condição inicial dada temos que,

$$H_0 = H_D(Q_0^2) \left(\ln \frac{Q_0^2}{\Lambda^2}\right)^{-\gamma_1(x)}, \quad (4.8)$$

assim obtemos a seguinte expressão,

$$H_D(Q^2) = H_D(Q_0^2) \left[\frac{\ln(Q^2/\Lambda^2)}{\ln(Q_0^2/\Lambda^2)} \right]^{\gamma_1(x)}. \quad (4.9)$$

Escrevendo a expressão final para a distribuição de glúons,

$$G_D(x, Q^2) = G(x, Q_0^2) \left[\frac{\ln(Q^2/\Lambda^2)}{\ln(Q_0^2/\Lambda^2)} \right]^{\gamma_1(x)}. \quad (4.10)$$

Portanto, a Equação 4.10 é a solução da equação DGLAP para a distribuição de glúons via ansatz.

Considerando a equação GLR-MQ para efeitos não-lineares, e substituindo o mesmo ansatz na equação que utilizamos para solucionar a DGLAP, temos,

$$\frac{dH(Q^2)}{d\ln(Q^2)} = \gamma_1(x) \frac{H(Q^2)}{\ln(Q^2/\Lambda^2)} - \eta \frac{1}{R^2 Q^2} \frac{16\pi^2}{\beta_0^2 \ln^2(Q^2/\Lambda^2)} x^{-\lambda_g} H^2(Q^2) \int_x^1 dz z^{2\lambda_g-1}, \quad (4.11)$$

fazemos a seguinte mudança de variáveis, $t = \ln(Q^2/\Lambda^2)$ e com isto obtemos,

$$\frac{dH(t)}{dt} = \gamma_1(x) \frac{H(t)}{t} - \eta \frac{1}{R^2 \Lambda^2 e^{2t}} \frac{16\pi^2}{\beta_0^2 t^2} x^{-\lambda_g} H^2(t) \int_x^1 dz z^{2\lambda_g-1}, \quad (4.12)$$

reescrevemos como,

$$\frac{dH(t)}{dt} = \gamma_1(x) \frac{H(t)}{t} - \gamma_2(x) \frac{1}{e^{2t}} H^2(t). \quad (4.13)$$

onde

$$\gamma_2(x) = \eta \frac{1}{R^2 \Lambda^2} \frac{16\pi^2}{\beta_0^2} x^{-\lambda} \int_x^1 dz z^{2\lambda-1}, \quad (4.14)$$

A equação acima é uma equação diferencial de primeira ordem de Bernoulli [57] sendo $P(t) \equiv H(t)/t$ e $Q(t) \equiv e^{-t}/t^2$, com P e Q contínuas, exceto em $t = 0$. Assim temos que solução é dada por

$$H(t) = \frac{t^{\gamma_1}}{H_0 - \gamma_2 \Gamma(\gamma_1 - 1, t)}, \quad (4.15)$$

onde a função gama incompleta superior é dada por

$$\Gamma(a, t) = \int_t^\infty dz z^{a-1} e^{-z}. \quad (4.16)$$

Resolvendo a equação diferencial e aplicando as propriedades para função gama,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\gamma_1 t^{\gamma_1-1}}{H_0 - \gamma_2 \Gamma(\gamma_1 - 1, t)} + t^{\gamma_1} (-1) (H_0 - \gamma_2 \Gamma(\gamma_1 - 1, t))^{-2} (-\gamma_2) \frac{d\Gamma(\gamma_1 - 1, t)}{dt}, \quad (4.17)$$

mas,

$$\frac{d\Gamma(a, t)}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_t^\infty dz z^{a-1} e^{-z} = -t^{a-1} e^{-t}. \quad (4.18)$$

Aplicando a condição inicial: $Q^2 = Q_0^2$ e $t = t_0$:

$$H(t_0) = \frac{t_0^{\gamma_1}}{H_0 - \gamma_2 \Gamma(\gamma_1 - 1, t_0)}, \quad (4.19)$$

assim,

$$H_0 = \frac{t_0^{\gamma_1}}{H(t_0)} + \gamma_2 \Gamma(\gamma_1 - 1, t_0). \quad (4.20)$$

Portanto,

$$H(t) = \frac{H(t_0) t^{\gamma_1(x)}}{t_0^{\gamma_1(x)} + \gamma_2(x) H(t_0) [\Gamma(\gamma_1(x) - 1, t) - \Gamma(\gamma_1(x) - 1, t_0)]}, \quad (4.21)$$

Assim, chegamos que a distribuição de glúons pode ser dada por:

$$G(x, Q^2) = x^{-\lambda_g} H(\ln(\frac{Q^2}{\Lambda^2})). \quad (4.22)$$

4.2 Solução Para as Equações de Evolução via Transformada de Laplace

Nesta seção, encontramos as soluções para as equações DGLAP e GLR-MQ via transformada de Laplace, devido a este método ser considerado intuitivamente mais claro e mais eficaz numericamente [58, 59]. Foram utilizadas as transformadas necessárias para obter

resultados mais precisos.

Começamos novamente com a equação DGLAP,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} &= \frac{\alpha_s}{4\pi} \left(G(x, Q_0^2) \left(\frac{1}{3}(33 - 2N_f) + 12 \ln(1 - x) \right) \right) \\
&+ 12x \int_x^1 \frac{dz}{z^2} G(z, Q^2) \left[\frac{z}{x} - 2 + \frac{x}{z} - \left(\frac{x}{z} \right)^2 \right] \\
&+ 12x \int_x^1 \frac{dz}{z^2} (G(z, Q^2) - (G(x, Q^2))) \frac{z}{z - x}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Considerando as seguintes mudanças de variáveis,

$$\begin{aligned}
v &\equiv \ln \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = e^{-v} \Rightarrow dx = -e^{-v} dv \\
w &\equiv \ln \frac{1}{z} \Leftrightarrow z = e^{-w} \Rightarrow dz = -e^{-w} dw \\
z = x &\rightarrow w = \ln \frac{1}{x} = v \\
G(x, Q^2) &\rightarrow g(v, Q^2),
\end{aligned}$$

encontramos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi}{\alpha_s(Q^2)} \frac{\partial g(v, Q^2)}{\partial \ln Q^2} &= \frac{33 - 2N_f}{3} g(v, Q^2) + 12 \ln(1 - e^{-v}) g(v, Q^2) \\
&+ 12 \int_0^v dw (g(w, Q^2) - g(v, Q^2)) \frac{1}{e^{v-w} - 1} + 12 \ln(1 - e^{-v}) g(v, Q^2) \\
&+ 12 \int_0^v dw g(w, Q^2) [1 - 2e^{-(v-w)} + e^{-2(v-w)} - e^{-3(v-w)}].
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Vamos fazer algumas manipulações no segundo e terceiro termo do lado direito da equação anterior,

$$I = h(x) \ln(1 - e^{-x}) + \int_0^x dy [h(y) - h(x)] \frac{1}{e^{x-y} - 1}. \tag{4.25}$$

Fazemos a seguinte mudança de variáveis, $z \equiv e^{x-y}$; $y = x - \ln z$. Assim temos que, $dy = -dz/z$ onde, $y = 0 \rightarrow z = e^x$ e $y = x - \epsilon \rightarrow z = e^\epsilon$. Assim, resolvemos a integral por partes e encontramos,

$$I = \int_0^x dy \ln(1 - e^{-(x-y)}) \frac{dh(y)}{dy}, \tag{4.26}$$

e assim reescrevermos a Equação (4.24) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{\alpha_s(Q^2)} \frac{\partial g(v, Q^2)}{\partial \ln Q^2} &= \frac{33 - 2N_f}{3} g(v, Q^2) + 12 \int_0^v dw \ln(1 - e^{-(v-w)}) \frac{\partial g(w, Q^2)}{\partial w} \\ &+ 12 \int_0^v dw g(w, Q^2) [1 - 2e^{-(v-w)} + e^{-2(v-w)} - e^{-3(v-w)}] \end{aligned} \quad (4.27)$$

Agora aplicamos a transformada de Laplace (ver apêndice A) [60] na equação acima.

$$\tilde{g}(s, Q^2) = \mathcal{L}[G(v, Q^2); s] = \int_0^\infty dv e^{-sv} G(v, Q^2). \quad (4.28)$$

Através desta transformada e pelas propriedades da derivada e o teorema da convolução [61] encontramos;

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{\alpha_s(Q^2)} \frac{\partial \tilde{g}(s, Q^2)}{\partial \ln(Q^2)} &= \frac{33 - 2N_f}{3} \tilde{g}(s, Q^2) + 12 \mathcal{L}[\ln(1 - e^{-v}); s] \mathcal{L} \left[\frac{\partial g(v, Q^2)}{\partial v}; s \right] \\ &+ 12 \tilde{g}(s, Q^2) \mathcal{L}[1 - 2e^{-v} + e^{-2v} - e^{-3v}; s] \end{aligned} \quad (4.29)$$

Ao aplicarmos a definição da transformada de Laplace e pela propriedade da transformada da derivada, temos que a equação anterior pode ser reescrita da seguinte forma;

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{\alpha_s(Q^2)} \frac{\partial \tilde{g}(s, Q^2)}{\partial \ln Q^2} &= \frac{33 - 2N_f}{3} \\ &+ 12 \left[\frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} - \psi(s+1) - \gamma_E \right] \tilde{g}(s, Q^2). \end{aligned} \quad (4.30)$$

A partir das propriedades da derivada e o teorema da convolução [57, 61], obtemos a seguinte expressão;

$$\frac{\partial \tilde{g}(s, Q^2)}{\partial \ln Q^2} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{4\pi} \Phi(s) \tilde{g}(s, Q^2). \quad (4.31)$$

onde $\Phi(s)$ é definido por;

$$\Phi(s) \equiv \frac{33 - 2N_f}{3} + 12 \left[\frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} - \psi(s+1) - \gamma_E \right]. \quad (4.32)$$

Aplicamos a mesma mudança de variáveis da DGLAP utilizada na seção anterior,

$$t \equiv \frac{\ln(Q^2)}{\Lambda_{QCD}^2} \Leftrightarrow \ln(Q^2) = \Lambda_{QCD}^2 t. \quad (4.33)$$

Em ordem dominante temos que $\alpha_s(t) = \frac{4\pi}{\beta_0 t}$, e portanto, $\frac{dt}{d \ln(Q^2)} = 1$. Se $\tilde{g}(s, Q^2) \rightarrow g(s, t)$,

então chegamos a seguinte equação diferencial

$$\frac{\partial g(s,t)}{\partial t} = \Phi(s)g(s,t). \quad (4.34)$$

A solução é dada por,

$$\frac{dg(s,t)}{g(s,t)} = \Phi(s)dt, \quad (4.35)$$

que resolvendo chegamos em,

$$g(s,t) = ke^{\Phi(s)t}. \quad (4.36)$$

Consideramos a seguinte condição inicial para $Q_0^2 \rightarrow t_0 : g(s,t_0) \equiv g_0(s)$, ao aplicarmos esta condição, solucionamos a equação, chegando em;

$$g(s,t) = g_0(s) \exp[\Phi(s)(t - t_0)]. \quad (4.37)$$

Onde a Equação (4.37), é o resultado que fornece a distribuição de glúons via transformada de Laplace com solução para a DGLAP.

Para voltarmos a função original usamos

$$\tilde{g}(s, Q^2) = \tilde{g}(s, Q_0^2) \left[\frac{\frac{\ln Q^2}{\Lambda^2}}{\frac{\ln Q_0^2}{\Lambda^2}} \right]^{\Phi(s)/\beta_0}$$

e aplicamos a transformada de Laplace inversa [61],

$$\mathcal{L}^{-1}[\tilde{g}(s, Q^2); v] = \mathcal{L}^{-1} \left[\tilde{g}(s, Q_0^2) \left\{ \frac{\frac{\ln Q^2}{\Lambda^2}}{\frac{\ln Q_0^2}{\Lambda^2}} \right\}^{\Phi(s)/\beta_0} ; v \right] = g(v, Q^2). \quad (4.38)$$

A equação analítica acima é uma forma de escrever a distribuição de glúons, aplicando a transformada inversa. A seguir, apresentaremos a solução para a equação GLR-MQ. Agora vamos usar o mesmo método para a solução da equação GLR-MQ. Começando com a equação,

$$\frac{\partial G(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} = \frac{\partial G_D(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} - \frac{\alpha_s^2 \gamma}{R^2 Q^2} \int_x^1 \frac{dy}{y} G^2(y, Q^2). \quad (4.39)$$

Fazendo a mesma transformada de variáveis $x = e^{-v}$, o termo não-linear, fica;

$$\int_x^1 \frac{dy}{y} G^2(y, Q^2) \rightarrow \int_0^v dw g^2(w, Q^2). \quad (4.40)$$

Após fazer esta troca de variáveis, obtemos;

$$\frac{\partial g(v, Q^2)}{\partial \ln(Q^2)} = \frac{\partial g_D(v, Q^2)}{\partial \ln(Q^2)} - \frac{\alpha_s^2 \gamma}{R^2 Q^2} \int_0^v dw g^2(w, Q^2). \quad (4.41)$$

Tomando a Transformada de Laplace, obtemos

$$\frac{\partial \tilde{g}(v, Q^2)}{\partial \ln(Q^2)} = \frac{\partial \tilde{g}_D(v, Q^2)}{\partial \ln(Q^2)} - \frac{\alpha_s^2(Q^2) \gamma}{R^2 Q^2} \mathcal{L} \left[\int_0^v dw g^2(w, Q^2); s \right]. \quad (4.42)$$

No limite da saturação em pequeno x vamos considerar a mesma aproximação empregada por [10, 62]

$$\mathcal{L} \left[\int_0^v dw g^2(w, Q^2); s \right] \sim \frac{1}{s} \tilde{g}^2(s, Q^2). \quad (4.43)$$

Logo, temos que;

$$\frac{\partial \tilde{g}(s, Q^2)}{\partial \ln(Q^2)} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{4\pi} \Phi(s) \tilde{g}(s, Q^2) - \frac{\alpha_s^2(Q^2) \gamma}{R^2 Q^2} \frac{1}{s} \tilde{g}^2(s, Q^2). \quad (4.44)$$

Assim obtemos,

$$\begin{aligned} \tilde{g}(s, Q^2) &= \frac{\tilde{g}(s, Q_0^2) [\ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}]^{-\Phi(s)/\beta_0}}{(\ln(Q_0^2/\Lambda^2))^{\Phi(s)/\beta_0} + \tilde{g}(s, Q_0^2) \Omega(s)} \\ &\times \frac{1}{\left[\gamma \left(\frac{\Phi(s)}{\beta_0} - 1, \ln(Q^2/\Lambda^2) \right) - \gamma \left(\frac{\Phi(s)}{\beta_0} - 1, \ln(Q_0^2/\Lambda^2) \right) \right]}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Fazendo a mudança de variáveis;

$$t \equiv \ln \left(\frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}^2} \right); \quad (4.46)$$

Considerando (4.2) e (4.3) temos;

$$\frac{\partial g(s, t)}{\partial t} = \frac{1}{\beta_0 t} \Phi(s) g(s, t) - \Omega(s) \frac{1}{e^{t t^2}} g^2(s, t), \quad (4.47)$$

onde,

$$\Omega(s) \equiv \frac{\gamma}{R^2} \frac{16\pi^2}{\beta_0^2} \frac{1}{\Lambda_{QCD}^2} \frac{1}{s}. \quad (4.48)$$

A solução é dada por;

$$g(s, t) = \frac{t^{\Phi(s)/\beta_0}}{g_0 - \Omega(s) \Gamma \left(\frac{\Phi(s)}{\beta_0} - 1, t \right)}. \quad (4.49)$$

Definimos, $A(s) = \frac{\Phi(s)}{\beta_0}$, assim reescremos;

$$\frac{dg(s,t)}{dt} - \frac{\Phi(s)}{\beta_0 t} g(s,t) = -\frac{\Omega(s)}{e^t t^2} g^2(s,t), \quad (4.50)$$

sendo, $P(s,t) \equiv \frac{\Phi(s)}{\beta_0 t}$ e $Q(s,t) \equiv \frac{\Omega(s)}{e^t t^2}$, temos uma equação do tipo Bernoulli [57] com P e Q contínuas, exceto em $t = 0$; assim temos;

$$\frac{1}{g^2} \frac{dg(s,t)}{dt} - \frac{A(s)}{t} \frac{1}{g(s,t)} = -\frac{\Omega(s)}{e^t t^2}. \quad (4.51)$$

Efetuamos a mudança de variáveis: $U(s,t) \equiv \frac{1}{g(s,t)}$,
 $\frac{dU(s,t)}{dt} = -\frac{1}{g^2} \frac{dg}{dt}$, então,

$$-\frac{dU(s,t)}{dt} = -\frac{A(s)}{t} U(s,t) = -\frac{\Omega(s)}{e^t t^2}, \quad (4.52)$$

e encontramos a seguinte expressão;

$$\frac{dU(s,t)}{dt} + \frac{A(s)}{t} U(s,t) = \frac{\Omega(s)}{e^t t^2}, \quad (4.53)$$

que é uma equação diferencial ordinária, com solução via fator integrante, dada por;

$$\mu(t) = \exp\left(\int dt \frac{A(s)}{t}\right) = \exp(A(s) \ln(t)) = t^{A(s)}. \quad (4.54)$$

Multiplicamos as duas últimas equações,

$$t^{A(s)} \frac{dU}{dt} + t^{A(s)} \frac{A(s)}{t} U = t^{A(s)} \frac{\Omega(s)}{e^t t^2}, \quad (4.55)$$

mas

$$\frac{d}{dt}[t^A U] = t^A \frac{dU}{dt} + U t^{A-1} A, \quad (4.56)$$

após fazermos a integração, obtemos a seguinte expressão;

$$t^A U(s,t) - t_0^A U(s,t_0) = \Omega(s) \gamma(A-1, t) - \Omega(s) \gamma(A-1, t_0), \quad (4.57)$$

sendo a função gama incompleta inferior $\gamma(a,t)$ dada por uma expressão semelhante a Equação 4.16;

$$\gamma(a,t) = \int_0^t dz z^{a-1} e^{-z}. \quad (4.58)$$

Voltando com a transformação de funções;

$$\frac{t^A}{g(s,t)} = \frac{t_0^A}{g(s,t_0)} \Omega(s) [\gamma(A-1,t) - \gamma(A-1,t_0)]; \quad (4.59)$$

e assim, chegamos em;

$$g(s,t) = \frac{g(s,t_0)t^{-A(s)}}{t_0^{A(s)} + \Omega(s)g(s,t_0)[\gamma(A(s)-1,t) - \gamma(A(s)-1,t_0)]}. \quad (4.60)$$

Sendo que a Equação (4.60), é o resultado obtido para a solução da equação GLR-MQ da distribuição de glúons via transformada de Laplace.

4.3 Conclusão

Neste capítulo, solucionamos analiticamente as equações de evolução DGLAP e GLR-MQ por dois métodos diferentes. Apresentamos resultados para soluções por ansatz, e via transformada de Laplace. Estas soluções analíticas levam a resultados que podem ser obtidos através de código computacional, que serão apresentados no próximo capítulo.

5 Resultados

Neste capítulo, são apresentados os resultados para a distribuição de glúons, levando em consideração diferentes parâmetros, que são comparados com resultados das parametrizações das distribuições partônicas.

5.1 Resultados para solução via ansatz

A partir dos cálculos do capítulo anterior, foi desenvolvido um código numérico para obter a distribuição de glúons. Utilizamos a solução proposta obtida na seção (5.2) do capítulo 4 e variamos Q^2 entre 2 e 20 GeV², para cada valor proposto de x . Por estarmos tratando de solução para uma equação diferencial é preciso escolher uma condição inicial. Optamos para fins de comparação com os resultados das parametrizações, tomar o mesmo valor utilizado por elas de Q_0^2 . Os cálculos foram realizados através da linguagem de programação Fortran 90. Foram escolhidos diferentes valores para x e R , e mantivemos λ_g com valor fixo igual a 0,5. De acordo com a teoria, as funções de distribuições partônicas a pequeno x se comportam como $x^{-\lambda_g}$, onde λ_g é a interseção da trajetória do Pomeron. Foram realizadas comparações entre quatro modelos de parametrização (CTEQ6, MMHT2014, CT14, HERAPDF15) [48, 49, 63] e os resultados obtidos [11]. Os resultados estão apresentados nas Figuras 5.1, 5.2, 5.3. As curvas sólidas são dados das parametrizações que mostram a distribuição de glúons a partir de soluções para a equação DGLAP e as curvas tracejadas mostram os resultados para a distribuição de glúons a partir da solução da equação de evolução GLR-MQ.

Como as parametrizações lineares e a solução proposta é para a evolução não-linear representada pela equação GLR-MQ, observamos nos resultados que ocorre o efeito de saturação, já que as curvas mostram um comportamento em que a distribuição de glúons é menor que a das parametrizações, o que é o proposto para corrigir o efeito da dominância gluônica. Assim, das curvas para a solução analítica proposta é possível observar que houve a diminuição do crescimento indefinido de glúons, comparadas com as curvas das distribuições dadas pelas parametrizações, o que se é esperado teoricamente, logo os resultados mostram que ocorre a saturação. É possível verificar através dos gráficos, que a função de distribuição de glúons cresce com o aumento de Q^2 , o que está conforme o previsto pela QCD em regime perturbativo. Outro ponto para observarmos é que ao variarmos R não se observa mudanças significativas para a distribuição de glúons tanto para o regime linear, quanto para o não-linear. O esperado era observar uma mudança na distribuição ao variarmos R , sendo que ao termos valores maiores de R e menores de x , a distribuição deveria apresentar um crescimento maior, porém isto não foi obtido. Logo, vemos que para esta abordagem a solução utilizada não obteve o resultado esperado.

5.2 Resultados para diferentes valores de λ_g

Vimos que a distribuição de glúons a pequeno x , pode ser dada como $xg(x, Q^2) \approx x^{-\lambda_g}$. A variável λ_g é dada pela seguinte expressão:

$$\lambda_g = \frac{4N_c\alpha_s \ln 2}{\pi}, \quad (5.1)$$

relação obtida a partir da solução BFKL [26]. Observamos que λ_g depende da constante de acoplamento α_s . Pela equação (4.2) é possível verificar uma dependência em Q^2 . Para levarmos em conta tal dependência de λ_g em Q^2 , escolhemos quatro valores arbitrários para a virtualidade, $Q^2 = 20 \text{ GeV}^2, 100 \text{ GeV}^2, 200 \text{ GeV}^2$ e 350 GeV^2 . Com isso obtemos diferentes valores de α_s , o que nos forneceu quatro distintos λ_g . Estes cálculos foram realizados através de código computacional, onde inserimos as referentes equações para as variáveis de interesse. Foram gerados gráficos para observar o comportamento da distribuição de glúons ao realizamos estas variações e solucionamos a equação não-linear para diferentes λ_g . Fixamos Q^2 e λ_g para gerar os resultados, variamos os valores de x entre 10^{-6} até 10^{-4} e comparamos com as PDFs. Os resultados encontrados, são apresentados nas Figuras 5.4 e 5.5.

Ao aumentar o valor da virtualidade Q^2 o valor de λ_g diminui, e isto é esperado matematicamente devido as expressões que determinam esta constante. Ao aumentar x , é visto que diminui a densidade de glúons, porém as curvas tracejadas que representam soluções apenas para a equação DGLAP, apresentam um crescimento muito maior que as curvas que incluem o termo não-linear (eq. GLR-MQ), visto assim que este termo realmente desacelera o aumento de glúons, isto indica que ocorre a saturação. As curvas entre si diferem, pelo fato de as parametrizações utilizarem parâmetros e soluções distintas da DGLAP. É possível observar, que a função de distribuição de glúons é mais sensível a λ_g do que a R que abordamos na seção anterior. Neste caso onde consideramos diferentes valores de λ_g , a solução e os resultados estão de acordo com o que é previsto pela teoria.

5.3 Resultados para solução da equação DGLAP via Transformada de Laplace

A partir dos resultados analíticos apresentados no capítulo 4, foi desenvolvido um código numérico para solucionar a DGLAP em ordem dominante com variação em Q^2 e x fixo. Foi realizada uma comparação dos resultados obtidos com a parametrização MSTW2008 [64]. Consideramos uma condição inicial geral para $Q_0^2 = 1 \text{ GeV}^2$ dada por [44]:

$$xg(x, Q_0^2) = A_g x^{\delta_g} (1-x)^{\eta_g} (1 + \epsilon_g \sqrt{x} + \gamma_g x). \quad (5.2)$$

Empregando esta condição inicial, consideramos diferentes valores para seus parâmetros, que diferem entre si do seguinte modo: a condição 1, onde tomamos as condições iniciais da própria parametrização MSTW2008 [44], onde os parâmetros tem os seguintes valores,

$$A_g = 0.0012216, \delta_g = -0,83657, \eta_g = 2,3882, \epsilon_g = -38,997, \gamma_g = 1445,5;$$

e a condição 2, usada no formalismo de dipolos [65,66], com os parâmetros tem os seguintes valores,

$$A_g = 1,18, \delta_g = -0,11, \eta_g = 5,6, \epsilon_g = 0, \gamma_g = 0.$$

Para gerar os gráficos e poder analisar a diferença do comportamento das distribuições de glúons, utilizamos estas duas diferentes condições. Além disso, para o cálculo da inversa da transformada de Laplace numericamente, utilizamos uma rotina para a linguagem Fortran [67]. Os resultados estão apresentados nas Figuras (5.6) (5.7).

Os resultados mostram que ao irmos para um regime de x cada vez menor, maior é o valor de $G(x, Q^2)$. Este tipo de comportamento é esperado e foi observado nos resultados anteriores. Observamos uma clara diferença entre as curvas das soluções numéricas ao mudarmos as condições iniciais. Também percebemos que as soluções via transformada de Laplace apresentam valores menores para $G(x, Q^2)$, que a solução de MSTW2008. Neste contexto é possível concluir, que este modo de solução para a equação de evolução DGLAP é favorável para diminuir o efeito do domínio de glúons. Fica evidente que a condição 2 teve um efeito muito melhor para desacelerar o aumento indefinido de glúons do que a condição 1, onde observamos por meio das curvas que para a condição 2, é como se houvesse ocorrido a saturação mesmo não havendo sido incluído o termo da equação GLR-MQ para a distribuição de glúons, o que os mostra ser esta uma ótima alternativa para solucionar o problema da dominância de glúons. Com isso, a solução via transformada de Laplace mostrou ser um método eficaz para solucionar a equação DGLAP comparando com a parametrização e os resultados das parametrizações dos resultados anteriores. Espera-se que ao considerarmos os efeitos não-lineares, os resultados sejam ainda mais satisfatórios, no sentido de que ao levarmos em conta a saturação e com o método de solução proposto via transformada de Laplace, a distribuição de glúons apresente um aumento ainda menos significativo .

5.4 Conclusão

Neste capítulo, apresentamos os resultados obtidos para a função de distribuição de glúons $G(x, Q^2)$ utilizando diferentes métodos para gerar os gráficos, e distintos tipos de soluções para as equações de evolução. Foram feitas comparações entre nosso método de solução

com soluções já existentes das parametrizações das PDFs. No próximo capítulo apresentaremos as conclusões gerais deste trabalho de mestrado.

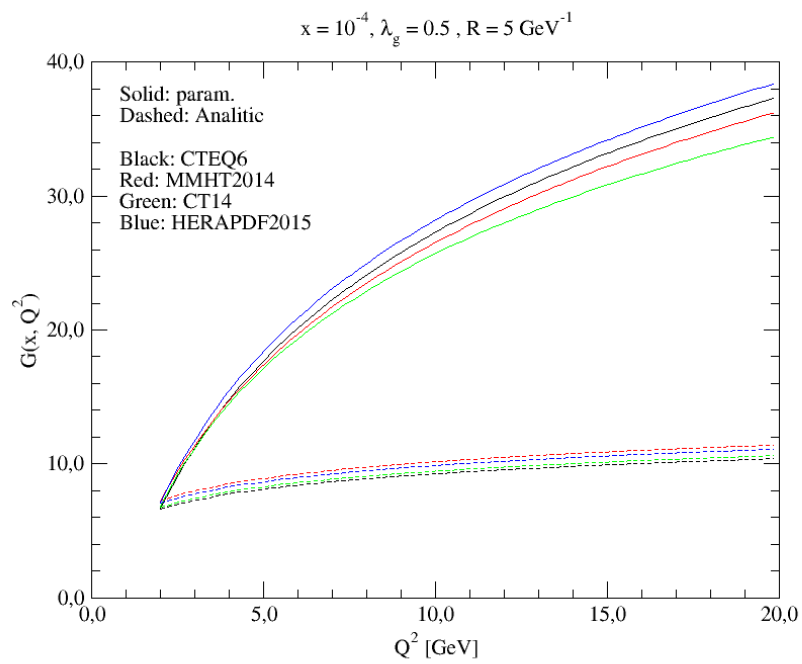
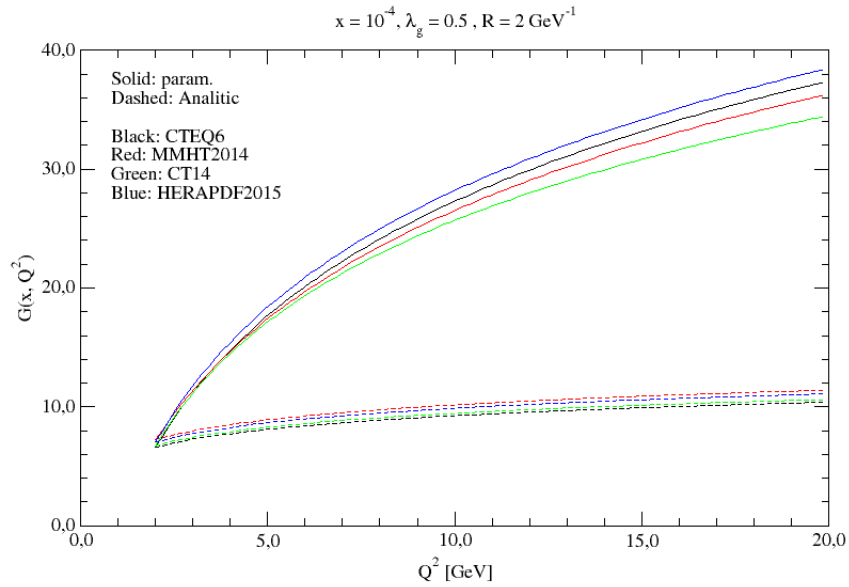


Figura 5.1 - Acima, o gráfico para resultado da distribuição de glúons em função da virtualidade Q^2 , onde $x = 10^{-4}$, $\lambda_g = 0,5$ e $R = 2 \text{ GeV}^{-1}$. Abaixo, idem com $x = 10^{-4}$, $\lambda_g = 0,5$ e $R = 5,0 \text{ GeV}^{-1}$.

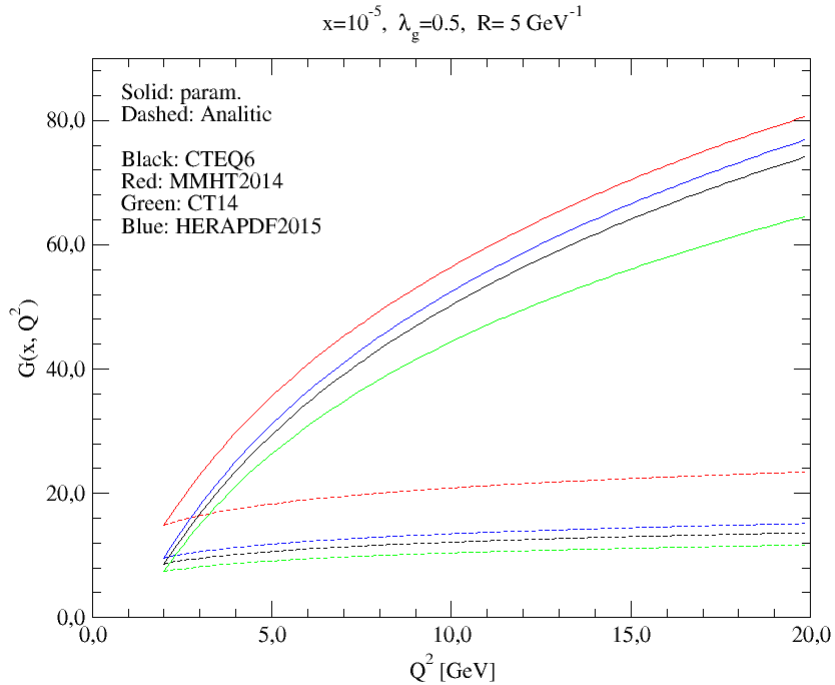
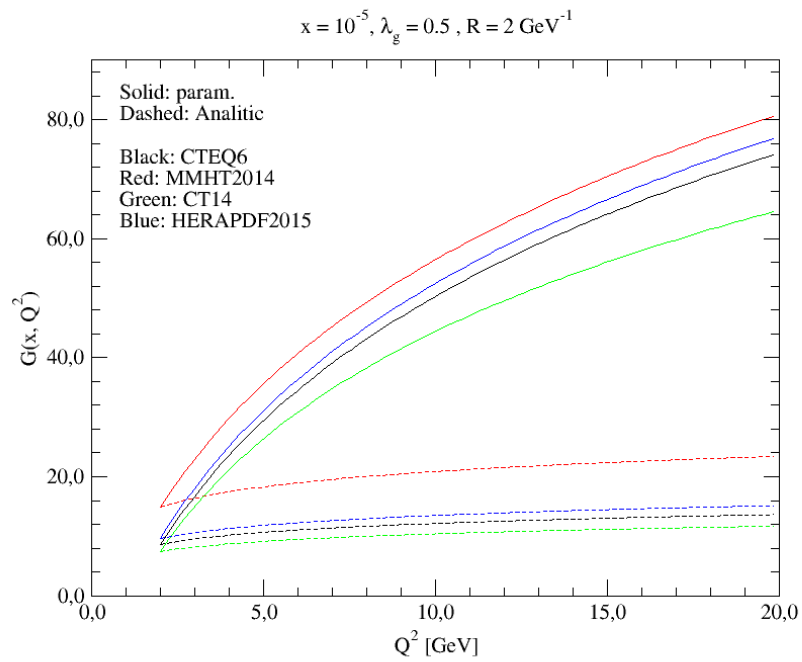


Figura 5.2 - Acima, o gráfico para resultado da distribuição de glúons em função da virtualidade Q^2 , onde $x = 10^{-5}$, $\lambda_g = 0,5$ e $R = 2 \text{ GeV}^{-1}$. Abaixo, idem com $x = 10^{-5}$, $\lambda_g = 0,5$ e $R = 5,0 \text{ GeV}^{-1}$.

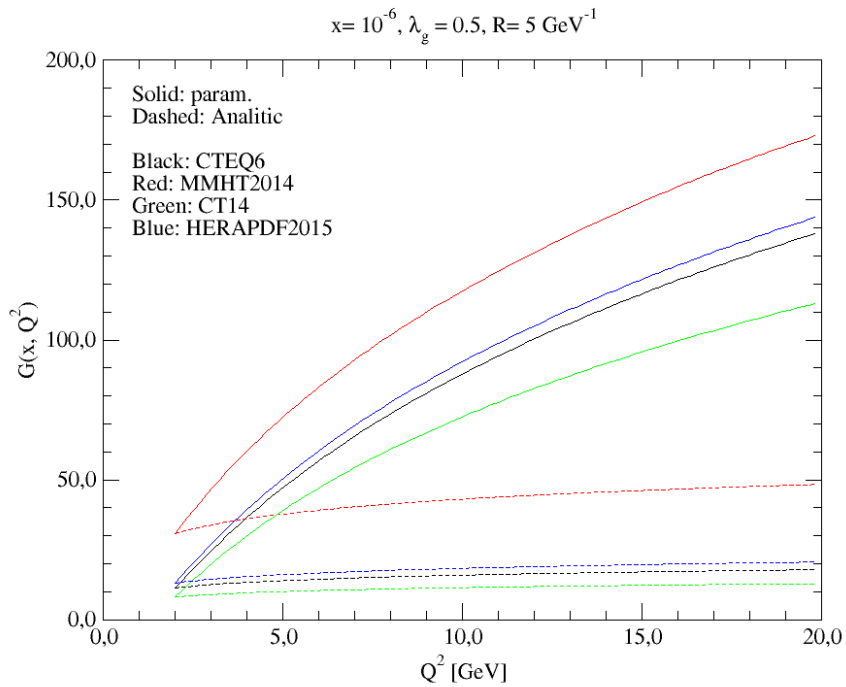
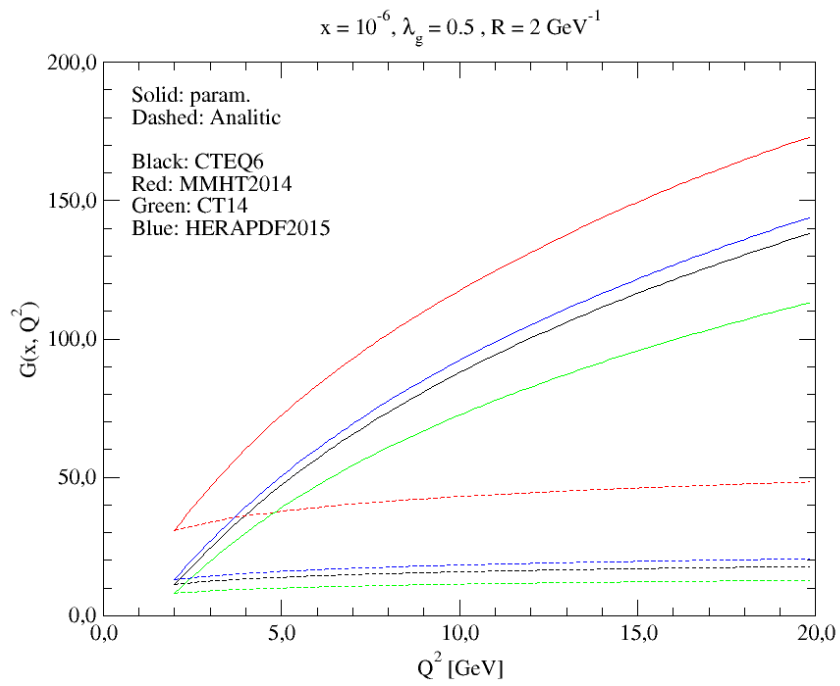


Figura 5.3 - Acima, o gráfico para resultado da distribuição de glúons em função da virtualidade Q^2 , onde $x = 10^{-6}$, $\lambda_g = 0,5$ e $R = 2 \text{ GeV}^{-1}$. Abaixo, idem com $x = 10^{-6}$, $\lambda_g = 0,5$ e $R = 5,0 \text{ GeV}^{-1}$.

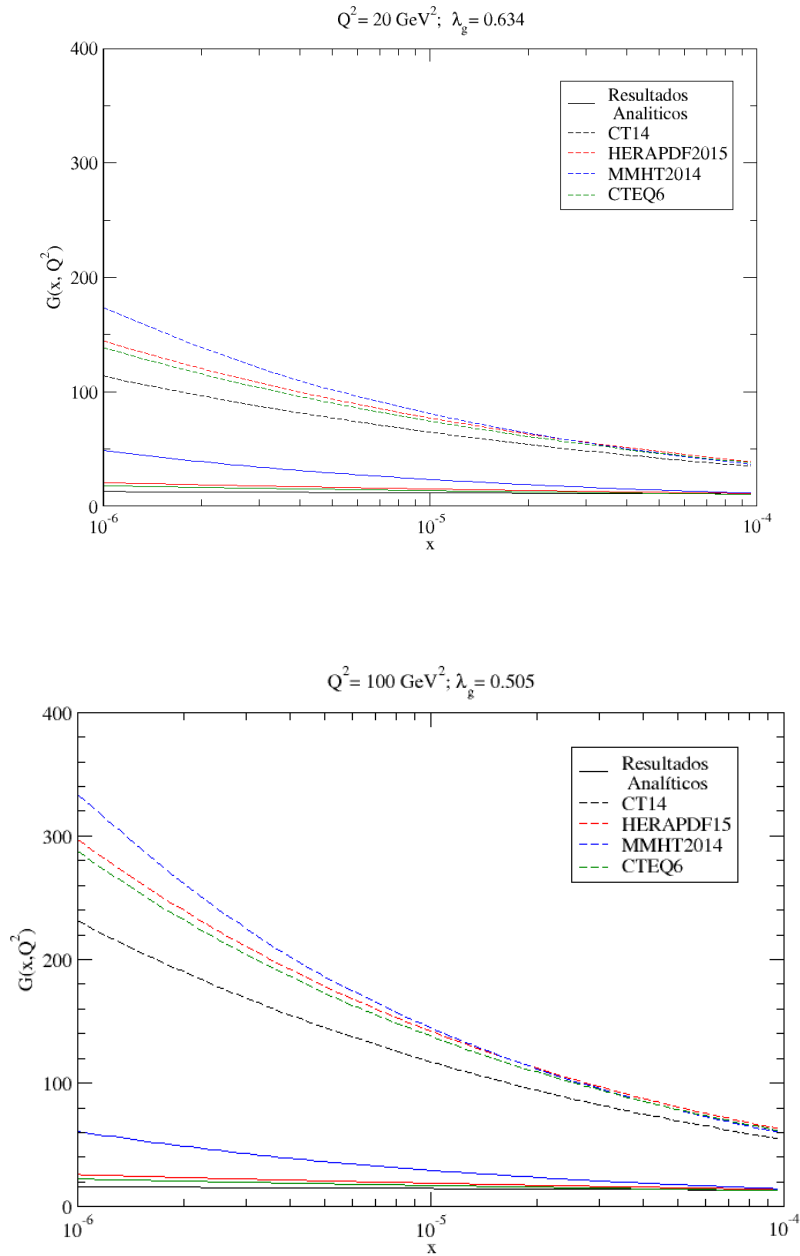


Figura 5.4 - Gráficos da distribuição de glúons em função de x , com valores para λ_g e Q^2 fixos. Acima, $Q^2 = 20 \text{ GeV}^2$ e abaixo $Q^2 = 100 \text{ GeV}^2$. Nos resultados, as curvas tracejadas são soluções das parametrizações indicadas, da equação de evolução linear DGLAP. As curvas sólidas, são soluções analíticas para a equação de evolução não-linear GLR-MQ.

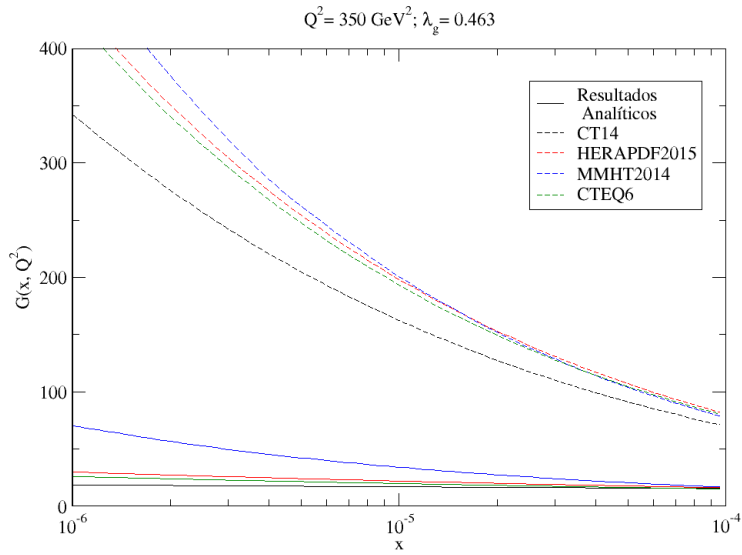
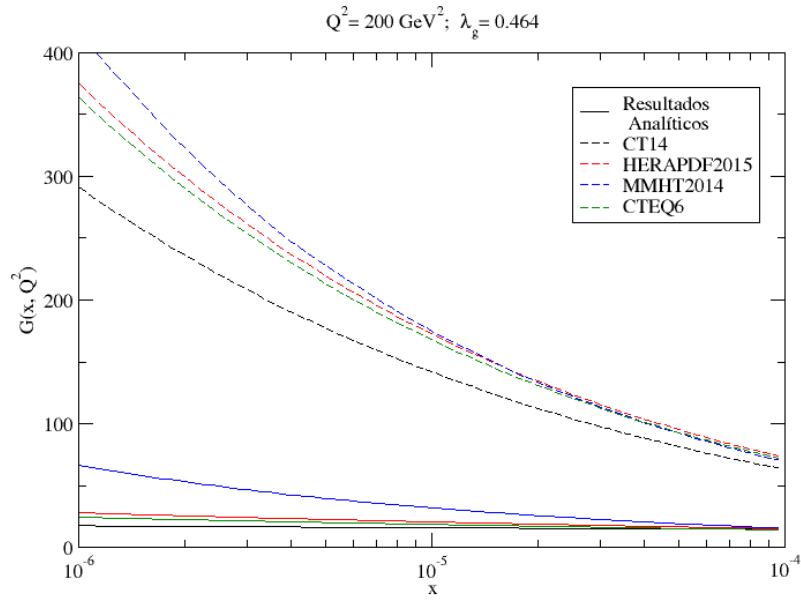


Figura 5.5 - Gráficos da distribuição de glúons em função de x , com valores para λ_g e Q^2 fixos. Acima, $Q^2 = 200 \text{ GeV}^2$ e abaixo $Q^2 = 350 \text{ GeV}^2$. Nos resultados, as curvas tracejadas são soluções das parametrizações indicadas, da equação de evolução linear DGLAP. As curvas sólidas, são soluções analíticas para a equação de evolução não-linear GLR-MQ.

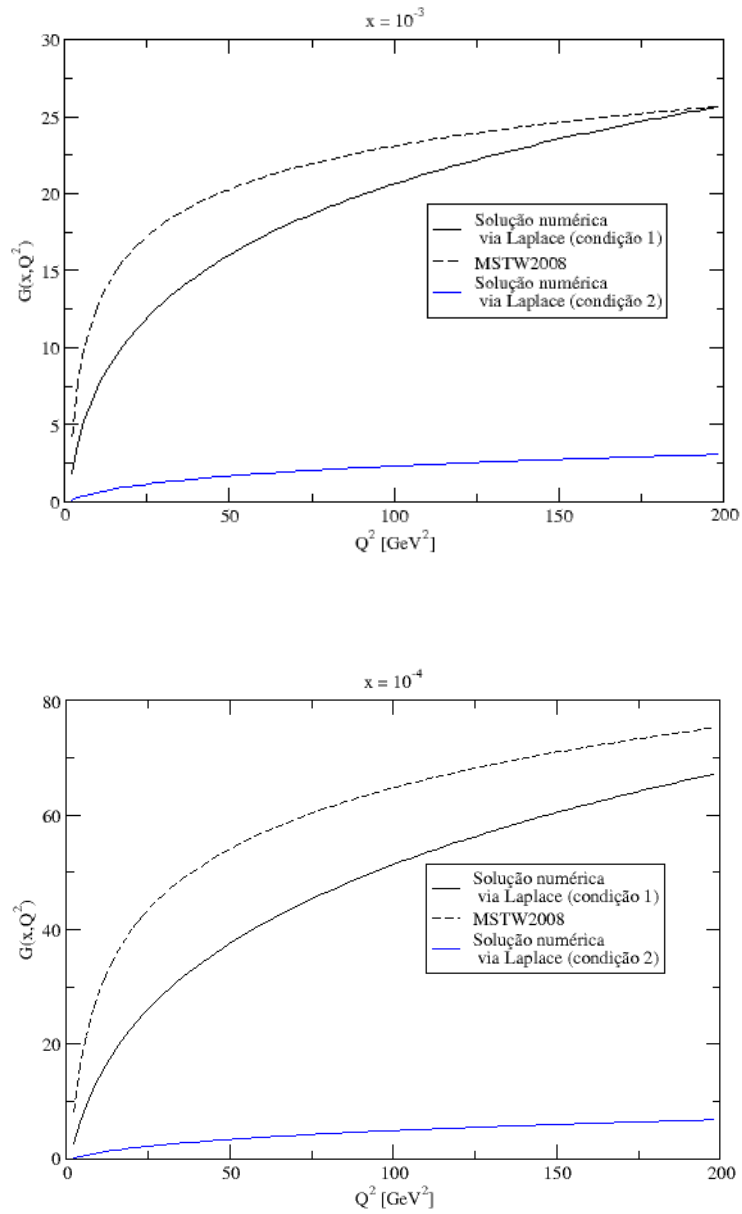


Figura 5.6 - Gráficos para distribuição de glúons em função de Q^2 , via transformada de Laplace (linhas sólidas) comparadas com a parametrização MSTW2008 (linha tracejada). Para as soluções numéricas, foram considerados dois conjuntos de condições iniciais, onde a condição 1, são as condições de MSTW2008, e a condição 2, são as condições consideradas de dipolos. Acima, $x = 10^{-3}$. Abaixo, $x = 10^{-4}$.

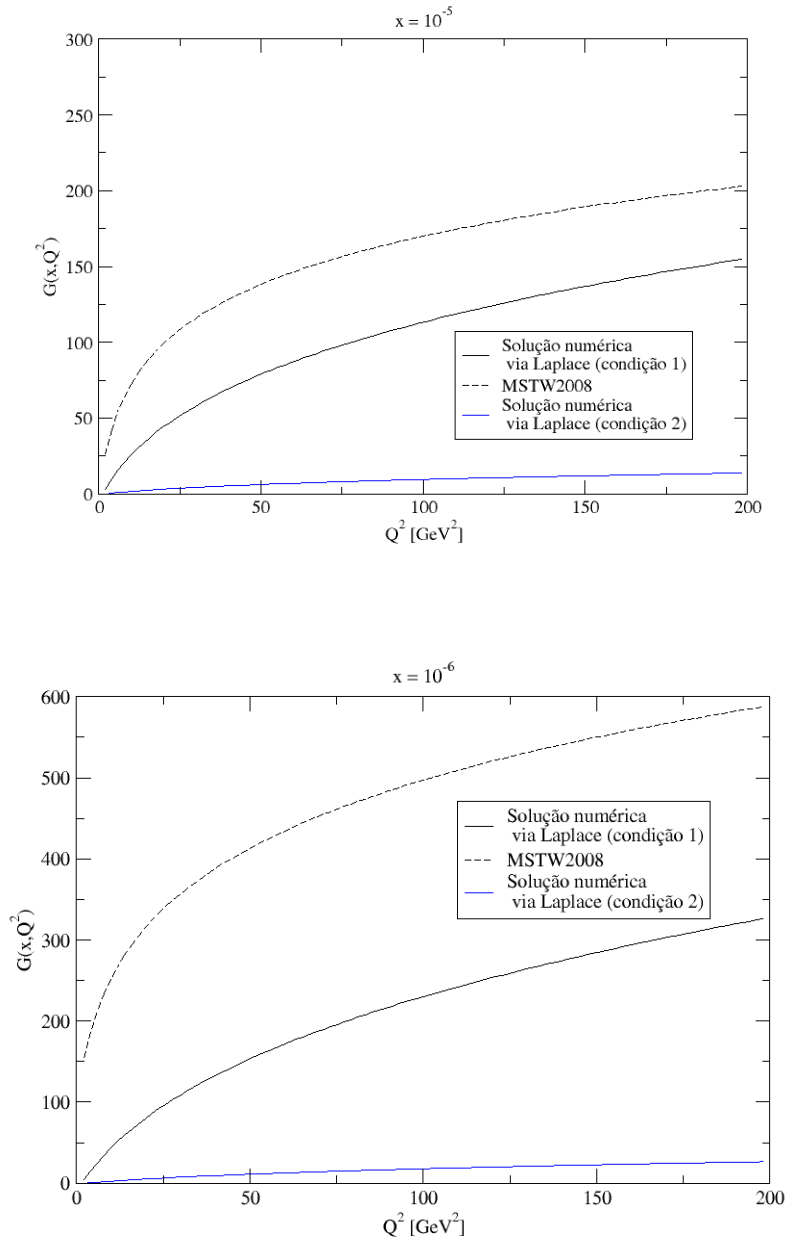


Figura 5.7 - Gráficos para distribuição de glúons em função de Q^2 , via transformada de Laplace (linhas sólidas) comparadas com a parametrização MSTW2008 (linha tracejada). Para as soluções numéricas, foram considerados dois conjuntos de condições iniciais, onde a condição 1, são as condições de MSTW2008, e a condição 2, são as condições consideradas de dipolos. Acima, $x = 10^{-5}$. Abaixo, $x = 10^{-6}$.

6 Conclusões

Este capítulo traz as conclusões que chegamos do trabalho e algumas perspectivas para possíveis trabalhos futuros.

Estudamos neste trabalho de dissertação, no capítulo 2 o modelo padrão da física de partículas e a teoria que estuda as interações fortes, a QCD com suas propriedades.

A estrutura do próton foi estudada no capítulo 3, onde também descrevemos o processo mais simples que permite sondar o próton, o DIS. Descrevemos o comportamento de seus constituintes ao considerarmos um regime de altas energias e estudamos o comportamento da seção de choque e função de estrutura.

A evolução das densidades partônicas é descrita pelas equações DGLAP [2] preditas pela QCD perturbativa. Estas equações prevêm um crescimento indefinido da função de distribuição de glúons em altas energias, e este efeito pode ser corrigido por um termo não-linear, que é dado pela equação GLR-MQ [5,52]. Isto é necessário, devido aos glúons serem dominantes na região cinemática de pequeno x . Para chegarmos na equação GLR-MQ devemos considerar a recombinação dos glúons, o que leva ao efeito de saturação. Estes assuntos foram abordados no capítulo 3.

A equação DGLAP possui solução analítica para pequeno x , esta solução está apresentada no capítulo 3. No capítulo 4, empregamos propostas de soluções para as equações de evolução [8,11,68] e a partir destas propostas desenvolvemos soluções analíticas apresentamos os resultados para a distribuição de glúons analiticamente. Desenvolvemos métodos numéricos e mostramos os resultados por meio de gráficos no capítulo 5 para a distribuição de glúons para pequeno x , comparando com previsões teóricas das parametrizações. Através das curvas obtidas, concluímos que a solução proposta é satisfatória ao observarmos que ocorreu a redução na dominância de glúons. Neste mesmo capítulo 5, temos resultados ao considerarmos valores distintos para λ_g , ao solucionarmos a equação não-linear GLR-MQ e observamos que o comportamento da função de distribuição de glúons é sensível a estas variações e que ao aumentarmos Q^2 , λ_g diminui, visto que este parâmetro é dependente da constante de acoplamento forte $\alpha_s(Q^2)$ o que está de acordo com a previsão teórica. Ainda verificamos que ao irmos para um regime de valores Q^2 maiores, λ_g diminui em uma escala menor, ou seja seu valor permanece quase o mesmo. Após isso, apresentamos os resultados para a solução da equação DGLAP por meio da transformada de Laplace considerando uma condição inicial, onde ao variarmos parâmetros desta condição obtivemos duas condições iniciais. Ao empregarmos estas condições e uma rotina numérica para cálculo da inversa da transformada de Laplace, obtivemos os resultados apresentados.

Estes resultados nos permitem verificar o comportamento da função de distribuição dos glúons, e qual a condição que oferece melhores resultados para desacelerar o aumento indefinido da densidade de glúons. Verificamos também uma forte dependência da condição inicial, vendo que a condição 2 mostrou uma redução do crescimento de glúons muito maior do que a condição 1. Outra conclusão que foi possível chegar por meio dos gráficos é de que, por meio da transformada de Laplace ocorreu a redução da distribuição de glúons de forma muito significativa mesmo sem a contribuição do termo não-linear que corresponde a equação GLR-MQ.

Como perspectivas de trabalhos futuros, temos o desenvolvimento do código numérico para a solução da equação GLR-MQ, via transformada de Laplace, e buscar outras alternativas, para solucionar as equações de evolução, bem como pesquisar e aplicar outros tipos de abordagens para os métodos utilizados neste trabalho.

A TRANSFORMADA DE LAPLACE

Neste apêndice, vamos descrever a Transformada de Laplace e suas propriedades [57, 60].

Sendo uma função $f(t)$ definida para $t \geq 0$, assim a integral imprópria

$$\int_0^{\infty} K(s,t)f(t)dt, \quad (\text{A.1})$$

será definida pelo limite,

$$\lim_{(b \rightarrow \infty)} \int_0^b K(s,t)f(t)dt. \quad (\text{A.2})$$

Considerando que este limite existe, podemos dizer que a integral existe ou converge. Logo, se o limite não existir, a integral também não existe, ou é divergente. O limite nesta situação, apenas existirá para certos valores da variável s . É definida, $K(s,t) = e^{-st}$, e isto nos concede uma transformada integral importante.

A.1 DEFINIÇÃO

Seja uma função $f(t)$ definida na região $0 \leq t < \infty$, com t e $f(t)$ reais, então a função $F(s)$, é definida pela integral de laplace,

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt, \quad (\text{A.3})$$

onde s é complexo. Sendo esta $F(s)$ a **Transformada de Laplace**.

\therefore Definindo: $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

A.2 TRANSFORMADA INVERSA

A transformada de Laplace, faz com que uma função $f(t)$, se torne uma função $F(s)$. Quando o problema é o oposto, ou seja, temos uma $F(s)$, e queremos encontrar $f(t)$, sendo a $F(s)$ a transformada de Laplace, denomina-se que a função $f(t)$, é a Transformada de Laplace Inversa de $F(s)$.

\therefore Definindo: $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

A transformada inversa, é linear, onde, para constantes α e β , temos;

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}, \quad (\text{A.4})$$

onde F e G , são as transformadas de funções f e g .

A.3 PROPRIEDADES

Apresentaremos a seguir, algumas das principais propriedades e teoremas da transformada de Laplace.

- Teorema da existência: Seja $f(t)$, uma função contínua por pedaços para $0 \leq t < \infty$ e é exponencial de ordem σ_0 , temos a seguinte integral;

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (\text{A.5})$$

converge para, $\text{Re}\sigma_0 < s$.

- Função escada:

$$S = \begin{cases} 0 & (t < 0), \\ 1 & (t > 0) \end{cases}$$

sendo a transformada de Laplace dada,

$$\mathcal{L}\{S(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = 1/s. \quad (\text{A.6})$$

- Translação: Seja uma função $f(t)$ "truncada" pela multiplicação por $S(t)$, e a função resultante $f(t)S(t)$ é deslocada para a direita de uma distância a , então a transformada de Laplace é multiplicada por e^{-as} . Assim,

$$\mathcal{L}\{f(t-a)S(t-a)\} = e^{-as} \mathcal{L}\{f(t)S(t)\} (a > 0) \quad (\text{A.7})$$

- Amortecimento: Sendo a função $f(t)$ "amortecida" pelo fator e^{-at} , a transformada de Laplace será deslocada para a esquerda, em relação a s . Logo,

$$\mathcal{L}\{e^{-at} f(t)\} = F(s+a). \quad (\text{A.8})$$

- Derivação: Esta propriedade, relaciona $\mathcal{L}\{f(t)\}$ e $\mathcal{L}\{f'(t)\}$, supondo que $f(t)$ seja contínua e integre a integral de Laplace por partes, chegamos que;

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \quad (\text{A.9})$$

- Teorema da Convolução: Sendo as funções f e g , contínuas e com ordem exponencial α

e β , então;

$$\mathcal{L}\{f * g\} = F(s)G(s), \quad (\text{A.10})$$

e sua inversa;

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f * g \quad (\text{A.11})$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] SAUTER, W. K. **Fenomenologia em cromodinâmica quântica com propagador de glúon modificado**. Tese (Doutorado), 2003. 17, 28, 31
- [2] DEVENISH, R.; COOPER-SARKAR, A. **Deep inelastic scattering**. [S.l.]: Oxford University Press, 2004. 403 p. ISBN 0198506716. 21, 23, 31, 33, 34, 38, 46, 71
- [3] CHEKANOV, S.; COLLABORATION, Z. et al. Measurement of the neutral current cross section and F_2 structure function for deep inelastic ep scattering at HERA. **The European Physical Journal C-Particles and Fields**, Springer, v. 21, n. 3, p. 443–471, 2001. 21
- [4] GRIBOV, L. V.; LEVIN, E. M.; RYSKIN, M. G. Semihard processes in QCD. **Physics Reports**, Elsevier, v. 100, n. 1-2, p. 1–150, 1983. 21
- [5] MUELLER, A. H.; QIU, J. Gluon recombination and shadowing at small values of x . **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 268, n. 2, p. 427–452, 1986. 21, 46, 71
- [6] BOTJE, M. QCDNUM: Fast QCD Evolution and Convolution. **Computer physics communications**, v. 182, p. 490–532, 2011. 22, 49
- [7] BUCKLEY, A.; FERRANDO, J.; LLOYD, S.; NORDSTRÖM, K.; PAGE, B.; RÜFENACHT, M.; SCHÖNHERR, M.; WATT, G. LHAPDF6: parton density access in the LHC precision era. **The European Physical Journal C-Particles and Fields**, v. 75, p. 132, 2015. 22, 49
- [8] BLOCK, M. M.; DURAND, L.; MCKAY, D. W. Analytic derivation of the leading-order gluon distribution function $G(x, Q^2) = xg(x, Q^2)$ from the proton structure function $F_{2p}(x, Q^2)$. **Physical Review D**, APS, v. 77, n. 9, p. 094003, 2008. 22, 71
- [9] REZAEI, B.; BOROUN, G. R. Analytical approach for the approximate solution of the longitudinal structure function with respect to the GLR-MQ equation at small x . **Physical Letters B**, v. 692, p. 247–249, 2010. 22
- [10] BOROUN, G. R.; ZARRIN, S. An approximate approach to the nonlinear DGLAP evaluation equation. **The European Physical Journal Plus**, v. 128, p. 119, 2013. 22, 56
- [11] DEVEE, M.; SARMA, J. K. Analysis of the small- x behavior of gluon distribution and a search for gluon recombination. **Nuclear Physics B**, v. 885, p. 571–582, 2014. 22, 49, 59, 71

- [12] TIPLER, P. A.; LLEWELLYN, R. A. **Modern physics**. [S.l.]: Freeman, 2008. 23, 25
- [13] SEARS, F.; ZEMANSKY, M.; YOUNG, H.; FREEDMAN IV, R. **Física IV: ótica e física moderna**. [S.l.]: São Paulo: Addison Wesley, 2008. 23
- [14] NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de física básica**. [S.l.]: Blucher, 1997. 23
- [15] MOREIRA, M. A. Partículas e interações. **Física na escola.**, São Paulo. Vol. 5, n. 2 (out. 2004), p. 10-14, 2004. 23
- [16] _____. O modelo padrão da física de partículas. **Revista brasileira de ensino de física.**, São Paulo. Vol. 31, n. 1 (mar. 2009), 1306, 11 p. SciELO Brasil, 2009. 23
- [17] GRIFFITHS, D. **Introduction to elementary particles**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008. 25
- [18] MUTA, T. **Foundations of Quantum Chromodynamics: An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories Third Edition**. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, 2009. 25, 26, 33
- [19] DOKSHITZER, Y. L.; DYAKONOV, D.; TROYAN, S. Hard processes in quantum chromodynamics. **Physics Reports**, Elsevier, v. 58, n. 5, p. 269–395, 1980. 25, 31
- [20] ELLIS, R. K.; STIRLING, W. J.; WEBBER, B. R. **QCD and collider physics**. [S.l.]: Cambridge university press, 2003. 25
- [21] THOMSON, M. **Modern particle physics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013. 25, 27, 28, 32, 34
- [22] STERMAN, G. **An introduction to quantum field theory**. [S.l.]: Cambridge university press, 1993. 25
- [23] JACKSON, J. D. **Classical electrodynamics**. 2. ed. [S.l.]: John Wiley, 1975. 25
- [24] ANSELMINO, M.; CARUSO, F.; MAHON, J. R.; OGURI, V. **Introdução à QCD perturbativa**. [S.l.]: Grupo Gen-LTC, 2000. 27, 38
- [25] KOVCHEGOV, Y. V.; LEVIN, E. **Quantum chromodynamics at high energy**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2012. 28, 39, 44
- [26] BARONE, V.; PREDAZZI, E. **High-Energy Particle Diffraction**. Berlin: Springer-Verlag, 2002. 32, 34, 35, 39, 49, 60

- [27] HALZEN, F.; MARTIN, A. D. **Quarks and leptons**. New York: John Wiley, 1984. 33, 34, 42
- [28] BJORKEN, J. D. Asymptotic sum rules at infinite momentum. **Physical Review**, APS, v. 179, n. 5, p. 1547, 1969. 33
- [29] BJORKEN, J. D.; PASCHOS, E. A. Inelastic electron-proton and γ -proton scattering and the structure of the nucleon. **Physical Review**, APS, v. 185, n. 5, p. 1975, 1969. 34
- [30] CALLAN JR., C. G.; GROSS, D. J. High-energy electroproduction and the constitution of the electric current. **Physical Review Letters**, APS, v. 22, n. 4, p. 156, 1969. 34
- [31] MENESES, A. R. **Fotoprodução de quarks pesados em colisões próton-próton no Grande Colisor de Hádrons**. Dissertação (Mestrado), Pelotas: Instituto de Física e Matemática da UFPEL, 2011. 36, 47
- [32] ALTARELLI, G.; PARISI, G. Asymptotic freedom in parton language. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 126, n. 2, p. 298–318, 1977. 36
- [33] DOKSHITZER, Y. L. Calculation of the structure functions for deep inelastic scattering and $e^+ e^-$ annihilation by perturbation theory in quantum chromodynamics. **Soviet Physics JETP**, v. 46, p. 641, 1977. 36
- [34] GRIBOV, V. N.; LIPATOV, L. N. Deep inelastic ep scattering in perturbation theory. **Soviet Journal of Nuclear Physics**, v. 15, n. IPTI-381-71, p. 781–807, 1972. 36
- [35] FORSHAW, J. R.; FORSHAW, J.; ROSS, D.; ROSS, D. A. **Quantum chromodynamics and the pomeron**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1997. 39
- [36] LIPATOV, L. Reggeization of the vector meson and the vacuum singularity in nonabelian gauge theories. **Soviet Journal of Nuclear Physics**, v. 23, p. 338–345, 1976. 39, 49
- [37] BROWER, R. C.; POLCHINSKI, J.; STRASSLER, M. J.; TAN, C.-I. The Pomeron and gauge/string duality. **Journal of High Energy Physics**, IOP Publishing, v. 2007, n. 12, p. 005, 2007. 39
- [38] LEVIN, E. **ORSAY lectures on low x deep inelastic scattering**. [S.l.], 1991. 39

- [39] GONCALVES, V. **A Cromodinâmica Quântica para sistemas densos**. Tese (Doutorado) — UFRGS, Porto Alegre: Instituto de Física - UFRGS, 2000. 40, 42, 47
- [40] ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. **Mathematical methods for physicists**. [S.l.]: AAPT, 1999. 42
- [41] MARTIN, A. D. Proton structure, Partons, QCD, DGLAP and beyond. **arXiv preprint arXiv:0802.0161**, 2008. 43
- [42] DULAT, S.; HOU, T.-J.; GAO, J.; GUZZI, M.; HUSTON, J.; NADOLSKY, P.; PUMPLIN, J.; SCHMIDT, C.; STUMP, D.; YUAN, C.-P. New parton distribution functions from a global analysis of quantum chromodynamics. **Physical Review D**, APS, v. 93, n. 3, p. 033006, 2016. 43
- [43] VOGT, A. Efficient evolution of unpolarized and polarized parton distributions with QCD-PEGASUS. **Computer physics communications**, Elsevier, v. 170, n. 1, p. 65–92, 2005. 43
- [44] MARTIN, A.; STIRLING, W. J.; THORNE, R. S.; WATT, G. Parton distributions for the LHC. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 63, n. 2, p. 189–285, 2009. 43, 60, 61
- [45] HOOFT, G. Dimensional regularization and the renormalization group. **Nuclear Physics: B**, Elsevier, v. 61, p. 455–468, 1973. 43
- [46] GLÜCK, M.; REYA, E.; VOGT, A. Dynamical parton distributions of the proton and small- x physics. **Zeitschrift für Physik C Particles and Fields**, Springer, v. 67, n. 3, p. 433–447, 1995. 43
- [47] GONCALVES, V. A obtenção da distribuição de glúons na QCD para pequeno x . **Porto Alegre: Curso de Pós-Graduação em Física–UFRGS, Dissertação de Mestrado**, 1997. 43
- [48] PUMPLIN, J.; STUMP, D. R.; HUSTON, J.; LAI, H.-L.; NADOLSKY, P.; TUNG, W.-K. New generation of parton distributions with uncertainties from global QCD analysis. **Journal of High Energy Physics**, IOP Publishing, v. 2002, n. 07, p. 012, 2002. 43, 59
- [49] HARLAND-LANG, L.; MARTIN, A.; MOTYLINSKI, P.; THORNE, R. Parton distributions in the LHC era: MMHT 2014 PDFs. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 75, n. 5, p. 204, 2015. 43, 59

- [50] GOLEC-BIERNAT, K. Saturation and geometric scaling in DIS at small x . **Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics**, v. 28, p. 1057–1068, 2002. 44
- [51] GOLEC-BIERNAT, K. J. Saturation effects in DIS at low x . **Acta Physica Polonica B**, v. 33, p. 2771–2790, 2002. 44
- [52] GRIBOV, L.; LEVIN, E.; RYSKIN, M. Semihard Processes in QCD. **Physics Reports**, v. 100, p. 1–150, 1983. 46, 71
- [53] KUMANO, S.; NAGAI, T.-H. Comparison of numerical solutions for Q^2 evolution equations. **Journal of Computational Physics**, v. 201, p. 651–664, 2004. 49
- [54] DEVEE, M.; SARMA, J. Nonlinear GLR-MQ evolution equation and Q^2 evolution of gluon distribution function. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 74, n. 2, p. 2751, 2014. 49
- [55] _____. Analytical approach for the solution of the nonlinear GLR-MQ equation. In: **Proceedings of the Indian National Science Academy**. [S.l.: s.n.], 2015. v. 81, p. 16–21. 49
- [56] KOTIKOV, A.; LIPATOV, L.; VELIZHANIN, V. DGLAP and BFKL equations in the $N=4$ supersymmetric gauge theory. In: **Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine**. [S.l.: s.n.], 2004. v. 50, n. Part 2, p. 555–562. 49
- [57] ZILL, D. G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. [S.l.]: Cengage Learning Editores, 2003. 52, 54, 57, 73
- [58] BLOCK, M. M.; DURAND, L.; HA, P.; MCKAY, D. W. Applications of the leading-order Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi evolution equations to the combined HERA data on deep inelastic scattering. **Physical Review D**, APS, v. 84, n. 9, p. 094010, 2011. 52
- [59] BLOCK, M. M.; DURAND, L.; MCKAY, D. W. Analytic treatment of leading-order parton evolution equations: Theory and tests. **Physical Review D**, APS, v. 79, n. 1, p. 014031, 2009. 52
- [60] BUTKOV, E. **Física matemática**. [S.l.]: Livros Técnicos e Científicos, 1988. 54, 73
- [61] BOAS, M. L. **Mathematical methods in the physical sciences**. [S.l.]: Wiley, 2006. 54, 55
- [62] BOROUN, G. R.; ZARRIN, S.; TEIMOURY, F. Decoupling of the DGLAP evolution equations by Laplace method. **The European Physical Journal Plus**, v. 130, n. 10, p. 214, 2015. 56

- [63] FORTE, S. Parton distributions at the dawn of the LHC. **arXiv preprint arXiv:1011.5247**, 2010. 59
- [64] MARTIN, A.; ROBERTS, R.; STIRLING, W. J.; THORNE, R. Parton distributions incorporating QED contributions. **The European Physical Journal C-Particles and Fields**, Springer, v. 39, n. 2, p. 155–161, 2005. 60
- [65] GOLEC-BIERNAT, K.; SAPETA, S. Saturation model of DIS: an update. **Journal of High Energy Physics**, Springer, v. 2018, n. 3, p. 102, 2018. 61
- [66] _____. Heavy flavor production in DGLAP improved saturation model. **Physical Review D**, APS, v. 74, n. 5, p. 054032, 2006. 61
- [67] D'AMORE, L.; LACCETTI, G.; MURLI, A. Algorithm 796: A Fortran software package for the numerical inversion of the Laplace transform based on a Fourier series method. **ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)**, ACM, v. 25, n. 3, p. 306–315, 1999. 61
- [68] BOROUN, G.; ZARRIN, S. An approximate approach to the nonlinear DGLAP evaluation equation. **The European Physical Journal Plus**, Springer, v. 128, n. 10, p. 119, 2013. 71