UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS

CENTRO DE ENGENHARIAS

CÁLCULO 1

LISTA 2 – FUNÇÕES CONTÍNUAS E DERIVADAS

FUNÇÕES CONTÍNUAS

I. Esboce o gráfico da função, informe os pontos de descontinuidades e as assíntotas (verticais ou horizontais) se houver:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x-3} & se\ x \neq 3 \\ 1 & se\ x = 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{(x\ -1)^2}$

d) $f(x) = \dfrac{4x - x^2}{x}$

e) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x + 2}$

f) $f(x) = \begin{cases} x & ,se\ \ x < 1 \\ 2 & ,se\ \ x = 1 \\ 2x - 1 & ,se\ \ x > 1 \end{cases}$

g) $f(x) = \dfrac{8}{(x-10)^2}$

h) $f(x) = \dfrac{1}{2(x+1)}$

i) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

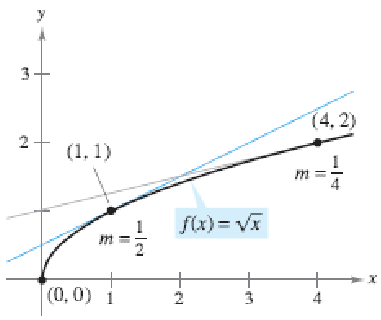
j) $f(x) = \dfrac{x^2+2x-8}{x^2-4}$

k) $f(x) = -1\dfrac{3}{x-2}$

l) $f(x) = \begin{cases} x+1 & se\ x \leq 0 \\ x^2+1 & se\ x > 0 \end{cases}$

DERIVADAS

II. a) Calcule $f'(x)$ a partir da definição de derivada, sendo $f(x) = \sqrt{x}$. Então, determine a declividade do gráfico de $f(x)$ nos pontos (1,1) e (4,2).



II. b) Se $s = s(t)$ é a função posição de um objeto movendo sobre uma linha reta, a velocidade do objeto no tempo *t* é dada por:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t)$$

quando,

$s(t) = \dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0$ onde *g* é a aceleração da gravidade, v_0 a velocidade inicial do objeto e s_0 a altura inicial do objeto. Assim, a partir dos dados acima, use a derivada para resolver o problema abaixo:

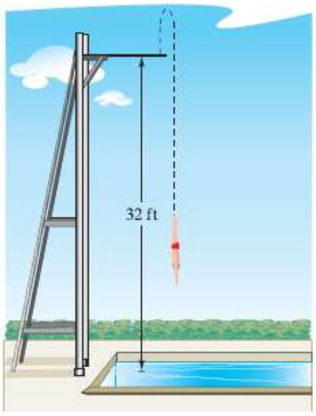
No tempo t=0, um esportista de salto ornamental está sobre uma plataforma a 32 pés acima da superfície da água, conforme a figura ao lado. A posição do saltador é dada por

$$s(t) = -16t^2 + 16t + 32$$

onde s é medido em pés e t em segundos.

a) Quanto tempo levará o saltador para tocar a água?

b) Qual a velocidade do saltador no momento do impacto?



III. Utilizando regras de derivação, calcule a derivada das seguintes funções abaixo:

1) $y = \dfrac{1}{2\sqrt[3]{x^2}}$ 2) $y = \dfrac{7}{3x^{-2}}$ 3) $y = \dfrac{7}{(3x)^{-2}}$ 4) $g(x) = -\dfrac{x^4}{2} + 3x^3 - 2x$

5) $f(x) = \dfrac{4x^3 + 3x^2}{x}$ 6) $f(x) = \sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x}$ 7) $y = \dfrac{5x-2}{x^2+1}$ 8) $y = \dfrac{-3(3x-2x^2)}{7x}$

9) $h(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^3+1}$ 10) $h(t) = \sqrt{t}(1-t^2)$ 11) $h(x) = (3x-2x^2)(5+4x)$ 12) $f(x) = x^{-3} + \dfrac{1}{x^7}$

13) $g(x) = (3x^2+6)\left(2x - \dfrac{1}{4}\right)$ 14) $f(x) = -\dfrac{1}{3}(x^7 + 2x - 9)$ 15) $y = x + \cos x$ 16) $y = \tan x$

17) $y = x\sec x$ 18) $y = \dfrac{1-\cos x}{senx}$ 19) $y = 2x\cos x - 2senx$ 20) $y = 3x^2 senx$

21) $y = \ln x^3$ 22) $y = x^3 \ln x$ 23) $y = \ln(senx)$ 24) $y = \log_{10}(3x^2+2)^5$

25) $f(x) = xe^x$ 26) $y = e^{2x-1}$ 27) $y = e^{-\frac{3}{x}}$ 28) $y = e^x \ln x$ 29) $y = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

IV. Utilize a regra da cadeia para resolver as derivadas das funções dadas abaixo:

1) $y = (5x-8)^4$ 2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ 3) $y = \sqrt{x^3 - 7}$ 4) $g(x) = 3(4-9x)^4$

5) $y = \sqrt[3]{6x^2+1}$ 6) $y = 2\sqrt[4]{9-x^2}$ 7) $f(x) = x^2(x-2)^4$ 8) $g(x) = \left(\dfrac{x+5}{x^2+2}\right)^2$

9) $f(x) = ((x^2+3)^5 + x)^2$ 10) $f(x) = (3x-2x^2)^3$ 11) $g(t) = \dfrac{-7}{(2t-3)^2}$ 12) $y = e^{sen\,x}$

V. Resolva as seguintes indeterminações, utilizando a regra de L'Hôpital:

1) $\lim\limits_{x\to 0} (1+3x)^{1/(2x)}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{senx}{2x}$ 3) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-5x+2}{5x^2-7x-6}$

4) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-x-12}{x^2-3x-4}$ 5) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x+\ln x}{x^3-3x+2}$ 6) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - senx}{x^3}$ 8) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}$ 9) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$

VI. A partir da *f(x)* dada abaixo, analise os pontos de inflexão, máximos e mínimos e discuta sobre a concavidade do gráfico da função.

1) $f(x) = x^2 - x + 5$ 2) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2}$ 3) $f(x) = x\sqrt{x-5}$

RESPOSTAS

I. a) contínua b)não contínua em x=3 c)não contínua em x=1 d)não contínua em x=0 e) contínua f)descontínua em x=1 g)10(vertical) h)-1(vertical) i)-1 e 1(verticais) j)-2(vertical) e não contínua em x=2 k)-1(horizontal) e 2(vertical) l)contínua

II. a) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0 \quad f'(1) = \dfrac{1}{2} \quad f'(4) = \dfrac{1}{4}$

II. b) $v(t) = s'(t) = -32t + 16, \quad t = 2s, \quad s'(2) = -48\, feet/s$

III. 1) $y' = -\dfrac{1}{3x^{5/3}}$ 2) $y' = \dfrac{14x}{3}$ 3) $y' = 126x$ 4) $g'(x) = -2x^3 + 9x^2 - 2$ 5) $f'(x) = 8x + 3$

6) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x^{2/3}}$ 7) $y' = \dfrac{-5x^2 + 4x + 5}{(x^2+1)^2}$ 8) $y' = \dfrac{6}{7}$ 9) $h'(t) = \dfrac{(1-5x^3)}{\left[2\sqrt{x}(x^3+1)^2\right]}$

10) $h'(t) = \dfrac{(1-5t^2)}{2\sqrt{t}}$ 11) $h'(x) = -24x^2 + 4x + 15$ 12) $-3x^{-4} - 7x^{-8}$ 13) $18x^2 - \dfrac{3}{2}x + 12$

14) $-\dfrac{1}{3}(7x^6 + 2)$ 15) $y' = 1 - senx$ 16) $y' = \sec^2 x$ 17) $y' = (\sec x)(1 + x\tan x)$

18) $y' = \dfrac{1-\cos x}{sen^2 x}$ 19) $-2x\, senx$ 20) $3x(x\cos x + 2senx)$ 21) $y' = \dfrac{3}{x}$ 22) $y' = x^2(1 + 3\ln x)$

23) $y' = \cot gx$ 24) $y' = \dfrac{30x}{(3x^2+2)\ln 10}$ 25) $f'(x) = e^x(x+1)$ 26) $y' = 2e^{2x-1}$

27) $y' = \dfrac{3e^{-3/x}}{x^2}$ 28) $y' = e^x\left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right)$ 29) $y' = -\dfrac{2(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$

IV. 1) $20(5x-8)^3$ 2) $-\dfrac{1}{2}\sqrt{(x+1)^3}$ 3) $\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3-7}}$ 4) $-108(4-9x)^3$ 5) $\dfrac{4x}{\sqrt[3]{(6x^2+1)^2}}$ 6) $\dfrac{-x}{\sqrt[4]{(9-x^2)^3}}$

7) $2x(x-2)^3(3x-2)$ 8) $\dfrac{-2(x+5)(x^2+10x-2)}{(x^2+2)^3}$ 9) $20x(x^2+3)^9 + 2(x^2+3)^5 + 20x^2(x^2+3)^4 + 2x$

10) $3(3x-2x^2)^2(3-4x)$ 11) $\dfrac{28}{(2t-3)^3}$ 12) $e^{sen\,x}\cos x$

V. 1) 3/2 2) 1/2 3) 3/13 4) 7/5 5) -1/6 6) 0 7)1/6 8)0 9) ∞

VI. 1) $f'(x) = 2x - 1$

$Mínímo: x = 1/2$

$(-\infty, 1/2) = decrescente; \;\; (1/2, +\infty) = crescente;$

2) $f'(x) = \dfrac{-x^2 + 2}{(x^2 + 2)^2}$

$Máximo \;\; e \;\; Mínímo: x = \pm\sqrt{2}$

$(-\infty, -\sqrt{2}) = decrescente; (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = crescente; (\sqrt{2}, +\infty) = decrescente$

3) $f'(x) = \dfrac{x + 2}{2\sqrt{x + 5}}$

$Máximo: x = 10/3$

$(-\infty, 10/3) = crescente; \;\; (10/3, 5) = decrescente;$