1) Determine quais dos conjuntos abaixo são subanéis:

$a)L = \left\{a + b\sqrt{5}; a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ do anel $(\mathbb{R}, +, \cdot)$;

$b)M = \{a + bi; a \in \mathbb{Z}, b \in 2\mathbb{Z}\}$ do anel $(\mathbb{C}, +, \cdot)$;

$c)S = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R}\right\}$ do anel $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$;

$d)2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$ do anel $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$ (produto direto);

2) Uma matriz 2×2 sobre $\mathbb{C}$ é um quatérnio se é possível expressá-la da forma

$$\begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Representando este conjunto por H, prove que H é um subanel de $M_2(\mathbb{C})$.

O quatérnio $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ é invertível?

Identificando $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}; j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, mostre que $\alpha \in H$ implica que $\alpha = a.1 + bi + cj + dk$.

3) Determine quais dos subconjuntos abaixo são subcorpos de R

$a)A = \left\{a + b\sqrt{5}; a, b \in \mathbb{Q}\right\}$

$b)B = \left\{x + y\sqrt{2}; x, y \in \mathbb{Z}\right\}$

4) Verifique se a função $f : A \to B$ é ou não é um homomorfismo do anel A no anel B

a) $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{Z}, f(x) = x + 1$

b) $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{Z}, f(x) = 2x$

c) $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, f(x) = (0, x)$

d) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, B = \mathbb{Z}, f(x, y) = x$

e) $A = B = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, f(x, y) = (y, x)$

f) $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{Z}_4, f(x) = \overline{x}$

g) $A = B = \mathbb{C}, f(a + bi) = a - bi$

5) Determine o núcleo dos homomorfismos do exercício 4.

6) Dado $f : \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R})$ dado por $f(a+bi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$. Mostre que f é um homomorfismo injetor de anéis.

7) Verifique se são ideais

a) $\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$ em $\mathbb{Z}_{6;}$

b) $m\mathbb{Z}$ em $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, com $m \in \mathbb{Z}$.

8) Construa a tábua do anel quociente A/I

a) $A = \mathbb{Z}$ e $I = \langle 2 \rangle$

b) A é um anel qualquer e $I = A$

c) $A = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ e $I = \mathbb{Z}_2 \times 2\mathbb{Z}$

d) $A = \mathbb{Z}_6$ e $I = \langle \overline{2} \rangle$

e) $A = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ e $I = \langle (\overline{1}, \overline{0}) \rangle$

f) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e $I = 2\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$

9) Determine o polinômio de grau 3 cujas raízes são 1,2,3, supondo que $p(1/2) = -15/8$.

10) Seja f uma função real definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ para todo $x \in R$, com $a, b, c, d \in R$. Se $f(x) = 0$ para todo x do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, calcule $f(6)$.

11) Sejam A um anel de integridade e $f, g \in A[x]$ tal que $\partial(f+g) = 5$ e $\partial(f-g) = 2$. Determine $\partial(f.g)$; $\partial(f^2 - g^2)$ e $\partial(f^2 + g^2)$.

12) Determine os polinômios f de grau 3 sobre $\mathbb{R}$ tais que

$$f(x) - f(x-1) = x^2$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

13) Qual o quociente e o resto na divisão de $f(x) = x^3 - 1$ por $g(x) = x + 3$.

14) Quais são as raízes inteiras de $f(x) = x^3 + 4x^2 + 2x - 4$.

15) Resolva a equação $2x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 4x + 3 = 0$.

16) Seja $f \in \mathbb{Z}[x]$ o polinômio definido por $f(x) = -x^3 + 4x^2 + 7x - 10$. Decomponha f em um produto de fatores de grau 1, todos pertencentes a $\mathbb{Z}[x]$.