

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS
INSTITUTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Efeitos da Cromodinâmica Quântica não-perturbativa no espalhamento inelástico profundo.*

Alexander Lunkes dos Santos

Dissertação realizada sob orientação do Prof. Dr. Emerson Gustavo de Souza Luna e apresentada ao Instituto de Física e Matemática da UFPel em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Pelotas
2010

* Trabalho financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)

Dedico este trabalho à

Minha família,
Minha namorada
e à DEUS em especial

Agradecimentos

Ao meu orientador, o professor Doutor Emerson Gustavo Souza Luna, pela paciência e companheirismo e sem o qual este trabalho não teria sido realizado.

Aos professores da pós-graduação, em especial ao professor Doutor Victor Paulo Barros Gonçalves, por acreditar em mim e pelo apoio durante o curso de mestrado, ao Professor Doutor Rudi Gaelzer pela ajuda com a instalação e manutenção do linux e ao professor Doutor Dimiter Hadjmichef, pelo incentivo ao meu ingresso nesse curso e por sempre estar disposto a ajudar.

Ao meu amigo Mario, que esteve sempre disposto a ajudar com os problemas de software do meu computador, pela ajuda com o modelo de dissertação e pelas discussões sempre interessantes durante os congressos que participamos.

Aos meus colegas de Mestrado, pelas conversas sempre muito divertidas e companhia sempre agradável na sala dos alunos.

À minha colega e amiga Anelise por ter sido a primeira pessoa a me comunicar a aprovação no mestrado, por sempre estar disposta a ajudar e pela companhia nas conversas.

À minha colega e amiga Mirian que me acompanha desde o início da faculdade, quando passávamos horas gastando telefone comparando resultados de questões, pelas conversas e por sempre estar disposta a ajudar e apoiar.

À minha irmã Caroline por estar sempre presente na minha vida e ajudando da melhor forma possível nesta caminhada.

Ao meus pais Isair e Noemi, pelo amor com o qual fui criado, pelo apoio e incentivo durante a minha caminhada de estudante e por nunca deixarem faltar o necessário para o meu crescimento.

À Minha namorada Juliana pela paciência, amor e compreensão, por estar sempre ao meu lado nos momentos difíceis e nos momentos felizes compartilhando as alegrias.

Resumo

Estudamos o efeito da massa dinâmica dos glúons em um tipo de solução para as equações DGLAP. As funções de distribuição partônicas obtidas como soluções da equação DGLAP, são acrescidas de correções subassintóticas que tornam viável, na região não-perturbativa, a extensão de cálculos perturbativos. Usamos duas versões canônicas para o acoplamento forte da QCD no cálculo da função de estrutura F_2 do próton, e comparamos os resultados com os dados experimentais na região de pequeno- x . Propomos dois *ansatzes* para o acoplamento forte que utilizam a massa dinâmica de glúons como regulador na região do infravermelho. Mostramos que a descrição de dados de F_2 utilizando os acoplamentos dinâmicos é melhor que a descrição utilizando os acoplamentos canônicos.

Abstract

We have studied the dynamical gluon mass effect in a special class of solution of the DGLAP equations. We have adopted subasymptotic corrections to the DGLAP evolution that allows the extension of the formalism to the non-perturbative region of QCD. We have investigated two canonical versions of the running coupling of QCD. We have proposed two dynamical ansatzes for the strong running coupling at NLO in order to investigate new phenomenological extensions of the coupling. Finally, we have compared the predictions of the structure function F_2 from the dynamical couplings to the experimental data, showing that the dynamical gluon mass is a natural regulator in infrared region.

Índice

Introdução	1
1. Introdução à Cromodinâmica Quântica	3
1.1 A Lagrangiana da QCD	4
1.2 A constante de acoplamento forte α_s	5
1.3 O espalhamento inelástico profundo	8
1.4 Modelo de pártons original	12
1.5 Modelo de pártons da QCD	15
2. Função de estrutura F_2 do Próton em pequeno-x	20
2.1 Solução geral das equações DGLAP	20
2.2 Duplo escalamento assintótico generalizado	22
2.2.1 Soluções DAS generalizado em LO	22
2.2.2 Soluções DAS generalizado em NLO	25
2.3 Resultados canônico e analítico	25
3. Acoplamentos dinâmicos $\bar{\alpha}_s$ em NLO	32
3.1 A massa dinâmica do glúon	32
3.2 Acoplamento dinâmicos e renormalizabilidade multiplicativa	33
3.2.1 Primeiro <i>ansatz</i> para o acoplamento em NLO	34
3.2.2 Segundo <i>ansatz</i> para o acoplamento em NLO	35
3.3 Resultados	35
Conclusões e Perspectivas	45
A. Dimensões anômalas	47
A.1 Cálculo dos Momentos das funções de Desdobramento	47
A.1.1 Cálculo de γ_{qq}	47

A.1.2	Cálculo de γ_{gg}	50
A.1.3	Cálculo de γ_{qg}	51
A.1.4	Cálculo de γ_{gq}	51
B.	Dados Experimentais	53
	Referências Bibliográficas	62

Relação de Figuras

1.1	Espalhamento elétron em uma nuvem de cargas.	9
1.2	espalhamento pontual entre duas poartículas sem estrutura, os valores P_A , P_B , P_C e P_D são os quadri-momenta de entrada e saída das partículas. . . .	10
1.3	espalhamento inelástico profundo, onde k e k' são os momenta inicial e final do elétron respectivamente, q é o momentum transferido p é o momentum do próton e X é o produto resultante do espalhamento.	11
1.4	Espalhamento elétron-parton. O elétron emite um fóton de virtualidade Q^2 , que interage com o párton de momentum ξ presente dentro do próton, que no final do processo apresenta uma massa m_q	13
1.5	Dados experimentais de HERA evidenciando a violação de Bjorken [39]. . . .	16
1.6	Processos que contribuem para o espalhamento inelástico profundo: (a)diagrama de ordem α_s^0 , que está relacionado ao modelo de pártons original e (b,c) são diagramas de Feynman de ordem de α_s , que estão relacionados ao modelo de pártons da QCD.	17
1.7	Diagramas de Feynman das funções de desdobramento. O termo P_{qq} é o desdobramento de um quark em um outro quark, P_{qg} é o desdobramento de um glúon em um quark, P_{gq} é o desdobramento de um quark em um glúon e P_{gg} é o desdobramento de um glúon em um outro glúon.	18
2.1	Descrição dos dados da função de estrutura F_2 obtida por meio do ajuste utilizando o acoplamento canônico NLO da QCD (α_s^{NLO}). Curvas obtidas fixando-se $\Lambda_4 = 245$ MeV.	28
2.2	Descrição dos dados da função de estrutura F_2 obtida por meio do ajuste utilizando o acoplamento analítico NLO da QCD (α_{an}^{NLO}). Curvas obtidas fixando-se $\Lambda_4 = 245$ MeV.	29
2.3	Comparação entre as descrição dos dados da função de estrutura F_2 obtidas por meio dos ajustes utilizando o acoplamento canônico NLO da QCD (curvas cheias) e o acoplamento analítico NLO da QCD (curvas tracejadas). Curvas obtidas fixando-se $\Lambda_4 = 245$ MeV.	30

2.4	Valores de χ^2/DoF em função dos valores de Λ_4 . Para as versões canônica (Quadrados) e analítica (círculos) do acoplamento forte.	31
3.1	Comparação dos comportamentos NLO do acoplamento forte da QCD nas versões canônica (linha pontilhada), <i>ansatz 1</i> (linha cheia) e <i>ansatz 2</i> (linha tracejada).	36
3.2	Descrição dos dados da função de estrutura F_2 obtida por meio do ajuste utilizando o primeiro <i>ansatz</i> NLO para o acoplamento dinâmico forte ($\alpha_{[1]}^{NLO}$). Curvas obtidas fixando-se $\Lambda_4 = 245$ MeV e $m_g = 370$ MeV.	38
3.3	Descrição dos dados da função de estrutura F_2 obtida por meio do ajuste utilizando o segundo <i>ansatz</i> NLO para o acoplamento dinâmico forte ($\alpha_{[2]}^{NLO}$). Curvas obtidas fixando-se $\Lambda_4 = 245$ MeV e $m_g = 370$ MeV.	39
3.4	Comparação entre as descrição dos dados da função de estrutura F_2 obtidas por meio dos ajustes utilizando os acoplamentos dinâmicos $\bar{\alpha}_{[1]}^{NLO}$ (curvas cheias) e $\bar{\alpha}_{[2]}^{NLO}$ (curvas tracejadas). Curvas obtidas fixando-se $\Lambda_4 = 245$ MeV e $m_g = 370$ MeV.	40
3.5	Valores de χ^2/DoF em função dos valores de Λ_4 . Para o <i>ansatz 1</i> (Quadrados) e <i>ansatz 2</i> (círculos) do acoplamento forte.	41
3.6	Descrição dos dados da função de estrutura F_2 obtida por meio do ajuste utilizando o segundo <i>ansatz</i> NLO para o acoplamento dinâmico forte ($\alpha_{[2]}^{NLO}$). Curvas obtidas fixando-se $\Lambda_4 = 245$ MeV.	42
3.7	Descrição dos dados da função de estrutura F_2 obtida por meio do ajuste utilizando o segundo <i>ansatz</i> NLO para o acoplamento dinâmico forte ($\alpha_{[2]}^{NLO}$). Curvas obtidas fixando-se $\Lambda_4 = \Lambda_5 = 163$ MeV.	43
3.8	Comparação entre as descrição dos dados da função de estrutura F_2 obtidas por meio dos ajustes utilizando o acoplamento dinâmico $\bar{\alpha}_{[2]}^{NLO}$. Curvas obtidas fixando-se $\Lambda_4 = 245$ MeV (curvas cheias) e $\Lambda_4 = \Lambda_5 = 163$ MeV (curvas tracejadas).	44

Relação de Tabelas

2.1	Valores numéricos para os parâmetros das dimensões anômalas.	24
2.2	Valores dos parâmetros A_g , A_q e Q_0^2 obtidos por meio dos ajustes dos dados experimentais de F_2 . Os erros dos parâmetros foram obtidos adotando-se um intervalo de confiança de 90%.	26
3.1	Valores dos parâmetros A_g , A_q e Q_0^2 obtidos por meio dos ajustes dos dados experimentais de F_2 . Valores obtidos fixando-se $\Lambda_4 = 245$ MeV e $m_g = 370$ MeV. Os erros dos parâmetros foram obtidos adotando-se um intervalo de confiança de 90%.	37
3.2	Valores dos parâmetros A_g , A_q e m_g obtidos por meio dos ajustes dos dados experimentais de F_2 . Valores obtidos fixando-se $\Lambda_{NLO} = 245$ e 163 MeV. Os erros dos parâmetros foram obtidos adotando-se um intervalo de confiança de 90%.	37

Introdução

A Cromodinâmica Quântica (*Quantum Chromodynamics*, QCD) [1, 2, 4, 3, 5] é a teoria para o estudo das interações fortes. Um processo físico muito estudado e conhecido é o espalhamento profundamente inelástico (*Deep Inelastic Scattering*, DIS). Estudado há vários anos, este processo foi de grande importância para a evolução da QCD como teoria, pois grande parte do conhecimento dos hádrons foram obtidos através deste tipo de espalhamento. O DIS se configura pela colisão entre um lépton e um hádron, geralmente um elétron e um próton. Através dele, obtemos dados a respeito de grandezas físicas que nos informam como se comportam e se dispõem os constituintes dos hádrons dentro dos mesmos, um exemplo, é a função de estrutura F_2 , que será o alvo deste trabalho. Portanto, através do uso da QCD, tenta-se buscar a descrição destas grandezas e assim obter uma modelagem da estrutura hadrônica.

Podemos dizer que a QCD divide-se em duas partes ou regiões: a QCD perturbativa e a QCD não-perturbativa. O termo perturbativo vem da possibilidade da expansão da função de estrutura F_2 , por exemplo, em potências do acoplamento forte α_s . Neste caso, o acoplamento α_s deve assumir valores $\alpha_s < 1$ para que esta expansão seja convergente. A QCD perturbativa prevê um comportamento divergente para o acoplamento α_s na região de pequeno momentum transferido, $Q^2 \ll 1$, chamada de região do infravermelho (IV) ou região não-perturbativa. Assim surge a necessidade de introdução de métodos não-perturbativos para o estudo do comportamento de α_s no IV, tais como QCD na rede ou Equações de Schwinger-Dyson (ESD) [6, 7, 8, 9, 10]. Uma das soluções existentes para a ESD do propagador do glúon, obtida por Cornwall [6], leva a um acoplamento α_s finito no IV. Este novo α_s , denotado por $\bar{\alpha}_s$, contém um termo, devido à massa dinâmica adquirida pelos glúons, que regula (congela) o seu comportamento em pequeno Q^2 . Porém, a solução obtida por Cornwall apresenta apenas uma versão em ordem dominante (*Leading Order*, LO) para o acoplamento forte.

Nesta dissertação propomos dois *ansatzes* para o acoplamento forte $\bar{\alpha}_s$ em ordem seguinte à dominante (*Next to Leading Order*, NLO), que são baseados na propriedade de renormalizabilidade multiplicativa. Tal propriedade exige que, em limite perturbativo, o acoplamento proposto seja igual ao acoplamento forte NLO da QCD. Assim no *ansatz 1*, considerando a validade da igualdade $\bar{\alpha}_s^{NLO} / \bar{\alpha}_s^{LO} = \alpha_s^{NLO} / \alpha_s^{LO}$, propomos, que na região não-perturbativa,

a razão $\alpha_s^{NLO}/\alpha_s^{LO}$ mantenha o mesmo comportamento que possuía na região perturbativa. Em seguida, exigimos continuidade no ponto de divisão das duas regiões. No *ansatz* 2, usamos o acoplamento forte canônico NLO, e realizamos a substituição de $Q^2 + 4M_g^2(Q^2)$, que o torna válido para qualquer valor de Q^2 . Assim estudamos os efeitos de ambos os *ansatzes* no comportamento da função de estrutura do próton F_2 . Para isto usaremos a proposta de solução [11, 12, 13] para as equações DGLAP [14, 15, 16, 17]. Tais soluções consideram a aproximação do duplo escalamento assintótico (*Double Asymptotic Scale*, DAS) generalizado, onde são adicionadas correções subassintóticas para o limite de pequeno Q^2 .

No estudo da função F_2 usamos diferentes formas para o acoplamento forte da QCD. Uma delas é a própria versão NLO do acoplamento previsto pela QCD perturbativa, chamado de acoplamento canônico, que neste caso, pode ser aplicado em vista das correções realizadas à F_2 ; outra forma é a formulação analítica proposta por Shirkov e Solovtsov [18, 19] considerando a analiticidade do acoplamento α_s ; por fim analisamos os dois *ansatzes* propostos para o acoplamento dinâmico forte $\bar{\alpha}_s$ em NLO. Com os dois *ansatzes* obtemos um bom acordo com os dados experimentais.

Agora, para falarmos sobre o espalhamento profundamente inelástico (DIS), que será um dos focos deste trabalho, é importante ressaltar que ele é basicamente desenvolvido em aceleradores de partículas. Estes desempenham um papel fundamental para colaborar com o desenvolvimento da Física de partículas. Com o passar dos anos e o desenvolvimento da tecnologia disponível os aceleradores são aperfeiçoados. Quanto melhor a tecnologia maior a energia de colisão entre as partículas participantes. Isto, para o DIS, significa uma maior resolução do que é “observado”. Os dados usados neste trabalho foram obtidos no acelerador localizado na Alemanha, chamado DESY, através do experimento HERA por meio das colaborações H1 e ZEUS [20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31]. Porém, temos a expectativa de melhores dados com o funcionamento do LHC (Grande Colisor de Hádrons) situado no CERN em Genebra.

A dissertação está organizada da seguinte forma: no capítulo 1 temos uma introdução a QCD onde apresentamos uma breve discussão sobre a descrição do acoplamento forte da QCD, os modelos de pártons original e da QCD. No capítulo 2 apresentamos uma solução geral das equações DGLAP, introduzimos o DAS generalizado e fazemos a comparação com os dados experimentais que estão presentes no apêndice B, utilizando a versão canônica e a analítica do acoplamento forte. No capítulo 3 temos a descrição do acoplamento forte não-perturbativo proposto por Cornwall, com duas seções onde introduzimos nossos *ansatzes* para a extensão NLO deste acoplamento. Após este capítulo temos a conclusão do trabalho, o apêndice A que apresenta o cálculo das dimensões anômalas presentes nas distribuições partônicas e os dados experimentais usados no apêndice B.

Capítulo 1

Introdução à Cromodinâmica Quântica

A Cromodinâmica Quântica (QCD) [4, 5], teoria das interações de quarks e glúons, fornece a descrição das interações fortes e está contida no Modelo Padrão (MP). Para ter algum sentido a comparação entre teoria e experimento, precisamos de um formalismo relacionando quantidades calculáveis e quantidades mensuráveis. Para processos de altas energias, a QCD perturbativa fornece este quadro através do teorema de fatorização, onde as seções de choque são fatorizadas, para todas as ordens do acoplamento α_s da QCD, em uma seção de choque dura (*hard*), entre os quarks elementares e em uma parte suave (*soft*), constituída de funções de distribuição universal de pártons¹ dentro dos hádrons. Os termos dura e suave surgem devido as regiões de comportamento do acoplamento forte.

A região dura ou perturbativa permite o uso de métodos perturbativos na descrição dos processos de espalhamento, pois o acoplamento α_s da QCD torna-se pequeno. Além disso, nesta mesma região cinemática caracterizada por altas energias (e/ou pequenas distâncias), a QCD apresenta uma propriedade muito importante, chamada de liberdade assintótica, onde a interação entre os pártons torna-se muito fraca, e então podemos considerá-los livres.

Já em pequenas energias (e/ou grandes distâncias), conhecida também como região suave, métodos perturbativos não podem ser aplicados, em vista de que nesta região, chamada de infravermelha, o acoplamento forte da QCD torna-se muito grande. São encontradas singularidades nesta região ao aplicarmos teoria de perturbação. Outra evidência da inadequação da QCD perturbativa para este regime, é a não observação de quarks e glúons livres, chamada de propriedade de confinamento de cor. Com isso, métodos não-perturbativos têm sido desenvolvidos para tratar este regime de energia.

¹ Tais funções, bem como o termo “pártons” serão definidos mais adiante.

1.1 A Lagrangiana da QCD

Na QCD, o cálculo perturbativo de qualquer processo exige o uso das regras de Feynman para descrever as interações de quarks e glúons. As regras de Feynman podem ser derivadas da densidade Lagrangiana dada por [4, 5, 32]

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_{\text{clássica}} + \mathcal{L}_{\text{cf}} + \mathcal{L}_{\text{fan}}. \quad (1.1)$$

A expressão para a densidade de Lagrangiana clássica é

$$\mathcal{L}_{\text{clássica}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + i \sum_q \bar{\psi}_q^r \gamma^\mu (D_\mu)_{rs} \psi_q^s - \sum_q m_q \bar{\psi}_q^r \psi_{qr}, \quad (1.2)$$

onde $r, s = 1, 2, 3$, são os índices de cor dos quarks, $q = u, d, s, c, b, t$, são os sabores dos quarks e ψ são os campos de quarks. As matrizes gama de Dirac satisfazem a relação de anti-comutação $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$. A densidade de Lagrangiana clássica descreve a interação de quarks de spin 1/2 massivos e glúons de spin 1 sem massa. O tensor de campo $F_{\mu\nu}^a$ é definido em termos dos campos de glúons G_μ^A na forma

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^A - \partial_\nu G_\mu^A - gf^{ABC} G_\mu^B G_\nu^C, \quad (1.3)$$

os índices A, B, C assumem qualquer um dos oito graus de liberdade do campo de glúons e g é a constante de acoplamento. O termo f^{ABC} representa as constantes de estrutura do grupo $SU(3)_c$, que são simétricas sob a troca de qualquer dois índices e satisfazem a identidade de Jacobi.

O terceiro termo no lado direito da equação (1.3) distingue a QCD da Eletrodinâmica Quântica (*Quantum Electrodynamics*, QED). Ele que é responsável pelos diagramas de auto-interação de três e quatro glúons, demonstra o caráter não abeliano da QCD e dá origem à propriedade de liberdade assintótica da QCD.

A derivada covariante D tem a forma

$$(D_\mu)_{rs} = \partial_\mu \delta_{rs} + ig(t^C G_\mu^C)_{rs}, \quad (1.4)$$

quando atua nos campos de quarks, e

$$(D_\mu)_{AB} = \partial_\mu \delta_{AB} + ig(T^C G_\mu^C)_{AB}, \quad (1.5)$$

quando atua nos campos de glúons. Chamamos t^C e T^C os geradores de $SU(3)$ na forma fundamental e adjunta, respectivamente. Eles satisfazem as seguintes relações de comutação:

$$[t^a, t^b] = if^{abc} t^c \quad (1.6)$$

e

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c. \quad (1.7)$$

As densidades de Lagrangianas \mathcal{L}_{cf} e \mathcal{L}_{fan} [4] surgem da necessidade de o propagador do glúon depender da escolha do calibre. Assim \mathcal{L}_{cf} fixa a classe de calibres covariantes, enquanto que \mathcal{L}_{fan} (densidade de Lagrangiana fantasma) cancela os graus de liberdade não físicos que seriam propagados nestes calibres.

1.2 A constante de acoplamento forte α_s

Para calcularmos processos em ordens maiores que a ordem dominante precisamos considerar diagramas de Feynman com laços (*loops*), que obviamente possuem um termo $g^2/(2\pi)^4$ para cada laço. Nestas ordens superiores a QCD apresenta divergências que devem ser absorvidas para termos resultados finitos. Para resolver este problema utiliza-se uma escala de renormalização onde a divergência desaparece com a condição da introdução desta escala μ e assim alterando as quantidades renormalizadas. Um exemplo é a constante de acoplamento forte que passa a depender explicitamente de μ . Uma vez que nenhuma quantidade Física pode depender do valor escolhido para μ , uma mudança na escala de renormalização deve ser corrigida com uma mudança no acoplamento efetivo α_s [33].

Assim, seja uma quantidade física adimensional qualquer \mathcal{R} que depende de uma escala de energia Q . Como \mathcal{R} é adimensional ele pode depender apenas da razão $\frac{Q^2}{\mu^2}$ e da constante de acoplamento α_s , não possuindo dependência explícita em μ :

$$\mathcal{R}\left(\frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha_s, \mu\right) = \mathcal{R}\left(\frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha_s\right). \quad (1.8)$$

Para que \mathcal{R} seja independente de μ a sua derivada total em relação a μ deve ser nula. Portanto

$$\mu^2 \frac{d\mathcal{R}(e^\tau, \alpha_s)}{d\mu^2} = \left(\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \mu^2 \frac{\partial \alpha_s}{\partial \mu^2} \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \right) \mathcal{R} = 0, \quad (1.9)$$

onde $\tau \equiv \ln(Q^2/\mu^2)$. A equação acima pode ser reescrita na forma, [33]:

$$\left(-\frac{\partial}{\partial \tau} + \beta(\alpha_s) \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \right) \mathcal{R}(e^\tau, \alpha_s) = 0, \quad (1.10)$$

onde $\beta(\alpha_s)$ é a função beta da QCD, definida como

$$\beta(\alpha_s) \equiv \mu^2 \frac{\partial \alpha_s}{\partial \mu^2} = \frac{\partial \alpha_s}{\partial \ln \mu^2}. \quad (1.11)$$

A equação (1.10) é conhecida como equação do grupo de renormalização (*Renormalization group equation*, RGE), pois indica como a mudança na escala μ é compensada por uma alteração no acoplamento α_s . Ela pode ser resolvida introduzindo-se o acoplamento $\alpha_s(\tau)$, que é função da escala Q , tal que

$$\tau = \int_{\alpha_s}^{\alpha_s(\tau)} \frac{d\alpha_s}{\beta(\alpha_s)}, \quad (1.12)$$

onde usamos a condição de contorno $\alpha_s(\tau)|_{\tau=0} = \alpha_s$. Realizando algumas operações, obtemos as seguintes relações:

$$\frac{d\alpha_s(Q^2)}{d\tau} = \beta(\alpha_s(Q^2)) \quad (1.13)$$

e

$$\frac{d\alpha_s(Q^2)}{d\alpha_s} = \frac{\beta(\alpha_s(Q^2))}{\beta(\alpha_s)}. \quad (1.14)$$

Neste processo, transferimos toda a dependência de \mathcal{R} na escala para o acoplamento α_s , portanto temos

$$\mathcal{R}(e^\tau, \alpha_s) = \mathcal{R}(1, \alpha_s), \quad (1.15)$$

que é solução da equação (1.10) com a condição de contorno $\alpha_s(\tau)|_{\tau=0} = \alpha_s$ e permite a predição de \mathcal{R} em função de Q .

Observamos que nas equações (1.13) e (1.14) há uma função $\beta(\alpha_s(Q^2))$ que não é conhecida. Ela pode ser expandida na forma [4, 34, 35, 36]

$$\beta(\alpha_s(Q^2)) = -b_0 \alpha_s^2(Q^2) - b_1 \alpha_s^3(Q^2) - b_2 \alpha_s^4(Q^2) + \dots \quad (1.16)$$

onde

$$b_0 = \frac{\beta_0}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \left(11 - \frac{2}{3} n_s \right), \quad (1.17)$$

$$b_1 = \frac{\beta_1}{16\pi^2} = \frac{1}{16\pi^2} \left(102 - \frac{38}{3} n_s \right), \quad (1.18)$$

sendo n_s o número de sabores dos quarks com massa $m_q < Q$. Os termos $b_{n \geq 2}$ dependem do esquema de renormalização adotado. No esquema de Subtração Mínima Modificado (*Modified Minimal Subtraction*, \overline{MS}), o termo b_2 é dado por [37]:

$$b_2 = \frac{\beta_2}{64\pi^3} = \frac{1}{64\pi^3} \left(\frac{2857}{2} - \frac{5033}{18}n_s + \frac{325}{54}n_s^2 \right). \quad (1.19)$$

Usando a expansão (1.16) e a expressão (1.11), porém considerando-as como função de Q , temos

$$\frac{d\alpha_s(Q^2)}{d\tau} = Q^2 \frac{d\alpha_s(Q^2)}{dQ^2} = -b_0\alpha_s^2 \left[1 + \frac{b_1}{b_0}\alpha_s(Q^2) + \frac{b_2}{b_0}\alpha_s^2(Q^2) + \dots \right]. \quad (1.20)$$

Os acoplamentos α_s^{LO} e α_s^{NLO} podem ser obtidos da seguinte forma: escrevendo os parâmetros b_n na forma

$$b_n = b_0 \left(\frac{b_1}{b_0} \right)^n, \quad (1.21)$$

a expressão (1.20) é dada por

$$\begin{aligned} Q^2 \frac{d\alpha_s}{dQ^2} &= -b_0\alpha_s^2(Q^2) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b_1}{b_0}\alpha_s(Q^2) \right)^n \\ &= -\frac{b_0\alpha_s^2(Q^2)}{1 - \frac{b_1}{b_0}\alpha_s(Q^2)}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Desta forma podemos escrever

$$\int_{\alpha_s(\mu^2)}^{\alpha_s(Q^2)} \left(\frac{b_1}{b_0^2} \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{b_0\alpha^2} \right) d\alpha = \ln \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right), \quad (1.23)$$

cuja solução é

$$\frac{1}{b_0\alpha_s(Q^2)} - \frac{1}{b_0\alpha_s(\mu^2)} + \frac{b_1}{b_0^2} \ln \left(\frac{\alpha_s(Q^2)}{\alpha_s(\mu^2)} \right) = \ln \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right). \quad (1.24)$$

Separando-se os termos que dependem de Q dos termos que dependem de μ , encontramos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{b_0\alpha_s(Q^2)} - \frac{b_1}{b_0^2} \ln(\alpha_s(Q^2)) + \ln Q^2 &= -\frac{1}{b_0\alpha_s(\mu^2)} - \frac{b_1}{b_0^2} \ln(\alpha_s(\mu^2)) + \ln \mu^2 \\ &= C, \end{aligned} \quad (1.25)$$

onde C é uma constante arbitrária. Neste ponto é conveniente introduzirmos um parâmetro dimensional Λ na definição de $\alpha_s(Q^2)$. Este é adicionado de forma a representar a escala quando $\alpha_s \rightarrow \infty$, com isso

$$\ln \left(\frac{Q^2}{\Lambda^2} \right) = \int_{\infty}^{\alpha_s(Q^2)} \frac{d\alpha}{\beta(\alpha)}. \quad (1.26)$$

Escrevemos C convenientemente na forma

$$C = \ln \Lambda^2 + \frac{b_1}{b_0^2} \ln b_0, \quad (1.27)$$

de forma que a expressão (1.25) passa a ser escrita na forma

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{1}{b_0 \left[\ln \left(\frac{Q^2}{\Lambda^2} \right) - \frac{b_1}{b_0^2} \ln(b_0 \alpha_s(Q^2)) \right]}, \quad (1.28)$$

que, ao ser expandida em potências de $1/\ln(Q^2/\Lambda^2)$, nos dá as expressões para os acoplamentos em LO e NLO:

$$\alpha_s^{LO}(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln \left(\frac{Q^2}{\Lambda^2} \right)} \quad (1.29)$$

e

$$\alpha_s^{NLO}(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln \left(\frac{Q^2}{\Lambda^2} \right)} \left[1 - \frac{\beta_1 \ln \ln \left(\frac{Q^2}{\Lambda^2} \right)}{\beta_0^2 \ln \left(\frac{Q^2}{\Lambda^2} \right)} \right]. \quad (1.30)$$

1.3 O espalhamento inelástico profundo

Na tentativa de “observarmos” uma distribuição de cargas, jogamos sobre ela um feixe de elétrons como está demonstrado na figura 1.1. Veremos que a resolução com a qual “observamos” é o ajuste no valor do momento transferido entre o elétron e o alvo.

No caso apresentado obtemos uma seção de choque diferencial dada da forma, [1, 4, 32],

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{pontual}} |F(q)|^2, \quad (1.31)$$

onde $F(q)$ é o fator de forma, que nos informa sobre a estrutura da distribuição de cargas, e q é o momento transferido entre o elétron e o alvo, $q = k' - k$, que neste caso é a nuvem carregada. O momento transferido elevado ao quadrado ($Q^2 = -q^2$) recebe o nome de virtualidade do fóton.

Supondo uma distribuição de carga do tipo $Z\rho(x)$ normalizada na forma

$$\int \rho(x) d^3x = 1, \quad (1.32)$$

podemos afirmar que, para um alvo fixo, o fator de forma em (1.31) é basicamente a transformada de Fourier da distribuição de carga,

$$F(q) = \int \rho(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} d^3x. \quad (1.33)$$

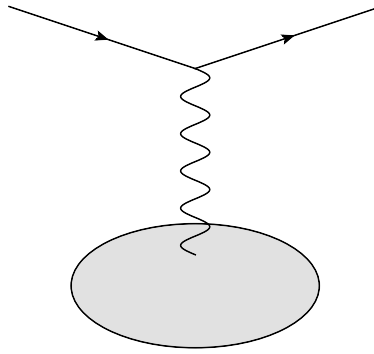


Fig. 1.1: *Espalhamento elétron em uma nuvem de cargas.*

No caso de um espalhamento onde o momentum transferido é muito pequeno, ou seja $q \rightarrow 0$, o valor de $F(q)$ em (1.33) recai em (1.32) sendo assim temos que

$$F(0) = 1, \quad (1.34)$$

ou seja, temos que a seção de choque diferencial em (1.31) volta a ter a forma do espalhamento pontual.

Assim o que foi apresentado acima se explica pelo fato de que em virtualidades baixas ($Q^2 R^2 \ll 1$), onde R^2 é o raio do alvo, não temos resolução alguma do alvo, o que vemos como um ponto. Já para virtualidades pouco maiores ($Q^2 R^2 \approx 1$), podemos ter uma ideia da forma do alvo, porém sem definir estrutura. Aumentando a virtualidade para valores grandes ($Q^2 R^2 \gg 1$), podemos então ter uma boa resolução da estrutura interna do alvo.

Antes de iniciarmos a discussão dos processos de espalhamento entre partículas, é necessária a definição dos tipos elástico e inelástico. Os processos de espalhamento elástico são caracterizados por observarmos no final as mesmas partículas que iniciaram o processo. Os processos de espalhamento inelástico, por sua vez, não mantêm a igualdade do número de partículas no final e no início, ou seja, uma ou ambas partículas são quebradas no processo.

Em processos de espalhamento pontual² elástico, a amplitude de espalhamento em função das variáveis de Mandelstam é [1, 2, 3]

$$|\mathcal{M}|^2 = 2e^4 \frac{s^2 + u^2}{t^2}, \quad (1.35)$$

onde desprezamos as massas dos participantes do processo. As variáveis de Mandelstam são definidas como:

$$s = (P_A + P_B)^2, = E_{CM}^2$$

² O processo pontual é caracterizado pela ausência de estrutura nas partículas espalhadas.

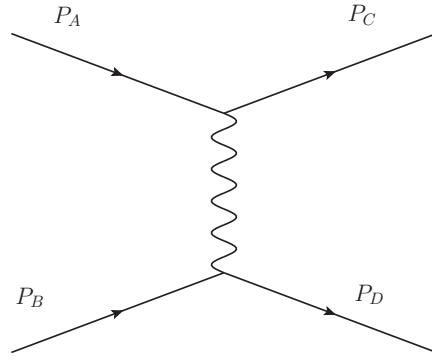


Fig. 1.2: espalhamento pontual entre duas partículas sem estrutura, os valores P_A , P_B , P_C e P_D são os quadri-momenta de entrada e saída das partículas.

$$\begin{aligned} t &= (P_A - P_C)^2 = -Q^2, \\ u &= (P_A - P_D)^2, \end{aligned} \quad (1.36)$$

e obedecem a seguinte identidade

$$s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2, \quad (1.37)$$

neste caso, ou seja, no canal s^3 a variável s é a soma ao quadrado dos quadri-momenta de entrada das partículas, que é igual ao quadrado da energia de centro de massa. A variável t é o negativo do momentum transferido ao quadrado, conhecido e já apresentado como virtualidade do fóton.

A partir desta amplitude obtemos a seção de choque diferencial usando que $P_A = P_B = P_C = P_D = k$ que é dada por

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{pontual}} = \frac{(Z\alpha)^2 E^2}{4k^4 \text{sen}^4 \frac{\theta}{2}} \left(1 - v^2 \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right), \quad (1.38)$$

onde $v = k/E$, $\alpha = e^2/4\pi$ é o acoplamento eletromagnético, com e sendo a carga do elementar, E é a energia total e θ é o ângulo de espalhamento do elétron.

O processo de interesse aqui ($ep \rightarrow eX$) mostrado na figura 1.3, é um processo inelástico que está no regime onde a virtualidade do fóton é grande ($Q^2 \gg m_p^2$), ou seja, é um processo profundo e o momento portado pelo sistema X , que é dado por $W^2 = (p + q)^2$ é grande também ($W^2 \gg m_p^2$).

Sabemos que o módulo quadrado da amplitude de espalhamento pode ser dada por

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{Q^4} L_{\mu\nu}^{(e)} W^{\mu\nu} (4\pi m_p). \quad (1.39)$$

³ Existem outros 2 canais além do s , os canais t e u . Uma leitura mais aprofundada pode ser encontrada no capítulo 3 de [3].

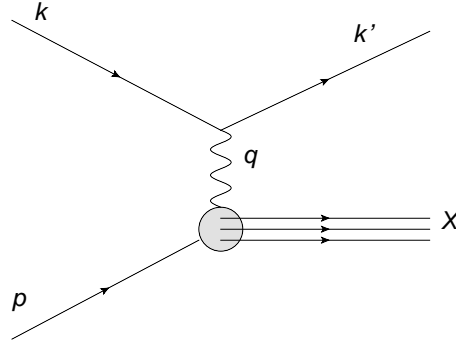


Fig. 1.3: espalhamento inelástico profundo, onde k e k' são os momenta inicial e final do elétron respectivamente, q é o momentum transferido p é o momentum do próton e X é o produto resultante do espalhamento.

O termo $(4\pi m_p)$ está incluído na expressão por conveniência. $L_{\mu\nu}$ e $W^{\mu\nu}$ são os tensores leptônico e hadrônico, respectivamente. No caso de um espalhamento elétron-muon ($e\mu \rightarrow e\mu$), o termo $(4\pi m_p)$ desaparece, e $W^{\mu\nu}$ torna-se $L_{\mu\nu}^{(\mu)}$. Por convenção escolhe-se k para o momento do elétron e p para o momento do alvo. O tensor Leptônico é dado por [1, 2]:

$$L_{\mu\nu}^{(e)} = \frac{1}{2} \sum_{e-spin} [\bar{u}(k')\gamma_\mu u(k)] [\bar{u}(k')\gamma_\nu u(k)]^*, \quad (1.40)$$

que pode ser reescrito como

$$L_{\mu\nu}^{(e)} = 2 \left(k'_\mu k_\nu + k'_\nu k_\mu - (k' \cdot k - m^2) g_{\mu\nu} \right), \quad (1.41)$$

onde m é a massa do elétron.

O tensor hadrônico é convenientemente dado por [1, 2]

$$W^{\mu\nu} = -W_1 g^{\mu\nu} + \frac{W_2}{M^2} p^\mu p^\nu + \frac{W_4}{M^2} q^\mu q^\nu + \frac{W_5}{M^2} [p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu], \quad (1.42)$$

que pode ser reescrito, utilizando a lei de conservação de carga $q_\mu W^{\mu\nu} = 0$, como

$$W^{\mu\nu} = -W_1 \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + W_2 \frac{1}{m_p^2} \left(p^\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\mu \right) \left(p^\nu + \frac{p \cdot q}{q^2} q^\nu \right), \quad (1.43)$$

onde encontramos que W_4 e W_5 são funções de W_1 e W_2 . Podemos então renomear as variáveis W_1 e W_2 da seguinte forma:

$$F_1(x, Q^2) = m_p W_1 \quad e \quad F_2(x, Q^2) = \frac{p \cdot q}{m_p} W_2. \quad (1.44)$$

Usando (1.44), (1.43), (1.41) e (1.39), obtemos a seguinte expressão para a seção de choque diferencial:

$$\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{xQ^4} \left[y^2 x F_1(x, Q^2) + (1-x) F_2(x, Q^2) \right], \quad (1.45)$$

onde

$$y = \frac{Q^2}{xs} \quad \text{e} \quad x = \frac{Q^2}{2p \cdot q}. \quad (1.46)$$

As funções $F_1(x, Q^2)$ e $F_2(x, Q^2)$ são parâmetros onde depositamos o nosso desconhecimento a respeito da estrutura do hádron. Ainda não sabemos quais são as formas destas funções, porém através de medidas experimentais, podemos determiná-las. Mais precisamente, através de sucessivas medidas da seção de choque diferencial em função de alguns valores de x e Q^2 , obtemos o valor de $F_2(x, Q^2)$. A função $F_1(x, Q^2)$, por ter uma contribuição muito pequena para a seção de choque, é determinado teoricamente. Portanto devemos encontrar um argumento físico que justifique os parâmetros F_1 e F_2 .

1.4 Modelo de pártons original

Neste modelo, um fóton interage com um dos constituintes do próton (chamados de pártons), sendo que os pártons possuem uma fração do momento do próton, ou seja, $p_i = \xi p$. Isto ocorre no referencial onde o próton possui grande momento, ou seja, $p \gg m_p$. Desta forma, os quarks (partóns) estão livres no intervalo de interação com o fóton, sendo que este intervalo é muito curto. Neste caso, a interação elétron-próton pode ser descrita pela soma de amplitudes de espalhamento entre o elétron e os pártons.

Portanto [1, 2]

$$\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} = \sum_q \int_0^1 d\xi f_q(\xi) \left(\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} \right)_{eq}, \quad (1.47)$$

onde $f_q(\xi)$ são as chamadas funções de distribuição de pártons (*Parton Distribution Functions*, PDF) que fornecem o número de quarks carregando uma fração x do momento longitudinal do hádron e o produto $f_q(\xi)d\xi$ representa a probabilidade de encontrar um quark de sabor q , carregando uma fração de momento do próton no intervalo de ξ e $\xi + d\xi$, onde ξ varia entre $0 \leq \xi \leq 1$.

Agora na tentativa de resolver a eq. (1.47), devemos, em primeiro lugar, encontrar $\left(\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} \right)_{eq}$. Sabemos que, para a virtualidade do fóton em questão, este interage com os partons do próton, como indica a figura 1.4.

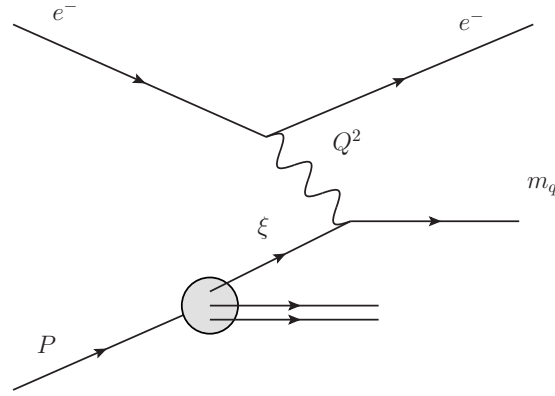


Fig. 1.4: *Espalhamento elétron-parton. O elétron emite um fóton de virtualidade Q^2 , que interage com o parton de momentum ξ presente dentro do próton, que no final do processo apresenta uma massa m_q .*

O termo m_q é a massa do parton envolvido no espalhamento e pela condição de camada de massa⁴ temos

$$m_q^2 = (\xi p + q)^2, \quad (1.48)$$

de onde obtemos

$$\xi = \left(1 + \frac{m_q^2}{Q^2}\right) x, \quad (1.49)$$

que, para grande virtualidades, torna-se

$$\xi = x \quad \text{com} \quad Q^2 \gg m_q^2. \quad (1.50)$$

Portanto, x , em grandes virtualidades, torna-se a parcela de momento do próton portado pelo parton.

Agora tomando a expressão (1.35), e observando que o espalhamento elétron-parton é um espalhamento pontual, obtemos a seguinte seção de choque:

$$\frac{d\sigma}{d\hat{t}} = \frac{2\pi\alpha^2 e_q^2}{\hat{s}^2} \left(\frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} \right), \quad (1.51)$$

onde o circunflexo em \hat{s} , \hat{t} e \hat{u} indica que este é um sub-processo⁵, e as variáveis de Mandelstam assumem as seguintes formas no limite $s \gg m_p$ [1, 2, 3]

$$\hat{s} = (k + xp)^2 \simeq x(2k \cdot p) \simeq xs,$$

⁴ Uma partícula real está na camada de massa quando sua massa ao quadrado é igual ao seu quadri-momentum ao quadrado, ou seja, se $P = (p^0, p^\mu)$ e m são o quadri-momentum e a massa da partícula, respectivamente, a condição de camada de massa é $m^2 = P^2$.

⁵ Considerando que o processo principal é elétron-próton, o sub-processo é o espalhamento entre o elétron e o parton, como é indicado na figura 1.4.

$$\begin{aligned}\hat{t} &= (k - k')^2 \simeq t = -Q^2, \\ \hat{u} &= (k' - xp)^2 \simeq x(-2k' \cdot p) \simeq xu,\end{aligned}\tag{1.52}$$

pois as formas definidas em (1.36) são para o espalhamento elétron-próton.

Aplicando (1.52) na equação (1.51) temos

$$\left. \frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} \right|_{eq} = \frac{2\pi\alpha^2 e_q^2}{Q^4} [1 + (1 - y)^2] \delta(x - \xi).\tag{1.53}$$

Substituindo em (1.47) e através de algumas manipulações matemáticas obtemos

$$\left. \frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} \right|_{eP \rightarrow eX} = \frac{4\pi\alpha^2 e_q^2}{xQ^4} \sum_i \int d\xi f_i(\xi) e_q^2 \frac{x}{2} [1 + (1 - y)^2] \delta(x - \xi).\tag{1.54}$$

A seguir igualamos esta equação obtida acima com (1.45) e obtemos

$$2xF_1 = F_2 = \sum_i e_q^2 x f_i(x),\tag{1.55}$$

que é chamada de relação de *Callan-Gross* [38], consequência direta dos pártons serem férmions e que evidencia a não dependência das funções F_1 e F_2 do momento transferido Q^2 , ou seja, $F_1 = F_1(x)$ e $F_2 = F_2(x)$. Esta não dependência da função de estrutura é também chamada de escalamento de Bjorken, pois independente do valor de Q^2 , a função continua apenas dependendo de x .

Porém este modelo mostrou-se falho. Na tentativa de reconstituir o momento total do próton, somando-se as parcelas portadas por cada parton, obteve-se apenas 50% do momento do próton.

$$\int_0^1 x dx [u(x) + \bar{u}(x) + d(x) + \bar{d}(x) + s(x) + \bar{s}(x)] \approx 0.5\tag{1.56}$$

onde

$$\begin{aligned}u(x) &= f_u(x) \\ \bar{u}(x) &= f_{\bar{u}}(x) \\ d(x) &= f_d(x) \\ \bar{d}(x) &= f_{\bar{d}}(x) \\ s(x) &= f_s(x) \\ \bar{s}(x) &= f_{\bar{s}}(x)\end{aligned}\tag{1.57}$$

são as funções de distribuição de partons.

Portanto, deve existir algum outro objeto que porta o restante do momento do próton. Antes mesmo desse fato ser observado, o modelo já não era bem aceito, pois os pártons, por não possuírem interação entre si, deveriam, em um determinado experimento, ser detectados livremente, porém, isso nunca ocorreu.

1.5 Modelo de pártons da QCD

O modelo de pártons apresentado acima [1, 2, 4, 3, 5] continua válido para uma determinada região de x onde Q^2 permanece constante, porém devemos reformular este modelo para incluir aspectos referentes a emissão e troca de glúons. O modelo anterior nos ajuda na construção de um novo modelo. A QCD possui uma propriedade chamada fatorização e os resultados obtidos no modelo de pártons original, não são descartados, mas sim incorporados nas equações em teoria de perturbação. Portanto, o primeiro termo da série perturbativa é devido ao modelo de pártons original.

Outro fator que fez com que se procurasse uma nova formulação para a descrição das distribuições partônicas foi o fato da observação experimental da violação do escalamento de Bjorken. Assim a violação, mostrada na figura 1.5, se dá conforme o crescimento de x , por logaritmos de Q^2 . A função de estrutura que antes dependia apenas de x , agora passa a depender também de Q^2 ,

$$F_2 = F_2(x, Q^2). \quad (1.58)$$

Buscamos agora a descrição, neste novo modelo, de F_2 e das distribuições de pártons dentro do hádron.

O problema surge na possibilidade do quark emitir um ou mais glúons antes de ocorrer a interação elétron-quark. O quark anteriormente com parcela de momentum y perde momenta para o glúon e fica com parcela x onde $x < y$. A emissão de n glúons contribui com $[\alpha_s \ln(Q^2/\mu^2)]^n$, ou seja, logaritmos de Q^2 surgem a partir da integração sobre o espectro de emissão de momentum do glúon (*bremstrahlung*), de tal forma que o cálculo da contribuição do diagrama (b) da figura 1.6 para a função de estrutura nos dá [1, 2, 4, 3, 5]

$$\frac{\alpha_s}{2\pi} \int_{\kappa^2}^{Q^2} \frac{dk_T^2}{k_T^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \ln \left(\frac{Q^2}{\kappa^2} \right), \quad (1.59)$$

onde κ é a escala que separa a região perturbativa da região não-perturbativa. Na expressão (1.59) temos uma singularidade em $\kappa^2 = 0$ que em seguida deve ser absorvida pela renormalização, pois nenhuma quantidade física pode depender do valor escolhido para a escala.

A função de estrutura F_2 fica,

$$\begin{aligned} F_2(x, Q^2) = & x \sum_q e_q^2 \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} f_q(\xi) \left\{ \delta \left(1 - \frac{x}{\xi} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left[P_{qq} \left(\frac{x}{\xi} \right) \ln \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right) + R \left(\frac{x}{\xi} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.60)$$

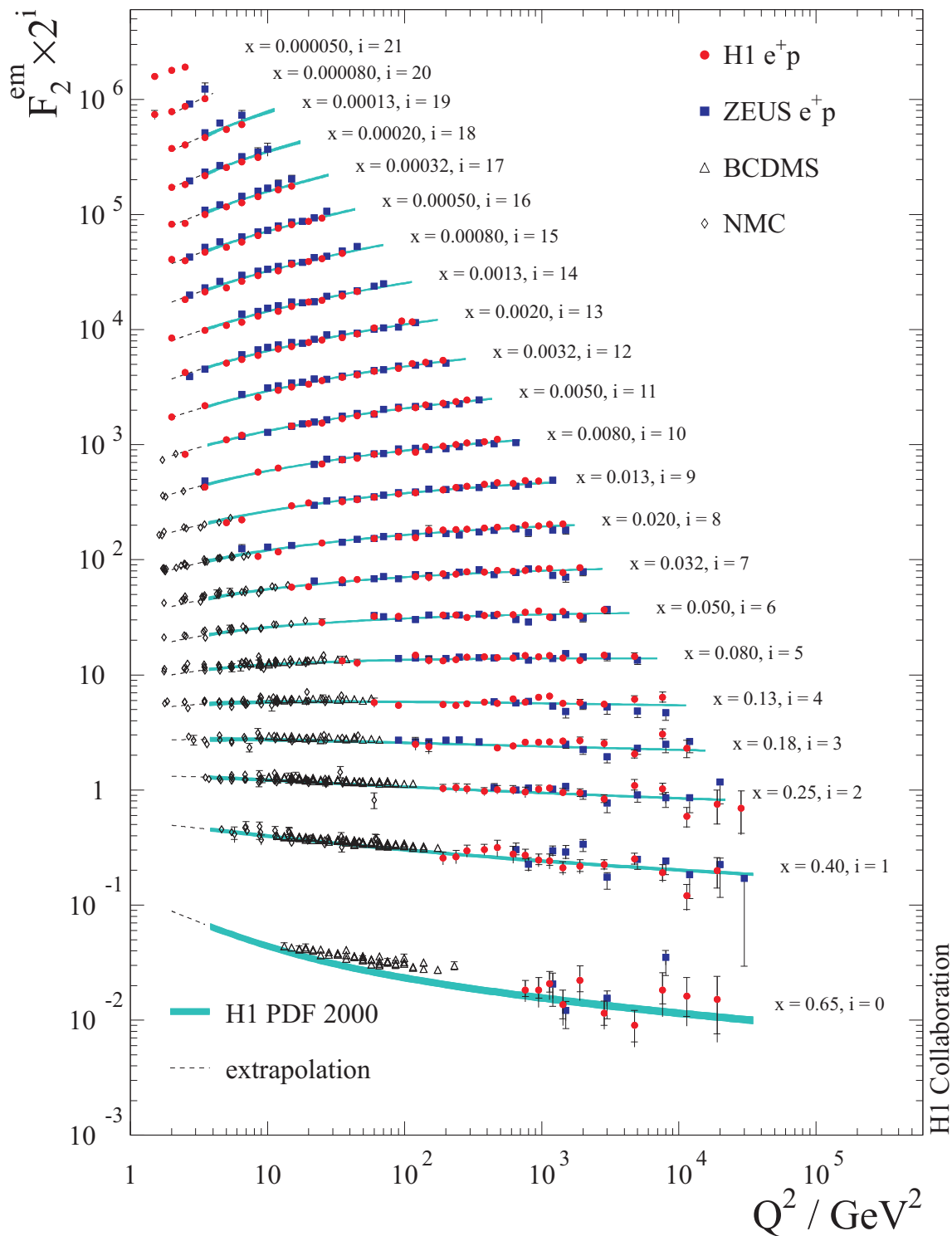


Fig. 1.5: Dados experimentais de HERA evidenciando a violação de Bjorken [39].

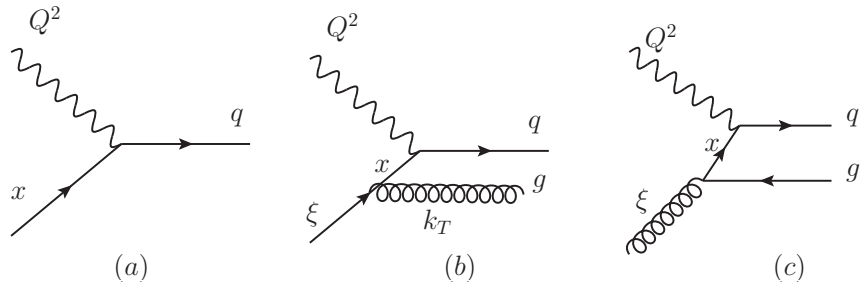


Fig. 1.6: Processos que contribuem para o espalhamento inelástico profundo: (a) diagrama de ordem α_s^0 , que está relacionado ao modelo de pártons original e (b,c) são diagramas de Feynman de ordem de α_s , que estão relacionados ao modelo de pártons da QCD.

onde $R\left(\frac{x}{\xi}\right)$ é uma função conhecida e os elementos de matriz $P_{ij}(z = x/\xi)$ com $i, j = q, g$, também chamadas de funções de desdobramento (*splitting functions*), são dadas por [1, 2, 4, 3, 5]:

$$P_{ij}(z, \alpha_s) = P_{ij}^{(0)}(z) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{ij}^{(1)}(z) + \dots, \quad (1.61)$$

onde os termos de LO (ordem dominante) são

$$P_{qq}(z) = \frac{4}{3} \left[\frac{1+z^2}{1-z} \right]_+ = \frac{4}{3} \left[\frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right], \quad (1.62)$$

onde

$$\int_0^1 dx [g(x)]_+ f(x) = \int_0^1 dx g(x) [f(x) - f(1)] \quad (1.63)$$

$$P_{gq}(z) = \frac{4}{3} \frac{1+(1+z)^2}{z}, \quad (1.64)$$

$$P_{qq}(z) = \frac{z^2 + (1+z)^2}{2}, \quad (1.65)$$

e

$$P_{gg}(z) = 6 \left[\frac{z}{(1-z)_+} + \frac{1-z}{z} + z(1-z) + \left(\frac{11}{12} - \frac{N_f}{18} \right) \delta(1-z) \right]. \quad (1.66)$$

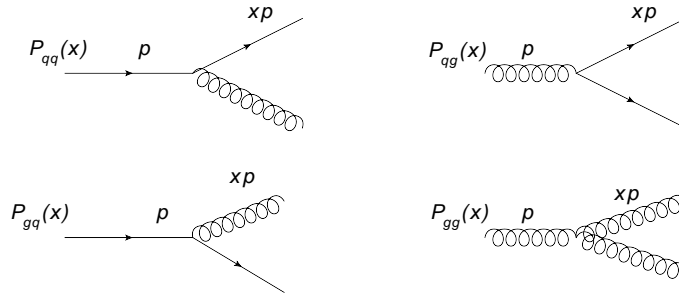


Fig. 1.7: Diagramas de Feynman das funções de desdobramento. O termo P_{qq} é o desdobramento de um quark em um outro quark, P_{qg} é o desdobramento de um glúon em um quark, P_{gq} é o desdobramento de um quark em um glúon e P_{gg} é o desdobramento de um glúon em um outro glúon.

Estas funções de desdobramento nos dão a probabilidade de um párton decair em outro. Por exemplo, a função $P_{gg}(z)$, é a probabilidade de um glúon desdobrar em outro glúon e a função $P_{qg}(z)$ é a probabilidade de um glúon desdobrar em um quark.

Agora, absorvendo as singularidades através da renormalização em (1.60), temos

$$f_a(x, Q^2) = f_a(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} f_a(\xi) P_{ab} \left(\frac{x}{\xi} \right) \ln \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right) \quad \text{onde } a, b = q, g \quad (1.67)$$

Obtemos a forma final da função de estrutura:

$$F_2(x, Q^2) = x \sum_q e_q^2 \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} f_a(\xi, Q^2) \left\{ \delta \left(1 - \frac{x}{\xi} \right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} R \left(\frac{x}{\xi} \right) \right\}, \quad (1.68)$$

onde o primeiro termo traz a informação referente ao modelo de pártons original, e o segundo nos dá a correção obtida pelo modelo de pártons da QCD.

No caso mais geral, derivando a equação (1.67) em relação a $\ln Q^2$ temos

$$\frac{\partial f_q(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} \left[f_q(\xi, Q^2) P_{qq} \left(\frac{x}{\xi} \right) + f_g(\xi, Q^2) P_{qg} \left(\frac{x}{\xi} \right) \right], \quad (1.69)$$

$$\frac{\partial f_g(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} \left[f_q(\xi, Q^2) P_{gq} \left(\frac{x}{\xi} \right) + f_g(\xi, Q^2) P_{gg} \left(\frac{x}{\xi} \right) \right], \quad (1.70)$$

onde os termos de glúons surgem da possibilidade criada pelo diagrama (c) da figura (1.6).

As equações (1.69) e (1.70), chamadas de equações de evolução DGLAP [14, 15, 16, 17], foram propostas por Dokshitzer, Gribov, Lipatov, Altarelli e Parisi. São equações integro-diferenciais acopladas, sendo que (1.69) depende da solução de (1.70) e vice-versa. Estas equações ditam a evolução das funções de distribuição partônicas, de acordo com Q^2 e a

partir de um valor inicial Q_0^2 , sendo que o valor de $f_a(x, Q_0^2)$ deve ser conhecido. Nesta dissertação trabalharemos em um tipo de soluções específicas obtidas nos trabalhos de A. V. Kotikov, G. Parente e A.Y. Illarionov [12, 13].

Capítulo 2

Função de estrutura F_2 do Próton em pequeno- x

Ao estudarmos espalhamento inelástico profundo, é interessante analisarmos várias regiões do espectro de energia. Uma delas, conhecida como região de pequeno x , foi assim intitulada, pois nestes processos de espalhamento, o elétron interage com um párton que possui uma fração muito pequena do momentum total do hádron. Esta fração x foi apresentada na equação (1.46) .

2.1 Solução geral das equações DGLAP

Em pequeno x uma solução possível para as equações de evolução DGLAP pode ser obtida considerando apenas os termos de glúons, que são predominantes nesta região. Vamos obter a solução geral inicialmente. Tomando a equação DGLAP, sem os termos de mistura e com α_s fixo,

$$\frac{\partial f_a(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{aa} \left(\frac{x}{y} \right) f_a(y, Q^2) \quad \text{onde } a = q, g \quad (2.1)$$

que pode ser reescrita na forma:

$$\frac{\partial f_a(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_0^1 dy \int_0^1 dz \delta(x - yz) P_{aa}(z) f_a(y, Q^2). \quad (2.2)$$

Integrando em x , obtemos:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x} x^n \frac{\partial f_a(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} &= \\ &= \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_0^1 dy \int_0^1 dz \int_0^1 \frac{dx}{x} x^n \delta(x - yz) P_{aa}(z) f_a(y, Q^2) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$= \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_0^1 \frac{dz}{z} z^n P_{aa}(z) \int_0^1 \frac{dy}{y} y^n f_a(y, Q^2), \quad (2.4)$$

onde o primeiro termo da equação acima pode ser reescrito da seguinte forma

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} x^n \frac{\partial f_a(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2} = \frac{\partial}{\partial \ln Q^2} \int_0^1 \frac{dx}{x} x^n f_a(x, Q^2), \quad (2.5)$$

onde definimos

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} x^n f_a(x, Q^2) \equiv M_a(n, Q^2); \quad (2.6)$$

portanto, $M_a(n, Q^2)$ é simplesmente a transformada de Mellin das distribuições partônicas.

Assim, derivando (2.6) em relação a $\ln Q^2$, obtemos

$$\frac{\partial M_a(n, Q^2)}{\partial \ln Q^2} = \int_0^1 \frac{dx}{x} x^n \frac{\partial f_a(x, Q^2)}{\partial \ln Q^2}. \quad (2.7)$$

Da mesma forma que fizemos em (2.6), podemos calcular a transformada de Mellin das funções de desdobramento,

$$\gamma_{aa}(n) = \int_0^1 \frac{dz}{z} z^n P_{aa}(z), \quad (2.8)$$

obtendo

$$\frac{\partial M_a(n, Q^2)}{\partial \ln Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \gamma_{aa}(n) M_a(n, Q^2). \quad (2.9)$$

Como uma possível solução da equação acima, temos

$$M_a(n, Q^2) = C_n e^{h_{aa}(n) \ln Q^2} = C_n (Q^2)^{h_{aa}(n)}, \quad (2.10)$$

onde $h_{aa}(n)$ é uma função qualquer definida na forma

$$h_{aa}(n) = \frac{\alpha_s}{2\pi} \gamma_{aa}(n). \quad (2.11)$$

Chamando

$$C_n = \frac{M_a(n, Q_0^2)}{(Q_0^2)^{h_{aa}(n)}}, \quad (2.12)$$

onde Q_0^2 é um valor inicial para a virtualidade do fóton, temos

$$M_a(n, Q^2) = M_a(n, Q_0^2) \left[\frac{Q^2}{Q_0^2} \right]^{h_{aa}(n)} \quad (2.13)$$

ou

$$M_a(n, Q^2) = M_a(n, Q_0^2) e^{h_{aa}(n) \ln \left[\frac{Q^2}{Q_0^2} \right]}, \quad (2.14)$$

que é uma possível solução geral para a equação DGLAP, onde $M_a(n, Q_0^2)$ é uma condição inicial necessária, a ser imposta, para obtermos a evolução das distribuições partônicas.

2.2 Duplo escalamento assintótico generalizado

Analisando o DIS em pequeno x , com pequena transferência de momentum entre os participantes do espalhamento, estaremos lidando com a chamada região suave. Nesta região cinemática, espera-se que soluções da equação DGLAP não sejam válidas, em vista de que o acoplamento forte perturbativo da QCD não tem significado nesta região. Porém, em alguns estudos já realizados [40] observou-se um bom acordo entre os dados experimentais da função de estrutura F_2 e suas derivadas e aproximações perturbativas da QCD nesta região.

Neste sentido, surgiram algumas soluções analíticas na tentativa de descrever este regime cinemático. Algumas destas soluções incorporam o fenômeno do duplo escalamento assintótico (*Double Asymptotic Scaling*, DAS) [41, 42], que está relacionado ao comportamento assintótico da DGLAP, evidenciado em [43]. O DAS configura-se com duas variáveis que governam o comportamento das distribuições partônicas e por consequência da função de estrutura no limite assintótico.

Estas soluções analíticas partem de um valor inicial de Q_0^2 e uma condição inicial da seguinte forma,

$$x f_a(x, Q_0^2) = A_a \quad (a = q, g), \quad (2.15)$$

sendo que A_a é uma constante a ser determinada com o procedimento de minimização, onde fazemos a análise de χ^2 [44, 45].

Usaremos as soluções para as equações DGLAP e que foram obtidas em [12, 13]. Tais soluções incorporam contribuições de operadores de Wilson com várias ordens *twist*. Nestas referências e em [46], podemos chamar a aproximação realizada de DAS generalizado. Nesta aproximação, a condição inicial na equação (2.15) faz o papel básico das partes singulares das dimensões anômalas, determinando o comportamento assintótico em pequeno x , como no DAS padrão, enquanto que as contribuições das partes regulares das dimensões anômalas e dos coeficientes de Wilson podem ser considerados como correções subassintóticas.

As distribuições de pártons obtidas para LO e NLO, considerando este processo, são divididas em duas componetes, “-” e “+”, na forma

$$f_a(x, Q^2) = f_a^+(x, Q^2) + f_a^-(x, Q^2). \quad (2.16)$$

2.2.1 Soluções DAS generalizado em LO

A seguir apresentamos as expressões LO das soluções e da função de estrutura [12, 13]:

$$x f_q^+(x, Q^2) = \frac{n_f}{9} \left(A_g + \frac{4}{9} A_q \right) \rho \tilde{I}_1(\sigma) e^{-\bar{d}_+(1)s} + \mathcal{O}(\rho), \quad (2.17)$$

$$f_g^+(x, Q^2) = \frac{9}{n_f} \frac{\tilde{I}_0(\sigma)}{\rho \tilde{I}_1(\sigma)} f_q^+(x, Q^2), \quad (2.18)$$

$$x f_q^-(x, Q^2) = A_q e^{-\bar{d}_-(1)s} + \mathcal{O}(x), \quad (2.19)$$

$$f_g^-(x, Q^2) = -\frac{4}{9} f_q^-(x, Q^2), \quad (2.20)$$

$$F_2(x, Q^2) = e x f_q(x, Q^2), \quad (2.21)$$

onde as variáveis responsáveis pelo DAS são

$$\sigma = \sqrt{\hat{d}_{gg} s \ln(x)} \quad (2.22)$$

e

$$\rho = \sqrt{\frac{\hat{d}_{gg} s}{\ln(x)}} = \frac{\sigma}{2 \ln(1/x)}. \quad (2.23)$$

com $s = \ln(\alpha_s(Q_0^2)/\alpha_s(Q^2))$. As funções $\bar{d}_+ = 1 + 20n_f/27\beta_0$, $\bar{d}_- = 16n_f/27\beta_0$, $\hat{d}_{gg} = \hat{d}_+ = 2/\beta_0$ são as partes regulares e singulares¹ das conhecidas dimensões anômalas no limite $n \rightarrow 1$ e $e = \sum_1^{n_f} e_q^2/n_f$ é a média quadrada dos sabores de quarks efetivos.

A função \hat{d}_{gg} presente em (2.22) e (2.23) é a parte singular de

$$d_{ab} = \frac{\gamma_{ab}^{(0)}(N)}{2\beta_0} \quad \text{onde} \quad a, b = q, g \quad (2.24)$$

onde $\gamma_{ab}^{(0)}$ é um coeficiente LO das dimensões anômalas dos pártons ab .

No apêndice A, as funções γ_{ab} são obtidas a partir da transformada de Mellin das funções de desdobramento (1.62), (1.64), (1.65) e (1.66).

Os termos D e p que surgem nas expressões apresentadas são:

$$D_{\pm}(n) = d_{\pm\pm}(n) - \frac{\beta_1}{\beta_0} d_{\pm}(n), \quad p = \alpha_s(Q_0^2) - \alpha_s(Q^2) \quad (2.25)$$

onde as componentes singulares e regulares das dimensões anômalas $d_{\pm\pm}(n)$ e $d_{\pm}(n)$ têm a forma:

$$\hat{d}_{++} = \frac{8T_R n_f}{9\beta_0} (23C_A - 26C_F), \quad (2.26)$$

$$\hat{d}_{+-}^q = -\frac{20C_A}{3}, \quad (2.27)$$

¹ Denotamos como \bar{d}_+ a parte regular e \hat{d}_+ a parte singular das dimensões anômalas.

\hat{d}_+	\hat{D}_+	$\bar{d}_+(1)$	$\bar{D}_+(1)$	$d_-(1)$	$D_-(1)$	$\bar{d}_{+-}^q(1)$	$\bar{d}_{+-}^g(1)$	$d_{-+}^g(1)$
-36/25	91096/5625	61/45	-45.485532	64/225	3.108220	2.618816	320/81	-89/27

Tab. 2.1: Valores numéricos para os parâmetros das dimensões anômalas.

$$\hat{d}_{+-}^g = 0, \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \bar{d}_{++}(1) &= \frac{8}{3\beta_0} \left[\frac{C_A^2}{3} \left(36\zeta(3) + 33\zeta(2) - \frac{1643}{12} \right) \right. \\ &\quad - \left(4C_F\zeta(2) + \frac{86}{9}C_A - \frac{547}{18}C_F + 3\frac{C_F^2}{C_A} \right) T_R n_f \\ &\quad \left. - \frac{26C_F}{9C_A} \left(1 - 2\frac{C_F}{C_A} \right) T_R^2 n_f^2 \right], \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\bar{d}_{+-}^q(1) = C_A \left(9 - 3\frac{C_F}{C_A} - 4\zeta(2) \right) - \frac{26}{9} \left(1 - 2\frac{C_F}{C_A} \right) T_R n_f, \quad (2.30)$$

$$\bar{d}_{+-}^g(1) = \frac{40T_R n_f}{9C_A}, \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} d_{--}(1) &= \frac{4C_A C_F}{\beta_0} \left(1 - 2\frac{C_F}{C_A} \right) \left(2\zeta(3) - 3\zeta(2) + \frac{13}{4} + \frac{52T_R^2 n_f^2}{27C_A^2} \right) \\ &\quad + \frac{8C_F}{3\beta_0} \left(4\zeta(2) - \frac{47}{18} + 3\frac{C_A}{C_F} \right) T_R n_f, \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$d_{-+}^q(1) = 0, \quad (2.33)$$

$$d_{-+}^g(1) = - \left[C_A + \frac{2}{3} \left(1 - 2\frac{C_F}{C_A} \right) T_R n_f \right] \quad (2.34)$$

onde $C_A = 3$, $C_F = 4/3$, $T_R = 1/2$, $n_f = 4$ e $\zeta(\xi)$, onde $\xi = 1, 2, 3, \dots$, são as funções zeta de Riemann.

Sendo que os valores numéricos das expressões acima, tirados da tabela I de [13], estão na tabela (2.1).

As funções $\tilde{I}_\nu(\sigma)$, presentes nas funções de distribuição partônicas, estão relacionadas as funções modificadas de Bessel I_ν e as funções de Bessel J_ν e são dadas por:

$$\tilde{I}_\nu(\sigma) = \begin{cases} I_\nu(\bar{\sigma}) & \text{para } \sigma^2 = \bar{\sigma}^2 \geq 0, \\ i^\nu J_\nu(\bar{\sigma}) & \text{para } \sigma^2 = -\bar{\sigma}^2 < 0, \end{cases} \quad (2.35)$$

A expressão acima é resultado, em um caso mais geral, da representação de série que aparece na transformação inversa da solução exata para os momentos das distribuições partônicas:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} &= t^{-\nu/2} \tilde{I}(2\sqrt{t}) \\ &\equiv |t|^{-\nu/2} \begin{cases} I_\nu(2\sqrt{t}) & \text{se } t \geq 0, \\ J_\nu(2\sqrt{t}) & \text{se } t < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.36)$$

2.2.2 Soluções DAS generalizado em NLO

As expressões NLO para as distribuições de pártons são [12, 13]:

$$f_a^-(x, Q^2) = A_a^-(Q^2, Q_0^2) \exp[-d_-(1)s - D_-p] + \mathcal{O}(x), \quad (2.37)$$

$$f_g^+(x, Q^2) = A_g^+(Q^2, Q_0^2) I_0(\sigma) \exp[-\bar{d}_+(1)s - \bar{D}_+p] + \mathcal{O}(\rho), \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} f_q^+(x, Q^2) &= A_q^+(Q^2, Q_0^2) \left\{ \left[1 - \bar{d}_{+-}^q \frac{\alpha_s(Q^2)}{4\pi} \right] \rho I_1(\sigma) + 20 \frac{\alpha_s(Q^2)}{4\pi} I_1(\sigma) \right\} \\ &\times \exp[-\bar{d}_+(1)s - \bar{D}_+p] + \mathcal{O}(\rho), \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde

$$\sigma = 2\sqrt{(\hat{d}_+s + \hat{D}_+p) \ln x}, \quad \rho = \sqrt{\frac{(\hat{d}_+s + \hat{D}_+p)}{\ln x}} = \frac{\sigma}{2 \ln x}, \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} A_g^+(Q^2, Q_0^2) &= \left[1 - \frac{80}{81} n_f \frac{\alpha_s(Q^2)}{4\pi} \right] A_g + \\ &+ \frac{4}{9} \left[1 + 3 \left(1 + \frac{1}{81} n_f \right) \frac{\alpha_s(Q_0^2)}{4\pi} - \frac{80}{81} n_f \frac{\alpha_s(Q^2)}{4\pi} \right], \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$A_g^-(Q^2, Q_0^2) = A_g - A_g^+(Q^2, Q_0^2) \quad (2.42)$$

$$A_q^+(Q^2, Q_0^2) = \frac{n_f}{9} \left(A_g + \frac{4}{9} A_q \right), \quad A_q^- = A_q - 20 \frac{\alpha_s(Q_0^2)}{4\pi} A_q^+ \quad (2.43)$$

A função de estrutura em NLO apresenta a seguinte forma

$$F_2(x, Q^2) = e \left(f_q(x, Q^2) + \frac{2}{3} n_f \frac{\alpha_s(Q^2)}{4\pi} f_g(x, Q^2) \right) \quad (2.44)$$

Na obtenção destas soluções LO e NLO, consideramos apenas as contribuições da componente de quark singleto, ou seja, consideramos tanto quarks de mar quanto os de valência, desprezando assim a contribuição não-singleto.

2.3 Resultados canônico e analítico

Procedendo da mesma forma que [11], comparamos os resultados obtidos com o duplo escalamento assintótico (DAS) generalizado incluso na solução das equações DGLAP, com

	A_g	A_q	$Q_0^2[\text{GeV}^2]$	χ^2/DoF
NLO	-0.239 ± 0.017	1.048 ± 0.020	0.388 ± 0.015	2.95
NLOan	-0.170 ± 0.016	1.079 ± 0.019	0.458 ± 0.015	3.34

Tab. 2.2: Valores dos parâmetros A_g , A_q e Q_0^2 obtidos por meio dos ajustes dos dados experimentais de F_2 . Os erros dos parâmetros foram obtidos adotando-se um intervalo de confiança de 90%.

os dados apresentados no apêndice B. Calculamos a função de estrutura para 16 diferentes valores de Q^2 , porém 5 dos conjuntos de dados são diferentes dos apresentados na referência [11], pois escolhemos utilizar apenas os dados experimentais publicados.

Para realizarmos os cálculos precisamos ajustar os parâmetros livres A_q , A_g e Q_0^2 , inclusos nas soluções. Os valores numéricos para estes parâmetros estão dispostos na tabela (2.2), que foram obtidos para as curvas também calculadas na referência [11]. Porém é importante ressaltar que estes valores são bastante diferentes dos apresentados na tabela 1 da mesma referência. Usamos o método de ajuste de χ^2 [44, 45] para os parâmetros livres e obtemos, em todos os ajustes, os erros dos parâmetros adotando-se um intervalo de confiança de 90%. Em todos os ajustes desta dissertação temos 301 graus de liberdade (*Degrees of Freedom*, DoF).

Usamos duas formas para o acoplamento forte neste capítulo, a versão canônica NLO do α_s da QCD e uma versão analítica do mesmo.

A forma canônica NLO é dada por [4]:

$$\alpha_s^{NLO}(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda_{NLO}^2}\right)} \left[1 - \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \frac{\ln\left(\ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda_{NLO}^2}\right)\right)}{\ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda_{NLO}^2}\right)} \right]. \quad (2.45)$$

A versão analítica NLO, que inicialmente foi obtida para o acoplamento da QED para lidar com o problema dos pólos fantasmas, foi estendida [18, 19] para o acoplamento forte da QCD obtida a através de um procedimento que combina soma do grupo de renormalização com a analiticidade de Q^2 . Esta expressão é dada por:

$$\alpha_{\text{an}}^{NLO}(Q^2) = \alpha_s^{NLO}(Q^2) - \frac{1}{2\beta_0} \frac{\Lambda_{NLO}^2}{Q^2 - \Lambda_{NLO}^2} + \dots, \quad (2.46)$$

onde adotamos em nossos cálculos os dois primeiros termos. A figura (2.1) apresenta o resultado para a função de estrutura F_2 com a versão canônica do acoplamento forte em NLO e a figura (2.2) é o resultado utilizando-se a versão analítica.

De acordo com a tabela (2.2) podemos observar que os resultados para ambas as versões são bastante ruins, pois o valor de χ^2/DoF é muito grande nos dois casos. Em ambos os casos fixamos $\Lambda_{NLO} = \Lambda_4 = 245\text{MeV}$, onde o índice 4 refere-se ao número de sabores.

Na figura (2.3) podemos observar a comparação entre as curvas para a versão analítica e a versão canônica. Portanto, estes resultados indicam que é necessário termos uma melhor descrição dos dados experimentais e isto será feito no capítulo seguinte.

Agora, precisamos fazer uma análise do valor adotado para Λ_{NLO} , que é obtido a partir de um valor de referência de α_s . Este valor de referência é fixado em $Q^2 = M_Z^2$, onde $M_Z = 91,1876\text{GeV}$ é a massa do bóson Z, que é adotado pois é um valor bem definido experimentalmente. Tomamos a definição deste valor em duas referências [47, 48]. Em [47], temos $\alpha_s(M_Z^2) = 0,1165 \pm 0,004$ e em [48], temos $\alpha_s(M_Z^2) = 0,1202_{-0,0015}^{+0,0012}$. Assim, temos margens de erro para os valores de $\alpha_s(M_Z^2)$, portanto, usamos o valor inferior $\alpha_s(M_Z^2) = 0,1165 - 0,0004$ de [47] e o limite superior $\alpha_s(M_Z^2) = 0,1202 + 0,0012$ de [48]. Isso nos diz que o acoplamento pode assumir qualquer valor entre $0,1125 < \alpha_s(M_Z^2) < 0,1214$ e para cada valor neste intervalo temos um valor de Λ_{NLO} diferente. Para $\alpha_s(M_Z^2) = 0,1125$, Λ_{NLO} assume o valor de $\Lambda_{NLO} \approx 245 \text{ MeV}$ e para $\alpha_s(M_Z^2) = 0,1214$, Λ_{NLO} assume o valor de $\Lambda_{NLO} \approx 445 \text{ MeV}$.

Além disso, é importante ressaltar uma propriedade importante, o teorema do desacoplamento. Se todos os quarks não possuísem massa, o número de sabores n_f seria fixo e teríamos um único valor de Λ_{NLO} . Entretanto, sendo os quarks massivos a situação torna-se bem diferente. Devido ao teorema de desacoplamento [49, 50], quarks pesados são desacoplados para valores de Q^2 menores que a suas massas ao quadrado, ou seja, se $Q^2 < m_i^2$, onde i é o índice de sabor do quark, este quark é desacoplado. Desta forma, por exemplo, quando estamos trabalhando em uma região inferior a $Q^2 = 22,5625 \text{ GeV}^2$, que é a massa do quark b ao quadrado [51], este quark se desacopla e o número de sabores que antes era $n_f = 5$ agora passa a ser $n_f = 4$. Com a mudança no número de sabores, o acoplamento forte α_s torna-se descontínuo. Isto implica que para obtermos novamente continuidade, algum parâmetro deve ser alterado. Este parâmetro é o Λ_{QCD} , que no exemplo dado acima passa de Λ_5 para Λ_4 [33].

Analisamos o ajuste de χ^2/DoF para valores de Λ_4 neste intervalo de $245 \text{ MeV} \leq \Lambda_4 \leq 445 \text{ MeV}$. Este ajuste está apresentado na figura (2.4), onde comparamos as versões canônica e analítica do acoplamento forte. Portanto, em vista dos valores de χ^2/DoF obtidos, verificamos que, obtemos ajustes melhores utilizando valores cada vez menores de Λ_{NLO} . Porém, há este limite inferior dado pelo erro na medida de $\alpha_s(M_Z^2)$. Em vista disto, adotamos nas figuras (2.1), (2.2) e (2.3), e nos ajustes dos parâmetros, expostos na tabela (2.2), o valor de $\Lambda_4 = 245\text{MeV}$.

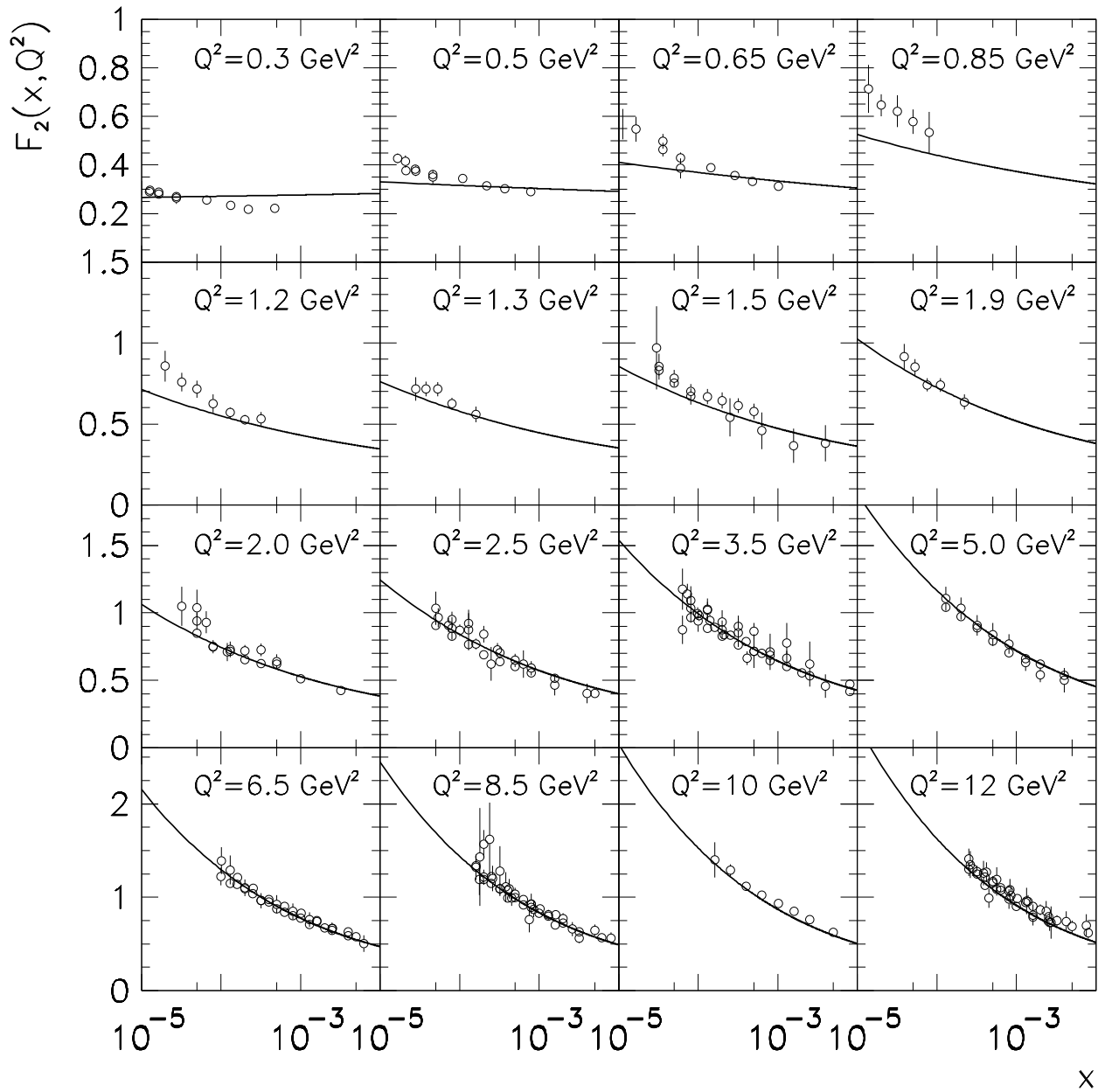


Fig. 2.1: Descrição dos dados da função de estrutura F_2 obtida por meio do ajuste utilizando o acoplamento canônico NLO da QCD (α_s^{NLO}). Curvas obtidas fixando-se $\Lambda_4 = 245 \text{ MeV}$.

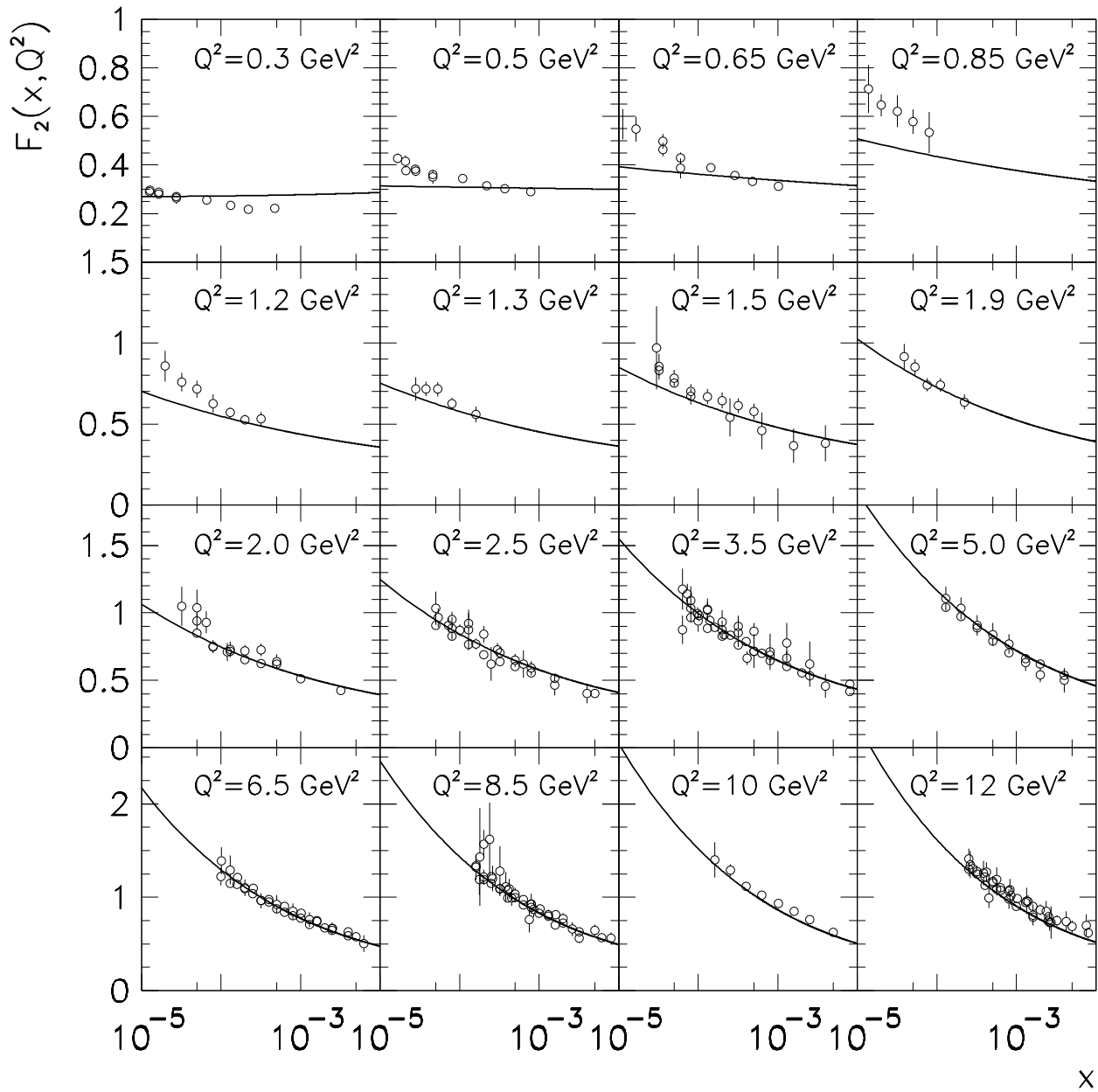


Fig. 2.2: Descrição dos dados da função de estrutura F_2 obtida por meio do ajuste utilizando o acoplamento analítico NLO da QCD (α_{an}^{NLO}). Curvas obtidas fixando-se $\Lambda_4 = 245 \text{ MeV}$.

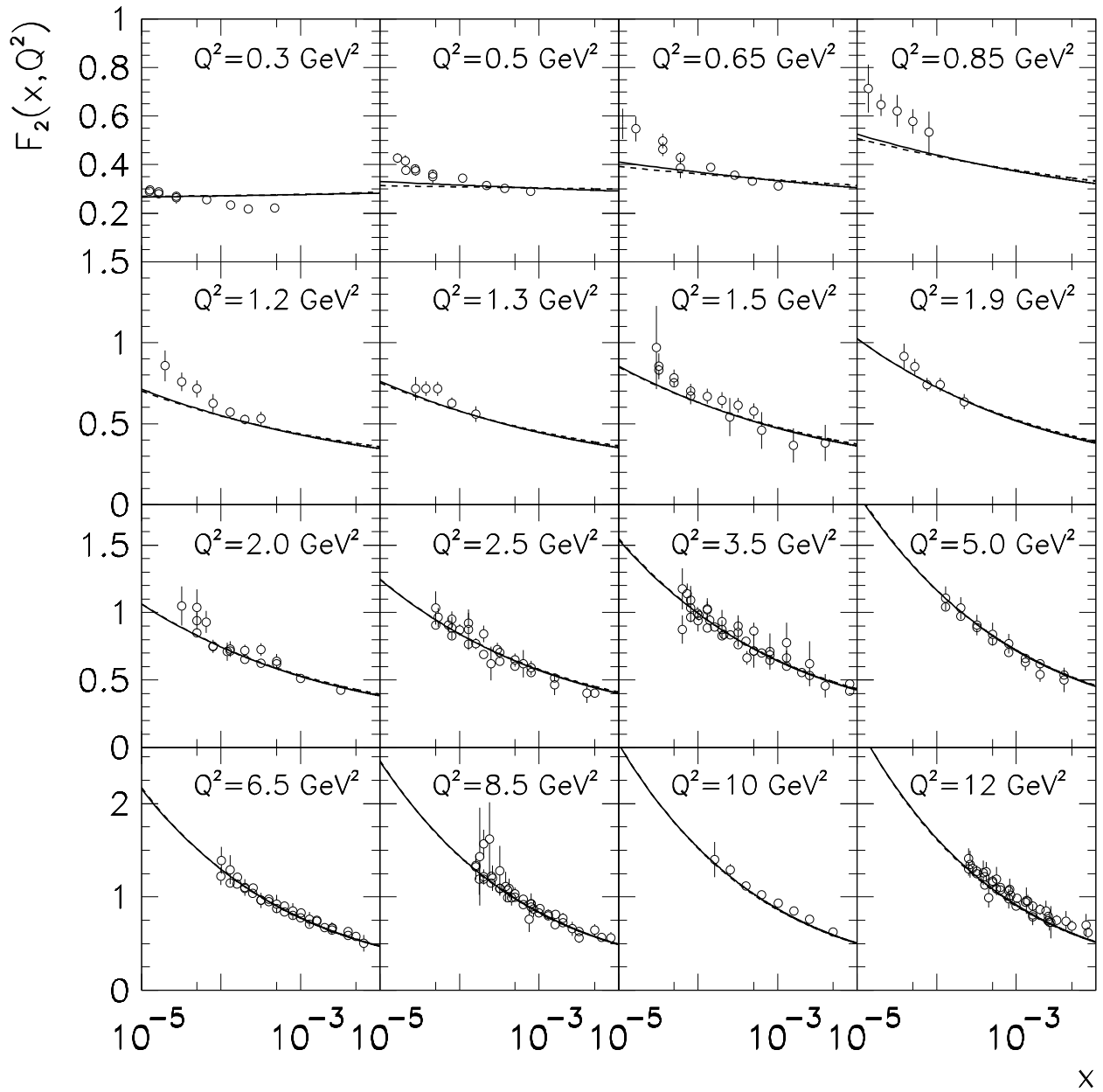


Fig. 2.3: Comparação entre as descrições dos dados da função de estrutura F_2 obtidas por meio dos ajustes utilizando o acoplamento canônico NLO da QCD (curvas cheias) e o acoplamento analítico NLO da QCD (curvas tracejadas). Curvas obtidas fixando-se $\Lambda_4 = 245 \text{ MeV}$.

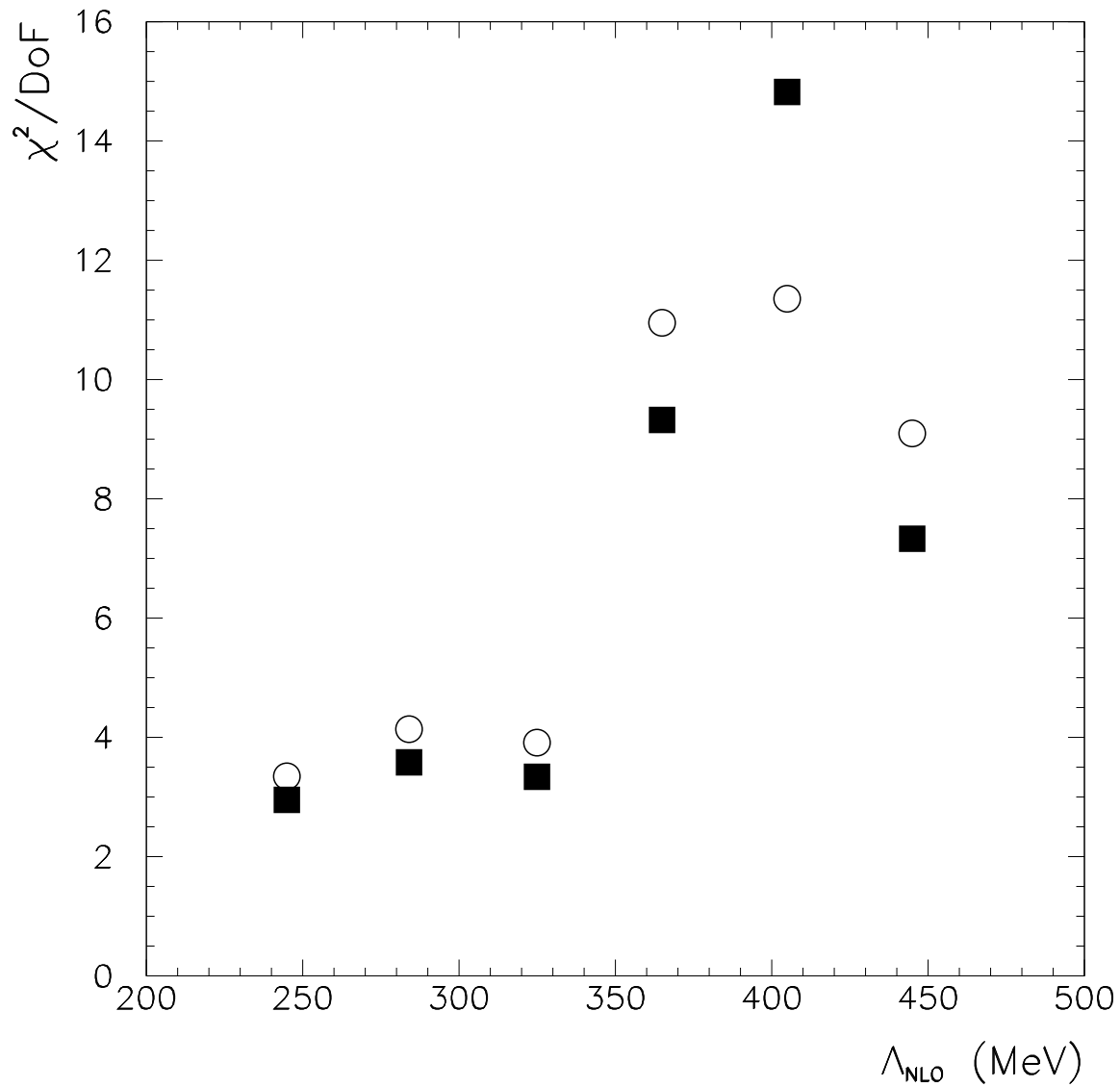


Fig. 2.4: Valores de χ^2/DoF em função dos valores de Λ_4 . Para as versões canônica (Quadrados) e analítica (círculos) do acoplamento forte.

Capítulo 3

Acoplamentos dinâmicos $\bar{\alpha}_s$ em NLO

3.1 A massa dinâmica do glúon

Conforme vimos, a QCD pode ser dividida em duas regiões, a QCD perturbativa e a não-perturbativa. Na QCD perturbativa utiliza-se a teoria de perturbação na descrição física dos processos. Na região não-perturbativa, o fenômeno de confinamento de cor, que impede a formação de estados livres de quarks e glúons, se manifesta de forma plena, impossibilitando a abordagem perturbativa e tornando necessário novos esquemas de cálculo. Um dos grandes desafios no estudo das interações fortes é a descrição do fenômeno de confinamento a partir de primeiros princípios. Neste caso torna-se importante conhecer a dinâmica das interações fortes na região infravermelha (IV), intrinsecamente não-perturbativa. Os dois métodos mais empregados no estudo da dinâmica da QCD no IV são a QCD na rede (*Lattice QCD*) e as Equações de Schwinger-Dyson.

A QCD na rede consiste no uso de métodos de Monte Carlo após a discretização do espaço-tempo e a imposição de condições de contorno periódicas no volume finito da rede [52, 53]. A formulação em rede da QCD, introduzida por Wilson em 1974 [54], oferece uma regularização não-perturbativa que preserva a invariância de calibre da teoria.

O outro método não-perturbativo largamente empregado utiliza as chamadas Equações de Schwinger-Dyson (ESD) [6, 7, 8, 9, 10]. As ESD formam um conjunto infinito de equações integrais acopladas que governam a dinâmica das funções de Green da QCD. Sendo as ESD não-lineares, é necessário algumas simplificações e truncamentos na obtenção de suas soluções. O esquema de truncamento baseado na técnica de *pinch* [6, 7, 55, 56] permite a construção de novas funções de Green que são independentes do parâmetro de fixação do calibre. Uma solução invariante por calibre da ESD para o propagador do glúon, obtida através da técnica *pinch*, foi obtida por Cornwall há muitos anos atrás [6]. Nesta solução o propagador do glúon se comporta na forma

$$\frac{1}{\left[k^2 + M_g^2(k^2)\right]}, \quad (3.1)$$

e, no limite $k^2 \rightarrow 0$, a função $M_g^2(k^2)$ representa a massa dinâmica do glúon, onde $M_g^2(0) = m_g^2$. Neste cenário o acoplamento forte também é finito na região IV, sendo dado por

$$\bar{\alpha}_s^{LO}(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln \left[(Q^2 + 4M_g^2(Q^2))/\Lambda^2 \right]}, \quad (3.2)$$

onde

$$M_g^2(Q^2) = m_g^2 \left[\frac{\ln \left(\frac{Q^2 + 4m_g^2}{\Lambda^2} \right)}{\ln \left(\frac{4m_g^2}{\Lambda^2} \right)} \right]^{-\frac{12}{11}}, \quad (3.3)$$

onde β_0 foi definido em (1.17) e Λ é um parâmetro de escala da QCD. O grande triunfo deste cenário é que a massa dinâmica do glúon torna-se um regulador natural para o acoplamento forte no infravermelho, excluindo as divergências e tornando-o bem comportado neste regime [57]. A escala de massa m_g (que daqui por diante chamaremos simplesmente por “massa dinâmica”) pode ser obtida fenomenologicamente [57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65] e possui um valor típico $m_g = 500 \pm 200$ MeV (para $\Lambda = 300$ MeV).

De acordo com as expressões (3.2) e (3.3) o acoplamento dinâmico $\bar{\alpha}_s$ é função do momento transferido Q^2 e da massa dinâmica m_g , ou seja, $\bar{\alpha}_s = \bar{\alpha}_s(Q^2, m_g)$. Podemos observar que na região onde $Q^2 \rightarrow 0$, o acoplamento $\bar{\alpha}_s$ tende a um valor finito, enquanto que para grandes valores de Q^2 , o acoplamento dinâmico $\bar{\alpha}_s \rightarrow \alpha_s$, onde α_s é o acoplamento canônico da QCD. Esta última propriedade é denotada por “renormalizabilidade multiplicativa” e será nossa guia nas próximas seções.

3.2 Acoplamento dinâmicos e renormalizabilidade multiplicativa

Como mostrado na seção anterior, a constante de acoplamento dinâmica proposta por Cornwall recai na expressão usual perturbativa α_s para grandes valores de momentum transferido quadrado Q^2 (renormalizabilidade multiplicativa). Porém a solução obtida por Cornwall foi obtida em um contexto LO. Uma vez que análises recentes da função de estrutura do próton indicam a grande importância da ordem seguinte à dominante na boa descrição dos dados [11], surge a necessidade de termos uma expressão $\bar{\alpha}_s^{NLO}$. Nesta dissertação propomos dois *ansatzes* para o acoplamento dinâmico em NLO. Como veremos as duas propostas possuem a propriedade da renormalizabilidade multiplicativa [66].

3.2.1 Primeiro *ansatz* para o acoplamento em NLO

Devemos determinar agora o valor de Q^2 que separa as regiões perturbativa e não perturbativa, ou seja, determinar a escala que separa a dinâmica na região IV (não-perturbativa) da dinâmica na região onde há liberdade assintótica. Denotamos esta escala por $Q_0'^2$. Assumiremos o valor de $Q_0'^2 = 1\text{GeV}^2$ em nosso trabalho. Usando a propriedade de renormalizabilidade multiplicativa temos que $\bar{\alpha}_s^{LO} \rightarrow \alpha_s^{LO}$ quando $Q^2 \gg 1\text{ GeV}^2$. Assim, se esta relação é válida para LO, deverá também ser válida para NLO, ou seja, com Q^2 grande, deveremos ter $\bar{\alpha}_s^{NLO} \rightarrow \alpha_s^{NLO}$. Desta forma, na região perturbativa, teremos

$$\frac{\bar{\alpha}_s^{NLO}}{\bar{\alpha}_s^{LO}} = \frac{\alpha_s^{NLO}}{\alpha_s^{LO}}, \quad (3.4)$$

ou seja,

$$\bar{\alpha}_s^{NLO} = \bar{\alpha}_s^{LO} \frac{\alpha_s^{NLO}}{\alpha_s^{LO}}, \quad (3.5)$$

onde a razão $\frac{\alpha_s^{NLO}}{\alpha_s^{LO}}$ é conhecida:

$$\frac{\alpha_s^{NLO}(Q^2)}{\alpha_s^{LO}(Q^2)} = 1 - \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \frac{\ln \ln \left(\frac{Q^2}{\Lambda_{NLO}^2} \right)}{\ln \left(\frac{Q^2}{\Lambda_{NLO}^2} \right)} \equiv R(Q^2), \quad (3.6)$$

sendo β_0 obtida em (1.17) e β_1 obtida em (1.18). Esta expressão possui significado físico apenas na região perturbativa, pois em pequeno Q^2 ela diverge. Neste caso, admitimos a validade da razão $R(Q^2)$ apenas em valores $Q^2 \geq Q_0'^2$. Para valores de $Q^2 < Q_0'^2$ garantimos a continuidade de $\bar{\alpha}_s^{NLO}$ em $Q^2 = Q_0'^2$ igualando a inclinação da curva à derivada da razão R neste mesmo ponto. Portanto, nosso primeiro *ansatz* para o acoplamento dinâmico em NLO tem a forma

$$\bar{\alpha}_{[1]}^{NLO}(Q^2) = \begin{cases} \bar{\alpha}_s^{LO}(Q^2)R(Q^2) & \text{para } Q^2 \geq Q_0'^2, \\ \bar{\alpha}_s^{LO}(Q^2)[a + bQ^2] & \text{para } Q^2 < Q_0'^2; \end{cases} \quad (3.7)$$

onde

$$a = R(Q_0'^2) - bQ_0'^2, \quad (3.8)$$

e

$$b = \left[\frac{dR(Q^2)}{dQ^2} \right]_{Q^2=Q_0'^2} = \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \frac{1}{Q_0'^2 \left(\ln \left(\frac{Q_0'^2}{\Lambda_{NLO}^2} \right) \right)^2} \left[1 - \ln \left(\ln \left(\frac{Q_0'^2}{\Lambda_{NLO}^2} \right) \right) \right]. \quad (3.9)$$

3.2.2 Segundo *ansatz* para o acoplamento em NLO

Propomos também uma outra forma para o acoplamento NLO como alternativa. Nesta proposição tomamos o acoplamento canônico apresentado na equação (2.45) e fazemos uma substituição simples do tipo $Q^2 \rightarrow Q^2 + 4M_g^2(Q^2)$ e desta forma obtemos:

$$\bar{\alpha}_s^{NLO[2]}(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln\left(\frac{Q^2 + 4M_g^2(Q^2)}{\Lambda_{NLO}^2}\right)} \left[1 - \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \frac{\ln\left(\ln\left(\frac{Q^2 + 4M_g^2(Q^2)}{\Lambda_{NLO}^2}\right)\right)}{\ln\left(\frac{Q^2 + 4M_g^2(Q^2)}{\Lambda_{NLO}^2}\right)} \right], \quad (3.10)$$

Na figura (3.1) temos os comportamentos de três formas para o acoplamento forte. As versões propostas nesta seção, os *ansatzes* 1 e 2, tem um comportamento de congelamento indo a um valor finito em $Q^2 \rightarrow 0$. Já a versão canônica apresenta um comportamento divergente na região do infravermelho, como esperávamos.

3.3 Resultados

Para obtermos as curvas da função de estrutura F_2 , apresentada em (2.44), utilizando os dois *ansatzes* (3.7) e (3.10), precisamos obter os melhores valores para os parâmetros livres presentes nas soluções. Na tabela (3.1) estão os valores obtidos pelo método de minimização [45]. Fixamos o valor da massa dinâmica em $m_g = 370$ MeV, conforme resultados fenomenológicos prévios. Podemos notar que o *ansatz 2* apresenta um melhor acordo, pois possui um χ^2/DoF menor em relação ao *ansatz 1*. Nas figuras (3.2) e (3.3) temos os resultados obtidos para o *ansatz 1* e *ansatz 2* respectivamente, usando os parâmetros apresentados na tabela (3.1). A diferença entre os *ansatzes* está mostrada na figura (3.4).

Além disso, é importante notar que, na tabela (3.1), o valor de Q_0^2 aproxima-se de zero para o *ansatz 2*. Isto significa que, o termo $4m_g^2$, que é o termo $4M_g^2(Q^2)$ no limite de $Q^2 \rightarrow 0$, absorve o parâmetro Q_0^2 , e a massa dinâmica torna-se o parâmetro regulador inicial. Assim, trocamos Q_0^2 pela massa dinâmica m_g como parâmetro livre. Desta forma fixamos $Q_0^2 = 0$, o que não altera o resultado, visto que ele apresentou-se próximo a este valor na tabela (3.1) e a massa dinâmica que estava fixa em $m_g = 370$ MeV, agora fica livre para ser ajustada.

Na tabela (3.2) estão os valores obtidos ao fazermos os ajustes aos dados com a massa dinâmica de glúons como parâmetro. Podemos ver nesta tabela dois pontos muito importantes: o valor da massa dinâmica obtido é compatível com os valores obtidos em outros trabalhos [57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65], ficando dentro do limite $m_g = 500 \text{ MeV} \pm 200$ MeV; e o valor de χ^2/DoF tem uma redução significativa em relação obtido na tabela (3.1) com $\Lambda_{NLO} = 245$ MeV.

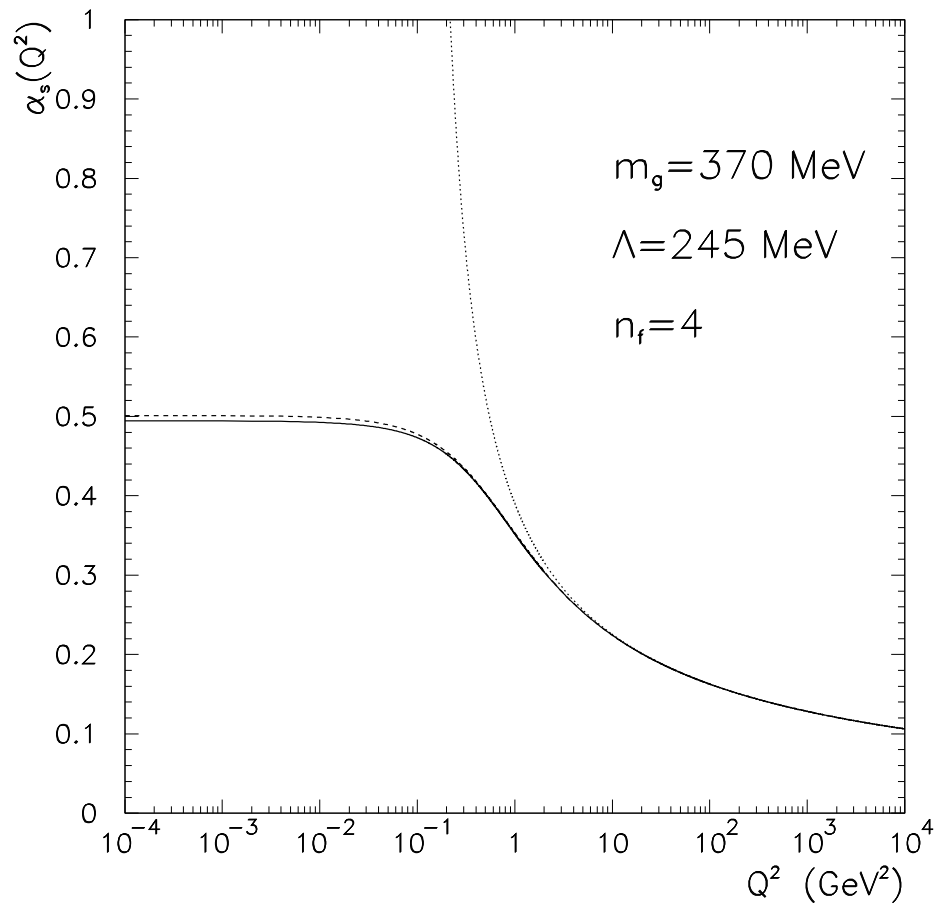


Fig. 3.1: Comparação dos comportamentos NLO do acoplamento forte da QCD nas versões canônica (linha pontilhada), ansatz 1 (linha cheia) e ansatz 2 (linha tracejada).

	A_g	A_q	Q_0^2 [GeV ²]	χ^2/DoF
NLO _[1]	-0.042±0.027	0.981±0.020	0.241±0.011	3.14
NLO _[2]	0.129±0.015	0.713±0.023	0.000±0.013	2.05

Tab. 3.1: Valores dos parâmetros A_g , A_q e Q_0^2 obtidos por meio dos ajustes dos dados experimentais de F_2 . Valores obtidos fixando-se $\Lambda_4 = 245$ MeV e $m_g = 370$ MeV. Os erros dos parâmetros foram obtidos adotando-se um intervalo de confiança de 90%.

	A_g	A_q	m_g [GeV]	χ^2/DoF
NLO _[2] ($\Lambda_4 = 245$ MeV)	0.080±0.031	0.708±0.024	0.355±0.008	1.99
NLO _[2] ($\Lambda_4 = 163$ MeV)	0.435±0.037	0.559±0.026	0.323±0.008	1.65

Tab. 3.2: Valores dos parâmetros A_g , A_q e m_g obtidos por meio dos ajustes dos dados experimentais de F_2 . Valores obtidos fixando-se $\Lambda_{NLO} = 245$ e 163 MeV. Os erros dos parâmetros foram obtidos adotando-se um intervalo de confiança de 90%.

Da mesma forma que procedemos no capítulo anterior usamos um ajuste para determinar um Λ_{NLO} que forneça um melhor valor de χ^2/DoF . Assim obtemos a figura (3.5), que compara o ajuste de χ^2 nos dois *ansatzes* propostos neste capítulo. Nessa figura podemos observar que, para valores cada vez menores obtemos melhores valores para χ^2/DoF .

Realizamos o ajuste para dois valores distintos de Λ_{NLO} , $\Lambda_{NLO} = 245$ MeV e $\Lambda_{NLO} = 163$ MeV, onde o valor de 163 MeV obtemos quando fazemos uma extrapolação do tipo, $\Lambda_{NLO} = \Lambda_4 = \Lambda_5$. Isto fazemos apenas para mostrar que com valores cada vez menores de Λ_{NLO} temos melhores resultados para χ^2/DoF , como mostra a tabela (3.2). As figuras (3.6) e (3.7) mostram as curvas para F_2 calculadas com $\Lambda_{NLO} = 245$ MeV e $\Lambda_{NLO} = 163$ MeV respectivamente, utilizando somente o *ansatz 2*. Na figura (3.8) vemos uma comparação dos resultados obtidos com os dois valores de Λ_{NLO} .

Portanto, há uma melhora significativa nos resultados obtidos com $\Lambda_{NLO} = 163$ MeV, que pode ser observado na figura (3.7), comprovando o que já havíamos dito e confirmado com os valores da tabela (3.2). Mas é importante ressaltar que mesmo utilizando $\Lambda_{NLO} = 245$ MeV, o resultado obtido é muito bom com o *ansatz 2*, já o *ansatz 1* necessita de um melhor ajuste. Esse ajuste ao *ansatz 1* pode ser feito, modificando o valor de Q_0^2 . Isto se justifica pela utilização de valores distintos em outros trabalhos (como [11, 13, 41], por exemplo) para este mesmo fim, porém, isto será realizado em um outro trabalho.

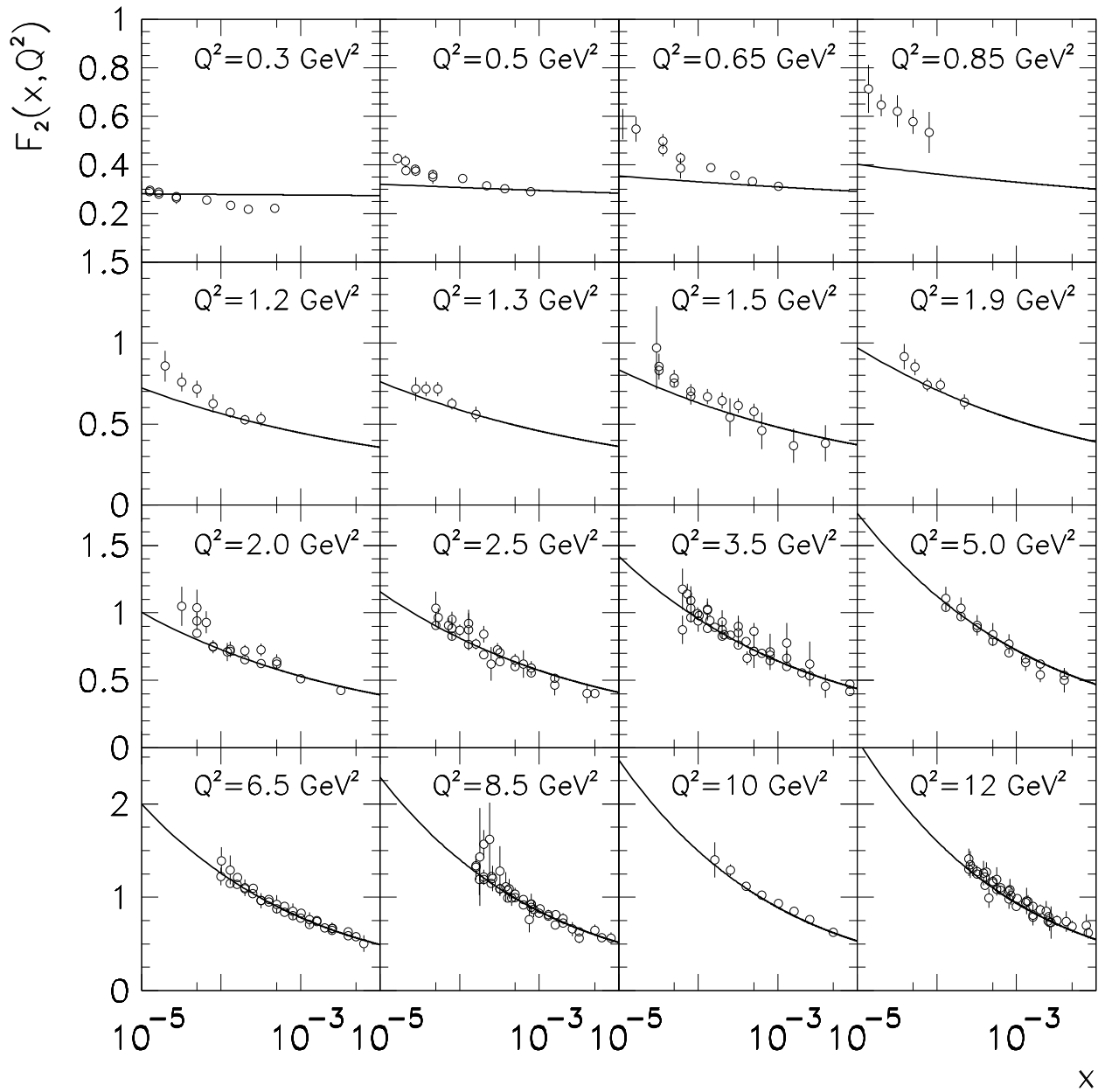


Fig. 3.2: Descrição dos dados da função de estrutura F_2 obtida por meio do ajuste utilizando o primeiro ansatz NLO para o acoplamento dinâmico forte ($\alpha_{[1]}^{NLO}$). Curvas obtidas fixando-se $\Lambda_4 = 245$ MeV e $m_g = 370$ MeV.

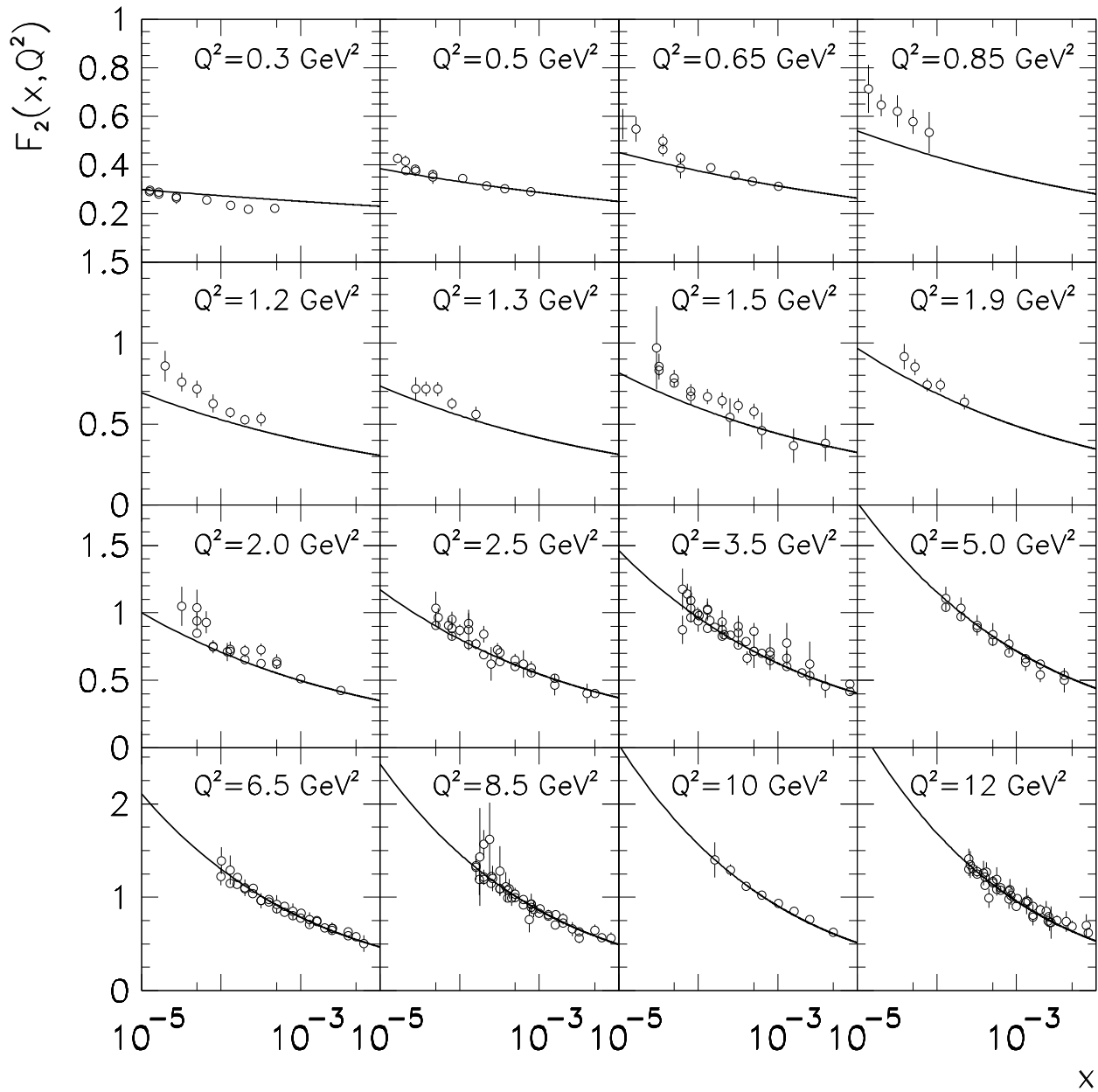


Fig. 3.3: Descrição dos dados da função de estrutura F_2 obtida por meio do ajuste utilizando o segundo ansatz NLO para o acoplamento dinâmico forte ($\alpha_{[2]}^{NLO}$). Curvas obtidas fixando-se $\Lambda_4 = 245$ MeV e $m_g = 370$ MeV.

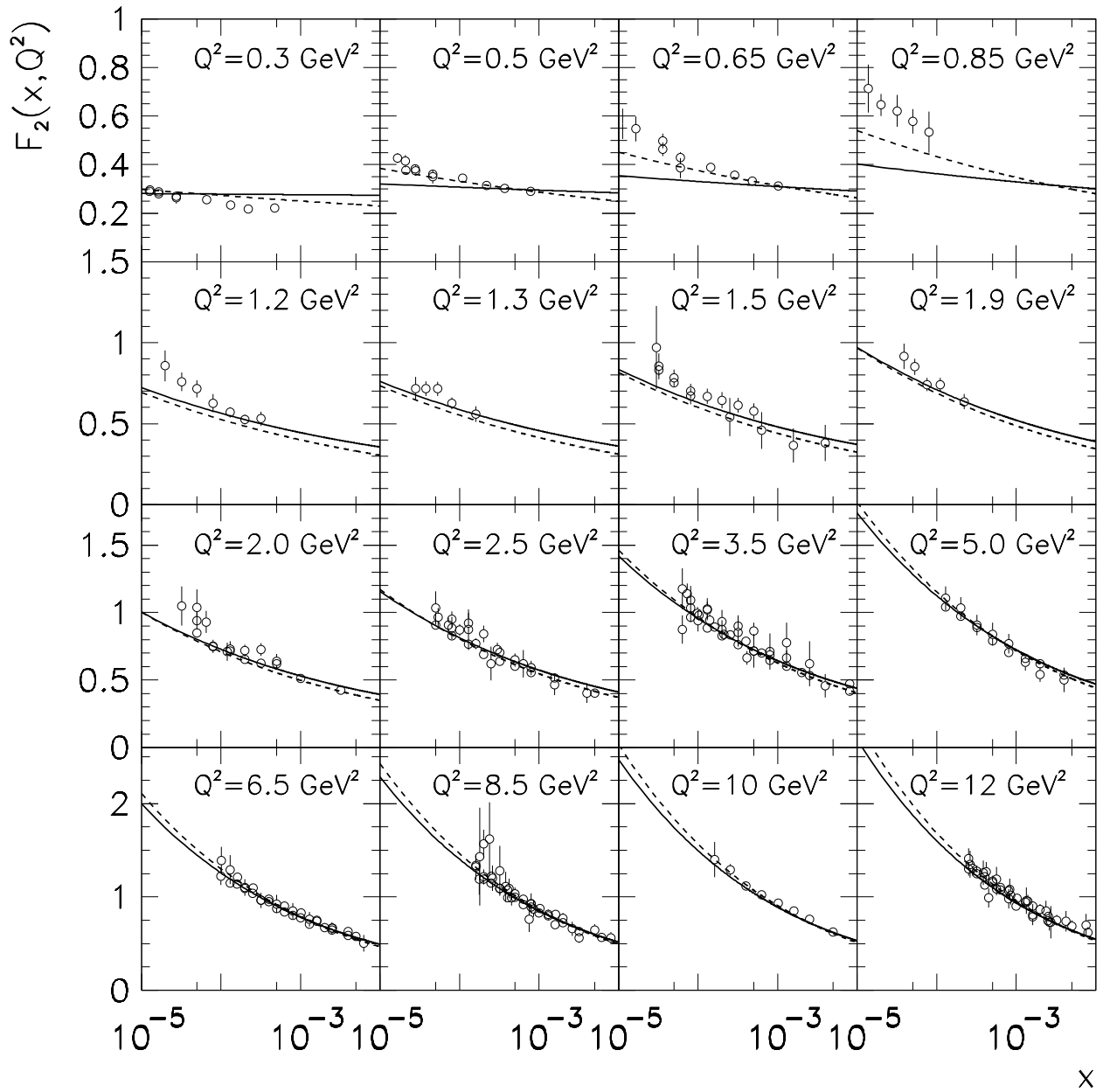


Fig. 3.4: Comparação entre as descrições dos dados da função de estrutura F_2 obtidas por meio dos ajustes utilizando os acoplamentos dinâmicos $\bar{\alpha}_{[1]}^{NLO}$ (curvas cheias) e $\bar{\alpha}_{[2]}^{NLO}$ (curvas tracejadas). Curvas obtidas fixando-se $\Lambda_4 = 245$ MeV e $m_g = 370$ MeV.

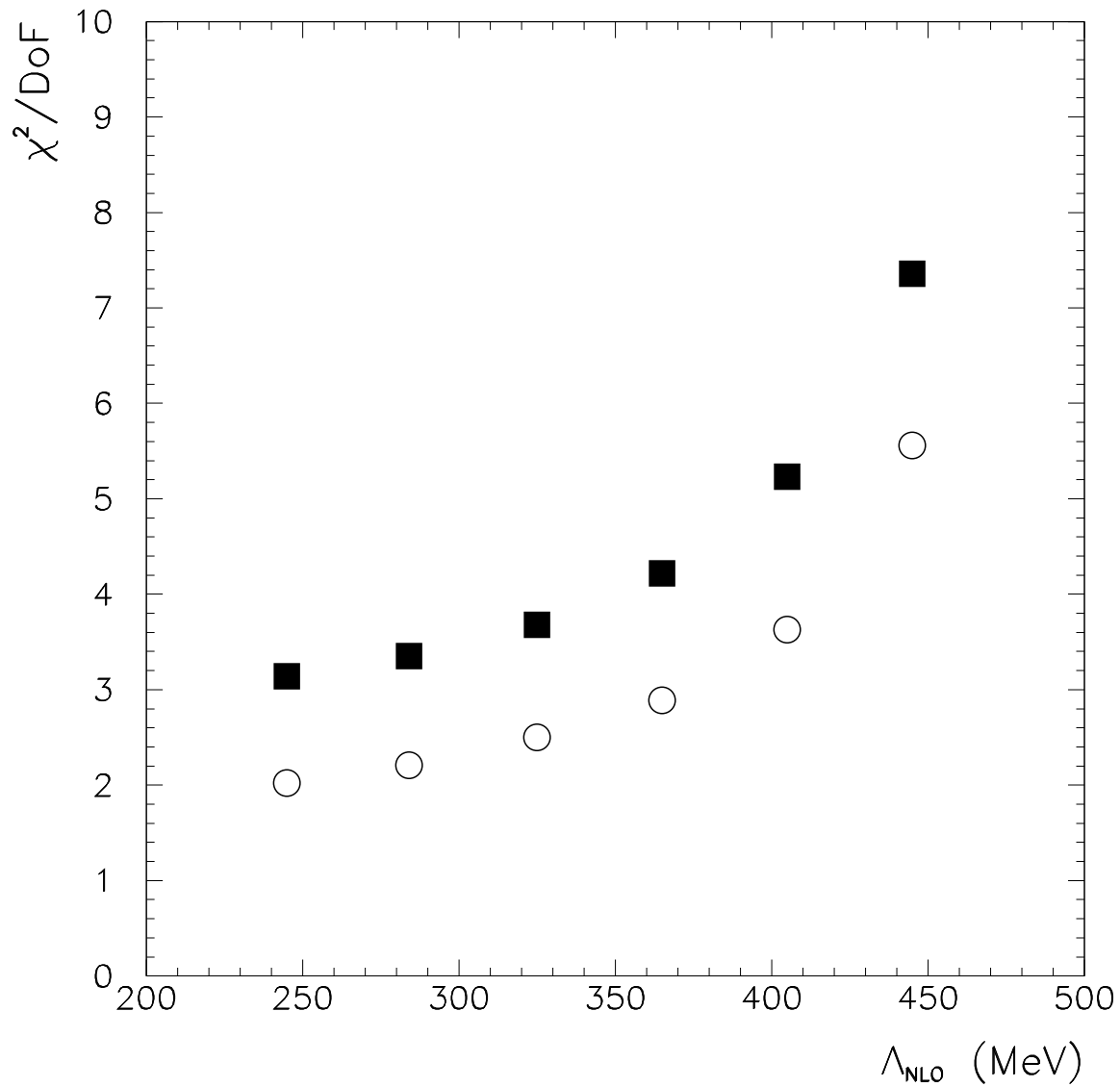


Fig. 3.5: Valores de χ^2/DoF em função dos valores de Λ_4 . Para o ansatz 1 (Quadrados) e ansatz 2 (círculos) do acoplamento forte.

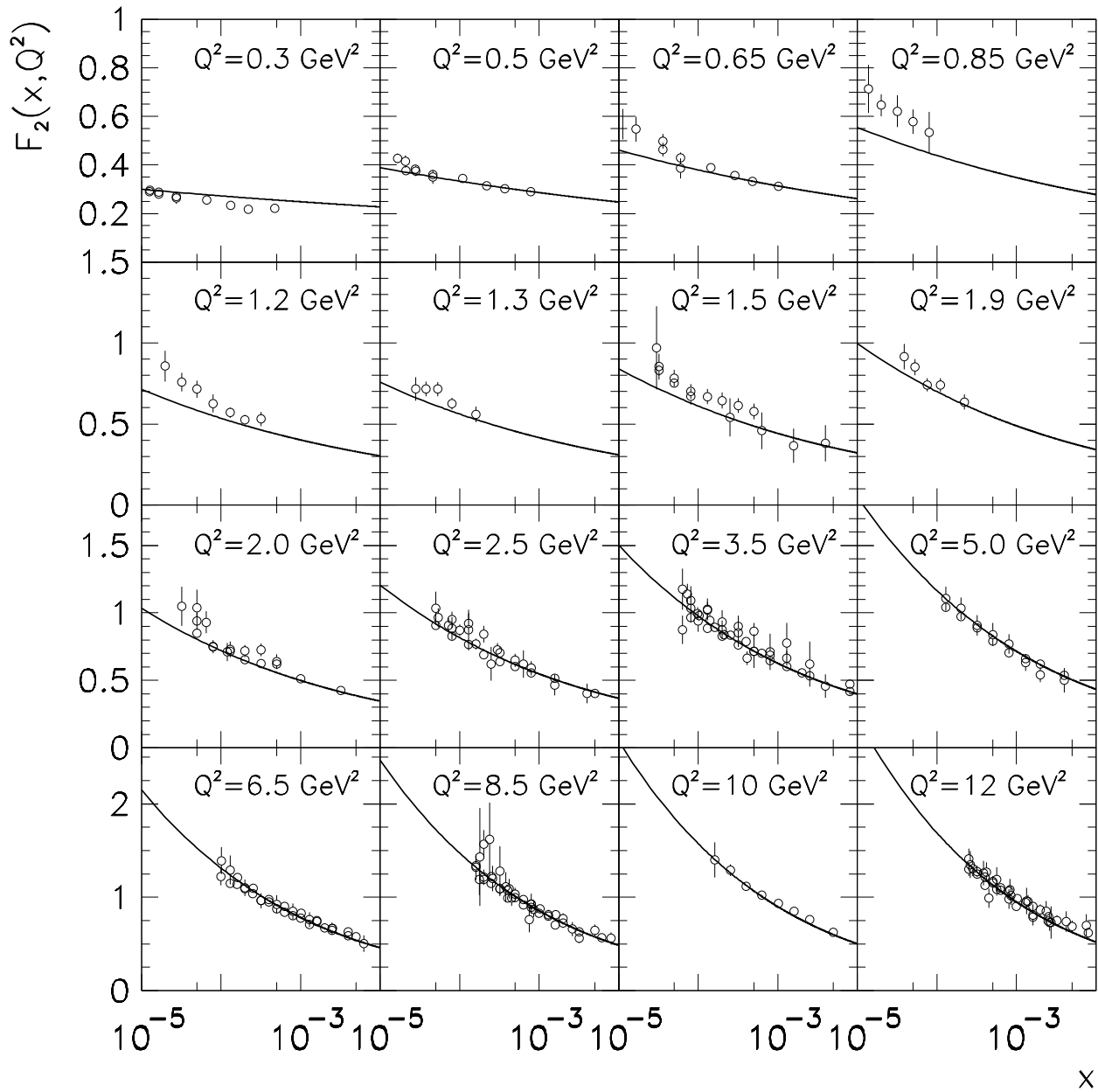


Fig. 3.6: Descrição dos dados da função de estrutura F_2 obtida por meio do ajuste utilizando o segundo ansatz NLO para o acoplamento dinâmico forte ($\alpha_{[2]}^{NLO}$). Curvas obtidas fixando-se $\Lambda_4 = 245$ MeV.

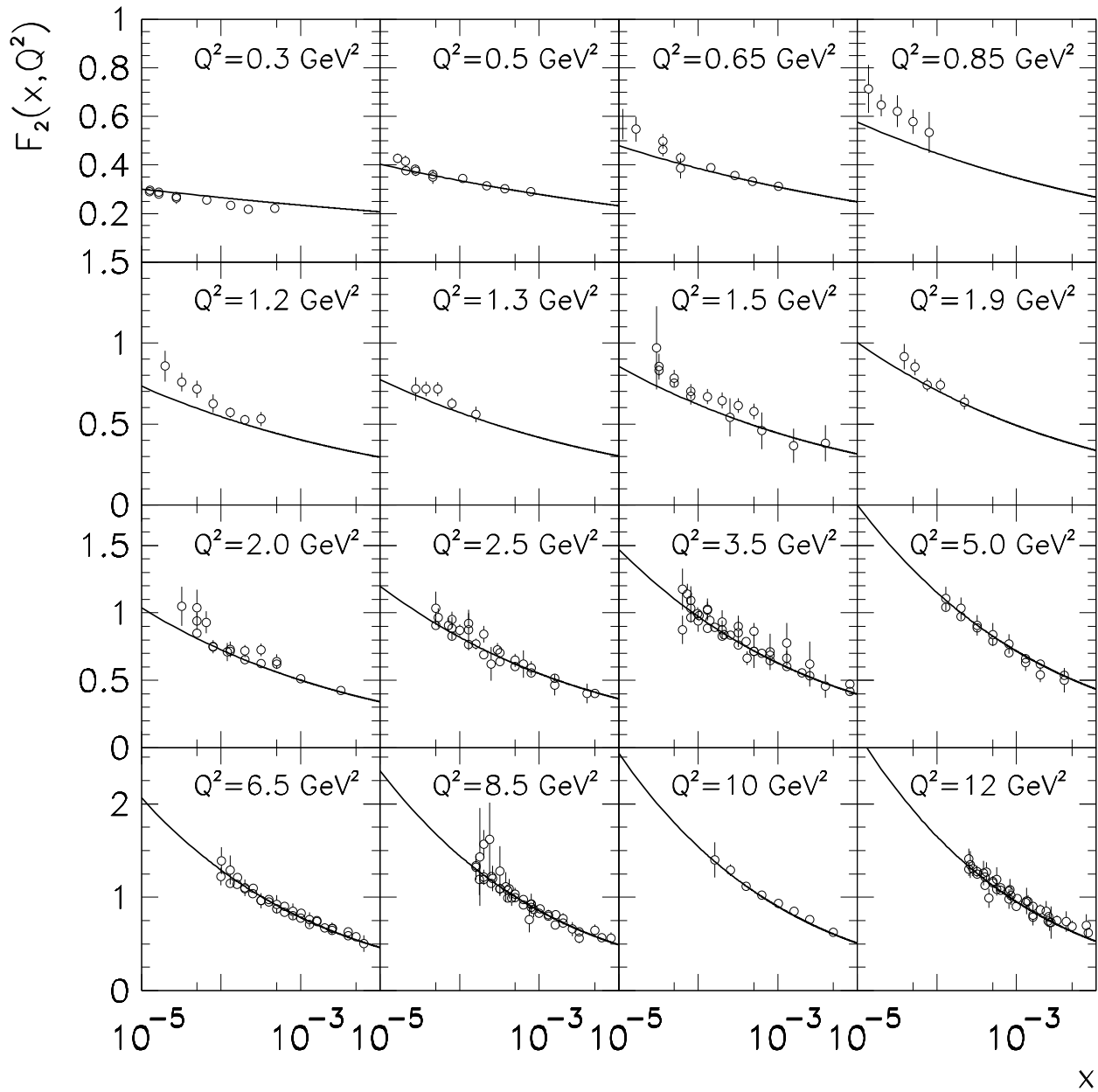


Fig. 3.7: Descrição dos dados da função de estrutura F_2 obtida por meio do ajuste utilizando o segundo ansatz NLO para o acoplamento dinâmico forte ($\alpha_{[2]}^{NLO}$). Curvas obtidas fixando-se $\Lambda_4 = \Lambda_5 = 163 \text{ MeV}$.

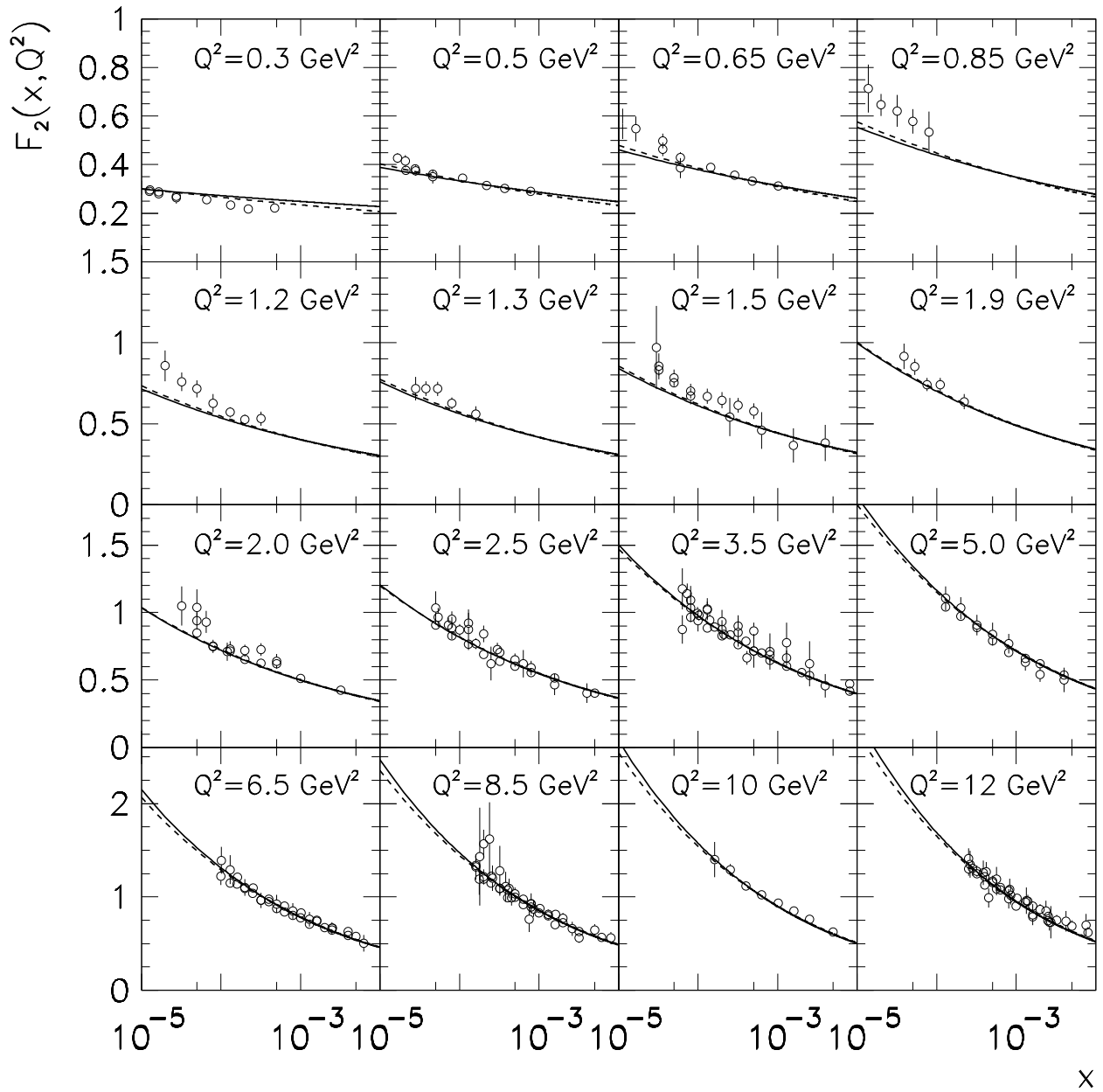


Fig. 3.8: Comparação entre as descrições dos dados da função de estrutura F_2 obtidas por meio dos ajustes utilizando o acoplamento dinâmico $\bar{\alpha}_{[2]}^{NLO}$. Curvas obtidas fixando-se $\Lambda_4 = 245$ MeV (curvas cheias) e $\Lambda_4 = \Lambda_5 = 163$ MeV (curvas tracejadas).

Conclusões e Perspectivas

Nesta dissertação utilizamos uma solução para as equações DGLAP, onde são inclusas algumas correções, que as tornam extensíveis à região não perturbativa da QCD. Utilizamos algumas versões para o acoplamento forte, para obtermos os parâmetros livres presentes nestas soluções e assim conseguirmos um bom ajuste das curvas com os dados. Além disso, tendo em mãos o acoplamento forte fenomenológico $\bar{\alpha}_s$ dependente da massa dinâmica dos glúons, obtido como solução das equações de Schwinger-Dyson por Cornwall, propomos dois *ansatzes* como possíveis versões NLO para este acoplamento.

Os resultados para a função de estrutura F_2 utilizando, para o acoplamento forte, as versões canônica e analítica, foram bastante ruins. Os valores de χ^2/DoF ficaram muito longe do aceitável, evidenciando assim, a necessidade de outra formulação para o acoplamento.

Apresentamos, para este fim, os dois *ansatzes* fenomenológicos supracitados, que incorporam a proposição de Cornwall para o acoplamento forte LO. Ambos *ansatzes* são baseados na chamada *propriedade de renormalizabilidade multiplicativa*. Esta propriedade diz que, para valores perturbativos de Q^2 , ou seja, $Q^2 \gg 1 \text{ GeV}^2$, os acoplamentos não-perturbativos devem recair no acoplamento da QCD já conhecido. No primeiro *ansatz*, utilizamos a validade da igualdade $\bar{\alpha}_s^{NLO}/\bar{\alpha}_s^{LO} = \alpha_s^{NLO}/\alpha_s^{LO}$ e assim impusemos, que na região não-perturbativa, a razão $\alpha_s^{NLO}/\alpha_s^{LO}$ mantenha o mesmo comportamento que possuía na região perturbativa. Em seguida exigimos a continuidade do acoplamento, bem como de sua derivada, no ponto de divisão das duas regiões (escala Q_0^2). No *ansatz 2*, tendo em mãos o acoplamento forte canônico NLO, fazemos a substituição de $Q^2 + 4M_g^2(Q^2)$, que o torna válido para qualquer valor de Q^2 . Notamos que neste *ansatz*, no caso de apenas considerarmos o primeiro termo, recaímos na expressão LO obtida por Cornwall.

Analisamos os *ansatzes*, com uma variação no valor de Λ_{NLO} , que também foi realizado para os acoplamentos canônico e analítico no capítulo 2, onde percebemos que, melhores resultados podem ser obtidos com valores cada vez menores de Λ_{NLO} .

Na análise dos valores obtidos para os parâmetros livres, percebemos que o parâmetro Q_0^2 aproxima-se de zero no caso do *ansatz 2*. Podendo assim, ser absorvido pela massa dinâmica e tornando a massa dinâmica o novo parâmetro livre. Em um novo ajuste de χ^2/DoF para obtermos os parâmetros livres, com a massa dinâmica de glúons como parâmetro, também

fizemos uma comparação com dois valores distintos de Λ_{NLO} , 245 e 163 MeV, onde o valor de $\Lambda_{NLO} = 163$ MeV é uma extrapolação apenas a título de curiosidade. Sendo que usamos somente o *ansatz 2* para esta comparação.

Como resultado, comprovamos que, para valores menores de Λ_{NLO} , temos melhores ajustes e que a massa dinâmica de glúons é compatível com os valores obtidos em outros trabalhos, ficando dentro do limite $m_g = 500 \text{ MeV} \pm 200 \text{ MeV}$.

O *ansatz 2* apresentou resultados muito bons, porém não obtivemos este mesmo sucesso com o *ansatz 1*, que poderá ser melhorado com uma variação no valor adotado para $Q_0'^2$. Portanto, com estes resultados podemos concluir que a massa dinâmica de glúons é um bom regulador para o comportamento do acoplamento forte na região do infravermelho e que assim, ambos os *ansatzes* podem ser importantes soluções para o problema do acoplamento forte nesta região. Ainda com relação ao *ansatz 1*, uma análise mais detalhada da variação do valor da escala $Q_0'^2$ poderia, além de eventualmente melhorar a descrição dos dados experimentais, indicar de modo direto qual escala devemos ter para que uma análise perturbativa seja válida.

Outro estudo possível no futuro, e que é uma extensão natural da análise apresentada nesta dissertação, seria a análise dos dados de F_2 tomando-se efeitos de *twist* de ordem maiores no formalismo aqui apresentado. Conforme indicado por Illarionov e colaboradores [13], correções *twist* de ordens maiores poderiam melhorar a descrição dos dados experimentais. Tal estudo poderia também proporcionar uma boa análise da estabilidade da massa dinâmica do glúon frente às correções *twist*.

Um outro trabalho desenvolvido durante o curso de mestrado [67], e que também abre portas para uma série de estudos posteriores, foi a aplicação de técnicas de ressonância de glúons no caso onde temos presente uma massa dinâmica. Em especial, aplicamos o mecanismo de ressonância de glúons emitidos por *bremstrahlung* para calcular a distribuição de matéria partônica. Tal distribuição, descrita por uma função de recobrimento (*overlap function*) $W(b,s)$, é alterada pela emissão de glúons suaves por partons inicialmente colineares, ou seja, pela emissão de glúons com valores infravermelhos de momentum. Portanto a dependência em altas energias da seção de choque total hadrônica (grande valor de b) está intrinsicamente associada a valores de α_s em pequenos valores de k_t [57, 62, 63, 68, 69]. Assim o comportamento de α_s no limite infravermelho faz o papel principal. Calculamos a função de recobrimento $W(b,s)$ utilizando um acoplamento dinâmico e comparamos nossos resultados parciais a outros da literatura [67]. Tais resultados indicam novamente a conveniência de adotarmos um acoplamento forte ligado a uma massa dinâmica do glúon.

Apêndice A

Dimensões anômalas

A.1 Cálculo dos Momentos das funções de Desdobramento

No desenvolvimento das soluções DGLAP, quando, através da Transformada de Melin, passamos a DGLAP para o espaço de momenta, devemos tomar um cuidado especial com a transformação das funções de desdobramento (*splitting functions*). As funções de desdobramento são dadas por [1, 3, 5]

$$P_{qq}(x) = -\frac{4}{3}(1+x) + 2\delta(1-x) + \frac{8}{3} \left(\frac{1}{1-x} - \delta(1-x) \int_0^1 dx' \frac{1}{1-x'} \right), \quad (\text{A.1})$$

$$P_{qg}(x) = \frac{1}{2} [(1-x)^2 + x^2], \quad (\text{A.2})$$

$$P_{gq}(x) = \frac{4}{3} \left[\frac{1 + (1-x)^2}{x} \right], \quad (\text{A.3})$$

$$P_{gg}(x) = 6 \left[\frac{1}{x} - 2 + x(1-x) \right] + \left(\frac{11}{2} - \frac{N_f}{3} \right) \delta(1-x) + 6 \left(\frac{1}{1-x} - \delta(1-x) \int_0^1 dx' \frac{1}{1-x'} \right). \quad (\text{A.4})$$

A.1.1 Cálculo de γ_{qq}

Vamos nesta subseção calcular a dimensão anômala para a função de desdobramento de um quark em outro quark. Porém, antes disto, faremos uma demonstração de que a expressão (A.1) é equivalente a expressão comumente usada na literatura

$$P_{qq}(x) = \frac{4}{3} \left[\frac{1+x^2}{1-x} \right]_+, \quad (\text{A.5})$$

onde o símbolo “+” é definido em (1.63).

Para fazer isso ento tomemos (A.1) e integremos da seguinte forma

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx P_{qq}(x)f(x) &= -\frac{4}{3} \int_0^1 dx (1+x)f(x) + 2 \int_0^1 dx \delta(1-x)f(x) + \\ &+ \frac{8}{3} \left(\int_0^1 dx \frac{1}{1-x} f(x) - \right. \\ &\left. - \int_0^1 dx \delta(1-x)f(x) \int_0^1 dx' \frac{1}{1-x'} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Ao integrarmos as funções delta obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx P_{qq}(x)f(x) &= - \left[\frac{4}{3} \int_0^1 dx (1+x)f(x) \right] + 2f(1) + \\ &+ \frac{8}{3} \left(\int_0^1 dx \frac{1}{1-x} f(x) - f(1) \int_0^1 dx \frac{1}{1-x} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

usando que $\int_0^1 dx(1+x) = 3/2$, temos que $2f(1) = \frac{4}{3} \int_0^1 dx(1+x)f(1)$. Portanto

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx P_{qq}(x)f(x) &= - \left[\frac{4}{3} \int_0^1 dx (1+x)f(x) \right] + \frac{4}{3} \int_0^1 dx(1+x)f(1) + \\ &+ \frac{8}{3} \int_0^1 dx \left(\frac{1}{1-x} f(x) - \frac{1}{1-x} f(1) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

ou

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx P_{qq}(x)f(x) &= -\frac{4}{3} \int_0^1 dx (1+x) \frac{1-x}{1-x} [f(x) - f(1)] + \\ &+ \frac{8}{3} \int_0^1 dx \left(\frac{1}{1-x} [f(x) - f(1)] \right). \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Assim

$$\int_0^1 dx P_{qq}(x)f(x) = \frac{4}{3} \int_0^1 dx \left(\frac{2}{1-x} + \frac{x^2-1}{1-x} \right) [f(x) - f(1)]. \quad (\text{A.10})$$

Usando (1.63) finalmente obtemos,

$$\int_0^1 dx P_{qq}(x)f(x) = \frac{4}{3} \int_0^1 dx \left(\frac{x^2+1}{1-x} \right)_+ f(x), \quad (\text{A.11})$$

portanto obtemos novamente (A.5) e comprovamos sua equivalência com a expressão (A.1).

Agora, para calcularmos a dimensão anômala γ_{qq} , tomemos a transformada de Melin

$$f(N,t) = \int_0^1 dx x^{N-1} f(x,t). \quad (\text{A.12})$$

Assim temos

$$\gamma_{qq}(N) = \int_0^1 dx x^{N-1} P_{qq}(x), \quad (\text{A.13})$$

onde usamos,

$$\begin{aligned} \gamma_{qq}(N) &= -\frac{4}{3} \int_0^1 dx (1+x) x^{N-1} + 2 \int_0^1 dx \delta(1-x) x^{N-1} + \\ &+ \frac{8}{3} \left(\int_0^1 dx \frac{1}{1-x} x^{N-1} - \right. \\ &\left. - \int_0^1 dx \delta(1-x) x^{N-1} \int_0^1 dx' \frac{1}{1-x'} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Fazendo integrações simples e usando o método dos resíduos, deslocando o pólo existente de um valor ϵ muito pequeno, temos,

$$\begin{aligned} \gamma_{qq}(N) &= -\frac{4}{3} \left[\frac{x^N}{N} \Big|_0^1 + \frac{x^{N+1}}{N+1} \Big|_0^1 \right] + 2 + \\ &+ \frac{8}{3} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^1 dx \frac{x^{N-1}}{1-x+\epsilon} - \int_0^1 dx \frac{1}{1-x+\epsilon} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Com a expansão,

$$\frac{x^{N+1}}{1-x+\epsilon} = - \sum_{i=0}^{N-2} x^i + \frac{x^{N-1}}{1-x+\epsilon}, \quad (\text{A.16})$$

podemos substituir em (A.15) e obtemos,

$$\gamma_{qq}(N) = -\frac{4}{3} \left[\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} \right] + 2 - \frac{8}{3} \int_0^1 dx \sum_{i=0}^{N-2} x^i \quad (\text{A.17})$$

$$\gamma_{qq}(N) = -\frac{4}{3} \left[\frac{N+1+N}{N(N+1)} \right] + 2 - \frac{8}{3} \sum_{i=0}^{N-2} \frac{x^{i+1}}{i+1} \Big|_0^1 \quad (\text{A.18})$$

$$\gamma_{qq}(N) = -\frac{4}{3} \left[\frac{2N+1}{N(N+1)} \right] + 2 - \frac{8}{3} \sum_{i=0}^{N-2} \frac{1}{i+1}. \quad (\text{A.19})$$

Sendo,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-2} \frac{1}{i+1} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N-1} \\ &= \underbrace{\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N} \right]}_{\sum_{k=2}^N \frac{1}{k}} + 1 - \frac{1}{N} \\ \sum_{i=0}^{N-2} \frac{1}{i+1} &= \sum_{k=2}^N \frac{1}{k} + 1 - \frac{1}{N} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Desta forma,

$$\gamma_{qq}(N) = -\frac{4}{3} \left[\frac{2N+1}{N(N+1)} \right] + 2 - \frac{8}{3} \left[\sum_{k=2}^N \frac{1}{k} + 1 - \frac{1}{N} \right] \quad (\text{A.21})$$

$$\gamma_{qq}(N) = -\frac{4}{3} \frac{2N+1}{N(N+1)} + \frac{8}{3} \frac{1}{N} + 2 - \frac{8}{3} - \frac{8}{3} \sum_{k=2}^N \frac{1}{k} \quad (\text{A.22})$$

Por fim encontramos,

$$\gamma_{qq}(N) = \frac{4}{3} \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{N(N+1)} - 2 \sum_{k=2}^N \frac{1}{k} \right] \quad (\text{A.23})$$

A.1.2 Cálculo de γ_{gg}

Da mesma forma que fizemos para P_{qq} , demonstrando a equivalência entre as expressões, pode ser feito para P_{gg} , que tem uma expressão comumente usada dada por

$$P_{gg}(x) = 6 \left[x \left(\frac{1}{(1-x)_+} \right) + \frac{1-x}{x} + x(1-x) + \left(\frac{11}{12} - \frac{N_f}{18} \right) \delta(1-x) \right] \quad (\text{A.24})$$

Usando (A.4) e (A.12) temos

$$\begin{aligned} \gamma_{gg}(N) &= 6 \left[\int_0^1 dx \frac{1}{x} x^{N-1} - 2 \int_0^1 dx x^{N-1} + \int_0^1 dx x^N (1-x) \right] - \\ &- \left[\frac{11}{2} - \frac{N_f}{3} \right] \int_0^1 dx \delta(1-x) x^{N-1} + 6 \left(\int_0^1 dx \frac{1}{1-x} x^{N-1} - \right. \\ &- \left. \int_0^1 dx \delta(1-x) x^{N-1} \int_0^1 dx' \frac{1}{1-x'} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Da mesma forma como desenvolvido anteriormente para P_{qq} , o segundo termo de (A.14) que está multiplicado por $\frac{8}{3}$ é idêntico ao terceiro termo da equação acima que está multiplicado 6 e entre parênteses. Assim usando a expansão (A.16) obtemos

$$\begin{aligned} \gamma_{gg}(N) &= 6 \left[\frac{x^{N-1}}{N-1} - 2 \frac{x^N}{N} + \frac{x^{N+1}}{N+1} - \frac{x^{N+2}}{N+2} \right]_0^1 - \left[\frac{11}{2} - \frac{N_f}{3} \right] \\ &- \sum_{i=0}^{N-2} \frac{x^{i+1}}{i+1} \Big|_0^1 \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

usando (A.20)

$$\begin{aligned} \gamma_{gg}(N) &= 6 \left[\frac{1}{N-1} - \frac{2}{N} + \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} \right] - \left[\frac{11}{2} - \frac{N_f}{3} \right] \\ &- 6 \sum_{k=2}^N \frac{1}{k} - 6 + \frac{6}{N} \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Assim finalmente obtemos a forma,

$$\gamma_{gg}(N) = 6 \left[-\frac{1}{12} + \frac{1}{N(N-1)} + \frac{1}{(N+1)(N+2)} - \sum_{k=2}^N \frac{1}{k} \right] - \frac{N_f}{3}. \quad (\text{A.28})$$

A.1.3 Cálculo de γ_{qg}

Agora calcularemos a dimensão anômala para P_{qg} .

Usando (A.2) e (A.12) temos

$$\gamma_{qg}(N) = \frac{1}{2} \int_0^1 dx x^{N-1} [(1-x)^2 + x^2] \quad (\text{A.29})$$

$$\gamma_{qg}(N) = \frac{1}{2} \left[\int_0^1 dx x^{N+1} + \int_0^1 dx x^{N-1} - 2 \int_0^1 dx x^N + \int_0^1 dx x^{N+1} \right] \quad (\text{A.30})$$

$$\gamma_{qg}(N) = \frac{1}{2} \left[2 \frac{x^{N+2}}{N+2} + \frac{x^N}{N} - 2 \frac{x^{N+1}}{N+1} \right]_0^1 \quad (\text{A.31})$$

$$\gamma_{qg}(N) = \frac{1}{2} \left[2 \frac{1}{N+2} + \frac{1}{N} - 2 \frac{1}{N+1} \right] \quad (\text{A.32})$$

Portanto encontramos,

$$\gamma_{qg}(N) = \frac{1}{2} \left[\frac{2 + N + N^2}{N(N+1)(N+2)} \right]. \quad (\text{A.33})$$

A.1.4 Cálculo de γ_{gq}

Neste momento, faremos o cálculo para P_{gq} .

Usando (A.3) e (A.12) temos

$$\gamma_{gq}(N) = \frac{4}{3} \int_0^1 dx x^{N-1} \left[\frac{1 + (1-x)^2}{x} \right] \quad (\text{A.34})$$

$$\gamma_{gq}(N) = \frac{4}{3} \left[\int_0^1 dx x^{N-2} + \int_0^1 dx x^{N-2} - 2 \int_0^1 dx x^{N-1} + \int_0^1 dx x^N \right] \quad (\text{A.35})$$

$$\gamma_{gq}(N) = \frac{4}{3} \left[2 \frac{x^{N-1}}{N-1} - 2 \frac{x^N}{N} + \frac{x^{N+1}}{N+1} \right]_0^1 \quad (\text{A.36})$$

$$\gamma_{gq}(N) = \frac{4}{3} \left[\frac{2}{N-1} - \frac{2}{N} + \frac{1}{N+1} \right] \quad (\text{A.37})$$

Finalmente temos,

$$\gamma_{gq}(N) = \frac{4}{3} \left[\frac{2 + N + N^2}{N(N^2 - 1)} \right]. \quad (\text{A.38})$$

Apêndice B

Dados Experimentais

Os dados experimentais utilizados nesta dissertação foram obtidos a partir das referências [20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31]. Eles foram extraídos dos experimentos ZEUS e H1 no DESY-HERA. Nas tabelas temos os valores da função de estrutura do próton F_2 em função de Q^2 e x , e os respectivos erros total $\sigma[*tot.*]$, estatístico $\sigma[*Est.*]$, sistemático $\sigma[*Sis.*]$ e de normalização $\sigma[*N*]$.

$Q^2[GeV^2]$	x	$F_2 \pm \sigma[tot.]$	$\sigma[Est.]$	$\sigma[Sis.]$	$\sigma[N]$
0.30	0.000028	0.263 ± 0.023 [20]	0.005	0.022	-
0.30	0.000017	0.280 ± 0.015 [20]	0.005	0.014	-
0.30	0.000013	0.295 ± 0.018 [20]	0.007	0.017	-
0.30	0.000010	0.296 ± 0.021 [20]	0.008	0.019	-
0.30	0.0004730	0.2214 ± 0.0079 [21]	0.0058	0.0047	-
0.30	0.0002200	0.2169 ± 0.0080 [21]	0.0058	0.0056	-
0.30	0.0001320	0.2339 ± 0.0083 [21]	0.0061	0.0067	-
0.30	0.0000662	0.2565 ± 0.0091 [21]	0.0067	0.0052	-
0.30	0.0000276	0.2700 ± 0.0097 [21]	0.0034	0.0091	-
0.30	0.0000165	0.2874 ± 0.0090 [21]	0.0042	0.0082	-
0.30	0.0000127	0.2896 ± 0.0085 [21]	0.0049	0.0063	-
0.30	0.0000100	0.3253 ± 0.0098 [21]	0.0063	0.0062	-
0.50	0.000046	0.351 ± 0.028 [20]	0.009	0.027	-
0.50	0.000028	0.375 ± 0.021 [20]	0.010	0.019	-
0.50	0.000021	0.414 ± 0.025 [20]	0.013	0.021	-
0.50	0.0007890	0.2897 ± 0.009 [21]	0.0063	0.0061	-
0.50	0.0003680	0.3020 ± 0.009 [21]	0.0061	0.0060	-
0.50	0.0002200	0.3144 ± 0.009 [21]	0.0060	0.0072	-
0.50	0.0001100	0.3449 ± 0.009 [21]	0.0061	0.0072	-
0.50	0.0000460	0.3599 ± 0.015 [21]	0.0063	0.0135	-
0.50	0.0000276	0.3822 ± 0.014 [21]	0.0082	0.0109	-
0.50	0.0000212	0.3767 ± 0.014 [21]	0.0101	0.0095	-
0.50	0.0000167	0.4265 ± 0.020 [21]	0.0153	0.0132	-
0.65	0.000011	0.568 ± 0.063 [22]	0.020	0.059	3%
0.65	0.000016	0.547 ± 0.051 [22]	0.016	0.048	3%
0.65	0.000060	0.386 ± 0.041 [20]	0.012	0.039	-
0.65	0.000036	0.464 ± 0.028 [20]	0.018	0.022	-
0.65	0.0010200	0.3119 ± 0.010 [21]	0.0074	0.0074	-
0.65	0.0004780	0.3319 ± 0.011 [21]	0.0076	0.0086	-
0.65	0.0002867	0.3559 ± 0.011 [21]	0.0080	0.0080	-
0.65	0.0001430	0.3890 ± 0.013 [21]	0.0087	0.0093	-
0.65	0.0000598	0.4290 ± 0.022 [21]	0.0110	0.0187	-
0.65	0.0000359	0.4971 ± 0.030 [21]	0.0193	0.0232	-
0.85	0.000014	0.713 ± 0.099 [22]	0.036	0.093	3%
0.85	0.000020	0.646 ± 0.046 [22]	0.017	0.043	3%
0.85	0.000032	0.621 ± 0.065 [22]	0.015	0.063	3%
0.85	0.000050	0.578 ± 0.050 [22]	0.016	0.047	3%
0.85	0.000080	0.534 ± 0.084 [22]	0.017	0.082	3%

$Q^2[GeV^2]$	x	$F_2 \pm \sigma[tot.]$	$\sigma[Est.]$	$\sigma[Sis.]$	$\sigma[N]$
1.2	0.000020	0.857 ± 0.095 [22]	0.030	0.090	3%
1.2	0.000032	0.759 ± 0.057 [22]	0.020	0.054	3%
1.2	0.000050	0.715 ± 0.052 [22]	0.016	0.049	3%
1.2	0.000080	0.627 ± 0.057 [22]	0.013	0.056	3%
1.2	0.000130	0.570 ± 0.032 [22]	0.014	0.029	3%
1.2	0.000200	0.525 ± 0.030 [22]	0.013	0.027	3%
1.2	0.000320	0.531 ± 0.044 [22]	0.013	0.042	3%
1.3	0.000028	0.716 ± 0.073 [23]	0.029	0.065	-
1.3	0.000038	0.717 ± 0.046 [23]	0.023	0.037	-
1.3	0.000053	0.715 ± 0.044 [23]	0.022	0.041	-
1.3	0.000080	0.626 ± 0.036 [23]	0.017	0.031	-
1.3	0.000160	0.559 ± 0.049 [23]	0.016	0.047	-
1.5	0.000032	0.832 ± 0.033 [24]	0.011	0.031	-
1.5	0.000050	0.752 ± 0.027 [24]	0.014	0.023	-
1.5	0.000080	0.702 ± 0.045 [24]	0.029	0.035	-
1.5	0.000030	0.969 ± 0.257 [25]	0.176	0.187	3.9%
1.5	0.000250	0.540 ± 0.118 [25]	0.055	0.104	3.9%
1.5	0.000630	0.458 ± 0.113 [25]	0.050	0.101	3.9%
1.5	0.001580	0.365 ± 0.105 [25]	0.045	0.095	3.9%
1.5	0.003980	0.381 ± 0.112 [25]	0.070	0.087	3.9%
1.5	0.000032	0.855 ± 0.080 [22]	0.027	0.075	3%
1.5	0.000050	0.783 ± 0.051 [22]	0.021	0.046	3%
1.5	0.000080	0.670 ± 0.050 [22]	0.017	0.048	3%
1.5	0.000130	0.669 ± 0.047 [22]	0.017	0.044	3%
1.5	0.000200	0.645 ± 0.050 [22]	0.016	0.048	3%
1.5	0.000320	0.613 ± 0.045 [22]	0.015	0.042	3%
1.5	0.000500	0.577 ± 0.048 [22]	0.014	0.046	3%
1.9	0.000039	0.915 ± 0.079 [23]	0.036	0.070	-
1.9	0.000053	0.852 ± 0.050 [23]	0.028	0.051	-
1.9	0.000075	0.742 ± 0.041 [23]	0.025	0.026	-
1.9	0.000110	0.740 ± 0.043 [23]	0.023	0.038	-
1.9	0.000220	0.636 ± 0.046 [23]	0.019	0.057	-
2.0	0.000050	0.851 ± 0.022 [24]	0.008	0.020	-
2.0	0.000080	0.748 ± 0.019 [24]	0.007	0.018	-
2.0	0.000130	0.716 ± 0.019 [24]	0.009	0.017	-
2.0	0.000200	0.654 ± 0.022 [24]	0.008	0.021	-
2.0	0.000320	0.626 ± 0.021 [24]	0.009	0.019	-
2.0	0.000500	0.620 ± 0.026 [24]	0.009	0.025	-

$Q^2[GeV^2]$	x	$F_2 \pm \sigma[tot.]$	$\sigma[Est.]$	$\sigma[Sis.]$	$\sigma[N]$
2.0	0.001000	0.513 ± 0.017 [24]	0.006	0.016	-
2.0	0.003200	0.424 ± 0.020 [24]	0.006	0.019	-
2.0	0.000050	1.037 ± 0.134 [25]	0.077	0.110	3.9%
2.0	0.000032	1.048 ± 0.145 [22]	0.052	0.135	3%
2.0	0.000050	0.939 ± 0.064 [22]	0.030	0.056	3%
2.0	0.000080	0.751 ± 0.049 [22]	0.022	0.044	3%
2.0	0.000130	0.729 ± 0.059 [22]	0.020	0.055	3%
2.0	0.000200	0.717 ± 0.046 [22]	0.020	0.042	3%
2.0	0.000320	0.727 ± 0.047 [22]	0.020	0.043	3%
2.0	0.000500	0.639 ± 0.056 [22]	0.019	0.053	3%
2.0	0.000065	0.930 ± 0.081 [26]	0.040	0.070	3%
2.0	0.000120	0.710 ± 0.068 [26]	0.040	0.060	3%
2.5	0.000050	0.909 ± 0.025 [24]	0.012	0.023	-
2.5	0.000080	0.828 ± 0.016 [24]	0.007	0.015	-
2.5	0.000130	0.767 ± 0.014 [24]	0.007	0.013	-
2.5	0.000200	0.691 ± 0.015 [24]	0.007	0.014	-
2.5	0.000320	0.638 ± 0.014 [24]	0.006	0.013	-
2.5	0.000500	0.603 ± 0.012 [24]	0.006	0.011	-
2.5	0.000800	0.555 ± 0.012 [24]	0.006	0.011	-
2.5	0.001580	0.516 ± 0.010 [24]	0.004	0.095	-
2.5	0.005000	0.403 ± 0.015 [24]	0.004	0.015	-
2.5	0.000080	0.885 ± 0.083 [25]	0.052	0.065	3.9%
2.5	0.000130	0.874 ± 0.150 [25]	0.079	0.127	3.9%
2.5	0.000250	0.622 ± 0.125 [25]	0.037	0.119	3.9%
2.5	0.000630	0.621 ± 0.101 [25]	0.039	0.093	3.9%
2.5	0.001580	0.466 ± 0.079 [25]	0.033	0.072	3.9%
2.5	0.003980	0.402 ± 0.073 [25]	0.039	0.062	3.9%
2.5	0.000050	1.034 ± 0.124 [22]	0.044	0.116	3%
2.5	0.000080	0.950 ± 0.060 [22]	0.031	0.051	3%
2.5	0.000130	0.922 ± 0.075 [22]	0.027	0.070	3%
2.5	0.000200	0.842 ± 0.062 [22]	0.024	0.057	3%
2.5	0.000320	0.703 ± 0.043 [22]	0.022	0.037	3%
2.5	0.000500	0.649 ± 0.049 [22]	0.021	0.044	3%
2.5	0.000800	0.590 ± 0.052 [22]	0.019	0.048	3%
2.5	0.000054	0.964 ± 0.072 [23]	0.039	0.061	-
2.5	0.000073	0.909 ± 0.051 [23]	0.029	0.042	-
2.5	0.000100	0.870 ± 0.043 [23]	0.027	0.033	-
2.5	0.000160	0.771 ± 0.040 [23]	0.023	0.033	-

$Q^2[GeV^2]$	x	$F_2 \pm \sigma[tot.]$	$\sigma[Est.]$	$\sigma[Sis.]$	$\sigma[N]$
2.5	0.000300	0.725 ± 0.051 [23]	0.023	0.045	-
3.5	0.000080	0.964 ± 0.022 [24]	0.011	0.019	-
3.5	0.000130	0.886 ± 0.015 [24]	0.008	0.013	-
3.5	0.000200	0.826 ± 0.014 [24]	0.007	0.012	-
3.5	0.000320	0.761 ± 0.015 [24]	0.008	0.013	-
3.5	0.000500	0.716 ± 0.014 [24]	0.007	0.013	-
3.5	0.000800	0.647 ± 0.012 [24]	0.006	0.010	-
3.5	0.001300	0.601 ± 0.012 [24]	0.006	0.010	-
3.5	0.002510	0.532 ± 0.008 [24]	0.004	0.007	-
3.5	0.008000	0.418 ± 0.013 [24]	0.004	0.012	-
3.5	0.000080	1.036 ± 0.106 [25]	0.053	0.092	3.9%
3.5	0.000130	1.026 ± 0.081 [25]	0.045	0.067	3.9%
3.5	0.000200	0.934 ± 0.085 [25]	0.041	0.075	3.9%
3.5	0.000320	0.854 ± 0.105 [25]	0.045	0.093	3.9%
3.5	0.000500	0.716 ± 0.126 [25]	0.041	0.119	3.9%
3.5	0.000800	0.712 ± 0.135 [25]	0.049	0.126	3.9%
3.5	0.001300	0.778 ± 0.149 [25]	0.058	0.137	3.9%
3.5	0.002500	0.621 ± 0.166 [25]	0.043	0.157	3.9%
3.5	0.003980	0.458 ± 0.088 [25]	0.046	0.075	3.9%
3.5	0.000080	1.094 ± 0.104 [22]	0.045	0.094	3%
3.5	0.000130	1.018 ± 0.062 [22]	0.036	0.051	3%
3.5	0.000200	0.873 ± 0.069 [22]	0.029	0.063	3%
3.5	0.000320	0.899 ± 0.082 [22]	0.029	0.076	3%
3.5	0.000500	0.864 ± 0.063 [22]	0.029	0.056	3%
3.5	0.000800	0.686 ± 0.056 [22]	0.025	0.051	3%
3.5	0.001300	0.663 ± 0.055 [22]	0.024	0.050	3%
3.5	0.000073	1.140 ± 0.076 [23]	0.050	0.058	-
3.5	0.000098	0.995 ± 0.047 [23]	0.035	0.032	-
3.5	0.000140	0.945 ± 0.042 [23]	0.031	0.028	-
3.5	0.000210	0.839 ± 0.035 [23]	0.026	0.024	-
3.5	0.000410	0.663 ± 0.051 [23]	0.021	0.046	-
3.5	0.000063	1.177 ± 0.152 [27]	0.032	0.150	-
3.5	0.000102	0.979 ± 0.040 [27]	0.020	0.035	-
3.5	0.000161	0.891 ± 0.028 [27]	0.018	0.022	-
3.5	0.000253	0.833 ± 0.026 [27]	0.016	0.020	-
3.5	0.000400	0.788 ± 0.026 [27]	0.015	0.021	-
3.5	0.000632	0.701 ± 0.025 [27]	0.013	0.021	-
3.5	0.002000	0.554 ± 0.015 [27]	0.050	0.014	-
3.5	0.008000	0.472 ± 0.030 [27]	0.050	0.030	-

$Q^2[GeV^2]$	x	$F_2 \pm \sigma[tot.]$	$\sigma[Est.]$	$\sigma[Sis.]$	$\sigma[N]$
3.5	0.000063	0.875 ± 0.106 [28]	0.052	0.092	2.0%
3.5	0.000100	0.939 ± 0.078 [28]	0.040	0.068	2.0%
5.0	0.000130	1.043 ± 0.020 [24]	0.011	0.017	-
5.0	0.000200	0.974 ± 0.018 [24]	0.010	0.015	-
5.0	0.000320	0.890 ± 0.017 [24]	0.010	0.014	-
5.0	0.000500	0.792 ± 0.015 [24]	0.009	0.012	-
5.0	0.000800	0.704 ± 0.014 [24]	0.008	0.011	-
5.0	0.001300	0.661 ± 0.015 [24]	0.007	0.013	-
5.0	0.002000	0.621 ± 0.012 [24]	0.007	0.010	-
5.0	0.003980	0.538 ± 0.009 [24]	0.005	0.008	-
5.0	0.013000	0.410 ± 0.012 [24]	0.004	0.011	-
5.0	0.000130	1.106 ± 0.089 [25]	0.049	0.074	3.9%
5.0	0.000200	1.033 ± 0.082 [25]	0.044	0.069	3.9%
5.0	0.000320	0.907 ± 0.077 [25]	0.039	0.066	3.9%
5.0	0.000500	0.839 ± 0.085 [25]	0.039	0.076	3.9%
5.0	0.000800	0.769 ± 0.073 [25]	0.037	0.063	3.9%
5.0	0.001300	0.630 ± 0.060 [25]	0.034	0.050	3.9%
5.0	0.002000	0.540 ± 0.054 [25]	0.033	0.043	3.9%
5.0	0.004000	0.500 ± 0.091 [25]	0.029	0.086	3.9%
6.5	0.000130	1.148 ± 0.031 [24]	0.018	0.025	-
6.5	0.000200	1.092 ± 0.020 [24]	0.012	0.016	-
6.5	0.000320	0.963 ± 0.017 [24]	0.012	0.013	-
6.5	0.000500	0.877 ± 0.018 [24]	0.011	0.015	-
6.5	0.000800	0.801 ± 0.016 [24]	0.010	0.012	-
6.5	0.001300	0.708 ± 0.013 [24]	0.008	0.011	-
6.5	0.002000	0.672 ± 0.014 [24]	0.009	0.011	-
6.5	0.003980	0.587 ± 0.010 [24]	0.005	0.009	-
6.5	0.013000	0.432 ± 0.011 [24]	0.004	0.010	-
6.5	0.000130	1.292 ± 0.153 [25]	0.085	0.127	3.9%
6.5	0.000200	1.101 ± 0.089 [25]	0.052	0.072	3.9%
6.5	0.000320	0.963 ± 0.082 [25]	0.045	0.068	3.9%
6.5	0.000500	0.926 ± 0.098 [25]	0.044	0.088	3.9%
6.5	0.000800	0.848 ± 0.085 [25]	0.038	0.076	3.9%
6.5	0.001300	0.759 ± 0.078 [25]	0.039	0.068	3.9%
6.5	0.002500	0.667 ± 0.061 [25]	0.029	0.054	3.9%
6.5	0.006300	0.504 ± 0.089 [25]	0.029	0.084	3.9%
6.5	0.000102	1.392 ± 0.146 [27]	0.033	0.142	-

$Q^2[GeV^2]$	x	$F_2 \pm \sigma[tot.]$	$\sigma[Est.]$	$\sigma[Sis.]$	$\sigma[N]$
6.5	0.000161	1.213 ± 0.048 [27]	0.018	0.044	-
6.5	0.000253	1.094 ± 0.026 [27]	0.016	0.021	-
6.5	0.000400	0.977 ± 0.023 [27]	0.015	0.018	-
6.5	0.000632	0.900 ± 0.031 [27]	0.014	0.028	-
6.5	0.001020	0.828 ± 0.021 [27]	0.013	0.017	-
6.5	0.001610	0.740 ± 0.023 [27]	0.013	0.019	-
6.5	0.00253	0.666 ± 0.015 [27]	0.008	0.013	-
6.5	0.005000	0.576 ± 0.025 [27]	0.005	0.024	-
6.5	0.021000	0.487 ± 0.042 [27]	0.006	0.042	-
6.5	0.000100	1.221 ± 0.094 [28]	0.036	0.087	2.0%
6.5	0.000160	1.138 ± 0.047 [28]	0.021	0.042	2.0%
6.5	0.000250	1.038 ± 0.030 [28]	0.018	0.024	2.0%
6.5	0.000400	0.951 ± 0.035 [28]	0.019	0.029	2.0%
6.5	0.000630	0.841 ± 0.028 [28]	0.018	0.021	2.0%
6.5	0.001000	0.776 ± 0.036 [28]	0.017	0.032	2.0%
6.5	0.001600	0.753 ± 0.033 [28]	0.019	0.027	2.0%
6.5	0.002500	0.645 ± 0.030 [28]	0.012	0.028	2.0%
6.5	0.004000	0.629 ± 0.025 [28]	0.009	0.023	2.0%
6.5	0.016000	0.495 ± 0.031 [28]	0.008	0.030	2.0%
6.5	0.040000	0.403 ± 0.113 [28]	0.019	0.111	2.0%
8.5	0.000200	1.193 ± 0.027 [24]	0.017	0.022	-
8.5	0.000320	1.092 ± 0.022 [24]	0.014	0.017	-
8.5	0.000500	0.996 ± 0.019 [24]	0.013	0.014	-
8.5	0.000800	0.894 ± 0.018 [24]	0.013	0.013	-
8.5	0.001300	0.797 ± 0.017 [24]	0.011	0.014	-
8.5	0.002000	0.725 ± 0.016 [24]	0.010	0.013	-
8.5	0.003200	0.632 ± 0.014 [24]	0.009	0.011	-
8.5	0.006110	0.565 ± 0.010 [24]	0.006	0.008	-
8.5	0.020000	0.419 ± 0.013 [24]	0.005	0.012	-
8.5	0.000180	1.430 ± 0.524 [29]	0.300	0.430	8%
8.5	0.000240	1.620 ± 0.391 [29]	0.250	0.300	8%
8.5	0.000320	1.280 ± 0.269 [29]	0.180	0.200	8%
8.5	0.000178	1.190 ± 0.168 [30]	0.050	0.160	4.5%
8.5	0.000261	1.200 ± 0.136 [30]	0.040	0.130	4.5%
8.5	0.000383	1.110 ± 0.158 [30]	0.050	0.150	4.5%
8.5	0.000750	0.760 ± 0.135 [30]	0.090	0.100	4.5%
8.5	0.000200	1.215 ± 0.080 [25]	0.050	0.062	1.5%
8.5	0.000320	1.089 ± 0.061 [25]	0.038	0.048	1.5%

$Q^2[GeV^2]$	x	$F_2 \pm \sigma[tot.]$	$\sigma[Est.]$	$\sigma[Sis.]$	$\sigma[N]$
8.5	0.000500	1.033 ± 0.071 [25]	0.034	0.062	1.5%
8.5	0.000800	0.923 ± 0.049 [25]	0.031	0.038	1.5%
8.5	0.001300	0.811 ± 0.056 [25]	0.030	0.047	1.5%
8.5	0.002000	0.770 ± 0.060 [25]	0.034	0.049	1.5%
8.5	0.003200	0.562 ± 0.051 [25]	0.028	0.043	1.5%
8.5	0.005000	0.648 ± 0.061 [25]	0.033	0.051	1.5%
8.5	0.008000	0.564 ± 0.059 [25]	0.032	0.049	1.5%
8.5	0.000161	1.323 ± 0.135 [27]	0.033	0.131	-
8.5	0.000253	1.223 ± 0.039 [27]	0.020	0.033	-
8.5	0.000400	1.078 ± 0.028 [27]	0.017	0.022	-
8.5	0.000632	0.977 ± 0.031 [27]	0.016	0.027	-
8.5	0.001020	0.877 ± 0.020 [27]	0.014	0.014	-
8.5	0.001610	0.813 ± 0.020 [27]	0.015	0.013	-
8.5	0.00042	1.090 ± 0.104 [31]	0.030	0.100	3.5%
8.5	0.00085	0.870 ± 0.085 [31]	0.030	0.080	3.5%
8.5	0.000200	1.570 ± 0.152 [26]	0.110	0.110	3.0%
8.5	0.000450	0.990 ± 0.081 [26]	0.060	0.060	3.0%
8.5	0.000800	0.930 ± 0.108 [26]	0.060	0.090	3.0%
8.5	0.002600	0.660 ± 0.076 [26]	0.030	0.070	3.0%
8.5	0.000160	1.337 ± 0.080 [28]	0.037	0.070	2.0%
8.5	0.000250	1.151 ± 0.038 [28]	0.024	0.030	2.0%
8.5	0.000400	0.993 ± 0.032 [28]	0.021	0.02	2.0%
8.5	0.000630	0.920 ± 0.027 [28]	0.019	0.020	2.0%
8.5	0.001000	0.831 ± 0.033 [28]	0.018	0.030	2.0%
8.5	0.001600	0.704 ± 0.025 [28]	0.017	0.0200	2.0%
10.0	0.000161	1.400 ± 0.188 [27]	0.059	0.179	-
10.0	0.000253	1.291 ± 0.064 [27]	0.027	0.058	-
10.0	0.000400	1.115 ± 0.033 [27]	0.021	0.026	-
10.0	0.000632	1.021 ± 0.026 [27]	0.018	0.019	-
10.0	0.001020	0.935 ± 0.025 [27]	0.017	0.018	-
10.0	0.001610	0.852 ± 0.025 [27]	0.018	0.017	-
10.0	0.002530	0.761 ± 0.023 [27]	0.015	0.018	-
10.0	0.005000	0.624 ± 0.019 [27]	0.007	0.018	-
10.0	0.021000	0.503 ± 0.035 [27]	0.006	0.034	-
12.0	0.000261	1.350 ± 0.143 [30]	0.060	0.130	4.5%
12.0	0.000383	1.260 ± 0.130 [30]	0.050	0.120	4.5%
12.0	0.000562	1.190 ± 0.130 [30]	0.050	0.120	4.5%

$Q^2[GeV^2]$	x	$F_2 \pm \sigma[tot.]$	$\sigma[Est.]$	$\sigma[Sis.]$	$\sigma[N]$
12.0	0.000825	1.080 ± 0.117 [30]	0.040	0.110	4.5%
12.0	0.001330	0.960 ± 0.139 [30]	0.050	0.130	4.5%
12.0	0.002370	0.850 ± 0.108 [30]	0.040	0.100	4.5%
12.0	0.004210	0.740 ± 0.108 [30]	0.040	0.100	4.5%
12.0	0.007500	0.700 ± 0.117 [30]	0.040	0.110	4.5%
12.0	0.013300	0.580 ± 0.126 [30]	0.040	0.120	4.5%
12.0	0.00032	1.276 ± 0.059 [25]	0.020	0.055	1.5%
12.0	0.00050	1.168 ± 0.058 [25]	0.016	0.056	1.5%
12.0	0.00080	1.067 ± 0.063 [25]	0.015	0.061	1.5%
12.0	0.00130	0.942 ± 0.042 [25]	0.015	0.039	1.5%
12.0	0.00200	0.866 ± 0.059 [25]	0.016	0.057	1.5%
12.0	0.00320	0.749 ± 0.057 [25]	0.016	0.055	1.5%
12.0	0.00500	0.685 ± 0.063 [25]	0.016	0.061	1.5%
12.0	0.00800	0.618 ± 0.059 [25]	0.016	0.057	1.5%
12.0	0.01300	0.531 ± 0.052 [25]	0.017	0.049	1.5%
12.0	0.000320	1.249 ± 0.018 [24]	0.007	0.0210	-
12.0	0.000500	1.156 ± 0.016 [24]	0.008	0.0160	-
12.0	0.00042	1.270 ± 0.104 [31]	0.030	0.100	3.5%
12.0	0.00085	1.020 ± 0.102 [31]	0.020	0.100	3.5%
12.0	0.00160	0.810 ± 0.112 [31]	0.020	0.110	3.5%
12.0	0.00270	0.730 ± 0.173 [31]	0.030	0.170	3.5%
12.0	0.00045	0.990 ± 0.103 [26]	0.090	0.070	3.0%
12.0	0.00080	0.980 ± 0.106 [26]	0.080	0.070	3.0%
12.0	0.00260	0.730 ± 0.090 [26]	0.050	0.080	3.0%
12.0	0.00025	1.300 ± 0.072 [28]	0.042	0.059	2.0%
12.0	0.00040	1.128 ± 0.043 [28]	0.031	0.036	2.0%
12.0	0.00063	1.102 ± 0.039 [28]	0.027	0.020	2.0%
12.0	0.00100	0.903 ± 0.038 [28]	0.023	0.031	2.0%
12.0	0.00160	0.789 ± 0.034 [28]	0.023	0.028	2.0%
12.0	0.00250	0.746 ± 0.034 [28]	0.021	0.030	2.0%
12.0	0.000280	1.306 ± 0.077 [28]	0.057	0.038	-
12.0	0.000560	1.084 ± 0.066 [28]	0.040	0.061	-
12.0	0.001400	0.956 ± 0.065 [28]	0.044	0.040	-
12.0	0.000253	1.410 ± 0.112 [27]	0.037	0.106	-
12.0	0.000400	1.217 ± 0.043 [27]	0.028	0.033	-
12.0	0.000632	1.078 ± 0.034 [27]	0.023	0.025	-
12.0	0.001020	0.985 ± 0.028 [27]	0.020	0.019	-
12.0	0.001610	0.900 ± 0.024 [27]	0.020	0.014	-
12.0	0.002530	0.794 ± 0.023 [27]	0.017	0.015	-

Referências

- [1] HALZEN, F.; MARTIN, A. D.; *Quarks and Leptons: An introductory Course in Modern Particle Physics*, John Wiley and Sons, 1984.
- [2] ANCHORDOQUI, L.; HALZEN, F. *Lessons in Particle Physics*, arXiv:0906.1271.
- [3] BARONE, V.; PREDAZZI, E. *High-Energy Particle Diffraction*, Springer-Verlag, 2002.
- [4] ELLIS, R. K.; STIRLING, W. J.; WEBBER, B. R. *QCD and Collider Physics*, Cambridge University Press, 2003.
- [5] GREINER, W.; SCHARAMM, S.; STEIN, E. *Quantum Chromodynamics*, Springer-Verlag, 2002.
- [6] CORNWALL, J. M.; *Dynamical mass generation in continuum quantum chromodynamics*, Phys. Rev. D, v. 26, p. 1453, 1982.
- [7] PAPAVALASSILOU, J.; CORNWALL, J. C.; Coupled fermion gap and vertex equations for chiral-symmetry breakdown in QCD, *Phys. Rev. D*, v. 44, p. 1285, 1991.
- [8] PAPAVALASSILOU, J.; *Scrutinizing the Green's functions of QCD: Lattice meets Schwinger-Dyson*, arXiv:0910.4487.
- [9] BINOSI, D.; PAPAVALASSILOU, J.; New Schwinger-Dyson equations for non-Abelian gauge theories, *JHEP*, v. 811, p. 63, 2008.
- [10] AGUILAR, A. C.; PAPAVALASSILOU, J.; On dynamical gluon mass generation, *Eur. Phys. J. A*, v. 31, p. 742, 2007.
- [11] CVETIČ, G.; *et. al.*, Small- x behavior of the structure function F_2 and its slope $\partial \ln F_2 / \partial \ln(1/x)$ for frozen and analytic strong-coupling constants, *Phys. Lett. B*, v. 679, p. 350, 2009.
- [12] KOTIKOV, A. V.; PARENTE, G.; Small x behaviour of parton distributions with soft initial conditions, *Nucl. Phys. B*, v. 549, p. 242, 1999.

- [13] ILLARIONOV, A. Yu.; KOTIKOV, A. V.; BERMUDEZ, G. P.; Small x behavior of parton distributions. A study of higher twist effects., *Phys. Part. Nucl.*, v. 39, p. 307, 2008.
- [14] GRIBOV, V. N.; LIPATOV, L. N.; Deep inelastic $e p$ scattering in perturbation theory, *Sov. J. Nucl. Phys.*, v. 15, n. , p. 438, 1972.
- [15] LIPATOV, L. N.; The parton model and perturbation theory, *Sov. J. Nucl. Phys.*, v. 20, p. 94, 1975.
- [16] ALTARELLI, G.; PARISI, G.; Asymptotic Freedom in Parton Language, *Nucl. Phys. B*, v. 126, p. 298, 1977.
- [17] DOKSHITZER, Y. L.; Calculation of the Structure Functions for Deep Inelastic Scattering and $e^+ e^-$ Annihilation by Perturbation Theory in Quantum Chromodynamics, *Sov. Phys. JETP*, v. 46, p. 641, 1977, [*Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, v. 73, p. 1216, 1977].
- [18] SHIRKOV, D. V.; SOLOVTSOV, I. L.; Analytic Model for the QCD Running Coupling with Universal $\bar{\alpha}_s(0)$ Value, *Phys. Rev. Lett.*, v. 79, p. 1209, 1997.
- [19] SOLOVTSOV, I. L.; SHIRKOV, D. V.; The analytic approach in quantum chromodynamics, *Theor. Math. Phys.*, v. 120, p. 1220, 1999.
- [20] BREITWEG, J.; *et. al.*, Measurement of the Proton Structure Function F_2 and $\sigma_{tot}^{\gamma^*p}$ at Low Q^2 and Very Low x at HERA, *Phys. Lett. B*, v. 407, p. 432, 1997.
- [21] BREITWEG, J.; *et. al.*, Measurement of the Proton Structure Function F_2 at Very Low Q^2 at HERA, *Phys. Lett. B*, v. 487, p. 53, 2000.
- [22] ADLOFF, C.; *et. al.*, A Measurement of the Proton Structure Function $F_2(x, Q^2)$ at Low x and Low Q^2 at HERA, *Nucl. Phys. B*, v. 497, p. 3, 1997.
- [23] BREITWEG, J.; *et. al.*, ZEUS Results on the Measurement and Phenomenology of F_2 at Low x and Low Q^2 , *Eur. Phys. J. C*, v. 7, p. 609, 1999.
- [24] ADLOFF, C.; *et. al.*, Deep-Inelastic Inclusive ep Scattering at Low x and a Determination of α_s , *Eur. Phys. J. C*, v. 21, p. 33, 2001.
- [25] AID, S.; *et. al.*, A Measurement and QCD Analysis of the Proton Structure Function $F_2(x, Q^2)$ at HERA, *Nucl. Phys. B*, v. 470, p. 3, 1996.

- [26] DERRICK, M.; *et. al.*, Measurement of the Proton Structure Function F_2 at low x and low Q^2 at HERA, *Z. Phys. C*, v. 69, p. 607, 1996.
- [27] CHEKKANOV, S.; *et. al.*, Measurement of the neutral current cross section and F_2 structure function for deep inelastic e^+p scattering at HERA, *Eur. Phys. J. C*, v. 21, p. 443, 2001.
- [28] DERRICK, M.; *et. al.*, Measurement of the F_2 structure function in deep inelastic e^+p scattering using 1994 data from the ZEUS detector at HERA, *Z. Phys. C*, v. 72, p. 399, 1996.
- [29] ABT, I.; *et. al.*, Measurement of the proton structure function $F_2(x, Q^2)$ in the low- x region at HERA, *Nucl. Phys. B*, v. 407, p. 515, 1993.
- [30] AHMED, T.; *et. al.*, A Measurement of the Proton Structure Function $F_2(x, Q^2)$, *Nucl. Phys. B*, v. 439, n. , p. 471, 1995.
- [31] DERRICK, M.; *et. al.*, Measurement of the proton structure function F_2 from the 1993 HERA data, *Z. Phys. C*, v. 65, p. 379, 1995.
- [32] LUNA, E. G. S.; *Espalhamento Difractivo de Hádrõs: Desenvolvimento de um Modelo baseado na QCD e Determinação de limites extremos de parâmetros do Pomeron* Campinas: DRCC/IFGW/UNICAMP, 2005. Tese de Doutorado em Ciências.
- [33] OWENS, J. F.; TUNG, Wu-ki; Parton Distribution Functions Of Hadrons, *Annu. Nucl. Part. Sci.*, v. 42, p. 291, 1992.
- [34] GROSS, D. J.; WILCZEK, F.; Ultraviolet Behavior of non-Abelian Gauge Theories, *Phys. Rev. Lett.*, v. 30, p.1343, 1973.
- [35] POLITZER, H. D.; Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?, *Phys. Rev. Lett.*, v. 30, p. 1346, 1973.
- [36] CASWELL, W. E.; Asymptotic Behavior of Non-Abelian Gauge Theories to Two-Loop Order, *Phys. Rev. Lett.*, v.33, p. 244, 1974.
- [37] TARASOV, O. V.; VLADIMIROV, A. A.; ZHARKOV, A. Yu.; The gell-mann-low function of QCD in the three-loop approximation, *Phys. Lett. B*, v. 93, p. 429, 1980.
- [38] CALLAN, C. G.; GROSS, D. J.; High-Energy Electroproduction and the Constitution of the Electric Current, *Phys. Rev. Lett.*, v. 22, p. 156, 1969.

- [39] NEWMAN, P.; Deep Inelastic Lepton-Nucleon Scattering At Hera, *Int. J. Mod. Phys. A*, v. 19, p. 1061, 2004.
- [40] COOPER-SARKAR, A. M.; DEVENISH, R. C. E.; DE ROECK, A.; Structure Functions Of The Nucleon And Their Interpretation, *Int. J. Mod. Phys. A*, v. 13, p. 3385, 1998.
- [41] BALL, R. D.; FORTE, S.; Double asymptotic scaling at HERA, *Phys. Lett. B*, v. 335, p. 77, 1994.
- [42] BALL, R. D.; FORTE, S.; A direct test of perturbative QCD at small x , *Phys. Lett. B*, v. 336, p. 77, 1994.
- [43] RÚJULA, A. D.; GLASHOW, S.L.; POLITZER, H. D.; TREIMAN, S. B.; WILCZEK, F.; ZEE, A.; Possible non-Regge behavior of electroproduction structure functions, *Phys. Rev. D*, v. 10, p. 1649, 1974.
- [44] VUOLO, J. H.; *Fundamentos da teoria de erros*, Edgard Blücher, 2002.
- [45] JAMES F.; ROOS, M.; *Minuit - Function Minimization and Error Analysis*, CERN Program Library D506 (1992).
- [46] MANKIEWICZ, L.; SAALFELD, A.; WEIGL, T.; On the analytical approximation to the GLAP evolution at small x and moderate Q^2 , *Phys. Lett. B*, v. 393, p. 175, 1997.
- [47] MARTIN, A. D.; ROBERTS, R. G.; STIRLING, W. J.; THORNE, R. S.; Uncertainties of predictions from parton distributions II: theoretical errors, *Eur. Phys. J. C*, v. 35, p. 325, 2004.
- [48] MARTIN, A. D.; STIRLING, W. J.; THORNE, R. S.; WATT, G.; Uncertainties on α_s in global PDF analyses and implications for predicted hadronic cross sections, *Eur. Phys. J. C*, v. 64, p. 653, 2009.
- [49] SYMANZIK, K.; Infrared singularities and small-distance-behaviour analysis, *Comm. Math. Phys.*, v. 34, p. 7, 1973.
- [50] APPELQUIST, T.; CARAZZONE, J.; Infrared singularities and massive fields, *Phys. Rev. D*, v. 11, p. 2856, 1975.
- [51] AMSLER, C.; *et al.*, Review of Particle Physics: Particle Data Group, *Phys. Lett. B*, v. 667, p. 1, 2008.
- [52] ROTHE, H. J.; *Lattice gauge theories. One introduction*, World Scientific, 1997.

- [53] CUCCHIERI, A.; MENDES, T.; Propagators, Running Coupling and Condensates in Lattice QCD, *Braz. J. Phys.*, v. 37, p. 484, 2007.
- [54] WILSON, K. G.; Confinement of quarks, *Phys. Rev. D*, v. 10, p. 2445, 1974.
- [55] BINOSI, D.; PAPAVALASSILIOU, J.; Pinch technique to all orders, *Phys. Rev. D*, v. 66, p.111901, 2002.
- [56] BINOSI, D.; PAPAVALASSILIOU, J.; Pinch technique: Theory and applications, *Phys. Rep.*, v. 479, p. 1, 2009.
- [57] LUNA, E. G. S.; MARTINI, A. F.; MENON, M. J.; MIHARA, A.; NATALE, A. A.; Influence of a dynamical gluon mass in the pp and $\bar{p}p$ forward scattering, *Phys. Rev. D*, v. 72, p. 034019, 2005.
- [58] GAY DUCATI, M. B.; HALZEN, F.; NATALE, A. A.; Diffraction and the gluon mass, *Phys. Rev. D*, v. 48, p. 2324, 1993.
- [59] HALZEN, F.; KREIN, G.; NATALE, A. A.; Relating the QCD Pomeron to an effective gluon mass, *Phys. Rev. D*, v. 47, p. 295, 1993.
- [60] MIHARA, A.; NATALE, A. A.; Dynamical gluon mass corrections in heavy quarkonia decays, *Phys. Lett. B*, v. 482, p. 378, 2000.
- [61] AGUILAR, A. C.; MIHARA, A.; NATALE, A. A.; Phenomenological Tests For The Freezing Of The QCD Running Coupling Constant, *Int. J. Mod. Phys. A*, v. 19, p. 249, 2004.
- [62] LUNA, E. G. S.; NATALE, A. A.; γp and $\gamma\gamma$ scattering from $\bar{p}p$, pp forward amplitudes in a QCD eikonal model with a dynamical gluon mass, *Phys. Rev. D*, v. 73, p. 074019, 2006.
- [63] LUNA, E. G. S.; Survival probability of large rapidity gaps in a QCD model with a dynamical infrared mass scale, *Phys. Lett. B*, v. 641, p. 171, 2006.
- [64] LUNA, E. G. S.; NATALE, A. A.; ZANETTI, C. M.; The Small x Behavior Of The Gluon Structure Function From Total Cross-Sections, *Int. J. Mod. Phys. A*, v. 23, p. 151, 2008.
- [65] SAUTER, W. K.; *Fenomenologia em Cromodinâmica Quântica com Propagador de Glúon Modificado* Porto Alegre: Curso de Pós-Graduação em Física - UFRGS, 2003. Tese de Doutorado em Ciências.

-
- [66] SANTOS, A. L.; LUNA, E. G. S.; The Effective Slope of the Structure Function F_2 and the Frozen Strong Coupling in the Infrared Region, XI Hadron Physics, Maresias, Brasil, AIP 2010.
- [67] SANTOS, A. L.; LUNA, E. G. S.; Soft Gluon Radiation And The Dynamical Gluon Mass, XXX Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, Passa Quatro-MG, Brasil, 2009.
- [68] DOKSHITZER, Y. I.; DYAKONOV, D. I.; TROYAN, S. I.; On the transverse momentum distribution of massive lepton pairs, *Phys. Lett. B*, v. 79, p. 269, 1978.
- [69] GODBOLE, R. M.; GRAU, A.; PANCHERI, G.; SRIVASTAVA, Y. N.; Soft gluon radiation and energy dependence of total hadronic cross sections, *Phys. Rev. D*, v. 72, p. 076001, 2005.