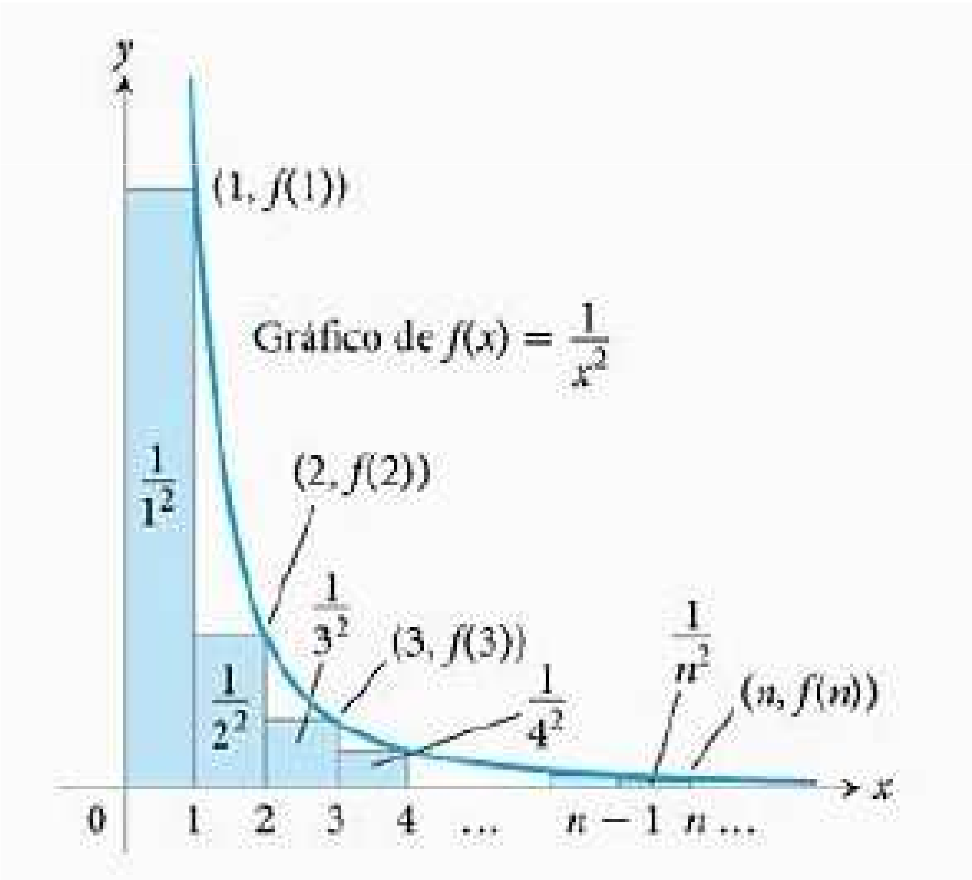
Integrais Triplas

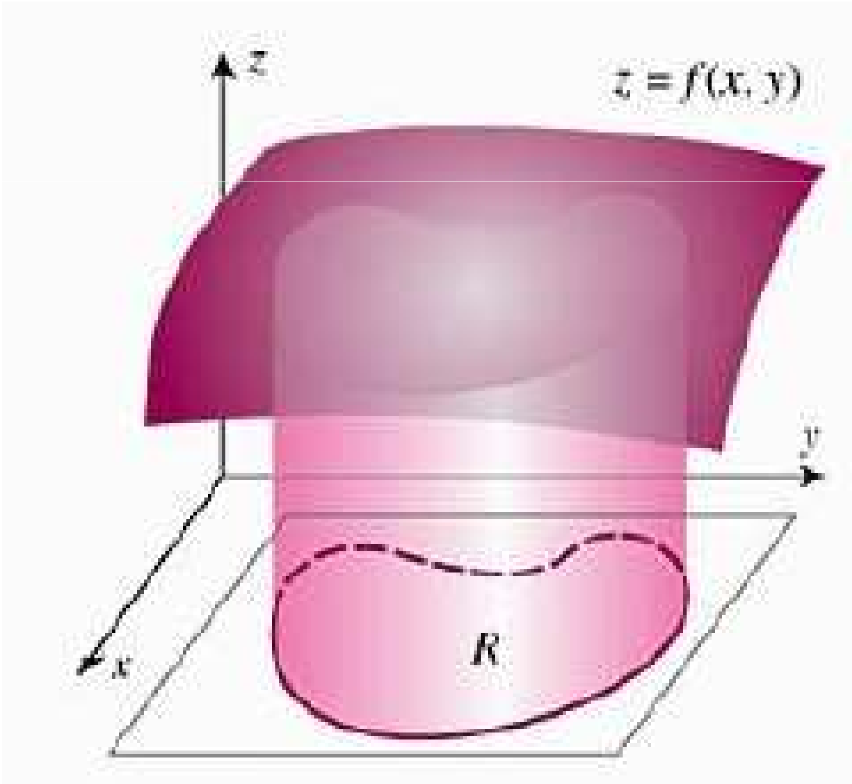
Prof.ª Karin L. B. Simonato

Significado

Uma integral simples de uma função f(x) é definida em um intervalo fechado finito do eixo x.



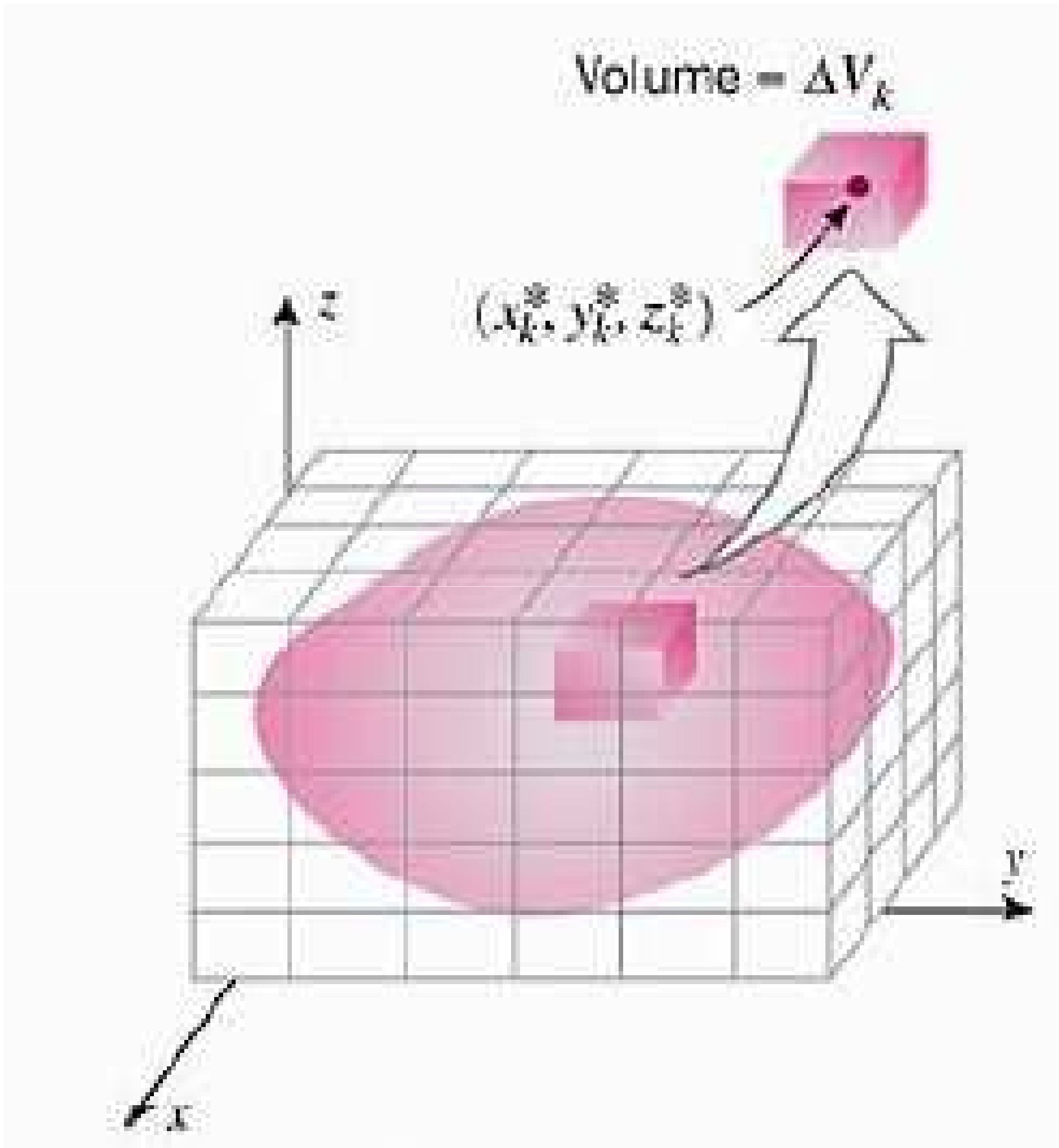
Uma integral dupla de uma função f(x, y) é definida numa região fechada finita R do plano xy.



Uma integral tripla da função $f(x, y, z)$ é definida numa região sólida fechada G de um sistema de coordenadas xyz.

Para assegurar que G não se estenda indefinidamente em alguma direção, vamos supor que ela possa ser abarcada por uma caixa grande, apropriada, cujos lados são paralelos aos planos coordenados.

G é um sólido finito.


Volume = ΔV_k
(x_k^*, y_k^*, z_k^*)
z
y
x

Para definir a integral tripla em G, primeiro dividimos a caixa em n subcaixas por meio de planos paralelos aos planos coordenados. Depois, descartamos as subcaixas que contenham quaisquer pontos fora de G e escolhemos um ponto arbitrário em cada uma das subcaixas restantes.

Denotamos o volume da k-ésima subcaixa restante por ΔVk e o ponto selecionado na k-ésima subcaixa por (xk*, yk*, zk*). Assim, temos o produto f (xk*, yk*, zk*) ΔVk para cada subcaixa.

Somando todos os produtos: $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta V_k$

Repetimos esse processo com cada vez mais subdivisões de tal maneira que o comprimento e a largura e a altura de cada subcaixa tendam para zero e n tenda para +∞.

O limite

$$\iiint_G f(x, y, z)\, dV = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta V_k$$

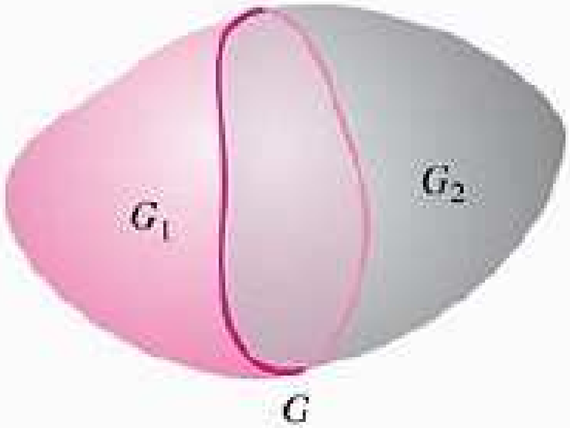
É denominado integral tripla de f(x, y, z) na região G.

Propriedades

$$\iiint_G cf(x,y,z)\,dV = c\iiint_G f(x,y,z)\,dV \quad (c \text{ uma constante})$$

$$\iiint_G [f(x,y,z)+g(x,y,z)]\,dV = \iiint_G f(x,y,z)\,dV + \iiint_G g(x,y,z)\,dV$$

$$\iiint_G [f(x,y,z)-g(x,y,z)]\,dV = \iiint_G f(x,y,z)\,dV - \iiint_G g(x,y,z)\,dV$$



Cálculo de Integrais triplas em caixas retangulares

15.5.1 TEOREMA *Seja G a caixa retangular definida pelas desigualdades*

$$a \le x \le b, \quad c \le y \le d, \quad k \le z \le l$$

Se f for contínua na região G, então

$$\iiint_G f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_c^d \int_k^l f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx \qquad (2)$$

Além disso, a integral iterada do membro direito pode ser substituída por qualquer uma das outras cinco integrais iteradas resultantes da alteração da ordem de integração.

Existem 6 ordens de integração possíveis:

$dx\,dy\,dz$, $dy\,dz\,dx$, $dz\,dx\,dy$,
$dx\,dz\,dy$, $dz\,dy\,dx$, $dy\,dx\,dz$

Exemplo

▶ Exemplo 1 Calcule a integral tripla

$$\iiint_G 12xy^2z^3\,dV$$

na caixa retangular G definida pelas desigualdades $-1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 3$, $0 \leq z \leq 2$.

Solução Dentre as seis possíveis integrais iteradas que podemos usar, escolhemos a que aparece em (2). Assim, primeiro integramos em relação a z, mantendo x e y fixados, depois em relação a y, mantendo x fixado e, finalmente, em relação a x.

$$\begin{aligned}\iiint_G 12xy^2z^3\,dV &= \int_{-1}^{2}\int_0^3\int_0^2 12xy^2z^3\,dz\,dy\,dx \\ &= \int_{-1}^{2}\int_0^3 \left[3xy^2z^4\right]_{z=0}^{2} dy\,dx = \int_{-1}^{2}\int_0^3 48xy^2\,dy\,dx \\ &= \int_{-1}^{2}\left[16xy^3\right]_{y=0}^{3} dx = \int_{-1}^{2} 432x\,dx \\ &= 216x^2\Big]_{-1}^{2} = 648\end{aligned}$$

Exercícios

1-8 Calcule a integral iterada.

1. $\int_{-1}^{1} \int_{0}^{2} \int_{0}^{1} (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$

2. $\int_{1/3}^{1/2} \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{1} zx \operatorname{sen} xy\, dz\, dy\, dx$

3. $\int_{0}^{2} \int_{-1}^{y^2} \int_{-1}^{z} yz\, dx\, dz\, dy$

4. $\int_{0}^{\pi/4} \int_{0}^{1} \int_{0}^{x^2} x \cos y\, dz\, dx\, dy$

5. $\int_{0}^{3} \int_{0}^{\sqrt{9-z^2}} \int_{0}^{x} xy\, dy\, dx\, dz$

6. $\int_{1}^{3} \int_{x}^{x^2} \int_{0}^{\ln z} xe^y\, dy\, dz\, dx$

7. $\int_{0}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{-5+x^2+y^2}^{3-x^2-y^2} x\, dz\, dy\, dx$

8. $\int_{1}^{2} \int_{z}^{2} \int_{0}^{\sqrt{3}y} \frac{y}{x^2 + y^2}\, dx\, dy\, dz$